ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΑΝΑΘΕΣΗ ΑΔΕΙΩΝ ΙΠΤΑΜΕΝΟΥ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

υπό

ΡΙΖΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ

ΤΣΙΑΤΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ

Διπλωματική Εργασία

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2021

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΑΝΑΘΕΣΗ ΑΔΕΙΩΝ ΙΠΤΑΜΕΝΟΥ ΠΡΟΣΩΠΙΚΟΥ ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Διπλωματική εργασία των Ρίζου Παναγιώτη & Τσιατά Παναγιώτη

Επιβλέπων καθηγητής: Κοζανίδης Γεώργιος

Τριμελής εξεταστική επιτροπή

1ο Μέλος

Γεώργιος Κοζανίδης

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

2ο Μέλος

Δημήτριος Παντελής

Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

3ο Μέλος

Γεώργιος Λυμπερόπουλος

Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μας εργασίας, κύριο Γεώργιο Κοζανίδη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μας προσέφερε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης και συγγραφής της διπλωματικής μας εργασίας. Επιπροσθέτως, επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε τους καθηγητές Παντελή Δημήτριο και Λυμπερόπουλο Γεώργιο που όντας μέλη της εξεταστικής επιτροπής αφιέρωσαν χρόνο στην μελέτη της εργασίας μας. Τελειώνοντας, θα ήταν παράλειψη μας αν δεν ευχαριστούσαμε με θέρμη τις οικογένειες και τους φίλους μας που στάθηκαν δίπλα μας κατά τη διάρκεια τόσο της διπλωματικής μας εργασίας, όσο και καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μας στο πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Ρίζος Παναγιώτης

Τσιατάς Παναγιώτης

Περίληψη

Ένας εκ των πλέον αναπτυσσόμενων κλάδων παγκοσμίως στην εποχή που ζούμε είναι αυτός των αερομεταφορών. Με την πάροδο των χρόνων, η ανάπτυξη του συγκεκριμένου κλάδου είναι ιδιαίτερα μεγάλη, καθώς το αεροπλάνο γίνεται όλο ένα και συχνότερο μέσο μεταφοράς για τον σύγχρονο άνθρωπο. Βέβαια, αυτή η εξέλιξη φέρνει όλο ένα και περισσότερα ζητήματα όσον αφορά την εύρυθμη λειτουργία του συγκεκριμένου κλάδου. Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που η κάθε αεροπορική εταιρία καλείται να επιλύσει είναι αυτό της βέλτιστης και δίκαιης ανάθεσης αδειών στο προσωπικό της.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, παρουσιάζουμε ένα τρόπο επίλυσης για το προαναφερθέν πρόβλημα που συνδυάζει τις μεθόδους column generation και branch and price. Χρησιμοποιούμε αυτές τις μεθόδους διότι υπάρχει μια πληθώρα παραγόντων που συντελούν στην επίλυση του συγκεκριμένου ζητήματος με αυτόν τον τρόπο. Καταρχάς, ο βασικότερος εκ των παραγόντων είναι το κόστος που επιβάλλεται στις αεροπορικές εταιρίες σε περίπτωση που δεν εξαντλήσουν οι ιπτάμενοι το σύνολο των ημερών που δικαιούνται ως άδεια. Ακολούθως, σημαντικό ρόλο παίζουν και οι προτιμήσεις που έχει ο κάθε ιπτάμενος όσον αφορά τις ημέρες που θα πάρει άδεια κατά τη διάρκεια της εκάστοτε χρονικής περιόδου. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι προτιμήσεις αυτές κάποιες φορές ικανοποιούνται πλήρως, ενώ σε κάποιες άλλες περιπτώσεις υφίστανται κάποιες αλλαγές. Τέλος, σε όλη αυτή τη διαδικασία καίριο λόγο διαδραματίζει η αρχαιότητα που έχει ο κάθε υπάλληλος στην εκάστοτε αεροπορική εταιρία, η οποία του δίνει προτεραιότητα σε σχέση με τους συναδέλφους του.

Χρησιμοποιώντας το κατάλληλο μοντέλο βελτιστοποίησης το οποίο αναπτύξαμε σε κώδικα της γλώσσας προγραμματισμού C και πραγματοποιώντας πληθώρα πειραμάτων καταλήξαμε σε κάποια συμπεράσματα σχετικά με την προαναφερθείσα μεθοδολογία.

Abstract

In our contemporary days, aircraft industry is one of the most developing industries in the world. In the course of time, the development of air transport is particularly great since the airplane is increasingly being used by the modern man. Of course, this development brings more and more issues regarding the function of this industry. One of the most important problems that each airline has to deal with is that of the optimal and fair distribution of leave days to its employees.

In this dissertation we are going to present a solution to the mentioned problem which combines the methods of column generation and branch and price. Many factors have led us to deal with this problem in this way. First of all, the cost that the airline has to pay in case the aircrew does not take the full leave entitlement. Additionally, the preferences that each employee has, regarding his leave days, also play important role. As we are going to see in the following chapters, these preferences are sometimes completely satisfied, but in most cases they have to undergo alterations. Finally, during this process, the key factor is the seniority of each employee which gives him priority over his colleagues.

Using an appropriate optimization model written in language C and conducting a plethora of experiments, we came to some conclusions regarding the aforementioned method.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή 1

1.1 Κίνητρο 1

1.2 Σκοπός 1

1.3 Δομή 2

Κεφάλαιο 2:Αεροπορικές Εταιρίες 3

2.1 Η πορεία του κλάδου με την πάροδο των χρόνων 3

2.2 Ο ρόλος της επιχειρησιακής έρευνας στον κλάδο των αερομεταφορών 5

2.3 Διαχείριση αδειών ιπτάμενου προσωπικού 6

Κεφάλαιο 3:Ανάλυση Μεθόδων 8

3.1 Column Generation 8

3.2 Branch and Bound 9

3.3 Branch and Price 10

Κεφάλαιο 4: Πρώτο μέρος του προβλήματος, Ανάθεση αδειών σύμφωνα με τις προτιμήσεις του προσωπικού 12

4.1 Ανάλυση του προβλήματος 12

4.2 Ο κώδικας του προβλήματος ανάθεσης 14

Κεφάλαιο 5 : Δεύτερο μέρος του προβλήματος, Ανάθεση αδειών σύμφωνα με τις υπολειπόμενες ημέρες άδειας που έχει ο κάθε ιπτάμενος 16

5.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος 16

5.2 Ο κώδικας του προβλήματος 18

5.3 Σύντομο παράδειγμα επάνω στη μεθοδολογία 21

Κεφάλαιο 6 : Ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα πάνω στον κώδικα 25

6.1 Τα δεδομένα του παραδείγματος 25

6.2 Διαδικασία επίλυσης 26

6.3 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων 32

Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα και προτάσεις 33

7.1 Συμπεράσματα 33

7.2 Προτάσεις 34

Βιβλιογραφία-Πηγές 35

Παράρτημα 36

Α. Υπολογιστικό παράδειγμα 36

Το αρχικό πρόβλημα 40

Μορφή του sub-problem 44

Οι δεκαδικές μεταβλητές 48

Η τελική μορφή 49

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2.1 : Η επιβατική κίνηση τακτικών αεροπορικών εταιρειών σε επιβατοχιλιόμετρα ανά περιοχή, 1985-2004 4
Πίνακας 5.1 Αποτελέσματα column generation sub-problem 23
Πίνακας 5.2 Τελική ανάθεση αδειών 24
Πίνακας 6.1 Υπολειπόμενες ημέρες άδειας μετά τη διαδικασία των Bids 27
Πίνακας 6.2 Πίνακας αποτελεσμάτων sub-problem 30
Πίνακας 6.3 Τελική βέλτιστη λύση 32
Πίνακας A.1 Entitlement 36
Πίνακας A.2 Επιθυμίες των ιπταμένων 37
Πίνακας A.3 Δεκαδικές τιμές των μεταβλητών απόφασης 48

Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 2.1 Πρώτη πτήση με αεροπλάνο των αδερφών Ράιτ..4
Εικόνα 3.1 Column generation sub-problem..9
Εικόνα 3.2 Κόμβοι και διακλαδώσεις ενός δέντρου B&B..10
Εικόνα 3.3 Απεικόνιση της μεθόδου Branch and Price...11
Εικόνα 4.1 Φόρμα συμπλήρωσης αιτούμενων αδειών 12
Εικόνα 4.2 Απεικόνιση ανάθεσης σύμφωνα με τον αμερικάνικο τρόπο (strict seniority) 13
Εικόνα 4.3 Απεικόνιση ανάθεσης σύμφωνα με τον ευρωπαϊκό τρόπο (fair priority)..14
Εικόνα 5.1 Προσθήκη κόμβων στο δίκτυο για την απαγόρευση μονοπατιών............21
Εικόνα 5.2 Χαλαρωμένη μορφή του αρχικού προβλήματος.......................................22
Εικόνα 5.3 Μορφή προβλήματος μετά το LP Cover..24
Εικόνα 6.1 Αποτελέσματα μετά την διαδικασία των bids..27
Εικόνα 6.2 Απεικόνιση του Initmaster..28
Εικόνα 6.3 Απεικόνιση του column generation sub problem......................................29
Εικόνα 6.4 Τελική μορφή του προβλήματος 31
Εικόνα A.1 Αναθέσεις μετά την διαδικασία των Bids...38
Εικόνα A.2 Ημέρες που ανατίθενται στον κάθε ιπτάμενο(1).......................................38
Εικόνα A.3 Ημέρες που ανατίθενται στον κάθε ιπτάμενο (2)......................................39
Εικόνα A.4 Πορεία της επίλυσης..43
Εικόνα A.5 Μορφή του sub-problem..47
Εικόνα A.6 Τελική μορφή του προβλήματος..52

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο

Ο κλάδος των αερομεταφορών είναι ένας εκ των πιο εξελισσόμενων κλάδων τη σημερινή εποχή και αυτό ήταν το μεγαλύτερο κίνητρο για εμάς όσον αφορά την παρούσα διπλωματική εργασία. Η επιχειρησιακή έρευνα αποτελεί μείζων παράγοντα για την πρόοδο και ανάπτυξη του συγκεκριμένου κλάδου. Η ανάγκη για εξέλιξη και πρωτοπορία έκανε την κάθε εταιρία να στρέφεται στα διάφορα μοντέλα βελτιστοποίησης που αναπτύσσονται συνεχώς. Οι αεροπορικές εταιρίες είναι εταιρίες που στηρίζονται τόσο στις διαπροσωπικές σχέσεις όσο και σε σχέσεις εμπιστοσύνης μεταξύ του ιπτάμενου προσωπικού και των πελατών τους. Συνεπώς, όσο πιο ικανοποιημένοι είναι οι εργαζόμενοι από την εκάστοτε εταιρία τόσο πιο αποδοτικοί θα είναι στη δουλεία τους και θα προσφέρουν το μέγιστο δυνατό κέρδος σε αυτή. Κάπου εδώ ξεκινάνε να διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Ιδιαίτερα, ο ολοκληρωμένος έλεγχος των προτιμήσεων για άδειες και ο δίκαιος καταμερισμός τους στο ιπτάμενο προσωπικό με όσο το δυνατόν πιο χαμηλό κόστος ήταν αυτά που μας έδωσαν ώθηση για να ξεκινήσουμε την έρευνα για την πτυχιακή μας εργασία. Προκειμένου λοιπόν, να πραγματοποιηθούν οι παραπάνω λειτουργίες με τον βέλτιστο τρόπο δημιουργήθηκε ένας κώδικας βελτιστοποίησης.

1.2 Σκοπός

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ένα μείζον θέμα που αντιμετωπίζουν οι αεροπορικές εταιρίες είναι η εύρεση του βέλτιστου τρόπου ανάθεσης αδειών στο ιπτάμενο προσωπικό. Στο πλαίσιο αυτό, μέσω της παρούσας διπλωματικής εργασίας, επιχειρείται η επίλυση του ζητήματος αυτού. Ειδικότερα, υπό την προϋπόθεση ότι τα μέλη της εκάστοτε εταιρίας έχουν τη δυνατότητα να εκφράσουν τις προτιμήσεις τους σχετικά με τις ημέρες αδειών που δικαιούνται συμπληρώνοντας μια ειδική φόρμα, γίνεται προσπάθεια ελέγχου των αιτημάτων και αποδοχής ή απόρριψής τους με βάση την πολιτική που ακολουθεί η κάθε εταιρία αλλά και παράγοντες εφικτότητας.

Στην συνέχεια, κατασκευάζεται κατάλληλο μοντέλο βελτιστοποίησης με στόχο την ανάθεση των ημερών αδείας των ιπταμένων που δεν διατέθηκαν μέσω των προτιμήσεών τους. Αιτία για την κατασκευή ενός τέτοιου είδους μοντέλου αποτελεί το κόστος που καλείται να πληρώσει μια αεροπορική εταιρία για κάθε έναν υπάλληλο ο οποίος δεν εξαντλεί τις συνολικές μέρες που του αναλογούν. Και σε αυτό το στάδιο οι άδειες που δίνονται θα πρέπει να πληρούν τις προϋποθέσεις οι οποίες καθιστούν την ανάθεση εφικτή. Με γνώμονα την υπάρχουσα βιβλιογραφία και τα μοντέλα που έχουν ήδη αναπτυχθεί στον τομέα τις Επιχειρησιακής Έρευνας, κρίνεται κατάλληλος ένας συνδυασμός των μεθόδων branch and price και column generation ο οποίος οδηγεί τελικά στην επίλυση του προβλήματος που αναλύεται.

1.3 Δομή

Ξεκινώντας, στο 2^{ο} κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μια ιστορική αναδρομή επάνω στον κλάδο των αεροπορικών εταιριών και στην πρώτη πτήση που πραγματοποιήθηκε με αεροσκάφος από τον ο Όρβιλ Ράιτ. Επίσης, στη συνέχεια του κεφαλαίου αναφερόμαστε στην εφαρμογή της επιχειρησιακής έρευνας στον κλάδο και στους κανόνες που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της. Ακολούθως, μεταβαίνουμε στο 3^{ο} κεφάλαιο στο οποίο γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση πάνω στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος, column generation, branch and bound και branch and price. Στην 4^{η} ενότητα γίνεται μια ανάλυση της αρχικής διαδικασίας που ακολουθείται για τον καταμερισμό των αδειών σύμφωνα με τις προτιμήσεις των ιπταμένων καθώς και μια αναφορά σε πληροφορίες για την κατασκευή του κώδικα. Επιπρόσθετα, όσον αφορά το 5^{ο} κεφάλαιο, αναλύεται η διαδικασία ανάθεσης των υπολοίπων ημερών άδειας για τα μέλη ως μαθηματικό πρόβλημα μοντελοποίησης και ως κώδικας προγραμματισμού και δίνεται ένα σύντομο παράδειγμα απομονώνοντας την ανάθεση βάσει των προτιμήσεων του προσωπικού. Τελειώνοντας, στην 6^{η} ενότητα αναλύεται ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα για τη συνολική διαδικασία. Στην 7^{η} και τελευταία ενότητα, δίνονται συμπεράσματα και κάποιοι μελλοντικοί στόχοι όσον αφορά την εργασία μας και την εξέλιξή της.

Κεφάλαιο 2:Αεροπορικές Εταιρίες

2.1 Η πορεία του κλάδου με την πάροδο των χρόνων

Το τεχνολογικό θαύμα που ονομάζεται αεροσκάφος ξεκίνησε την πορεία του στις 17 Δεκεμβρίου του 1903 στις ΗΠΑ όπου οι αδερφοί Ράιτ πραγματοποίησαν την πρώτη απολύτως ελεγχόμενη πτήση μηχανοκίνητου αεροπλάνου. Παρότι διήρκησε μόλις 12 δευτερόλεπτα ήταν ικανή για να αλλάξει τη λογική των μεταφορών για πάντα. Το αεροπλάνο που κατασκευάστηκε ονομαζόταν Flyer 1 (Αεροπόρος 1), ήταν φτιαγμένο από ξύλο και ζύγιζε 341 κιλά μαζί με τον πιλότο. Το μήκος του ήταν 6.5 μέτρα και το άνοιγμα των φτερών του 12.3 μέτρα. Η πρώτη απόπειρα πτήσης έγινε στις 14 Δεκεμβρίου από τον Γουίλμπερ Ράιτ, η οποία όμως ήταν αποτυχημένη. Στις 17 Δεκεμβρίου, 3 ημέρες μετά, ο άλλος αδερφός, ο Όρβιλ Ράιτ απογείωσε το αεροπλάνο αυτοδύναμα και μετά από 12 δευτερόλεπτα το προσγείωσε κανονικά με αποτέλεσμα να ολοκληρώσει επιτυχημένα την πτήση.

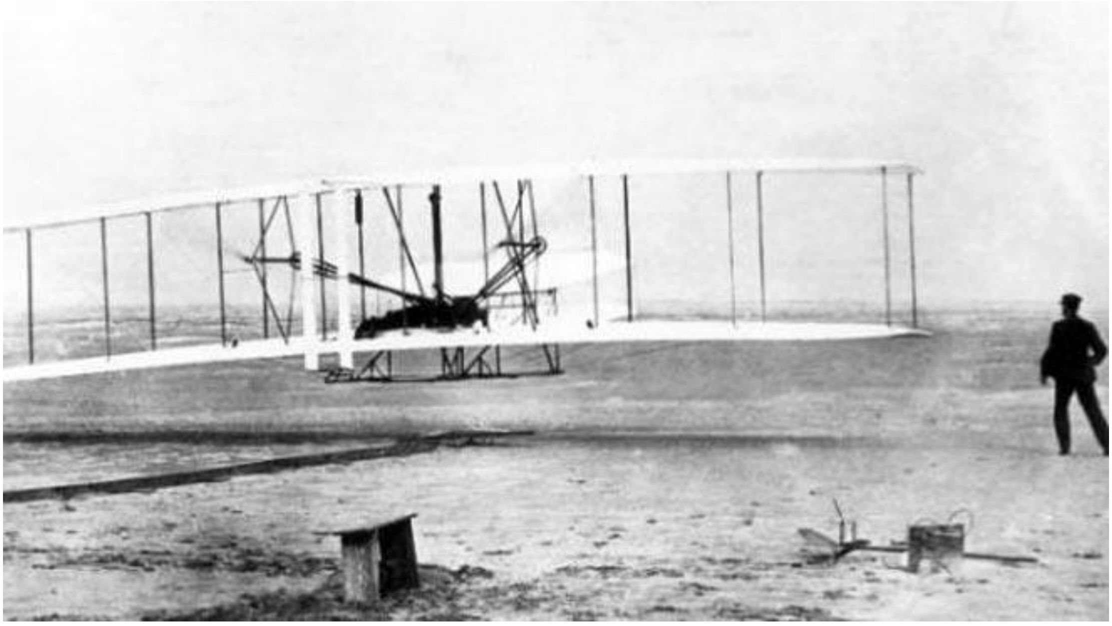
Εν συνέχεια, το 1918 άρχισαν στις ΗΠΑ να χρησιμοποιούν το αεροπλάνο για μεταφορά δεμάτων ταχυδρομείου ενώ το 1925 με τη νομοθετική πράξη Kelly το κράτος θέλησε να εντάξει ιδιωτικές εταιρίες στον τομέα των αερομεταφορών. Εδώ θα ήταν σκόπιμο να αναφερθεί πως τα έσοδα από τις αποστολές δεμάτων χρησιμοποιήθηκαν ως κινητήριος μοχλός για την παροχή υπηρεσιών μεταφοράς επιβατών από το κράτος προς τις ιδιωτικές εταιρίες. Με την πορεία των χρόνων και ενώ δεν υπήρχε κάποια σπουδαία πρόοδος στον κλάδο φτάνουμε στο 1940 και τον Β’ Παγκόσμιο Πόλεμο, ο οποίος αναπάντεχα παρείχε μεγάλη ώθηση για την ανάπτυξη των αεροσκαφών. Μετά το τέλος του πολέμου, στο τέλος της δεκαετίας του 1950, άρχισε η παροχή υπηρεσιών από αεροσκάφη χωρίς έλικες, από αεριωθούμενα. Τα αεροσκάφη αυτά παρείχαν μεγαλύτερη άνεση, αυτονομία και ταχύτητα στις πτήσεις τους. Ακολούθως, το 1960, ξεκίνησαν τα πρώτα τακτικά δρομολόγια στο βορειοανατολικό τμήμα των ΗΠΑ από τις Eastern Airlines (Ανατολικές αερογραμμές) μέσω των οποίων μπορούσε ο απλός κόσμος να πραγματοποιήσει κανονικά πτήση με αεροπλάνο. Το 1970 η βιομηχανία των αεροσκαφών έφερε τα αεροσκάφη 747 και DC-10 τα οποία αύξησαν την χωρητικότητα των επιβατών σε 400.

Επιπροσθέτως, με την πάροδο των χρόνων ο κλάδος συνέχισε να αναπτύσσεται και όλο ένα και περισσότερες εταιρίες εντάσσονταν σε αυτόν. Μεταξύ του 1945 και του 2000 αυξήθηκε το ποσοστό των ανθρώπων που χρησιμοποιούν το αεροπλάνο περίπου 12%, ενώ μεταξύ του 1960 και του 2000 περίπου 9%. Όμως, είναι γεγονός πως η πρόοδος δεν σημειώθηκε στον ίδιο βαθμό σε όλα τα μέρη του κόσμου. Η ανάπτυξη του κλάδου στην Αμερική και στην Ευρώπη ήταν εμφανώς μεγαλύτερη σε σχέση με αυτή της Αφρικής και της Μέσης Ανατολής όπως θα δείτε και στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 2.1 : Η επιβατική κίνηση τακτικών αεροπορικών εταιρειών σε επιβατοχιλιόμετρα ανά περιοχή, 1985-2004

Περιοχή καταχώρησης αεροπορικής εταιρείας	Επιβατοχιλιόμετρα τακτικών αεροπορικών εταιρειών					
	1985		2000		2004	
	Δισεκατομ.	Σύνολο (%)	Δισεκατομ.	Σύνολο (%)	Δισεκατομ.	Σύνολο (%)
Αφρική	36,7	2,7	66,4	2,2	75,2	2,2
Ασία/Ειρηνικός	222,3	16,3	735,5	24,4	903,7	26,3
Ευρώπη	428,2	31,3	801,4	26,6	919,9	26,8
Μέση Ανατολή	42,7	3,1	93,8	3,1	148,3	4,3
Βόρεια Αμερική	569,2	41,6	1175,7	39,0	1247,3	36,2
Λατινική Αμερική/Καραϊβική	68,3	5,0	141,8	4,7	147,3	4,3

Τελειώνοντας, φτάνουμε στο σήμερα όπου παραπάνω από 18000 αεροσκάφη κινούνται μεταξύ 10000 περίπου αεροδρομίων. Σχεδόν 28 εκατομμύρια άνθρωποι απασχολούνται στον συγκεκριμένο τομέα και ο ετήσιος τζίρος αγγίζει τα 260 δισεκατομμύρια δολάρια. Επιπλέον, αξιοσημείωτο είναι και το γεγονός ότι πάνω από 1.6 δισεκατομμύρια άνθρωποι σε όλο τον κόσμο το χρησιμοποιούν σαν μέσο μεταφοράς ετησίως. Πέρα όμως από το ανθρώπινο μέσο μεταφοράς άξιο αναφοράς είναι και ότι το 30-40% του συνολικού φορτίου σε αξία μεταφέρεται μέσω αεροπλάνων με αποτέλεσμα να είναι ένα εκ των κύριων μέσων μεταφοράς δεμάτων.



Εικόνα 2.1 Πρώτη πτήση με αεροπλάνο των αδερφών Ράιτ

2.2 Ο ρόλος της επιχειρησιακής έρευνας στον κλάδο των αερομεταφορών

Παράλληλα με την άνθιση του κλάδου των αερομεταφορών, εξελίσσεται και ο τομέας της επιχειρησιακής έρευνας ώσπου οι δύο αυτές έννοιες συναντιούνται. Αιτία για το γεγονός αυτό αποτελεί η παρατήρηση από πλευράς των αεροπορικών εταιριών πως τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν είναι κοινά. Παραδείγματος χάριν, οι εταιρίες οφείλουν να κατασκευάσουν το κατάλληλο πρόγραμμα πτήσεων για το επιβατικό κοινό και για τα εμπορεύματα, να αναθέσουν προσωπικό σε κάθε πτήση και να επιλύσουν μια σειρά παρόμοιων προβλημάτων τα οποία θα αναλυθούν εκτενέστερα παρακάτω. Καίριο ρόλο στην αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων διαδραματίζει η επιχειρησιακή έρευνα η οποία κατορθώνει μέσω της ανάπτυξης των αλγορίθμων της και των διαφόρων μεθόδων βελτιστοποίησης να δίνει λύσεις στα πολύπλοκα αυτά ζητήματα. Παρόλο που ορισμένες αεροπορικές εταιρίες είχαν ήδη εντάξει στο οπλοστάσιο τους και χρησιμοποιούσαν την επιχειρησιακή έρευνα (οι British European Airways και United Airlines διέθεταν το ανάλογο τμήμα από το 1954) μια πιο οργανωμένη και συνεργατική προσπάθεια έγινε το 1961 με τη δημιουργία του AGIFORS (*Airline Group of International Federation of Operational Research Societies)* ενός οργανισμού που μέχρι σήμερα δραστηριοποιείται στην ανάπτυξη και βελτίωση των μεθόδων της επιστήμης της επιχειρησιακής έρευνας στον χώρο των αερομεταφορών. Μερικά από τα ζητήματα που καλούνται να επιλύσουν οι ερευνητές και καταφεύγουν στα μοντέλα βελτιστοποίησης είναι τα εξής:

- **Καθορισμός του προγράμματος πτήσεων**

  Είναι ιδιαιτέρως σημαντικό να οριστεί αυστηρά η ώρα άφιξης και αναχώρησης του εκάστοτε δρομολογίου καθώς και η συχνότητα με την οποία αυτό θα εκτελείται προκειμένου να γίνεται σωστός συντονισμός (ανάθεση σε αεροπορική πύλη και αεροπορικό διάδρομο, ανεφοδιασμός), με τρόπο τέτοιο ώστε να ικανοποιούνται οι ανάγκες των επιβατών ή να γίνεται έγκαιρη παράδοση των εμπορευμάτων συνυπολογίζοντας την εύρυθμη λειτουργία του αεροδρομίου.

- **Ανάθεση αεροσκάφους σε κάθε πτήση**

  Προκειμένου να ικανοποιείται η ζήτηση των επιβατών αλλά και η άνεση τους με το ελάχιστο δυνατό κόστος, οι αεροπορικές εταιρίες οφείλουν να επιλέξουν το κατάλληλο όσον αφορά την χωρητικότητα αλλά και την ικανότητα του για μακρινά ταξίδια αεροσκάφος.

- **Ανάθεση πτήσεων σε κάθε αεροσκάφος**

  Το πρόγραμμα πτήσεων κάθε αεροπλάνου μιας αεροπορικής εταιρίας θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε το αεροσκάφος να επισκέπτεται τακτικά τους σταθμούς συντήρησης συντελώντας στην ασφάλεια των επιβατών και εκμηδενίζοντας τον κίνδυνο μηχανικής βλάβης.

- **Ανάθεση πληρώματος σε κάθε πτήση**

  Είναι υψίστης σημασίας να προγραμματίζονται σωστά οι πτήσεις που θα πραγματοποιήσει το ιπτάμενο προσωπικό. Από τους κυβερνήτες του αεροσκάφους οι οποίοι δεν θα πρέπει να έχουν πολύωρες και συνεχόμενες εξαντλητικές πτήσεις, έτσι ώστε να είναι απολύτως προσηλωμένοι στην ασφαλή μεταφορά των επιβατών μέχρι τους αεροσυνοδούς οι οποίοι θα πρέπει να είναι έτοιμοι να προσφέρουν στο επιβατικό κοινό μια άνετη και ευχάριστη πτήση. Σε κάθε περίπτωση, οι αεροπορικές εταιρίες οφείλουν να εναρμονίζονται με τα νομοθετικά πλαίσια προσφέροντας στους εργαζομένους τους ικανοποιητικές συνθήκες εργασίας. Στο πρόβλημα της ανάθεσης πληρώματος εντάσσεται και η ανάθεση αδειών στα ιπτάμενα μέλη της, πρόβλημα με το οποίο ασχολείται η παρούσα διπλωματική εργασία και θα αναλυθεί παρακάτω λεπτομερώς.

- **Κοστολόγηση πτήσεων**

  Στην ιδιαίτερη αυτή κατηγορία, το ανάλογο τμήμα της αεροπορικής εταιρίας επωμίζεται το καθήκον της κοστολόγησης πτήσης, της συνεχούς παρακολούθησης και προσπάθειας πρόβλεψης των ζητήσεων και της αναπροσαρμογής των αεροπορικών εισιτηρίων, συνυπολογίζοντας τις αντίστοιχες κινήσεις του ανταγωνισμού, με στόχο την μεγιστοποίηση του καθαρού κέρδους από την κάθε πτήση.

Τα παραπάνω προβλήματα συνήθως επιλύονται με τη σειρά που περιγράφηκαν καθώς τα ζητούμενα του ενός θα αποτελέσουν δεδομένα του άλλου κ.ο.κ. επιτυγχάνοντας τελικά να βελτιστοποιήσουν το σύνολο των διαδικασιών που διέπουν τις αερομεταφορές.

2.3 Διαχείριση αδειών ιπτάμενου προσωπικού

Αποτελεί υποχρέωση και καθήκον μίας αεροπορικής εταιρίας να διατηρεί τους εργαζόμενούς της ευχαριστημένους. Στο πλαίσιο αυτό, οφείλει να παρέχει ένα ικανοποιητικό πακέτο αποδοχών αλλά και κατάλληλες συνθήκες εργασίας συμπεριλαμβανομένων των αδειών τους. Η αδειοδότηση του ιπτάμενου προσωπικού (Vacation Management System, **VMS**) συνιστά, όπως προαναφέρθηκε, ένα εξέχον μέρος του προβλήματος ανάθεσης πληρώματος σε πτήση.

Μία συνήθης πρακτική του προγραμματισμού αδειών που πολλές αεροπορικές εταιρίες υιοθετούν απαρτίζεται από την συμπλήρωση από τους εργαζόμενους ειδικής φόρμας προτιμήσεων στην οποία δηλώνουν τις ημέρες που επιθυμούν να πάρουν άδεια. Στη συνέχεια, ένα κατάλληλο σύστημα επεξεργάζεται τα αιτήματά τους και τους ενημερώνει αν εγκρίνονται με βάση ορισμένους περιορισμούς που σχετίζονται με το δυναμικό της εταιρίας, την πολιτική της αλλά και το σύνολο των ημερών αδείας που δικαιούνται. Οι περιορισμοί που χρησιμοποιήθηκαν στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας περιγράφονται αναλυτικά παρακάτω:

- **Maximum Number of Bids**

  Ο κάθε εργαζόμενος έχει ένα συγκεκριμένο μέγιστο αριθμό προτιμήσεων τις οποίες μπορεί να δηλώσει στη φόρμα ανεξάρτητα από το αν αυτές τελικά θα εγκριθούν.

- **Entitlement**

  Κάθε εργαζόμενος δικαιούται συγκεκριμένο αριθμό ημερών άδειας ο οποίος δεν θα πρέπει να ξεπεραστεί.

- **Limit Lines**

Κάθε εταιρία ανάλογα με τις δραστηριότητες που απαιτούνται, στην προκειμένη περίπτωση πτήσεις, ορίζει ένα μέγιστο όριο εργαζομένων οι οποίοι μπορούν να λείπουν σε άδεια χωρίς να διαταράσσεται η εύρυθμη λειτουργία της. Για να εγκριθεί μία άδεια δεν θα πρέπει να ξεπερνάται το όριο αυτό.

- **Overlapping**

Οι άδειες του κάθε εργαζόμενου θα πρέπει να μην επικαλύπτονται. Ειδικότερα, μια προτίμηση ενός εργαζόμενου απορρίπτεται αυτόματα αν συμπεριλαμβάνει μέρες στις οποίες έχει ήδη πάρει άδεια.

- **Separation Days**

Για να θεωρηθεί μία άδεια εφικτή θα πρέπει να απέχει τουλάχιστον έναν συγκεκριμένο αριθμό ημερών, ο οποίος ορίζεται από την εταιρία, από την προηγούμενη και την επόμενη άδεια που ανατέθηκε στον ίδιο εργαζόμενο.

- **Starting Day of the Block**

Μια εταιρία έχει τη δυνατότητα να ορίσει συγκεκριμένη ημέρα έναρξης των αδειών μέσα στην εβδομάδα. Ο περιορισμός αυτός είναι προαιρετικός και μπορεί να απενεργοποιηθεί από τον διαχειριστή.

- **Block Length**

Τέλος, κάθε εταιρία μπορεί να καθορίσει την διάρκεια που θα έχει το κάθε τμήμα άδειας ορίζοντας έναν αριθμό ημερών. Τελικά, κάθε block άδειας που δίνεται στον εργαζόμενο αποτελείται από όσες μέρες ορίζονται από την εταιρία ή ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού αυτού. Και αυτός ο περιορισμός είναι προαιρετικός και μπορεί να απενεργοποιηθεί.

Μετά τον απαραίτητο έλεγχο και την ανάθεση αδειών που ικανοποιούν τις προτιμήσεις του ιπτάμενου προσωπικού σύμφωνα με το πρότυπο που ακολουθεί η εταιρία, ξεκινά η διαδικασία ανάθεσης των ημερών αδείας που υπολείπονται ώστε τελικά κάθε εργαζόμενος να καλύψει το σύνολο των ημερών που του αναλογούν (Entitlement). Στην διαδικασία αυτή, που συνιστά το μεγαλύτερο μέρος της διπλωματικής εργασίας, χρησιμοποιείται αλγόριθμος βελτιστοποίησης ο οποίος αναλύεται περαιτέρω στα επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 3:Ανάλυση Μεθόδων

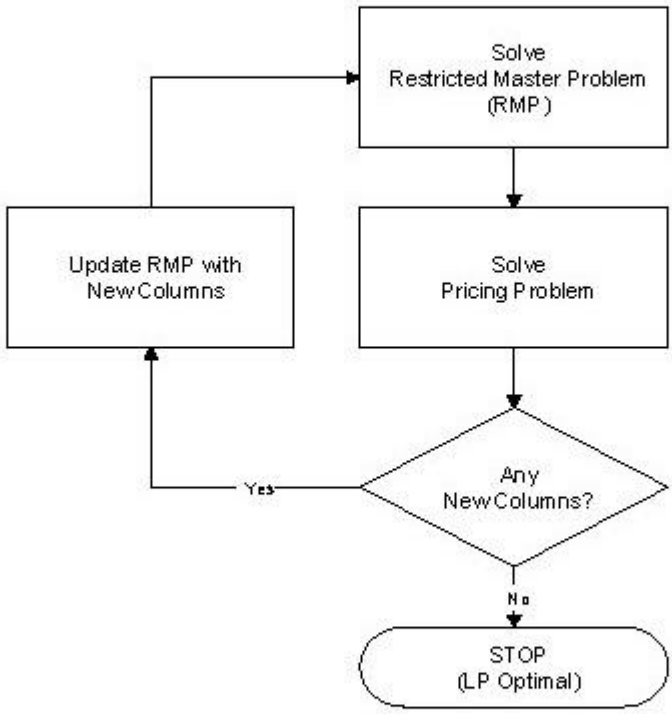
Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρείται μια προσέγγιση των μεθόδων και αλγορίθμων της επιχειρησιακής έρευνας που εφαρμόζονται κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα, για την ανάπτυξη του μοντέλου αδειοδότησης χρησιμοποιείται η Δημιουργία Στηλών (**Column Generation**), ο αλγόριθμος Διακλάδωσης και Φραγμού (**Branch and Bound**) και τέλος η μέθοδος Διακλάδωσης και Τιμολόγησης (**Branch and Price**) η οποία αποτελεί συνδυασμό των παραπάνω.

3.1 Column Generation

Ο αλγόριθμος δημιουργίας στηλών ή Column Generation χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων με μεγάλο πλήθος μεταβλητών απόφασης. Η ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο συνίσταται στο ότι πολλές από τις μεταβλητές απόφασης είναι μη βασικές και επομένως θα πάρουν την τιμή μηδέν και στο γεγονός ότι ένα μικρό κλάσμα του συνολικού αριθμού μεταβλητών απόφασης απαιτείται για να αποδειχθεί η βελτιστότητα μίας λύσης.

Ειδικότερα, σύμφωνα με την μεθοδολογία δημιουργίας στηλών, για την επίλυση ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, του λεγόμενου master problem (**MP**), θεωρούμε αρχικά ένα υποπρόβλημά του, πρόβλημα δηλαδή που περιλαμβάνει ένα υποσύνολο των μεταβλητών απόφασης του master και ονομάζεται restricted master problem (**RMP**). Η βέλτιστη λύση του RMP και η ανακάλυψη των δυαδικών μεταβλητών που συνδέονται με κάθε περιορισμό, μας επιτρέπει να επιλύσουμε το Pricing Problem (**PP**) και να διαπιστώσουμε εάν υπάρχει αρνητικό ευκαιριακό κόστος ή διαφορετικά αν υπάρχουν μεταβλητές που μπαίνοντας στη βάση θα μπορούσαν να βελτιώσουν την αντικειμενική συνάρτηση. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επαναληπτικά μέχρι το σημείο στο οποίο δεν μπορεί να βρεθεί κάποια μεταβλητή που να βελτιώνει περαιτέρω την αντικειμενική συνάρτηση. Στη φάση αυτή, η βέλτιστη λύση του RMP αποτελεί και την βέλτιστη λύση του αρχικού MP προβλήματος που είναι και το ζητούμενο.

Η περατότητα, η ορθότητα και η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου δημιουργίας στηλών οφείλονται στη μέθοδο Simplex και στην ικανότητα της να επιλύει προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού έχοντας ένα αρχικό υποσύνολο μεταβλητών και χρησιμοποιώντας την έννοια του ευκαιριακού κόστους.



Εικόνα 3.1 Column generation sub-problem

3.2 Branch and Bound

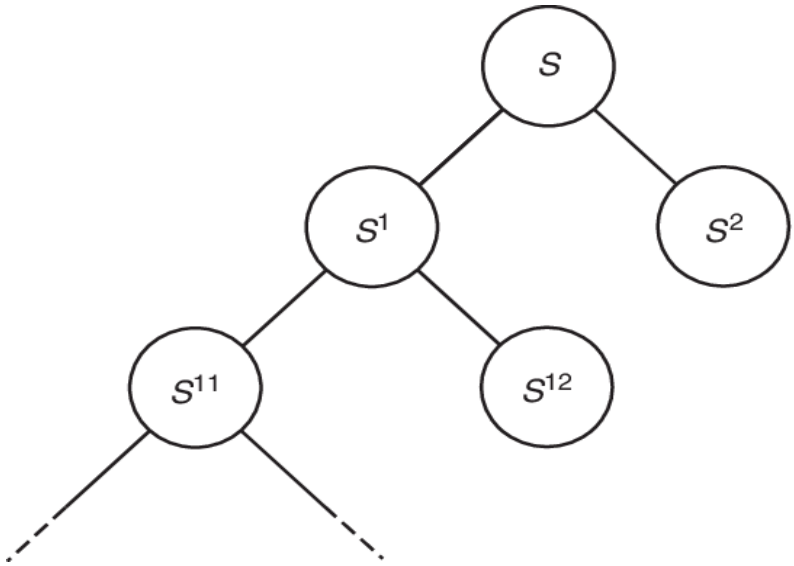
Ο αλγόριθμος Brand and Bound αποτελεί βασική μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού. Εισήχθη το 1960 από τους Ailsa H. Land και Alison G. Doig και επεκτάθηκε το 1965 από τον Egon Ballas.

Η μέθοδος B&B προϋποθέτει αρχικά τη γραμμική χαλάρωση του προβλήματος, δηλαδή τον επαναπροσδιορισμό του χωρίς τους περιορισμούς ακεραιότητας. Ύστερα από την επίλυση του χαλαρωμένου προβλήματος κατασκευάζεται ο πρώτος κόμβος του διαγράμματος δέντρου ο οποίος κατόπιν διαχωρίζεται σε διακλαδώσεις, κατορθώνοντας τον διαχωρισμό του συνόλου λύσεων σε υποσύνολα. Από τις διακλαδώσεις προκύπτουν νέοι κόμβοι κ.ο.κ.. Η ταχύτητα της μεθόδου B&B έγκειται στο γεγονός πως κάθε κόμβος παρέχει μία εκτίμηση της αντικειμενικής συνάρτησης, το καλύτερο δηλαδή αποτέλεσμα που μπορεί να προσφέρει ο κόμβος. Συνεπώς, κόμβοι που υπόσχονται μια καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση συνήθως αναπτύσσονται πρώτοι, ενώ κόμβοι που δεν έχουν αναλυθεί αλλά υπόσχονται τιμή χειρότερη από μία ήδη γνωστή και εφικτή λύση, δεν χρειάζεται να διερευνηθούν περαιτέρω. Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν όλοι οι κόμβοι έχουν ερευνηθεί.

Για την βέλτιστη απόδοση της μεθόδου είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπ' όψιν οι τρεις παράγοντες που αναλύονται παρακάτω:

- **Στρατηγική αναζήτησης**: Η αλληλουχία σύμφωνα με την οποία επιλέγουμε να ερευνήσουμε τις διακλαδώσεις του δέντρου.

- **Στρατηγική διακλάδωσης**: Ο τρόπος με τον οποίο το σύνολο των λύσεων διαχωρίζεται για την παραγωγή τον υποσυνόλων του δέντρου.
- **Κανόνες κλάδευσης**: Κανόνες που αποτρέπουν την διερεύνηση υποβέλτιστων κόμβων.



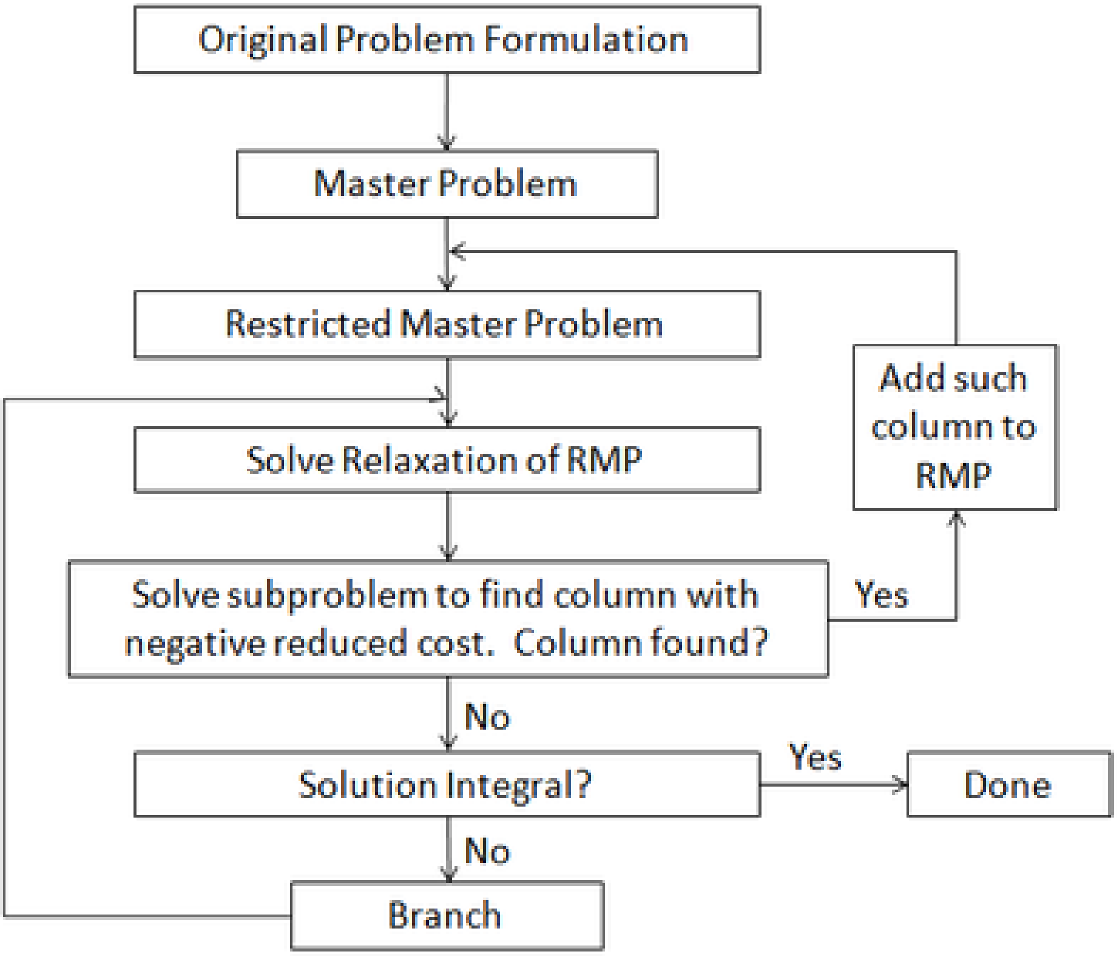
Εικόνα 3.2 Κόμβοι και διακλαδώσεις ενός δέντρου B&B

3.3 Branch and Price

Η Branch and Price είναι μια μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων που συνδυάζει τις δύο παραπάνω μεθόδους, Branch and bound και Column Generation. Οδηγούμαστε σε αυτήν όταν το πρόβλημα μας έχει ένα μεγάλο αριθμό μεταβλητών και δεν μπορεί να λυθεί με κάποιον άλλο τρόπο.

Ξεκινώντας, ο βασικός σκοπός της Branch and Price είναι η χαλάρωση του εκάστοτε προβλήματος με στόχο την επίλυσή του χρησιμοποιώντας ένα μέρος μόνο των μεταβλητών, όπως και στη μέθοδο Column Generation. Αυτό συμβαίνει διότι ο μεγάλος αυτός αριθμός των μεταβλητών δεν μας επιτρέπει να επιλύσουμε άμεσα το πρόβλημα. Μεγάλο πλήθος αυτών δεν αποτελούν βασικές μεταβλητές του, καθώς παίρνουν τιμή 0 στη βέλτιστη λύση, άρα μας δίνεται η δυνατότητα να τις αφαιρέσουμε για να έχουμε ένα χαλαρωμένο πρόβλημα το οποίο είναι ευκολότερο στην επίλυση του.

Αναλυτικότερα, ξεκινάμε αφαιρώντας τον περιορισμό ακεραιότητας του προβλήματος. Ακολούθως, λύνουμε το Restricted Master Problem(RPM), το οποίο είναι μικρότερο από το αρχικό πρόβλημα, με λιγότερες μεταβλητές. Αφού έχουμε βρει τη λύση του δευτερεύοντος προβλήματος και έχουμε πάρει τις dual μεταβλητές που αντιστοιχούν στον κάθε περιορισμό του, πρέπει να ακολουθήσουμε μια διαδικασία επίλυσης του sub-problem ή pricing problem, η οποία μας δίνει τη βέλτιστη λύση του αρχικού μας προβλήματος. Δεδομένου ότι έχουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και λαμβάνοντας υπόψιν τις dual τιμές που αντιστοιχούν σε κάθε περιορισμό, βρίσκουμε το κόστος της αντικειμενικής συνάρτησης. Εάν αυτό έχει αρνητική τιμή οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μεταβλητή που αν προστεθεί στο RPM θα μας πάει σε καλύτερη λύση. Τότε βάζουμε τη μεταβλητή στο RPM και λύνουμε εκ νέου. Σε αυτή την περίπτωση θα οδηγηθούμε αναπόφευκτα σε νέες τιμές για τις μεταβλητές του κάθε ενός περιορισμού του προβλήματος. Λύνουμε, λοιπόν, ξανά το pricing problem για να δούμε αν υπάρχει νέα μεταβλητή που αν προστεθεί στο πρόβλημα θα μας δώσει νέο αρνητικό μειωμένο κόστος. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να μην υπάρχει άλλη τέτοια μεταβλητή, άρα και η αντικειμενική του subproblem να μην είναι αρνητική. Τέλος, έχοντας καταλήξει σε μια λύση ελέγχουμε αν όλες οι μεταβλητές απόφασης έχουν ακέραιες τιμές και σε περίπτωση που δεν ισχύει κάτι τέτοιο χρησιμοποιούμε την μέθοδο Branch and Bound για να βρεθεί μια ακέραια λύση στο πρόβλημα μας. Ξεκινώντας το Branching από τη μεγαλύτερη εκ των δεκαδικών μεταβλητών του προβλήματος καταλήγουμε σε μια λύση που θα μας δώσει μόνο ακέραιες μεταβλητές απόφασης για το πρόβλημα μας με το μικρότερο δυνατό κόστος και τότε θα έχει λυθεί το πρόβλημα.



Εικόνα 3.3 Απεικόνιση της μεθόδου Branch and Price

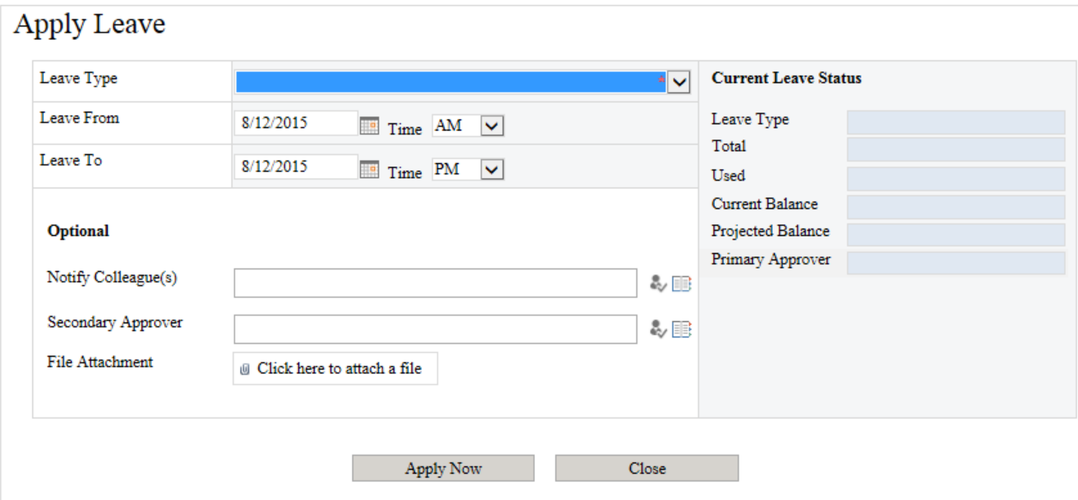
Κεφάλαιο 4: Πρώτο μέρος του προβλήματος, Ανάθεση αδειών σύμφωνα με τις προτιμήσεις του προσωπικού

Η επίλυση του προβλήματος ανάθεσης αδειών διαχωρίζεται σε δύο υποπροβλήματα. Το πρώτο από αυτά αφορά την αδειοδότηση του ιπτάμενου προσωπικού μίας αεροπορικής εταιρίας με στόχο την ικανοποίηση των επιθυμιών των εργαζομένων.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται λεπτομερώς η διαδικασία που ακολουθείται για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος καθώς επίσης και ο κώδικας που κατασκευάστηκε.

4.1 Ανάλυση του προβλήματος

Σύμφωνα με τα όσα έχουν ειπωθεί στο κεφάλαιο 2.3, για την αξιολόγηση των αιτημάτων του προσωπικού γίνεται χρήση μίας φόρμας, κατάλληλα σχεδιασμένης, στην οποία οι εργαζόμενοι δηλώνουν τις ημέρες που επιθυμούν να πάρουν άδεια. Ακολούθως, οι αιτήσεις τους ελέγχονται ανάλογα με τους κανόνες που προαναφέρθηκαν και κρίνονται εφικτές ή μη εφικτές.

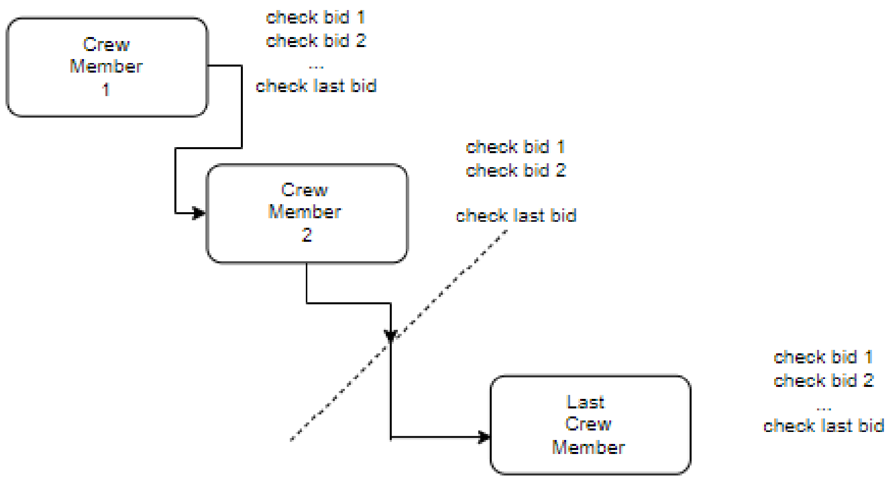


Εικόνα 1.1 Φόρμα συμπλήρωσης αιτούμενων αδειών

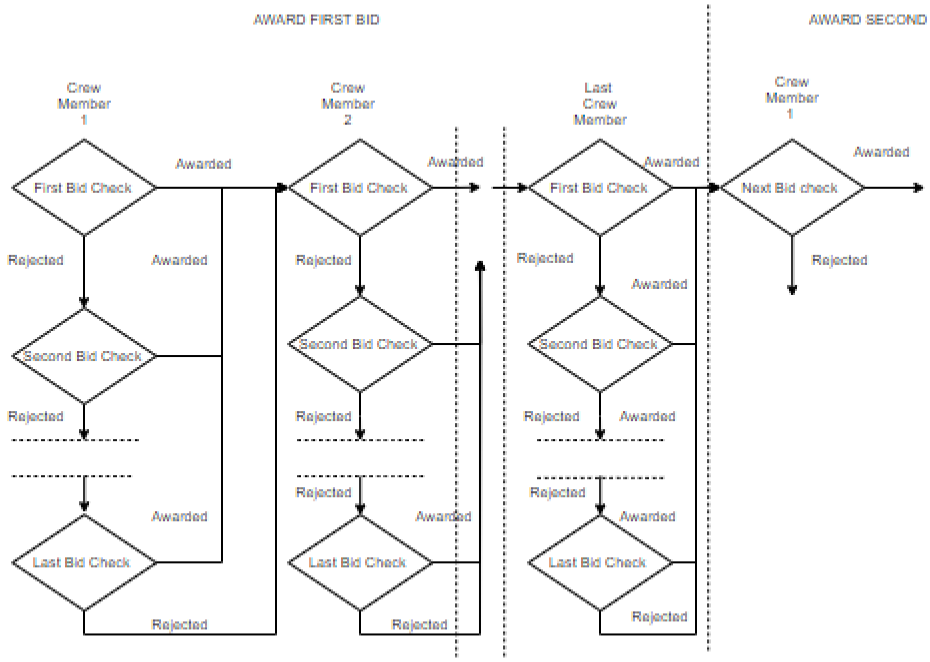
Στη συνέχεια, ξεκινά η ανάθεση των εφικτών αδειών. Συνηθίζεται στις περισσότερες εταιρίες τα μέλη με τα περισσότερα χρόνια υπηρεσίας να έχουν προτεραιότητα και επομένως οι προτιμήσεις τους να ικανοποιούνται πρώτες. Με βάση την πολιτική αυτή υπάρχουν δύο συστήματα που χρησιμοποιούνται κατά κόρον. Το Ευρωπαϊκό πρότυπο ή το πρότυπο δίκαιης προτεραιότητας, (**Fair Priority**) και το Αμερικανικό πρότυπο ή το πρότυπο αυστηρής αρχαιότητας, (**Strict Seniority**). Τα δύο αυτά συστήματα αναλύονται παρακάτω:

- **Strict Seniority**: Σύμφωνα με το πρότυπο αυτό, η ανάθεση αδειών ξεκινά από τα παλαιότερα μέλη και καταλήγει στα νεότερα. Συγκεκριμένα, πρώτα ικανοποιούνται όσες από τις προτιμήσεις του μέλους με τα περισσότερα χρόνια υπηρεσίας είναι εφικτές και στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται για το αμέσως επόμενο σε προϋπηρεσία μέλος κ.ο.κ.
- **Fair Priority**: Σε αυτό το πρότυπο η ανάθεση ξεκινά και πάλι από το αρχαιότερο μέλος. Ελέγχονται οι επιθυμίες του μέχρι την εύρεση της πρώτης εφικτής, η οποία και του ανατίθεται. Στην συνέχεια, ελέγχονται οι επιθυμίες των υπόλοιπων μελών με φθίνουσα σειρά προϋπηρεσίας με τον ίδιο τρόπο. Μόλις και το νεότερο μέλος ικανοποιήσει μία από τις προτιμήσεις του, αν αυτό βέβαια είναι εφικτό, η διαδικασία ξεκινά από την αρχή και το αρχαιότερο μέλος.

Ο τρόπος λειτουργίας των δύο προτύπων και οι διαφορές τους απεικονίζονται και στα διαγράμματα που ακολουθούν:



Εικόνα 4.2 Απεικόνιση ανάθεσης σύμφωνα με τον αμερικάνικο τρόπο (strict seniority)



Εικόνα 4.3 Απεικόνιση ανάθεσης σύμφωνα με τον ευρωπαϊκό τρόπο (fair priority)

4.2 Ο κώδικας του προβλήματος ανάθεσης

Όλο το πρόβλημα που μελετάμε στην παρούσα διπλωματική έχει επιλυθεί μέσω κώδικα της γλώσσας προγραμματισμού C. Καίριος παράγοντας για την ανάθεση των αδειών είναι η σειρά προτεραιότητας που ακολουθείται για να γίνει η αρχική ανάθεση αδειών στα μέλη του ιπτάμενου προσωπικού. Όπως είδαμε και προηγουμένως, στην παρούσα διπλωματική δίνεται η δυνατότητα στον χρήστη που χρησιμοποιεί τον κώδικα να επιλέξει μεταξύ του Αμερικάνικου (Strict Seniority) και του Ευρωπαϊκού (Fair Priority) τρόπου ανάθεσης αδειών. Πέρα όμως από τον παραπάνω παράγοντα για την κατασκευή του κώδικα λήφθηκαν υπ' όψιν ορισμένοι κανόνες, οι οποίοι αναφέρθηκαν και στο κεφάλαιο 2.3 . Επιγραμματικά χρησιμοποιούνται τα:

- **Maximum Number of Bids**
- **Entitlement**
- **Limit Lines**
- **Overlapping**
- **Separation Days**
- **Starting Day of the Block**
- **Block Length**

Ο κώδικας ξεκινάει ρωτώντας τον χρήστη ποιο τρόπο ανάθεσης επιθυμεί να ακολουθήσει για τον καταμερισμό των αδειών. Εν συνεχεία, του δίνεται η δυνατότητα να πάρει δεδομένα από κάποιο αρχείο με τις προτιμήσεις των ιπταμένων ή να χρησιμοποιήσει μια γεννήτρια τυχαίων προτιμήσεων των υπαλλήλων. Αφού, λοιπόν έχει συλλέξει αυτές τις πληροφορίες ελέγχει βάσει του επιλεγμένου τρόπου ανάθεσης μία μία τις προτιμήσεις. Αυτό το κομμάτι του κώδικα ονομάζεται bidalloc και τελειώνει όταν ελεγχθούν οι προτιμήσεις όλων των ιπταμένων και γίνει η ανάθεση όλων των εφικτών αδειών στο προσωπικό χωρίς να παραβιάζεται κανένας από τους παραπάνω κανόνες. Πιο συγκεκριμένα, ένα μέρος των ιπταμένων έχουν εκπληρώσει όλες τις επιθυμίες τους, ένα άλλο μέρος μόνο ένα κομμάτι αυτών αλλά και πιθανότατα υπάρχουν μέλη τα οποία δεν έχουν πάρει καμία από τις άδειες που ζήτησαν διότι βρίσκονται πολύ χαμηλά σε ιεραρχία. Γι' αυτό, όπως θα δούμε στη συνέχεια, το μεγαλύτερο κομμάτι αυτής της διπλωματικής εργασίας ασχολείται με την ανάθεση των εναπομεινάντων μερών άδειας στον κάθε ιπτάμενο με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Κεφάλαιο 5 : Δεύτερο μέρος του προβλήματος, Ανάθεση αδειών σύμφωνα με τις υπολειπόμενες ημέρες άδειας που έχει ο κάθε ιπτάμενος

Σε αυτό το κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας αναλύεται το μέρος του προβλήματος στο οποίο γίνεται η ανάθεση των ημερών άδειας του κάθε μέλους του προσωπικού που δεν έχουν παρθεί από το πρώτο σκέλος (bidalloc). Αυτή γίνεται με τυχαίο τρόπο και δεν λαμβάνονται υπόψιν οι προτιμήσεις των ιπταμένων. Στο τέλος της ανάθεσης η εταιρία θα επιβαρύνεται με κάποιο κόστος για κάθε ιπτάμενο ο οποίος δεν έχει εξαντλήσει όλες της ημέρες άδειας που δικαιούται. Γι' αυτό τον λόγο μοναδικός μας σκοπός είναι η εξάλειψη των ημερών άδειας για το κάθε μέλος του προσωπικού.

5.1 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Σε αυτό το σκέλος της διπλωματικής καλούμαστε να λύσουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους το οποίο μοντελοποιείται μαθηματικά μέσω του κώδικα προς διευκόλυνση και καλύτερη κατανόηση του ζητήματος. Αρχικά, ορίζονται οι παράμετροι του προβλήματος. Το σταθερό κόστος c που καλείται να πληρώσει η αεροπορική εταιρία για κάθε ιπτάμενο που δεν ολοκληρώνει τις ημέρες άδειας που του αναλογούν και το άνω όριο των ιπταμένων LL_i (Limit Lines) ,για κάθε i ημέρα του χρονικού ορίζοντα, που έχουν τη δυνατότητα να πάρουν άδεια εκείνη την ημέρα. Στη συνέχεια, ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης X_j για κάθε ένα «κορδόνι» του προβλήματος. Κορδόνι ονομάζουμε ένα σύνολο ημερών άδειας το οποίο μπορεί να ανατεθεί σε έναν συγκεκριμένο ιπτάμενο. Η X_j είναι μια δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 όταν το συγκεκριμένο σύνολο ημερών άδειας ανατίθεται στον ιπτάμενο για τον οποίο αναφέρεται και την τιμή 0 όταν δεν παίρνει αυτό το σύνολο ημερών άδεια. Τέλος, για να μπορέσουμε να ολοκληρώσουμε την μοντελοποίηση επιβάλλεται να ορίσουμε αριθμό ιπταμένων(N) και αριθμό ημερών(T) του χρονικού ορίζοντα έτσι ώστε να δημιουργηθεί ο κατάλληλος αριθμός περιορισμών για το πρόβλημα. Πέρα από τη δυαδική μεταβλητή απόφασης, όλες οι άλλες τιμές έχουν τη δυνατότητα μέσω του κώδικα να τροποποιηθούν και να μοντελοποιηθεί διαφορετικό πρόβλημα κάθε φορά.

Παράμετροι: C, LL_i

Μεταβλητές απόφασης: X_j

Δεδομένα: N,T

Άρα, έχουμε την εξής μορφοποίηση στο πρόβλημα:

$$\text{Min} \sum c * Xj$$

s.t. MCk: $\sum Xj$=1, για κάθε ιπτάμενο N (k=1,2,..)

$DAYi$: $\sum Xj \geq 0$, για κάθε ημέρα από τις T (i=1,2,..)

LLi: $\sum Xj \leq LLi$, για κάθε ημέρα από τις T (i=1,2,..)

$$Xj \ Binary$$

Μόλις τελειώσει η διαδικασία των Bids για τον κάθε ιπτάμενο έχουν δημιουργηθεί «κορδόνια». Με τους ιπταμένους που με το πρώτο μέρος παίρνουν άδειες που ικανοποιούν το Full Entitlement, δηλαδή δεν έχουν υπολειπόμενες μέρες άδειας, δεν ασχολούμαστε. Στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος που μοντελοποιήθηκε τοποθετούνται «κορδόνια» τα οποία περιλαμβάνουν αριθμό ημερών άδειας μικρότερο από το Entitlement του κάθε ιπταμένου. Συνεπώς, μετά αμέσως από την διαδικασία των bids οι μόνες μεταβλητές απόφασης (Xj) θα είναι αυτές που έχουν προκύψει από το πρώτο σκέλος του προβλήματος. Αυτό θα αλλάξει στη συνέχεια καθώς επιθυμούμε την ελαχιστοποίηση του κόστους και κατά συνέπεια να έχουμε κορδόνια που ικανοποιούν το Full Entitlement του κάθε ιπταμένου.

Επιπροσθέτως, το πρώτο σύνολο περιορισμών μας λέει ότι ο κάθε ιπτάμενος μπορεί να πάρει μόνο ένα «κορδόνι» που θα έχει ένα σύνολο ημερών άδειας. Το δεύτερο σύνολο απαρτίζεται από περιορισμούς που δεν έχουν κάποια πρακτική σημασία παρά μόνο μας δείχνουν ποια «κορδόνια» εμπεριέχει η κάθε ημέρα. Συνεπώς, έχουμε έναν περιορισμό για την κάθε ημέρα. Το τρίτο σύνολο αποτελείται από περιορισμούς που περιορίζουν τον αριθμό των αδειών που μπορούν να δοθούν κάθε μέρα στους ιπταμένους, ή αλλιώς το «Limit Lines» όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Τέλος, εξίσου σημαντικός περιορισμός είναι και αυτός των μεταβλητών απόφασης, οι οποίες πρέπει να παίρνουν δυαδικές τιμές.

5.2 Ο κώδικας του προβλήματος

Όπως και το για το πρώτο μέρος του προβλήματος, έτσι και για το δεύτερο χρησιμοποιείται η γλώσσα προγραμματισμού C. Στην παρούσα φάση γίνεται επίσης χρήση εντολών που παρέχονται από το λογισμικό βελτιστοποίησης IBM ILOG CPLEX.

Για την επίλυση του προβλήματος, απαιτείται η ενσωμάτωση στον κώδικα των θεωριών που εξηγήθηκαν αναλυτικά παραπάνω, δηλαδή των Branch and Bound, Column Generation και Branch and Price.

5.2.1 Μεθοδολογία για την επίλυση του προβλήματος

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για την επεξεργασία και την αντιμετώπιση του προβλήματος που μας απασχολεί συνοψίζεται στα εξής βήματα:

1. Επίλυση του αρχικού προβλήματος
2. Επίλυση του υποπροβλήματος column generation
3. Ακεραιοποίηση και διαγραφή των μεταβλητών που δεν θα χρησιμοποιηθούν

Τα βήματα αυτά αναλύονται διεξοδικά στα επόμενα υποκεφάλαια.

5.2.1.1 Επίλυση του αρχικού προβλήματος

Για την επίλυση του αρχικού ή master problem προαπαιτείται η χαλάρωση του, δηλαδή η αφαίρεση του περιορισμού ακεραιότητας. Αυτό σημαίνει πως πλέον δεν είναι υποχρεωτικό οι μεταβλητές απόφασης να παίρνουν τις τιμές 0 ή 1 αλλά οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα [0,1]. Το πρόβλημα στην συνέχεια επιλύεται με τη βοήθεια εντολών του λογισμικού CPLEX. Μετά την επίλυση του προβλήματος η δυική βέλτιστη λύση χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο Column Generation για την συνέχεια της διαδικασίας

Η μορφοποίηση του προβλήματος μετά την χαλάρωση του γίνεται ως εξής:

$$\text{Min} \sum c * Xj$$

s.t. MCk: $\sum Xj$=1, για κάθε ιπτάμενο N (k=1,2,..)

$DAYi$: $\sum Xj \geq 0$, για κάθε ημέρα από τις T (i=1,2,..)

LLi: $\sum Xj \leq LLi$, για κάθε ημέρα από τις T (i=1,2,..)

$$Xj \geq 0$$

5.2.1.2. Επίλυση του Column Generation sub-problem

Έχοντας επιλύσει το χαλαρωμένο master πρόβλημα διαθέτουμε τη δυική λύση που είναι απαραίτητη για την διαδικασία Column Generation. Συγκεκριμένα, λαμβάνεται ένας πραγματικός αριθμός για κάθε έναν από τους περιορισμούς DAY και LL που φαίνονται παραπάνω.

Γνωρίζοντας τις δυικές τιμές που προκύπτουν από τη βέλτιστη δυική λύση είναι δυνατή η κατασκευή και η σύγκριση των μειωμένων κοστών της κάθε ημέρας και η αξιοποίηση αυτής της πληροφορίας στην κατασκευή συνδυασμών ημερών αδείας ή κορδονιών που θα εισαχθούν στο πρόβλημα με τη μορφή μεταβλητών απόφασης με σκοπό να βελτιώσουν την αντικειμενική του συνάρτηση.

Το μειωμένο κόστος της κάθε ημέρας προκύπτει αφαιρώντας τις δυικές τιμές που αντιστοιχούν στην εκάστοτε ημέρα στους περιορισμούς DAY και LL. Ειδικότερα :

$$RCi = Dual(N+i)+Dual(N+T+i)$$

με i να ορίζεται ως ο αριθμός της ημέρας που εξετάζεται, N ο συνολικός αριθμός των ιπταμένων και T ο συνολικός αριθμός των ημερών.

Για την εύρεση του συνολικού ευκαιριακού κόστους του κάθε «κορδονιού» αθροίζεται το ευκαιριακό κόστος της κάθε ημέρας που περιέχεται σε αυτό και το αποτέλεσμα αφαιρείται από το κόστος που προκύπτει για το κορδόνι από την αντικειμενική συνάρτηση. Δηλαδή:

$$RCx=c- \sum RCi$$

για κάθε ημέρα i στην οποία εμφανίζεται το «κορδόνι» X

Πιο αναλυτικά, κατά την επίλυση του column generation sub-problem δημιουργούνται «κορδόνια» με τοπολογική σειρά τα οποία πάντα ξεκινούν με τον μηδενικό κόμβο που δείχνει σε ποιον ιπτάμενο αναφέρονται, ενώ το τέλος τους σηματοδοτείται από τον κόμβο fictitious. Μεταξύ των κόμβων αυτών περιέχονται κόμβοι-μέρες που είναι εφικτό να ανατεθούν στον ιπτάμενο σύμφωνα με τους κανόνες εφικτότητας.

Το «κορδόνι» με το πιο αρνητικό ευκαιριακό κόστος αποτελεί την μεταβλητή απόφασης που θα προστεθεί στο πρόβλημα. Πλέον οι δυικές μεταβλητές άρα και τα ευκαιριακά κόστη ανανεώνονται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν δεν υπάρχει κανένας συνδυασμός ημερών άδειας από τον οποίο να προκύπτει αρνητικό μειωμένο κόστος. Στο σημείο αυτό διαθέτουμε την βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου προβλήματος και μπορούμε να προχωρήσουμε στην ακεραιοποίηση της.

5.2.1.3. Ακεραιοποίηση της λύσης

Τις περισσότερες φορές η λύση που προκύπτει από την διαδικασία που περιεγράφηκε προηγουμένως δεν είναι ακέραια, αλλά αποτελείται από δεκαδικές μεταβλητές. Προκειμένου να καταλήξουμε στις τελικές ημέρες άδειας που θα λάβει ο κάθε ιπτάμενος απαιτείται να γίνει μια ακεραιοποίηση της λύσης.

Συγκεκριμένα, αφού βρεθεί η βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου προβλήματος, οι μεταβλητές απόφασης ελέγχονται με σκοπό την εύρεση εκείνων που δεν είναι ακέραιες. Από αυτές αποθηκεύεται εκείνη που έχει το μεγαλύτερο δεκαδικό μέρος και είναι πιο κοντά στην μονάδα.

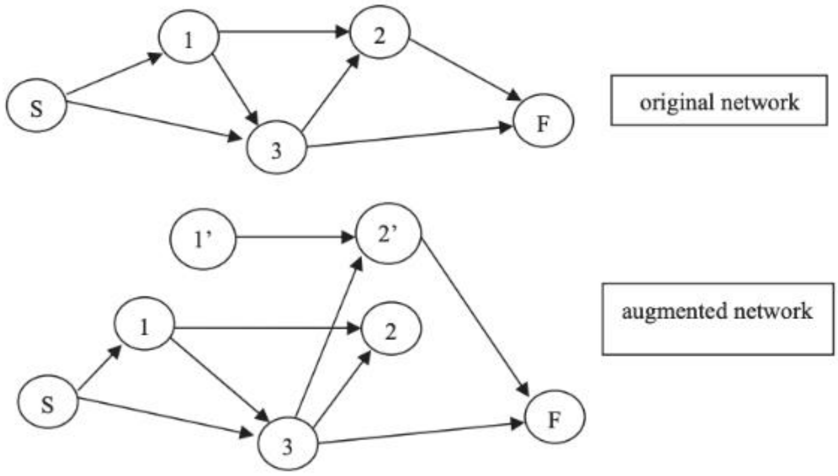
Στο σημείο αυτό ξεκινά η διαδικασία του branching της μεθόδου branch and bound. Αναλυτικά, δημιουργούνται δύο κλάδοι (child) στους οποίους η μεταβλητή παίρνει τις δύο ακραίες τιμές της 0 και 1. Οι νέοι κόμβοι που δημιουργούνται, αποθηκεύονται σε λίστα που είναι αυστηρά ταξινομημένη με το συνολικό κόστος να αυξάνεται. Ο κόμβος με το μικρότερο μειωμένο κόστος ερευνάται πρώτος.

Ο κόμβος στον οποίο η μεταβλητή παίρνει την τιμή 1 ορίζει ότι σε κάποιον από τους ιπταμένους έχει ανατεθεί ένα κορδόνι, δηλαδή μία σειρά ημερών άδειας. Έτσι, όλα τα υπόλοιπα κορδόνια που έχουν δημιουργηθεί για αυτόν δεν έχουν λόγο ύπαρξης αφού σύμφωνα με τους περιορισμούς της πρώτης κατηγορίας:

$$MCk\text{: } \sum Xj\text{=1, για κάθε ιπτάμενο N (k=1,2,..)}$$

Συνεπώς τα υπόλοιπα κορδόνια που έχουν την τιμή 0 πρέπει να διαγραφούν από το πρόβλημα. Οι κλάδοι που οι μεταβλητές παίρνουν την τιμή X=1 δίνουν περισσότερες πληροφορίες και κάνουν τον αλγόριθμο πιο αποδοτικό. Κατά τη διάρκεια όμως της επίλυσης μπορεί να χρειαστεί να ερευνηθεί και κάποιος κλάδος στον οποίο η πληροφορία είναι ότι η μεταβλητή ενδιαφέροντος είναι 0.

Στην περίπτωση αυτή, δεν γνωρίζουμε ποιο από τα κορδόνια θα πάρει τελικά ο ιπτάμενος, ξέρουμε όμως ότι δεν θα πάρει αυτό το οποίο έχει μηδενική τιμή. Επομένως το κορδόνι αυτό θα πρέπει να διαγραφεί. Εδώ, είναι σημαντικό να δοθεί στον αλγόριθμο η πληροφορία πως το κορδόνι που δημιούργησε είναι υποβέλτιστο με στόχο να μην το ξαναδημιουργήσει στην πορεία. Προκειμένου να αποτραπεί η δημιουργία μόνο του συγκεκριμένου κορδονιού αξιοποιείται μια διαδικασία στην οποία δημιουργούνται κλώνοι των κόμβων των ημερών έτσι ώστε να κοπεί η ροή μόνο για το συγκεκριμένο μονοπάτι. Η μέθοδος αυτή κατασκευάζεται στον κώδικα μέσω της δομής RejNode ενώ ένα παράδειγμα της χρήσης της παρατίθεται σχηματικά παρακάτω:



Εικόνα 5.1 Προσθήκη κόμβων στο δίκτυο για την απαγόρευση μονοπατιών

Όπως φαίνεται παραπάνω η κόμβοι 1' 2' εξυπηρετούν στην απαγόρευση του μονοπατιού S-1-2-F, ταυτόχρονα όμως επιτρέπουν την ροή στα υπόλοιπα μονοπάτια κατορθώνοντας έτσι να αποφύγουμε μόνο το κορδόνι που είναι σίγουρα υποβέλτιστο.

Αφού ερευνηθεί ο ένας εκ των δύο κλάδων και διαγραφούν οι μεταβλητές που πρέπει, επιστρέφουμε στο column generation sub-problem στο οποίο πλέον οι τιμές των duals έχουν αλλάξει. Σκοπός είναι μετά την επίλυση του η εύρεση της επόμενης δεκαδικής μεταβλητής και η επανάληψη της διαδικασίας που μόλις περιγράφηκε. Τελικά, ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν σε όλους τους ιπτάμενους έχει ανατεθεί κάποιο κορδόνι με τιμή 1 και έχουν λάβει τις άδειες που τους αναλογούν.

5.3 Σύντομο παράδειγμα επάνω στη μεθοδολογία

Για να κατανοηθεί καλύτερα η προαναφερθείσα μεθοδολογία σας παραθέτουμε ένα παράδειγμα πάνω σε αυτή παραλείποντας την διαδικασία καταμερισμού των αδειών βάσει των προτιμήσεων των ιπταμένων. Τα δεδομένα στο παράδειγμα επιλέχθηκαν με σκοπό να δημιουργούν ένα εύκολο προς κατανόηση παράδειγμα με μικρό αριθμό ιπταμένων.

N= 3 ιπτάμενοι

T=10 ημέρες

Separation days=5 ημέρες πρέπει να περάσουν για να ξανά πάρει άδεια ο ιπτάμενος

Entitlement=3 για όλους τους ιπταμένους

C=1000 το κόστος για κάθε ιπτάμενο που δεν ικανοποιεί το Full Entitlement

**StartingDayOfTheBlock, MaxNumberOfBids και BidLength δεν χρησιμοποιούνται προς διευκόλυνση του αναγνώστη και απλούστευση του προβλήματος.*

5.3.1. Χαλάρωση του προβλήματος

Ξεκινώντας, πραγματοποιείται η αφαίρεση του περιορισμού ακεραιότητας των μεταβλητών απόφασης. Παρακάτω, βλέπουμε το αποτέλεσμα του κώδικα μετά την επίλυση του master προβλήματος.

Οι περιορισμοί για τα Days και τα Limit Lines είναι άδειοι καθώς δεν έχει γίνει κάποια ανάθεση αδειών. Όπως αναμέναμε έχουμε ελαχιστοποίηση του κόστους στην αντικειμενική συνάρτηση και συντελεστή C=1000 σε κάθε μεταβλητή απόφασης. Τέλος, από τη στιγμή που δεν έχει ξεκινήσει η διαδικασία βελτιστοποίησης οι μεταβλητές απόφασης για τον κάθε ιπτάμενο(X1,X2,X3) οι οποίες αναφέρονται σε μη βέλτιστα κορδόνια για τον κάθε ιπτάμενο έχουν πάρει την τιμή 1. Άρα, Η λύση του χαλαρωμένου είναι η προφανής x1=1, x2=1, x3=1.

```
\ENCODING=ISO-8859-1
\Problem name: autoalloc

Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3
Subject To
 MC1:    x1   = 1
 MC2:    x2   = 1
 MC3:    x3   = 1
 DAY1:   >= 0
 DAY2:   >= 0
 DAY3:   >= 0
 DAY4:   >= 0
 DAY5:   >= 0
 DAY6:   >= 0
 DAY7:   >= 0
 DAY8:   >= 0
 DAY9:   >= 0
 DAY10:  >= 0
 LL1:    <= 1
 LL2:    <= 1
 LL3:    <= 1
 LL4:    <= 1
 LL5:    <= 1
 LL6:    <= 1
 LL7:    <= 1
 LL8:    <= 1
 LL9:    <= 1
 LL10:   <= 1
End
```

Εικόνα 5.2 Χαλαρωμένη μορφή του αρχικού προβλήματος

5.3.2. Column Generation sub-problem

Ακολούθως, αφού τελειώσουμε με τη χαλάρωση του προβλήματος συνεχίζουμε με την επίλυση του column generation sub-problem. Για έναν ιπτάμενο παράγεται ένα κορδόνι και προστίθεται στο master πρόβλημα ως μεταβλητή απόφασης μέχρις ότου δεν βρεθεί αρνητικό μειωμένο κόστος άρα και συνολική βέλτιστη λύση για το δεκαδικό πρόβλημα. Στη συνέχεια βλέπετε την λύση που προκύπτει από το column generation sub-problem με τα δεδομένα που δόθηκαν παραπάνω.

Σαν αποτελέσματα παίρνουμε τις δεκαδικές τιμές των κορδονιών για τον κάθε ιπτάμενο:

Πίνακας 5.1 Αποτελέσματα column generation sub-problem

```
Display which part of the solution: variables
Display values of which variable(s): -
Variable Name           Solution Value
x7                            0.666667
x13                           0.333333
x5                            0.333333
x23                           0.333333
x29                           0.333333
x21                           0.333333
x24                           0.333333
x27                           0.333333
All other variables in the range 1-30 are 0.
```

```
\ENCODING=ISO-8859-1
\Problem name: autoalloc

Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3
Subject To
 MC1:   x1 + x4 + x7 + x10 + x13 + x16 + x19 + x22 + x25 + x28  = 1
 MC2:   x2 + x5 + x8 + x11 + x14 + x17 + x20 + x23 + x26 + x29  = 1
 MC3:   x3 + x6 + x9 + x12 + x15 + x18 + x21 + x24 + x27 + x30  = 1
 DAY1:  x4 + x5 + x6 + x10 + x11 + x12 + x22 + x23 + x24 >= 0
 DAY2:  x4 + x5 + x6 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x28 + x29 + x30 >= 0
 DAY3:  x4 + x5 + x6 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x25 + x26 + x27 >= 0
 DAY4:  x7 + x8 + x9 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 >= 0
 DAY5:  x7 + x8 + x9 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 + x21 >= 0
 DAY6:  x7 + x8 + x9 + x19 + x20 + x21 >= 0
 DAY7:  x19 + x20 + x21 + x22 + x23 + x24 >= 0
 DAY8:  x10 + x11 + x12 + x22 + x23 + x24 + x28 + x29 + x30 >= 0
 DAY9:  x25 + x26 + x27 + x28 + x29 + x30 >= 0
 DAY10: x25 + x26 + x27 >= 0
 LL1:   x4 + x5 + x6 + x10 + x11 + x12 + x22 + x23 + x24 <= 1
 LL2:   x4 + x5 + x6 + x10 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x28 + x29 + x30 <= 1
 LL3:   x4 + x5 + x6 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 + x25 + x26 + x27 <= 1
 LL4:   x7 + x8 + x9 + x13 + x14 + x15 + x16 + x17 + x18 <= 1
 LL5:   x7 + x8 + x9 + x16 + x17 + x18 + x19 + x20 + x21 <= 1
 LL6:   x7 + x8 + x9 + x19 + x20 + x21 <= 1
 LL7:   x19 + x20 + x21 + x22 + x23 + x24 <= 1
 LL8:   x10 + x11 + x12 + x22 + x23 + x24 + x28 + x29 + x30 <= 1
 LL9:   x25 + x26 + x27 + x28 + x29 + x30 <= 1
 LL10:  x25 + x26 + x27 <= 1
End
```

Εικόνα 5.3 Μορφή προβλήματος μετά το LP Cover

5.3.3. Ακεραιοποίηση της λύσης

Τελειώνοντας, προχωράμε στην ακεραιοποίηση της λύσης του column generation sub-problem. Βρίσκει ο κώδικας τη μεταβλητή απόφασης με τη μεγαλύτερη δεκαδική τιμή (x7) και ξεκινάει τη διαδικασία που αναλύθηκε στο κεφάλαιο 5.2.1.3. με σκοπό την εύρεση λύσης με το μικρότερο δυνατό κόστος. Στο παράδειγμα μας βρίσκουμε λύση που μηδενίζει την αντικειμενική συνάρτηση και σας παρατίθεται στη συνέχεια. Ο πρώτος ιπτάμενος παίρνει τις ημέρες 1,7,8 , ο δεύτερος τις 3,9,10 και το τρίτος τις 4,5,6. Άρα όλοι ικανοποιούν το Full entitlement γι' αυτό κι η αντικειμενική συνάρτηση μηδενίζεται.

Πίνακας 5.2 Τελική ανάθεση αδειών

MC	DAYS		
1	Day 1	Day 7	Day 8
2	Day 3	Day 9	Day 10
3	Day 4	Day 5	Day 6

Κεφάλαιο 6 : Ένα ολοκληρωμένο παράδειγμα πάνω στον κώδικα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα παράδειγμα που περιλαμβάνει και τα δύο μέρη του προβλήματος. Αυτό της ανάθεσης των επιθυμιών όπως και εκείνο της ανάθεσης των ημερών που απομένουν. Μετά την παρουσίαση των δεδομένων αναλύεται η διαδικασία της επίλυσης και τέλος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εκτέλεση του κώδικα.

6.1 Τα δεδομένα του παραδείγματος

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέγεται η εισαγωγή των δεδομένων μέσω κατάλληλου αρχείου το οποίο και διαβάζεται από τον κώδικα. Τα δεδομένα στο πρόβλημα που παρουσιάζεται παρακάτω είναι τα εξής:

N=4 ο αριθμός των ιπταμένων

T=25 ο συνολικός αριθμός των ημερών

MaxNumberOfBids=2 ο μέγιστος αριθμός επιθυμιών που θα ικανοποιήσει ο κώδικας για κάθε ιπτάμενο

separdays=3 ημέρες πρέπει να μεσολαβούν μεταξύ κάποιου block ημερών άδειας από το προηγούμενο και το επόμενο block

LimitLines=1 ο μέγιστος αριθμός ιπταμένων που επιτρέπεται να βρίσκονται σε άδεια την κάθε μέρα λειτουργίας της εταιρίας

C=1000 το κόστος για κάθε ιπτάμενο που δεν θα λάβει τον συνολικό αριθμό ημερών άδειας που δικαιούται

Entitlement=5 ο συνολικός αριθμός ημερών άδειας που δικαιούται ο κάθε εργαζόμενος

**Οι περιορισμοί που αφορούν τα BlockLength και BlockStartDay επιλέγεται να παραμείνουν ανενεργοί χάριν απλότητας.*

***Ως μεθοδολογία εξέτασης των προτιμήσεων χρησιμοποιείται ο αμερικάνικος τρόπος ανάθεσης αδειών (strict seniority).*

Εκτός από τα δεδομένα που αναφέρθηκαν, θα πρέπει εδώ να παρουσιαστούν και τα δεδομένα που αφορούν τις επιθυμίες του κάθε ιπτάμενου. Αναλυτικά:

- *1ος ιπτάμενος*

Συνολικός αριθμός αιτημάτων=2

  - *Αίτημα πρώτο: Αρχή=3 (αριθμός ημέρας στον χρονικό ορίζοντα)*
    Διάρκεια=1 ημέρες
  - *Αίτημα δεύτερο: Αρχή=5*
    Διάρκεια=4 ημέρες

- *2ος ιπτάμενος*

Συνολικός αριθμός αιτημάτων=3

  - *Αίτημα πρώτο: Αρχή=2*
    Διάρκεια=2 ημέρες
  - *Αίτημα δεύτερο: Αρχή=11*
    Διάρκεια=1 ημέρα
  - *Αίτημα τρίτο: Αρχή=14*
    Διάρκεια=2 ημέρες

- *3ος ιπτάμενος*

Συνολικός αριθμός αιτημάτων=3

  - *Αίτημα πρώτο: Αρχή=3*
    Διάρκεια=2 ημέρες
  - *Αίτημα δεύτερο: Αρχή=6*
    Διάρκεια=2 ημέρες
  - *Αίτημα τρίτο: Αρχή=12*
    Διάρκεια=1 ημέρα

- *4ος ιπτάμενος*

Συνολικός αριθμός αιτημάτων=3

  - *Αίτημα πρώτο: Αρχή=5*
    Διάρκεια=1 ημέρα
  - *Αίτημα δεύτερο: Αρχή=8*
    Διάρκεια=3 ημέρες
  - *Αίτημα τρίτο: Αρχή=12*
    Διάρκεια=1 ημέρα

6.2 Διαδικασία επίλυσης

Ξεκινώντας, πρώτο στάδιο του ολοκληρωμένου προβλήματος είναι ο καταμερισμός όσο το δυνατόν μεγαλύτερου αριθμού αδειών σύμφωνα με τις προτιμήσεις του ιπτάμενου προσωπικού. Το κάθε μέλος έχει συμπληρώσει μια φόρμα στην οποία αναφέρονται οι προτιμήσεις του όπως αναφέρθηκε και αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 4.1. Έπειτα από αυτή τη διαδικασία ένα μέρος των αδειών έχουν παρθεί από τους ιπταμένους και αυτές φαίνονται παρακάτω.

```
Crew member 1 was awarded bid 1
Crew member 1 was not awarded bid 2 due to separation
Crew member 2 was not awarded bid 1 due to limit lines
Crew member 2 was awarded bid 2
Crew member 2 was not awarded bid 3 due to separation
Crew member 3 was not awarded bid 1 due to limit lines
Crew member 3 was awarded bid 2
Crew member 3 was awarded bid 3
Crew member 4 was awarded bid 1
Crew member 4 was not awarded bid 2 due to separation
Crew member 4 was not awarded bid 3 due to limit lines
```

Εικόνα 6.1 Αποτελέσματα μετά την διαδικασία των bids

Συμπερασματικά, ο πρώτος ιπτάμενος πήρε 4 ημέρες άδεια από την διαδικασία των bids, ο δεύτερος πήρε 4 , ο τρίτος πήρε 2 και ο τέταρτος πήρε 4. Συνεπώς, βλέπουμε στον παρακάτω πίνακα τις ημέρες που υπολείπονται στον κάθε ένα μέχρι να ολοκληρώσει το σύνολο ημερών άδειας που δικαιούται.

Πίνακας 6.1 Υπολειπόμενες ημέρες άδειας μετά τη διαδικασία των Bids

Ιπτάμενος	1	2	3	4
Ημέρες που υπολείπονται	4	4	2	4

Μετά το πέρας της διαδικασίας ανάθεσης αδειών σύμφωνα με τις προτιμήσεις των ιπταμένων, όπως βλέπουμε και στον παραπάνω πίνακα, έχουν μείνει ακόμα ημέρες άδειας για τον κάθε ένα μέχρι να φτάσει το Full Entitlement. Σε αυτό το σημείο ξεκινάει το δεύτερο σκέλος. Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 5.2 η διαδικασία ξεκινάει με την χαλάρωση του προβλήματος, την αφαίρεση δηλαδή του περιορισμού ακεραιότητας. Παρακάτω φαίνεται η χαλαρωμένη μορφή του προβλήματος. Οι μεταβλητές απόφασης X1, X2, X3, X4 αναφέρονται στα «κορδόνια» που έχουν ήδη δημιουργηθεί για τον κάθε ιπτάμενο στη διαδικασία των bids. Στους περιορισμούς των DAYS φαίνεται ποιες ημέρες περιλαμβάνει το κάθε ένα. Προφανώς η λύση σε αυτό το σημείο είναι η X1 = X2 = X3 = X4 = 1 και μας δίνει τιμή στην αντικειμενική 4000 καθώς όλοι οι ιπτάμενοι έχουν υπολειπόμενες ημέρες άδειας.

```
Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4
Subject To
 MC1:   x1  = 1
 MC2:   x2  = 1
 MC3:   x3  = 1
 MC4:   x4  = 1
 DAY1:  >= 0
 DAY2:  >= 0
 DAY3:  x1 >= 0
 DAY4:  >= 0
 DAY5:  x4 >= 0
 DAY6:  x3 >= 0
 DAY7:  x3 >= 0
 DAY8:  >= 0
 DAY9:  >= 0
 DAY10: >= 0
 DAY11: x2 >= 0
 DAY12: x3 >= 0
 DAY13: >= 0
 DAY14: >= 0
 DAY15: >= 0
 DAY16: >= 0
 DAY17: >= 0
 DAY18: >= 0
 DAY19: >= 0
 DAY20: >= 0
 DAY21: >= 0
 DAY22: >= 0
 DAY23: >= 0
 DAY24: >= 0
 DAY25: >= 0
 LL1:   <= 1
 LL2:   <= 1
 LL3:   x1 <= 1
 LL4:   <= 1
 LL5:   x4 <= 1
 LL6:   x3 <= 1
 LL7:   x3 <= 1
 LL8:   <= 1
 LL9:   <= 1
 LL10:  <= 1
 LL11:  x2 <= 1
 LL12:  x3 <= 1
 LL13:  <= 1
 LL14:  <= 1
 LL15:  <= 1
 LL16:  <= 1
 LL17:  <= 1
 LL18:  <= 1
 LL19:  <= 1
 LL20:  <= 1
 LL21:  <= 1
 LL22:  <= 1
 LL23:  <= 1
 LL24:  <= 1
 LL25:  <= 1
```

Εικόνα 6.2 Απεικόνιση του Initmaster

Εν συνεχεία, ακολουθεί το column generation sub-problem το οποίο παίρνει τη δυική βέλτιστη λύση και συγκρίνει τα μειωμένα κόστη των ημερών για να βρει το μικρότερο. Αρχικά, παράγεται πρόγραμμα άδειας για τον κάθε ιπτάμενο με τη σειρά και προστίθεται στο master ως «κορδόνι». Για να προχωρήσουμε στον επόμενο ιπτάμενο πρέπει να μην υπάρχει κορδόνι» που αν μπει στο master θα βελτιώσει την λύση μας. Η διαδικασία τερματίζεται όταν δεν υπάρχει συνδυασμός ημερών άδειας που αν μπει στο master θα μας δώσει αρνητικό ευκαιριακό κόστος. Παρακάτω βλέπουμε τη μορφή του προβλήματος μετά την επίλυση του column generation sub-problem.

```
Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4
Subject To
 MC1:   x1 + x5 + x9 + x13 + x17 + x20 + x23 + x26 + x29 + x32 + x36 + x39
        + x43  = 1
 MC2:   x2 + x6 + x10 + x14 + x18 + x21 + x24 + x27 + x30 + x33 + x37 + x40
        + x44  = 1
 MC3:   x3 + x7 + x11 + x15 + x34 + x41 + x45  = 1
 MC4:   x4 + x8 + x12 + x16 + x19 + x22 + x25 + x28 + x31 + x35 + x38 + x42
        + x46  = 1
 DAY1:  x7 + x8 + x15 + x16 + x18 + x19 + x21 + x22 + x27 + x28 + x30 + x31
        + x37 + x38 >= 0
 DAY2:  x7 + x10 + x11 + x18 + x21 + x27 + x30 + x37 + x40 + x41 >= 0
 DAY3:  x1 + x5 + x9 + x10 + x13 + x14 + x17 + x20 + x23 + x26 + x27 + x29
        + x32 + x36 + x39 + x43 >= 0
 DAY4:  x6 + x10 + x14 + x24 + x27 + x33 + x44 >= 0
 DAY5:  x4 + x6 + x8 + x10 + x12 + x14 + x16 + x19 + x22 + x24 + x25 + x28
        + x31 + x35 + x38 + x42 + x46 >= 0
 DAY6:  x3 + x6 + x7 + x11 + x14 + x15 + x18 + x34 + x41 + x45 >= 0
 DAY7:  x3 + x5 + x6 + x7 + x11 + x15 + x20 + x21 + x34 + x41 + x45 >= 0
 DAY8:  x5 + x9 + x13 + x17 + x20 + x23 + x26 + x32 + x36 + x39 >= 0
 DAY9:  x5 + x9 + x12 + x13 + x16 + x26 + x28 + x32 + x35 >= 0
 DAY10: x5 + x8 + x9 + x12 + x13 + x16 + x22 + x25 + x26 + x28 + x29 + x31
        + x42 + x43 + x46 >= 0
 DAY11: x2 + x6 + x8 + x9 + x10 + x12 + x14 + x18 + x21 + x22 + x24 + x27 + x30
        + x33 + x37 + x40 + x44 >= 0
 DAY12: x3 + x7 + x8 + x11 + x12 + x15 + x17 + x19 + x34 + x41 + x45 >= 0
 DAY13: x17 + x19 + x20 + x23 + x32 + x35 + x36 + x38 + x39 >= 0
 DAY14: x13 + x16 + x17 + x19 + x20 + x23 + x25 >= 0
 DAY15: x18 + x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 + x28 >= 0
 DAY16: x11 + x15 + x24 + x25 + x29 + x30 + x31 >= 0
 DAY17: x29 + x30 + x31 + x32 + x33 + x34 + x35 >= 0
 DAY18: x29 + x33 + x34 + x35 + x36 + x37 + x38 >= 0
 DAY19: x33 + x36 + x37 + x38 + x39 + x40 + x41 + x42 >= 0
 DAY20: x39 + x40 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 >= 0
 DAY21: x40 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 >= 0
 DAY22: x43 + x44 + x46 >= 0
 DAY23: >= 0
 DAY24: >= 0
 DAY25: >= 0
 LL1:   x7 + x8 + x15 + x16 + x18 + x19 + x21 + x22 + x27 + x28 + x30 + x31
        + x37 + x38 <= 1
 LL2:   x7 + x10 + x11 + x18 + x21 + x27 + x30 + x37 + x40 + x41 <= 1
 LL3:   x1 + x5 + x9 + x10 + x13 + x14 + x17 + x20 + x23 + x26 + x27 + x29
        + x32 + x36 + x39 + x43 <= 1
 LL4:   x6 + x10 + x14 + x24 + x27 + x33 + x44 <= 1
 LL5:   x4 + x6 + x8 + x10 + x12 + x14 + x16 + x19 + x22 + x24 + x25 + x28
        + x31 + x35 + x38 + x42 + x46 <= 1
 LL6:   x3 + x6 + x7 + x11 + x14 + x15 + x18 + x34 + x41 + x45 <= 1
 LL7:   x3 + x5 + x6 + x7 + x11 + x15 + x20 + x21 + x34 + x41 + x45 <= 1
 LL8:   x5 + x9 + x13 + x17 + x20 + x23 + x26 + x32 + x36 + x39 <= 1
 LL9:   x5 + x9 + x12 + x13 + x16 + x26 + x28 + x32 + x35 <= 1
 LL10:  x5 + x8 + x9 + x12 + x13 + x16 + x22 + x25 + x26 + x28 + x29 + x31
        + x42 + x43 + x46 <= 1
 LL11:  x2 + x6 + x8 + x9 + x10 + x12 + x14 + x18 + x21 + x22 + x24 + x27 + x30
        + x33 + x37 + x40 + x44 <= 1
 LL12:  x3 + x7 + x8 + x11 + x12 + x15 + x17 + x19 + x34 + x41 + x45 <= 1
 LL13:  x17 + x19 + x20 + x23 + x32 + x35 + x36 + x38 + x39 <= 1
 LL14:  x13 + x16 + x17 + x19 + x20 + x23 + x25 <= 1
 LL15:  x18 + x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 + x28 <= 1
 LL16:  x11 + x15 + x24 + x25 + x29 + x30 + x31 <= 1
 LL17:  x29 + x30 + x31 + x32 + x33 + x34 + x35 <= 1
 LL18:  x29 + x33 + x34 + x35 + x36 + x37 + x38 <= 1
 LL19:  x33 + x36 + x37 + x38 + x39 + x40 + x41 + x42 <= 1
 LL20:  x39 + x40 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 <= 1
 LL21:  x40 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 <= 1
 LL22:  x43 + x44 + x46 <= 1
 LL23:  <= 1
 LL24:  <= 1
 LL25:  <= 1
```

Εικόνα 6.3 Απεικόνιση του column generation sub problem

Τα «κορδόνια» που έχουν δημιουργηθεί για τον κάθε ιπτάμενο φαίνονται στους αντίστοιχους περιορισμούς MC1, MC2, MC3, MC4 και στη συνέχεια στους περιορισμούς των DAYS φαίνονται και οι ημέρες που περιλαμβάνει το κάθε ένα. Μετά το τέλος του column generation sub-problem οι διάφορες μεταβλητές απόφασης παίρνουν δεκαδικές τιμές μεταξύ του 0-1 οι οποίες απαρτίζουν τη βέλτιστη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος και σας παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 6.2 Πίνακας αποτελεσμάτων sub-problem

Variable Name	Solution Value
x23	0.500000
x26	0.500000
x33	0.500000
x44	0.500000
x11	1.000000
x16	0.500000
x38	0.500000

All other variables in the range 1-46 are 0.

Εν κατακλείδι, τελευταίο στάδιο της διαδικασίας είναι η ακεραιοποίηση της βέλτιστης λύσης που βρήκαμε μέσω του column generation sub-problem. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5.2.1.3. ξεκινάμε με την μεταβλητή απόφασης που έχει την μεγαλύτερη τιμή, πάμε στον ιπτάμενο που ανήκει αυτό το «κορδόνι» και διαγράφουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές που ανήκουν σε αυτόν. Αφού τελειώσει η διαδικασία για τον πρώτο περνάμε στον αμέσως επόμενο και ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία με τη διαφορά ότι έχουμε νέα «κορδόνια». Αυτό συμβαίνει διότι έχει αλλάξει η τιμή της βέλτιστης δυικής λύσης μετά τις αλλαγές που πραγματοποιήθηκαν για να γίνει η ακεραιοποίηση της μεταβλητής με την μεγαλύτερη τιμή . Παρακάτω βλέπουμε πως διαμορφώνεται το πρόβλημα μετά από την επιλογή τελικού προγράμματος άδειας για τον κάθε ιπτάμενο.

```
Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2
Subject To
 MC1:   x11  = 1
 MC2:   x18  = 1
 MC3:   x1 + x3 + x5 + x7 + x15 + x19 + x21 + x23  = 1
 MC4:   x2 + x4 + x6 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x16 + x17 + x20 + x22
        + x24 + x25  = 1
 DAY1:  x3 + x4 + x7 + x8 + x9 + x10 + x13 + x14 + x17 + x25 >= 0
 DAY2:  x3 + x5 + x18 + x19 >= 0
 DAY3:  x11 >= 0
 DAY4:  >= 0
 DAY5:  x2 + x4 + x6 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x16 + x17 + x20 + x22
        + x24 + x25 >= 0
 DAY6:  x1 + x3 + x5 + x7 + x15 + x19 + x21 + x23 >= 0
 DAY7:  x1 + x3 + x5 + x7 + x15 + x19 + x21 + x23 >= 0
 DAY8:  x11 >= 0
 DAY9:  x6 + x8 + x13 + x16 + x25 >= 0
 DAY10: x4 + x6 + x8 + x10 + x12 + x13 + x14 + x20 + x22 + x24 >= 0
 DAY11: x4 + x6 + x10 + x18 >= 0
 DAY12: x1 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x9 + x15 + x19 + x21 + x23 >= 0
 DAY13: x9 + x11 + x16 + x17 >= 0
 DAY14: x8 + x9 + x11 + x12 + x25 >= 0
 DAY15: x10 + x11 + x12 + x13 + x25 >= 0
 DAY16: x5 + x7 + x12 + x14 >= 0
 DAY17: x14 + x15 + x16 >= 0
 DAY18: x15 + x16 + x17 + x23 >= 0
 DAY19: x17 + x18 + x19 + x20 >= 0
 DAY20: x18 + x20 + x21 + x22 >= 0
 DAY21: x18 + x20 + x21 + x22 + x24 >= 0
 DAY22: x22 + x23 + x24 >= 0
 DAY23: x24 >= 0
 DAY24: >= 0
 DAY25: >= 0
 LL1:   x3 + x4 + x7 + x8 + x9 + x10 + x13 + x14 + x17 + x25 <= 1
 LL2:   x3 + x5 + x18 + x19 <= 1
 LL3:   x11 <= 1
 LL4:   <= 1
 LL5:   x2 + x4 + x6 + x8 + x9 + x10 + x12 + x13 + x14 + x16 + x17 + x20 + x22
        + x24 + x25 <= 1
 LL6:   x1 + x3 + x5 + x7 + x15 + x19 + x21 + x23 <= 1
 LL7:   x1 + x3 + x5 + x7 + x15 + x19 + x21 + x23 <= 1
 LL8:   x11 <= 1
 LL9:   x6 + x8 + x13 + x16 + x25 <= 1
 LL10:  x4 + x6 + x8 + x10 + x12 + x13 + x14 + x20 + x22 + x24 <= 1
 LL11:  x4 + x6 + x10 + x18 <= 1
 LL12:  x1 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x9 + x15 + x19 + x21 + x23 <= 1
 LL13:  x9 + x11 + x16 + x17 <= 1
 LL14:  x8 + x9 + x11 + x12 + x25 <= 1
 LL15:  x10 + x11 + x12 + x13 + x25 <= 1
 LL16:  x5 + x7 + x12 + x14 <= 1
 LL17:  x14 + x15 + x16 <= 1
 LL18:  x15 + x16 + x17 + x23 <= 1
 LL19:  x17 + x18 + x19 + x20 <= 1
 LL20:  x18 + x20 + x21 + x22 <= 1
 LL21:  x18 + x20 + x21 + x22 + x24 <= 1
 LL22:  x22 + x23 + x24 <= 1
 LL23:  x24 <= 1
 LL24:  <= 1
 LL25:  <= 1
Bounds
      x1 >= 0
      x2 >= 0
      x3 >= 0
      x4 >= 0
      x5 >= 0
      x6 >= 0
      x7 >= 0
      x8 >= 0
      x9 >= 0
      x10 >= 0
      x11 >= 0
      x12 >= 0
      x13 >= 0
      x14 >= 0
      x15 >= 0
      x16 >= 0
      x17 >= 0
      x18 >= 0
      x19 >= 0
      x20 >= 0
      x21 >= 0
      x22 >= 0
      x23 >= 0
      x24 >= 0
      x25 >= 0
Generals
 x1  x2  x3  x4  x5  x6  x7  x8  x9  x10  x11  x12  x13  x14  x15  x16  x17
 x18  x19  x20  x21  x22  x23  x24  x25
End
```

Εικόνα 6.4 Τελική μορφή του προβλήματος

Τέλος, η βέλτιστη λύση του συνολικού προβλήματος σας παρατίθεται στον ακόλουθο πίνακα όπου έχουμε μόνο ακέραιες μεταβλητές απόφασης άρα έχουμε ολοκληρώσει και την διαδικασία:

Πίνακας 6.3 Τελική βέλτιστη λύση

Μεταβλητή απόφασης	X11	X14	X18	X23	ΟΛΕΣ ΟΙ ΥΠΟΛΟΙΠΕΣ
Τιμή	1	1	1	1	0

6.3 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Συνεπώς, όπως είδαμε μέσω των αποτελεσμάτων οι άδειες διαμορφώνονται ως εξής:

- 1ος ιπτάμενος:3,8,13,14,15
- 2ος ιπτάμενος:2,11,19,20,21
- 3ος ιπτάμενος:6,7,12,18,22
- 4ος ιπτάμενος: 1,5,10,16,17

Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0 άρα όλοι οι ιπτάμενοι θα πάρουν το σύνολο των ημερών άδειας που τους αναλογεί (Full Entitlement). Επίσης, παρατηρούμε ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από το 4000 που ήταν μετά την διαδικασία των Bids πήγε στο 0 πράγμα το οποίο καθιστά το πρόγραμμα τελείως επιτυχημένο και ικανό να προσφέρει στην εκάστοτε εταιρία μια λύση που να εκμηδενίζει το κόστος που αφορά τον συγκεκριμένο τομέα.

Κεφάλαιο 7: Συμπεράσματα και προτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μία καταγραφή των συμπερασμάτων που προέκυψαν μέσα από την μελέτη και την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Κατόπιν παρατίθενται ορισμένες προτάσεις και ιδέες για την περαιτέρω ανάλυση του ζητήματος που μας απασχολεί και που θα μπορούσαν ενδεχομένως να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

7.1 Συμπεράσματα

Κατά την διάρκεια ενασχόλησης με το ζήτημα της ανάθεσης αδειών αλλά και έπειτα από την κατασκευή του κώδικα και την συγγραφή της εργασίας εξήχθησαν ποικίλα και ενδιαφέροντα συμπεράσματα τα οποία και συνοψίζονται παρακάτω.

Αρχικά, έγινε σαφές και επιβεβαιώθηκε πως είναι δυνατή η κατασκευή κώδικα ο οποίος ελέγχει τα αιτήματα των εργαζόμενων μιας εταιρίας, τα αξιολογεί σύμφωνα με την πολιτική που αυτή έχει θεσπίσει και αφού τα εγκρίνει ή τα απορρίψει, αναθέτει στους εργαζόμενους τις υπόλοιπες ημέρες άδειας που τους αναλογούν. Αποδεικνύεται πως κώδικες σαν και αυτόν που κατασκευάστηκε μπορούν να χρησιμοποιηθούν από πολλές και διαφορετικού τύπου εταιρίες και βιομηχανίες διότι προσφέρουν στον χειριστή τους μια πληθώρα μεταβαλλόμενων παραμέτρων με στόχο να προσαρμόζονται κάθε φορά στη δυναμική, στην πολιτική και γενικότερα στις ανάγκες των εταιριών.

Τέλος, μέσα από παραδείγματα και δοκιμές που έλαβαν χώρα μετά την ολοκλήρωση του κώδικα, διαπιστώθηκε πως η μεθοδολογία που επιλέχθηκε για την επίλυση του προβλήματος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική καθώς κατορθώνει στις περισσότερες περιπτώσεις να εκμηδενίσει το κόστος και μάλιστα σε αρκετά σύντομο χρονικό διάστημα, ακόμα και σε μεγαλύτερα προβλήματα. Συμπεραίνεται δηλαδή πως η μέθοδος Branch and Price είναι ικανή να επιλύσει αρκετά μεγάλα προβλήματα με τρόπο πλήρως αποδοτικό.

7.2 Προτάσεις

Σε αυτή την διπλωματική εργασία μελετήθηκε εκτενώς το ζήτημα της αδειοδότησης ιπταμένων σύμφωνα με τις επιθυμίες τους. Αν και ο κώδικας που κατασκευάστηκε είναι αρκετά ταχύς και αποτελεσματικός υπάρχουν σημαντικά περιθώρια βελτίωσης του.

Πέραν του ζητήματος της απόδοσής του, ως ιδέες για μελλοντική έρευνα και μελέτη τίθενται οι εξής στόχοι:

- Η δημιουργία ενός πιο «έξυπνου» κώδικα ο οποίος θα έχει τη δυνατότητα να αναθέτει στους εργαζόμενους μέρες άδειας που είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στα αιτήματά τους αν αυτά δεν μπορούν ικανοποιηθούν ή ακόμα και να αντιπροτείνει ο ίδιος ο κώδικας μέρες άδειας στους εργαζόμενους.
- Η ανακατασκευή του προβλήματος με τρόπο τέτοιο ώστε το κόστος να προκύπτει ανά ημέρα που δεν διατίθεται στον εργαζόμενο. Το κόστος δηλαδή να μην είναι πάγιο αλλά να μεταβάλλεται με τις αδιάθετες ημέρες άδειας.

Βιβλιογραφία-Πηγές

[1] AGIFORS, Airline Group of the International Federation of Operational Research Societies, URL: https://www.agifors.org/

[2] David R. Morrison, Sheldon H. Jacobson, Jason J. Sauppe and Edward C. Sewell, “Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning”. In *Discrete Optimization* (2016). ISSN: 15725286. DOI: https://doi.org/10.1016/j.disopt.2016.01.005.

[3] George Kozanidis, “Branch and price for covering shipments in a logistic distribution network with a fleet of aircraft”. In *Optimization Methods and Software* (2018). ISSN: 10294937. DOI: https://doi.org/10.1080/10556788.2017.1281923.

[4] George L. Nemhauser, “Column Generation for Linear and Integer Programming”. In *Documenta Mathematica* (2012). ISSN: 1431-0643

[5] Hanif D. Sherali, Ebru K. Bish and Xiaomei Zhu, “Airline fleet assignment concepts, models, and algorithms”. In *European Journal of Operational Research* (2006). ISSN: 0377-2217. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.01.056.

[6] Kiavash Kianfar, “Branch-and-Bound Algorithms”. In *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* (2011). ISBN: 9780470400630. DOI: https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0116.

[7] Marco E. Lubbecke, “Column Generation”. In *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* (2011). ISBN: 9780470400630. DOI: https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0158.

[8] Maximilian M. Etschmaier and Marvin Rothstein “Operations Research in the Management of the Airlines”. In *Omega 2* (1974). ISSN: 0305-0483, DOI: https://doi.org/10.1016/0305-0483(74)90087-5.

[9] Philip Kilby and Paul Shaw “Vehicle Routing”. In *Handbook of Constraint Programming* (2006). ISBN: 9780080463803. DOI: https://doi.org/10.1016/S1574-6526(06)80027-1

[10] Soumitra Pal, “Column Generation”. Dissertation, Department of Computer Science and Engineering, Indian Institute of Technology, Bombay, Mumbai.

[11] Αλεξάνδρα Μαυριδοπούλου, «Βέλτιστος χρονοπρογραμματισμός αδειών ιπτάμενου προσωπικού μέσω της δημιουργίας στηλών» (2019), Διπλωματική εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

[12] Δημήτρης Στογιάννης και Ιωάννης Κολέτσος, *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. 3η Έκδοση, (2017). ISBN:978-960-9400-62-6.

Παράρτημα

Α. Υπολογιστικό παράδειγμα

Για το παρόν παράδειγμα χρησιμοποιείται γεννήτρια τυχαίων αριθμών προκειμένου να προσομοιωθούν τα αιτήματα των ιπταμένων και να ανακτηθούν ορισμένα από τα δεδομένα εισόδου όπως το entitlement του καθενός. Τα δεδομένα στο τρέχον πρόβλημα είναι τα εξής:

N=8 ο αριθμός των ιπταμένων

T=90 ο συνολικός αριθμός των ημερών

MaxNumberOfBids=2 ο μέγιστος αριθμός επιθυμιών που θα ικανοποιήσει ο κώδικας για κάθε ιπτάμενο

separdays=3 ημέρες πρέπει να μεσολαβούν μεταξύ κάποιου block ημερών άδειας από το προηγούμενο και το επόμενο block

LimitLines=2 ο μέγιστος αριθμός ιπταμένων που επιτρέπεται να βρίσκονται σε άδεια την κάθε μέρα λειτουργίας της εταιρίας

C=1000 το κόστος για κάθε ιπτάμενο που δεν θα λάβει τον συνολικό αριθμό ημερών άδειας που δικαιούται

BlockLength=2 οι άδειες δίνονται σε «πακέτα» των 2 ημερών ή κάποιου ακέραιου πολλαπλάσιου του 2

Το entitlement του κάθε εργαζόμενου φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

Πίνακας Α.1 Entitlement

CREW MEMBER	ENTITLEMENT
MC1	14
MC2	14
MC3	16
MC4	14
MC5	14
MC6	14
MC7	14
MC8	18

**Ο περιορισμός που αφορά το BlockStartDay επιλέγεται να παραμείνει ανενεργός χάριν απλότητας.*

***Ως μεθοδολογία εξέτασης των προτιμήσεων χρησιμοποιείται ο ευρωπαϊκός τρόπος ανάθεσης αδειών (fair priority).*

Επιπλέον παρουσιάζονται τα αιτήματα αδειών του κάθε εργαζομένου στους παρακάτω πίνακες:

Πίνακας Α.2 Επιθυμίες των ιπταμένων

Crew Member 1		
BID	START	LENGTH
1	28	2
2	56	4
3	58	2
4	44	2
5	31	2
6	71	4
7	38	2

Crew Member 2		
BID	START	LENGTH
1	1	4
2	19	2
3	75	2
4	35	4
5	66	2
6	22	2
7	85	4
8	64	2
9	42	2
10	70	2
11	34	2
12	66	2
13	40	2
14	62	2
15	18	2
16	33	2
17	9	2
18	69	4
19	4	2

Crew Member 3		
BID	START	LENGTH
1	51	4
2	71	2
3	53	4
4	44	2

Crew Member 4		
BID	START	LENGTH
1	16	2
2	48	4
3	9	2
4	41	2
5	70	2
6	39	4
7	80	2
8	72	2
9	88	2
10	1	2
11	32	2
12	80	2
13	73	2
14	26	2
15	2	2
16	10	2
17	57	4
18	4	2

Crew Member 5		
BID	START	LENGTH
1	25	2

Crew Member 6		
BID	START	LENGTH
1	37	2

Crew Member 7		
BID	START	LENGTH
1	38	2
2	84	4
3	80	2
4	73	4
5	39	2
6	64	2
7	2	2
8	24	2
9	41	2
10	29	2
11	42	2
12	27	4
13	3	4

Crew Member 8		
BID	START	LENGTH
1	46	2
2	35	2
3	46	2
4	31	2
5	20	2
6	80	2
7	23	2
8	78	2
9	77	4
10	78	2

Έπειτα από την εκτέλεση του πρώτου μέρους του κώδικα πληροφορούμαστε για τα αιτήματα που εγκρίθηκαν ή απορρίφτηκαν για τον κάθε ιπτάμενο:

```
Crew member 1 was awarded bid 1
Crew member 2 was awarded bid 1
Crew member 3 was awarded bid 1
Crew member 4 was awarded bid 1
Crew member 5 was awarded bid 1
Crew member 6 was awarded bid 1
Crew member 7 was awarded bid 1
Crew member 8 was awarded bid 1
Crew member 1 was awarded bid 2
Crew member 1 was not awarded bid 3 due to max number of bids
Crew member 2 was awarded bid 2
Crew member 2 was not awarded bid 3 due to max number of bids
Crew member 3 was awarded bid 2
Crew member 3 was not awarded bid 3 due to max number of bids
Crew member 4 was awarded bid 2
Crew member 4 was not awarded bid 3 due to max number of bids
Crew member 7 was awarded bid 2
Crew member 7 was not awarded bid 3 due to max number of bids
Crew member 8 was awarded bid 2
Crew member 8 was not awarded bid 3 due to max number of bids
```

Εικόνα Α.1 Αναθέσεις μετά την διαδικασία των Bids

Τελικά λοιπόν οι μέρες που λαμβάνει ο κάθε ιπτάμενος μέσω των επιθυμιών του αλλά και της συμπλήρωσης των ημερών που απομένουν όπως και οι μεταβλητές απόφασης που παίρνουν την τιμή X=1 είναι οι εξής:

```
x20=1.000000
mc:1
day:6
day:7
day:11
day:12
day:13
day:14
day:29
day:30
day:34
day:35
day:57
day:58
day:59
day:60
```

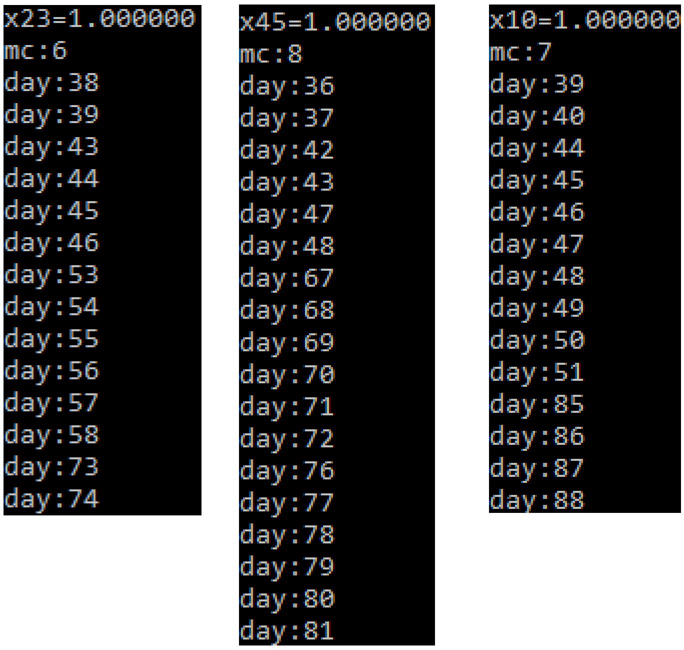
```
x28=1.000000
mc:2
day:2
day:3
day:4
day:5
day:9
day:10
day:11
day:12
day:20
day:21
day:27
day:28
day:61
day:62
```

```
x8=1.000000
mc:3
day:52
day:53
day:54
day:55
day:59
day:60
day:61
day:62
day:63
day:64
day:65
day:66
day:67
day:68
day:72
day:73
```

```
x24=1.000000
mc:4
day:2
day:3
day:17
day:18
day:25
day:26
day:49
day:50
day:51
day:52
day:69
day:70
day:74
day:75
```

```
x52=1.000000
mc:5
day:4
day:5
day:6
day:7
day:8
day:9
day:13
day:14
day:26
day:27
day:31
day:32
day:75
day:76
```

Εικόνα Α.2 Ημέρες που ανατίθενται στον κάθε ιπτάμενο(1)



```
x23=1.000000
mc:6
day:38
day:39
day:43
day:44
day:45
day:46
day:53
day:54
day:55
day:56
day:57
day:58
day:73
day:74
```

```
x45=1.000000
mc:8
day:36
day:37
day:42
day:43
day:47
day:48
day:67
day:68
day:69
day:70
day:71
day:72
day:76
day:77
day:78
day:79
day:80
day:81
```

```
x10=1.000000
mc:7
day:39
day:40
day:44
day:45
day:46
day:47
day:48
day:49
day:50
day:51
day:85
day:86
day:87
day:88
```

Εικόνα Α.3 Ημέρες που ανατίθενται στον κάθε ιπτάμενο (2)

Όπως παρατηρούμε, όλοι οι ιπτάμενοι έχουν συμπληρώσει όλες τις ημέρες αδειών τους ενώ ταυτόχρονα ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί που έχουμε θέσει. Συνεπώς, έχουμε καταλήξει με επιτυχία στη λύση του προβλήματος.

Ακολουθούν ορισμένες εικόνες που φανερώνουν την πορεία της επίλυσης

Το αρχικό πρόβλημα

```
\ENCODING=ISO-8859-1
\Problem name: autoalloc

Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4 + 1000 x5 + 1000 x6 + 1000 x7
       + 1000 x8
Subject To
 MC1:   x1  = 1
 MC2:   x2  = 1
 MC3:   x3  = 1
 MC4:   x4  = 1
 MC5:   x5  = 1
 MC6:   x6  = 1
 MC7:   x7  = 1
 MC8:   x8  = 1
 DAY1:  >= 0
 DAY2:  x2 >= 0
 DAY3:  x2 >= 0
 DAY4:  x2 >= 0
 DAY5:  x2 >= 0
 DAY6:  >= 0
 DAY7:  >= 0
 DAY8:  >= 0
 DAY9:  >= 0
 DAY10: >= 0
 DAY11: >= 0
 DAY12: >= 0
 DAY13: >= 0
 DAY14: >= 0
 DAY15: >= 0
 DAY16: >= 0
 DAY17: x4 >= 0
 DAY18: x4 >= 0
 DAY19: >= 0
 DAY20: x2 >= 0
 DAY21: x2 >= 0
 DAY22: >= 0
 DAY23: >= 0
 DAY24: >= 0
 DAY25: >= 0
 DAY26: x5 >= 0
 DAY27: x5 >= 0
 DAY28: >= 0
 DAY29: x1 >= 0
 DAY30: x1 >= 0
 DAY31: >= 0
 DAY32: >= 0
 DAY33: >= 0
 DAY34: >= 0
 DAY35: >= 0
 DAY36: x8 >= 0
 DAY37: x8 >= 0
 DAY38: x6 >= 0
 DAY39: x6 + x7 >= 0
 DAY40: x7 >= 0
 DAY41: >= 0
 DAY42: >= 0
```

```
DAY42: >= 0
DAY43: >= 0
DAY44: >= 0
DAY45: >= 0
DAY46: >= 0
DAY47: x8 >= 0
DAY48: x8 >= 0
DAY49: x4 >= 0
DAY50: x4 >= 0
DAY51: x4 >= 0
DAY52: x3 + x4 >= 0
DAY53: x3 >= 0
DAY54: x3 >= 0
DAY55: x3 >= 0
DAY56: >= 0
DAY57: x1 >= 0
DAY58: x1 >= 0
DAY59: x1 >= 0
DAY60: x1 >= 0
DAY61: >= 0
DAY62: >= 0
DAY63: >= 0
DAY64: >= 0
DAY65: >= 0
DAY66: >= 0
DAY67: >= 0
DAY68: >= 0
DAY69: >= 0
DAY70: >= 0
DAY71: >= 0
DAY72: x3 >= 0
DAY73: x3 >= 0
DAY74: >= 0
DAY75: >= 0
DAY76: >= 0
DAY77: >= 0
DAY78: >= 0
DAY79: >= 0
DAY80: >= 0
DAY81: >= 0
DAY82: >= 0
DAY83: >= 0
DAY84: >= 0
DAY85: x7 >= 0
DAY86: x7 >= 0
DAY87: x7 >= 0
DAY88: x7 >= 0
DAY89: >= 0
DAY90: >= 0
LL1:   <= 2
LL2:   x2 <= 2
LL3:   x2 <= 2
LL4:   x2 <= 2
LL5:   x2 <= 2
LL6:   <= 2
LL7:   <= 2
LL8:   <= 2
LL9:   <= 2
LL10:  <= 2
```

```
LL10:  <= 2
LL11:  <= 2
LL12:  <= 2
LL13:  <= 2
LL14:  <= 2
LL15:  <= 2
LL16:  <= 2
LL17:  x4 <= 2
LL18:  x4 <= 2
LL19:  <= 2
LL20:  x2 <= 2
LL21:  x2 <= 2
LL22:  <= 2
LL23:  <= 2
LL24:  <= 2
LL25:  <= 2
LL26:  x5 <= 2
LL27:  x5 <= 2
LL28:  <= 2
LL29:  x1 <= 2
LL30:  x1 <= 2
LL31:  <= 2
LL32:  <= 2
LL33:  <= 2
LL34:  <= 2
LL35:  <= 2
LL36:  x8 <= 2
LL37:  x8 <= 2
LL38:  x6 <= 2
LL39:  x6 + x7 <= 2
LL40:  x7 <= 2
LL41:  <= 2
LL42:  <= 2
LL43:  <= 2
LL44:  <= 2
LL45:  <= 2
LL46:  <= 2
LL47:  x8 <= 2
LL48:  x8 <= 2
LL49:  x4 <= 2
LL50:  x4 <= 2
LL51:  x4 <= 2
LL52:  x3 + x4 <= 2
LL53:  x3 <= 2
LL54:  x3 <= 2
LL55:  x3 <= 2
LL56:  <= 2
LL57:  x1 <= 2
LL58:  x1 <= 2
LL59:  x1 <= 2
LL60:  x1 <= 2
LL61:  <= 2
LL62:  <= 2
LL63:  <= 2
LL64:  <= 2
LL65:  <= 2
LL66:  <= 2
LL67:  <= 2
```

```
 LL68:  <= 2
 LL69:  <= 2
 LL70:  <= 2
 LL71:  <= 2
 LL72:  x3 <= 2
 LL73:  x3 <= 2
 LL74:  <= 2
 LL75:  <= 2
 LL76:  <= 2
 LL77:  <= 2
 LL78:  <= 2
 LL79:  <= 2
 LL80:  <= 2
 LL81:  <= 2
 LL82:  <= 2
 LL83:  <= 2
 LL84:  <= 2
 LL85:  x7 <= 2
 LL86:  x7 <= 2
 LL87:  x7 <= 2
 LL88:  x7 <= 2
 LL89:  <= 2
 LL90:  <= 2
End
```

Εικόνα Α.4 Πορεία της επίλυσης

Μορφή του sub-problem

```
\ENCODING=ISO-8859-1
\Problem name: autoalloc

Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4 + 1000 x5 + 1000 x6 + 1000 x7
       + 1000 x8
Subject To
 MC1:    x1 + x9 + x17 + x23 + x27  = 1
 MC2:    x2 + x10 + x18 + x24 + x28 + x38 + x47  = 1
 MC3:    x3 + x11 + x19 + x48 + x53 + x57  = 1
 MC4:    x4 + x12 + x29 + x32 + x58  = 1
 MC5:    x5 + x13 + x20 + x25 + x30 + x33 + x35 + x39 + x49 + x59  = 1
 MC6:    x6 + x14 + x21 + x26 + x31 + x34 + x36 + x40 + x41 + x43 + x45 + x50
         + x54 + x60  = 1
 MC7:    x7 + x15 + x51 + x55 + x61  = 1
 MC8:    x8 + x16 + x22 + x37 + x42 + x44 + x46 + x52 + x56 + x62  = 1
 DAY1:   x9 >= 0
 DAY2:   x2 + x9 + x10 + x12 + x18 + x23 + x24 + x25 + x28 + x32 + x38 + x47
         + x58 >= 0
 DAY3:   x2 + x9 + x10 + x12 + x17 + x18 + x23 + x24 + x25 + x28 + x32 + x35
         + x38 + x47 + x58 >= 0
 DAY4:   x2 + x9 + x10 + x17 + x18 + x20 + x24 + x28 + x35 + x38 + x47 >= 0
 DAY5:   x2 + x9 + x10 + x17 + x18 + x20 + x24 + x28 + x30 + x38 + x47 >= 0
 DAY6:   x9 + x17 + x20 + x27 + x30 >= 0
 DAY7:   x9 + x17 + x20 + x25 + x27 >= 0
 DAY8:   x9 + x17 + x20 + x23 + x25 >= 0
 DAY9:   x10 + x17 + x18 + x20 + x23 + x24 + x25 + x35 + x38 + x47 >= 0
 DAY10: x10 + x17 + x18 + x23 + x24 + x25 + x30 + x35 + x38 + x47 >= 0
 DAY11: x10 + x18 + x23 + x24 + x25 + x27 + x29 + x30 + x35 + x38 + x47 >= 0
 DAY12: x10 + x18 + x24 + x25 + x27 + x28 + x29 + x30 + x35 + x38 + x47 >= 0
 DAY13: x20 + x25 + x27 + x28 + x30 + x35 >= 0
 DAY14: x20 + x25 + x27 + x28 + x30 + x35 >= 0
 DAY15: x28 + x30 >= 0
 DAY16: >= 0
 DAY17: x4 + x12 + x29 + x32 + x58 >= 0
 DAY18: x4 + x12 + x29 + x32 + x58 >= 0
 DAY19: >= 0
 DAY20: x2 + x10 + x18 + x24 + x28 + x38 + x47 >= 0
 DAY21: x2 + x10 + x18 + x24 + x28 + x38 + x47 >= 0
 DAY22: >= 0
 DAY23: >= 0
 DAY24: x29 >= 0
 DAY25: x10 + x12 + x18 + x28 + x29 + x32 + x58 >= 0
 DAY26: x5 + x10 + x12 + x13 + x18 + x20 + x25 + x28 + x30 + x32 + x33 + x35
        + x39 + x49 + x58 + x59 >= 0
 DAY27: x5 + x13 + x20 + x24 + x25 + x30 + x33 + x35 + x38 + x39 + x49 + x59
        >= 0
 DAY28: x24 + x38 >= 0
 DAY29: x1 + x9 + x17 + x23 + x27 >= 0
 DAY30: x1 + x9 + x17 + x23 + x27 >= 0
 DAY31: x13 + x30 + x33 + x35 + x39 + x49 + x59 >= 0
 DAY32: x13 + x30 + x33 + x35 + x39 + x49 + x59 >= 0
 DAY33: x13 + x33 + x39 + x49 + x59 >= 0
 DAY34: x13 + x20 + x23 + x27 + x33 + x39 + x49 + x59 >= 0
 DAY35: x20 + x23 + x27 + x39 + x49 >= 0
 DAY36: x8 + x16 + x22 + x37 + x39 + x42 + x44 + x46 + x49 + x52 + x56 + x62
        >= 0
 DAY37: x8 + x16 + x22 + x37 + x39 + x42 + x44 + x46 + x49 + x52 + x56 + x62
        >= 0
 DAY38: x6 + x13 + x14 + x21 + x26 + x31 + x33 + x34 + x36 + x39 + x40 + x41
        + x43 + x45 + x49 + x50 + x54 + x59 + x60 >= 0
 DAY39: x6 + x7 + x13 + x14 + x15 + x21 + x26 + x31 + x33 + x34 + x36 + x40
        + x41 + x43 + x45 + x50 + x51 + x54 + x55 + x59 + x60 + x61 >= 0
 DAY40: x7 + x13 + x15 + x33 + x51 + x55 + x59 + x61 >= 0
 DAY41: x13 + x33 + x59 >= 0
```

```
DAY42: x13 + x16 + x22 + x33 + x37 + x42 + x44 + x46 + x52 + x56 + x59 + x62
       >= 0
DAY43: x13 + x14 + x16 + x21 + x22 + x26 + x31 + x33 + x34 + x36 + x37 + x40
       + x41 + x42 + x44 + x45 + x46 + x50 + x52 + x54 + x56 + x59 + x62 >= 0
DAY44: x14 + x15 + x21 + x26 + x31 + x34 + x36 + x40 + x41 + x43 + x45 + x50
       + x54 + x55 + x60 + x61 >= 0
DAY45: x14 + x15 + x21 + x31 + x34 + x36 + x39 + x40 + x41 + x43 + x54 + x55
       + x60 + x61 >= 0
DAY46: x14 + x15 + x21 + x31 + x34 + x36 + x39 + x40 + x41 + x43 + x51 + x54
       + x55 + x60 + x61 >= 0
DAY47: x8 + x15 + x16 + x21 + x22 + x36 + x37 + x40 + x42 + x43 + x44 + x46
       + x51 + x52 + x55 + x56 + x60 + x61 + x62 >= 0
DAY48: x8 + x15 + x16 + x21 + x22 + x26 + x36 + x37 + x40 + x42 + x43 + x44
       + x45 + x46 + x52 + x56 + x62 >= 0
DAY49: x4 + x12 + x15 + x21 + x26 + x29 + x32 + x36 + x40 + x43 + x45 + x58
       >= 0
DAY50: x4 + x12 + x14 + x15 + x21 + x26 + x29 + x32 + x34 + x36 + x40 + x41
       + x58 >= 0
DAY51: x4 + x12 + x14 + x15 + x26 + x29 + x32 + x34 + x41 + x54 + x55 + x58
       >= 0
DAY52: x3 + x4 + x11 + x12 + x14 + x16 + x19 + x29 + x32 + x34 + x44 + x48
       + x53 + x54 + x55 + x57 + x58 >= 0
DAY53: x3 + x11 + x14 + x16 + x19 + x22 + x31 + x34 + x37 + x44 + x48 + x53
       + x54 + x55 + x56 + x57 + x60 + x61 + x62 >= 0
DAY54: x3 + x11 + x14 + x16 + x19 + x22 + x31 + x34 + x36 + x37 + x42 + x48
       + x53 + x54 + x55 + x56 + x57 + x60 + x61 + x62 >= 0
DAY55: x3 + x11 + x14 + x16 + x19 + x22 + x26 + x31 + x34 + x36 + x37 + x41
       + x42 + x43 + x47 + x48 + x49 + x50 + x51 + x53 + x57 >= 0
DAY56: x16 + x22 + x26 + x31 + x37 + x41 + x42 + x43 + x45 + x46 + x47 + x49
       + x50 + x51 + x52 >= 0
DAY57: x1 + x9 + x16 + x17 + x21 + x22 + x23 + x26 + x27 + x31 + x40 + x41
       + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 + x52 >= 0
DAY58: x1 + x9 + x16 + x17 + x21 + x22 + x23 + x26 + x27 + x29 + x31 + x40
       + x41 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 + x56 + x60 + x61 >= 0
DAY59: x1 + x9 + x10 + x11 + x16 + x17 + x23 + x24 + x27 + x28 + x29 + x42
       + x44 + x45 + x46 + x53 + x56 + x60 + x61 >= 0
DAY60: x1 + x9 + x10 + x11 + x16 + x17 + x18 + x23 + x24 + x27 + x28 + x37
       + x42 + x44 + x46 + x53 + x56 >= 0
DAY61: x11 + x16 + x18 + x19 + x37 + x38 + x42 + x44 + x46 + x53 + x54 + x56
       + x57 + x62 >= 0
DAY62: x11 + x19 + x22 + x37 + x38 + x42 + x44 + x46 + x53 + x54 + x57 + x62
       >= 0
DAY63: x11 + x19 + x22 + x37 + x42 + x44 + x45 + x46 + x47 + x48 + x50 + x51
       + x52 + x57 + x58 + x60 + x62 >= 0
DAY64: x11 + x19 + x22 + x37 + x44 + x45 + x46 + x47 + x48 + x50 + x51 + x52
       + x57 + x58 + x60 + x62 >= 0
DAY65: x11 + x19 + x22 + x37 + x46 + x48 + x50 + x51 + x52 + x56 >= 0
DAY66: x11 + x19 + x48 + x50 + x51 + x52 + x53 + x56 >= 0
DAY67: x11 + x12 + x19 + x48 + x50 + x52 + x53 + x56 >= 0
DAY68: x11 + x12 + x19 + x48 + x50 + x52 + x56 + x62 >= 0
DAY69: x32 + x52 + x62 >= 0
DAY70: x32 + x52 + x62 >= 0
DAY71: x62 >= 0
DAY72: x3 + x11 + x12 + x13 + x14 + x19 + x20 + x21 + x25 + x26 + x35 + x41
       + x43 + x48 + x53 + x54 + x57 >= 0
DAY73: x3 + x11 + x12 + x13 + x14 + x19 + x20 + x21 + x25 + x26 + x29 + x30
       + x31 + x35 + x36 + x41 + x43 + x45 + x48 + x53 + x54 + x57 >= 0
DAY74: x29 + x30 + x31 + x32 + x33 + x34 + x36 + x39 + x40 + x45 + x49 + x50
       >= 0
DAY75: x32 + x33 + x34 + x39 + x40 + x49 + x50 + x58 + x59 + x60 >= 0
DAY76: x58 + x59 + x60 >= 0
DAY77: x19 + x48 + x53 + x57 >= 0
DAY78: x19 + x48 + x53 + x57 >= 0
DAY79: x48 + x53 + x57 >= 0
DAY80: x48 + x53 + x57 >= 0
DAY81: x57 >= 0
DAY82: x57 >= 0
```

```
DAY83: >= 0
DAY84: >= 0
DAY85: x7 + x15 + x51 + x55 + x61 >= 0
DAY86: x7 + x15 + x51 + x55 + x61 >= 0
DAY87: x7 + x15 + x16 + x22 + x37 + x42 + x46 + x51 + x55 + x61 + x62 >= 0
DAY88: x7 + x15 + x16 + x22 + x37 + x42 + x44 + x46 + x51 + x52 + x55 + x56
       + x61 + x62 >= 0
DAY89: x44 + x52 + x56 >= 0
DAY90: >= 0
LL1:   x9 <= 2
LL2:   x2 + x9 + x10 + x12 + x18 + x23 + x24 + x25 + x28 + x32 + x38 + x47
       + x58 <= 2
LL3:   x2 + x9 + x10 + x12 + x17 + x18 + x23 + x24 + x25 + x28 + x32 + x35
       + x38 + x47 + x58 <= 2
LL4:   x2 + x9 + x10 + x17 + x18 + x20 + x24 + x28 + x35 + x38 + x47 <= 2
LL5:   x2 + x9 + x10 + x17 + x18 + x20 + x24 + x28 + x30 + x38 + x47 <= 2
LL6:   x9 + x17 + x20 + x27 + x30 <= 2
LL7:   x9 + x17 + x20 + x25 + x27 <= 2
LL8:   x9 + x17 + x20 + x23 + x25 <= 2
LL9:   x10 + x17 + x18 + x20 + x23 + x24 + x25 + x35 + x38 + x47 <= 2
LL10:  x10 + x17 + x18 + x23 + x24 + x25 + x30 + x35 + x38 + x47 <= 2
LL11:  x10 + x18 + x23 + x24 + x25 + x27 + x29 + x30 + x35 + x38 + x47 <= 2
LL12:  x10 + x18 + x24 + x25 + x27 + x28 + x29 + x30 + x35 + x38 + x47 <= 2
LL13:  x20 + x25 + x27 + x28 + x30 + x35 <= 2
LL14:  x20 + x25 + x27 + x28 + x30 + x35 <= 2
LL15:  x28 + x30 <= 2
LL16:  <= 2
LL17:  x4 + x12 + x29 + x32 + x58 <= 2
LL18:  x4 + x12 + x29 + x32 + x58 <= 2
LL19:  <= 2
LL20:  x2 + x10 + x18 + x24 + x28 + x38 + x47 <= 2
LL21:  x2 + x10 + x18 + x24 + x28 + x38 + x47 <= 2
LL22:  <= 2
LL23:  <= 2
LL24:  x29 <= 2
LL25:  x10 + x12 + x18 + x28 + x29 + x32 + x58 <= 2
LL26:  x5 + x10 + x12 + x13 + x18 + x20 + x25 + x28 + x30 + x32 + x33 + x35
       + x39 + x49 + x58 + x59 <= 2
LL27:  x5 + x13 + x20 + x24 + x25 + x30 + x33 + x35 + x38 + x39 + x49 + x59
       <= 2
LL28:  x24 + x38 <= 2
LL29:  x1 + x9 + x17 + x23 + x27 <= 2
LL30:  x1 + x9 + x17 + x23 + x27 <= 2
LL31:  x13 + x30 + x33 + x35 + x39 + x49 + x59 <= 2
LL32:  x13 + x30 + x33 + x35 + x39 + x49 + x59 <= 2
LL33:  x13 + x33 + x39 + x49 + x59 <= 2
LL34:  x13 + x20 + x23 + x27 + x33 + x39 + x49 + x59 <= 2
LL35:  x20 + x23 + x27 + x39 + x49 <= 2
LL36:  x8 + x16 + x22 + x37 + x39 + x42 + x44 + x46 + x49 + x52 + x56 + x62
       <= 2
LL37:  x8 + x16 + x22 + x37 + x39 + x42 + x44 + x46 + x49 + x52 + x56 + x62
       <= 2
LL38:  x6 + x13 + x14 + x21 + x26 + x31 + x33 + x34 + x36 + x39 + x40 + x41
       + x43 + x45 + x49 + x50 + x54 + x59 + x60 <= 2
LL39:  x6 + x7 + x13 + x14 + x15 + x21 + x26 + x31 + x33 + x34 + x36 + x40
       + x41 + x43 + x45 + x50 + x51 + x54 + x55 + x59 + x60 + x61 <= 2
LL40:  x7 + x13 + x15 + x33 + x51 + x55 + x59 + x61 <= 2
LL41:  x13 + x33 + x59 <= 2
LL42:  x13 + x16 + x22 + x33 + x37 + x42 + x44 + x46 + x52 + x56 + x59 + x62
       <= 2
LL43:  x13 + x14 + x16 + x21 + x22 + x26 + x31 + x33 + x34 + x36 + x37 + x40
       + x41 + x42 + x44 + x45 + x46 + x50 + x52 + x54 + x56 + x59 + x62 <= 2
LL44:  x14 + x15 + x21 + x26 + x31 + x34 + x36 + x40 + x41 + x43 + x45 + x50
       + x54 + x55 + x60 + x61 <= 2
LL45:  x14 + x15 + x21 + x31 + x34 + x36 + x39 + x40 + x41 + x43 + x54 + x55
       + x60 + x61 <= 2
```

```
 LL46:  x14 + x15 + x21 + x31 + x34 + x36 + x39 + x40 + x41 + x43 + x51 + x54
        + x55 + x60 + x61 <= 2
 LL47:  x8 + x15 + x16 + x21 + x22 + x36 + x37 + x40 + x42 + x43 + x44 + x46
        + x51 + x52 + x55 + x56 + x60 + x61 + x62 <= 2
 LL48:  x8 + x15 + x16 + x21 + x22 + x26 + x36 + x37 + x40 + x42 + x43 + x44
        + x45 + x46 + x52 + x56 + x62 <= 2
 LL49:  x4 + x12 + x15 + x21 + x26 + x29 + x32 + x36 + x40 + x43 + x45 + x58
        <= 2
 LL50:  x4 + x12 + x14 + x15 + x21 + x26 + x29 + x32 + x34 + x36 + x40 + x41
        + x58 <= 2
 LL51:  x4 + x12 + x14 + x15 + x26 + x29 + x32 + x34 + x41 + x54 + x55 + x58
        <= 2
 LL52:  x3 + x4 + x11 + x12 + x14 + x16 + x19 + x29 + x32 + x34 + x44 + x48
        + x53 + x54 + x55 + x57 + x58 <= 2
 LL53:  x3 + x11 + x14 + x16 + x19 + x22 + x31 + x34 + x37 + x44 + x48 + x53
        + x54 + x55 + x56 + x57 + x60 + x61 + x62 <= 2
 LL54:  x3 + x11 + x14 + x16 + x19 + x22 + x31 + x34 + x36 + x37 + x42 + x48
        + x53 + x54 + x55 + x56 + x57 + x60 + x61 + x62 <= 2
 LL55:  x3 + x11 + x14 + x16 + x19 + x22 + x26 + x31 + x34 + x36 + x37 + x41
        + x42 + x43 + x47 + x48 + x49 + x50 + x51 + x53 + x57 <= 2
 LL56:  x16 + x22 + x26 + x31 + x37 + x41 + x42 + x43 + x45 + x46 + x47 + x49
        + x50 + x51 + x52 <= 2
 LL57:  x1 + x9 + x16 + x17 + x21 + x22 + x23 + x26 + x27 + x31 + x40 + x41
        + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 + x52 <= 2
 LL58:  x1 + x9 + x16 + x17 + x21 + x22 + x23 + x26 + x27 + x29 + x31 + x40
        + x41 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 + x56 + x60 + x61 <= 2
 LL59:  x1 + x9 + x10 + x11 + x16 + x17 + x23 + x24 + x27 + x28 + x29 + x42
        + x44 + x45 + x46 + x53 + x56 + x60 + x61 <= 2
 LL60:  x1 + x9 + x10 + x11 + x16 + x17 + x18 + x23 + x24 + x27 + x28 + x37
        + x42 + x44 + x46 + x53 + x56 <= 2
 LL61:  x11 + x16 + x18 + x19 + x37 + x38 + x42 + x44 + x46 + x53 + x54 + x56
        + x57 + x62 <= 2
 LL62:  x11 + x19 + x22 + x37 + x38 + x42 + x44 + x46 + x53 + x54 + x57 + x62
        <= 2
 LL63:  x11 + x19 + x22 + x37 + x42 + x44 + x45 + x46 + x47 + x48 + x50 + x51
        + x52 + x57 + x58 + x60 + x62 <= 2
 LL64:  x11 + x19 + x22 + x37 + x44 + x45 + x46 + x47 + x48 + x50 + x51 + x52
        + x57 + x58 + x60 + x62 <= 2
 LL65:  x11 + x19 + x22 + x37 + x46 + x48 + x50 + x51 + x52 + x56 <= 2
 LL66:  x11 + x19 + x48 + x50 + x51 + x52 + x53 + x56 <= 2
 LL67:  x11 + x12 + x19 + x48 + x50 + x52 + x53 + x56 <= 2
 LL68:  x11 + x12 + x19 + x48 + x50 + x52 + x56 + x62 <= 2
 LL69:  x32 + x52 + x62 <= 2
 LL70:  x32 + x52 + x62 <= 2
 LL71:  x62 <= 2
 LL72:  x3 + x11 + x12 + x13 + x14 + x19 + x20 + x21 + x25 + x26 + x35 + x41
        + x43 + x48 + x53 + x54 + x57 <= 2
 LL73:  x3 + x11 + x12 + x13 + x14 + x19 + x20 + x21 + x25 + x26 + x29 + x30
        + x31 + x35 + x36 + x41 + x43 + x45 + x48 + x53 + x54 + x57 <= 2
 LL74:  x29 + x30 + x31 + x32 + x33 + x34 + x36 + x39 + x40 + x45 + x49 + x50
        <= 2
 LL75:  x32 + x33 + x34 + x39 + x40 + x49 + x50 + x58 + x59 + x60 <= 2
 LL76:  x58 + x59 + x60 <= 2
 LL77:  x19 + x48 + x53 + x57 <= 2
 LL78:  x19 + x48 + x53 + x57 <= 2
 LL79:  x48 + x53 + x57 <= 2
 LL80:  x48 + x53 + x57 <= 2
 LL81:  x57 <= 2
 LL82:  x57 <= 2
 LL83:  <= 2
 LL84:  <= 2
 LL85:  x7 + x15 + x51 + x55 + x61 <= 2
 LL86:  x7 + x15 + x51 + x55 + x61 <= 2
 LL87:  x7 + x15 + x16 + x22 + x37 + x42 + x46 + x51 + x55 + x61 + x62 <= 2
 LL88:  x7 + x15 + x16 + x22 + x37 + x42 + x44 + x46 + x51 + x52 + x55 + x56
        + x61 + x62 <= 2
 LL89:  x44 + x52 + x56 <= 2
 LL90:  <= 2
End
```

Εικόνα Α.5 Μορφή του sub-problem

Οι δεκαδικές μεταβλητές

Όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα υπάρχουν ορισμένες μεταβλητές που δεν είναι δεκαδικές και για τις οποίες συμβαίνει η διαδικασία της ακεραιοποίησης.

Πίνακας Α.3 Δεκαδικές τιμές των μεταβλητών απόφασης

Variable Name	Solution Value
x27	1.000000
x38	1.000000
x48	0.500000
x53	0.500000
x32	1.000000
x20	0.500000
x39	0.500000
x26	0.500000
x50	0.500000
x15	0.500000
x61	0.500000
x52	0.500000
x62	0.500000

All other variables in the range 1-62 are 0.

Η τελική μορφή

Στο τέλος της διαδικασίας η μορφή του προβλήματος είναι η εξής:

```
\ENCODING=ISO-8859-1
\Problem name: autoalloc

Minimize
 obj1: 1000 x1 + 1000 x2 + 1000 x3 + 1000 x4 + 1000 x5
Subject To
 MC1:   x1 + x6 + x12 + x17 + x20 + x50  = 1
 MC2:   x2 + x7 + x13 + x18 + x21 + x28 + x33 + x42 + x51  = 1
 MC3:   x3 + x8 + x14 + x34 + x37 + x39 + x43  = 1
 MC4:   x24  = 1
 MC5:   x4 + x9 + x15 + x19 + x22 + x25 + x26 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46
        + x47 + x48 + x49 + x52  = 1
 MC6:   x23  = 1
 MC7:   x10  = 1
 MC8:   x5 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 + x45  = 1
 DAY1:  x6 + x46 + x48 >= 0
 DAY2:  x2 + x6 + x7 + x13 + x17 + x18 + x19 + x21 + x24 + x28 + x33 + x42
        + x46 + x48 + x51 >= 0
 DAY3:  x2 + x6 + x7 + x12 + x13 + x17 + x18 + x19 + x21 + x24 + x26 + x28
        + x33 + x42 + x46 + x47 + x51 >= 0
 DAY4:  x2 + x6 + x7 + x12 + x13 + x15 + x18 + x21 + x26 + x28 + x33 + x42
        + x46 + x47 + x50 + x51 + x52 >= 0
 DAY5:  x2 + x6 + x7 + x12 + x13 + x15 + x18 + x21 + x22 + x28 + x33 + x42
        + x46 + x47 + x49 + x50 + x51 + x52 >= 0
 DAY6:  x6 + x12 + x15 + x20 + x22 + x46 + x47 + x49 + x50 + x52 >= 0
 DAY7:  x6 + x12 + x15 + x19 + x20 + x46 + x47 + x49 + x50 + x52 >= 0
 DAY8:  x6 + x12 + x15 + x17 + x19 + x46 + x47 + x48 + x49 + x50 + x52 >= 0
 DAY9:  x7 + x12 + x13 + x15 + x17 + x18 + x19 + x26 + x28 + x33 + x42 + x47
        + x48 + x49 + x50 + x52 >= 0
 DAY10: x7 + x12 + x13 + x17 + x18 + x19 + x22 + x26 + x28 + x33 + x42 + x47
        + x48 + x49 + x50 + x51 >= 0
 DAY11: x7 + x13 + x17 + x18 + x19 + x20 + x22 + x26 + x28 + x33 + x42 + x48
        + x49 + x50 + x51 >= 0
 DAY12: x7 + x13 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22 + x26 + x28 + x33 + x42 + x49
        >= 0
 DAY13: x15 + x19 + x20 + x21 + x22 + x26 + x52 >= 0
 DAY14: x15 + x19 + x20 + x21 + x22 + x26 + x52 >= 0
 DAY15: x21 + x22 + x51 >= 0
 DAY16: x51 >= 0
 DAY17: x24 >= 0
 DAY18: x24 >= 0
 DAY19: >= 0
 DAY20: x2 + x7 + x13 + x18 + x21 + x28 + x33 + x42 + x51 >= 0
 DAY21: x2 + x7 + x13 + x18 + x21 + x28 + x33 + x42 + x51 >= 0
 DAY22: >= 0
 DAY23: >= 0
 DAY24: >= 0
 DAY25: x7 + x13 + x21 + x24 + x42 + x51 >= 0
 DAY26: x4 + x7 + x9 + x13 + x15 + x19 + x21 + x22 + x24 + x25 + x26 + x29
        + x35 + x40 + x42 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49 + x51 + x52 >= 0
 DAY27: x4 + x9 + x15 + x18 + x19 + x22 + x25 + x26 + x28 + x29 + x35 + x40
        + x44 + x46 + x47 + x48 + x49 + x52 >= 0
 DAY28: x18 + x28 >= 0
 DAY29: x1 + x6 + x12 + x17 + x20 + x50 >= 0
 DAY30: x1 + x6 + x12 + x17 + x20 + x50 >= 0
 DAY31: x9 + x22 + x25 + x26 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49
        + x52 >= 0
 DAY32: x9 + x22 + x25 + x26 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49
        + x52 >= 0
 DAY33: x9 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 >= 0
 DAY34: x9 + x15 + x17 + x20 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 >= 0
 DAY35: x15 + x17 + x20 + x29 + x35 + x44 >= 0
 DAY36: x5 + x11 + x16 + x27 + x29 + x30 + x31 + x32 + x35 + x36 + x38 + x41
        + x44 + x45 + x48 >= 0
 DAY37: x5 + x11 + x16 + x27 + x29 + x30 + x31 + x32 + x35 + x36 + x38 + x41
```

```
       + x44 + x45 + x48 >= 0
DAY38: x9 + x23 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 >= 0
DAY39: x9 + x10 + x23 + x25 + x40 >= 0
DAY40: x9 + x10 + x25 + x40 >= 0
DAY41: x9 + x25 + x40 >= 0
DAY42: x9 + x11 + x16 + x25 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x40 + x41
       + x45 >= 0
DAY43: x9 + x11 + x16 + x23 + x25 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x40
       + x41 + x45 >= 0
DAY44: x10 + x23 >= 0
DAY45: x10 + x23 + x29 + x44 >= 0
DAY46: x10 + x23 + x29 + x44 >= 0
DAY47: x5 + x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 + x45
       >= 0
DAY48: x5 + x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 + x45
       >= 0
DAY49: x10 + x24 >= 0
DAY50: x10 + x24 >= 0
DAY51: x10 + x24 >= 0
DAY52: x3 + x8 + x11 + x14 + x24 + x31 + x34 + x37 + x39 + x43 >= 0
DAY53: x3 + x8 + x11 + x14 + x16 + x23 + x27 + x31 + x34 + x37 + x38 + x39
       + x41 + x43 >= 0
DAY54: x3 + x8 + x11 + x14 + x16 + x23 + x27 + x30 + x34 + x37 + x38 + x39
       + x41 + x43 >= 0
DAY55: x3 + x8 + x11 + x14 + x16 + x23 + x27 + x30 + x33 + x34 + x35 + x37
       + x39 + x43 >= 0
DAY56: x11 + x16 + x23 + x27 + x30 + x32 + x33 + x35 + x36 >= 0
DAY57: x1 + x6 + x11 + x12 + x16 + x17 + x20 + x23 + x30 + x31 + x32 + x36
       + x50 >= 0
DAY58: x1 + x6 + x11 + x12 + x16 + x17 + x20 + x23 + x30 + x31 + x32 + x38
       + x50 >= 0
DAY59: x1 + x6 + x7 + x8 + x11 + x12 + x17 + x18 + x20 + x21 + x30 + x31 + x32
       + x37 + x38 + x50 + x51 >= 0
DAY60: x1 + x6 + x7 + x8 + x11 + x12 + x13 + x17 + x18 + x20 + x21 + x27 + x30
       + x31 + x32 + x37 + x38 + x50 + x51 >= 0
DAY61: x8 + x11 + x13 + x14 + x27 + x28 + x30 + x31 + x32 + x37 + x38 + x39
       + x41 >= 0
DAY62: x8 + x14 + x16 + x27 + x28 + x30 + x31 + x32 + x37 + x39 + x41 >= 0
DAY63: x8 + x14 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x33 + x34 + x36 + x39 + x41
       >= 0
DAY64: x8 + x14 + x16 + x27 + x31 + x32 + x33 + x34 + x36 + x39 + x41 >= 0
DAY65: x8 + x14 + x16 + x27 + x32 + x34 + x36 + x38 >= 0
DAY66: x8 + x14 + x34 + x36 + x37 + x38 >= 0
DAY67: x8 + x14 + x34 + x36 + x37 + x38 + x42 + x43 + x45 >= 0
DAY68: x8 + x14 + x34 + x36 + x38 + x41 + x42 + x43 + x45 >= 0
DAY69: x24 + x36 + x41 + x45 >= 0
DAY70: x24 + x36 + x41 + x45 >= 0
DAY71: x41 + x45 >= 0
DAY72: x3 + x8 + x9 + x14 + x15 + x19 + x26 + x34 + x37 + x39 + x43 + x45 >= 0
DAY73: x3 + x8 + x9 + x14 + x15 + x19 + x22 + x23 + x26 + x34 + x37 + x39
       + x43 >= 0
DAY74: x22 + x23 + x24 + x25 + x29 + x35 >= 0
DAY75: x24 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49 + x52 >= 0
DAY76: x40 + x44 + x45 + x46 + x47 + x48 + x49 + x52 >= 0
DAY77: x14 + x34 + x37 + x39 + x43 + x45 >= 0
DAY78: x14 + x34 + x37 + x39 + x43 + x45 >= 0
DAY79: x34 + x37 + x39 + x43 + x45 >= 0
DAY80: x34 + x37 + x39 + x43 + x45 >= 0
DAY81: x39 + x43 + x45 >= 0
DAY82: x39 + x43 >= 0
DAY83: x43 >= 0
DAY84: x43 >= 0
DAY85: x10 >= 0
DAY86: x10 >= 0
DAY87: x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x32 + x41 >= 0
DAY88: x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 >= 0
DAY89: x31 + x36 + x38 >= 0
```

```
DAY90: >= 0
LL1:   x6 + x46 + x48 <= 2
LL2:   x2 + x6 + x7 + x13 + x17 + x18 + x19 + x21 + x24 + x28 + x33 + x42
       + x46 + x48 + x51 <= 2
LL3:   x2 + x6 + x7 + x12 + x13 + x17 + x18 + x19 + x21 + x24 + x26 + x28
       + x33 + x42 + x46 + x47 + x51 <= 2
LL4:   x2 + x6 + x7 + x12 + x13 + x15 + x18 + x21 + x26 + x28 + x33 + x42
       + x46 + x47 + x50 + x51 + x52 <= 2
LL5:   x2 + x6 + x7 + x12 + x13 + x15 + x18 + x21 + x22 + x28 + x33 + x42
       + x46 + x47 + x49 + x50 + x51 + x52 <= 2
LL6:   x6 + x12 + x15 + x20 + x22 + x46 + x47 + x49 + x50 + x52 <= 2
LL7:   x6 + x12 + x15 + x19 + x20 + x46 + x47 + x49 + x50 + x52 <= 2
LL8:   x6 + x12 + x15 + x17 + x19 + x46 + x47 + x48 + x49 + x50 + x52 <= 2
LL9:   x7 + x12 + x13 + x15 + x17 + x18 + x19 + x26 + x28 + x33 + x42 + x47
       + x48 + x49 + x50 + x52 <= 2
LL10:  x7 + x12 + x13 + x17 + x18 + x19 + x22 + x26 + x28 + x33 + x42 + x47
       + x48 + x49 + x50 + x51 <= 2
LL11:  x7 + x13 + x17 + x18 + x19 + x20 + x22 + x26 + x28 + x33 + x42 + x48
       + x49 + x50 + x51 <= 2
LL12:  x7 + x13 + x18 + x19 + x20 + x21 + x22 + x26 + x28 + x33 + x42 + x49
       <= 2
LL13:  x15 + x19 + x20 + x21 + x22 + x26 + x52 <= 2
LL14:  x15 + x19 + x20 + x21 + x22 + x26 + x52 <= 2
LL15:  x21 + x22 + x51 <= 2
LL16:  x51 <= 2
LL17:  x24 <= 2
LL18:  x24 <= 2
LL19:  <= 2
LL20:  x2 + x7 + x13 + x18 + x21 + x28 + x33 + x42 + x51 <= 2
LL21:  x2 + x7 + x13 + x18 + x21 + x28 + x33 + x42 + x51 <= 2
LL22:  <= 2
LL23:  <= 2
LL24:  <= 2
LL25:  x7 + x13 + x21 + x24 + x42 + x51 <= 2
LL26:  x4 + x7 + x9 + x13 + x15 + x19 + x21 + x22 + x24 + x25 + x26 + x29
       + x35 + x40 + x42 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49 + x51 + x52 <= 2
LL27:  x4 + x9 + x15 + x18 + x19 + x22 + x25 + x26 + x28 + x29 + x35 + x40
       + x44 + x46 + x47 + x48 + x49 + x52 <= 2
LL28:  x18 + x28 <= 2
LL29:  x1 + x6 + x12 + x17 + x20 + x50 <= 2
LL30:  x1 + x6 + x12 + x17 + x20 + x50 <= 2
LL31:  x9 + x22 + x25 + x26 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49
       + x52 <= 2
LL32:  x9 + x22 + x25 + x26 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49
       + x52 <= 2
LL33:  x9 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 <= 2
LL34:  x9 + x15 + x17 + x20 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 <= 2
LL35:  x15 + x17 + x20 + x29 + x35 + x44 <= 2
LL36:  x5 + x11 + x16 + x27 + x29 + x30 + x31 + x32 + x35 + x36 + x38 + x41
       + x44 + x45 + x48 <= 2
LL37:  x5 + x11 + x16 + x27 + x29 + x30 + x31 + x32 + x35 + x36 + x38 + x41
       + x44 + x45 + x48 <= 2
LL38:  x9 + x23 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 <= 2
LL39:  x9 + x10 + x23 + x25 + x40 <= 2
LL40:  x9 + x10 + x25 + x40 <= 2
LL41:  x9 + x25 + x40 <= 2
LL42:  x9 + x11 + x16 + x25 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x40 + x41
       + x45 <= 2
LL43:  x9 + x11 + x16 + x23 + x25 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x40
       + x41 + x45 <= 2
LL44:  x10 + x23 <= 2
LL45:  x10 + x23 + x29 + x44 <= 2
LL46:  x10 + x23 + x29 + x44 <= 2
LL47:  x5 + x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 + x45
       <= 2
LL48:  x5 + x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 + x45
```

```
        <= 2
 LL49:  x10 + x24 <= 2
 LL50:  x10 + x24 <= 2
 LL51:  x10 + x24 <= 2
 LL52:  x3 + x8 + x11 + x14 + x24 + x31 + x34 + x37 + x39 + x43 <= 2
 LL53:  x3 + x8 + x11 + x14 + x16 + x23 + x27 + x31 + x34 + x37 + x38 + x39
        + x41 + x43 <= 2
 LL54:  x3 + x8 + x11 + x14 + x16 + x23 + x27 + x30 + x34 + x37 + x38 + x39
        + x41 + x43 <= 2
 LL55:  x3 + x8 + x11 + x14 + x16 + x23 + x27 + x30 + x33 + x34 + x35 + x37
        + x39 + x43 <= 2
 LL56:  x11 + x16 + x23 + x27 + x30 + x32 + x33 + x35 + x36 <= 2
 LL57:  x1 + x6 + x11 + x12 + x16 + x17 + x20 + x23 + x30 + x31 + x32 + x36
        + x50 <= 2
 LL58:  x1 + x6 + x11 + x12 + x16 + x17 + x20 + x23 + x30 + x31 + x32 + x38
        + x50 <= 2
 LL59:  x1 + x6 + x7 + x8 + x11 + x12 + x17 + x18 + x20 + x21 + x30 + x31 + x32
        + x37 + x38 + x50 + x51 <= 2
 LL60:  x1 + x6 + x7 + x8 + x11 + x12 + x13 + x17 + x18 + x20 + x21 + x27 + x30
        + x31 + x32 + x37 + x38 + x50 + x51 <= 2
 LL61:  x8 + x11 + x13 + x14 + x27 + x28 + x30 + x31 + x32 + x37 + x38 + x39
        + x41 <= 2
 LL62:  x8 + x14 + x16 + x27 + x28 + x30 + x31 + x32 + x37 + x39 + x41 <= 2
 LL63:  x8 + x14 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x33 + x34 + x36 + x39 + x41
        <= 2
 LL64:  x8 + x14 + x16 + x27 + x31 + x32 + x33 + x34 + x36 + x39 + x41 <= 2
 LL65:  x8 + x14 + x16 + x27 + x32 + x34 + x36 + x38 <= 2
 LL66:  x8 + x14 + x34 + x36 + x37 + x38 <= 2
 LL67:  x8 + x14 + x34 + x36 + x37 + x38 + x42 + x43 + x45 <= 2
 LL68:  x8 + x14 + x34 + x36 + x38 + x41 + x42 + x43 + x45 <= 2
 LL69:  x24 + x36 + x41 + x45 <= 2
 LL70:  x24 + x36 + x41 + x45 <= 2
 LL71:  x41 + x45 <= 2
 LL72:  x3 + x8 + x9 + x14 + x15 + x19 + x26 + x34 + x37 + x39 + x43 + x45 <= 2
 LL73:  x3 + x8 + x9 + x14 + x15 + x19 + x22 + x23 + x26 + x34 + x37 + x39
        + x43 <= 2
 LL74:  x22 + x23 + x24 + x25 + x29 + x35 <= 2
 LL75:  x24 + x25 + x29 + x35 + x40 + x44 + x46 + x47 + x48 + x49 + x52 <= 2
 LL76:  x40 + x44 + x45 + x46 + x47 + x48 + x49 + x52 <= 2
 LL77:  x14 + x34 + x37 + x39 + x43 + x45 <= 2
 LL78:  x14 + x34 + x37 + x39 + x43 + x45 <= 2
 LL79:  x34 + x37 + x39 + x43 + x45 <= 2
 LL80:  x34 + x37 + x39 + x43 + x45 <= 2
 LL81:  x39 + x43 + x45 <= 2
 LL82:  x39 + x43 <= 2
 LL83:  x43 <= 2
 LL84:  x43 <= 2
 LL85:  x10 <= 2
 LL86:  x10 <= 2
 LL87:  x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x32 + x41 <= 2
 LL88:  x10 + x11 + x16 + x27 + x30 + x31 + x32 + x36 + x38 + x41 <= 2
 LL89:  x31 + x36 + x38 <= 2
 LL90:  <= 2
Bounds
      x1 >= 0
      x2 >= 0
      x3 >= 0
      x4 >= 0
      x5 >= 0
      x6 >= 0
      x7 >= 0
      x8 >= 0
      x9 >= 0
      x10 >= 0
      x11 >= 0
      x12 >= 0
      x13 >= 0
```

Εικόνα A.6 Τελική μορφή του προβλήματος