ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΝΑΣ ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΟΣ ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΤΟΜΩΝ, ΓΙΑ ΜΙΑ ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΜΟΥ, ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΥΠΟΒΟΛΗ ΠΡΟΣΦΟΡΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΕ ΑΓΟΡΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΙΑΣ

υπό

ΚΥΡΙΤΣΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ ΚΑΙ ΠΟΥΧΙΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Κοζανίδης Γεώργιος

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2021

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά την ανάπτυξη ενός βελτιωμένου ακριβούς αλγορίθμου, για μια ομάδα προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού, με στόχο την βέλτιστη υποβολή προσφορών από παραγωγούς ενέργειας σε αγορές ηλεκτρικής ενέργειας επόμενης μέρας. Για την εύρεση της ολικά βέλτιστης λύσης, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια σειρά από τεχνικές, οι οποίες βασίζονται σε θεωρητικά αποτελέσματα. Η πρώτη από αυτές στηρίζεται στο ότι λύνοντας μια χαλαρωμένη μορφή του προβλήματος, η οποία το μετατρέπει σε πρόβλημα ενός επιπέδου χωρίς να εξασφαλίζει τη διεπίπεδη εφικτότητα, μπορούμε να πάρουμε ένα άνω όριο για τη βέλτιστη αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού προβλήματος. Προσθέτοντας στην εν λόγω χαλάρωση τις κατάλληλες συνθήκες βελτιστότητας, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την βέλτιστη κατανομή ενέργειας μιας περιόδου για το σύνολο των παραγωγών που είναι ενεργοί σε αυτή την περίοδο. Στην συνέχεια, με τη χρήση ενός θεωρητικού αποτελέσματος βασισμένο στον ακέραιο παραμετρικό προγραμματισμό, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί έναν ειδικό τύπο επίπεδων τομών, αποκλείοντας από εξέταση λύσεις, οι οποίες δεν ικανοποιούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις για βελτιστότητα. Για συγκεκριμένα πεδία τιμών, των τιμών-προσφορών του παραγωγού του οποίου το κέρδος θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, αυτές οι τομές είτε επιβάλουν έγκυρα άνω όρια στις ποσότητες ενέργειας του, είτε τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων κατώτερου επιπέδου. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος είναι εκείνη που για ένα συγκεκριμένο σύνολο προσφορών του παραγωγού κάνει βέλτιστη και την αντικειμενική συνάρτηση του κατώτερου επιπέδου. Ξεκινώντας από την παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου, περνάμε στην ανάλυση του θεωρητικού υποβάθρου, περιγράφουμε την λειτουργία του αλγορίθμου σε μια περίπτωση μελέτης και στο τέλος εξετάζουμε την απόδοσή του μέσα από την επίλυση μιας σειράς τυχαίων παραδειγμάτων. Τα πειραματικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε οδηγούν στο συμπέρασμα ότι έχουν αυξηθεί οι δυνατότητες του αλγορίθμου ως προς το μέγεθος των προβλημάτων που μπορεί να επιλύσει σε σχέση με την προηγούμενη πιλοτική έκδοση του.

Λέξεις Κλειδιά: διεπίπεδος προγραμματισμός, βέλτιστες προσφορές, παραγωγοί ενέργειας, αγορές ενέργειας επόμενης μέρας, ακέραιος παραμετρικός προγραμματισμός, επίπεδες τομές

Abstract

This thesis concerns the development of an improved exact algorithm for a group of bilevel programming problems utilized for optimal price-bidding of energy producers in multi-period day-ahead electricity markets. To find the globally optimal solution, the algorithm uses a number of techniques, which are based on theoretical results. The first of these techniques is based on the fact that by solving a relaxation of the problem, which turns it into a single-level problem without ensuring the bilevel feasibility, we can get an upper limit for the optimal objective function of the original problem. By adding to this relaxation, the appropriate optimality conditions, we can ensure the optimal energy distribution of a time-period for all the producers that are active in that period. Then, using a theoretical result based on integer parametric programming, the algorithm uses a special type of cuts, excluding from examination solutions that do not meet the necessary conditions for optimality. More precisely, for specific value-range combinations of the profit maximizing producer's energy price-offers, these cuts either impose valid upper bounds on his energy quantities, or enforce optimal lower-level unit commitments. The optimal solution of the problem is the one that for a specific set of offers of the producer makes the objective function of the lower level optimal. Starting from the presentation of the mathematical model, we move on to the analysis of the theoretical background, describe the operation of the algorithm in a case study and finally examine its performance by solving a series of random examples. The experimental results we present lead to the conclusion that the solving capabilities of the algorithm in terms of the size of the problems have increased compared to its previous elementary version.

Keywords*:* bilevel programming, optimal bidding offers, energy producers, day-ahead electricity markets, integer parametric programming, cutting planes

Εγκρίθηκε από τα μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος εξεταστής : Δρ. Κοζανίδης Γεώργιος

(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής : Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος

Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής : Δρ. Σαχαρίδης Γεώργιος

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Αναπτύσσουμε έναν ακριβή αλγόριθμο επίπεδων τομών για την επίλυση μιας ομάδας προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού, με σκοπό την υποβολή των καλύτερων δυνατών προσφορών από παραγωγούς ηλεκτρικής ενέργειας που συμμετέχουν σε αγορές ηλεκτρικής ενέργειας επόμενης μέρας. Στο πρόβλημα που επιλύεται στο ανώτερο επίπεδο, κυρίαρχο ρόλο κατέχει ο πρώτος από τους παραγωγούς, αναφερόμενος και ως «Στρατηγικός Παραγωγός». Ο σκοπός του είναι να προσφέρει την ενέργεια που παράγει στις βέλτιστες δυνατές τιμές, ούτως ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Στο κατώτερο επίπεδο του προβλήματος, στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος βρίσκεται ένας ανεξάρτητος διαχειριστής του αντίστοιχου συστήματος αναφερόμενος ως «ΑΔΣ ή ISO». Στόχος του ΑΔΣ είναι να ικανοποιήσει τη ζήτηση με το μικρότερο δυνατό κόστος, εφόσον του δοθούν οι προσφορές των παραγωγών που συμμετέχουν στην διαδικασία για κάθε περίοδο του ορίζοντα προγραμματισμού.

Το κύριο χαρακτηριστικό αυτού του είδους προβλημάτων διεπίπεδου προγραμματισμού είναι πως οι μεταβλητές απόφασης του ανώτερου επιπέδου εμφανίζονται μόνο στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος στο κατώτερο επίπεδο, καθώς απουσιάζουν από τους περιορισμούς του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μεταβλητές αυτές να επηρεάζουν το αποτέλεσμα της αντικειμενικής συνάρτησης του κατώτερου επιπέδου, όχι όμως και την εφικτότητα των λύσεων του. Αυτό είναι ένα κρίσιμο συμπέρασμα στο οποίο βασιστήκαμε για την δημιουργία της κατάλληλης μεθοδολογίας επίλυσης.

Στην συνέχεια της παρούσας εργασίας, συναντάμε την βιβλιογραφική ανασκόπηση στην ενότητα 2 και την περιγραφή του μαθηματικού μοντέλου που εκφράζει το πρόβλημα στην ενότητα 3. Στην 4^{η} ενότητα αναλύεται η μεθοδολογία επίλυσης σύμφωνα με την οποία αρχικά χρησιμοποιείται μία χαλάρωση του αρχικού προβλήματος ή οποία δεν είναι ικανή να ικανοποιήσει μία βασική συνθήκη για ολική βελτιστότητα η οποία ονομάζεται διεπίπεδη εφικτότητα. Η συνθήκη αυτή δηλώνει πως για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών απόφασης ανωτέρου επιπέδου, οι μεταβλητές απόφασης κατώτερου επιπέδου θα πρέπει να συνιστούν την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα κατώτερου επιπέδου. Στην παραπάνω χαλάρωση του προβλήματος εισάγονται ειδικές συνθήκες βελτιστότητας που βοηθούν να αποκλειστούν εξ αρχής κατανομές ενέργειας οι οποίες δεν μπορούν να περιλαμβάνονται σε μια βέλτιστη λύση. Στην συνέχεια, με βάση κάποια θεμελιώδη συμπεράσματα από την θεωρία του ακέραιου παραμετρικού προγραμματισμού, αναπτύχθηκε μια σειρά από έγκυρες ανισότητες. Αυτές λειτουργούν σαν επίπεδες τομές, που αποκλείουν διεπίπεδα μη εφικτές λύσεις με μη βέλτιστες κατανομές ενέργειας. Με την επαναλαμβανόμενη χρήση των κατάλληλων επίπεδων τομών, ο αλγόριθμος καταλήγει στην εύρεση της ολικά βέλτιστης λύσης.

Στην ενότητα 5 γίνεται η αξιολόγηση του προτεινόμενου αλγορίθμου σε ότι αφορά την απόδοση και την συμπεριφορά του. Αρχικά, αναφέρονται κάποιες επιλογές που έγιναν κατά την διαδικασία της υλοποίησής του. Στην συνέχεια περιγράφεται αναλυτικά η λειτουργία του μέσω μιας μελέτης περίπτωσης και τέλος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του αλγορίθμου σε μια σειρά από τυχαία παραγόμενα παραδείγματα. Τα αποτελέσματα αυτά δηλώνουν την ικανότητα του αλγορίθμου να αντιμετωπίζει επιτυχώς προβλήματα μεσαίου μεγέθους. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ σημαντικό, αν σκεφτεί κανείς πως δεν υπάρχουν γενικές μεθοδολογίες επίλυσης για τέτοιου είδους προβλήματα και οι ακριβείς μεθοδολογίες επίλυσης που αναφέρονται στην βιβλιογραφική ανασκόπηση έχουν περιορισμένη εφαρμογή σε προβλήματα ρεαλιστικού μεγέθους.

Ακολουθεί η ενότητα 6 στην οποία παρουσιάζονται κάποιες παραλλαγές του προβλήματος και συγκεκριμένα της μοντελοποίησης του. Τέλος, κλείνουμε με την ενότητα 7, στην οποία συνοψίζεται η συμβολή αυτή της εργασίας αλλά και προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Ο αλγόριθμος που πρότειναν οι Moore και Bard (1990) είναι ένας από τους πρώτους που αναπτύχθηκαν για την επίλυση προβλημάτων διεπίπεδου ακέραιου προγραμματισμού. Βασίζεται στην branch and bound μεθοδολογία και χειρίζεται με εύστοχο τρόπο κυρίως το γεγονός πως κάποιες σημαντικές ιδιότητες του μονοεπίπεδου ακέραιου προγραμματισμού παύουν να ισχύουν στον πολυεπίπεδο ακέραιο προγραμματισμό.

Σε ό,τι αφορά τα μοντέλα βελτιστοποίησης διεπίπεδου προγραμματισμού που σχετίζονται με αγορές ενέργειας, μία δημοφιλής προσέγγιση είναι αυτή την οποία πρότειναν οι Hobbs κ.α. (2000), Li & Shahidephour (2005), Bakirtzis κ.α. (2007) και Ruiz & Conejo (2009), κατά την οποία αναδιαμορφώνεται το διεπίπεδο μοντέλο σε μονοεπίπεδο, αντικαθιστώντας το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου με τις συνθήκες βελτιστότητας KKT (Karush-Kuhn-Tucker) πρώτης τάξης. Ένα μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι πως απαιτεί κάποιες κατάλληλες συνθήκες κυρτότητας, οι οποίες όμως πολλές φορές δεν ισχύουν σε ρεαλιστικά προβλήματα. Ένα πρακτικό εμπόδιο που συναντάμε εδώ πέρα είναι δυσκολία χειρισμού των συνθηκών βελτιστότητας KKT από τους επιλυτές των κοινών λογισμικών.

Η χρήση συνθηκών KKT, σε συνδυασμό με επιβολή κατάλληλων ορίων στη βέλτιστη αντικειμενική, περιλαμβάνονται σε μεθοδολογία για την επίλυση μοντέλων διεπίπεδου προγραμματισμού των Gumus & Floudas (2005). Οι ίδιοι σε μία άλλη προσέγγισή τους χρησιμοποιούν έγκυρες ανισότητες βασισμένες πάνω στην θεωρία των Chvatal-Gomory .

Τέτοιου είδους συνθήκες βελτιστότητας συνδυασμένες με ακέραια άλγεβρα και τη δυική θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού χρησιμοποίησαν οι Fernando-Blanco κ.α. (2017) για να διατυπώσουν ένα μοντέλο μη γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού το οποίο αναφέρεται σε μελλοντική αγορά ενέργειας η οποία θα ξεκινά με οριακές τιμές.

Το 2000 οι Gross και Finley ανέπτυξαν μία μεθοδολογία βασισμένη στη χαλάρωση Lagrange με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής για προσφορές από παραγωγούς, η οποία είχε κάποια εφαρμογή στην ενεργειακή αγορά της Αγγλίας και της Ουαλίας.

Οι Pereira κ.α. (2005) και Fampa κ.α. (2008) μελέτησαν μοντέλα τα οποία δεν περιείχαν ακέραιες μεταβλητές στο κατώτερο επίπεδο, γεγονός που επιτρέπει τον μετασχηματισμό του προβλήματος από διεπίπεδο σε μονοεπίπεδο χάρη στις συνθήκες βελτιστότητας του κατώτερου προβλήματος. Πολύ μεγάλο ενδιαφέρον έχουν οι σχετικοί μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται στις μη γραμμικότητες και μετατρέπουν το πρόβλημα σε μεικτό ακέραιο γραμμικό.

Μία νέα προσέγγιση για βελτιστοποίηση σε ακέραιο διεπίπεδο προγραμματισμό από τους Faisca κ.α. (2007) παραμετροποιεί το κατώτερο πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεταβλητές απόφασης του ανώτερου προβλήματος. Η συγκεκριμένη μεθοδολογία παρουσιάζει ομοιότητες με εκείνη που περιλαμβάνουν στην δημοσίευσή τους οι Dominguez & Pistikopoulos (2010), οι οποίοι αναπτύσσουν μια παραμετρική μεθοδολογία επίλυσης. Αρχικά εξαλείφουν τις γενικές ακέραιες μεταβλητές απόφασης και στη συνέχεια επιτυγχάνουν την εύρεση της ολικά βέλτιστης λύσης μέσω της συνένωσης της παραμετρικής λύσης του κατώτερου με το πρόβλημα ανωτέρου επιπέδου.

Το 2010 μία ακόμα μέθοδος παραμετρικής επίλυσης που είχε εφαρμογή τόσο στον απλό όσο και στο μεικτό ακέραιο διεπίπεδο προγραμματισμό, εξελίχθηκε από τους Köppe κ.α. , η οποία έχει ως μεγάλο πλεονέκτημα ότι αναγνωρίζει πότε μία λύση δεν είναι εφικτή, παρέχοντας ως εναλλακτική μία άλλη εφικτή λύση κοντινή σε αυτή. Για την επίλυση μεικτών ακεραίων μη γραμμικών προβλημάτων, ο Mitsos (2010) προτείνει μετασχηματισμούς σταθερής και βέλτιστης τιμής στο μοντέλο, κατάλληλους ώστε να θέτονται από τον αλγόριθμο ένα άνω κι ένα κάτω όριο στην αντικειμενική συνάρτηση, τα οποία μετά από αλλεπάλληλες επαναλήψεις συγκλίνουν στο ολικό βέλτιστο. Σημαντική είναι και η συμβολή των Wiesemann κ.α. (2013), οι οποίοι όχι μόνο ανέλυσαν την πολυπλοκότητα κάποιων υποκατηγοριών μοντέλων διεπίπεδου προγραμματισμού και ανέπτυξαν νέες συνθήκες οι οποίες εγγυώνται την ύπαρξη βέλτιστου, αλλά πρότεινε και μία νέα επιτυχή μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων ημιάπειρου προγραμματισμού προσέγγισης.

Σε μια παραλλαγή του κλασσικού προβλήματος, όπου εξετάζεται ένα μοντέλο για την υποβολή της βέλτιστης προσφοράς για αγορά από παραγωγούς ενέργειας οι οποίοι παίρνουν μέρος σε μία δημοπρασία για την αγορά της ενέργειας που θα ζητηθεί την επόμενη μέρα, οι Kwon & Frances (2012) έκαναν μία ανασκόπηση του θέματος χρησιμοποιώντας στοχαστικά δεδομένα, ένα ευρύ φάσμα προσεγγίσεων γραμμικών και μη και περιορισμούς ισορροπίας. Ωστόσο δεν επικεντρώνονται στη βέλτιστη τιμολόγηση αλλά κυρίως στην σχέση της με αποφάσεις χρονοδρομολόγησης της ενέργειας.

Ο Bylling (2018) έκανε μεγάλη πρόοδο πάνω στο θέμα, καθώς παρουσίασε ένα μοντέλο διεπίπεδου προγραμματισμού όπου το πρόβλημα ανωτέρου επιπέδου επηρεάζεται τόσο από την ανώτερη όσο και από την κατώτερη βέλτιστη λύση του προβλήματος, με μετασχηματισμό του αρχικού προβλήματος σε μεικτό ακέραιο γραμμικό, υπό τις κατάλληλες συνθήκες.

Πολλοί ερευνητές ανέπτυξαν αλγορίθμους βασισμένους στην μέθοδο επίλυσης branch and cut. Για αρχή, οι DeNegre και Ralphs (2009) μας παρουσιάζουν πως η συγκεκριμένη μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και σε ακέραιο διεπίπεδο προγραμματισμό πέρα από μονοεπίπεδο. Η συγκεκριμένη προσέγγιση εφαρμόζει επίπεδες τομές σε χαλάρωση του ανώτερου προβλήματος, ενώ το κατώτερο μπαίνει σε δεύτερη μοίρα, κι επιβάλει βελτιωμένα όρια στην αντικειμενική του συνάρτηση. Με συγγενή μεθοδολογία ασχολήθηκαν οι Caramia & Mari (2015), οι οποίοι κατάστρωσαν δύο αλγόριθμους για επίλυση προβλημάτων ακέραιου διεπίπεδου προγραμματισμού. Ο πρώτος ακολουθεί μια παρόμοια με την παραπάνω μέθοδο, χαλαρώνοντας το πρόβλημα και θέτοντας τομές ώστε να αποκλείσει τις μη εφικτές λύσεις. Ο δεύτερος αλγόριθμος εφαρμόζει μεθοδολογία branch and cut, με την διαφορά πως σε κάθε διακλάδωση της μεθόδου αποκλείει μεγάλο μέρος των μη εφικτών λύσεων μέσω της επιβολής έγκυρων ανισοτήτων. Πάνω στην branch and cut λογική βασίστηκε και η μεθοδολογία των Fischetti κ.α. (2017), στην οποία εφαρμόζεται μια κατηγορία τομών σε μια χαλάρωση του ανώτερου προβλήματος.

Το 2015, οι Kleniati & Adjiman πρότειναν έναν αλγόριθμο βασισμένο σε branch and bound μεθοδολογία στην οποία υπάρχει διακλάδωση και στο ανώτερο και στο κατώτερο επίπεδο για προβλήματα που επιδέχονται ειδικούς περιορισμούς, επεκτείνοντας με αυτόν τον τρόπο τα συμπεράσματά τους πάνω στο συνεχή διεπίπεδο προγραμματισμό και στον μεικτό ακέραιο διεπίπεδο προγραμματισμό. Παρόμοια, οι Xu & Wang (2014) ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο branch and bound όπου η απόφαση για διακλάδωση μπορεί να εξαρτάται από περισσότερα του ενός υποπροβλήματα, ενώ η υπολογιστική απόδοση του κώδικα αξιολογείται σε μια σειρά από δοκιμές με ποικιλία δεδομένων. Το 2017 οι Xu & Wang επανήλθαν με έναν νέο αλγόριθμο τύπου branch and bound ο οποίος ονομάζεται «Watermelon Algorithm». Είναι ένας ακριβής αλγόριθμος επίλυσης προβλημάτων ακέραιου διεπίπεδου γραμμικού προγραμματισμού, ο οποίος αποκλείει μη εφικτές λύσεις με την χρήση διαχωριστικών τομών.

Οι Yue κ.α. (2019) παρουσίασαν έναν αλγόριθμο για επίλυση μεικτών ακέραιων διεπίπεδων γραμμικών προβλημάτων που για την εύρεση της βέλτιστης λύσης εφαρμόζει μια μεθοδολογία με δυναμικούς πίνακες, παράγοντας τις αρμόζουσες γραμμές και στήλες μέσα από μια διαδικασία αποσύνθεσης και αναδιαμόρφωσης του ανώτερου και των κατώτερων προβλημάτων σε μονοεπίπεδη μορφή.

Τέλος, οι Lozano και Smith (2019) ανέπτυξαν έναν ακριβή αλγόριθμο βασισμένο σε μια αναδιαμορφωμένη ενός επιπέδου, αντικειμενική συνάρτηση, στην οποία επιβάλλονται άνω και κάτω όρια στην βέλτιστη της τιμή.

Ο αλγόριθμος που αναπτύξαμε στην παρούσα διπλωματική εργασία καθοδηγήθηκε από την δουλειά που παρουσίασαν οι Kostarelou & Kozanidis (2021), τόσο όσον αφορά τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που αφορούν την μοντελοποίηση του, όσο και τα βασικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται για την μεθοδολογία επίλυσης που χρησιμοποιεί ο προτεινόμενος αλγόριθμος. Ουσιαστικά πρόκειται για μια επέκταση του αλγορίθμου που προτάθηκε από τους Κοζανίδης κ.α (2013) από την περίπτωση ενός ορίζοντα προγραμματισμού μιας περιόδου, σε έναν ορίζοντα πολλών περιόδων. Όσον αφορά τη μεθοδολογία επίλυσης, η τρέχουσα έκδοση του αλγορίθμου ενσωματώνει ειδικές συνθήκες βελτιστότητας στην μοντελοποίηση του, οι οποίες καθιστούν εκ των προτέρων ανέφικτες μια μεγάλη συλλογή λύσεων κατώτερου επιπέδου που δεν πληρούν τις προϋποθέσεις για ολική βελτιστότητα. Για τον αποκλεισμό αυτών των εντοπισμένων λύσεων που δεν ικανοποιούν τη διεπίπεδη εφικτότητα, η τρέχουσα αλγοριθμική έκδοση χρησιμοποιεί την ίδια ακέραιη μεθοδολογία παραμετρικού προγραμματισμού με την προηγούμενη, τροποποιημένη κατάλληλα ώστε να επιβάλει τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων κατώτερου επιπέδου, καθώς και άνω όρια στις ενεργειακές ποσότητες του στρατηγικού παραγωγού. Επιπλέον, η τρέχουσα έκδοση του προτεινόμενου αλγορίθμου χρησιμοποιεί μια σημαντικά ενισχυμένη διαδικασία αναζήτησης για τη δημιουργία των επίπεδων τομών, η οποία επιτυγχάνει την εξάλειψη ενός μεγάλου αριθμού μη βέλτιστων λύσεων, μειώνοντας έτσι σημαντικά την υπολογιστική προσπάθεια για την εύρεση του ολικού βέλτιστου. Για να γίνει πιο ρεαλιστικό το πρόβλημα, το μοντέλο που θα παρουσιάζεται παρακάτω, περιέχει περιορισμούς οι οποίοι επιβάλλουν μέγιστο και ελάχιστο αριθμό περιόδων, στις οποίες οι μονάδες παραγωγής δεν μπορούν να αποδεσμευτούν εφόσον είναι ενεργές και δεν μπορούν να δεσμευτούν εφόσον είναι ανενεργές. Επιπροσθέτως, εμπλουτίζουμε το μοντέλο με μία ομάδα περιορισμών, ώστε να εξασφαλίσουμε πως η ποσότητα ενέργειας που τους ανατίθεται δεν μπορεί να μειωθεί ή να αυξηθεί πέρα από ένα συγκεκριμένο ποσοστό από την μια περίοδο στην επόμενη.

3. Περιγραφή και μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος

Για να ορίσουμε το πρόβλημα, θεωρούμε μια αγορά ηλεκτρικής ενέργειας πολλαπλών περιόδων.

Πρόβλημα Κατώτερου επιπέδου: Αυτή η αγορά ρυθμίζεται και συντονίζεται από έναν ανεξάρτητο διαχειριστή (ΑΔΣ), ο οποίος συλλέγει τις προσφορές των παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας σε €/MWh (ευρώ ανά μεγαβατώρα), και κατανέμει την ενέργεια με τέτοιο τρόπο ώστε να πετύχει το ελάχιστο δυνατό κόστος, ικανοποιώντας ταυτόχρονα την ζήτηση. Αφού ο ΑΔΣ αποφασίσει, από ποιους παραγωγούς και πόσες μεγαβατώρες θα αγοράσει από τον καθέναν, εκείνοι αποζημιώνονται πλήρως για το κόστος εκκίνησης της παραγωγής και πληρώνονται σύμφωνα με το πλάνο, για κάθε παραγωγική μονάδα ενέργειας που προσφέρουν.

Πρόβλημα Ανώτερου επιπέδου: Οι προσφορές ηλεκτρικής ενέργειας για κάθε MWh πρέπει να είναι οι καλύτερες δυνατές, ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος του εκάστοτε παραγωγού κατά τη συναλλαγή σε κάθε χρονική περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού. Τον πρώτο εκ των παραγωγών τον ονομάζουμε στρατηγικό και υποθέτουμε πως έχει άριστη πληροφόρηση για τα τεχνικά χαρακτηριστικά της αγοράς, ώστε να γνωρίζει τις ακριβείς τιμές-προσφορές που έχουν υποβάλλει οι ανταγωνιστές του. Η ρεαλιστικότητα εδώ δεν διακυβεύεται, καθώς αποτελεί συνηθισμένη τακτική, παραγωγοί ανταγωνιστές να οργανώνουν το πλάνο τους βασιζόμενοι σε παρόμοιας λογικής υπολογισμούς, με διαφορετικές υποθέσεις και παραμέτρους, κάνοντας εκτιμήσεις για τους ανταγωνιστές τους, αντλώντας δεδομένα από την ιστορία. Η μεγιστοποίηση του κέρδους του στρατηγικού παραγωγού πραγματοποιείται με ένα μοντέλο βελτιστοποίησης διεπίπεδου προγραμματισμού.

Το μαθηματικό μοντέλο το οποίο παρουσιάζεται παρακάτω αποτελείται από ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιέχει ένα δεύτερο πρόβλημα βελτιστοποίησης στους περιορισμούς του με διαφορετικές μεταβλητές απόφασης και διαφορετικό παράγοντα λήψης αποφάσεων. Το κατώτερο πρόβλημα ελέγχεται από τον ΑΔΣ και κυρίαρχες μεταβλητές απόφασης είναι οι ποσότητες $q_{i,t}$, τις οποίες αυτός ρυθμίζει για να ελαχιστοποιήσει το κόστος του. Στο ανώτερο πρόβλημα τις αποφάσεις τις παίρνει ο στρατηγικός παραγωγός και το ενδιαφέρον συγκεντρώνεται στην βελτιστοποίηση των τιμών-προσφορών $p_{1,t}$, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Για να περιγράψουμε το μαθηματικό μοντέλο που θα επιλύει το πρόβλημά μας χρησιμοποιούμε την παρακάτω σημειολογία, ώστε να ορίσουμε τα εμπλεκόμενα μεγέθη:

Σύνολα:

I μονάδες παραγωγής, με δείκτη i (ο δείκτης του στρατηγική παραγωγού είναι 1).

Παράμετροι:

T αριθμός χρονικών περιόδων του ορίζοντα σχεδιασμού,

$p_{i,t}$ τιμή-προσφορά του παραγωγού i για κάθε χρονική περίοδο t ($i \in I, t = 1,2,.,T$)

s_i κόστος εκκίνησης της μονάδας παραγωγής i ($i \in I$),

m_i τεχνικό ελάχιστο της μονάδας παραγωγής i ($i \in I$),

M_i τεχνικό μέγιστο της μονάδας παραγωγής i ($i \in I$),

d_t ζήτηση για ενέργεια την χρονική περίοδο t ($t = 1,2,.,T$),

$z_{i,0}$ δυαδική παράμετρος που δηλώνει την κατάσταση της μονάδας παραγωγής i, την τελευταία χρονική περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού i ($i \in I$),

$y_{i,k}$ δυαδική παράμετρος που δηλώνει αν άναψε η μονάδα παραγωγής i την χρονική περίοδο k *του προηγούμενου χρονικού ορίζοντα* ($i \in I, k = 0, -1 \dots$),

$o_{i,k}$ δυαδική παράμετρος που δηλώνει αν έσβησε η μονάδα παραγωγής i την χρονική περίοδο k *του προηγούμενου χρονικού ορίζοντα* ($i \in I, k = 0, -1 \dots$),

mu_i ελάχιστος αριθμός περιόδων που η παραγωγική μονάδα i παραμένει ανοιχτή, αφού ανοίξει i ($i \in I$)

md_i ελάχιστος αριθμός περιόδων που η παραγωγική μονάδα i παραμένει κλειστή, αφού κλείσει i ($i \in I$),

ru_i τιμή αύξησης της ενεργειακής ποσότητας του παραγωγού i ($i \in I$)

rd_i τιμή μείωσης της ενεργειακής ποσότητας του παραγωγού i ($i \in I$)

Μεταβλητές απόφασης:

$q_{i,t}$ ποσότητα ενέργειας που ζητείται από την μονάδα παραγωγής i την χρονική περίοδο t ($i \in I, t = 1,2,.,T$),

$z_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν η ποσότητα ενέργειας της μονάδας παραγωγής i την χρονική περίοδο t είναι θετική, και 0 σε άλλη περίπτωση ($i \in I, t = 1,2,.,T$),

$y_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα παραγωγής i ανάβει την χρονική περίοδο t ενώ την χρονική στιγμή $t-1$ ήταν κλειστή, και 0 σε άλλη περίπτωση ($i \in I, t = 1,2,.,T$),

$o_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης που παίρνει την τιμή 1 αν η μονάδα παραγωγής i σβήνει την χρονική περίοδο t ενώ την χρονική στιγμή $t-1$ ήταν ενεργή, και 0 σε άλλη περίπτωση ($i \in I, t = 1,2,.,T$)

Πρόβλημα βελτιστοποίησης του κόστους του ΑΔΣ – Κατώτερο πρόβλημα:

$$\text{Min } f = \sum_{i \in I} \sum_{t=1}^{T} (p_{i,t} q_{i,t} + s_i y_{i,t}) \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{i \in I} q_{i,t} = d_t \tag{2}$$

$$m_i z_{i,t} \leq q_{i,t} \leq M_i z_{i,t}, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{3}$$

$$y_{i,t} \geq z_{i,t} - z_{i,t-1}, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{4}$$

$$y_{i,t} \leq z_{i,t}, , i \in I, t = 1, \dots, T \tag{5}$$

$$y_{i,t} \leq 1 - z_{i,t}, , i \in I, t = 1, \dots, T \tag{6}$$

$$o_{i,t} \geq z_{i,t-1} - z_{i,t}, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{7}$$

$$o_{i,t} \leq z_{i,t-1}, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{8}$$

$$o_{i,t} \leq 1 - z_{i,t}, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{9}$$

$$z_{i,t} \geq \sum_{k=t-mu_i+1}^{t} y_{i,k}\, , i \in I, t = 1, \dots, T \tag{10}$$

$$z_{i,t} \leq 1 - \sum_{k=t-md_i+1}^{t} o_{i,k}\, , i \in I, t = 1, \dots, T \tag{11}$$

$$q_{i,t} - q_{i,t-1} + (m_i - 0.5ru_i) z_{i,t-1} \leq m_i + 0.5ru_i, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{12}$$

$$q_{i,t-1} - q_{i,t} + (m_i - 0.5rd_i) z_{i,t} \leq m_i + 0.5rd_i, i \in I, t = 1, \dots, T \tag{13}$$

$$y_{i,t}, z_{i,t}, o_{i,t}\ binary\ i \in I, t = 1, \dots, T \tag{14}$$

$$q_{i,t} Z^{+} \; i \in I, t = 1, \ldots, T \qquad (15)$$

Στην αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται το κόστος του ΑΔΣ (1), το οποίο εξαρτάται από τις ποσότητες ηλεκτρικής ενέργειας κάθε παραγωγού σε κάθε χρονική περίοδο και από τα κόστη εκκίνησης που θα καλύψει συνολικά ο ΑΔΣ. Σε αυτό το επίπεδο, οι προσφορές-τιμές $p_{1,t}$ θεωρούνται γνωστές, καθώς προέρχονται από το ανώτερο πρόβλημα. Η ομάδα περιορισμών (2) εξασφαλίζει πως η συνολική ενέργεια που θα διατεθεί σε κάθε περίοδο θα είναι ίση με τη ζήτηση στη συγκεκριμένη περίοδο. Με την ομάδα περιορισμών (3) εξασφαλίζουμε πως η παραγωγή ενέργειας για κάθε μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας δεν πρέπει να ξεπερνάει το τεχνικό μέγιστο, ούτε να είναι μικρότερη από το τεχνικό ελάχιστο. Η ομάδα περιορισμών (4) εγγυάται πως όταν μία μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι ενεργή (δεσμεύεται) σε αυτήν την περίοδο ενώ την προηγούμενη περίοδο ήταν κλειστή και η διαφορά $(z_{\iota,t} - z_{i,t-1})$ ισούται με το 1, τότε επιβάλλεται το κόστος εκκίνησης. Οι περιορισμοί (5) και (6) εξασφαλίζουν πως σε κάθε άλλη περίπτωση η μεταβλητή $y_{i,t}$ παίρνει την τιμή 0. Ομοίως, η ομάδα περιορισμών (7) εγγυάται πως όταν μια μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι κλειστή (δεν δεσμεύεται) σε αυτή την περίοδο ενώ την προηγούμενη χρονική περίοδο ήταν ανοιχτή και η διαφορά $(z_{\iota,t-1} - z_{i,t})$ ισούται με το 1, τότε η μεταβλητή $o_{i,t}$ παίρνει την τιμή 1. Οι περιορισμοί (8) και (9) εξασφαλίζουν πως σε κάθε άλλη περίπτωση η μεταβλητή $o_{i,t}$ παίρνει την τιμή 0. Οι περιορισμοί (10) και (11) επιβάλλουν τον ελάχιστο αριθμό περιόδων που η παραγωγική μονάδα i παραμένει ανοιχτή, αφού ανοίξει $(i \in I)$ και τον ελάχιστο αριθμό περιόδων που η παραγωγική μονάδα i παραμένει κλειστή, αφού κλείσει $(i \in I)$, αντίστοιχα. Συνεπώς, σύμφωνα με τους περιορισμούς (10), οι μονάδες παραγωγής θα πρέπει να είναι ενεργές εφόσον ενεργοποιήθηκαν εντός των προηγούμενων mu_i χρονικών περιόδων, συμπεριλαμβανομένης και της περιόδου t *και* σύμφωνα με τους περιορισμούς (11) οι μονάδες παράγωγής θα πρέπει να είναι κλειστές, εφόσον διέκοψαν την λειτουργία τους εντός των προηγούμενων md_i χρονικών περιόδων συμπεριλαμβανομένης και της περιόδου t. Οι περιορισμοί (12) και (13) ορίζουν το ποσοστό δέσμευσης αύξησης ή και μείωσης της ενεργειακής ποσότητας για κάθε παραγωγό με τον παρακάτω τρόπο. Σύμφωνα με τον περιορισμό (12) αν ένας παραγωγός είναι ενεργός σε μία χρονική περίοδο καθώς και στην προηγούμενη, η ποσότητα ενέργειας του αυτή τη χρονική περίοδο δεν μπορεί να ξεπερνάει την ποσότητα ενέργειας της προηγούμενης παραπάνω από ru_i μονάδες. Επιπροσθέτως, διασφαλίζει ότι αν ο αντίστοιχος παραγωγός είναι μη ενεργός σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο και ανοίξει την επόμενη τότε η ποσότητα ενέργειάς του δεν μπορεί να είναι παραπάνω από $m_{\ i} + 0.5ru_i$. Σε κάθε άλλη περίπτωση ο περιορισμός γίνεται περιττός. Με την ίδια λογική λειτουργεί και ο περιορισμός (13). Αν ένας παραγωγός είναι ενεργός σε μία χρονική περίοδο καθώς και στην προηγούμενη, η ποσότητα ενέργειας του αυτή τη χρονική περίοδο δεν μπορεί να είναι μικρότερη της ποσότητας ενέργειας της προηγούμενης περισσότερο από rd_i μονάδες. Επιπλέον, διασφαλίζει πως ο παραγωγός δεν μπορεί να είναι ανενεργός αυτή τη χρονική περίοδο, αν η ποσότητα ενέργειάς του την προηγούμενη περίοδο ήταν παραπάνω από $m_i + 0.5rd_i$. Σε κάθε άλλη περίπτωση ο περιορισμός γίνεται περιττός. Με τους τελευταίους δύο περιορισμούς εξασφαλίζουμε πως οι μεταβλητές απόφασης $y_{i,t}$, $z_{i,t}$ και $o_{i,t}$ είναι δυαδικές (14), ενώ οι $q_{i,t}$ και $p_{i,t}$ είναι ακέραιες θετικές (15).

Παράμετροι:

C_1 ανώτατο όριο για τις τιμές-προσφορές του στρατηγικού παραγωγού,

c_1 κόστος παραγωγής ανά μονάδα παραγωγής, για τον στρατηγικό παραγωγό.

Μεταβλητές απόφασης:

$p_{1,t}$ τιμές-προσφορές του στρατηγικού παραγωγού για μια μονάδα ενέργειας την χρονική περίοδο t $(t = 1, \dots, T)$.

Πρόβλημα βελτιστοποίησης κέρδους του Στρατηγικού Παραγωγού –Ανώτερο πρόβλημα

$$\text{Max } F_1 = \sum_{t=1}^{T} (p_{1,t} - c_1) q_{1,t} \tag{16}$$

s.t.

$$c_1 \leq p_{1,t} \leq C_1, t = 1, \dots, T \tag{17}$$

$$p_{1,t} \in Z^+, t = 1, \dots., T \tag{18}$$

Πρόβλημα βελτιστοποίησης ΑΔΣ (1)-(15)

Στο ανώτερο επίπεδο βελτιστοποιείται το κέρδος του Στρατηγικού παραγωγού ο οποίος έχει δείκτη $i = 1$ και η αντικειμενική συνάρτησή (16) του εξαρτάται από τις ποσότητες ενέργειας $q_{i,t}$, οι οποίες είναι και μεταβλητές απόφασης του κατώτερου επιπέδου και από τις προσφορές-τιμές $p_{1,t}$ του στρατηγικού παραγωγού. Όπως αναφέραμε ο ΑΔΣ αποζημιώνει τους παραγωγούς για τα κόστη εκκίνησης, συνεπώς δεν συμπεριλαμβάνονται στην αντικειμενική συνάρτηση του ανώτερου επίπεδου. Η ομάδα περιορισμών (17) εγγυάται πως η προσφορά του στρατηγικού παραγωγού δεν μπορεί να είναι χαμηλότερη του κόστους παραγωγής του και υψηλότερη από ένα ανώτατο όριο το οποίο καθορίζεται από κανονισμούς της αγοράς. Οι περιορισμοί (18) ορίζουν τις μεταβλητές απόφασης $p_{1,t}$ να είναι ακέραιες θετικές. Το ανώτερο πρόβλημα περιλαμβάνει όλους του περιορισμούς του κατώτερου.

Η ακεραιότητα των μεταβλητών απόφασης κατά την μοντελοποίηση των ποσοτήτων ενέργειας και των δεσμεύσεων των μονάδων, ορίζουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ ως μη κυρτό. Όλες οι μεταβλητές απόφασης έχουν πεπερασμένα όρια και η εφικτή περιοχή είναι φραγμένη. Συνεπώς, επιβεβαιώνεται η ύπαρξη βέλτιστου στο κατώτερο πρόβλημα. Υπό τις κατάλληλες συνθήκες, μπορεί να επιβεβαιωθεί και η ύπαρξη βέλτιστης λύσης για το διεπίπεδο πρόβλημα.

Μια ιδιαιτερότητα του μοντέλου μας είναι πως δεν εμφανίζονται καθόλου οι μεταβλητές απόφασης του ανώτερου προβλήματος στους περιορισμούς του κατώτερου, με αποτέλεσμα οι αποφάσεις του πρώτου να μην επηρεάζουν την εφικτή περιοχή του δεύτερου. Δεν συμβαίνει όμως το αντίστροφο καθώς οι τιμές-προσφορές του στρατηγικού παραγωγού εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση ως συντελεστές των ποσοτήτων ενέργειας, με συνέπεια οι αποφάσεις του στρατηγικού παραγωγού να επηρεάζουν την αποτελεσματικότητα εναλλακτικών λύσεων κατώτερου επιπέδου. Στην θεωρία του διεπίπεδου προγραμματισμού, οι λύσεις που βρίσκουμε στο πρόβλημα κατώτερου επιπέδου ανταποκρίνονται σε μια συγκεκριμένη ομάδα τιμών των μεταβλητών απόφασης που βρήκαμε λύνοντας το πρόβλημα ανωτέρου επιπέδου. Η ομάδα των εφικτών λύσεων του ανωτέρου επιπέδου στις οποίες ανταποκρίνονται οι λύσεις κατωτέρου επιπέδου ονομάζονται «inducible region». Οι λύσεις αυτές λέμε πως είναι διεπίπεδα εφικτές. Η αντικειμενική συνάρτηση του ανώτερου προβλήματος είναι τετραγωνική. Η αντικειμενική του κατώτερου προβλήματος μπορεί εκ πρώτης όψεως να φαίνεται τετραγωνική, όμως όταν πραγματοποιείται η επίλυση του προβλήματος, οι μεταβλητές απόφασης του ανώτερου είναι ήδη γνωστές, συνεπώς είναι γραμμική.

Υπάρχει η περίπτωση να μην υπάρχει βέλτιστη λύση ακόμη κι αν η εφικτή περιοχή δεν είναι κενή. Σύμφωνα με τον Bard (1998), στο διεπίπεδο προγραμματισμό αυτό το ενδεχόμενο μπορεί να προκύψει όταν το πρόβλημα κατώτερου επιπέδου μπορεί να ικανοποιείται από περισσότερες από μία βέλτιστες λύσεις, οι οποίες όμως να μην ικανοποιούν όλες το ίδιο βέλτιστα το πρόβλημα ανώτερου επιπέδου. Αυτό συμβαίνει επειδή στη βασική θεωρία διεπίπεδου προγραμματισμού των Candler και Norton (1977) τα δύο προβλήματα είναι τελείως ανεξάρτητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το πρόβλημα ανώτερου επίπεδου να μην μπορεί να αναγκάσει τις μεταβλητές απόφασης του κατώτερου επιπέδου να πάρουν συγκεκριμένες βέλτιστες τιμές και συνεπώς να επιτύχει το μέγιστο γι' αυτόν κέρδος.

Οι Lonergan & Morgan (1996) έχουν προτείνει μία από τις πιο συνηθισμένες λύσεις για την αντιμετώπιση αυτού του θέματος. Κάνοντας κάποιες μαθηματικές μετατροπές στο μοντέλο, αλλάζουμε ελαφρά τον ορισμό του προβλήματος, σε μία «αισιόδοξη προσέγγιση», στην οποία επιλέγεται η πιο συμφέρουσα κατώτερη λύση για το ανώτερο πρόβλημα. Στην πράξη, ευνοούνται οι μονάδες παραγωγής με το κατώτατο κόστος παραγωγής, καθώς με αυτόν τον τρόπο μειώνεται το κόστος του ΑΔΣ και οι παραγωγοί αναγκάζονται να γίνουν πιο ανταγωνιστικοί στις τιμές τους. Ένας άλλος λόγος που προτιμάμε την «αισιόδοξη προσέγγιση» είναι πως υπό συγκεκριμένες υποθέσεις εγγυάται σύμφωνα με τον Dempe (2002) την ύπαρξη βέλτιστης λύσης, η οποία είναι η μόνη που επηρεάζεται. Η εγκυρότητα της μεθοδολογίας που ακολουθούμε δεν επηρεάζεται καθόλου.

Στην επόμενη ενότητα, χρησιμοποιούμε το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου μας, ότι δηλαδή οι μεταβλητές απόφασης του ανώτερου επίπεδου εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση του κατώτερου αλλά όχι στους περιορισμούς του, ώστε να αναπτύξουμε μία μεθοδολογία ακριβούς επίλυσης αυτού του προβλήματος διεπίπεδου προγραμματισμού. Στη μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιούμε εξειδικευμένες συνθήκες βελτιστότητας καθώς και τα αποτελέσματα επίλυσης του υποπροβλήματος κατανομής ενέργειας μιας περιόδου, τα οποία όμως δεν είναι ολικώς βέλτιστα. Οι λύσεις του υποπροβλήματος αυτού, ενώ ικανοποιούν τις συνθήκες βελτιστότητας, δεν είναι διεπιπέδως εφικτές. Η λύση σε αυτό το ζήτημα έρχεται από τη θεωρία του ακέραιου παραμετρικού προγραμματισμού με την χρήση έγκυρων ανισοτήτων.

4. Διαδικασία Επίλυσης

4.1 Χαλάρωση διεπίπεδης εφικτότητας

Η διεπίπεδη εφικτότητα, όπως έχει αναφερθεί και νωρίτερα, εγγυάται πως οι μεταβλητές απόφασης του κατώτερου προβλήματος, μαζί με τις τιμές των μεταβλητών απόφασης του ανώτερου προβλήματος που τους αντιστοιχούν, πρέπει να παρέχουν μία βέλτιστη λύση στο πρώτο. Στο προς εξέταση πρόβλημα για ένα σύνολο τιμών-προσφορών του στρατηγικού παραγωγού, οι αντίστοιχες ποσότητες ενέργειας αλλά και οι δεσμεύσεις μονάδων πρέπει να συνιστούν την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ, σε ολόκληρο τον ορίζοντα προγραμματισμού.

Η χαλάρωση της διεπίπεδης εφικτότητας στο πρόβλημα που μελετάμε, επιτυγχάνεται με έναν από τους πιο συνηθισμένους τρόπους για τα προβλήματα διεπίπεδου προγραμματισμού. Ο τρόπος αυτός είναι η αφαίρεση της αντικειμενικής συνάρτησης του κατώτερου προβλήματος, μέσω της οποίας το διεπίπεδο μοντέλο βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε μονοεπίπεδο. Από την γενική θεωρία του διεπίπεδου προγραμματισμού, όπως αναφέρεται και στην αντίστοιχη δημοσίευση των Kostarelou και Kozanidis (2021), η μετατροπή αυτή έχει την παρακάτω συνέπεια:

Πόρισμα 1: *Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του μονοεπίπεδου προβλήματος που προέκυψε από την χαλάρωση του διεπίπεδου, μέσω της αφαίρεση της αντικειμενικής συνάρτησης του κατώτερου προβλήματος, είναι ένα έγκυρο άνω φράγμα της αντικειμενικής συνάρτησης του αρχικού διεπίπεδου προβλήματος.*

Ωστόσο, ένα πρόβλημα που προκύπτει από την χαλάρωση της διεπίπεδης εφικτότητας είναι πως οι δεσμεύσεις μονάδων και συνεπώς οι αντίστοιχες ποσότητες ενέργειας σε κάποιες χρονικές περιόδους δεν θα είναι οι βέλτιστες για το πρόβλημα του ΑΔΣ, δεδομένων κάποιων προσφορών-τιμών του στρατηγικού παραγωγού. Στα επόμενα βήματα της μεθοδολογίας θα δούμε πως θα ξεπεράσουμε το πρόβλημα αυτό.

4.2 Αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας μιας περιόδου

Οι συνθήκες βελτιστότητας που αναπτύσσουμε στο επόμενο βήμα της μεθοδολογίας μας, σχετίζονται με την κατανομή της ενέργειας, κάθε μίας χρονικής περιόδου του χρονικού ορίζοντα ξεχωριστά. Οι συνθήκες αυτές καθ' αυτές δεν μας εξασφαλίζουν την εύρεση ενός ολικού βέλτιστου, όμως διευκολύνουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την τελική αναζήτηση της βέλτιστης λύσης, μειώνοντας την εφικτή περιοχή, καθώς αποκλείουν σημαντικό αριθμό κατανομών ενέργειας οι οποίες δεν είναι βέλτιστες. Προκειμένου να επιτευχθεί η επιβολή των συνθηκών βελτιστότητας, πρέπει να ορίσουμε και να εισάγουμε στους υπολογισμούς κάποιες νέες μεταβλητές απόφασης:

$w_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης, η οποία παίρνει την τιμή 1, αν και μόνο αν η ποσότητα της ενέργειας που θα προσφερθεί από την μονάδα i την χρονική περίοδο t,είναι αυστηρώς μεγαλύτερη από m_i, και 0 σε διαφορετική περίπτωση, $i \in I, t = 1, \dots, T$,

$v_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης, η οποία παίρνει την τιμή 1, αν και μόνο αν η ποσότητα της ενέργειας που θα προσφερθεί από την μονάδα i την χρονική περίοδο t,είναι αυστηρώς μικρότερη από M_i, και 0 σε διαφορετική περίπτωση, $i \in I, t = 1, \dots, T$.

Οι σωστές τιμές των εν λόγω μεταβλητών απόφασης καθορίζονται από τους εξής περιορισμούς:

$$q_{i,t} \leq (M_i - m_i)w_{i,t} + m_i, i \in I, t = 1, \dots, T \qquad (19)$$

$$q_{i,t} \geq (m_i + 1)w_{i,t}, i \in I, t = 1, \dots, T \qquad (20)$$

$$q_{i,t} \leq M_i - v_{i,t}, i \in I, t = 1, \dots, T \qquad (21)$$

$$q_{i,t} \geq M_i\left(1 - v_{i,t}\right), i \in I, t = 1, \dots, T \qquad (22)$$

Στην περίπτωση που η μεταβλητή απόφασης $w_{i,t}$ παίρνει την τιμή 0, μέσω των περιορισμών (19) και (20) επιβάλλεται πως $0 \leq q_{i,t} \leq m_i$, ενώ στην περίπτωση που παίρνει την τιμή 1, επιβάλλεται πως $m_i + 1 \leq q_{i,t} \leq M_i$. Στην ίδια λογική λειτουργούν και οι περιορισμοί (21)-(22), οι οποίοι, όταν η μεταβλητή απόφασης $v_{i,t}$ είναι 0, ισχύει η ανίσωση $M_i \leq q_{i,t} \leq M_i$ και συνεπώς $q_{i,t} = M_i$, ενώ όταν $v_{i,t}$ είναι 1, ισχύει η ανίσωση $0 \leq q_{i,t} \leq M_i - 1$.

Στην συνέχεια εισάγουμε νέες μεταβλητές απόφασης:

$Ru_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης η οποία παίρνει την τιμή 1 αν και μόνο αν ο περιορισμός στην αύξηση της ποσότητας ενέργειας της μονάδας i την χρονική περίοδο t είναι δεσμευτικός, και σε κάθε άλλη περίπτωση είναι 0, $i \in I, t = 1, \dots, T$,

$Rd_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης η οποία παίρνει την τιμή 1 αν και μόνο αν ο περιορισμός στη μείωση της ποσότητας ενέργειας παραγωγής της μονάδας i την χρονική περίοδο t είναι δεσμευτικός, και σε κάθε άλλη περίπτωση είναι 0, $i \in I, t = 1, \dots, T$,

Οι παραπάνω μεταβλητές απόφασης παίρνουν τις σωστές τιμές με τους παρακάτω περιορισμούς, οι οποίοι εισάγονται για $i \in I$ *και* $t = 1, \dots, T$:

$$Ru_{i,t} \geq q_{i,t} - q_{i,t-1} - ru_i + 1 - (m_i - 0.5ru_i)(1 - z_{i,t-1}) \quad (23)$$

$$Ru_{i,t} \leq \frac{q_{i,t} - q_{i,t-1} + M_i + (m_i - 0.5ru_i)(z_{i,t} + z_{i,t-1} - 1)}{M_i + m_i + 0.5ru_i} \quad (24)$$

$$Rd_{i,t} \geq q_{i,t-1} - q_{i,t} - rd_i + 1 - (m_i - 0.5rd_i)(1 - z_{i,t}), i \in I, t = 1, \dots., T \quad (25)$$

$$Rd_{i,t} \leq \frac{q_{i,t-1} - q_{i,t} + M_i + (m_i - 0.5rd_i)(z_{i,t} + z_{i,t-1} - 1)}{M_i + m_i + 0.5rd_i} \quad (26)$$

Στην περίπτωση που $z_{i,t} = z_{i,t-1} = 1$, ο περιορισμός (23) γίνεται $Ru_{i,t} \geq q_{i,t} - q_{i,t-1} - ru_i + 1$,και ο περιορισμός (24) γίνεται:

$$Ru_{i,t} \leq \frac{q_{i,t} - q_{i,t-1} + M_i + (m_i - 0.5ru_i)}{M_i + m_i + 0.5ru_i}.$$

Με αυτόν τον τρόπο η μεταβλητή $Ru_{i,t}$ παίρνει την τιμή 1 αν και μόνο αν $q_{i,t} - q_{i,t-1} = ru_i$.
Στην περίπτωση που $z_{i,t} = z_{i,t-1} = 0$, ο περιορισμός (23) μετατρέπεται σε $Ru_{i,t} \geq -m_i - ru_i + 1$, και ο περιορισμός (24) μετατρέπεται σε

$$Ru_{i,t} \leq \frac{M_i - m_i + 0.5ru_i}{M_i + m_i + 0.5ru_i}.$$

Συνεπώς, η μεταβλητή $Ru_{i,t}$ εξαναγκάζεται να πάρει την τιμή 0, αφού σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει δέσμευση στην αύξηση της παραγωγής.
Στην περίπτωση που $z_{i,t} = 1$, $z_{i,t-1} = 0$, ο περιορισμός (23) γίνεται $Ru_{i,t} \geq q_{i,t} - m_i - 0.5ru_i + 1$, και ο περιορισμός (24) γίνεται

$$Ru_{i,t} \leq \frac{q_{i,t} + M_i}{M_i + m_i + 0.5ru_i} .$$

Επομένως, η μεταβλητή $Ru_{i,t}$ παίρνει την τιμή 1 αν και μόνο $q_{i,t} = m_i + 0.5ru_i$, με αποτέλεσμα να υπάρχει δέσμευση στην αύξηση της παραγωγής.

Στην τελευταία περίπτωση που $z_{i,t} = 0,\ z_{i,t-1} = 1$, ο περιορισμός (23) μετατρέπεται σε $Ru_{i,t} \geq -q_{i,t} - 1 - ru_i + 1,$ και ο περιορισμός (24) μετατρέπεται σε

$$Ru_{i,t} \leq \frac{-q_{i,t-1} + M_i}{M_i + m_i + 0.5ru_i}.$$

Άρα η μεταβλητή $Ru_{i,t}$ εξαναγκάζεται να πάρει την τιμή 0, αφού και σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει δέσμευση στην αύξηση της παραγωγής. Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο οι περιορισμοί (25) και (26) δίνουν τις βέλτιστες τιμές στις μεταβλητές $Rd_{i,t}$.

Οι συνθήκες βελτιστότητας που ισχύουν για δύο μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, εκτός του στρατηγικού παραγωγού ($\mathrm{i} > 1$ και $\mathrm{j} > 1$), οι οποίες είναι και οι δύο ενεργές ($z_{i,t} = z_{j,t} = 1$) και η τιμή-προσφορά του j είναι μεγαλύτερη από την τιμή του i ($p_{i,t} < p_{j,t}$), ορίζονται ως εξής με την βοήθεια των $w_{j,t}$, $v_{i,t}$, $Ru_{i,t}$και $Rd_{j,t}$:

$$z_{i,t} + z_{j,t} + w_{j,t} + v_{i,t} - Ru_{i,t} - Rd_{i,t+1} - Rd_{j,t} - Ru_{j,t+1} \leq 3 \qquad (27)$$

Η εγκυρότητα του περιορισμού (27) εξασφαλίζεται από την παρακάτω παραδοχή.

Πρόταση 1: Αν $i > 1,\ j > 1$ και $p_{i,t} < p_{j,t}$, η βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης κέρδους του στρατηγικού παραγωγού ικανοποιεί τον περιορισμό (27).

Απόδειξη: Είναι γνωστό πως η βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης κέρδους του στρατηγικού παραγωγού πρέπει και θα είναι εφικτή και για τα δύο επίπεδα. Σε μία βέλτιστη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης κόστους του ΑΔΣ, παρατηρούμε πως εάν αυξήσουμε κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας ενός παραγωγού i, ο οποίος είναι ενεργός την χρονική στιγμή t, τότε οι μόνοι περιορισμοί που παραβιάζονται, είναι εκείνοι του τεχνικού του μεγίστου τη χρονική στιγμή t, οι περιορισμοί δέσμευσης αύξησης της παραγωγής του τη χρονική στιγμή t, οι περιορισμοί δέσμευσης μείωσης της παραγωγής του τη χρονική στιγμή $t + 1$, και οι περιορισμοί της ζήτησης τη χρονική στιγμή t. Με την ίδια λογική εάν μειώσουμε, στην ίδια βέλτιστη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης κόστους του ΑΔΣ, κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας ενός παραγωγού j, ο οποίος είναι ενεργός την χρονική στιγμή t, τότε οι μόνοι περιορισμοί που παραβιάζονται, είναι εκείνοι του τεχνικού του ελαχίστου τη χρονική στιγμή t, οι περιορισμοί δέσμευσης αύξησης της παραγωγής του τη χρονική στιγμή $t + 1$, οι περιορισμοί δέσμευσης μείωσης της παραγωγής του τη χρονική στιγμή t και οι περιορισμοί της ζήτησης τη χρονική στιγμή t. Επισημαίνοντας πως ο περιορισμός (27) αποτελείται αποκλειστικά από δυαδικές μεταβλητές, παραβιάζεται μόνο όταν $z_{i,t} = z_{j,t} = w_{j,t} = v_{i,t} = 1$ και $Ru_{i,t} = Rd_{i,t+1} = Rd_{j,t} = Ru_{j,t+1} = 0$. Στην περίπτωση που $z_{i,t} = 1$, $v_{i,t} = 1$, $Ru_{i,t} = 0$ και $Rd_{i,t+1} = 0$, γίνεται αντιληπτό πως είναι εφικτό να αυξήσουμε κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας ενός παραγωγού i, χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί του τεχνικού μεγίστου τη χρονική στιγμή t, της δέσμευσης αύξησης της παραγωγής του τη χρονική στιγμή t, και της δέσμευσης μείωσης της παραγωγής του τη χρονική στιγμή $t+1$. Με την ίδια λογική για $z_{j,t} = 1$, $w_{j,t} = 1$, $Rd_{j,t} = 0$ και $Ru_{j,t+1} = 0$, μπορούμε να μειώσουμε κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας ενός παραγωγού j, χωρίς να παραβιάζονται οι περιορισμοί του τεχνικού ελαχίστου τη χρονική στιγμή t, της δέσμευσης αύξησης της παραγωγής του τη χρονική περίοδο $t+1$, και της δέσμευσης μείωσης της παραγωγής του τη χρονική περίοδο t . Μειώνοντας την ποσότητα ενέργειας ενός παραγωγού και αυξάνοντας κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας ενός άλλου την χρονική περίοδο t, δεν παραβιάζονται και οι περιορισμοί της ζήτησης. Επομένως, μία τέτοια αλλαγή θα μας παρείχε μία εναλλακτική εφικτή λύση. Εφόσον όμως ισχύει ότι $p_{i,t} < p_{j,t}$, το οποίο καταλήγει σε μία λύση για το πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ με χαμηλότερος κόστος, αποκλείεται η εν λόγω εναλλακτική λύση.

Προσθέτοντας τον περιορισμό (27) στην χαλαρωμένη μορφή του προβλήματος, επιτυγχάνουμε τον αποκλεισμό των λύσεων αυτού του είδους και μειώνουμε σημαντικά την εφικτή περιοχή.

Η προσθήκη παρόμοιων συνθηκών βελτιστότητας, για ζευγάρια όμως που περιέχουν τον στρατηγικό παραγωγό, φαίνεται να εμπεριέχει την δυσκολία πως οι τιμές-προσφορές του χρονική περίοδο t δεν είναι γνωστές, καθώς είναι μεταβλητές απόφασης που υπόκεινται σε βελτιστοποίηση. Προκειμένου το εμπόδιο αυτό να ξεπεραστεί, ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές απόφασης:

$x_{i,t}$ δυαδική μεταβλητή απόφασης, η οποία παίρνει την τιμή 1 αν και μόνο αν $p_{i,t} < p_{1,t}$ και 0 σε άλλη περίπτωση, $i > 1, t = 1, \dots, T$.

Οι σωστές τιμές αυτών των μεταβλητών απόφασης καθορίζονται από τους δύο περιορισμούς:

$$p_{1,t} \leq (C_1 - p_{i,t})x_{i,t} + p_{i,t}, i \in I: i > 1: t = 1, \dots, T \qquad (28)$$

$$p_{1,t} \geq c_1 + (p_{i,t} + 1 - c_1)x_{i,t}, i \in I: i > 1: t = 1, \dots, T \qquad (29)$$

Στην περίπτωση που η μεταβλητή $x_{i,t}$ πάρει την τιμή 0, μέσω της διαμόρφωσης των παραπάνω περιορισμών, ισχύει η ανίσωση $c_1 \leq p_{1,t} \leq p_{i,t}$, ενώ εάν πάρει την τιμή 1, η ανίσωση διαμορφώνεται ως εξής $p_{i,t+1} \leq p_{1,t} \leq C_1$. Η συμβολή των μεταβλητών απόφασης $x_{i,t}$, επεκτείνει στο **Πόρισμα 2** τις συνθήκες βελτιστότητας της **Πρότασης 1** για ένα ζευγάρι παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας το οποίο περιλαμβάνει τον Στρατηγικό, για μια χρονική περίοδο t.

Πόρισμα 2: η βέλτιστη λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης κέρδους του στρατηγικού παραγωγού ικανοποιεί τους επόμενους 2 περιορισμούς για κάθε $i > 1$:

$$z_{1,t} + z_{i,t} + x_{i,t} + w_{1,t} + v_{i,t} - Ru_{i,t} - Rd_{i,t+1} - Rd_{1,t} - Ru_{1,t+1} \leq 4,\ i \in I{:}\ i > 1{:}\ t = 1,\dots,T \qquad (30)$$

$$z_{1,t} + z_{i,t} - x_{i,t} + v_{1,t} + w_{i,t} - Ru_{1,t} - Rd_{1,t+1} - Rd_{i,t} - Ru_{i,t+1} \leq 3,\ i \in I{:}\ i > 1{:}\ t = 1,\dots,T \qquad (31)$$

Απόδειξη: Στην περίπτωση που $x_{i,t} = 1$, ο περιορισμός (30) γίνεται ίδιος με τον (27), καθώς η μονάδα i έχει την χαμηλότερη τιμή-προσφορά τη χρονική περίοδο t και ο περιορισμός (31) καθίσταται περιττός. Με την ίδια λογική στην περίπτωση που $x_{i,t} = 0$, ο περιορισμός (31) γίνεται ίδιος με τον (27), καθώς ο στρατηγικός παραγωγός έχει την χαμηλότερη προσφορά τη χρονική περίοδο t και ο περιορισμός (30) καθίσταται περιττός. Αν ισχύει $p_{1,t} = p_{i,t}$, το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σαν την περίπτωση $p_{i,t} < p_{1,t}$, καθώς έχουμε επιλέξει από την αρχή την αισιόδοξη προσέγγιση.

4.3 Ανισότητες για τον αποκλεισμό διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων

4.3.1 Θεωρητική Ανάλυση

Συνδυάζοντας τα θεωρητικά συμπεράσματα των δύο προηγούμενων κεφαλαίων, παίρνουμε μια παραλλαγή του αρχικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, προσθέτοντας στο χαλαρωμένο πρόβλημα ενός επιπέδου τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας μιας περιόδου, καταλήγουμε στο χαλαρωμένο πρόβλημα του στρατηγικού παραγωγού ή για λόγους ευκολίας *ΧΠΣΠ* και ερχόμαστε ένα βήμα πιο κοντά στην εύρεση της βέλτιστης λύσης. Το μόνο που χρειάζεται είναι η λύση αυτού του παραλλαγμένου προβλήματος (*ΧΠΣΠ*) να είναι διεπίπεδα εφικτή. Αυτό σημαίνει πως οι δεσμεύσεις μονάδων, καθώς και κάθε ποσότητα ενέργειας $q_{i,t}$ που προκύπτουν από την λύση του, θα πρέπει να είναι βέλτιστα και για το πρόβλημα του ΑΔΣ, για το σχετικό σύνολο τιμών του στρατηγικού παραγωγού. Δυστυχώς, κάτι τέτοιο δεν εξασφαλίζεται πλήρως από το *ΧΠΣΠ*, καθώς στην αντικειμενική του συνάρτηση εμφανίζονται μόνο οι ποσότητες $q_{i,t}$ του στρατηγικού παραγωγού και επομένως, το πρόβλημα αρκείται στο να βρει τις βέλτιστες τιμές $q_{1,t}$ και τις ευνοϊκότερες για τον στρατηγικό παραγωγό δεσμεύσεις μονάδων για να σταματήσει, ασχέτως αν η λύση είναι διεπίπεδα εφικτή. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, θα πρέπει κάθε φορά που θα συναντάται μια λύση, στην οποία είτε οι δεσμεύσεις μονάδων $z_{i,t}$, είτε οι ποσότητες ενέργειας $q_{i,t}$ δεν την καθιστούν διεπίπεδα εφικτή, να αποκλείεται από περαιτέρω εξέταση. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση μιας κατάλληλης τροποποίησης της προσέγγισης που προτάθηκε από τους Kostarelou και Kozanidis (2021), για την εξάλειψη διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων, όπως εξηγείται παρακάτω.

Στο πρόβλημα βελτιστοποίησης κατώτερου επιπέδου στην αντικειμενική συνάρτηση του ΑΔΣ, οι προσφορές του στρατηγικού παραγωγού $p_{1,t}$ δρουν σαν συντελεστές βαρύτητας των αντίστοιχων ενεργειακών του ποσοτήτων $q_{1,t}$. Μπορεί εύκολα να βρεθεί η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ για τις προσφορές του στρατηγικού παραγωγού που συναντώνται στην διεπίπεδα μη εφικτή λύση που θέλουμε να αποκλείσουμε. Όπως έχει αποδειχθεί από τους Geoffrion και Nauss (1977), όταν σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ακέραιου προγραμματισμού, οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στην αντικειμενική συνάρτηση αλλάζουν γραμμικά μέσω μιας βαθμωτής παραμέτρου, τότε, η βέλτιστη τιμή είναι κατά τμήματα γραμμική, συνεχής και κοίλη στην πεπερασμένη της περιοχή, σαν συνάρτηση της τιμής της παραμέτρου. Επομένως, από την θεωρία του ακέραιου παραμετρικού προγραμματισμού, προκύπτει πως η λύση στο πρόβλημα που αναλύεται πιο πάνω θα παραμείνει βέλτιστη για μια ταυτόχρονη και αρκετά μικρή διαταραχή των συντελεστών βαρύτητας των μεταβλητών απόφασης.

Συνεπώς, μας δίνεται η ικανότητα να αυξήσουμε ή να μειώσουμε ταυτόχρονα, κατά έναν αριθμό, τις προσφορές του στρατηγικού παραγωγού χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ. Μόλις ανακαλύψουμε τα μέγιστα όρια, άνω και κάτω, για τα οποία ισχύει η παραπάνω συνθήκη, τότε έχουμε ουσιαστικά προσδιορίσει μια περιοχή τιμών, για την οποία γνωρίζουμε τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων $z_{i,t}$, καθώς και τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας $q_{i,t}$. Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε όχι μόνο να εξαλείψουμε μια λύση που δεν είναι διεπίπεδα εφικτή, αλλά και έναν μεγάλο αριθμό διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων, όταν οι προσφορές του στρατηγικού παραγωγού βρίσκονται μέσα στο πεδίο τιμών που έχουμε προσδιορίσει. Ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό είναι ο εξής:

Κάθε φορά που ο αλγόριθμος συναντά μία λύση, ελέγχει αν οι τιμές $z_{i,t}$ και $q_{i,t}$ ταυτίζονται με τις βέλτιστες, που έχει αναγνωρίσει λύνοντας το πρόβλημα του ΑΔΣ, για τις αντίστοιχες προσφορές του στρατηγικού παραγωγού. Πρώτα, ελέγχεται η βελτιστότητα των δεσμεύσεων μονάδων $z_{i,t}$ και στην συνέχεια των ποσοτήτων ενέργειας $q_{i,t}$. Αν ένας από τους δύο ελέγχους αποτύχει, τότε ο αλγόριθμος προχωράει στην αναζήτηση των διαστημάτων που αναφέρθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε πως $p_{1,t}^{a}$ είναι η προσφορά του στρατηγικού παραγωγού την περίοδο t όπου $t = 1,2, \dots, T$, αρκεί να βρούμε τις μέγιστες τιμές $Lmax$, $Rmax$ για τις οποίες, όλες οι προσφορές του στρατηγικού παραγωγού μπορούν ταυτοχρόνως να μειωθούν κατά $Lmax$ ή να αυξηθούν κατά Rmax, χωρίς να αλλάξει η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ. Μόλις προσδιοριστούν τα $Lmax$ και $Rmax$, με την βοήθεια των κατάλληλων τεχνικών μοντελοποίησης ακέραιου προγραμματισμού, δημιουργούμε έγκυρες ανισότητες που επιβάλουν την βέλτιστη λύση όπως αυτή προκύπτει από το πρόβλημα του ΑΔΣ. Έτσι κάθε φορά που συναντάται μια λύση που αντιστοιχεί στο πεδίο τιμών, που προηγουμένως έχουμε προσδιορίσει, άλλα δεν ικανοποιεί τις αναγκαίες ανισότητες, αποκλείεται. Το ακόλουθο σημαντικό συμπέρασμα δικαιολογεί την εγκυρότητα των προτεινόμενων ανισοτήτων:

<u>Πρόταση 2</u> *: Οι δεσμεύσεις μονάδων που είναι βέλτιστες για το πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ για τις αρχικές προσφορές του στρατηγικού παραγωγού* $(p_{1,1}^{a}, p_{1,2}^{a}, \dots\dots, p_{1,T}^{a})$ *παραμένουν ίδιες όταν κάθε προσφορά παίρνει ακέραιες τιμές από το διάστημα* $[p_{1,t}^{a} - Lmax,\ p_{1,t}^{a} + Rmax]$

<u>Απόδειξη :</u> Από Kostarelou και Kozanidis (2021).

Οι τιμές $Lmax$ και $Rmax$ που έχουμε προσδιορίσει, είναι καθολικές για όλες τις προσφορές του στρατηγικού παραγωγού, στον χρονικό ορίζοντα προγραμματισμού T. Μπορούμε στην συνέχεια, να αναζητήσουμε ξεχωριστά όρια για κάθε προσφορά $p_{1,t}^{a}, t = 0,1,..,T$ επεκτείνοντας έτσι το θεωρητικό συμπέρασμα της Πρότασης 2. Αντίστοιχα με πριν, αυτή η αναζήτηση γίνεται σε δύο διευθύνσεις, αλλά αυτή την φορά ξεχωριστά για κάθε προσφορά του στρατηγικού παραγωγού. Ας πάρουμε ως παράδειγμα το δεξί διάστημα $p_{1,t}^{a} + Rmax$. Ελέγχοντας μία προσφορά την φορά, αυξάνουμε την τιμή της πάνω από το όριο $Rmax$, όσο αυτή η αύξηση δεν επιφέρει αλλαγές στην βέλτιστη λύση του προβλήματος του ΑΔΣ. Αφού ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία για κάθε προσφορά του στρατηγικού παραγωγού και δεν υπάρχει καμία τέτοια προσφορά, η οποία μπορεί να αυξηθεί χωρίς να αλλάξει βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ, κάνουμε το αντίστοιχο, μειώνοντας τώρα κάθε προσφορά, για το αριστερό διάστημα $p_{1,t}^{a} + Lmax$. Μετά το πέρας αυτής της διαδικασίας, ο αλγόριθμος έχει ουσιαστικά προσδιορίσει κάποια υποσύνολα προσφορών, για τα οποία η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ παραμένει ίδια, δίνοντας έτσι την ικανότητα να απαλειφθεί ένας ακόμη μεγαλύτερος αριθμός διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων, επιταχύνοντας έτσι και την λειτουργία του προτεινόμενου αλγορίθμου. Όπως είναι πλέον προφανές, τα μήκη των διαστημάτων για κάθε προσφορά θα είναι διαφορετικά. Αυτό εξαρτάται και από την ακριβή σειρά με την οποία εξετάστηκαν τα εναλλακτικά υποσύνολα. Αυτή η εξάρτηση προκύπτει αναγκαστικά λόγω της συνδυαστικής φύσης του αλγορίθμου. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος εξετάζει τυχαία αυτά τα υποσύνολα και εγκρίνει εκείνα που προσφέρουν επέκταση των διαστημάτων και δεν αναιρούν οποιαδήποτε τέτοια απόφαση. Θα μπορούσε κανείς να εξετάσει πρώτα όλα τα εφικτά υποσύνολα και να επιλέξει τους συνδυασμούς εύρους που αποκλείουν τον μέγιστο αριθμό διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων, αλλά στον προτεινόμενο αλγόριθμο αυτό μπορεί να προκαλέσει μειωμένη απόδοση. Έχοντας πλέον καταλήξει σε ξεχωριστά όρια $Lmax_t$ και $Rmax_t$ για κάθε προσφορά του Στρατηγικού παραγωγού, η Πρόταση 2 μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής :

<u>Πόρισμα 3:</u> *Οι δεσμεύσεις μονάδων που είναι βέλτιστες στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ για τις προσφορές του στρατηγικού* $(p_{1,1}^{a}, p_{1,2}^{a}, \ldots\ldots, p_{1,T}^{a})$ *παραμένουν βέλτιστες όταν κάθε προσφορά παίρνει τιμές από το αντίστοιχο διάστημα της* $[p_{1,t}^{a} - Lmax_t,\ p_{1,t}^{a} + Rmax_t]$

<u>Απόδειξη:</u> Το πόρισμα 3 εγκυροποιείται μέσω της επαναλαμβανόμενης εφαρμογής της πρότασης 2, σε κάθε υποσύνολο προσφορών που έχει γίνει δεκτό από την προτεινόμενη διαδικασία, δεδομένου ότι οι συντελεστές μόνο αυτών των μεταβλητών απόφασης($q_{1,t}$) διαταράσσονται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του ΑΔΣ.

Με την κατάλληλη αξιοποίηση του παραπάνω πορίσματος, μπορούν να παραχθούν έγκυρες ανισότητες, έτσι ώστε κάθε φορά που ο αλγόριθμος συναντά μια διεπίπεδα μη εφικτή λύση, να μπορεί να την αποκλείσει είτε επιβάλλοντας τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων $z_{i,t}$, είτε ένα άνω όριο για τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας $q_{i,t}$. Στην επόμενη υποενότητα περιγράφεται η ακριβής διαδικασία που ακολουθείται για την δημιουργία αυτών των ανισοτήτων.

4.3.2 Δημιουργία ανισοτήτων

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση για την οποία η λύση δεν είναι διεπίπεδα εφικτή, διότι οι δεσμεύσεις μονάδων σε αυτήν δεν ταυτίζονται με τις βέλτιστες. Για να αποκλειστεί μια τέτοια λύση, θα πρέπει με τις κατάλληλες έγκυρες ανισότητες να επιβάλλουμε τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων για το διάστημα στο οποίο αυτή ανήκει. Θεωρείστε το διάστημα $[p^{a}_{1,t} - Lmax_t, p^{a}_{1,t} + Rmax_t]$ που σχετίζεται με κάθε προσφορά $p^{a}_{1,t}$. Για να μπορέσουμε να εκφράσουμε αυτές τις ανισότητες που θα επιβάλλουν τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων, θα πρέπει να εισάγουμε δύο δυαδικές βοηθητικές μεταβλητές. Η πρώτη $W_{L,t}$ δηλώνει αν η προσφορά $p_{1,t}$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από το $p^{a}_{1,t} - Lmax_t$. Αυτή η μεταβλητή είναι αναγκαία μόνο στην περίπτωση που $p^{a}_{1,t} - Lmax_t > c_1$. Διαφορετικά, από τα χαρακτηριστικά του προβλήματος θα ισχύει πως $p^{a}_{1,t} - Lmax_t = c_1$. Η μεταβλητή WL_t, ορίζεται παρακάτω με την χρήση των κατάλληλων περιορισμών:

$$p_{1,t} \leq (C_1 - p^{a}_{1.t} + Lmax_t + 1)WL_t + (p^{a}_{1.t} - Lmax_t - 1) \qquad (30)$$

$$p_{1,t} \geq (p^{a}_{1.t} - Lmax_t - c_1)WL_t + c_1 \qquad (31)$$

Οι περιορισμοί (30), (31) επιβάλουν τον περιορισμό $WL_t = 1$ αν και μόνο αν $p_{1,t} \geq p^{a}_{1.t} - Lmax_t$. Όταν $WL_t = 0$ ο περιορισμός (30) δηλώνει πως $p_{1,t} \leq p^{a}_{1,t} - Lmax_t - 1$ και ο περιορισμός (31) χαλαρώνει, γίνεται πλεονάζων. Όταν $WL_t = 1$ ο περιορισμός (31) δηλώνει πως $p_{1,t} \geq p^{a}_{1,t} - Lmax_t$ ενώ ο περιορισμός (30) γίνεται αυτή την φορά πλεονάζων.

Αντίστοιχα η δεύτερη μεταβλητή WR_t θα δηλώνει αν η προσφορά $p_{1,t}$ είναι μικρότερη ίση με $p^{a}_{1,t} + Rmax_t$. Επίσης, αυτή η μεταβλητή χρειάζεται μόνο στην περίπτωση που $p^{a}_{1,t} + Rmax_t < C_1$ και στην αντίθετη περίπτωση θα ισχύσει η ισότητα $p^{a}_{1,t} + Rmax_t = C_1$. Η μεταβλητή WR_t, ορίζεται παρακάτω με την χρήση των κατάλληλων περιορισμών :

$$p_{1,t} \leq (\mathrm{C}_1 - p^{a}_{1,t} - Rmax_t)(1 - WR_t) + p^{a}_{1,t} + Rmax_t \qquad (32)$$

$$p_{1,t} \geq \mathrm{c}_1 + \left(p^{a}_{1,t} + Rmax_t + 1 - \mathrm{c}_1 \right)(1 - WR_t) \qquad (33)$$

Με παρόμοιο τρόπο με τους (30) και (31) λειτουργούν και οι περιορισμοί (32) , (33). Επιβάλουν τον πως $WR_{,t} = 1$ αν και μόνο αν $p_{1,t} \leq p_{1,t}^{a} + Rmax_t$. Όταν $WR_{,t} = 0$ ο περιορισμός (33) δηλώνει πως $p_{1,t} \geq p_{1,t}^{a} + Rmax_t + 1$ ενώ ο περιορισμός (32) γίνεται πλεονάζων. Όταν $WR_{,t} = 1$ ο περιορισμός (32) δηλώνει πως $p_{1,t} \leq p_{1,t}^{a} + Rmax_t$, ενώ ο περιορισμός (33) γίνεται πλεονάζων.

Η επιβολή των βέλτιστων δεσμεύσεων μονάδων στο πρόβλημα του ΑΔΣ, μετά τον ορισμό και την εισαγωγή των παραπάνω βοηθητικών μεταβλητών για κάθε περίοδο t, επιτυγχάνεται με τους περιορισμούς που ακολουθούν.

Η επιβολή μιας μονάδας i να **μην** είναι δεσμευμένη την περίοδο τ ($\tau = 1,2,\dots,\boldsymbol{T}$) δηλαδή να έχω πως $z_{i,\tau} = 0$ επιτυγχάνεται με την εισαγωγή του παρακάτω περιορισμού:

$$z_{i,\tau} \leq \sum_{t=1}^{T} (2 - WR_{,t} - WL_{,t}) \qquad (34)$$

Παρομοίως η επιβολή μιας μονάδας i να είναι δεσμευμένη την περίοδο τ ($\tau = 1,2,\dots,\boldsymbol{T}$), δηλαδή να έχω πως $z_{i,\tau} = 1$ επιτυγχάνεται με την εισαγωγή του παρακάτω περιορισμού:

$$z_{i,\tau} \geq 1 - \sum_{t=1}^{T} \left(2 - WR_{,t} - WL_{,t}\right) \qquad (35)$$

Ο τρόπος που λειτουργούν οι δύο αυτές ανισότητες είναι ο εξής: Όταν όλες οι βοηθητικές μεταβλητές πάρουν την τιμή 1, τότε ο περιορισμός (35) επιβάλει πώς $z_{i,\tau} = 0$. Αντίθετα, στην ίδια περίπτωση ο περιορισμός (36) επιβάλει πώς $z_{i,\tau} = 1$. Αν τουλάχιστον μία από τις μεταβλητές είναι ίση με 0, τότε και οι δύο περιορισμοί γίνονται περιττοί. Στην γενική περίπτωση, στις ανισώσεις (35) , (36) θα εμφανίζονται $2 * T$ βοηθητικές μεταβλητές. Όταν για κάποιες προσφορές του στρατηγικού παραγωγού, τα άκρα των διαστημάτων που έχουμε προσδιορίσει ταυτίζονται είτε με το c_1, είτε με το C_1 ο αριθμός των βοηθητικών μεταβλητών θα μειώνεται αντιστοίχως.

Επομένως, με την κατάλληλη χρήση των παραπάνω περιορισμών, μπορεί κανείς να επιβάλει τις πραγματικά βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων, για τον αποκλεισμό διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων.

Η δεύτερη περίπτωση, αφορά διεπίπεδα μη εφικτές λύσεις που όμως οι δεσμεύσεις μονάδων τους, όπως προκύπτουν από το ΧΠΣΠ, ταυτίζονται με τις πραγματικά βέλτιστες από την λύση του προβλήματος του ΑΔΣ. Σε αυτή την περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σημαντικό συμπέρασμα :

Πόρισμα 4: *Αν η λύση στο ΧΠΣΠ, για συγκεκριμένες προσφορές του $p_{1,t}$, δεν είναι διεπίπεδα εφικτή, τότε σε αυτή την λύση, υπάρχει τουλάχιστον μία ποσότητα ενέργειας $q_{1,t}$, που είναι μεγαλύτερη από αυτή που συναντάμε στην βέλτιστη λύση του ΑΔΣ, για τις αντίστοιχες προσφορές.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε πως το ΧΠΣΠ αποτελεί μια χαλάρωση του πραγματικού διεπίπεδου προβλήματος. Επομένως, αναγκαστικά η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής του συνάρτησης δεν μπορεί παρά να είναι μεγαλύτερη ή ίση με εκείνη του αρχικού προβλήματος.

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας ως βάση το Πόρισμα 4, εισάγεται η παρακάτω ανισότητα σε κάθε περίοδο του χρονικού ορίζοντα t $(t = 1,2,..,T)$, η οποία λειτουργεί ως ένα άνω όριο για τις ποσότητες ενέργειας του Στρατηγικού παραγωγού και εξασφαλίζει τον αποκλεισμό των διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων, στις οποίες οι δεσμεύσεις μονάδων $z_{i,t}$ είναι βέλτιστες, κάθε φορά που συναντώνται.

$$q_{1,\tau} \leq Q_{1,\tau} + k\left(M_1 - Q_{1,\tau}\right) - \sum_{t=1}^{T}((M_1 - Q_{1,\tau})(WL_t + WR_t)) \qquad (36)$$

όπου $Q_{1,t}$ είναι η πραγματικά βέλτιστη ποσότητας ενέργειας $q_{1,t}$ στο πρόβλημα του ΑΔΣ, για τις σχετικές προσφορές του Στρατηγικού παραγωγού $p_{1,t}$. Ως k ορίζεται ο συνολικός αριθμός των βοηθητικών μεταβλητών WL_t ,WR_t που βρίσκονται στον περιορισμό. Για να ισχύσει ο περιορισμός, επιβάλλοντας τον άνω όριο που αναφέρθηκε θα πρέπει και οι k βοηθητικές μεταβλητές να είναι ίσες με 1. Διαφορετικά, ο περιορισμός χαλαρώνει και γίνεται $q_{1,t} \leq M_1$ που ισχύει από τον ορισμό του προβλήματος.

Με την δημιουργία των παραπάνω ανισοτήτων και αφού ο αλγόριθμος τις προσθέσει στο ΧΠΣΠ, το λύνει ξανά, ψάχνοντας την νέα υποψήφια βέλτιστη λύση, έχοντας πλέον μικρύνει σημαντικά την περιοχή της αναζήτησης. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται, έως ότου φτάσει σε εκείνη την λύση, που και τα $z_{i,t}$ αλλά και τα $q_{i,t}$ είναι τα βέλτιστα και για το πρόβλημα του ΑΔΣ. Αυτή φυσικά, είναι και η καθολικά βέλτιστη λύση του αρχικού διεπίπεδου προβλήματος.

4.4 Προτεινόμενος αλγόριθμος και στάδια επίλυσης

Στις προηγούμενες υπό-ενότητες αναλύθηκαν το θεωρητικό υπόβαθρο και οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιήθηκαν για την δημιουργία του προτεινόμενου αλγορίθμου. Σε αυτό το κεφάλαιο, για λόγους πληρότητας, παρουσιάζεται μια συνοπτική περιγραφή του αλγορίθμου σε μορφή ψευδοκώδικα. Με την εφαρμογή της μεθοδολογίας που περιγράφεται από τον ψευδοκώδικα μπορεί να βρεθεί η ολικά βέλτιστη λύση στο διεπίπεδο πρόβλημα.

Βήμα 0 : Αρχικοποίηση

Δημιουργούμε το μοντέλο που αντιστοιχεί στο πρόβλημα ενός επιπέδου το οποίο προκύπτει μετά την χαλάρωση της διεπίπεδης εφικτότητας από το αρχικό πρόβλημα.

Προσθέτουμε σε αυτό τις αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας μιας περιόδου (υποενότητα 4.2) σε όλα τα ζευγάρια παραγωγών, για κάθε περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού.

Βήμα 1 : Επανάληψη

Όσο δεν έχει βρεθεί μια διεπίπεδα εφικτή λύση
Επανάλαβε {

I. Λύσε το παραπάνω χαλαρωμένο πρόβλημα

II. Βρες τις πραγματικά βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων και ποσότητες ενέργειας, λύνοντας το πρόβλημα του ΑΔΣ για τις προσφορές του στρατηγικού που προέκυψαν από το I.

III. Υπολόγισε τα διαστήματα που αντιστοιχούν σε κάθε προσφορά του στρατηγικού παραγωγού, για τα οποία οι βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ δεν αλλάζει

IV. Πρόσθεσε έναν περιορισμό που είτε θα επιβάλει τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων, είτε θα αποτελεί άνω όριο για τις ποσότητες ενέργειας του στρατηγικού παραγωγού, για την περίπτωση που κάθε προσφορά ανήκει στο αντίστοιχο διάστημα.

} τέλος επανάληψης

Βήμα 2 : Επέστρεψε τις βέλτιστες προσφορές του στρατηγικού και την ολικά βέλτιστη λύση του προβλήματος.

5. Παρουσίαση υπολογιστικών αποτελεσμάτων

5.1 Υπολογιστικές επιλογές

Αφού έχει ολοκληρωθεί η ανάλυση των θεωρητικών βάσεων στις οποίες στηρίχτηκε ο προτεινόμενος αλγόριθμος, παρουσιάζονται κάποιες υπολογιστικές επιλογές, που έλαβαν μέρος κατά την υλοποίηση του.

Αρχικά για την εφαρμογή του, χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού C, σε αλληλεπίδραση με το εμπορικό λογισμικό βελτιστοποίησης IBM CPLEX v.12.9.0 (2019), μέσω της βιβλιοθήκης Callable (Callable library), που ουσιαστικά αποτελεί τον δίαυλο επικοινωνίας μεταξύ των δύο. Αναγκαία προϋπόθεση για την επιλογή λογισμικού βελτιστοποίησης ήταν η ικανότητα του να επιλύει προβλήματα παρόμοια με εκείνα που συναντώνται στην μεθοδολογία επίλυσης του περιγράφηκε παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα, το ΧΠΣΠ και το πρόβλημα του ΑΔΣ. Πάρα το γεγονός πως και τα δύο προβλήματα είναι μεικτού ακεραίου προγραμματισμού, με γραμμικούς περιορισμούς, η ειδοποιός διαφορά βρίσκεται στις αντικειμενικές συναρτήσεις τους. Η αντικειμενική συνάρτηση στο ΧΠΣΠ πρόκειται για μια τετραγωνική και μη κυρτή συνάρτηση, πράγμα που κάνει την διαδικασία επίλυσης του πιο περίπλοκη και «επίπονη», σε όρους υπολογιστικής ισχύος, από εκείνη που προβλήματος του ΑΔΣ, στο οποίο συναντάται μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση. Αυτή, η προϋπόθεση ικανοποιείται από το λογισμικό IBM CPLEX, από την έκδοση 12.6 και ύστερα, θέτοντας στην παράμετρό *OPTIMALITY TARGET* την τιμή ***OPTIMAL GLOBAL***. Με αυτό τον τρόπο ο χρήστης θέτει ως στόχο επίλυσης, σε ένα μη κυρτό τετραγωνικό πρόβλημα, την εύρεση ολικού βέλτιστου. Για να το πετύχει αυτό ο Solver του λογισμικού, επιστρατεύει μια ειδική μορφή του αλγορίθμου Branch and bound που ονομάζεται Spatial Branch and bound, η οποία ουσιαστικά πραγματοποιεί διακλαδώσεις σε λύσεις μιας κυρτής χαλάρωσης του αρχικού προβλήματος.

Επιπλέον, ένα πολύ χρήσιμο πλεονέκτημα του λογισμικού IBM CPLEX που αξιοποιήθηκε στην εφαρμογή του αλγορίθμου, είναι η δυνατότητα να τροφοδοτήσει κανείς τον SOLVER με ήδη υπάρχουσες λύσεις, έτσι ώστε να μην ξεκινήσει την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης από το μηδέν. Η δυνατότητα αυτή ονομάζεται MIP starts ή warm starts και είναι ένα πολύ αποδοτικό εργαλείο για την εξοικονόμηση χρόνου, ιδιαίτερα αν σκεφτεί κανείς πως στον προτεινόμενο αλγόριθμο, η εύρεση της βέλτιστης λύσης υπαγορεύει την κατ’ επανάληψη επίλυση δύο προβλημάτων βελτιστοποίησης. Η λύση που τροφοδοτείται μπορεί να είναι είτε ολοκληρωμένη, είτε και μερική. Ειδικότερα, και στα δύο προβλήματα που επιλύονται κάθε φορά από τον προτεινόμενο αλγόριθμο, παρέχονται με την βοήθεια των MIP starts κάποιες μερικές λύσεις. Στο ΧΠΣΠ παρέχονται οι τιμές των μεταβλητών $p_{1,t}$ καθώς και οι τιμές των αντίστοιχων ποσοτήτων ενέργειας που περιλαμβάνονται στην λύση που μέχρι στιγμής οδηγεί στο μεγαλύτερο κέρδος, μιας και αυτός είναι ο στόχος σε αυτό το πρόβλημα. Στο πρόβλημα του ΑΔΣ παρέχονται μόνο οι ποσότητες ενέργειας. Η γνώση των τιμών αυτών των μεταβλητών είναι αρκετή για να καθοριστούν με σαφήνεια και οι τιμές των υπολοίπων.

Κάποιες επιπρόσθετες επιλογές που έγιναν κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου, αφορούν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αναζήτηση των διαστημάτων στα οποία εφαρμόζονται οι έγκυρες ανισότητες (υποενότητα 4.3) και στον τρόπο με τον οποίο εξασφαλίζεται η «αισιόδοξη προσέγγιση» που αναφέρθηκε στην υποενότητα 4.2. Αναφορικά με τον πρώτο επιλέχθηκε, για λόγου ταχύτητας, η δυαδική αναζήτηση. Σχετικά με το δεύτερο, αφού έχουν ήδη βρεθεί οι προσφορές του στρατηγικού παραγωγού που μεγιστοποιούν το κέρδος του και η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ που προκύπτει από αυτές, πραγματοποιείται η εξής διαδικασία:

1. Η αντικειμενική συνάρτηση του ΑΔΣ μετασχηματίζεται καταλλήλως ώστε να εκφράζει την μεγιστοποίηση του κέρδους του Στρατηγικού παραγωγού.

2. Η πραγματική αντικειμενική συνάρτηση γίνεται ένας επιπρόσθετος περιορισμός, ο οποίος εκφράζει πως η πρώτη δεν μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη από την βέλτιστη που έχουμε υπολογίσει

3. Επίλυση του μετασχηματισμένου προβλήματος του ΑΔΣ για την επαλήθευση της αισιόδοξης προσέγγισης

Τέλος, όλα τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν σε επεξεργαστή AMD Ryzen 5 3500u με 12GB μνήμη συστήματος.

5.2 Μελέτη Περίπτωσης

Για καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του προτεινόμενου αλγορίθμου, ακολουθεί η περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης μιας μικρής μελέτης περίπτωσης, όπως αυτή εξετάστηκε από τους Kostarelou και Kozanidis (2021). Στο μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε εκεί, δεν περιλαμβάνονται οι περιορισμοί για την αύξηση/μείωση των ποσοτήτων ενέργειας από την μια περίοδο στην άλλη, αλλά ούτε οι περιορισμοί που επιβάλουν έναν ελάχιστο αριθμό περιόδων που μια μονάδα υποχρεούται να παραμείνει ανοικτή ή κλειστή. Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει 3 μονάδες παραγωγής και 4 χρονικές περιόδους. Επιπλέον, χρησιμοποιείται η υπόθεση, πως όλες οι μονάδες παραγωγής ήταν ανενεργές τις τελευταίες 2 περιόδους του προηγούμενου ορίζοντα προγραμματισμού, δηλαδή $z_{i,-1} = 0$ και $z_{i,0} = 0$ για κάθε $i = 1,2,3$. Για το μοναδιαίο κόστος παραγωγής του Στρατηγικού παραγωγού c_1 και το ανώτατο όριο τιμής-προσφοράς C_1 χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές 50 και 70€/MWh αντίστοιχα. Τα δεδομένα που αφορούν το τεχνικό ελάχιστο και μέγιστο κάθε μονάδας παραγωγής, το κόστος εκκίνησης κάθε μονάδας, καθώς και τις τιμές των mu_i, md_i, ru_i, rd_i του προβλήματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 1. Η συνολική ζήτηση και οι προσφορές των υπόλοιπων παραγωγών για κάθε περίοδο παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 1

$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{m_i(MW)}$	$M_i(\boldsymbol{MW})$	$\boldsymbol{s_i}$(€)	$\boldsymbol{ru_i}$	$\boldsymbol{rd_i}$	$\boldsymbol{mu_i}$	$\boldsymbol{md_i}$
1	200	500	1300	284	284	2	2
2	240	480	1500	228	228	2	2
3	100	470	1600	352	352	2	2

Πίνακας 2

	$\boldsymbol{t} = 1$	$\boldsymbol{t} = 2$	$\boldsymbol{t} = 3$	$\boldsymbol{t} = 4$
$\boldsymbol{p_{2,t}}$(€/$\boldsymbol{MWh}$)	57	58	65	67
$\boldsymbol{p_{3,t}}$(€/$\boldsymbol{MWh}$)	64	60	58	62
$\boldsymbol{d_t}$	900	950	800	850

Εφόσον έχουν «διαβαστεί» τα δεδομένα του προβλήματος, δημιουργούνται τα 2 προβλήματα που είναι απαραίτητα για την επίλυση. Το ΧΠΣΠ στο οποίο έχουν προστεθεί οι αναγκαίες συνθήκες βελτιστότητας μιας περιόδου, όπως περιγράφηκαν στην υποενότητα 4.2

και το πρόβλημα του ΑΔΣ. Στο πρώτο βήμα επιλύεται το ΧΠΣΠ και καταλήγει στην βέλτιστη λύση 25,720€. Αυτή η λύση αποτελεί ένα άνω όριο για το κέρδος του Στρατηγικού παραγωγού. Οι προσφορές του Στρατηγικού, οι ποσότητες ενέργειας, αλλά και οι δεσμεύσεις μονάδων που την αποτελούν φαίνονται στον Πίνακα 3. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις προσφορές του Στρατηγικού παραγωγού που βρέθηκαν προηγουμένως, επιλύεται το πρόβλημα του ΑΔΣ, με σκοπό την αναγνώριση των πραγματικά βέλτιστων $z_{i,t}$ και $q_{i,t}$. Η λύση αυτού του προβλήματος οδηγεί σε μια αντικειμενική συνάρτηση για τον ΑΔΣ ίση με F_{iso} = 222,492€. Οι πραγματικά βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων και ποσότητες ενέργειας παρουσιάζονται στον πίνακα 4.

Πίνακας 3: Βέλτιστη λύση στο ΧΠΣΠ

	$\boldsymbol{t} = 1$	$\boldsymbol{t} = 2$	$\boldsymbol{t} = 3$	$\boldsymbol{t} = 4$
$\boldsymbol{p}_{1,\boldsymbol{t}}$	70	70	65	67
$\boldsymbol{q}_{1,\boldsymbol{t}}$	270	216	500	500
$\boldsymbol{q}_{2,\boldsymbol{t}}$	354	480	300	350
$\boldsymbol{q}_{3,\boldsymbol{t}}$	276	254	0	0
$\boldsymbol{z}_{1,\boldsymbol{t}}$	1	1	1	1
$\boldsymbol{z}_{2,\boldsymbol{t}}$	1	1	1	1
$\boldsymbol{z}_{3,\boldsymbol{t}}$	1	1	0	0

Πίνακας 4: Βέλτιστη λύση πρόβλημα ΑΔΣ

	$\boldsymbol{t} = 1$	$\boldsymbol{t} = 2$	$\boldsymbol{t} = 3$	$\boldsymbol{t} = 4$
$\boldsymbol{p}_{1,\boldsymbol{t}}$	70	70	65	67
$\boldsymbol{q}_{1,\boldsymbol{t}}$	270	200	0	0
$\boldsymbol{q}_{2,\boldsymbol{t}}$	354	480	330	380
$\boldsymbol{q}_{3,\boldsymbol{t}}$	276	270	470	470
$\boldsymbol{z}_{1,\boldsymbol{t}}$	1	1	0	0
$\boldsymbol{z}_{2,\boldsymbol{t}}$	1	1	1	1
$\boldsymbol{z}_{3,\boldsymbol{t}}$	1	1	1	1

Εξασφαλίζοντας ταυτόχρονα πως τηρείται η «αισιόδοξη προσέγγιση», το πραγματικό κέρδος του Στρατηγικού παραγωγού, όπως προκύπτει από την βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ, είναι 9400€. Επομένως, η λύση που προκύπτει για αυτές τις προσφορές του Στρατηγικού παραγωγού, δεν είναι διεπίπεδα εφικτή. Αφού οι δεσμεύσεις μονάδων του ΧΠΣΠ δεν ταυτίζονται με τις βέλτιστες, ξεκινάει η διαδικασία εύρεσης των μέγιστων διαστημάτων των τιμών-προσφορών του στρατηγικού παραγωγού, για τα οποία δεν αλλάζει η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ. Αρχικά, υπολογίζονται οι τιμές που μπορούν να μειωθούν ή να αυξηθούν τα ταυτόχρονα όλες οι προσφορές. Για οποιαδήποτε μείωση όλων των προσφορών ταυτόχρονα, η βέλτιστη λύση αλλάζει και επομένως $Lmax = 0$. Όσον αφορά την ταυτόχρονη αύξηση, η βέλτιστη λύση παραμένει ίδια για $Rmax = 2$. Ακολουθεί η αναζήτηση υποσυνόλων για τα οποία ισχύει η ίδια συνθήκη. Μόλις εξεταστούν όλα τα υποσύνολα προκύπτουν τα εξής άκρα διαστημάτων :

Πίνακας 5

	$\boldsymbol{t} = 1$	$\boldsymbol{t} = 2$	$\boldsymbol{t} = 3$	$\boldsymbol{t} = 4$
$Lmax_{\boldsymbol{t}}$	50	59	65	67
$Rmax_{\boldsymbol{t}}$	70	70	70	70

Συνεπώς, όταν συναντάται μια λύση για την οποία ισχύεις πως $p_{1,1} \in [50,70]$, $p_{1,2} \in [59,70]$, $p_{1,3} \in [65,70]$, $p_{1,4} \in [67,70]$ οι βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων θα είναι ίδιες με αυτές του πίνακα 4.

Το επόμενο βήμα, αφού έχουν προσδιοριστεί τα διαστήματα και οι βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων που αντιστοιχούν σε αυτά, είναι ο ορισμός των κατάλληλων βοηθητικών μεταβλητών WL_t, WR_t και τελικά η προσθήκη των αναγκαίων ανισοτήτων. Για την προσφορά $p_{1,1}$ δεν χρειάζεται να οριστούν βοηθητικές μεταβλητές, αφού τα άκρα των διαστημάτων της συμπίπτουν με τα c_1, C_1. Για τον ίδιο λόγο δεν χρειάζεται ο ορισμός των WR_t για καμία από τις προσφορές. Επομένως, για τις υπόλοιπες προσφορές ορίζονται μόνο οι μεταβλητές WL_t ακολούθως:

$$WL_2 = 1 \text{ αν και μόνο αν } p_{1,2} \geq 59$$
$$WL_3 = 1 \text{ αν και μόνο αν } p_{1,3} \geq 65$$
$$WL_4 = 1 \text{ αν και μόνο αν } p_{1,4} \geq 67$$

Μετά τον ορισμό των βοηθητικών μεταβλητών εισάγονται στο ΧΠΣΠ οι απαραίτητες ανισότητες για την επιβολή των βέλτιστων δεσμεύσεων. Για κάθε μονάδα i που είναι ενεργή

($z_{i,t} = 1$) την περίοδο t εισάγεται η ανισότητα $z_{i,t} \geq WL_2 + WL_3 + WL_4 - 2$, ενώ για κάθε μονάδα i που είναι κλειστή ($z_{i,t} = 0$) εισάγεται η ανισότητα $z_{i,t} \leq 3 - WL_2 - WL_3 - WL_4$. Με αυτό τον τρόπο αποκλείονται οι διεπίπεδα εφικτές λύσεις όπως η συγκεκριμένη. Η διαδικασία που περιγράφηκε επαναλαμβάνεται έως ότου βρεθεί η ολικά βέλτιστη λύση. Στην διάρκεια αυτή, ο αλγόριθμος εισάγει 25 φορές ανισότητες για την απαλοιφή λύσεων που παραβιάζουν τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων, και 2 φορές για την απαλοιφή λύσεων που παραβιάζουν τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας. Η ολικά βέλτιστη λύση στην οποία καταλήγει είναι $F_{Στρατηγικού} = 22{,}450$, $F_{ΑΔΣ} = 220{,}164$ με προσφορές, $p^*_{1,t} = (70, 60, 69, 62)$, και ποσότητες ενέργειας $q^*_{1,t} = (270, 478, 330, 500)$. Ο χρόνος εκτέλεσης μέχρι την εύρεση της βέλτιστης λύσης ήταν 58 δευτερόλεπτα.

5.3 Τυχαία παραγόμενα προβλήματα

Σε αυτή την υποενότητα αξιολογείται η απόδοση και οι δυνατότητες του προτεινόμενου αλγορίθμου σε τυχαία παραγόμενα παραδείγματα. Βασικά κριτήρια της αξιολόγησης του αλγορίθμου είναι η ικανότητα αλλά και η ταχύτητα επίλυσης προβλημάτων, όσο το μέγεθος τους μεγαλώνει. Ένα ακόμα ζήτημα που εξετάζεται είναι η συμπεριφορά του αλγορίθμου σε σχέση με κάποιες παραμέτρους του προβλήματος και τις τιμές που μπορούν να πάρουν. Στα πλαίσια αυτής της αξιολόγησης επιλύθηκαν 30 τυχαία παραγόμενα προβλήματα για 7 διαφορετικούς συνδυασμούς τιμών παραγωγών N και περιόδων T.

5.3.1 Δημιουργία των προβλημάτων

Ο τρόπος με τον οποίο ελήφθησαν τα δεδομένα που ήταν απαραίτητα για την παραγωγή των τυχαίων προβλημάτων, ήταν τέτοιος ώστε να προσομοιάζουν όσο καλύτερα γίνεται μια πραγματική αγορά ενέργειας προηγούμενης μέρας και ταυτόχρονα να μετατρέπουν την επίλυση των προβλημάτων σε πρόκληση για τον προτεινόμενο αλγόριθμο. Η ακριβής διαδικασία περιγράφεται παρακάτω.

Τα δεδομένα που αφορούν τις προσφορές ,το κόστος εκκίνησης το τεχνικό ελάχιστο και μέγιστο των υπολοίπων παραγωγών, πέραν του Στρατηγικού παραγωγού, επιλέχθηκαν τυχαία από μια πραγματική παραγωγική μονάδα, που συμμετείχε στην λειτουργία της

Ελληνικής αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας, σύμφωνα με τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν από τους Andrianesis κ.ά. (2013b).

Τα δεδομένα που αφορούν τα τεχνικά χαρακτηριστικά του στρατηγικού παραγωγού επιλέχθηκαν ως εξής: Το τεχνικό ελάχιστο m_1 είναι ένας ακέραιος αριθμός που επιλέχθηκε τυχαία από το διάστημα $[\min m_i, \max m_i]$ $i > 1$, το τεχνικό μέγιστο είναι ίσο με $m_i + R$ όπου R τυχαίος αριθμός από το διάστημα $[\min r_i, \max r_i]$ $i > 1$, με $r_i = M_i - m_i$. Το κόστος εκκίνησης s_1, επίσης είναι ένας τυχαίος ακέραιος από το διάστημα $[\min s_i, \max s_i]$ $i > 1$, οι παράμετροι c_1 και C_1 λήφθηκαν ίσοι με $0{,}9 \min p_{i,t}$, και $1{,}1 \max p_{i,t}$, $i > 1$ αντίστοιχα.

Τέλος, για τα δεδομένα και τις παραμέτρους που αφορούν όλους τους παραγωγούς ανεξαιρέτως, ισχύει πως : για αριθμό περιόδων T<5 $mu_i = md_i = 2, i \in I$, για αριθμό περιόδων T>=5 $mu_i = md_i = 3, i \in I$. Το όριο αύξησης/μείωσης ποσοτήτων ενέργειας για κάθε μονάδα λήφθηκε ίσο με $0{,}95\, r_i$. Η επιλογή αυτή έγινε μετά από διερεύνηση της συμπεριφοράς του αλγορίθμου για διάφορες τιμές. Όταν το όριο παίρνει την τιμή $1\, r_i$ τότε οι περιορισμοί αύξησης/μείωσης γίνονται περιττοί. Στον αντίποδα, όσο η τιμή μειώνεται κάτω από το $0{,}95\, r_i$ η εφικτή περιοχή μικραίνει αρκετά, σε σημείο πολλές φορές να μην υπάρχει καν εφικτή λύση στο πρόβλημα. Συνεπώς, η τιμή που επιλέχθηκε ήταν εκείνη που και δεν έκανε περιττούς τους περιορισμούς, αλλά και δεν περιόριζε πολύ την εφικτή περιοχή του προβλήματος. Κλείνοντας, η ζήτηση σε κάθε περίοδο, ήταν ένας τυχαίος ακέραιος αριθμός από το διάστημα $[\sum_i ri + \min m_i, \sum_{i>1} M_i + m_1]$.

5.3.2 Διαδικασία Επίλυσης και αποτελέσματα

Όπως προαναφέρθηκε, επιλύθηκαν 30 τυχαία προβλήματα για κάθε έναν από τους παρακάτω συνδυασμούς τιμών, παραγωγών Ν και περιόδων Τ 3x4, 3x5, 4x3, 4x4, 4x5, 5x3, 5x4, με χρονικό όριο 30 λεπτών για τον συνολικό χρόνο εκτέλεσης κάθε προβλήματος. Στην περίπτωση που αλγόριθμος διακοπτόταν λόγω του χρονικού ορίου, επέστρεφε στον χρήστη την τελευταία βέλτιστη λύση του ΧΠΣΠ που αποτελεί και το πιο «σφιχτό» άνω όριο του προβλήματος, αλλά και την καλύτερη διεπίπεδα εφικτή λύση που είχε βρεθεί έως τότε. Επίσης, κάθε πρόβλημα επιλύθηκε για 5 διαφορετικές *Ρυθμίσεις*. Ως *Ρύθμιση*, ορίζεται μια ομάδα παραμέτρων προς εξέταση και οι τιμές που κάθε φορά αυτές έχουν. Ξεκινώντας από την αρχική *Ρύθμιση 1* στην οποία κάθε παράμετρος λαμβάνει την προεπιλεγμένη της τιμή, κάθε επόμενη *Ρύθμιση* προκύπτει διατηρώντας την προεπιλεγμένη τιμή για όλες τις παραμέτρους εκτός από μία. Με αυτό τον τρόπο, με κάθε *Ρύθμιση* εξετάζεται η συμπεριφορά του αλγορίθμου για την συγκεκριμένη παράμετρο, την τιμή της οποίας έχουμε αλλάξει. Έτσι η αναφορά σε αυτές, θα γίνεται με αναφορά στην παράμετρο που κάθε φορά εξετάζεται και την τιμή της. Παρακάτω παρουσιάζονται οι παράμετροι προς εξέταση.

Extend_Limits

Είδος Παραμέτρου : Λογική

Τιμές : TRUE, FALSE

Προεπιλεγμένη τιμή : TRUE

Ορισμός : Με την παράμετρο Extend_ Limits σε ισχύ(TRUE) ο αλγόριθμος εκτελεί την διαδικασία που προκύπτει από το πόρισμα 3. Συγκεκριμένα αφού ο αλγόριθμος βρει τις μέγιστες τιμές $Lmax$, $Rmax$ για τις οποίες όλες οι προσφορές του στρατηγικού παραγωγού, μπορούν να μειωθούν ή να αυξηθούν αντίστοιχα, χωρίς να αλλάζει η βέλτιστη λύση στο πρόβλημα του ΑΔΣ, η Extend_Limits συνεχίζει ψάχνοντας για υποσύνολα προσφορών που μπορούν να μειωθούν ή να αυξηθούν πέραν από αυτές τις τιμές χωρίς να αλλάξουν την βέλτιστη λύση του ΑΔΣ.

All_Optimality_Conditions

Είδος : Λογική

Τιμές : TRUE , FALSE

Προεπιλεγμένη τιμή : TRUE

Ορισμός : Με την παράμετρο ALL_OPTIMALITY_CONDTITIONS σε ισχύ, εξασφαλίζεται πως οι περιορισμοί που περιγράφηκαν στην υποενότητα 4.2 και ικανοποιούν τις συνθήκες βελτιστότητας μιας περιόδου, εφαρμόζονται για όλα τα ζευγάρια παραγωγών. Διαφορετικά, εφαρμόζονται οι περιορισμοί που αφορούν μόνο τα ζευγάρια παραγωγών που περιλαμβάνουν τον στρατηγικό παραγωγό.

Cuts_Strategy

Είδος : Ακέραια

Τιμές : 1, 2 , 3

Προεπιλεγμένη τιμή : 1

Cuts Strategy = **1**: Εφαρμόζει τις έγκυρες ανισότητες που σχετίζονται με τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων $(z\ cuts)$ για κάθε παραγωγό. Εφαρμόζει τις έγκυρες ανισότητες που σχετίζονται με τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας$(q\ cuts)$ για τον στρατηγικό παραγωγό.

Cuts Strategy = **2**: Εφαρμόζει τις έγκυρες ανισότητες που σχετίζονται με τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων $(z\ cuts)$ και τις έγκυρες ανισότητες που σχετίζονται με τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας$(q\ cuts)$ μόνο για τον στρατηγικό παραγωγό.

Cuts Strategy = **3:** Εφαρμόζει μόνο τις έγκυρες ανισότητες που σχετίζονται με τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας $(q\ cuts)$ για τον στρατηγικό παραγωγό.

Επομένως, προκύπτουν οι παρακάτω *Ρυθμίσεις*:

Πίνακας 6:Σετ ρυθμίσεων

Παράμετρος **Ρύθμιση**	**Extend Limits**	**All__Opt _Conditions**	**Cuts Strategy**
1 (DEFAULT)	*TRUE*	*TRUE*	*1*
2 (Extend_L)	*FALSE*	*TRUE*	*1*
3 (All_Opt_Cond)	*TRUE*	*FALSE*	*1*
4 (C_Strategy 2)	*TRUE*	*TRUE*	*2*
5(C_Strategy 3)	*TRUE*	*TRUE*	*3*

Πριν ξεκινήσει η διαδικασία της επίλυσης, είναι πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε το αρχικό μέγεθος του ΧΠΣΠ, σε ότι αφορά τον αριθμό των μεταβλητών και των περιορισμών που το απαρτίζουν, πριν την προσθήκη των μεταβλητών και περιορισμών που είναι απαραίτητα για την επιβολή της βέλτιστης κατανομής ενέργειας(4.3). Στην γενική περίπτωση και συναρτήσει του αριθμού των παραγωγών N και τον περιόδων T, ισχύει πώς:

Ο αριθμός των μεταβλητών απόφασης $p_{i,t}$ είναι ίσος με T. Για κάθε μία από τις μεταβλητές απόφασης $z_{i,t}, q_{i,t}, y_{i,t}, o_{i,t}, w_{i,t}, v_{i,t}, Ru_{i,t}, Rd_{i,t}$ ο αριθμός τους είναι ίσος με $N * T$, ενώ για την $x_{i,t}$ ισούται με $(N-1) * T$. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός μεταβλητών για την γενική περίπτωση είναι $T + 8 * N * T + (N-1) * T$. Αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος στην περίπτωση που υπάρχει προσφορά $p_{i,t}, i > 1$ η οποία είναι ίση με C_1, καθώς ο αριθμός των μεταβλητών $x_{i,t}$ γίνεται μικρότερος από $(N-1) * T$.

Με παρόμοιο τρόπο, η ομάδα περιορισμών (2) είναι ίση με T, η ομάδα (3) ίση με $2 * N * T$ και για κάθε μία από τις ομάδες περιορισμών (4)-(13) και (19)-(26) ο αριθμός τους είναι ίσος με $N * T$. Η ομάδα περιορισμών (17) δεν προσμετράτε, καθώς εισάγεται με την μορφή άνω και κάτω ορίων για τις μεταβλητές απόφασης $p_{1,t}$ και όχι σαν περιορισμοί. Συνεχίζοντας, στην γενική περίπτωση ο αριθμός των περιορισμών (27) υπολογίζεται $\binom{N-1}{2} * T = \frac{(N-1)!}{2!(N-3)!} * T$ και για τους περιορισμούς (28)-(31) , $(N-1) * T$. Επομένως, στην γενική περίπτωση, ο μέγιστος συνολικός αριθμός των αρχικών περιορισμών είναι ίσος με $T + 20 * N * T + \frac{(N-1)!}{2!(N-3)!} * T + 4 * (N-1) * T$. Στις περιπτώσεις, όπου είτε οι προσφορές δύο παραγωγών είναι ίσες την περίοδο t , είτε υπάρχουν προσφορές παραγωγών ($i > 1$) ίσες με το C_1, τότε ο συνολικός αριθμός μειώνεται ακολουθώντας την μείωση των περιορισμών (27) , (28) ή (29). Επιπρόσθετα, ο συνολικός αριθμός μειώνεται στην περίπτωση που χρησιμοποιείται το σετ ρυθμίσεων **3*(All_Opt_Cond =False)***, αφού σε αυτό δεν χρησιμοποιούνται οι περιορισμοί βελτιστότητας μιας περιόδου, για όλα τα ζευγάρια παραγωγών, παρά μόνο για εκείνα που περιλαμβάνουν τον Στρατηγικό παραγωγό. Στον πίνακα 7 που ακολουθεί, εμφανίζονται οι συνολικοί αριθμοί μεταβλητών και περιορισμών, που προκύπτουν μετά από αντικατάσταση των N,T για κάθε ένα από τα 7 μεγέθη παραγωγών x περιόδων (NxT).

Πίνακας 7 Αρχικός αριθμός Μεταβλητών και περιορισμών στο ΧΠΣΠ

NxT	**Μεταβλητές**	**Περιορισμοί**
3x4	108	280
3x5	135	350
4x3	108	288
4x4	144	384
4x5	180	480
5x3	135	369
5x4	180	492

Κατά την επίλυση του προβλήματος, οι αριθμοί του πίνακα 7 αυξάνονται με την πρόσθεση των έγκυρων ανισοτήτων για την επιβολή της βέλτιστης κατανομής ενέργειας και των μεταβλητών που τις απαρτίζουν (υποενότητα 4.3). Επομένως, για την σωστή αξιολόγηση καταγράφηκε και ο συνολικός αριθμός μεταβλητών και περιορισμών στο τέλος της διαδικασίας επίλυσης, μαζί με άλλα εξίσου χρήσιμα υπολογιστικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, αυτά τα αποτελέσματα ομαδοποιήθηκαν, ανάλογα με το μέγεθος του κάθε προβλήματος (παραγωγοί x περίοδοι), την ρύθμιση από την οποία έχει προκύψει, αλλά και από τον τρόπο τερματισμού.

Ειδικότερα, για κάθε σετ παραμέτρων προέκυψαν δύο συγκεντρωτικοί πίνακες. Ένας που αφορά τα προβλήματα που τερματίστηκαν φυσικά, δηλαδή η ολικά βέλτιστη λύση βρέθηκε πριν την λήξη του χρονικού ορίου και ένας που αφορά τα προβλήματα που διακόπηκαν μόλις συμπληρώθηκαν 30 λεπτά χρόνου εκτέλεσης. Οι πίνακες που αφορούν τα προβλήματα που τερματίστηκαν φυσικά περιλαμβάνουν τις εξής στήλες:

1η στήλη : Το μέγεθος των προβλημάτων (παραγωγοί x περίοδοι)

2η στήλη : Αριθμός προβλημάτων (από τα 30) που τερματίστηκαν φυσικά

3η στήλη : Τον μέσο και τον μέγιστο αριθμό μεταβλητών

4η στήλη : Τον μέσο και τον μέγιστο αριθμό περιορισμών

5η στήλη : Τον μέσο και τον μέγιστο χρόνο εκτέλεσης σε δευτερόλεπτα

6η στήλη : Τον μέσο και τον μέγιστο αριθμό φορών που αποκλείστηκε μια διεπίπεδα ανέφικτη λύση με την χρήση των ανισοτήτων που αφορούν τις τιμές των $z_{i,t}$

7η στήλη : Τον μέσο και τον μέγιστο αριθμό φορών που αποκλείστηκε μια διεπίπεδα ανέφικτη λύση με την χρήση των ανισοτήτων που αφορούν τις τιμές των $q_{i,t}$

Στους πίνακες που αφορούν τα προβλήματα που διακόπηκαν λόγω του χρονικού ορίου, το μόνο που αλλάζει είναι η στήλη 5. Σε αυτή την περίπτωση η στήλη 5 αποτελείται από την μέση και την μέγιστη απόκλιση μεταξύ της καλύτερης διεπίπεδα εφικτής λύσης και του «σφιχτότερου» άνω ορίου του κέρδους του στρατηγικού παραγωγού, που έχουν βρεθεί από τον αλγόριθμο, μέχρι την στιγμή που διακόπτεται, λόγω του χρονικού περιθωρίου. Επιπλέον, η στήλη 2 περιέχει τον αριθμό των προβλημάτων που διακόπηκαν από τα συνολικά 30.

Ακολουθούν οι πίνακες που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις 5 ρυθμίσεις. Όλα τα αποτελέσματα στους παρακάτω πίνακες που αφορούν μέση τιμή έχουν στρογγυλοποιηθεί στον κοντινότερο ακέραιο, με εξαίρεση τους χρόνους εκτέλεσης και τις ποσοστιαίες διαφορές που στρογγυλοποιήθηκαν στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο.

Πίνακας 8: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 1 και φυσικό τερματισμό

ΡΥΘΜΙΣΗ 1: Default Values												
		Μεταβλητές		**Περιορισμοί**		**Χρόνος Εκτέλεσης**		**# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$**		**# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$**	
NxT	**# (/30)**	**avg**	**max**	**avg**	**max**	**avg**	**max**	**avg**	**max**	**avg**	**max**
3x4	23	127	155	735	2795	119.5	1077.9	34	202	1	8
3x5	19	156	181	789	2972	113.7	691.5	25	169	5	16
4x3	25	127	157	928	2947	337.3	1816.1	50	215	2	37
4x4	17	161	178	836	1701	106.7	482.8	26	79	2	13
4x5	13	195	214	1322	3284	234.9	1519	41	164	1	3
5x3	22	151	176	1060	2679	302.7	1682.2	44	150	1	5
5x4	4	209	217	1650	2208	387.7	706.5	55	82	2	3

Οι πίνακες 8 και 9 περιέχουν τα αποτελέσματα που σχετίζονται με την Ρύθμιση 1, στην οποία κάθε παράμετρος λαμβάνει την προεπιλεγμένη της τιμή. Στον πίνακα 8 παρατηρείται πως για το μέγεθος $4x3$ ο μέγιστος χρόνος εκτέλεσης ξεπερνάει τα 30 λεπτά. Αυτό συμβαίνει καθώς, ο έλεγχος για το αν ξεπεράστηκε το χρονικό όριο εκτέλεσης γίνεται σε διακριτό χρόνο και όχι σε συνεχή και συγκεκριμένα στο τέλος κάθε επανάληψης της διαδικασίας εύρεσης βέλτιστης λύσης. Επομένως, είναι δυνατό η βέλτιστη λύση να βρεθεί στην επανάληψη που ξεκίνησε πριν να ξεπεραστεί το χρονικό όριο και τελείωσε αμέσως μετά. Από την άλλη, στην στήλη 5 του πίνακα 9 φαίνεται πως υπάρχουν προβλήματα στα οποία η ποσοστιαία διαφορά είναι 100%. Αυτό σημαίνει πως στα προβλήματα αυτά δεν μπόρεσε να βρεθεί διεπίπεδα εφικτή λύση καλύτερη από την μηδενική (κέρδος στρατηγικού παραγωγού).

Πίνακας 9:Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 1 και εξαναγκασμένο τερματισμό

ΡΥΘΜΙΣΗ 1: Default Values											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		s.p. ποσοστιαία διαφορά		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	**# (/30)**	**avg**	**max**	**avg**	**max**	**avg**	**max**	**avg**	**max**	**avg**	**max**
3x4	7	168	173	1612	1943	78.7	100	101	130	0	0
3x5	11	197	209	2178	2875	64.9	100	114	160	0	0
4x3	5	154	157	2408	3254	18.4	32.5	169	240	0	0
4x4	13	197	205	1954	3472	53	100	94	188	0	0
4x5	17	226	239	2081	4126	64.5	100	76	178	0	6
5x3	8	173	178	2270	2879	22.8	41.3	126	163	0	1
5x4	26	221	230	1938	3437	63.4	100	68	144	0	1

Οι επόμενοι 8 πίνακες παρουσιάζουν τα δεδομένα που αφορούν τις υπόλοιπες 4 *Ρυθμίσεις*. Οι πίνακες 10 και 11 περιέχουν δεδομένα που σχετίζονται με την *Ρύθμιση 2* (Extend_Limits=False) και συγκεκριμένα εξετάζουν την επίδραση που έχει η παράμετρος Extend_Limits στην επίλυση του προβλήματος. Οι πίνακες 12 και 13 αφορούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την *Ρύθμιση 3* (All_Optimality_Conditions = False) ,η οποία εξετάζει την σημασία που έχει η εφαρμογή των συνθηκών βελτιστότητας μιας περιόδου για κάθε ζευγάρι παραγωγών. Οι υπόλοιποι 4 πίνακες αφορούν τις *Ρυθμίσεις* 4 και 5 που σχετίζονται με την στρατηγική τομών που ακολουθήθηκε. Συγκεκριμένα, οι πίνακες 14 και 15 περιλαμβάνουν αποτελέσματα που προέκυψαν από την εξέταση της στρατηγική Cuts_Strategy = 2, κατά την οποία εφαρμόζονται έγκυρες ανισότητες που αφορούν τις βέλτιστες τιμές $z_{i,t}$ και $q_{i,t}$ μόνο του στρατηγικού παραγωγού, ενώ οι πίνακες 16 και 17 περιλαμβάνουν δεδομένα που σχετίζονται με την στρατηγική Cuts_Strategy = 3 για την οποία εφαρμόζονται έγκυρες ανισότητες μόνο για τις τιμές $q_{i,t}$ του στρατηγικού παραγωγού. Όπως και με τους πίνακες 8, 9 σε κάθε ζευγάρι πινάκων που αναφέρθηκε, ο 1ος είναι αυτός που σχετίζεται με τα προβλήματα που τερματίστηκαν φυσικά με την εύρεση της βέλτιστης λύσης και ο 2ος με τα προβλήματα που διακόπηκαν λόγω του χρονικού ορίου.

*Πίνακας 10: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 2 και **φυσικό** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 2: Extend_Limits = FALSE											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		Χρόνος Εκτέλεσης		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	11	137	171	1284	4319	199.6	1285.7	79	327	1	8
3x5	9	156	194	1047	2776	130.4	479.4	42	154	4	13
4x3	18	130	156	957	2876	187.4	1721.3	52	208	2	10
4x4	5	172	182	1539	2956	240.3	756.9	69	156	1	2
4x5	2	193	207	597	699	6.9	11.7	4	8	1	2
5x3	15	154	178	1055	3419	135.1	720	43	198	1	5
5x4	1	209	209	1828	1828	285.3	285.3	64	64	1	1

*Πίνακας 11: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 2 και **εξαναγκασμένο** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 2: Extend_Limits = FALSE											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		s.p. ποσοστιαία διαφορά		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	19	168	180	3001	5223	49.5	100	218	404	0	1
3x5	21	197	217	2942	5185	64	100	165	312	0	2
4x3	12	156	159	2563	3132	35.5	100	182	229	0	0
4x4	25	195	212	2683	4234	55.2	100	137	236	0	10
4x5	28	231	251	2805	5194	58.7	100	111	230	0	0
5x3	15	176	182	2418.	3336	36.4	82.1	136	211	0	0
5x4	29	223	238	1981	4415	71.8	100	70	178	0	0

***Πίνακας 12:** Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 3 και **φυσικό** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 3: ALL OPTIMALITY CONDITIONS = FALSE											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		Χρόνος Εκτέλεσης		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	23	127	152	734	2677	130.8	1229.3	34	193	1	8
3x5	19	157	181	786	3014	131.4	829.3	25	172	5	16
4x3	22	124	156	705	2274	180.7	1295.9	77	1080	3	37
4x4	17	161	178	834	1706	123.9	515.4	25	53	2	13
4x5	12	194	214	1115	2356	253.5	1153.2	32	91	1	3
5x3	20	149	173	884	2607	243.4	1395.4	34	146	1(0)	3
5x4	3	207	217	1490	2013	751.9	1415.6	48	74	2	3

*Πίνακας 13: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 3 και **εξαναγκασμένο** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 3: ALL OPTIMALITY CONDITIONS = FALSE											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		s.p. ποσοστιαία διαφορά		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	7	168	174	1590	1959	78.8	100	100	131	0	0
3x5	11	195	208	2061	2818	70.9	100	107	160	0	0
4x3	8	153	158	2310	2795	14.5	33.9	162	202	0	0
4x4	13	196	205	1867	3284	62.9	100	87	177	0	0
4x5	18	222	237	1886	3381	62.9	100	67	143	0	0
5x3	10	172	178	2262	2784	22.6	44.3	123	158	0	0
5x4	27	220	230	1783	2811	61.5	100	62	115	0	1

*Πίνακας 14: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 4 και **φυσικό** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 4: CUT STRATEGY = 2											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		Χρόνος Εκτέλεσης		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	23	134	167	542	1189	174.8	818	26	204	27	150
3x5	16	166	194	685	1762	233.6	1520.7	19	106	37	157
4x3	19	125	156	574	2865	140.4	632.7	63	841	23	163
4x4	17	173	195	693	1049	314	826.8	14	51	50	135
4x5	8	200	223	676	902	119.4	310	11	27	22	72
5x3	12	153	177	561	976	288.4	1552.6	32	106	22	85
5x4	1	197	197	636	636	111.5	111.5	10	10	19	19

*Πίνακας 15: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 4 και **εξαναγκασμένο** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 4: CUT STRATEGY = 2											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		s.p. ποσοστιαία διαφορά		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	7	167	175	914	1323	79.3	100	130	240	0	0
3x5	14	193	231	1630	6558	55	100	220	1240	14	97
4x3	11	143	158	2207	4025	27.2	46.3	599	1232	19	120
4x4	13	197	205	928	1430	62.5	100	101	196	10	119
4x5	22	227	243	1113	2387	55.2	100	69	161	30	144
5x3	18	153	175	2618	5833	41.9	100	735	1818	4	48
5x4	29	221	236	1003	2767	55.9	100	89	566	19	143

*Πίνακας 16: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 5 και **φυσικό** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 5: CUT STRATEGY = 3											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		Χρόνος Εκτέλεσης		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	22	136	167	579	1321	239.3	1317.6	0	0	62	238
3x5	15	172	201	815	1792	400.3	1605.1	0	0	79	269
4x3	24	131	158	539	1058	240.1	951	0	0	240	951
4x4	13	173	196	772	1267	405.6	1053.5	0	0	84	196
4x5	9	208	239	764	1059	393.6	1057.6	0	0	52	109
5x3	21	159	182	603	1042	336.5	1785.3	0	0	64	198
5x4	1	197	197	652	652	110.5	110.5	0	0	33	33

*Πίνακας 17: Υπολογιστικά αποτελέσματα που αφορούν την επίλυση με τη Ρύθμιση 5 και **εξαναγκασμένο** τερματισμό*

ΡΥΘΜΙΣΗ 5: CUT STRATEGY = 3											
		Μεταβλητές		Περιορισμοί		s.p. ποσοστιαία διαφορά		# Εισαγωγής ανισοτήτων $z_{i,t}$		# Εισαγωγής ανισοτήτων $q_{i,t}$	
NxT	# (/30)	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max	avg	max
3x4	8	171	177	925	1575	71.1	100	0	0	130	290
3x5	15	199	211	1131	1453	53.9	100	0	0	131	196
4x3	6	157	159	1060	1254	12.4	26.9	0	0	226	290
4x4	17	199	210	971	1430	51.7	100	0	0	120	238
4x5	21	231	249	1025	1498	56.3	100	0	0	89	178
5x3	9	178	183	1021	1172	14.5	100	0	0	191	241
5x4	29	226	238	932	1251	57.1	100	0	0	89	167

Η μελέτη των παραπάνω αποτελεσμάτων μπορεί να μας οδηγήσει σε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για την λειτουργία και την συμπεριφορά του προτεινόμενου αλγορίθμου. Αρχικά, από τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από την *Ρύθμιση 2* φαίνεται πως με την παράμετρο Extend_Limits ανενεργή αυξάνονται πολύ οι χρόνοι υπολογισμού. Συνεπώς, η παρουσία της παραμέτρου Extend_Limits, είναι καίριας σημασίας στην λειτουργία του αλγορίθμου και με μεγαλύτερη εκμετάλλευση της μπορεί να αυξηθεί η απόδοση του. Παρόμοια επίδραση, όχι στον βαθμό της Extend_Limits, φαίνεται να έχει και η παράμετρος All Optimality Conditions, αφού τα αποτελέσματα της *Ρύθμισης 3* που εξετάζει την απουσία των συνθηκών βελτιστότητας μιας περιόδου για κάθε ζευγάρι παραγωγών, οδηγούν σε αύξηση του χρόνου υπολογισμού. Όσον αφορά τις στρατηγικές για την εισαγωγή έγκυρων ανισοτήτων, οι επιλογή Cuts_Strategy =1 οδηγεί σε καλύτερες αποδόσεις από τις άλλες 2.

Συνοψίζοντας, ο προτεινόμενος αλγόριθμος παρουσιάζει την καλύτερη συμπεριφορά και απόδοση με την χρήση της *Ρύθμισης* 1 (Default), για την οποία κατά μέσο όρο, για όλα τα μεγέθη προβλημάτων, το 60% των προβλημάτων έφτασαν στην βέλτιστη λύση πριν το χρονικό όριο των 30 λεπτών.

Κάποιες γενικότερες παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν, εξετάζοντας τα παραπάνω υπολογιστικά αποτελέσματα είναι πως: κατά την επίλυση του ΧΠΣΠ ο αριθμός των περιορισμών αυξάνεται πολύ περισσότερο από τον αριθμό των μεταβλητών. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου φαίνεται να έχει αρκετά μεγάλη διακύμανση. Επίσης, η αύξηση του προβλήματος σε μέγεθος (NxT) δεν αντικατοπτρίζεται πάντα από αντίστοιχη αύξηση στις τιμές του χρόνου εκτέλεσης, του αριθμού μεταβλητών και περιορισμών. Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις δικαιολογούνται από την μη κυρτή φύση του προβλήματος υπό εξέταση. Κλείνοντας, στις περιπτώσεις που χρησιμοποιούνται έγκυρες ανισώσεις και για τις τιμές των $z_{i,,t}$ αλλά και για τις τιμές των $q_{i,,t}$, ο αλγόριθμος βασίζεται περισσότερο στις πρώτες που επιβάλλουν τις βέλτιστες δεσμεύσεις μονάδων, παρά στις δεύτερες που λειτουργούν ως άνω όριο για τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας. Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι, το ποσοστό των έγκυρων ανισοτήτων $q_{i,,t}$, σε σχέση με τον συνολικό αριθμό έγκυρων ανισοτήτων που εισάχθηκαν, για τον αποκλεισμό διεπίπεδα μη εφικτών λύσεων, είναι πολύ μικρό και σχεδόν αμελητέο.

6. Παραλλαγές του Μοντέλου

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε μερικές παραλλαγές του αρχικού προβλήματος και τον τρόπο με τον οποίο η μεθοδολογία επίλυσης μπορεί να προσαρμοστεί για τις αντιμετωπίσει.

6.1 Ομοιόμορφο σύστημα εκκαθάρισης

Στο πρόβλημα που αντιμετωπίσαμε η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε, αντιστοιχεί στην περίπτωση που το σύστημα εκκαθάρισης με το οποίο λειτουργεί η αγορά είναι το pay-as-bid(πληρωμή ως προσφορά). Σύμφωνα με αυτό, η τιμή εκκαθάρισης της αγοράς είναι ίση με κάθε αντίστοιχη υποβαλλόμενη προσφορά τιμής για ενέργεια. Υπάρχουν ωστόσο και άλλα εναλλακτικά συστήματα εκκαθάρισης, που χρησιμοποιούνται σε αγορές ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα από αυτά, το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως σε πρακτικές εφαρμογές, είναι το ομοιόμορφο σύστημα εκκαθάρισης. Σε αυτό, όλοι οι παραγωγοί αμείβονται με την ίδια τιμή για κάθε μονάδα ενέργειας που προσφέρουν. Αυτή η τιμή ονομάζεται οριακή τιμή συστήματος (System Marginal Price = smp) και αντιπροσωπεύει το επιπλέον κόστος που πρέπει να καταβληθεί για την αύξηση της ενεργειακής ζήτησης κατά μία μονάδα.

Στην περίπτωση που η αγορά λειτουργεί με ομοιόμορφο σύστημα εκκαθάρισης η αντικειμενική συνάρτηση του ανώτερου επιπέδου θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$Max\ F_1 = \sum_{t=1}^{T}(\lambda_t - c_1)q_{1,t} \qquad (37)$$

Η διαφορά της αντικειμενικής συνάρτησης (37) με εκείνη του αρχικού προβλήματος (16) είναι πως οι προσφορές $p_{1,t}$ έχουν αντικατασταθεί από την οριακή τιμή σε κάθε περίοδο. Από μαθηματικής απόψεως, για να οριστεί σωστά το πραγματικό οριακό κόστος μιας περιόδου t, θα πρέπει η λ_t $(t = 1,2,..,T)$ να οριστεί ως η δυϊκή μεταβλητή του αντίστοιχου περιορισμού που αφορά την ικανοποίηση της ζήτησης (2), στην συγκεκριμένη περίοδο. Ωστόσο, αυτό δημιουργεί σημαντικά προβλήματα καθώς στο πρόβλημα του ΑΔΣ δεν ορίζονται δυϊκές μεταβλητές λόγω της παρουσίας ακεραιοτήτων. Για την υπέρβαση αυτών των δυσκολιών και τον προσδιορισμό ουσιαστικών τιμών για τις μεταβλητές λ_t, έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις στην σχετική βιβλιογραφία. Στόχος αυτών των προσεγγίσεων είναι να γίνει δίκαια η εκκαθάριση της αγοράς, καθώς και να αποθαρρύνεται ο χειρισμός των τιμών από τους παραγωγούς ενέργειας. Για να επιτευχθεί αυτός ο στόχος, συχνά κατέφευγαν σε επιπρόσθετες αυξήσεις και παράπλευρες πληρωμές, προκειμένου να αντιμετωπιστούν οι ανισότητες που προκύπτουν από την διακριτότητα του προβλήματος (βλ. Ανδριανέσης κ.α., 2013a και 2013b, για παράδειγμα). Αυτή η εργασία δεν ασχολείται με τέτοια θέματα, που σχετίζονται με το σχεδιασμό και τη λειτουργία της υποκείμενης αγοράς ενέργειας, αλλά επικεντρώνεται στην αλγοριθμική διάσταση του προβλήματος υπό εξέταση. Παρ’ όλα αυτά, για λόγους πληρότητας σημειώνεται μία από τις πιο δημοφιλείς προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που αναφέρθηκαν. Αυτή περιλαμβάνει πρώτα την επίλυση του ακέραιου γραμμικού προβλήματος (1)-(15), για την εύρεση βέλτιστων τιμών των ενεργειακών μεταβλητών και στην συνέχεια το επιλύει ξανά, ως καθαρά συνεχές πρόβλημα, αφού οι μεταβλητές καθοριστούν ίσες με τις βέλτιστες τιμές τους. Από την θεωρία οριακής τιμολόγησης (Schweppe κ.α., 1988), η οριακή τιμή του συστήματος ορίζεται ίση με τη δυϊκή τιμή του αντίστοιχου περιορισμού ικανοποίησης της ζήτησης(2), στη βέλτιστη λύση αυτού του προβλήματος.

Στο πλαίσιο ενός ενιαίου συστήματος τιμολόγησης πολύ συχνά, δεν μπορεί να γίνει ένας ξεκάθαρος ορισμός της οριακή τιμή συστήματος, τόσο λόγω των αναπόφευκτων ακεραιοτήτων καθώς και του γεγονότος ότι η ύπαρξη εναλλακτικών βέλτιστων λύσεων στο πρόβλημα του ΑΔΣ, μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικούς τέτοιου είδους ορισμούς. Για αυτό τον λόγο, οι αγορές τυπικά υιοθετούν ένα ξεκάθαρο σύνολο κανόνων, για να επιλυθούν τέτοιες ασάφειες, του οποίους δημοσιεύουν εκ των προτέρων σε όλα τα ενδιαφερόμενα μέλη.

Επιπλέον, μια δυσκολία που προκύπτει στην περίπτωση ενός ομοιόμορφου συστήματος εκκαθάρισης, είναι το γεγονός πως η χαλάρωση του μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε από την προτεινόμενη μεθοδολογία επίλυσης που περιγράφηκε, στερείται σαφής αναπαράστασης της οριακής τιμής του συστήματος. Σύμφωνα με το σύνολο των κανόνων σε ισχύ και προκειμένου να παρακαμφθεί αυτή η δυσκολία, μπορούν να εισαχθούν ειδικοί περιορισμοί για την επιβολή του σωστού ορισμού smp, σε κάθε χρονική περίοδο του ορίζοντα σχεδιασμού. Αυτοί οι περιορισμοί προθέτονται στο σύνολο των περιορισμών του κατώτερου επιπέδου, εξασφαλίζοντας σωστές τιμές για το κέρδος του στρατηγικού παραγωγού. Μετά από αυτό, η μεθοδολογία επίλυσης συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση του συστήματος εκκαθάρισης pay-as-bid. Λεπτομέρειες αυτής της προσέγγισης μοντελοποίησης παρουσιάζονται στη σχετική πρόσφατη εργασία των Κωσταρέλου και Κοζανίδη (2021).

6.2 Το μοντέλο χωρίς τους περιορισμούς Μείωσης και Αύξησης της Παραγωγής

Μια απλοποιημένη εκδοχή του προβλήματος βελτιστοποίησης κέρδους του στρατηγικού παραγωγού, προκύπτει αν αφαιρέσουμε τους περιορισμούς μείωσης και αύξησης των ποσοτήτων ενέργειας. Σε αυτή της περίπτωση οι περιορισμοί (27), (30) και (31) έχουν την παρακάτω μορφή:

$$z_{i,t} + z_{j,t} + w_{j,t} + v_{i,t} \leq 3, \qquad (38)$$

$$z_{1,t} + z_{i,t} + x_{i,t} + w_{1,t} + v_{i,t} \leq 4, i \in I: i > 1: t = 1, \dots, T \qquad (39)$$

$$z_{1,t} + z_{i,t} - x_{i,t} + v_{1,t} + w_{i,t} \leq 3, i \in I: i > 1: t = 1, \dots, T \qquad (40)$$

Ένα πολύ ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτής της εκδοχής του προβλήματος είναι πως, εφόσον αναγνωρίσουμε την βέλτιστη ομάδα ενεργών παραγωγών ενέργειας για μία χρονική περίοδο, η κατανομή της ενέργειας για αυτή την περίοδο δεν εξαρτάται καθόλου από την κατανομή ενέργειας οποιασδήποτε άλλης περιόδου. Στο αρχικό μας πρόβλημα, λόγω των περιορισμών μείωσης και αύξησης των ποσοτήτων ενέργειας, η κατανομή της ενέργειας μιας χρονικής περιόδου εξαρτάται σε έναν βαθμό από τις κατανομές ενέργειας των γειτονικών σε αυτή περιόδων. Ωστόσο, η έλλειψη των εν λόγω περιορισμών έχει και μία ακόμα επίδραση στην επίλυση του προβλήματος. Παρατηρούμε πως, με τις συνθήκες βελτιστότητας της απλοποιημένης εκδοχής του προβλήματος, δεδομένου πως οι παραγωγοί οι οποίοι είναι ενεργοί είναι οι βέλτιστοι, τότε για οποιαδήποτε χρονική περίοδο παίρνουμε την βέλτιστη ποσότητα ενέργειας του στρατηγικού παραγωγού.

Πρόταση 3: Η ενεργειακή κατανομή κάθε χρονικής περιόδου, σε μία βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου προβλήματος βελτιστοποίησης κέρδους του στρατηγικού παραγωγού, για την αντίστοιχη βέλτιστη ομάδα ενεργών παραγωγών, με την απουσία των περιορισμών μείωσης και αύξησης της παραγωγής, θα είναι βέλτιστη.

Απόδειξη: Υποθέτουμε πως δεν ισχύουν οι περιορισμοί μείωσης και αύξησης των ποσοτήτων ενέργειας. Εφόσον γνωρίζουμε τον βέλτιστο συνδυασμό των ενεργών παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας για κάθε μια περίοδο του χρονικού ορίζοντα ($z_{i,t}^*$, $i \in I$, $t = 1,\dots,T$), λύνοντας το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης, καθορίζουμε και τις βέλτιστες ποσότητες ενέργειας, που αυτός θα αγοράσει από τον καθένα, συνεπώς και από τον στρατηγικό παραγωγό. Το πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

$$\text{Min} \sum_{i\in I:z_{i,t}^{*}=1} p_{i,t}q_{i,t} \qquad (41)$$

s.t.

$$\sum_{i\in I:z_{i,t}^{*}=1} q_{i,t} = d_t \qquad (42)$$

$$m_i \leq q_{i,t} \leq M_i, i \in I: z_{i,t}^{*} = 1 \qquad (43)$$

$$q_{i,t} = 0, i \in I: z_{i,t}^{*} = 0 \qquad (44)$$

$$q_{i,t}Z^{+}, i \in I: z_{i,t}^{*} = 1 \qquad (45)$$

Στο παραπάνω πρόβλημα παρατηρούμε πως οι περιορισμοί (42)-(45) περιέχονται και στο χαλαρωμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης κέρδους του στρατηγικού παραγωγού. Αυτό σημαίνει πως η βέλτιστη κατανομή που προκύπτει από την λύση του είναι εφικτή λύση και στην χαλάρωση. Η αντικειμενική του συνάρτηση (41) αποτελείται από το άθροισμα των ποσοτήτων ενέργειας των ενεργών παραγωγών, οι οποίες έχουν ως συντελεστές τις τιμές-προσφορές του καθενός. Εφόσον η ζήτηση είναι ίδια, το άθροισμα των ποσοτήτων των ενεργειών θα είναι κι αυτό ίδιο σε κάθε εφικτή λύση. Επομένως, ο μόνος τρόπος να μειωθεί η αντικειμενική συνάρτηση είναι εάν μειώσουμε κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας από έναν παραγωγό με μεγαλύτερη τιμή-προσφορά, και αυξήσουμε κατά μία μονάδα την ποσότητα ενέργειας από έναν παραγωγό με μικρότερη τιμή προσφορά από αυτόν. Όμως οι παραπάνω συνθήκες βελτιστότητας δηλώνουν πως δεν μπορεί να υπάρξει τέτοιο ζευγάρι παραγωγών. Συνεπώς, η κατανομή ενέργειας η οποία προκύπτει ως βέλτιστη λύση από την επίλυση του χαλαρωμένου προβλήματος, για τον βέλτιστο συνδυασμό ενεργών παραγωγών, είναι βέλτιστη.

Με την απουσία των περιορισμών αύξησης και μείωσης της παραγωγής και την ισχύ της **Πρότασης 3**, η εύρεση του ολικού βέλτιστου στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του κέρδους του στρατηγικού παραγωγού, υποβαθμίζεται στην εύρεση της βέλτιστης ομάδας ενεργών παραγωγών για κάθε μία χρονική περίοδο. Το γεγονός αυτό διευκολύνει και βελτιώνει σημαντικά την απόδοση του αλγόριθμου επίλυσης που προτείνουμε, καθώς οι έλεγχοι οι οποίοι αποκλείουν έναν πολύ μεγάλο αριθμό λύσεων, σχετίζονται με την κατάσταση που βρίσκονται οι μονάδες παραγωγής ενέργειας και με την επιβολή των εγκύρων ανισοτήτων που αναφέραμε προηγουμένως, οι οποίες θα αποδίδουν τις βέλτιστες λύσεις για το πρόβλημα του ΑΔΣ, ανταποκρινόμενες σε συγκεκριμένες τιμές προσφορές του στρατηγικού παραγωγού, καταλήγουμε στις βέλτιστες ομάδες ενεργών παραγωγών.

Στην περίπτωση του αρχικού μας προβλήματος η **Πρόταση 3** δεν έχει ισχύ, αφού η βέλτιστη κατανομή ενέργειας μίας περιόδου εξαρτάται από τις γειτονικές της. Με αυτόν τον τρόπο, η χαλάρωση του προβλήματος μας οδηγεί σε διαφορετικές συνθήκες βελτιστότητας και οι κατανομές της ενέργειας είναι μη βέλτιστες, με τέτοιο τρόπο που το κέρδος του στρατηγικού παραγωγού να ξεπερνά την πραγματική βέλτιστη τιμή του, ακόμη κι αν ανταποκρίνεται στην αντίστοιχη βέλτιστη ομάδα ενεργών παραγωγών.

Η απουσία των περιορισμών αύξησης και μείωσης των ενεργειακών ποσοτήτων έχει ακόμα μια ιδιαίτερη επίδραση στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Παρατηρούμε πως, για τη βέλτιστη ομάδα ενεργών παραγωγών, οι ποσότητες ενέργειας του στρατηγικού παραγωγού στην βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου προβλήματος θα είναι βέλτιστες και για το πρόβλημα του ΑΔΣ, ακόμη κι αν οι συνθήκες βελτιστότητας για μία περίοδο επιβάλλονται μόνο για ζευγάρια που περιέχουν τον στρατηγικό παραγωγό.

Πρόταση 4: Εφόσον δεν χρησιμοποιούμε τους περιορισμούς μείωσης και αύξησης της των ποσοτήτων ενέργειας, η βέλτιστη λύση για το χαλαρωμένο πρόβλημα της βελτιστοποίησης του κέρδους του στρατηγικού παραγωγού, η οποία περιέχει συνθήκες βελτιστότητας μόνο για ζευγάρια παραγωγών, στα οποία ανήκει ο στρατηγικός, θα είναι και βέλτιστη λύση, σε ό,τι αφορά τις ποσότητες ενέργειας του , στο πρόβλημα του ΑΔΣ, για την αντίστοιχη βέλτιστη ομάδα ενεργών παραγωγών και τις αντίστοιχες προσφορές-τιμές του.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τους δείκτες s και r για τις βέλτιστες λύσεις των προβλημάτων του ΑΔΣ και της χαλάρωσης βελτιστοποίησης του κέρδους του στρατηγικού αντίστοιχα. Υποθέτουμε πως η **Πρόταση 4** δεν είναι αληθής, πράγμα που σημαίνει $q_{1,t^s} < q_{1,t^r}$ και κατά συνέπεια $z_{1,t^s} = z_{1,t^r} = 1$ και $q_{1,t^s} < M_1$. Σε συνδυασμό με τον περιορισμό (2), υπονοείται πως υπάρχει ένας παραγωγός i εκτός του στρατηγικού $(i > 1)$, για τον οποίο ισχύει $q_{i,t^s} > q_{i,t^r}$,που σημαίνει πως $q_{i,t^s} > m_i$. Ύστερα, σύμφωνα με την **Παραδοχή 2** και με την υιοθέτηση της αισιόδοξης προσέγγισης, πρέπει να ισχύει πως $p_{i,t} < p_{1,t}$. Τα παραπάνω για το χαλαρωμένο πρόβλημα σημαίνουν πως $x_{i,t^r} = 1$, $q_{1,t^r} > m_1$ (που ισοδυναμεί με w_{1,t^r}=1 και $q_{i,t^r} < M_i$ (που ισοδυναμεί με $v_{i,t^r} = 1$). Όμως αυτό παραβιάζει τον περιορισμό (39). Από την άλλη υποθέτουμε πως $q_{1,t^s} > q_{1,t^r}$, που σημαίνει ότι $q_{1,t^s} > m_i$. Σε συνδυασμό με τον περιορισμό (2), υπονοείται πως υπάρχει ένας παραγωγός i εκτός του στρατηγικού $(i > 1)$, για τον οποίο ισχύει $q_{i,t^s} < q_{i,t^r}$, που σημαίνει ότι $q_{i,t^s} < M_i$. Με τη σειρά του σύμφωνα με την **Παραδοχή 2** , πρέπει να ισχύει πως $p_{1,t} \leq p_{i,t}$. Τα παραπάνω για το χαλαρωμένο πρόβλημα σημαίνουν πως x_{i,t^r}= 0, $q_{1,t^r} < M_1$ (που ισοδυναμεί με $v_{1,t^r} = 1$) και $q_{i,t^r} > m_i$ (που ισοδυναμεί με $w_{i,t^r} = 1$). Όμως αυτό παραβιάζει τον περιορισμό (40). Συνεπώς πρέπει να ισχύει ότι $q_{1,t^s} = q_{1,t^r}$.

7. Σύνοψη και μελλοντικές επεκτάσεις

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο βελτιστοποίησης, για την επίλυση ενός προβλήματος διεπίπεδου προγραμματισμού, όπου σε μία αγορά ηλεκτρικής ενέργειας επόμενης μέρας, οι παραγωγοί ηλεκτρικής ενέργειας επιζητούν τις βέλτιστες πολιτικές για την υποβολή των προσφορών τους. Στο μοντέλο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήσαμε, συμπεριλάβαμε περιορισμούς, για τον ελάχιστο αριθμό περιόδων που μια μονάδα παραγωγής πρέπει να παραμείνει ενεργή αφού ανοίξει ή ανενεργή αφού κλείσει, καθώς επίσης και περιορισμούς για την αύξηση και την μείωση τον ποσοτήτων ενέργειας από την μια περίοδο στην επόμενη. Επιπλέον, για την επέκταση του αλγορίθμου επίλυσης, προστέθηκαν ειδικές συνθήκες βελτιστότητας, που εξασφαλίζουν την βέλτιστη κατανομή ενέργειας για κάθε περίοδο ξεχωριστά, έγκυρες ανισότητες για τον αποκλεισμό μη εφικτών λύσεων καθώς και ειδικές μεθόδους αναζήτησης για την αναγνώριση της βέλτιστης λύσης.

Συμπεριλαμβάνοντας κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, στην περιγραφή και στη συνέχεια την μοντελοποίηση του αρχικού προβλήματος, προσδίδουμε ρεαλιστικότητα στο πρόβλημα και οι επεκτάσεις που έγιναν στον αλγόριθμο, βελτιώνουν σε μεγάλο βαθμό την απόδοση της μεθοδολογίας επίλυσης. Υποστηρίξαμε τον παραπάνω ισχυρισμό παρουσιάζοντας υπολογιστικά αποτελέσματα . Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν την θέση πως ο νέος αυτός κώδικας είναι πολύ αποδοτικός στο να λύνει προβλήματα πολύ μεγαλύτερου μεγέθους, στα οποία προηγούμενοι αλγόριθμοι δεν είχαν υψηλή απόδοση. Επιπροσθέτως, αξιολογήσαμε το μοντέλο, καθώς και συγκρίναμε την συμπεριφορά του για διαφορετικές *Ρυθμίσεις* κάποιων παραμέτρων του προβλήματος, με συνέπεια την διαφορετική λειτουργία κάποιων βασικών συναρτήσεων του προβλήματος.

Στη μελέτη που έγινε σε αυτή την εργασία, υπάρχει μεγάλο περιθώριο για μελλοντικές επεκτάσεις, με την προσθήκη νέων ρεαλιστικών χαρακτηριστικών το πρόβλημα μπορεί να οδηγηθεί προς νέες κατευθύνσεις. Μερικά παραδείγματα είναι πραγματοποίηση σταδιακών προσφορών, καθώς και η επιβολή ξεχωριστών προσφορών σε μορφή block bids από τους παραγωγούς. Σε επίπεδο αλγορίθμου, χρήζει προσοχής και μελέτης η επέκταση του συμπεράσματος ότι η βέλτιστη δέσμευση των μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας εγγυάται την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Η διερεύνηση των παραπάνω ζητημάτων μπορεί να οδηγήσει στην βελτίωση της υπολογιστικής απόδοσης του αλγορίθμου που αναπτύχθηκε, με αποτέλεσμα την επίλυση ακόμα μεγαλύτερων προβλημάτων.

8. Βιβλιογραφία

Andrianesis, P., Liberopoulos, G., Kozanidis, G., Papalexopoulos, A. 2013a. Recovery mechanisms in day-ahead electricity markets with non-convexities - Part I: Design and evaluation methodology. *IEEE Trans. Power Syst.* **28** 960–968.

Andrianesis, P., Liberopoulos, G., Kozanidis, G., Papalexopoulos, A. 2013b. Recovery mechanisms in day-ahead electricity markets with non-convexities - Part II: Implementation and numerical evaluation. *IEEE Trans. Power Syst.* **28** 969–977.

Bakirtzis, A.G., Ziogos, N.P., Tellidou, A.C., Bakirtzis, G.A. 2007. Electricity producer offering strategies in day-ahead energy market with step-wise offers. *IEEE Trans. Power Syst.* **22** 1804–1818.

Bard, J.F. 1998. Practical bilevel optimization. Kluwer, Boston, MA, USA.

Bylling, H.C., 2018. Bilevel optimization with applications in energy. Ph.D. Thesis, University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark.

Bylling, H.C., Gabriel, S.A., Boomsma, T.K. 2020. A parametric programming approach to bilevel optimisation with lower-level variables in the upper level. *J. Oper. Res. Soc.* 71(5) 846–865.

Caramia, M., Mari, R. 2015. Enhanced exact algorithms for discrete bilevel linear problems. *Optim. Lett.* **9** 1447-1468.

Candler, W., Norton R. 1977. Multi-level programming and development policy. Working Paper No 258, World Bank, Washington, DC, USA.

Dempe, S. 2002. Foundations of bilevel programming. Kluwer Academic, New York, NY, USA.

DeNegre, S., Ralphs, T.K. 2009. A branch-and-cut algorithm for integer bilevel linear programs. In: *Operations research and cyber-infrastructure*, Springer, 65-78.

Domínguez, L.F., Pistikopoulos, E.N. 2010. Multiparametric programming based algorithms for pure integer and mixed-integer bilevel programming problems. *Comput. & Chem. Eng.* **34** 2097–2106.

Faísca, N.P., Dua, V., Rustem, B., Saraiva, P.M., Pistikopoulos, E.N. 2007. Parametric global optimisation for bilevel programming. *J. Global Optim.* **38**(4) 609–623.

Fampa, M., Barroso, L.A., Candal, D., Simonetti, L. 2008. Bilevel optimization applied to strategic pricing in competitive electricity markets. *Comput. Optim. Appl.* **39** 121–142.

Fernández-Blanco, R., Arroyo, J. M., Alguacil, N. 2017. On the solution of revenue-and network-constrained day-ahead market clearing under marginal pricing - Part I: An exact bilevel programming approach. *IEEE Trans. Power Syst.*, **32**(1) 208-219.

Fischetti, M., Ljubić, I., Monaci, M., Sinnl, M. 2017. A new general-purpose algorithm for mixed-integer bilevel linear programs. *Oper. Res.* **65** 1615-1637.

Geoffrion, A.M., Nauss, R. 1977. Parametric and postoptimality analysis in integer linear programming. *Manage. Sci.* **23** 453–466.

Gross, G., Finlay, D. 2000. Generation supply bidding in perfectly competitive electricity markets. *Comput. Math. Organ. Theory* **6** 83–98.

Gümüs, Z.H., Floudas, C.A. 2005. Global optimization of mixed-integer bilevel programming problems. *Comput. Manag. Sci.* **2** 181–212.

Hobbs, B.F., Metzler, C.B., Metzler, J-S. 2000. Strategic gaming analysis for electric power systems: An MPEC approach. *IEEE Trans. Power Syst.* **15** 638–645.

IBM ILOG CPLEX 2019. CPLEX callable library v. 12.9.0. https://www.ibm.com/docs/en/icos/12.9.0. Last accessed on June 12, 2021.

Kleniati, P.-M., Adjiman, C.S. 2015. A generalization of the branch-and-sandwich algorithm: From continuous to mixed-integer nonlinear bilevel problems. *Comput. & Chem. Eng.* **72** 373-386.

Kostarelou, E., Kozanidis, G. 2021. Bilevel programming solution algorithms for optimal price-bidding of energy producers in multi-period day-ahead electricity markets with non-convexities. *Optim. Eng.* **22**(1) 449-484.

Kozanidis, G., Kostarelou, E., Andrianesis, P., Liberopoulos, G. 2013. Mixed integer parametric bilevel programming for optimal strategic bidding of energy producers in day-ahead electricity markets with indivisibilities. *Optimization*, **62**(8) 1045-1068.

Köppe, M., Queyranne, M., Ryan, C.T. 2010. Parametric integer programming algorithm for bilevel mixed integer programs. *J. Optim. Theory Appl.* **146** 137-150.

Kwon, R.H., Frances D. 2012. Optimization-based bidding in day-ahead electricity auction markets: A review of models for power producers. In: Sorokin A., Rebennack S., Pardalos P., Iliadis N., Pereira M. (eds) Handbook of Networks in Power Systems I. Energy Systems. Springer, Berlin, Heidelberg, 41-59.

Li, T., Shahidehpour, M. 2005. Strategic bidding of transmission-constrained GENCOs with incomplete information. *IEEE Trans. Power Syst.* **20** 437–447.

Loridan, P., Morgan, J. 1996. Weak via strong stackelberg problem: New results. *J. Global Optim.* **8** 263–287.

Lozano, L., Smith, J.C. 2019. A value-function-based exact approach for the bilevel mixed-integer programming problem. *Oper. Res.* **65** 768-786.

Mitsos, A. 2010. Global solution of nonlinear mixed-integer bilevel programs. *J. Global Optim.* **47** 557-582.

Moore, J., Bard, J. 1990. The mixed integer linear bilevel programming problem, *Oper. Res.* **38**, 911-921.

Pereira, M.V., Granville, S., Fampa, M.H.C., Dix, R., Barroso, L.A. 2005. Strategic bidding under uncertainty: A binary expansion approach. *IEEE Trans. Power Syst.* **20** 180–188.

Ruiz, C., Conejo, A.J. 2009. Pool strategy of a producer with endogenous formation of locational marginal prices. *IEEE Trans. Power Syst.* **24** 1855–1866.

Schweppe, F.C., Caramanis, M.C., Tabors, R.D., Bohn, R.E. 1988. Spot pricing of electricity. Kluwer, Boston, MA, USA.

Wang, L., Xu, P. 2017. The watermelon algorithm for the bilevel integer linear programming problem. *SIAM J. on Optim*. **27** 1403-1430.

Wiesemann, W., Tsoukalas, A., Kleniati,P.-M., Rustem, B. 2013. Pessimistic bilevel optimization. *SIAM J. on Optim*. **23** 353-380.

Xu, P.,Wang, L. 2014. An exact algorithm for the bilevel mixed integer linear programming problem under three simplifying assumptions. *Comput. Oper. Res.* **41** 309–318.

Yue, D., Gao, J., Zeng, B., You, F. 2019. A projection-based reformulation and decomposition algorithm for global optimization of a class of mixed integer bilevel linear programs. *J. Global Optim*. **73** 27-57.