

**«ΜΗ-ΤΟΠΙΚΕΣ» ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ:  
ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ**

**ΕΛΕΝΗ ΑΜΑΝΑΤΙΔΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

**ΥΠΟΒΛΗΘΗΚΕ ΣΤΟ ΤΜΗΜΑ  
ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ  
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΙΟΥΛΙΟΣ 2001**

**«ΜΗ-ΤΟΠΙΚΕΣ» ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ:  
ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ**

**ΕΛΕΝΗ ΑΜΑΝΑΤΙΔΟΥ**

Διπλ. Μηχανολόγος Μηχανικός, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας (1996)

**Διδακτορική Διατριβή**

Κατατέθηκε στο Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας  
για την εκπλήρωση των απαιτήσεων του τίτλου της

**Διδάκτορας**

του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας  
του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Βόλος, Ιούλιος 2001

Υπογραφή συγγραφέως.....

Καθηγητής Ν. Αράβας.....

Επιβλέπων της Διδακτορικής Διατριβής

Αν. Καθηγητής Β. Μποντόζογλου.....

Πρόεδρος του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας

## *Ευχαριστώ...*

*...τον Καθηγητή Νίκο Αράβα, επιβλέποντα της διατριβής, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, και τους ορίζοντες που μου άνοιξε. Η συνεργασία μαζί του αποτελεί πολύτιμο εφόδιο για την επαγγελματική μου σταδιοδρομία, όχι μόνο για τις γνώσεις που μου μετέδωσε, αλλά και για το επαγγελματικό και ακαδημαϊκό ήθος που μου ενέπνευσε .*

*...τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, Καθ. Ι. Βαρδουλάκη, Αν. Καθ. Χ. Γεωργιάδη, Καθ. Ι. Δαφαλιά, Λέκτ. Σπ. Καραμάνο, Καθ. Δ. Μπέσκο και Αν. Καθ. Κ. Παπαδημητρίου, για το πολύτιμο και πραγματικό ενδιαφέρον τους.*

*...την οικογένειά μου για την αγάπη τους, και κυρίως τους γονείς μου Περικλή και Τριανταφυλλιά για όσα στερήθηκαν όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών μου, ώστε να μου εξασφαλίσουν «ένα καλύτερο μέλλον».*

*...τους αγαπημένους μου φίλους και συναδέλφους Άννα Ζερβάκη, Αντώνη Κατσαμά και Αποστόλη Βασιλάκο για τη βοήθεια και τη συμπαράστασή τους, τόσο σε επαγγελματικό όσο και σε προσωπικό επίπεδο.*

*...το Γιάννη για όλα όσα νιώθω πως του «οφείλω».*

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι κλασικές (τοπικές) θεωρίες της «Μηχανικής των Συνεχών Μέσων» βασίζονται στην υπόθεση ότι η μηχανική συμπεριφορά σε ένα υλικό σημείο εξαρτάται μόνο από τις τιμές των καταστατικών μεταβλητών στο σημείο αυτό (από όπου και ο όρος «τοπικές») και δεν περιέχουν κάποιο «εσωτερικό μήκος» που να χαρακτηρίζει το υλικό. Παρά το γεγονός ότι οι κλασικές αυτές θεωρίες επαρκούν για την ανάλυση των περισσότερων συμβατικών κατασκευών, υπάρχουν πειραματικά δεδομένα που αποδεικνύουν ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, η λύση ενός προβλήματος ή φυσική ερμηνεία ενός φαινομένου εξαρτάται από κάποιο «χαρακτηριστικό μήκος» του υλικού.

Διάφορες μέθοδοι που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία θεωρούν ότι η μηχανική συμπεριφορά σε ένα υλικό σημείο εξαρτάται όχι μόνο από τις τιμές των καταστατικών μεταβλητών στο υπόψη σημείο αλλά και από τις αντίστοιχες τιμές σε κάποια «γειτονιά» του σημείου, και εισάγουν ένα «χαρακτηριστικό μήκος» του υλικού. Στην κατηγορία αυτή των μεθόδων περιλαμβάνονται και οι θεωρίες τύπου «κλίσεως», σύμφωνα με τις οποίες η καταστατική συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου υλικού σημείου εξαρτάται από τις τιμές των καταστατικών μεταβλητών αλλά και των χωρικών τους παραγώγων στο σημείο αυτό. Η ύπαρξη των χωρικών αυτών παραγώγων στις καταστατικές εξισώσεις εισάγει, σε πρώτη προσέγγιση, την επίδραση των γειτονικών σημείων.

Στα πλαίσια της ελαστικότητας τύπου κλίσεως, ένα χαρακτηριστικό μήκος του υλικού εμφανίζεται στην έκφραση της ελαστικής ενέργειας, η οποία στην περίπτωση αυτή δεν εξαρτάται μόνον από τον τανυστή των παραμορφώσεων αλλά και από τις χωρικές παραγώγους των τανυστών στροφής και παραμορφώσεως. Στην παρούσα διδακτορική διατριβή παρουσιάζεται καταρχήν μία μεθοδική περιγραφή των θεωριών ελαστικότητας τύπου κλίσεως, όπως αυτές διατυπώθηκαν από τον Mindlin και τους συνεργάτες του. Στις θεωρίες αυτές, εάν το πρόβλημα διατυπωθεί συναρτήσει των μετατοπίσεων, οι διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν είναι τετάρτης τάξεως. Στα πλαίσια της κλασικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αυτού του είδους απαιτούνται «στοιχεία  $C^1$ » που να εξασφαλίζουν συνέχεια της μετατόπισης και των πρώτων χωρικών της παραγώγων. Με στόχο την αποφυγή στοιχείων αυτού του είδους αναπτύσσεται

μία «μικτή» (mixed) μεθοδολογία, στην οποία οι μετατοπίσεις αλλά και οι χωρικές τους παράγωγοι χρησιμοποιούνται ως ανεξάρτητοι άγνωστοι, και η μεταξύ τους σχέση επιβάλλεται σε ολοκληρωματική μορφή. Η μεθοδολογία είναι γενική και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση γραμμικών αλλά και μη-γραμμικών προβλημάτων. Τα πεπερασμένα στοιχεία που απαιτούνται για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρκεί να εξασφαλίζουν συνέχεια  $C^0$ . Η προαναφερθείσα μεθοδολογία χρησιμοποιείται για την επίλυση αρκετών προτύπων προβλημάτων, των οποίων είναι γνωστή η αναλυτική λύση. Οι αριθμητικές λύσεις συγκρίνονται με τις αντίστοιχες αναλυτικές και διαπιστώνεται πλήρης συμφωνία.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Συμβολισμοί τανυστών</b> .....	<b>5</b>
2.1	Τανυστές.....	5
2.2	Κάθετο και Εφαπτομενικό μέρος τανυστών.....	5
<b>3</b>	<b>Η μικροπολική θεωρία</b> .....	<b>7</b>
3.1	Εισαγωγή.....	7
3.2	Το πρόβλημα συνοριακής τιμής.....	8
3.3	Ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών.....	10
3.4	Επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης.....	12
3.4.1	Ανάπτυξη στοιχείων.....	12
3.4.2	Εφαρμογή: το πρόβλημα της άπειρης πλάκας με οπή.....	17
3.4.2.1	Περιγραφή της αναλυτικής λύσης.....	18
3.4.2.2	Περιγραφή της αριθμητικής λύσης.....	19
3.4.2.3	Αποτελέσματα.....	20
<b>4</b>	<b>Θεωρίες τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως</b> .....	<b>23</b>
4.1	Κινηματικές μεταβλητές.....	23
4.2	Καταστατικές εξισώσεις.....	24
4.3	Προβλήματα συνοριακής τιμής.....	26
4.4	Πραγματικές τάσεις, πραγματικές τάσεις ζεύγους.....	27
4.5	Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III.....	30
4.5.1	Το πρόβλημα συνοριακής τιμής.....	30

4.5.2	Ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών.....	31
4.6	Εφαρμογές.....	37
4.7	Επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης.....	38
4.7.1	Ανάπτυξη στοιχείων.....	38
4.7.2	Εφαρμογές: το πρόβλημα της άπειρης πλάκας με οπή.....	43
4.7.2.1	Η ακριβής λύση του προβλήματος.....	43
4.7.2.2	Ακριβής λύση για το πεδίο των μετατοπίσεων.....	45
4.7.2.3	Επίλυση του προβλήματος.....	46
4.7.2.4	Αποτελέσματα.....	47
4.7.3	Το πρόβλημα της αντισπίπεδης θραύσης (mode III).....	53
4.7.3.1	Ανάπτυξη στοιχείων.....	53
4.7.3.2	Επίλυση προβλήματος αντισπίπεδης θραύσης (mode III).....	55
4.7.3.3	Περιγραφή της αναλυτικής λύσης.....	55
4.7.3.4	Περιγραφή της αριθμητικής λύσης.....	57
4.7.3.5	Αποτελέσματα.....	58
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα.....</b>	<b>61</b>
	<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>63</b>
	<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I</b>	<b>I-1</b>
	<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II</b>	<b>II-1</b>
	<b>Εφαρμογή των υπολογιστικών τεχνικών με τη χρήση π.σ.</b>	
1	Μικροπολική θεωρία.....	II-1
2	<b>Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III</b> Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης.....	II-2
2.1	Στοιχείο III9-70.....	II-2
3	<b>Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III</b> Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το πρόβλημα της αντισπίπεδης θραύσης (mode III).....	II-5

3.1	Στοιχείο III9-70.....	II-5
3.2	Στοιχείο III9-35.....	II-8
	<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III</b>	III-1
	<b>Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως I.....</b>	
1	Το πρόβλημα συνοριακής τιμής.....	III-1
2	Επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης με τη μέθοδο των π.σ....	III-3
2.1	Ανάπτυξη στοιχείων.....	III-3
2.2	Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το στοιχείο I9-70.....	III-5
2.3	Εφαρμογές: το πρόβλημα της άπειρης πλάκας με οπή.....	III-8
2.3.1	Περιγραφή της αναλυτικής λύσης.....	III-9
2.3.2	Αποτελέσματα.....	III-10
2.4	Εφαρμογές: επίλυση προβλήματος αντισπίπεδης θραύσης (mode III).....	III-14
2.4.1	Ανάπτυξη στοιχείου.....	III-14
2.4.2	Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το στοιχείο I9-35.....	III-15
2.4.3	Περιγραφή της αριθμητικής λύσης.....	III-17



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

3.1 Τύποι πεπερασμένων στοιχείων στη μικροτολική θεωρία.....	13
3.2 Η περιοχή στην οποία εκτελείται ο έλεγχος συρραφής.....	15
3.3 Διακριτοποίηση της περιοχής για το στοιχείο των πέντε, των δεκατριών και των εννέα κόμβων .....	15
3.4 Πρόβλημα φόρτισης πλάκας με οπή.....	17
3.5 Διακριτοποίηση πλάκας με οπή.....	19
3.6 Μεταβολή του $\sigma_r$ για $\theta=2.25^\circ$ . Σύγκριση με την ακριβή και κλασική λύση....	20
3.7 Μεταβολή του $\sigma_{\theta\theta}$ για $\theta=2.25^\circ$ . Σύγκριση με την ακριβή και κλασική λύση....	21
3.8 Μεταβολή του $\mu_{rr}$ για $\theta=2.25^\circ$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	21
3.9 Μεταβολή του $\mu_{\theta\theta}$ για $\theta=2.25^\circ$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	22
3.10 Μεταβολή του $\sigma_{[12]}$ για $\theta=45^\circ$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	22
4.1 Τύπος πεπερασμένων στοιχείων III5-28, III9-70 και III13-70 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III...	39
4.2 Η περιοχή στην οποία εκτελείται ο έλεγχος συρραφής.....	40
4.3 Διακριτοποίηση της περιοχής για το στοιχείο των πέντε, των δεκατριών και των εννέα κόμβων .....	40
4.4 Πρόβλημα πλάκας με οπή σε διαξονική φόρτιση.....	43
4.5 Επαλληλία λύσεων στο πρόβλημα πλάκας με οπή σε διαξονική φόρτιση.....	45
4.6 Διακριτοποίηση πλάκας με οπή.....	46
4.7 Μεταβολή της μετατόπισης. Σύγκριση με την ακριβή και κλασική λύση.....	48
4.8 Μεταβολή της παραμόρφωσης. Σύγκριση με την ακριβή και κλασική λύση...	48

4.9	Μεταβολή της τάσης $\bar{\sigma}^{(2)}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	49
4.10	Μεταβολή του $\bar{\kappa}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	49
4.11	Μεταβολή του $\bar{\mu}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	50
4.12	Μεταβολή του $\bar{\mu}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	50
4.13	Μεταβολή της πραγματικής τάσης. Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	51
4.14	Μεταβολή της πραγματικής τάσης <u>χωρίς τους συνοριακούς όρους</u> . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	51
4.15	Επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους στο συντ. συγ/σεως των τάσεων...	52
4.16	Τύπος πεπερασμένων στοιχείων III9-70 και III9-35 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου III.....	53
4.17	Διακριτοποίηση της περιοχής για τα στοιχεία III9-70, III9-35.....	54
4.18	Πρόβλημα αντιστάσεως θραύσεως. Η γεωμετρία που μοντελοποιείται.....	55
4.19	Πρόβλημα αντιστάσεως θραύσεως. Ο κλάβος.....	57
4.20	Μεταβολή της μετατόπισης. Σύγκριση με την ασυμπτωτική λύση.....	59
4.21	Μεταβολή της πραγματικής τάσης $\sigma_{23}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	59
4.22	Λογαριθμική μεταβολή της πραγματικής τάσης $\sigma_{23}$ . Σύγκριση με τις ασυμπτωτικές λύσεις.....	60
4.23	Μεταβολή της πραγματικής τάσης $\sigma_{23}$ . Σύγκριση των $\tilde{\sigma}_{23}$ και $\sigma_{23}$ .....	60
III.1	Τύπος πεπερασμένων στοιχείων I5-28, I9-70 και I13-70 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως I....	III-4
III.2	Τύπος πεπερασμένου στοιχείου I9-70.....	III-8
III.3	Μεταβολή της κλίσεως της μετατόπισης. Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	III-10

III.4	Μεταβολή της τάσης $\tilde{\sigma}^{(2)}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	III-11
III.5	Μεταβολή του $\tilde{\kappa}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	III-11
III.6	Μεταβολή του $\tilde{\mu}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	III-12
III.7	Μεταβολή της συνολικής τάσης $\tilde{\sigma}$ . Σύγκριση με την ακριβή λύση.....	III-12
III.8	Μεταβολή της συνολικής τάσης $\tilde{\sigma}$ . Σύγκριση με την κλασική λύση.....	III-13
III.9	Μεταβολή της συνολικής τάσης $\tilde{\sigma}$ . Σύγκριση με την πραγματική λύση.....	III-13
III.10	Τύπος πεπερασμένου στοιχείου I9-35 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως I.....	III-14

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### Εισαγωγή

Οι κλασικές καταστατικές εξισώσεις της «Μηχανικής των Συνεχών Μέσων» που περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών, συνδέουν τις συνιστώσες  $\sigma_{ij}$  του τανυστή των τάσεων σε ένα υλικό σημείο με τις συνιστώσες  $\varepsilon_{ij}$  του τανυστή των παραμορφώσεων στο ίδιο σημείο και δεν περιέχουν χωρικές παραγώγους των τάσεων ή παραμορφώσεων (δηλ. όρους  $\partial\sigma_{ij}/\partial x_k$ ,  $\partial\varepsilon_{ij}/\partial x_k$ , κτλ.) ούτε χρησιμοποιούν κάποιο «χαρακτηριστικό μήκος» του υλικού. Τα μεγέθη  $\partial\varepsilon_{ij}/\partial x_k$  παίρνουν μεγάλες τιμές, όταν οι πλαστικές παραμορφώσεις συμβαίνουν σε μικρή κλίμακα (τάξεως μεγέθους μερικών  $\mu m$ ). Συνεπώς, οι χωρικές παράγωγοι  $\partial\varepsilon_{ij}/\partial x_k$  (δηλ. η «κλίση» ή «βαθμίδα»  $grad\varepsilon$  ή  $\nabla\varepsilon$ ) παίζουν σημαντικό ρόλο σε περιπτώσεις όπου οι διαστάσεις που καθορίζουν την πλαστική παραμόρφωση ενός μετάλλου είναι, χονδρικά, από  $0.1 \mu m$  έως  $10 \mu m$ , ενώ σε προβλήματα κλίμακας  $10 \mu m$  και άνω, η επίδραση του  $\nabla\varepsilon$  είναι αμελητέα και οι κλασικές θεωρίες των συνεχών μέσων είναι επαρκείς.

Επίσης, η κλασική θεωρία της ελαστικότητας χρησιμοποιείται με επιτυχία για τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται σε κατασκευές, με την προϋπόθεση οι τάσεις να μην υπερβαίνουν το όριο ελαστικότητας του υλικού. Υπάρχουν ωστόσο περιπτώσεις όπου η κλασική θεωρία της ελαστικότητας αδυνατεί να προβλέψει επαρκώς τη συμπεριφορά των υλικών, όπως για παράδειγμα στο πρόβλημα της κόπωσης μηχανικών μερών ή άλλων δομικών στοιχείων στα οποία αναπτύσσονται σημαντικές συγκεντρώσεις τάσεων. Η αδυναμία αυτή των κλασικών θεωριών δεν είναι δυνατόν να αποδοθεί στην ανάπτυξη πλαστικών παραμορφώσεων, καθώς η τάση αστοχίας στην κόπωση είναι συνήθως πολύ μικρότερη του ορίου διαρροής. Ο παράγοντας που οδηγεί στην ανεπάρκεια της κλασικής θεωρίας συνδέεται με την παρουσία των μεγάλων κλίσεων της τάσης. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν και σε **μακροσκοπικό** επίπεδο η κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων είναι στα περισσότερα προβλήματα μία ομαλή συνάρτηση της θέσεως, σε

ένα πολυκρυσταλλικό υλικό και σε **μικροσκοπική** κλίμακα η κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων είναι πολύ πιθανόν να παρουσιάζει ασυνέχειες και μεγάλες κλίσεις σε περιοχές όπως τα σύνορα των κόκκων. Για το λόγο αυτό, σε υλικά με έντονα διακριτή δομή η απόκλιση των πειραματικών δεδομένων από τα αποτελέσματα κλασικών μοντέλων είναι εντονότερη.

Μερικά παραδείγματα από τη βιβλιογραφία που αποδεικνύουν ότι σε αρκετές περιπτώσεις η λύση ενός φυσικού προβλήματος ή η ερμηνεία πειραματικών παρατηρήσεων εξαρτάται από κάποιο «εσωτερικό μήκος», περιλαμβάνουν: (α) την εξάρτηση της τάσης διαρροής των μετάλλων από το μέγεθος των σωματιδίων καθίζησης **/8/**, (β) την εξάρτηση της μετρούμενης σκληρότητας των μετάλλων από το μέγεθος του διεισδυτή, όταν ο διεισδυτής είναι αρκετά μικρός **/34/**, **/39/**, (γ) τον τρόπο με τον οποίο οδηγείται σε αστοχία το σκυρόδεμα **/3/**, (δ) το πάχος της «ζώνης εντοπισμού» της πλαστικής παραμόρφωσης σε μεταλλικά υλικά και σε γεωυλικά, **/42/**, **/43/**, **/48/**, (ε) την πρόβλεψη της ύπαρξης και τον προσδιορισμό του μήκους (σε σχέση με τις παραμέτρους της μικροδομής του υλικού) ζωνών πλαστικότητας στην περιοχή της ακμής μίας ρωγμής, **/16/**, **/17/**, **/45/**, και (στ) την πρόβλεψη της ύπαρξης ορισμένου τύπου επιφανειακών κυμάτων στα υλικά που η κλασική ελαστικότητα αδυνατεί να προβλέψει, **/23/**, **/47/**.

Τα προηγούμενα παραδείγματα αποδεικνύουν την αδυναμία των κλασικών θεωριών να ερμηνεύσουν ορισμένα πειραματικά αποτελέσματα και τονίζουν την ανάγκη για την ανάπτυξη μοντέλων που να περιλαμβάνουν κάποιο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού. Δύο τέτοιες κατηγορίες καταστατικών θεωριών έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία: οι θεωρίες «ολοκληρωματικού τύπου» και οι «τύπου κλίσεως». Θεωρίες ολοκληρωματικού τύπου χρησιμοποιήθηκαν πρόσφατα από τους Pijaudier-Cabot and Bazant **/33/**, Leblond et al. **/27/** και Tvergaard and Needleman **/41/**, οι οποίοι θεώρησαν ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των καταστατικών μεταβλητών σε κάθε υλικό σημείο δίδονται από χωρικές ολοκληρωματικές εξισώσεις. Οι θεωρίες τύπου κλίσεως εμπλουτίζουν τις γενικές αρχές της μηχανικής των συνεχών μέσων με την εισαγωγή δυνάμεων ζεύγους στο τετράεδρο του Cauchy. Έτσι, σε μία απειροστή υλική επιφάνεια εκτός από το διάνυσμα των τάσεων, εμφανίζονται και οι δυνάμεις ζεύγους, οι οποίες οδηγούν στην ανάπτυξη των τάσεων ζεύγους. Οι τάσεις ζεύγους συμπεριλήφθηκαν στη μηχανική των συνεχών μέσων για πρώτη φορά από τον Voigt **/49/** και τους αδελφούς Cosserat **/10/** πριν από εκατό περίπου χρόνια, χωρίς όμως να εφαρμοστούν αμέσως. Αρκετά αργότερα οι Tourin **/40/**, Koiter **/25/**, Mindlin **/29/** και Mindlin και Tiersten **/28/** θεώρησαν ελαστικά υλικά με τάσεις ζεύγους και ανέπτυξαν τις θεωρίες τύπου κλίσεως. Οι θεωρίες τύπου «κλίσεως» υποθέτουν ότι η καταστατική συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου υλικού σημείου εξαρτάται από τις τιμές των καταστατικών μεταβλητών αλλά και των χωρικών τους παραγώγων στο υπ'όψιν σημείο. Η ύπαρξη των χωρικών αυτών παραγώγων στις καταστατικές εξισώσεις λαμβάνει υπόψη, σε πρώτη προσέγγιση, την επίδραση των γειτονικών σημείων. Η πρώτη μορφή θεωριών τύπου

«κλίσεως» που παρουσίασαν οι αδελφοί Cosserat /10/ είναι η ονομαζόμενη «μικροπολική» θεωρία του συνεχούς μέσου, σύμφωνα με την οποία επιπλέον περιστροφικοί βαθμοί ελευθερίας προστίθενται στους συμβατικούς μεταφορικούς βαθμούς ελευθερίας που περιγράφουν την κίνηση ενός υλικού σημείου. Αργότερα, τη δεκαετία του '60, ο Koiter /25/ παρουσίασε μία ολοκληρωμένη εργασία για τη μικροπολική θεωρία, στην οποία ανέπτυξε τόσο τις καταστατικές εξισώσεις όσο και τις συνοριακές συνθήκες, για τις οποίες μάλιστα απέδειξε πως μόνο οι πέντε από αυτές και όχι οι έξι είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Μία γενικότερη θεωρία γραμμικής ελαστικότητας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως, παρουσιάστηκε από τον Mindlin και τους συνεργάτες του /28/, /31/. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, ο τανυστής των τάσεων  $\sigma_{ij}$  σε ένα υλικό σημείο εξαρτάται όχι μόνον από τον αντίστοιχο τανυστή των παραμορφώσεων  $\varepsilon_{ij}$  αλλά και από τις χωρικές του παραγώγους. Στα πλαίσια της πλαστικότητας η μικροπολική θεωρία χρησιμοποιήθηκε πρόσφατα από τους de Borst /11/, Fleck and Hutchinson /18/, /19/ και Fleck *et al.* /20/. Καταστατικές εξισώσεις τύπου κλίσεως χρησιμοποιήθηκαν πρόσφατα και στην ελαστο-πλαστικότητα από τους Aifantis /1/, Coleman and Hodgdon /9/, Vardoulakis /42/, Vardoulakis and Aifantis /44/, Vardoulakis and Frantziskonis /46/ και Vardoulakis and Sulem /48/. Οι προαναφερθείσες θεωρίες τύπου κλίσεως έχουν χρησιμοποιηθεί για την εύρεση αναλυτικών λύσεων σε ορισμένα πρότυπα προβλήματα, κυρίως στα πλαίσια ελαστικής συμπεριφοράς των υλικών. Αναφέρονται ενδεικτικά πρόσφατες εργασίες των Vardoulakis *et al.* /45/, Exadaktylos *et al.* /17/, Exadaktylos /16/, Georgiadis *et al.* /23/, Georgiadis /12/, Xia and Hutchinson /50/, και Huang *et al.* /24/.

Η ενσωμάτωση σε προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων μη-τοπικών και τύπου-κλίσεως ελαστικών και ελαστο-πλαστικών θεωριών είναι επίσης το αντικείμενο αρκετών πρόσφατων εργασιών (Papanastasiou and Vardoulakis, /32/, de Borst and Sluys, /14/, de Borst and Muhlhaus, /12/, Leblond *et al.*, /27/, Tvergaard and Needleman, /41/, de Borst and Pamin, /13/, Begley and Hutchinson, /5/, Shu and Fleck, /38/, Ramaswamy and Aravas, /35/, /36/). Από τα παραπάνω είναι φανερό λοιπόν ότι θεωρίες τύπου κλίσεως αποτελούν και θα συνεχίσουν να αποτελούν αντικείμενο έντονης έρευνας στην περιοχή της Μηχανικής των Υλικών.

Αντικείμενο της διατριβής αυτής αποτελεί η λεπτομερής μελέτη των ελαστικών καταστατικών εξισώσεων τύπου κλίσεως κατά Mindlin και η συστηματική ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών για την αριθμητική επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων. Στη θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως το ελαστικό έργο παραμόρφωσης  $W$  δίδεται κατά τον Mindlin /29/ σε τρεις **ισοδύναμες** μορφές με διαφορετικούς συνδυασμούς των κινηματικών μεταβλητών. Συγκεκριμένα το  $W$  προκύπτει ως συνάρτηση: α) της παραμόρφωσης και της δεύτερης χωρικής παραγώγου της μετατόπισης (τύπος I), ή β) της παραμόρφωσης και της πρώτης χωρικής παραγώγου της (τύπος II), ή γ) της παραμόρφωσης, της πρώτης χωρικής

παραγώγου του τανυστή της στροφής, και του συμμετρικού μέρους της δεύτερης χωρικής παραγώγου της μετατόπισης (τύπος III). Η μικροπολική θεωρία είναι μία ειδική περίπτωση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως του Mindlin.

Στο αναλυτικό μέρος της διατριβής αναπτύσσονται οι σχέσεις που συνδέουν τους τρεις τύπους, καθώς και οι σχέσεις που συνδέουν τις «μαθηματικές» τάσεις με την πραγματική τάση κατά Cauchy και τα «μαθηματικά» φορτία με τα πραγματικά. Οι υπολογιστικές τεχνικές που αναπτύσσονται στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής διατριβής βασίζονται στη μέθοδο Galerkin */4/* σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Εάν το πρόβλημα διατυπωθεί συναρτήσει των μετατοπίσεων, το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει είναι τετάρτου βαθμού και η επίλυσή του με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί τη χρήση στοιχείων ανώτερης τάξης, δηλαδή «στοιχείων  $C^1$ » που να εξασφαλίζουν τη συνέχεια της μετατόπισης και της πρώτης παραγώγου της. Η χρήση τέτοιων στοιχείων αυξάνει κατά πολύ τις απαιτήσεις του προβλήματος τόσο κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης όσο και της επίλυσης. Με στόχο την αποφυγή της χρήσης στοιχείων ανώτερης τάξης αναπτύσσεται μια «μικτή» (mixed) μεθοδολογία στην οποία, εκτός από την μετατόπιση, οι παράγωγοι της μετατόπισης, όπως η παραμόρφωση και το διάνυσμα στροφής, χρησιμοποιούνται ως επιπλέον κομβικοί άγνωστοι. Στη μικτή αυτή μέθοδο, η μετατόπιση και οι παράγωγοι της θεωρούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές και οι μεταξύ τους σχέσεις επιβάλλονται σε ολοκληρωματική μορφή. Στην περίπτωση αυτή απαιτείται συνέχεια  $C^0$ . Οι οικογένειες των στοιχείων που χρησιμοποιούνται υποβάλλονται στον «έλεγχο συρραφής», ώστε να ελεγχθεί η ορθότητα του προγραμματισμού και η καταλληλότητα των στοιχείων. Σημειώνεται ότι ο έλεγχος συρραφής στη «μικτή» μεθοδολογία δεν είναι πάντοτε τετριμμένος και ισοδυναμεί με την ικανοποίηση των συνθηκών Babuska-Brezzi */2/*, */6/*.

Η μικτή μέθοδος και τα αντίστοιχα στοιχεία χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων όπως αυτό του διαξονικού εφελκυσμού μίας πλάκας με σπή και της ρωγμής που υποβάλλεται σε ανιεπίπεδη διάτμηση (mode III). Οι αριθμητικές λύσεις συγκρίνονται με τις αντίστοιχες αναλυτικές και διαπιστώνεται πλήρης συμφωνία.

Όσον αφορά τη δομή της διατριβής, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι συμβολισμοί και οι βασικές σχέσεις που χρησιμοποιούνται. Η μικροπολική θεωρία αναπτύσσεται στο τρίτο κεφάλαιο στο οποίο ενσωματώνονται και οι υπολογιστικές τεχνικές και η επίλυση των προβλημάτων. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως. Δίδεται ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη της θεωρίας τύπου III και των αντίστοιχων αριθμητικών τεχνικών. Στο τελευταίο πέμπτο κεφάλαιο συνάγονται τα γενικά αποτελέσματα και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

Επιπλέον, στο κείμενο της διατριβής συμπεριλαμβάνονται τρία παραρτήματα. Στο πρώτο αποδεικνύονται οι σχέσεις που αναφέρονται στο δεύτερο κεφάλαιο. Στο δεύτερο παράρτημα παρατίθενται τα μητρώα που χρησιμοποιούνται στις υπολογιστικές τεχνικές, ενώ στο τρίτο παράρτημα αναπτύσσεται εκτενώς η θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως τύπου I .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Συμβολισμοί τανυστών

#### 2.1. Τανυστές

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για τους τανυστές τυποποιείται με βάση όσα αναφέρονται στη συνέχεια. Τα μαύρα (bold) στοιχεία υποδηλώνουν τανυστές, η τάξη των οποίων συνάγεται από τα συμφραζόμενα. Οι συνιστώσες των τανυστών ορίζονται ως προς ένα σταθερό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης  $\mathbf{e}_i$  ( $i=1,2,3$ ), ενώ για τους δείκτες ισχύει η σύμβαση της αθροίσεως. Ο εκθέτης  $T$  δηλώνει τον ανάστροφο και οι εκθέτες  $S$  και  $A$  το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος, αντίστοιχα, ενός τανυστή. Για  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  δύο διανύσματα,  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  δύο τανυστές δεύτερης τάξης και  $\mathbf{C}$  έναν τανυστή τέταρτης τάξης, χρησιμοποιούνται στο κείμενο τα παρακάτω γινόμενα:  $(\mathbf{ab})_{ij} = a_i b_j$ ,  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A})_i = a_k A_{ki}$ ,  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a})_i = A_{ik} a_k$ ,  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$ ,  $(\mathbf{A} : \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$ ,  $(\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{B})_{ijkl} = \partial A_{ij} / \partial B_{kl}$  και  $(\mathbf{C} : \mathbf{A})_{ij} = C_{ijkl} A_{kl}$ . Κόμμα που ακολουθείται από δείκτη, για παράδειγμα  $i$ , εκφράζει τη μερική παράγωγο του τανυστή ως προς την αντίστοιχη χωρική συντεταγμένη, δηλαδή,  $A_{,i} = \partial A / \partial x_i$ . Τέλος το συμμετρικό και το αντισυμμετρικό μέρος ενός τανυστή δίδονται από τις σχέσεις:

$$A_{ij}^S = A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}), \quad A_{ij}^A = A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

#### 2.2. Κάθετο και Εφαπτομενικό μέρος τανυστών.

Έστω  $S$  μία επιφάνεια ενός σώματος και  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια με φορά προς τα έξω. Κάθε διάνυσμα  $\mathbf{a}$  που ορίζεται στην επιφάνεια  $S$  μπορεί να αναλυθεί στο κάθετο ( $\mathbf{a}^n$ ) και στο εφαπτομενικό μέρος ( $\mathbf{a}^t$ ) ως εξής:

$$\mathbf{a}^n = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad \text{ή} \quad a_i^n = a_k n_k n_i \quad \text{και} \quad \mathbf{a}^t = \mathbf{a} - \mathbf{a}^n \quad \text{ή} \quad a_i^t = a_i - a_k n_k n_i.$$

Ομοίως αν  $\mathbf{A}$  είναι ένας τανυστής δεύτερης τάξης οριζόμενος στην επιφάνεια  $S$ , τότε το κάθετο ( $\mathbf{A}^n$ ) και το εφαπτομενικό ( $\mathbf{A}^t$ ) μέρος του στην επιφάνεια δίδονται από τις σχέσεις

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{nn}) \quad \text{ή} \quad A_{ij}^n = A_{ik} n_k n_j \quad \text{και} \quad \mathbf{A}^t = \mathbf{A} - \mathbf{A}^n \quad \text{ή} \quad A_{ij}^t = A_{ij} - A_{ik} n_k n_j.$$



Αν  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  δύο τανυστές δεύτερης τάξης, αποδεικνύεται ότι

$$\mathbf{A}^n : \mathbf{B}^t = \mathbf{A}^t : \mathbf{B}^n = 0, \quad \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^n : \mathbf{B}^n + \mathbf{A}^t : \mathbf{B}^t \quad \text{και} \quad \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Στην επιφάνεια  $S$  είναι δυνατόν επίσης να οριστεί η κάθετη και η εφαπτομενική συνιστώσα ενός πεδίου της κλίσης  $\nabla f = f_{,i} e_i$  όπου το  $f$  εκτός από βαθμωτό μέγεθος μπορεί να είναι διάνυσμα ή τανυστής. Επομένως η κάθετη συνιστώσα  $D$  του  $\nabla f$  ορίζεται ως

$$Df = (\nabla f) \cdot \mathbf{n} = f_{,i} n_i$$

και θα αναφέρεται στη συνέχεια ως κάθετη παράγωγος ενώ η εφαπτομενική συνιστώσα  $\mathbf{D}$  του  $\nabla f$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{D}f = \nabla f - (Df)\mathbf{n} \quad \text{ή} \quad D_i f = f_{,i} - f_{,k} n_k n_i$$

και θα αναφέρεται ως εφαπτομενική παράγωγος.

Σημειώνεται πως για την εφαπτομενική παράγωγο του κάθετου στην επιφάνεια  $S$  διανύσματος  $\mathbf{n}$  ισχύει

$$D_j n_i = D_i n_j.$$

Η απόδειξη της σχέσεως αυτής είναι απλή, αν λάβει κανείς υπόψη ότι το  $\mathbf{n}$  μπορεί να οριστεί ως  $n_i = f_{,i} / \sqrt{f_{,k} f_{,k}}$ , όπου  $f(\mathbf{x}) = \text{σταθ.}$  είναι η συνάρτηση που περιγράφει την επιφάνεια  $S$  στο χώρο.

Καθώς οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για οποιοδήποτε τανυστή  $\mathbf{A}$ , είναι επόμενο πως ισχύουν και για  $\mathbf{A} = \mathbf{u}\nabla$  δηλαδή για την κλίση του διανύσματος  $\mathbf{u}$  στην επιφάνεια  $S$ . Έτσι

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}\nabla \quad \text{ή} \quad A_{ij} = u_{i,j}$$

οπότε προκύπτουν η κάθετη και η εφαπτομενική παράγωγος αντίστοιχα,

$$\mathbf{A}^n = (D\mathbf{u})\mathbf{n} \quad \text{και} \quad \mathbf{A}^t = \mathbf{u}\mathbf{D}$$

ή

$$A_{ij}^n = (Du_i) n_j \quad \text{και} \quad A_{ij}^t = D_j u_i = u_{i,j} - u_{i,k} n_k n_j.$$

Οι συνιστώσες του  $\mathbf{A}^n$  εκφράζουν το κάθετο μέρος, ενώ οι συνιστώσες του  $\mathbf{A}^t$  το εφαπτομενικό μέρος των παραγώγων του  $\mathbf{u}$  στην επιφάνεια  $S$ .

### Παρατηρήσεις

Βάσει των παραπάνω αποδεικνύεται ότι: (Παράρτημα I)

1)

$$(Du_i) n_j = n_k n_j D_i u_k + 2u_{[i,k]} n_k n_j + n_k u_{(k,p)} n_p n_i n_j.$$

2)

$$D_j u_i = (\varepsilon_{ij} + \Omega_{ij})^t \Leftrightarrow u_{i,j} - 2n_j n_k u_{[i,k]} - n_i n_j n_p n_q u_{(p,q)} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} - 2n_j n_k \Omega_{ik} - n_i n_j n_p n_q \varepsilon_{pq}.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Η μικροπολική θεωρία

#### 3.1. Εισαγωγή

Η μικροπολική θεωρία αναπτύχθηκε αρχικά από τους Koiter /25/ και Mindlin /30/ οι οποίοι ανέπτυξαν τις εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα της ελαστικότητας. Η μικροπολική θεωρία εμπλουτίζει την κλασική θεωρία με την ενσωμάτωση των ροπών στις εξισώσεις του εκάστοτε προβλήματος, οπότε προκύπτουν συμπληρωματικά οι τάσεις ζεύγους,  $\mu$ .

Το βασικό στοιχείο της θεωρίας αυτής είναι η θεώρηση τόσο του συμμετρικού μέρους,  $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$ , όσο και του αντισυμμετρικού μέρους,  $\Omega_{ij} = u_{[i,j]}$ , της κλίσης της μετατόπισης. Ενώ οι παραμορφώσεις,  $\varepsilon_{ij}$ , έχουν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη του γνωστού συμμετρικού τανυστή των τάσεων, το αντισυμμετρικό μέρος,  $\Omega_{ij}$ , οδηγεί στην ανάπτυξη των τάσεων ζεύγους. Ο τανυστής των τάσεων παύει να είναι συμμετρικός καθώς στην κλασική συμμετρική τάση,  $\sigma_{ij}$ , προστίθεται και η συμβολή της τάσης ζεύγους,  $\sigma_{[ij]} = -\frac{1}{2}e_{ijk}\mu_{lk,l}$ .

Σε ένα γραμμικό ισότροπο μικροπολικό υλικό ισχύουν οι σχέσεις (Koiter /25/)

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad \text{και} \quad \mu_{ij} = 4G\ell^2(\kappa_{ij} + \eta\kappa_{ji}),$$

όπου  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$  είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων,  $\kappa_{ij} = \omega_{j,i}$ ,  $\omega_i = \frac{1}{2}e_{ijk}\Omega_{kj}$  είναι το διάνυσμα στροφής,  $G$  το μέτρο διάτμησης,  $\lambda$  μία από τις σταθερές Lamé,  $\ell$  ένα χαρακτηριστικό μήκος του υλικού και  $\eta$  μία αδιάστατη σταθερά.

Η ενσωμάτωση της τάσης ζεύγους οδηγεί και στην ανάγκη εμπλουτισμού των συνοριακών συνθηκών, οι οποίες ωστόσο δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Πράγματι αν σε μία επιφάνεια περιγραφούν οι συνιστώσες της μετατόπισης, τότε η κάθετη συνιστώσα του διανύσματος της στροφής προσδιορίζεται από τις επιφανειακές συνιστώσες και δεν μπορεί

να περιγραφεί ανεξάρτητα. Αντίθετα, είναι απαραίτητο να περιγραφούν πρόσθετα οι δύο εφαπτομενικές συνιστώσες του διανύσματος της στροφής. Επομένως ο απαιτούμενος αριθμός συνοριακών συνθηκών είναι πέντε και όχι έξι όπως μπορεί να φαίνεται σε μια πρώτη ματιά.

Στις θεωρίες τύπου «κλίσεως», όπως ήδη αναφέρθηκε, η τάση εξαρτάται και από τις παραγώγους των κινηματικών μεταβλητών, δηλαδή της παραμόρφωσης και του τανυστή στροφής. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται στην περιγραφή του προβλήματος παράγωγοι της μετατόπισης έως και τετάρτου βαθμού. Για παράδειγμα αν χρησιμοποιηθεί η μικροπολική θεωρία για την επίλυση ενός προβλήματος συνοριακής τιμής της ελαστικότητας, τότε από την εξίσωση ισορροπίας προκύπτει η ισοδύναμη διαφορική εξίσωση τετάρτου βαθμού Navier η οποία περιέχει μόνο συνιστώσες της μετατόπισης:

$$G \left[ u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} - \ell^2 (u_{i,jj} - u_{j,ji})_{,kk} \right] + f_i = 0.$$

Η επίλυση του παραπάνω προβλήματος με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων απαιτεί τη χρήση στοιχείων ανώτερης τάξης, δηλαδή στοιχείων που να εξασφαλίζουν τη συνέχεια της πρώτης παραγώγου της μετατόπισης. Απαιτείται επομένως συνέχεια  $C^1$ . Σημειώνεται πως στην ασθενή μορφή του προβλήματος στην οποία εφαρμόζονται οι υπολογιστικές τεχνικές επιβιώνει παράγωγος της μετατόπισης δευτέρου βαθμού. Η χρήση τέτοιων στοιχείων αυξάνει κατά πολύ τις απαιτήσεις του προβλήματος τόσο κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης όσο και της επίλυσης. Με στόχο την αποφυγή, όσο το δυνατόν, χρήσης στοιχείων ανώτερης τάξης, έχει αναπτυχθεί η μικτή μέθοδος επίλυσης. Στη μικτή μέθοδο οι παράγωγοι της μετατόπισης, όπως η παραμόρφωση, το διάνυσμα στροφής και η τάση, λαμβάνονται ως ανεξάρτητοι κομβικοί άγνωστοι και η μεταξύ τους σχέση επιβάλλεται σε ολοκληρωματική μορφή. Σε αυτήν την περίπτωση απαιτείται συνέχεια  $C^0$  και χρησιμοποιούνται τα κλασικά πεπερασμένα στοιχεία. Θα πρέπει να τονιστεί πως εάν οι κομβικοί άγνωστοι συνδέονται μεταξύ τους, τότε η σχέση αυτή πρέπει να επιβάλλεται όχι μόνο στον όγκο αλλά και στο σύνορο.

### 3.2. Το πρόβλημα συνοριακής τιμής

Το πρόβλημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{(ij)} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \text{ όπου } W = W(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad \kappa_{ij} = (\nabla \omega)_{ij} = \omega_{j,i} \tag{2}$$

$$\sigma_{[ij]} = -\frac{1}{2} e_{ijk} \mu_{lk,l} \Leftrightarrow e_{ijk} \sigma_{[jk]} + \mu_{ji,j} = 0, \tag{3}$$

$$\mu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}}, \quad (4)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u})_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \Leftrightarrow u_{[i,j]} = -e_{ijk} \omega_k, \quad (5)$$

και τις συνοριακές συνθήκες:

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην } \Gamma_u, \quad (6)$$

$$n_j \sigma_{ji} - \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{D}q^n)_i = \tilde{P}_i \quad \text{στην } \Gamma_P \quad (\text{όπου } q^n = q_k n_k, \mathbf{q} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}), \quad (7)$$

$$\omega_i^t \equiv \omega_i - \omega^n n_i = \tilde{\omega}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_\omega \quad (\text{όπου } \omega^n = \omega_k n_k), \quad (8)$$

$$q_i^t \equiv q_i - q^n n_i = \tilde{Q}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_Q, \quad (9)$$

όπου

$$\Gamma_u \cup \Gamma_P = \Gamma_\omega \cup \Gamma_Q = \partial\Omega, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_P = \Gamma_\omega \cap \Gamma_Q = \emptyset. \quad (10)$$

Οι συναρτήσεις  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^t(\mathbf{x})$  και  $\tilde{\mathbf{Q}}^t(\mathbf{x})$  είναι δεδομένες συναρτήσεις και αποτελούν τα «γενικευμένα» φορτία του προβλήματος.

Στην περίπτωση όπου η επιφάνεια  $\partial\Omega$  είναι τμηματικά ομαλή και αποτελείται από έναν αριθμό ομαλών επιφανειών  $S_\alpha$  ( $\alpha=1,2,\dots$ ) τα σύνορα των οποίων αποτελούνται από τις καμπύλες  $C^\alpha$ , απαιτούνται οι επιπλέον συνοριακές συνθήκες

$$u_i = \tilde{u}_i^s \quad \text{στην } C_u^\alpha, \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} [[s_i q^n]] = \tilde{Q}_i^n \quad \text{στην } C_Q^\alpha, \quad (12)$$

όπου  $\mathbf{s}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτομενικό στην καμπύλη  $C^\alpha$ ,  $C_u^\alpha \cup C_Q^\alpha = C^\alpha$ ,  $C_u^\alpha \cap C_Q^\alpha = \emptyset$  και  $[[q^n]] = (q^n)_+ - (q^n)_-$ . Στην έκφραση για το  $[[q^n]]$  οι δείκτες  $+$  και  $-$  αναφέρονται στις τιμές του  $q^n$  εκατέρωθεν της  $C^\alpha$ .

Οι συνοριακές συνθήκες (6) και (8) αποτελούν τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, ενώ οι (7) και (9) τις δυναμικές συνοριακές συνθήκες. Από τις (6) και (8) φαίνεται πως αν περιγραφεί η μετατόπιση στην επιφάνεια, το κάθετο μέρος του διανύσματος στροφής προκύπτει και γι αυτό δεν εμφανίζεται στις συνοριακές συνθήκες. Ανάλογα συνδέονται και οι δυναμικές συνοριακές συνθήκες.

Τόσο το αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή των τάσεων όσο και το υδροστατικό μέρος του τανυστή τάσης ζεύγους,  $\mu_{ii}$ , δεν εμφανίζονται σε καμία από τις παραπάνω εξισώσεις επειδή δεν συμβάλλουν στην παραγωγή του έργου.

Μία ειδική περίπτωση καταστατικών εξισώσεων που αντιστοιχεί σε γραμμικό ισότροπο υλικό είναι

$$W = G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{kk})^2 + \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\ell^2 (\kappa_{ij} \kappa_{ij} + \eta \kappa_{ij} \kappa_{ji}) \right], \quad (13)$$

$$\sigma_{(ij)} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (14)$$

$$\mu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}} = 4G\ell^2 (\kappa_{ij} + \eta \kappa_{ji}). \quad (15)$$

Στη σχέση (13) οι σταθερές  $G$  και  $\nu$  είναι το μέτρο διάτμησης και ο λόγος του Poisson αντίστοιχα. Επιπλέον, στην ίδια σχέση εμφανίζονται οι ελαστικές σταθερές  $2G\ell^2$  και  $2\eta G\ell^2$ , όπου  $\ell$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος και  $\eta$  μία αδιάστατη σταθερά. Το ελαστικό δυναμικό  $W$  στην κλασική θεωρία ορίζεται από τους δύο πρώτους όρους της (13) και παραμένει θετικά ορισμένο για  $G > 0$  και  $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ . Κατά αντιστοιχία στη μικροπολική θεωρία η απαίτηση για θετικά ορισμένο δυναμικό οδηγεί στον περιορισμό το  $\ell$  να είναι πραγματικό και  $-1 < \eta < 1$ .

### 3.3. Ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών

Μία εναλλακτική διατύπωση του προβλήματος είναι η ακόλουθη. Να βρεθούν οι ποσότητες  $\mathbf{u} \in H^2$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in H^2$  και  $\sigma_{[ij]} \in H^1$  τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i) u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \left[ \tilde{P}_i - n_j \sigma_{ji} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \nabla q^n)_i \right] u_i^* dS + \sum_{\alpha} \oint_{C_{\alpha}^{\alpha}} \left( \tilde{Q}_i^n - \frac{1}{2} [[s_i q^n]] \right) u_i^* ds = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in U_0, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} (e_{ijk} \sigma_{[jk]} + \mu_{ji,j}) \omega_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_q} (\tilde{Q}_i^t - q_i^t) \omega_i^* dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\omega}^* \in W_0, \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} (u_{[i,j]} + e_{ijk} \omega_k) \sigma_{[ji]}^* d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in L^2, \quad (18)$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n - \omega^n \right] q^{*n} dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\omega}^* \in W_0, \quad (19)$$

και

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην} \quad \Gamma_u, \quad (20)$$

$$\omega_i^t = \tilde{\omega}_i^t \quad \text{στην} \quad \Gamma_{\omega}, \quad (21)$$

$$u_i = \tilde{u}_i^s \quad \text{στην} \quad C_u^{\alpha}, \quad (22)$$

όπου

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = u_{(i,j)}, \quad (23)$$

$$\kappa_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \omega_{j,i}, \quad (24)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}, \sigma_{[kl]}) = \sigma_{(ij)}(\mathbf{u}) + \sigma_{[ij]}, \quad (25)$$

$$\sigma_{(ij)}(\mathbf{u}) = 2G\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\varepsilon_{kk}(\mathbf{u})\delta_{ij}, \quad (26)$$

$$\mu_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = 4G\ell^2 [\kappa_{ij}(\boldsymbol{\omega}) + \eta\kappa_{ji}(\boldsymbol{\omega})], \quad (27)$$

$$q_i(\boldsymbol{\omega}) = n_j\mu_{ji}(\boldsymbol{\omega}), \quad (28)$$

και

$$U_0 = \left\{ \mathbf{u}^* \mid \mathbf{u}^* \in L^2, \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_u \text{ και } \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ στην } C_u^\alpha \right\}, \quad (29)$$

$$W_0 = \left\{ \boldsymbol{\omega}^* \mid \boldsymbol{\omega}^* \in L^2, \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_\omega \right\}. \quad (30)$$

Οι κατηγορίες συναρτήσεων  $H^k$ ,  $L^2$  κτλ. ορίζονται επακριβώς στο Παράρτημα Ι της διατριβής.

Στην παραπάνω εναλλακτική διατύπωση οι κινηματικές μεταβλητές  $u_i$  και  $\omega_i$  θεωρούνται ανεξάρτητες, γι αυτό και η σχέση που τις συνδέει στον όγκο  $V$  εκφράζεται σε ολοκληρωματική μορφή στην εξίσωση (18). Ωστόσο θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η σχέση των μεταβλητών αυτών στο σύνορο  $S$ . Αυτή η σχέση δίδεται στην εξίσωση (19).

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \nabla q^n)_i u_i^* dS = \sum_\alpha \oint_{C^\alpha} \frac{1}{2} [[q^n]] u_i^* s_i ds - \int_{\partial\Omega} q^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right)^n dS. \quad (31)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη σχέση και ότι  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  στην  $\Gamma_u$ , και  $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{s} = 0$  στην  $C_u^\alpha$ , μπορούμε να γράψουμε την (16) με τη μορφή

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i) u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \tilde{P}_i u_i^* dS - \int_{\partial\Omega} n_j \sigma_{ji} u_i^* dS - \int_{\partial\Omega} q^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right)^n dS + \sum_\alpha \oint_{C_\alpha^\alpha} \tilde{Q}_i^n u_i^* ds = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in U_0. \quad (32)$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τις (32) και (17) καταλήγουμε στην ασθενή διατύπωση του προβλήματος: Να βρεθούν οι ποσότητες  $\mathbf{u} \in H^1$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in H^1$  και  $\sigma_{[ij]} \in L^2$  τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} (\sigma_{(ij)} u_{(i,j)}^* + \sigma_{[ij]} u_{[i,j]}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega} q^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right)^n dS = \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \tilde{P}_i u_i^* dS + \sum_\alpha \oint_{C_\alpha^\alpha} \tilde{Q}_i^n u_i^* ds \quad \forall \mathbf{u}^* \in U, \quad (33)$$

$$\int_{\Omega} \left( -e_{ijk} \sigma_{[jk]} \omega_i^* + \mu_{ij} \kappa_{ij}^* \right) d\Omega - \int_{\partial\Omega} q^n \omega^{*n} dS = \int_{\Gamma_Q} \tilde{Q}_i^t \omega_i^* dS \quad \forall \boldsymbol{\omega}^* \in W, \quad (34)$$

$$\int_{\Omega} \left( u_{[i,j]} + e_{ijk} \omega_k \right) \sigma_{[ji]}^* d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}^* \in L^2, \quad (35)$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n - \omega^n \right] q^{*n} dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\omega}^* \in W, \quad (36)$$

και

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην } \Gamma_u, \quad (37)$$

$$\omega_i^t = \tilde{\omega}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_\omega, \quad (38)$$

$$u_i = \tilde{u}_i^s \quad \text{στην } C_u^\alpha, \quad (39)$$

όπου

$$\kappa_{ij}^* = \omega_{j,i}^*$$

$$U = \left\{ \mathbf{u}^* \mid \mathbf{u}^* \in H^1, \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_u \text{ και } \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ στην } C_u^\alpha \right\}, \quad (40)$$

$$W = \left\{ \boldsymbol{\omega}^* \mid \boldsymbol{\omega}^* \in H^1, \boldsymbol{\omega}^{*t} = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_\omega \right\}. \quad (41)$$

Οι κομβικοί άγνωστοι του προβλήματος είναι οι ποσότητες  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  και  $\sigma_{[ij]}$ .

**Παρατήρηση:** Στην ειδική περίπτωση του διδιάστατου προβλήματος όπου

$$\mathbf{u} = u_1(x_1, x_2) \mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2) \mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(x_1, x_2) \mathbf{e}_3, \quad \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}) \mathbf{e}_3 \quad \text{και}$$

$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2$ , ισχύει ότι  $\left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n = \omega^n = 0$ , οπότε τα επιφανειακά ολοκληρώματα στα αριστερά μέλη των (33) και (34) μηδενίζονται και η (36) ικανοποιείται αυτομάτως.

### 3.4. Επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

#### 3.4.1. Ανάπτυξη στοιχείων.

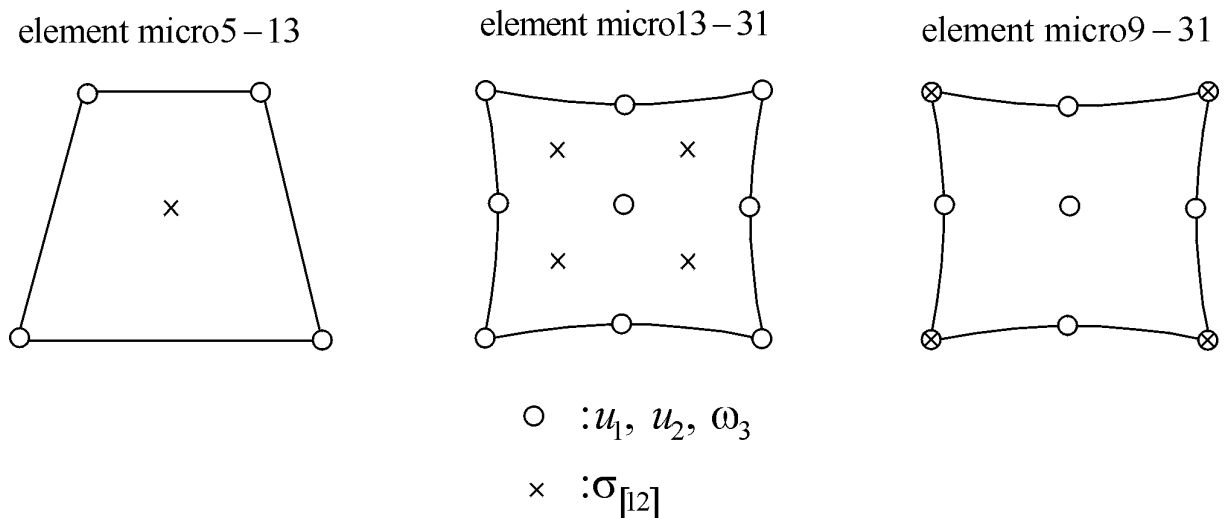
Κατά την ανάπτυξη των στοιχείων χρησιμοποιείται ο έλεγχος συρραφής **/52/** με σκοπό να διαπιστωθεί η αξιοπιστία της υπολογιστικής μεθόδου, δηλαδή η εγκυρότητα του πεπερασμένου στοιχείου και η ορθότητα του κώδικα (Fortran). Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα στοιχεία που υποβάλλονται στον έλεγχο συρραφής είναι (Σχήμα 3.1):

(α) το στοιχείο **micro5-13**. Πρόκειται για ισοπαραμετρικό στοιχείο με πέντε κόμβους και δεκατρείς κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \omega_3)$  είναι κομβικοί άγνωστοι στους

τέσσερις γωνιακούς κόμβους, ενώ η ποσότητα  $\sigma_{[12]}$  εμφανίζεται ως κομβικός άγνωστος στον κεντρικό κόμβο. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία  $\mathbf{u}$  και  $\omega_3$ , ενώ η ποσότητα  $\sigma_{[12]}$  είναι μόνον τμηματικά συνεχής.

(β) το στοιχείο **micro13-31**, το οποίο είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο που αποτελείται από δεκατρείς κόμβους και τριανταένα κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \omega_3)$  είναι κομβικοί άγνωστοι στους εννέα κόμβους που βρίσκονται στις πλευρές και στο κέντρο του στοιχείου, ενώ η ποσότητα  $\sigma_{[12]}$  αποτελεί κομβικό άγνωστο σε τέσσερις εσωτερικούς κόμβους οι οποίοι αντιστοιχούν στα σημεία  $2 \times 2$  ολοκλήρωσης κατά Gauss. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία  $\mathbf{u}$  και  $\omega_3$ , ενώ η ποσότητα  $\sigma_{[12]}$  είναι μόνον τμηματικά συνεχής. Τέλος,

(γ) το στοιχείο **micro9-31**, είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο με εννέα κόμβους και τριανταένα κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \omega_3)$  είναι κομβικοί άγνωστοι και στους εννέα κόμβους, ενώ η ποσότητα  $\sigma_{[12]}$  αποτελεί επιπλέον κομβικό άγνωστο στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία για όλους τους κομβικούς αγνώστους.



**Σχήμα 3.1:** Τύποι πεπερασμένων στοιχείων στη μικροπολική θεωρία

Στις «μικτές» θεωρίες το κριτήριο σύγκλισης σχετίζεται με τη μορφή του προβλήματος. Συγκεκριμένα στη μικροπολική θεωρία το σύστημα εξισώσεων μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{u\sigma} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\omega\omega} & \mathbf{K}_{\omega\sigma} \\ \mathbf{K}_{u\sigma} & \mathbf{K}_{\omega\sigma} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \omega_3^* \\ \sigma_{[12]}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u \\ \mathbf{f}_\omega \\ \mathbf{f}_\sigma \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{K}]\{d^*\} = \{\mathbf{F}\}$$

όπου  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ ,  $\omega_3^*$  και  $\sigma_{[12]}^*$  είναι οι κομβικοί άγνωστοι. Η μέθοδος υπολογισμού του μητρώου ακαμψίας δίνεται στο Παράρτημα II, υποκεφάλαιο 1.



Οι γενικές μαθηματικές συνθήκες που εξασφαλίζουν την επιλυσιμότητα και την ευστάθεια «μικτών» μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων έχουν διατυπωθεί από τους Babuška /2/ και Brezzi /6/. Σε ένα πρόσφατο άρθρο οι Zienkiewicz και Taylor /52/ ισχυρίζονται ότι ο ονομαζόμενος «έλεγχος συρραφής» ισοδυναμεί με την ικανοποίηση των μαθηματικών συνθηκών των Babuška-Brezzi.

Ο έλεγχος συρραφής εκτελείται σε μία τετραγωνική περιοχή, η οποία διαιρείται σε  $N \times N$  στοιχεία (Σχήματα 3.2 και 3.3), όπου  $N$  είναι ο αριθμός των στοιχείων ανά διάσταση. Κατά τον έλεγχο συρραφής δεσμεύεται ο μέγιστος αριθμός βαθμών ελευθερίας και πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες (Zienkiewicz και Taylor /52/):

(α)  $n_u + n_\omega \geq n_\sigma$ , όπου  $n_x$  είναι οι μη-δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στον κομβικό άγνωστο  $x$ , και

(β) δεν υπάρχουν μηδενικές ιδιοτιμές στο μητρώο  $[K]$ , δεδομένου ότι οι συνοριακές συνθήκες που έχουν εφαρμοστεί είναι επαρκείς, ώστε να αποτρέπεται η κίνηση στερεού σώματος.

Η εκπλήρωση της (α) είναι αναγκαία, αλλά δεν εξασφαλίζει από μόνη της το κριτήριο σύγκλισης. Η τυχόν ύπαρξη μηδενικών ιδιοτιμών στο μητρώο ακαμψίας  $[K]$  έχει ως αποτέλεσμα την αποτυχία του ελέγχου συρραφής.

Είναι σημαντικό επίσης, η επιβολή των φορτίων και των συνοριακών συνθηκών κατά τον έλεγχο συρραφής να είναι τέτοια, ώστε το στοιχείο να είναι σε θέση να αναπαράγει την ακριβή λύση.

Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του στοιχείου micro5-13 οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται αντιστοιχούν σε πεδία μετατοπίσεων της μορφής

$$u_i = A_i + B_i x_1 + C_i x_2 + D_i x_1 x_2, \quad i=1, 2$$

ενώ για τα στοιχεία micro9-31 και micro13-31 της μορφής

$$u_i = A_i + B_i x_1 + C_i x_2 + D_i x_1 x_2 + E_i x_1^2 + F_i x_2^2 + G_i x_1 x_2^2 + H_i x_1^2 x_2 + K_i x_1^2 x_2^2, \quad i=1, 2$$

όπου οι συντελεστές  $A_i, B_i, \dots, K_i$  είναι σταθερές.

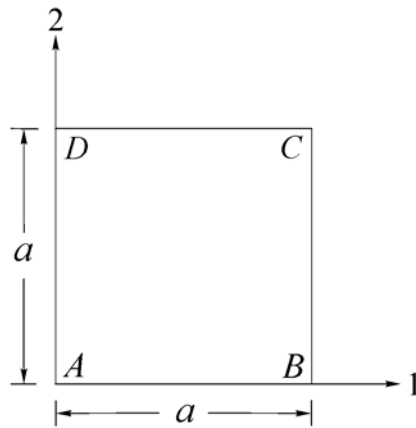
Οι απαιτούμενες μαζικές δυνάμεις για την ισορροπία,  $f_i = -\sigma_{ji,j}$ , είναι  $f_1 = -(\mu + \lambda)$  και

$f_2 = -D_1(\mu + \lambda)$  για την πρώτη κατανομή, και

$$f_1 = -\lambda(D_2 + 2H_2 x_1 + 2G_2 x_2 + 4K_2 x_1 x_2) - 2(2\mu + \lambda)(e_1 + H_1 x_2 + K_1 x_2^2) + \mu(4l^2 K_1 - D_2 - 2F_1 - 2G_1 x_1 - 2H_2 x_1 - 2K_1 x_1^2 - 2G_2 x_2 - 4K_2 x_1 x_2),$$

$$f_2 = -\lambda(D_1 + 2H_1 x_1 + 2G_1 x_2 + 4K_1 x_1 x_2) - 2(2\mu + \lambda)(F_2 + G_2 x_1 + K_2 x_1^2) + \mu(4l^2 K_2 - D_1 - 2E_2 - 2H_1 x_1 - 2G_1 x_2 - 2H_2 x_2 - 2K_2 x_2^2 - 4K_1 x_1 x_2)$$

για τη δεύτερη.

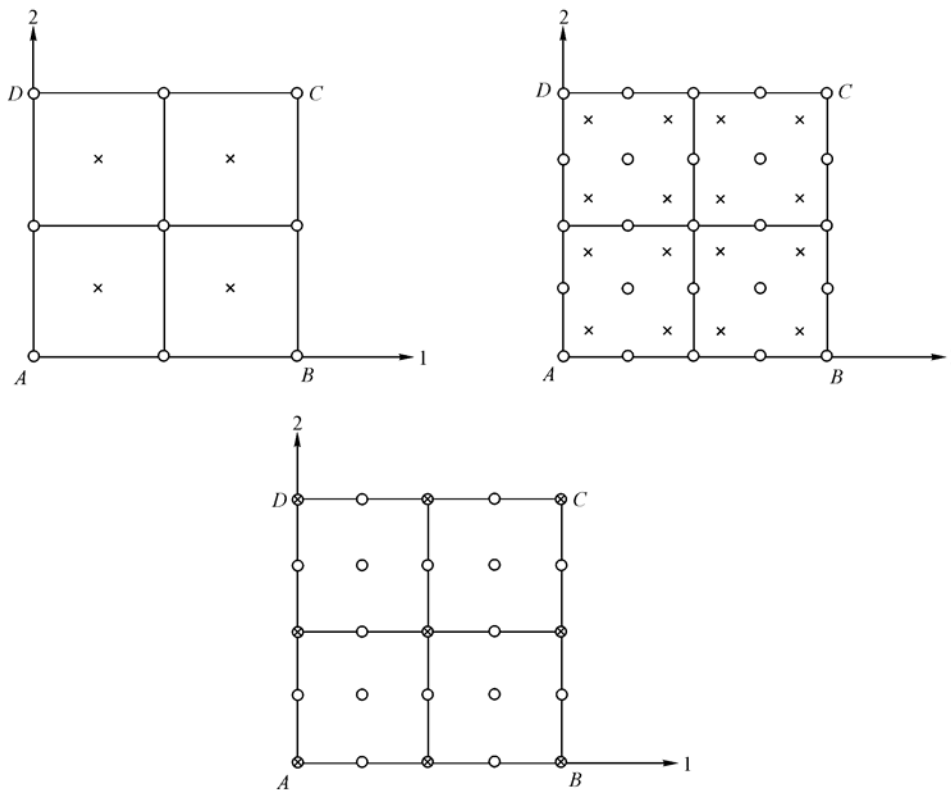


**Σχήμα 3.2:** Η περιοχή στην οποία εκτελείται ο έλεγχος συρραφής.

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι

$(u_1, u_2, \omega_3)$  σε κάθε μία από τις πλευρές της περιοχής του παραπάνω σχήματος.

Στο Σχήμα 3.3 απεικονίζεται ο κανάβος που προέρχεται από τη διακριτοποίηση της περιοχής του Σχήματος 3.2 και αναφέρεται στους τρεις τύπους στοιχείων που χρησιμοποιούνται.



**Σχήμα 3.3:** Διακριτοποίηση της περιοχής για το στοιχείο των πέντε, των δεκατριών και των εννέα κόμβων.

Ο υπολογισμός του μητρώου του συστήματος των εξισώσεων γίνεται με τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά Gauss. Στο στοιχείο *micro5-13* εφαρμόζεται  $2 \times 2$  ολοκλήρωση κατά Gauss, ενώ αντίστοιχα, στα στοιχεία *micro13-31* και *micro9-31* εφαρμόζεται  $3 \times 3$  ολοκλήρωση κατά Gauss. Το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει είναι συμμετρικό-ζωνικό. Για την επίλυση του συστήματος χρησιμοποιείται η υπορουτίνα DGBSV της LAPACK /26/.

Το κάθε στοιχείο που υποβάλλεται στον έλεγχο συρραφής πρέπει να πληροί τα δύο κριτήρια σύγκλισης. Σε πρώτη φάση η καταμέτρηση των αγνώστων είναι ενδεικτική για το αν έχει λύση το πρόβλημα. Από την ανισότητα  $n_u + n_w \geq n_\sigma$  προκύπτει ότι η αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη σύγκλισης για κάθε ένα από τα τρία στοιχεία είναι

$$N > 2 \text{ για το στοιχείο } \textit{micro5-13},$$

$$N \geq 2 \text{ για το στοιχείο } \textit{micro13-31}, \text{ και}$$

$$N \geq 2 \text{ για το στοιχείο } \textit{micro9-31},$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός στοιχείων ανά διάσταση.

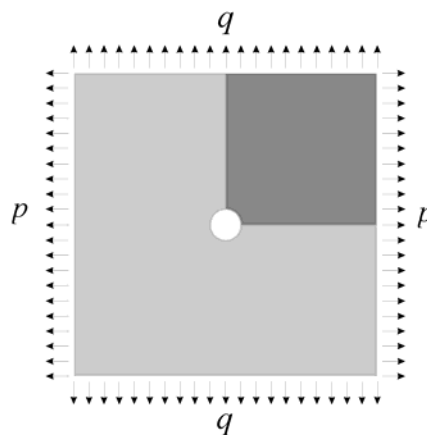
Στη συνέχεια ελέγχεται ο αριθμός των μηδενικών ιδιοτιμών του μητρώου ακαμψίας και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 3.1 που ακολουθεί.

Πίνακας 3.1						
<i>Μικροπολική θεωρία-Έλεγχος συρραφής</i>						
Στοιχείο	$N \times N$	$n_u + n_w$	$n_\sigma$	$n_u + n_w \geq n_\sigma$	Μηδενικές ιδιοτιμές	Αποτέλεσμα
<b><i>micro5-13</i></b>	1×1	0	1	×	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro5-13</i></b>	2×2	3	4	×	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro5-13</i></b>	4×4	27	16	✓	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro13-31</i></b>	1×1	3	4	×	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro13-31</i></b>	2×2	27	16	✓	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro13-31</i></b>	4×4	147	64	✓	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro9-31</i></b>	1×1	3	4	×	1	Απορρίπτεται
<b><i>micro9-31</i></b>	2×2	27	9	✓	0	Δεκτό
<b><i>micro9-31</i></b>	4×4	147	25	✓	0	Δεκτό

Το στοιχείο *micro9-31* δεν παρουσιάζει μηδενικές ιδιοτιμές, αναπαράγει την ακριβή λύση και περνά τον έλεγχο συρραφής (εκτός από την ειδική περίπτωση  $1 \times 1$ <sup>1</sup>). Αντιθέτως τα στοιχεία *micro5-13* και *micro13-31* παρουσιάζουν μηδενικές ιδιοτιμές και δεν αναπαράγουν την ακριβή λύση. Είναι σημαντικό πως η αδυναμία των δύο τελευταίων στοιχείων εντοπίζεται στη μη δυνατότητα υπολογισμού στους κόμβους των αγνώστων που αντιστοιχούν στην τάση  $\sigma_{[12]}$ . Ωστόσο, λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης στον υπολογιστή, το μητρώο  $[K]$  εμφανίζεται ως αριθμητικά αντιστρέψιμο και είναι δυνατόν να υπολογιστούν αριθμητικές λύσεις για τα δύο αυτά στοιχεία. Τα  $\sigma_{[12]}$  που προκύπτουν δεν είναι τα ακριβή και παρουσιάζουν συμπεριφορά «σκακιέρας». Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέση τιμή στην περιοχή αναφοράς συμπίπτει με την ακριβή λύση. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη της μηδενικής ιδιοτιμής και σε περίπτωση που τα αποτελέσματα λαμβάνονται στο κέντρο του στοιχείου είναι δυνατόν να μην γίνει αντιληπτή. Σημειώνεται, επίσης, ότι η επιλυσιμότητα του μητρώου ακαμψίας, εξαρτάται και από τη μορφή του προβλήματος, δηλαδή τη γεωμετρία, τη φόρτιση και τις συνοριακές συνθήκες. Επομένως είναι δυνατόν η χρησιμοποίηση των στοιχείων *micro5-13* και *micro13-31* σε κάποιο πρόβλημα να είναι επιτυχής, αυτό όμως δεν εξασφαλίζει την αξιοπιστία τους σε όλα τα προβλήματα.

### 3.4.2. Εφαρμογή: το πρόβλημα της άπειρης πλάκας με οπή.

Το πρόβλημα το οποίο επιλύεται με μικροπολική θεωρία είναι αυτό μίας άπειρης πλάκας με κυκλική οπή ακτίνας  $a$ , Σχήμα 3.4. Στην πλάκα επιβάλλεται διαξονικός εφελκυσμός. Λαμβάνοντας υπόψη τις τάσεις ζεύγους, ο συντελεστής συγκέντρωσης της τάσης εξαρτάται τόσο από το λόγο του Poisson και την ακτίνα  $a$ , όσο και από το χαρακτηριστικό μήκος  $\ell$ . Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με την αναλυτική λύση που περιγράφει ο Mindlin /30/.



Σχήμα 3.4: Πρόβλημα φόρτισης πλάκας με οπή.

<sup>1</sup> Έλεγχοι συρραφής με ένα μόνο στοιχείο είναι γνωστό ότι είναι πολύ περιοριστικοί /52/. Π.χ. στη γραμμική, ισότροπη ελαστικότητα ασυμπίεστων υλικών ο έλεγχος συρραφής για ένα μόνο στοιχείο δεν είναι επιτυχής για τα περισσότερα στοιχεία που εξασφαλίζουν συνεχή πεδία πιέσεων και χρησιμοποιούνται με επιτυχία στην πράξη.

### 3.4.2.1. Περιγραφή της αναλυτικής λύσης.

Η ακριβής λύση για το πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού,  $q=0$ , έχει τη μορφή  $\sigma_{ij} = p\tilde{\sigma}_{ij}(r, \theta)$  και δίνεται από τις σχέσεις /30/:

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{A}{r^2} - \left( \frac{6B}{r^4} + \frac{4C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta + \frac{2E}{\ell r} \left[ \frac{3\ell}{r} K_0 \left( \frac{r}{\ell} \right) + \left( 1 + \frac{6\ell^2}{r^2} \right) K_1 \left( \frac{r}{\ell} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2}(1 - \cos 2\theta) - \frac{A}{r^2} + \left( \frac{6B}{r^4} - \frac{6D}{r^4} \right) \cos 2\theta - \frac{2E}{\ell r} \left[ \frac{3\ell}{r} K_0 \left( \frac{r}{\ell} \right) + \left( 1 + \frac{6\ell^2}{r^2} \right) K_1 \left( \frac{r}{\ell} \right) \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = - \left( \frac{p}{2} + \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \sin 2\theta + \frac{E}{\ell r} \left[ \frac{6\ell}{r} K_0 \left( \frac{r}{\ell} \right) + \left( 1 + \frac{12\ell^2}{r^2} \right) K_1 \left( \frac{r}{\ell} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{\theta r} = - \left( \frac{p}{2} + \frac{6B}{r^4} + \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} \right) \sin 2\theta + \frac{E}{\ell^2} \left[ \left( 1 + \frac{6\ell^2}{r^2} \right) K_0 \left( \frac{r}{\ell} \right) + \left( \frac{3\ell}{r} + \frac{12\ell^3}{r^3} \right) K_1 \left( \frac{r}{\ell} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$\mu_{rr} = - \frac{2D}{r^2} \sin 2\theta - \frac{E}{\ell} \left[ \frac{2\ell}{r} K_0 \left( \frac{r}{\ell} \right) + \left( 1 + \frac{4\ell^2}{r^2} \right) K_1 \left( \frac{r}{\ell} \right) \right] \sin 2\theta$$

$$\mu_{\theta\theta} = \left\{ \frac{2D}{r^3} + \frac{2E}{r} \left[ K_0 \left( \frac{r}{\ell} \right) + \frac{2\ell}{r} K_1 \left( \frac{r}{\ell} \right) \right] \right\} \cos 2\theta$$

όπου  $r$ : η απόσταση από το κέντρο της οπής,

$a$ : η ακτίνα της οπής,

$p$ : το φορτίο που επιβάλλεται,

$\ell$ : το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού,

$\nu$ : ο λόγος Poisson του υλικού,

$K_n(x)$ : οι εξισώσεις Bessel

$$\text{και } A = -\frac{pa}{2}, \quad B = -\frac{pa^4(1-F)}{(1+F)}, \quad C = \frac{pa^2}{2(1+F)}, \quad D = \frac{4(1-\nu)a^2\ell^2 p}{1+F}, \quad E = -\frac{pa\ell F}{(1+F)K_1(a/\ell)},$$

$$\text{με } F = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{a^2}{\ell^2} + \frac{2a}{\ell} \frac{K_0(a/\ell)}{K_1(a/\ell)}}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι συνοριακές συνθήκες για  $r = a$ ,

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \mu_{rr} = 0.$$

Στην περίπτωση του διαξονικού εφελκυσμού, η ακριβής λύση προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις ως:

$$\sigma_{ij} = p\tilde{\sigma}_{ij}(r, \theta) + q\tilde{\sigma}_{ij}\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

**3.4.2.2. Περιγραφή της αριθμητικής λύσης.**

Καθώς το πρόβλημα έχει διαξονική συμμετρία, για την αριθμητική επίλυση είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί το ένα τέταρτο της γεωμετρίας, όπως φαίνεται με πιο σκούρα σκίαση στο Σχήμα 3.4. Η διαξονική συμμετρία περιγράφεται με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Στο Σχήμα 3.5 παρουσιάζεται ο κানাβος στον οποίο εφαρμόζονται οι υπολογιστικές τεχνικές, όπου  $a = L/10$ . Επίσης λαμβάνονται  $\ell = a/3$ ,  $\nu = 0.3$ , και  $p = 2q = E/200$ .

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι

$$u_2 = 0, \quad \tilde{P}_1 = 0, \quad \omega_3 = 0 \text{ στην } AB,$$

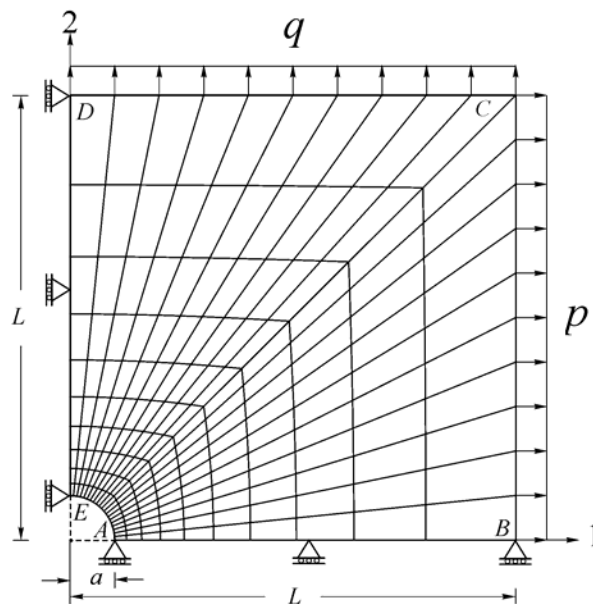
$$u_1 = 0, \quad \tilde{P}_2 = 0, \quad \omega_3 = 0 \text{ στην } DE,$$

$$\tilde{P}_1 = p, \quad \tilde{P}_2 = 0, \quad \tilde{Q}_3^t = 0 \text{ στην } BC,$$

$$\tilde{P}_1 = 0, \quad \tilde{P}_2 = q, \quad \tilde{Q}_3^t = 0 \text{ στην } CD,$$

$$\tilde{P}_1 = 0, \quad \tilde{P}_2 = 0, \quad \tilde{Q}_3^t = 0 \text{ στην } AE \text{ και}$$

$$\tilde{Q}^n = \mathbf{0} \text{ σε όλες τις γωνίες.}$$



**Σχήμα 3.5:** Διακριτοποίηση πλάκας με σπή.

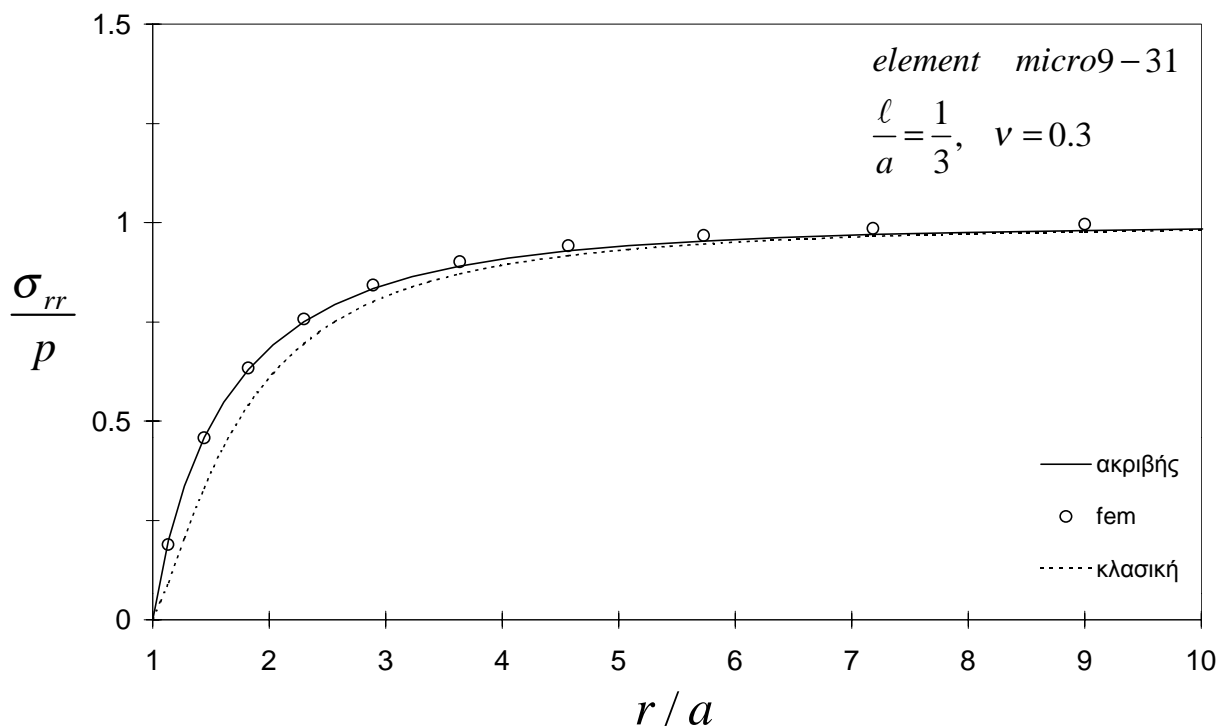
Ο κানাβος δημιουργήθηκε με το πρόγραμμα ABAQUS. Στη συνέχεια οι συντεταγμένες των κόμβων εισήχθησαν ως δεδομένα στο πρόγραμμα της FORTRAN.

Το πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση του στοιχείου micro9-31. Ο κানাβος αποτελείται από 200 στοιχεία και από 2814 βαθμούς ελευθερίας.

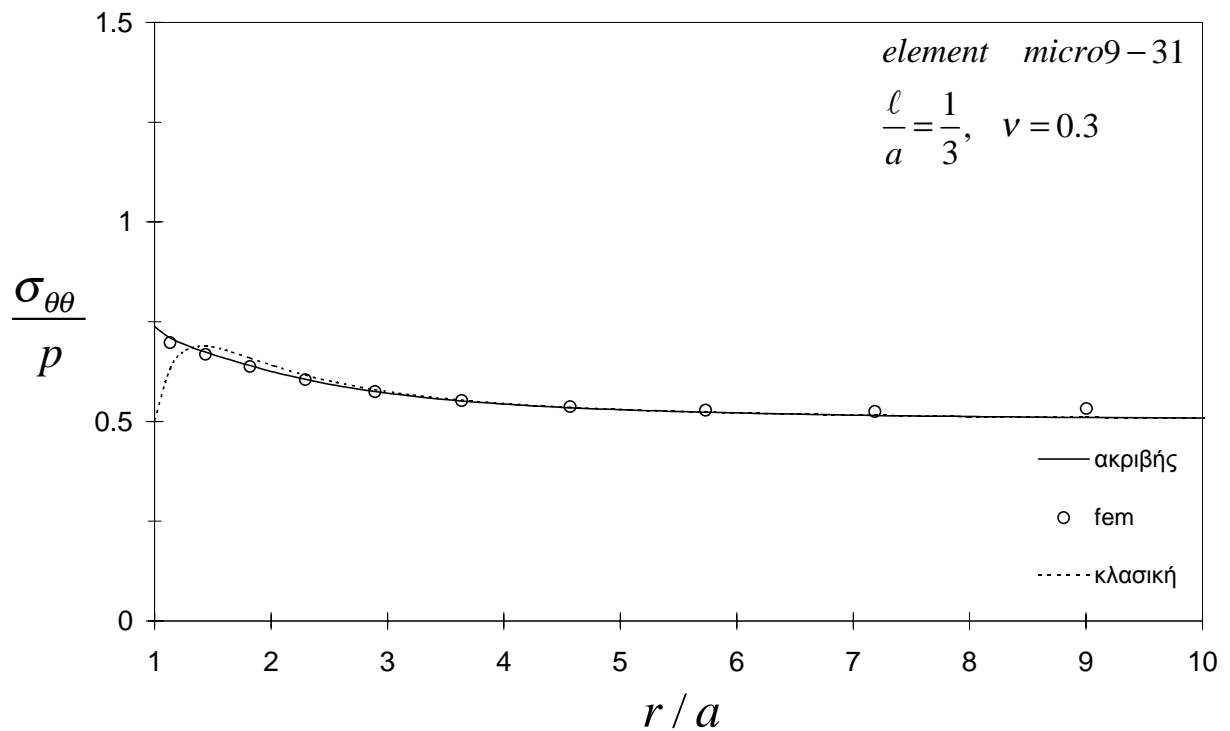
### 3.4.2.3. Αποτελέσματα.

Στα Σχήματα 3.6-3.9 παρουσιάζονται αδιαστατοποιημένα τα αποτελέσματα για τις τάσεις  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{\theta\theta}$  και τις τάσεις ζεύγους  $\mu_{rr}$  και  $\mu_{\theta\theta}$  για γωνία  $\theta = 2.25^\circ$ . Υπενθυμίζεται πως στο πρόβλημα επιβάλλεται διαξονική φόρτιση, όπου  $p = 2q$ . Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7 η κλασική λύση για την τάση  $\sigma_{\theta\theta}$  στο σημείο  $(r = a, \theta = 0^\circ)$  είναι  $\sigma_{\theta\theta} / p = 0.5$ , ενώ στη μικροπολική θεωρία προκύπτει  $\sigma_{\theta\theta} / p = 0.75$ . Το γεγονός αυτό δηλώνει την επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους στη συμπεριφορά του υλικού. Στο Σχήμα 3.10 δίνεται η αριθμητική λύση για τον κομβικό άγνωστο  $\sigma_{[12]}$  για γωνία  $\theta = 45^\circ$ .

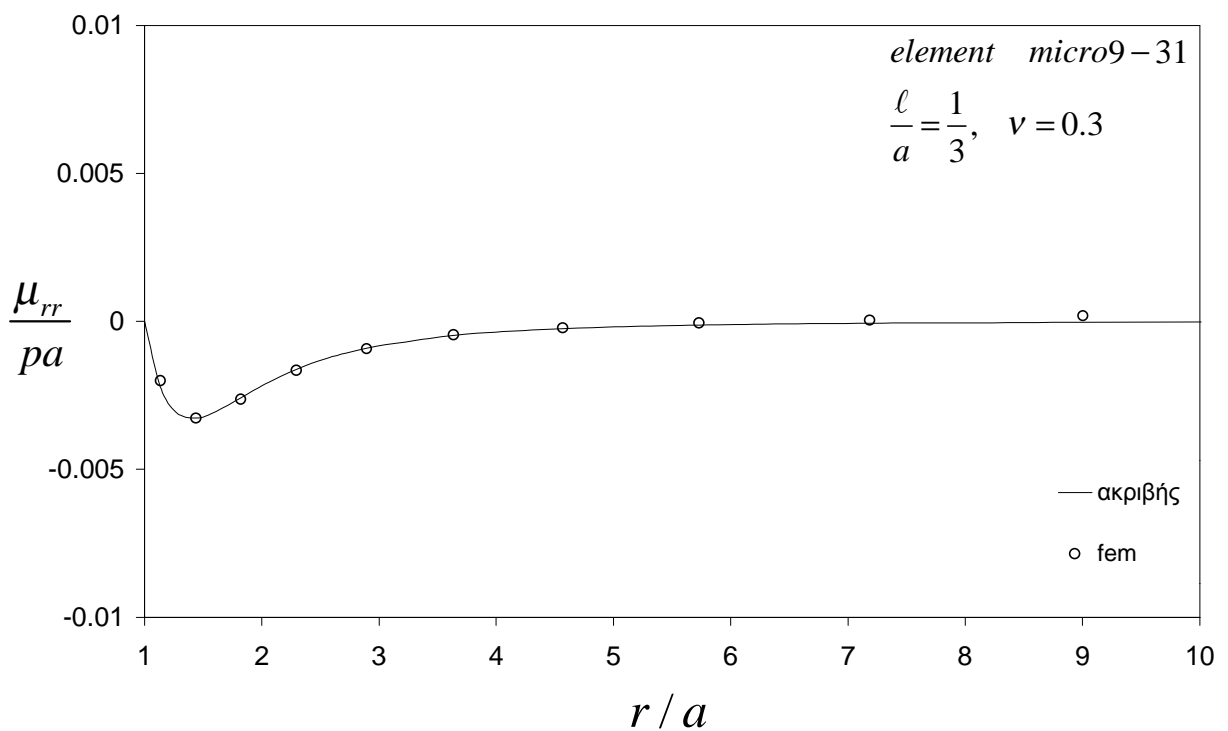
Με συνεχή γραμμή απεικονίζεται η ακριβής λύση ενώ με ανοιχτούς κύκλους η αριθμητική λύση. Η λύση που προκύπτει από την κλασική θεωρία ( $\ell = 0$ ) δίνεται με διακεκομμένη γραμμή.



**Σχήμα 3.6:** Μεταβολή του  $\sigma_{rr}$  για  $\theta = 2.25^\circ$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή και την κλασική λύση.

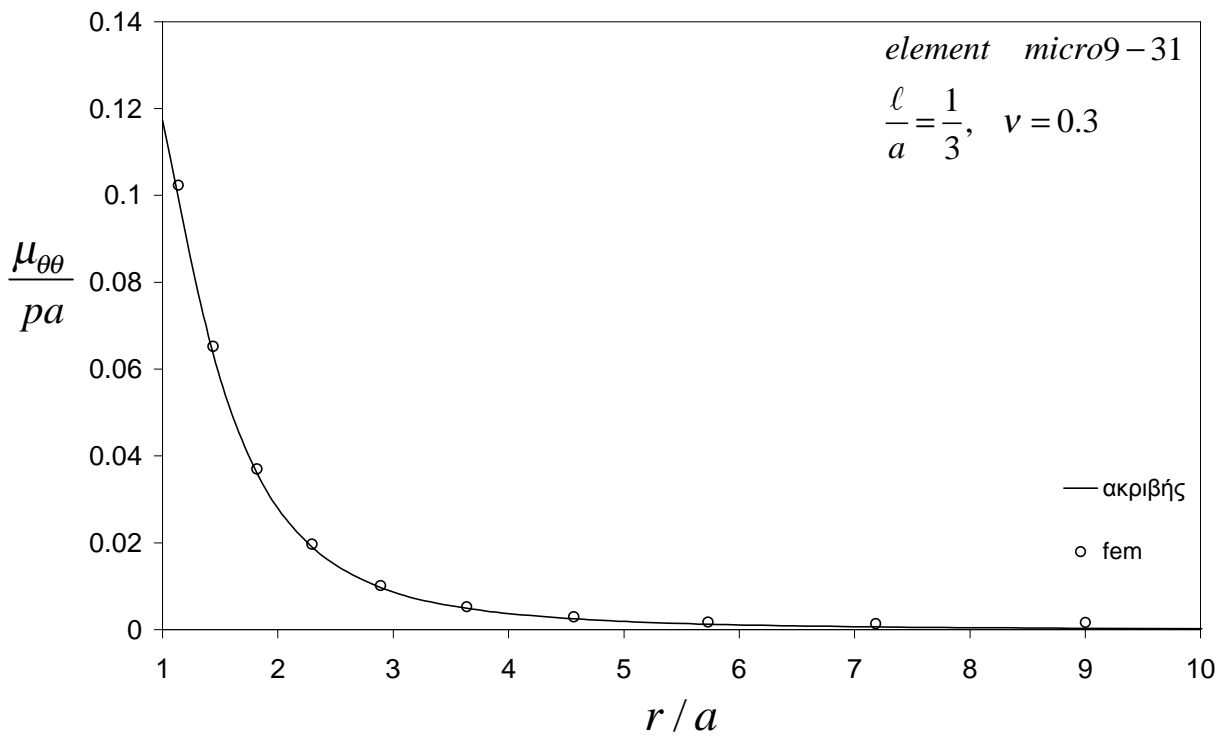


Σχήμα 3.7: Μεταβολή του  $\sigma_{\theta\theta}$  για  $\theta = 2.25^\circ$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή και την κλασική λύση.

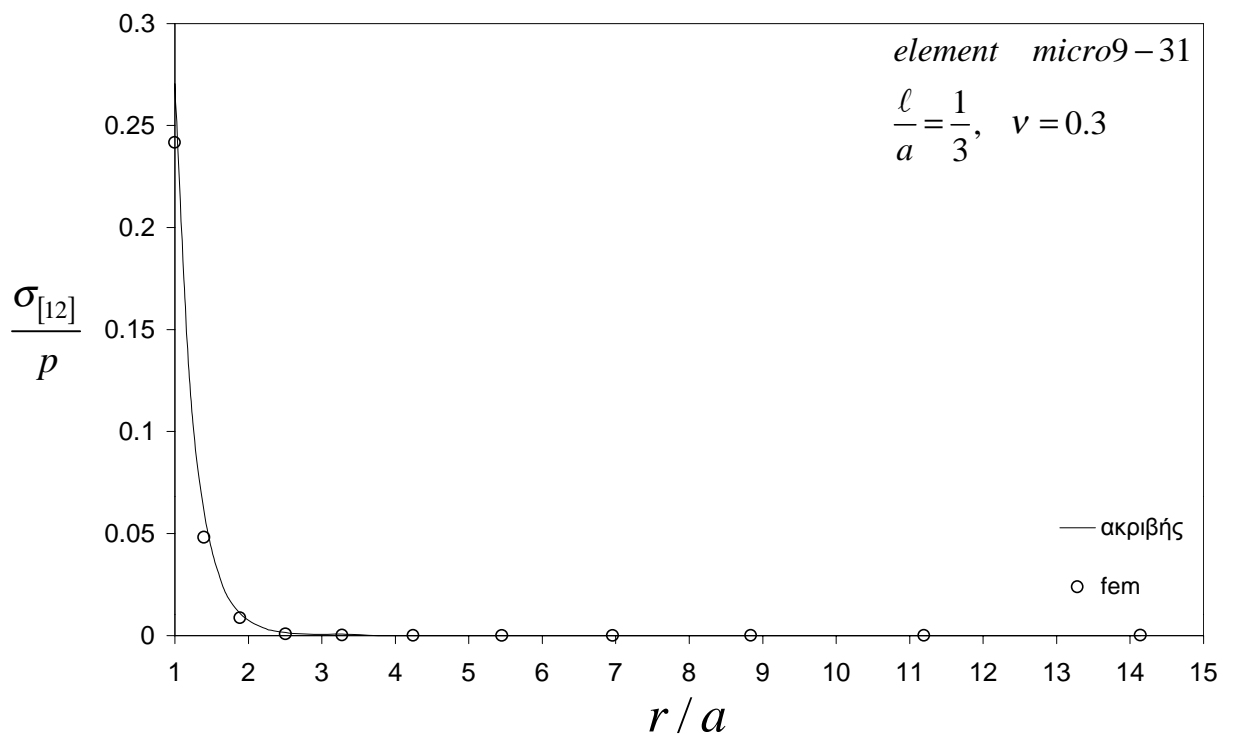


Σχήμα 3.8: Μεταβολή του  $\mu_{rr}$  για  $\theta = 2.25^\circ$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.





**Σχήμα 3.9:** Μεταβολή του  $\mu_{\theta\theta}$  για  $\theta = 2.25^\circ$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.



**Σχήμα 3.10:** Μεταβολή του  $\sigma_{[12]}$  για  $\theta = 45^\circ$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Θεωρίες τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως

#### 4.1. Κινηματικές μεταβλητές.

Έστω ένα πεδίο μετατοπίσεων  $\mathbf{u}$ . Ορίζονται οι παρακάτω ποσότητες:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)} = \varepsilon_{ji}, \quad \text{παραμόρφωση} \quad (1)$$

$$\Omega_{ij} = u_{[i,j]} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = -e_{ijk}\omega_k, \quad \text{τανυστής στροφής} \quad (2)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{u})_i = \frac{1}{2}e_{ijk}u_{[k,j]} = -\frac{1}{2}e_{ijk}\Omega_{jk}, \quad \text{διάνυσμα στροφής} \quad (3)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i}, \quad \text{χωρική παράγωγος της στροφής} (\bar{\kappa}_{ii} = 0) \quad (4)$$

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = u_{k,ij} = \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{ij,k} = \tilde{\kappa}_{jik}, \quad \text{δεύτερη χωρική παράγωγος της μετατόπισης} \quad (5)$$

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \frac{1}{2}(u_{j,ki} + u_{k,ji}) = \varepsilon_{jk,i} = \hat{\kappa}_{ikj}, \quad \text{χωρική παράγωγος της παραμόρφωσης} \quad (6)$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3}(u_{i,jk} + u_{j,ki} + u_{k,ij}) = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}) = \bar{\bar{\kappa}}_{jik} = \bar{\bar{\kappa}}_{ikj} = \bar{\bar{\kappa}}_{kji}, \quad \text{συμμετρικό μέρος του } \tilde{\kappa}_{ijk} \text{ ή του } \hat{\kappa}_{ijk}, \quad (7)$$

όπου  $e_{ijk}$  είναι το σύμβολο της μετάθεσης.

Οι παραπάνω ποσότητες συνδέονται από τις παρακάτω εκφράσεις /31/:

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} - \hat{\kappa}_{kij} = \bar{\bar{\kappa}}_{ijk} + \frac{2}{3}\bar{\kappa}_{ip}e_{pjk} + \frac{2}{3}\bar{\kappa}_{jp}e_{pik}, \quad (8)$$

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \frac{1}{2}(\tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{ikj}) = \bar{\bar{\kappa}}_{ijk} - \frac{1}{3}\bar{\kappa}_{jp}e_{kip} - \frac{1}{3}\bar{\kappa}_{kp}e_{jip}, \quad (9)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_{ipk}e_{jpk} = \hat{\kappa}_{pik}e_{jpk}, \quad (10)$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3}(\tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{jki} + \tilde{\kappa}_{kij}) = \frac{1}{3}(\hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} + \hat{\kappa}_{kij}). \quad (11)$$

#### 4.2. Καταστατικές εξισώσεις.

Στη συνέχεια συνοψίζονται οι εναλλακτικές μορφές διατύπωσης της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως, όπως περιγράφονται από τον Mindlin /29/ και από τους Mindlin και Eshel /31/. Η ελαστική  $W$  ενέργεια μπορεί να εκφραστεί με τρεις ισοδύναμους τύπους:

$$W = \tilde{W}(\varepsilon_{ij}, \tilde{\kappa}_{ijk}) = \hat{W}(\varepsilon_{ij}, \hat{\kappa}_{ijk}) = \bar{W}(\varepsilon_{ij}, \bar{\kappa}_{ij}, \bar{\kappa}_{ijk}). \quad (12)$$

Ο Mindlin /29/ αναφέρεται στην έκφραση  $\tilde{W}(\varepsilon_{ij}, \tilde{\kappa}_{ijk})$  ως «Τύπος I», στην  $\hat{W}(\varepsilon_{ij}, \hat{\kappa}_{ijk})$  ως «Τύπος II» και στην  $\bar{W}(\varepsilon_{ij}, \bar{\kappa}_{ij}, \bar{\kappa}_{ijk})$  ως «Τύπος III». Οι Mindlin και Eshel /31/ παρουσίασαν τη γενική μορφή των  $\tilde{W}$ ,  $\hat{W}$  και  $\bar{W}$  για ένα ισότροπο ελαστικό υλικό και παρήγαγαν τις σχέσεις που συνδέουν τις σταθερές που εμφανίζονται στους τρεις ισοδύναμους τύπους. Από την έκφραση (12) για την ελαστική ενέργεια ορίζονται οι παρακάτω ποσότητες.

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ji}^{(0)}, \quad (13)$$

$$\tilde{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{ijk}} = \tilde{\mu}_{jik}, \quad (14)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \hat{\mu}_{ikj}, \quad (15)$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}, \quad \bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ijk}} = \bar{\bar{\mu}}_{jik} = \bar{\bar{\mu}}_{ikj} = \bar{\bar{\mu}}_{kji}. \quad (16)$$

Οι ποσότητες  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}$ ,  $\hat{\mu}_{ijk}$ ,  $\bar{\mu}_{ij}$  και  $\bar{\bar{\mu}}_{ijk}$  ορίζονται ως «συζυγείς» ποσότητες των  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\tilde{\kappa}_{ijk}$ ,  $\hat{\kappa}_{ijk}$ ,  $\bar{\kappa}_{ij}$  και  $\bar{\kappa}_{ijk}$ . Η σχέση τους με την πραγματική τάση και την πραγματική τάση ζεύγους δεν είναι προφανής. Η σχέση αυτή παρουσιάζεται στην ενότητα 4.4.

Οι παραπάνω ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις της μορφής /31/:

$$\tilde{\mu}_{ijk} = \frac{1}{2}(\hat{\mu}_{ijk} + \hat{\mu}_{jik}) = \bar{\bar{\mu}}_{ijk} + \frac{1}{4}\bar{\mu}_{il}e_{ljk} + \frac{1}{4}\bar{\mu}_{jl}e_{lik}, \quad (17)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \tilde{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{kij} - \tilde{\mu}_{jki} = \bar{\bar{\mu}}_{ijk} + \frac{1}{2}\bar{\mu}_{jl}e_{lik} + \frac{1}{2}\bar{\mu}_{kl}e_{lij}, \quad (18)$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{4}{3}\tilde{\mu}_{i[pq]}e_{jpq} = \frac{2}{3}(\hat{\mu}_{ipq} + \hat{\mu}_{piq})e_{jpq} = \frac{2}{3}\hat{\mu}_{[pq]i}e_{paj}, \quad (19)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{1}{3}(\tilde{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{jki} + \tilde{\mu}_{kij}) = \frac{1}{3}(\hat{\mu}_{ijk} + \hat{\mu}_{jki} + \hat{\mu}_{kij}). \quad (20)$$

Σημειώνεται πως η λεγόμενη «μικροπολική θεωρία της ελαστικότητας» /25/, /30/, /40/ μπορεί να προκύψει ως μία ειδική περίπτωση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως.

Συγκεκριμένα, αν  $\bar{W}$  είναι ανεξάρτητο του  $\bar{\kappa}_{ijk}$ , δηλαδή  $\bar{W}(\varepsilon_{ij}, \bar{\kappa}_{ij})$ , τότε  $\bar{\mu}_{ijk} \equiv 0$  και η ποσότητα  $\bar{\mu}_{ij}$  ταυτίζεται με την τάση ζεύγους.

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας για κάθε έναν από τους τρεις τύπους είναι:

$$\delta W^{int} = \int_V \delta W dV = \int_V (\sigma_{ij}^{(0)} \delta \varepsilon_{ij} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{\kappa}_{ijk}) dV = \quad (21)$$

$$= \int_V (\sigma_{ij}^{(0)} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk}) dV = \quad (22)$$

$$= \int_V (\sigma_{ij}^{(0)} \delta \varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij} \delta \bar{\kappa}_{ij} + \bar{\mu}_{ijk} \delta \bar{\kappa}_{ijk}) dV. \quad (23)$$

Έστω ένα σώμα το οποίο καταλαμβάνει όγκο  $V$  και ορίζεται από μία επιφάνεια  $S$  στο οποίο  $f_i$  είναι η δύναμη ανά μονάδα όγκου,  $\Phi_{ij}$  η διπλή δύναμη ανά μονάδα όγκου και  $T_{ij}$  η διπλή δύναμη ανά μονάδα επιφανείας. Από τις σχέσεις (21)-(23) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης του Stokes προκύπτει η έκφραση για τη μεταβολή της εξωτερικής ενέργειας, /29/, /31/.

$$\begin{aligned} \delta W^{ext} &= \int_V (f_i \delta u_i + \Phi_{ij} \delta u_{j,i}) dV + \int_S [\tilde{P}_i \delta u_i + \tilde{R}_i D(\delta u_i)] dV + \sum_{\alpha} \oint_{C^{\alpha}} \tilde{E}_i \delta u_i dS = \\ &= \int_V (f_i \delta u_i + \Phi_{ij} \delta u_{j,i}) dV + \int_S [\hat{P}_i \delta u_i + \hat{R}_i D(\delta u_i)] dV + \sum_{\alpha} \oint_{C^{\alpha}} \hat{E}_i \delta u_i dS = \\ &= \int_V (f_i \delta u_i + \Phi_{[ij]} \delta \Omega_{ji} + \Phi_{(ij)} \delta \varepsilon_{ji}) dV + \int_S [\bar{P}_i \delta u_i + \bar{Q}_i^t \delta \omega_i^t + \bar{R} \delta \varepsilon^n] dV + \\ &\quad + \sum_{\alpha} \oint_{C^{\alpha}} \bar{E}_i \delta u_i dS, \quad (24) \end{aligned}$$

όπου  $S$  είναι η συνοριακή επιφάνεια του ελαστικού σώματος και  $\varepsilon^n = n_i \varepsilon_{ij} n_j$  η κάθετη συνιστώσα του τανυστή των παραμορφώσεων στην  $S$ . Στην παραπάνω εξίσωση τα επικαμπύλια ολοκληρώματα εμφανίζονται στην περίπτωση κατά την οποία η εξωτερική επιφάνεια  $S$  είναι τμηματικά ομαλή, αποτελείται δηλαδή από έναν πεπερασμένο αριθμό ομαλών επιφανειών  $S^{\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ) κάθε μία από τις οποίες τερματίζεται σε μία ακμή  $C^{\alpha}$ .

Σημειώνεται πως η μαζική ροπή ανά μονάδα όγκου είναι  $M_i = e_{ijk} \Phi_{[jk]}$ , οπότε ο όρος  $\Phi_{[ij]} \delta \Omega_{ji}$

στην (24) μπορεί να γραφεί και ως  $\Phi_{[ij]} \delta \Omega_{ji} = M_i \delta \omega_i$ , όπου  $\delta \omega_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} \delta \Omega_{jk}$ .

Η εξίσωση της εσωτερικής με την εξωτερική ενέργεια οδηγεί στις παρακάτω εκφράσεις για τα «εξωτερικά φορτία», /29/, /31/.

Τύπος I

$$\tilde{P}_i = n_j \left( \sigma_{ji}^{(0)} - \tilde{\mu}_{kji,k} - \Phi_{ji} \right) - \left[ D_j - (D_p n_p) n_j \right] (n_k \tilde{\mu}_{kji}), \quad (25)$$

$$\tilde{R}_i = n_k n_j \tilde{\mu}_{jki}, \quad (26)$$

$$\tilde{E}_i = [\ell_j n_k \tilde{\mu}_{kji}], \quad (27)$$

Τύπος II

$$\hat{P}_i = n_j \left( \sigma_{ji}^{(0)} - \hat{\mu}_{kji,k} - \Phi_{ji} \right) - \left[ D_j - (D_p n_p) n_j \right] (n_k \hat{\mu}_{kji}), \quad (28)$$

$$\hat{R}_i = n_k n_j \hat{\mu}_{jki}, \quad (29)$$

$$\hat{E}_i = [\ell_j n_k \hat{\mu}_{kji}], \quad (30)$$

Τύπος III

$$\begin{aligned} \bar{P}_i = n_j \left( \sigma_{ji}^{(0)} - \frac{1}{2} \bar{\mu}_{pk,p} e_{jik} - \bar{\mu}_{kji,k} - \Phi_{ji} \right) - \frac{1}{2} n_j \bar{\mu}_{,k}^n e_{ijk} - \\ - \left[ D_j - (D_p n_p) n_j \right] (n_k \bar{\mu}_{kji} + n_i n_q n_p \bar{\mu}_{pqi}), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\bar{Q}_i^t = n_j \mu_{ji}^t + 2 n_q n_j n_k \bar{\mu}_{kjp} e_{qpi}, \quad (32)$$

$$\bar{R}_i = n_i n_j n_k \bar{\mu}_{ijk}, \quad (33)$$

$$\bar{E}_i = \left[ \left[ \frac{1}{2} s_i \bar{\mu}^n + \ell_j n_k (\bar{\mu}_{kji} + n_i n_p \bar{\mu}_{pkj}) \right] \right], \quad (34)$$

όπου  $\bar{\mu}^n = n_i \bar{\mu}_{ij} n_j$  στην επιφάνεια  $S$ .

Η ποσότητα μέσα στις αγκύλες  $[[ \quad ]]$  είναι το άλμα εκατέρωθεν της  $C^\alpha$ , και  $\ell = s \times n$  όπου  $s$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτομενικό στην  $C^\alpha$ .

### 4.3. Προβλήματα συνοριακής τιμής.

Οι Mindlin και Eshel /31/ απέδειξαν πως οι εξισώσεις ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες, για κάθε έναν από τους τρεις ισοδύναμους τύπους, είναι της μορφής:

Τύπος I

$$\left( \tilde{\sigma}_{ji} - \tilde{\mu}_{kji,k} - \Phi_{ji} \right)_{,j} + f_i = 0 \text{ στο } V \quad (35)$$

Σε κάθε σημείο του συνόρου  $S$  ορίζονται: i)  $u_i$  ή  $\tilde{P}_i$ , και ii)  $Du_i$  ή  $\tilde{R}_i$ . Αν η επιφάνεια  $S$  είναι τμηματικά ομαλή, ορίζονται επιπλέον οι ποσότητες  $u_i$  ή  $\tilde{E}_i$  σε κάθε σημείο της ακμής  $C^\alpha$ .

Τύπος II

$$\left( \hat{\sigma}_{ji} - \hat{\mu}_{kji,k} - \Phi_{ji} \right)_{,j} + f_i = 0 \text{ στο } V \quad (36)$$

Σε κάθε σημείο του συνόρου  $S$  ορίζονται: i)  $u_i$  ή  $\hat{P}_i$ , ii)  $Du_i$  ή  $\bar{Q}_i$ , και iii)  $\varepsilon^n$  ή  $\bar{R}$ . Αν η επιφάνεια  $S$  είναι τμηματικά ομαλή, ορίζονται επιπλέον οι ποσότητες  $u_i$  ή  $\bar{E}_i$  σε κάθε σημείο της ακμής  $C^\alpha$ .

### Τύπος III

$$\left( \bar{\sigma}_{ji} - \bar{\mu}_{kji,k} - \frac{1}{2} \bar{\mu}_{pk,p} e_{jik} - \Phi_{ji} \right)_{,j} + f_i = 0 \quad \text{στο } V \quad (37)$$

Σε κάθε σημείο του συνόρου  $S$  ορίζονται: i)  $u_i$  ή  $\bar{P}_i$ , και ii)  $\omega_i$  ή  $\hat{R}_i$ . Αν η επιφάνεια  $S$  είναι τμηματικά ομαλή, ορίζονται επιπλέον οι ποσότητες  $u_i$  ή  $\hat{E}_i$  σε κάθε σημείο της ακμής  $C^\alpha$ .

#### 4.4. Πραγματικές τάσεις, πραγματικές τάσεις ζεύγους και πραγματικά φορτία.

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη σχέση που συνδέει τις ποσότητες  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}$ ,  $\hat{\mu}_{ijk}$ ,  $\bar{\mu}_{ij}$  και  $\bar{\mu}_{ijk}$ , που ορίστηκαν στην παράγραφο 4.2, και την «πραγματική» τάση. Επίσης συζητιέται η σχέση των «εξωτερικών φορτίων»  $\tilde{P}_i$ ,  $\hat{P}_i$ ,  $\bar{P}_i$ ,  $\tilde{R}_i$ ,  $\hat{R}_i$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{Q}_i$ ,  $\tilde{E}_i$ ,  $\hat{E}_i$ ,  $\bar{E}_i$  και των «πραγματικών» φορτίων.

Έστω  $\sigma_{ij}$  ο πραγματικός τανυστής της τάσης κατά Cauchy και  $\mu_{ij}$  ο τανυστής της τάσης ζεύγους. Σε μία απειροστή επιφάνεια με  $\mathbf{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, το διάνυσμα τάσης,  $\mathbf{t}$ , και το διάνυσμα τάσης ζεύγους,  $\mathbf{m}$ , συνδέονται με τα  $\sigma$  και  $\mu$  από τις σχέσεις:

$$t_i = n_j \sigma_{ji} \quad \text{και} \quad m_i = n_j \mu_{ji}. \quad (38)$$

Αν  $f_i$  είναι η μαζική δύναμη και  $M_i = e_{ijk} \Phi_{[jk]}$  η μαζική ροπή ανά μονάδα όγκου, προκύπτουν από τις αρχές διατήρησης της ορμής και της στροφορμής οι ακόλουθες εκφράσεις,

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad \text{και} \quad \sigma_{[ij]} + \frac{1}{2} \mu_{pk,p} e_{ijk} + \Phi_{[ij]} = 0, \quad (39)$$

όπου οι αδρανειακοί όροι έχουν αγνοηθεί.

Σύμφωνα με τους Mindlin και Eshel [31] η έκφραση για τη μεταβολή του έργου που προκαλούν οι «εξωτερικές δυνάμεις» είναι

$$\delta W^{ext} = \int_V \left( f_i \delta u_i + \Phi_{[ij]} \delta \Omega_{ji} + \Phi_{(ij)} \delta \varepsilon_{ji} \right) dV + \int_S \left[ t_i \delta u_i + m_i \delta \omega_i + n_i \bar{\mu}_{ijk} \delta \varepsilon_{jk} \right] dV. \quad (40)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι κάθε ολοκληρώματος είναι δυνατόν να γραφούν και ως

$$\Phi_{[ij]} \delta \Omega_{ji} + \Phi_{(ij)} \delta \varepsilon_{ji} = \Phi_{ij} \delta u_{j,i} \quad \text{και} \quad m_i \delta \omega_i + n_i \bar{\mu}_{ijk} \delta \varepsilon_{jk} = T_{[ij]} \delta \Omega_{ji} + T_{(ij)} \delta \varepsilon_{ji} = T_{ij} \delta u_{j,i} \quad (41)$$

όπου  $T_{ij}^S$  είναι η επιφανειακή διπλή δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στην  $S$  τέτοια ώστε,

$$T_{ij}^S \equiv T_{(ij)} = n_k \bar{\mu}_{kij} \quad \text{και} \quad T_{ij}^A = T_{[ij]} = \frac{1}{2} e_{ijk} m_k = \frac{1}{2} e_{ijk} n_p \mu_{pk}. \quad (42)$$

Θέτοντας το  $\delta W^{ext}$  ίσο με  $\delta W^{int} = \int_V \left( \sigma_{ij}^{(0)} \delta \varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij} \delta \bar{\kappa}_{ij} + \bar{\bar{\mu}}_{ijk} \delta \bar{\bar{\kappa}}_{ijk} \right) dV$ , οι Mindlin και Eshel /31/

απέδειξαν πως η πραγματική τάση συνδέεται με τις συζυγείς ποσότητες  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}$ ,  $\hat{\mu}_{ijk}$ ,  $\bar{\mu}_{ij}$  και  $\bar{\bar{\mu}}_{ijk}$  με τις σχέσεις

$$\sigma_{(ij)} = \sigma_{ij}^{(0)} - \frac{1}{3} (\tilde{\mu}_{ijk,k} + \tilde{\mu}_{jki,k} + \tilde{\mu}_{kij,k}) - \Phi_{(ij)} = \quad (43)$$

$$= \sigma_{ij}^{(0)} - \frac{1}{3} (\hat{\mu}_{ijk,k} + \hat{\mu}_{jki,k} + \hat{\mu}_{kij,k}) - \Phi_{(ij)} = \quad (44)$$

$$= \sigma_{ij}^{(0)} - \bar{\mu}_{kij,k} - \Phi_{(ij)}, \quad (45)$$

$$\sigma_{[ij]} = -\frac{4}{3} \tilde{\mu}_{k[ij],k} - \Phi_{[ij]} = \quad (46)$$

$$= -\frac{2}{3} \hat{\mu}_{[ij]k,k} e_{kij} - \Phi_{[ij]} = \quad (47)$$

$$= -\frac{1}{2} e_{ijk} \bar{\mu}_{pk,p} - \Phi_{[ij]}, \quad (48)$$

και η πραγματική τάση ζεύγους είναι

$$\mu_{ij} = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_{ikp} e_{jkp} = \frac{2}{3} \hat{\mu}_{kpi} e_{jkp} = \bar{\mu}_{ij}. \quad (49)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία σχέση, η επιφανειακή διπλή δύναμη μπορεί να γραφεί ως

$$T_{ij} = n_k \bar{\mu}_{kij} + \frac{1}{2} e_{ijk} n_p \bar{\mu}_{pk}. \quad (50)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των  $\bar{P}_i$ ,  $\bar{Q}_i^t$ ,  $\bar{R}$  και  $\bar{E}_i$  από τις (31)-(34) και τις εξισώσεις (45), (48) και (49) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις που συνδέουν τα «μαθηματικά» φορτία ( $\bar{P}_i$ ,  $\bar{Q}_i^t$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{E}_i$ ) με τα πραγματικά ( $t_i$ ,  $m_i$ ,  $T_{(ij)}$ ).

$$\bar{P}_i = t_i - \frac{1}{2} e_{ijk} D_k (m_p n_p n_j) + [(D_p n_p) n_j - D_j] (T_{(ji)} + n_k T_{(kj)} n_i), \quad (51)$$

$$\bar{Q}_i^t = m_i^t + 2e_{qpi} n_q n_j T_{(pj)}, \quad (52)$$

$$\bar{R} = n_i T_{(ij)} n_j, \quad (53)$$

$$\bar{E}_i = \left[ \left[ \frac{1}{2} s_i m_j n_j + \ell_j (T_{(ij)} + n_i T_{(jk)} n_k) \right] \right]. \quad (54)$$

Επίσης, όπως απέδειξαν οι Mindlin και Eshel /31/,

$$\tilde{P}_i = \hat{P}_i = \bar{P}_i + \frac{1}{2} n_j e_{jkp} D_k (\bar{Q}_p^t n_i), \quad (55)$$

$$\tilde{R}_i = \hat{R}_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \bar{Q}_j^t n_k + \bar{R} n_i, \quad (56)$$

$$\tilde{E}_i = \hat{E}_i = \bar{E}_i - \frac{1}{2} s_k [[\bar{Q}_k^t n_i]]. \quad (57)$$

Χρησιμοποιώντας τανυστικό συμβολισμό, οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν ως:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{t} - \frac{1}{2} \mathbf{D} \times [(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + [(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{D}] \cdot (\mathbf{T}^S + \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^S \mathbf{n}), \quad (58)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^t = \mathbf{m}^t + 2\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^S), \quad (59)$$

$$\bar{R} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^S \cdot \mathbf{n}, \quad (60)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = [[\frac{1}{2}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{s} + \ell \cdot \mathbf{T}^S (\mathbf{I} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})]], \quad (61)$$

και

$$\tilde{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{D} (\bar{\mathbf{Q}}^t \mathbf{n}), \quad (62)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{Q}}^t \times \mathbf{n} + \bar{R} \mathbf{n}, \quad (63)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot [[\bar{\mathbf{Q}}^t \mathbf{n}]]. \quad (64)$$

Στα πραγματικά προβλήματα δίδονται οι πραγματικές δυνάμεις,  $f_i$  και  $\Phi_{ij}$  στον όγκο και τα πραγματικά φορτία  $t_i$ ,  $m_i$  και  $T_{(ij)}$  στην επιφάνεια. Ωστόσο τα πραγματικά φορτία δεν εμφανίζονται από μόνα τους στις συνοριακές συνθήκες αλλά εμφανίζεται ένας συνδυασμός τους, τα «μαθηματικά» φορτία, σύμφωνα με τις σχέσεις (51)-(54). Εφόσον οριστούν τα «μαθηματικά» φορτία μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε από τους τρεις τύπους της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως από τις (55)-(57). Στη συνέχεια οι πραγματικές τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις (43)-(49). Ωστόσο στις υπολογιστικές τεχνικές ο υπολογισμός των πραγματικών τάσεων από τις προαναφερθείσες σχέσεις για τις θεωρίες τύπου I και II απαιτεί επιπλέον υπολογισμούς επί των αποτελεσμάτων (υπολογισμό των  $\tilde{\mu}_{ijk,k}, \hat{\mu}_{ijk,k}$ ) και γι αυτό το λόγο μειώνει την ακρίβεια της αριθμητικής μεθόδου. Θα πρέπει να τονιστεί πως μόνο στη θεωρία τύπου III οι τάσεις που υπολογίζονται από τις καταστατικές εξισώσεις συμπίπτουν με τις πραγματικές τάσεις.



#### 4.5. Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III

Ένα πρόβλημα συνοριακής τιμής τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως, είναι δυνατόν να επιλυθεί με καθένα από τους τρεις ισοδύναμους τύπους που συζητήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους. Στη συνέχεια περιγράφεται η θεωρία τύπου III, ενώ στο Παράρτημα III αναπτύσσεται συνοπτικά η θεωρία τύπου I.

##### 4.5.1. Το πρόβλημα συνοριακής τιμής.

Το πρόβλημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \bar{\sigma}_{ij}^{(2)}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2} \bar{\mu}_{lk,l} e_{kij} - \bar{\mu}_{kij,k}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad \omega_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \Leftrightarrow u_{[i,j]} = -e_{ijk} \omega_k, \quad (3)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i}, \quad \bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i}), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ji}^{(0)}, \quad \bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}, \quad \bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\bar{\kappa}}_{ijk}}, \quad (5)$$

και τις συνοριακές συνθήκες:

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην } \Gamma_u, \quad (6)$$

$$\sigma_{ji} n_j - \frac{1}{2} \bar{\mu}_{,k}^n n_j e_{ijk} + [(D_p n_p) n_k - D_k] (n_j \bar{\mu}_{jki} + n_i n_j n_l \bar{\mu}_{jlk}) = \bar{P}_i \quad \text{στην } \Gamma_P, \quad (7)$$

$$\omega_i^t = \tilde{\omega}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_\omega, \quad (8)$$

$$n_j \bar{\mu}_{ji}^t + 2n_p n_j n_k \bar{\mu}_{jkl} e_{pli} = \bar{Q}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_Q, \quad (9)$$

$$n_i n_j \varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon} \quad \text{στην } \Gamma_\varepsilon, \quad (10)$$

$$n_i n_j n_k \bar{\mu}_{ijk} = \bar{R} \quad \text{στην } \Gamma_R, \quad (11)$$

$$u_i = \tilde{u}_i^\alpha \quad \text{στην } C_u^\alpha, \quad (12)$$

$$[[\frac{1}{2} s_i \bar{\mu}^n + \ell_j n_k (\bar{\mu}_{kji} + n_i n_l \bar{\mu}_{lkj})]] = \bar{E}_i \quad \text{στην } C_E^\alpha, \quad (13)$$

όπου  $\bar{\mu}^n = n_i n_j \bar{\mu}_{ij}$ ,  $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{P}}, \bar{\omega}^t, \bar{\mathbf{Q}}^t, \bar{\varepsilon}, \bar{R}, \bar{\mathbf{u}}^\alpha, \bar{\mathbf{E}}^\alpha)$  γνωστές συναρτήσεις,  $\Gamma_u \cup \Gamma_P = \Gamma_\omega \cup \Gamma_Q = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_R = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_P = \Gamma_\omega \cap \Gamma_Q = \Gamma_\varepsilon \cap \Gamma_R = \emptyset$ ,  $C_u^\alpha \cup C_E^\alpha = C^\alpha$  και  $C_u^\alpha \cap C_E^\alpha = \emptyset$ .

Υπενθυμίζεται πως αν παραλειφθούν οι όροι που περιέχουν τα  $\bar{\kappa}$  από το  $\bar{W}$ , τεθεί  $\bar{\mu} = \mathbf{0}$  και  $\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_R = \emptyset$ , τότε προκύπτει το πρόβλημα συνοριακής τιμής της «μικροπολικής ελαστικότητας».

Οι συνιστώσες των κινηματικών μεταβλητών που είναι δυνατόν να περιγραφούν σε μία επιφάνεια είναι δώδεκα, δηλαδή οι  $u_i, \omega_i, \varepsilon_{ij}$  ( $i=1,2,3$ ). Ωστόσο μόνο έξι από αυτές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Πράγματι, αν σε μία επιφάνεια είναι γνωστές οι συνιστώσες της μετατόπισης,  $u_i$ , τότε προκύπτει από αυτές το κάθετο μέρος,  $n_i \omega_i$ , του διανύσματος στροφής,  $\omega_i$ , καθώς και όλες οι συνιστώσες της παραμόρφωσης,  $\varepsilon_{ij}$ , εκτός από το κάθετο μέρος αυτής,  $\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ik} n_k n_j$ . Οι συνοριακές συνθήκες περιγράφονται ανάλογα.

#### 4.5.2. Ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών.

Στη συνέχεια αναπτύσσεται η ολοκληρωματική διατύπωση του προβλήματος, όπου οι ποσότητες  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  και  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$  θεωρούνται ως άγνωστοι. Συγκεκριμένα οι ποσότητες  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  και  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$  θεωρούνται ως ανεξάρτητες μεταβλητές και η μεταξύ τους σχέση περιγράφεται από τις κατάλληλες συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές είναι:

- i) οι κινηματικές εξισώσεις  $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k$  στον όγκο αναφοράς,
- ii) η έκφραση για το εφαπτομενικό μέρος του  $\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k$  στην επιφάνεια του σώματος, δηλαδή,

$$D_j u_i = (\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k)^t = \varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k - \varepsilon_{ik} n_k n_j + e_{ipk} \omega_k n_p n_j \quad \text{στην } S. \quad (14)$$

Στην ολοκληρωματική διατύπωση οι παρακάτω εξισώσεις καθορίζονται με τη μορφή ολοκληρώματος:

- η εξίσωση ισορροπίας (1) και οι συνοριακές συνθήκες (7) και (13),
- η σχέση που συνδέει τα  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^{(2)}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\mu}}_{ij}$  και  $\bar{\boldsymbol{\mu}}_{ijk}$  (2) και οι συνοριακές συνθήκες (9) και (11),
- η κινηματική σχέση  $u_{i,j} = \varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k$  στον όγκο  $\Omega$ , και
- η συνθήκη  $D_j u_i = (\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k)^t$  στην  $S$ .

Με βάση τα παραπάνω η εναλλακτική διατύπωση του προβλήματος είναι η ακόλουθη. Να βρεθούν οι ποσότητες  $\mathbf{u} \in H^2$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^2$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in H^2$  και  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \in H^1$  τέτοιες ώστε:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i) u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \left\{ \bar{P}_i - \sigma_{ji} n_j + \frac{1}{2} \bar{\mu}_{,k}^n n_j e_{ijk} - [(D_p n_p) n_k - D_k] (n_j \bar{\mu}_{jki} + n_i n_j n_l \bar{\mu}_{jlk}) \right\} u_i^* dS +$$

$$+ \sum_{\alpha} \oint_{C_E^\alpha} \left\{ \bar{E}_i - \left[ \frac{1}{2} s_i \bar{\mu}^n + \ell_j (n_k \bar{\mu}_{kji} + n_i n_k n_l \bar{\mu}_{lkj}) \right] \right\} u_i^* ds = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in U_0, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} (e_{kij} \bar{\sigma}_{[ij]}^{(2)} + \bar{\mu}_{lk,l}) \omega_k^* d\Omega + \int_{\Gamma_Q} (\bar{Q}_k^t - n_j \bar{\mu}_{jk}^t - 2 n_p n_j n_i \bar{\mu}_{jil} e_{plk}) \omega_k^* dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\omega}^* \in W_0, \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\sigma}_{(ij)}^{(2)} + \bar{\mu}_{ijl,l}) \varepsilon_{ji}^* d\Omega + \int_{\Gamma_R} (\bar{R} - n_k n_i n_m \bar{\mu}_{klm}) n_i n_j \varepsilon_{ij}^* dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}^* \in V_0, \quad (17)$$

$$\int_{\Omega} [u_{i,j} - (\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k)] \bar{\sigma}_{ji}^{(2)*} d\Omega = 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \in L^2, \quad (18)$$

$$\int_{\partial\Omega} [D_j u_i - (\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k - \varepsilon_{ik} n_k n_j + e_{ipk} \omega_k n_p n_j)] X_{ij}^* dS = 0 \quad \forall \mathbf{X}^* \in L^2 \quad (19)$$

και

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην } \Gamma_u, \quad (20)$$

$$\omega_i^t = \tilde{\omega}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_\omega, \quad (21)$$

$$u_i = \tilde{u}_i^\alpha \quad \text{στην } C_u^\alpha, \quad (22)$$

όπου

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}) = \sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) + \bar{\sigma}_{ij}^{(2)}, \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}, \quad \bar{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ijk}}, \quad \bar{W} = \bar{W}(\varepsilon_{ij}, \bar{\kappa}_{ij}, \bar{\kappa}_{ijk}), \quad (24)$$

$$\bar{\kappa}_{ij}(\boldsymbol{\omega}) = \omega_{j,i}, \quad \bar{\kappa}_{ijk}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{3} (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}), \quad (25)$$

και

$$U_0 = \left\{ \mathbf{u}^* \mid \mathbf{u}^* \in L^2, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_u \text{ και στην } C_u^\alpha \right\}, \quad (26)$$

$$W_0 = \left\{ \boldsymbol{\omega}^* \mid \boldsymbol{\omega}^* \in L^2, \quad \boldsymbol{\omega}^{*t} = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_\omega \right\}, \quad (27)$$

$$V_0 = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^* \mid \boldsymbol{\varepsilon}^* \in L^2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*n} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ στην } \Gamma_\varepsilon \right\}. \quad (28)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιείται το θεώρημα του Green στις εξισώσεις (15)-(17), διατυπώνεται ξανά η εξίσωση (19) και αναπτύσσεται η ασθενής μορφή του προβλήματος.

### Εξίσωση (15)

Όπως αποδεικνύεται στο Παράρτημα Ι,

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [(D_p n_p) n_k - D_k] (n_j \bar{\mu}_{jki} + n_i n_j n_l \bar{\mu}_{jlk}) \right\} u_i^* dS =$$

$$\int_{\partial\Omega} (n_j \bar{\mu}_{jki} + n_i n_j n_l \bar{\mu}_{jlk}) D_k u_i^* dS - \sum_{\alpha} \oint_{C_E^\alpha} \left[ \ell_j (n_k \bar{\mu}_{kji} + n_i n_k n_l \bar{\mu}_{lkj}) \right] u_i^* ds. \quad (29)$$

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.2 ισχύει:

$$u_{i,k} = D_k u_i + n_k n_p D_i u_p + 2n_k n_p u_{[i,p]} + n_i n_k n_p n_q u_{(p,q)}.$$

Οπότε, για αυθαίρετο  $\mathbf{A}$ , ισχύει η σχέση

$$A_{ik} u_{i,k} = A_{ik} D_k u_i + \underbrace{A_{ik} n_k n_p D_i u_p}_{A_{ik} n_i n_p D_k u_i} + 2A_{ik} n_k n_p u_{[i,p]} + A_{ik} n_i n_k n_p n_q u_{(p,q)}$$

$$\text{ή } A_{ik} u_{i,k} = (A_{ik} + A_{kl} n_l n_i) D_k u_i + 2A_{ik} n_k n_p u_{[i,p]} + A_{ik} n_i n_k n_p n_q u_{(p,q)},$$

δηλαδή

$$(A_{ik} + n_i A_{kl} n_l) D_k u_i = A_{ik} u_{i,k} - 2A_{ik} n_k n_p u_{[i,p]} - A_{ik} n_i n_k n_p n_q u_{(p,q)}. \quad (30)$$

Άρα, αν  $n_k \bar{\mu}_{kij} = T_{(ij)}$  στην (29) και χρησιμοποιηθεί η (30) με  $A_{ij} = T_{(ij)}$  προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \left\{ [(D_p n_p) n_k - D_k] (T_{(ki)} + n_i n_l T_{(lk)}) \right\} u_i^* dS = \\ = \int_{\partial\Omega} (T_{(ik)} u_{i,k}^* - 2T_{(ik)} n_k n_p u_{[i,p]}^* - T_{(ik)} n_i n_k n_p n_q u_{(p,q)}^*) dS - \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} [[\ell_j (T_{(ji)} + n_i n_k T_{(kj)})]] u_i^* ds \end{aligned} \quad (31)$$

Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί από το θεώρημα του Stokes ότι

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \bar{\mu}_{,k}^n n_j e_{ijk} u_i^* dS = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \nabla \bar{\mu}^n)_i u_i^* dS = \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} \frac{1}{2} [[\bar{\mu}^n]] u_i^* s_i ds - \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right) dS. \quad (32)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (31), (32) και ότι  $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$  στην  $\Gamma_u$  και στην  $C_u^\alpha$  η (15) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + f_i) u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \bar{P}_i u_i^* dS - \int_{\partial\Omega} \sigma_{ji} n_j u_i^* dS - \int_{\partial\Omega} T_{(jk)} u_{(j,k)}^* dS + \int_{\partial\Omega} 2n_j T_{(jp)} n_q u_{[p,q]}^* dS + \\ + \int_{\partial\Omega} n_j n_k T_{(jk)} n_p n_q u_{(p,q)}^* dS - \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right) dS + \sum_{\alpha} \oint_{C_E^\alpha} \bar{E}_i u_i^* ds = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες στην προηγούμενη εξίσωση καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ji} u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_{(jk)} u_{(j,k)}^* dS - \int_{\partial\Omega} 2n_j T_{(jp)} n_q u_{[p,q]}^* dS - \int_{\partial\Omega} n_j n_k T_{(jk)} n_p n_q u_{(p,q)}^* dS + \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right) dS = \\ = \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \bar{P}_i u_i^* dS + \sum_{\alpha} \oint_{C_E^\alpha} \bar{E}_i u_i^* ds. \end{aligned} \quad (34)$$

### Εξίσωση (16)

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $n_j \bar{\mu}'_{jk} \omega_k^* = n_j \bar{\mu}'_{jk} \omega_k^{*t} = n_j \bar{\mu}_{jk} \omega_k^* - n_j \bar{\mu}_{jk} n_k n_i \omega_i^*$ ,  $\boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{0}$  στην  $\Gamma_\omega$ ,

$n_k e_{ikp} \omega_p^{*t} = n_k e_{ikp} \omega_p^*$  και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, μπορούμε να γράψουμε την (16)

με τη μορφή

$$-\int_{\Omega} e_{kij} \bar{\sigma}_{[ij]}^{(2)} \omega_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mu}_{ij} \kappa_{ij}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^n \omega^{*n} dS - \int_{\partial\Omega} 2n_j T_{(ij)} n_k e_{ikp} \omega_p^* dS = \int_{\Gamma_Q} \bar{Q}_k^t \omega_k^* dS \quad (35)$$

όπου  $\bar{\kappa}_{ij}^* = \omega_{j,i}^*$ .

### Εξίσωση (17)

Ακόμη, επειδή  $\varepsilon^{*n} = 0$  στην  $\Gamma_\varepsilon$ , η (17) λαμβάνει τη μορφή

$$\int_{\Omega} \left( \bar{\sigma}_{(ij)}^{(2)} + \bar{\mu}_{ij,l} \right) \varepsilon_{ji}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( \bar{R} - n_k n_i n_m \bar{\mu}_{klm} \right) n_i n_j \varepsilon_{ij}^* dS = 0. \quad (36)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες στην προηγούμενη εξίσωση προκύπτει

$$\int_{\Omega} \left( -\bar{\sigma}_{(ij)}^{(2)} \varepsilon_{ji}^* + \bar{\mu}_{kij} \bar{\kappa}_{kij}^* \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left( -T_{(ij)} \varepsilon_{ij}^* + n_i n_j T_{(ij)} n_p n_q \varepsilon_{pq}^* \right) dS = \int_{\Gamma_R} \bar{R} n_i n_j \varepsilon_{ij}^* dS, \quad (37)$$

όπου  $\bar{\kappa}_{ijk}^* = \varepsilon_{ij,k}^*$ .

### Εξίσωση (19)

Τέλος, θέτοντας  $X_{ij}^* = T_{(ij)}^* + n_i n_k T_{(kj)}^* - \frac{1}{2} e_{ijk} n_k \bar{\mu}^{*n}$  στην (19) ( $X_{ij}^*$ ,  $T_{(ij)}^*$  και  $\bar{\mu}^{*n}$  είναι αυθαίρετες ποσότητες) προκύπτει:

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \left( u_{(i,j)} - 2n_j n_k u_{[i,k]} - n_i n_j n_p n_q u_{(p,q)} \right) - \left( \varepsilon_{ij} + 2n_j n_k e_{ikp} \omega_p - n_i n_j n_p n_q \varepsilon_{pq} \right) \right] T_{(ij)}^* dS = 0, \quad (38)$$

και

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n - \omega^n \right] \bar{\mu}^{*n} dS = 0, \quad (39)$$

που πρέπει να ισχύει για κάθε  $T_{(ij)}^* \in L^2$  και κάθε  $\bar{\mu}^{*n} \in L^2$ .

Επομένως, η ασθενής διατύπωση του προβλήματος είναι: Να βρεθούν οι ποσότητες  $\mathbf{u} \in H^1$ ,  $\varepsilon \in H^1$ ,  $\omega \in H^1$  και  $\bar{\sigma}^{(2)} \in L^2$  τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ji}^{(0)} + \bar{\sigma}_{ji}^{(2)} \right) u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_{(ij)} \left[ u_{(i,j)}^* - 2n_i n_k u_{[j,k]}^* - n_i n_j n_p n_q u_{(p,q)}^* \right] dS + \int_{\partial\Omega} \bar{\mu}^n \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}^* \right)^n dS = \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_P} \bar{P}_i u_i^* dS + \sum_{\alpha \in C_E^\alpha} \oint \bar{E}_i u_i^* ds \quad \forall \mathbf{u}^* \in U, \quad (40)$$

$$\int_{\Omega} \left[ -e_{kij} \bar{\sigma}_{[ij]}^{(2)} \omega_k^* + \bar{\mu}_{ij} \bar{\kappa}_{ij}^* \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left[ \bar{\mu}^n \omega^{*n} + 2n_j T_{(ij)} n_k e_{ikp} \omega_p^* \right] dS = \int_{\Gamma_Q} \bar{Q}_k^i \omega_k^* dS \quad \forall \omega^* \in W, \quad (41)$$

$$\int_{\Omega} \left( -\bar{\sigma}_{(ij)}^{(2)} \varepsilon_{ji}^* + \bar{\mu}_{kij} \bar{\kappa}_{kij}^* \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} T_{(ij)} \left( -\varepsilon_{ij}^* + n_i n_j n_p n_q \varepsilon_{pq}^* \right) dS = \int_{\Gamma_R} \bar{R} n_i n_j \varepsilon_{ij}^* dS \quad \forall \varepsilon^* \in V, \quad (42)$$

$$\int_{\Omega} \left[ u_{i,j} - \left( \varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k \right) \right] \bar{\sigma}_{ji}^{(2)*} d\Omega = 0 \quad \forall \bar{\sigma}^* \in L, \quad (43)$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \left( u_{(i,j)} - 2n_j n_k u_{[i,k]} - n_i n_j n_p n_q u_{(p,q)} \right) - \left( \varepsilon_{ij} + 2n_j n_k e_{ikl} \omega_l - n_i n_j n_p n_q \varepsilon_{pq} \right) \right] T_{(ij)}^* dS = 0$$

$$\forall \mathbf{T}^{*T} = \mathbf{T}^* \in L^2, \quad (44)$$

$$\int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n - \omega^n \right] \bar{\mu}^{*n} dS = 0$$

$$\forall \bar{\boldsymbol{\mu}}^* \in L^2 \quad (45)$$

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην } \Gamma_u, \quad (46)$$

$$\omega_i^t = \tilde{\omega}_i^t \quad \text{στην } \Gamma_\omega, \quad (47)$$

$$u_i = \tilde{u}_i^\alpha \quad \text{στην } C_u^\alpha, \quad (48)$$

όπου

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}, \quad \bar{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ijk}}, \quad \bar{W} = \bar{W}(\varepsilon_{ij}, \bar{\kappa}_{ij}, \bar{\kappa}_{ijk}),$$

$$\bar{\mu}^n = n_i n_j \bar{\mu}_{ij}, \quad T_{(ij)} = n_k \bar{\mu}_{kij}, \quad \bar{\kappa}_{ij}^* = \omega_{j,i}^*, \quad \bar{\kappa}_{ijk}^* = \frac{1}{3} (\varepsilon_{ij,k}^* + \varepsilon_{jk,i}^* + \varepsilon_{ki,j}^*)$$

και

$$U = \left\{ \mathbf{u}^* \mid \mathbf{u}^* \in H^1, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_u \text{ και στην } C_u^\alpha \right\}, \quad (49)$$

$$W = \left\{ \boldsymbol{\omega}^* \mid \boldsymbol{\omega}^* \in H^1, \quad \boldsymbol{\omega}^{*t} = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_\omega \right\}, \quad (50)$$

$$V = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^* \mid \boldsymbol{\varepsilon}^* \in H^1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{*n} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ στην } \Gamma_\varepsilon \right\}. \quad (51)$$

Οι υπολογιστικές τεχνικές που αναπτύσσονται στη συνέχεια βασίζονται στην παραπάνω ασθενή μορφή. Οι ποσότητες  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  και  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$  είναι οι κομβικοί άγνωστοι και η πραγματική τάση και η πραγματική τάση ζεύγους υπολογίζονται από τις εξισώσεις

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(2)} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial u_{(i,j)}} + \sigma_{ij}^{(2)} \quad \text{και} \quad \mu_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}} \quad (52)$$

όπου θεωρείται ότι  $\Phi_{ij} = 0$ .

Θα πρέπει να σημειωθεί πως στην ειδική περίπτωση ενός διδιάστατου προβλήματος είναι

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad \text{και} \quad \mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2, \quad (53)$$

όπου όλες οι συνιστώσες αναφέρονται στους καρτεσιανούς άξονες  $Ox_1 - Ox_2$  που ορίζουν το επίπεδο του προβλήματος, και  $\mathbf{e}_1$  και  $\mathbf{e}_2$  είναι τα αντίστοιχα διανύσματα βάσης. Σε αυτή την περίπτωση

$$\frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}) \mathbf{e}_3 \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (54)$$

όπου  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$  και η εξίσωση (45) ικανοποιείται αυτομάτως.

Το πρόβλημα συνοριακής τιμής στις τρεις διαστάσεις μπορεί να διατυπωθεί και με τη μορφή  $\delta\Pi = 0$ , όπου  $\Pi$  είναι το διαφορικό

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}) &= \int_{\Omega} \bar{W}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\omega}), \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\varepsilon})) dV + \int_{\Omega} [u_{i,j} - (\varepsilon_{ij} - e_{ijk}\omega_k)] \bar{\sigma}_{ji}^{(2)} dV + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[ (u_{(i,j)} - 2n_j n_k u_{[i,k]} - n_i n_j n_p n_q u_{(p,q)}) - (\varepsilon_{ij} + 2n_j n_k e_{ikl} \omega_l - n_i n_j n_p n_q \varepsilon_{pq}) \right] T_{(ij)}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}) dS + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n - \omega^n \right] \bar{\mu}^n dS + \\ &- \int_{\Omega} f_i u_i dV - \int_{\Gamma_P} \bar{P}_i u_i dS - \int_{\Gamma_Q} \bar{Q}_i^t \omega_i dS - \int_{\Gamma_R} \bar{R} n_j \varepsilon_{ij} dS - \sum_{\alpha} \oint_{C_E^{\alpha}} \bar{E}_i u_i ds, \end{aligned} \quad (55)$$

όπου  $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$ ,  $\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i}$ ,  $\bar{\kappa}_{ijk} = u_{(k,ij)}$ ,  $\bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}$ ,  $\bar{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ijk}}$ ,  $\delta u_i = 0$  στην  $\Gamma_u$ ,  $\delta \omega = 0$  στην

$\Gamma_{\omega}$  και  $n_j \delta \varepsilon_{ij} = 0$  στην  $\Gamma_{\varepsilon}$ .

Στη διδιάστατη περίπτωση ο τέταρτος όρος μηδενίζεται και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην  $C_E^{\alpha}$  αντικαθίσταται από την έκφραση

$$\sum_{\alpha} \bar{E}_i u_i, \quad (56)$$

όπου το σύνολο στο  $\alpha$  αναφέρεται σε κάθε γωνία που μπορεί να υπάρχει στο σύνορο του διδιάστατου σώματος.

Από την (55) για  $\bar{\mu}_{ijk} = 0$  και  $\Gamma_{\varepsilon} = \Gamma_R = 0$  προκύπτει η έκφραση για τη μικροπολική θεωρία.

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}) &= \int_{\Omega} \bar{W}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\omega})) dV + \int_{\Omega} [u_{[i,j]} + e_{ijk}\omega_k] \bar{\sigma}_{ji}^{(2)} dV + \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right)^n - \omega^n \right] \bar{\mu}^n dS + \\ &- \int_{\Omega} f_i u_i dV - \int_{\Gamma_P} \bar{P}_i u_i dS - \int_{\Gamma_Q} \bar{Q}_i^t \omega_i dS - \int_{\Gamma_R} \bar{R} n_j \varepsilon_{ij} dS - \sum_{\alpha} \oint_{C_E^{\alpha}} \bar{E}_i u_i ds, \end{aligned} \quad (57)$$

όπου  $\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i}$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^{(2)} = -\bar{\sigma}_{ji}^{(2)}$ ,  $\bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}}$ , και  $\delta u_i = 0$  στην  $\Gamma_u$ ,  $\delta \omega = 0$  στην  $\Gamma_{\omega}$ .

Στη διδιάστατη περίπτωση ο τρίτος όρος μηδενίζεται. Αντίθετα στις τρεις διαστάσεις ο όρος αυτός επιβιώνει και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.

#### 4.6. Εφαρμογές

Στα παραδείγματα που ακολουθούν, θεωρείται το υλικό για το οποίο η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης είναι της μορφής

$$W = \tilde{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) = \hat{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \bar{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\kappa}}, \bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}}),$$

όπου

$$\tilde{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\ell^2}{2} \left[ \lambda \tilde{\kappa}_{ij} \tilde{\kappa}_{ikk} + \mu (\tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{kji}) \right],$$

$$\hat{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\ell^2}{2} (\lambda \hat{\kappa}_{ij} \hat{\kappa}_{ikk} + 2\mu \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{ijk}),$$

$$\bar{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{\kappa}}, \bar{\bar{\boldsymbol{\kappa}}}) = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{kk} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \ell^2 \left[ \frac{2}{9} (\lambda + 3\mu) \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{ij} - \frac{2}{9} \lambda \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{ji} + \frac{1}{2} \lambda \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{kij} + \mu \bar{\kappa}_{ijk} \bar{\kappa}_{ijk} + \frac{2}{3} \lambda e_{ijk} \bar{\kappa}_{ij} \bar{\kappa}_{kpp} \right],$$

οπότε

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij},$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{ijk}} = \frac{\ell^2}{2} \left[ \lambda (\tilde{\kappa}_{ipp} \delta_{jk} + \tilde{\kappa}_{jpp} \delta_{ik}) + \mu (2\tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{kji} + \tilde{\kappa}_{kij}) \right],$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \ell^2 (2\mu \hat{\kappa}_{ijk} + \lambda \hat{\kappa}_{ipp} \delta_{jk}) = \ell^2 (2\mu \varepsilon_{jk,i} + \lambda \varepsilon_{pp,i} \delta_{jk}),$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ij}} = \frac{2\ell^2}{9} \left[ 2(\lambda + 3\mu) \bar{\kappa}_{ij} - 2\lambda \bar{\kappa}_{ji} + 3\lambda e_{ijk} \bar{\kappa}_{kpp} \right],$$

$$\bar{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{\kappa}_{ijk}} = \frac{\ell^2}{9} \left[ 3\lambda (\bar{\kappa}_{ppk} \delta_{ij} + \bar{\kappa}_{ppi} \delta_{jk} + \bar{\kappa}_{ppj} \delta_{ki}) + 18\mu \bar{\kappa}_{ijk} + 2\lambda \bar{\kappa}_{pq} (\delta_{ij} e_{pqk} + \delta_{jk} e_{pqi} + \delta_{ki} e_{pqj}) \right].$$

Στις παραπάνω σχέσεις,  $\mu$  και  $\lambda$  είναι οι σταθερές Lamé και  $\ell$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού.

Αξίζει να σημειωθεί πως αν οριστεί η τάση  $\hat{\sigma}_{ij}^{(2)} = -\hat{\mu}_{kij,k} = \hat{\sigma}_{ji}^{(2)}$  και  $\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} - \hat{\mu}_{kij,k} = \hat{\sigma}_{ji}$ , τότε αποδεικνύεται πως για το παραπάνω καταστατικό μοντέλο ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} - \ell^2 \nabla^2 \sigma_{ij}^{(0)}, \quad \text{όπου} \quad \sigma_{ij}^{(0)} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}.$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση οι Ru και Aifantis **/37/** απέδειξαν πως για δεδομένο πρόβλημα συνοριακής τιμής ( $\Gamma_p = S$ ,  $\Gamma_u = \emptyset$ ), η λύση για την τάση  $\hat{\sigma}_{ij}$  στο πρόβλημα τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως συμπίπτει με την κλασική τάση ( $\ell = 0$ ). Ωστόσο το πεδίο μετατοπίσεων είναι γενικά διαφορετικό.

Για το μοντέλο τύπου κλίσεως που παρουσιάστηκε παραπάνω, έχουν επιλυθεί αναλυτικά διάφορα προβλήματα συνοριακής τιμής (**/15/**, **/22/**). Στη συνέχεια οι υπολογιστικές μέθοδοι που αναπτύχθηκαν χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων συνοριακής τιμής και γίνονται οι συγκρίσεις με τις ακριβείς λύσεις.



#### 4.7. Επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

##### 4.7.1. Ανάπτυξη στοιχείων.

Τα στοιχεία που υποβάλλονται στον έλεγχο συρραφής είναι (Σχήμα 4.1):

- (α) το στοιχείο **III5-28**. Πρόκειται για ισοπαραμετρικό στοιχείο με πέντε κόμβους και εικοσιοκτώ κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \omega_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})$  είναι κομβικοί άγνωστοι στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους, ενώ οι ποσότητες  $(\bar{\sigma}_{11}^{(2)}, \bar{\sigma}_{22}^{(2)}, \bar{\sigma}_{(12)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[12]}^{(2)})$  εμφανίζονται ως κομβικοί άγνωστοι στον κεντρικό κόμβο. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία  $\mathbf{u}$ ,  $\omega_3$  και  $\varepsilon$ , ενώ η ποσότητα  $\bar{\sigma}^{(2)}$  είναι μόνον τμηματικά συνεχής.
- (β) το στοιχείο **III13-70** το οποίο είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο με δεκατρείς κόμβους και εβδομήντα κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \omega_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})$  είναι κομβικοί άγνωστοι στους εννέα κόμβους που βρίσκονται στις πλευρές και στο κέντρο του στοιχείου, ενώ οι ποσότητες  $(\bar{\sigma}_{11}^{(2)}, \bar{\sigma}_{22}^{(2)}, \sigma_{(12)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[12]}^{(2)})$  αποτελούν κομβικούς αγνώστους σε τέσσερις εσωτερικούς κόμβους οι οποίοι αντιστοιχούν στα σημεία  $2 \times 2$  ολοκλήρωσης κατά Gauss. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία  $\mathbf{u}$ ,  $\omega_3$  και  $\varepsilon$ , ενώ η ποσότητα  $\bar{\sigma}^{(2)}$  είναι μόνον τμηματικά συνεχής. Τέλος,
- (γ) το στοιχείο **III9-70**. Είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο με εννέα κόμβους και εβδομήντα κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \omega_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})$  είναι κομβικοί άγνωστοι και στους εννέα κόμβους, ενώ οι ποσότητες  $(\bar{\sigma}_{11}^{(2)}, \bar{\sigma}_{22}^{(2)}, \sigma_{(12)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[12]}^{(2)})$  αποτελούν επιπλέον κομβικούς αγνώστους στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία για όλους τους κομβικούς αγνώστους.

Στην παρούσα περίπτωση το σύστημα εξισώσεων έχει τη μορφή

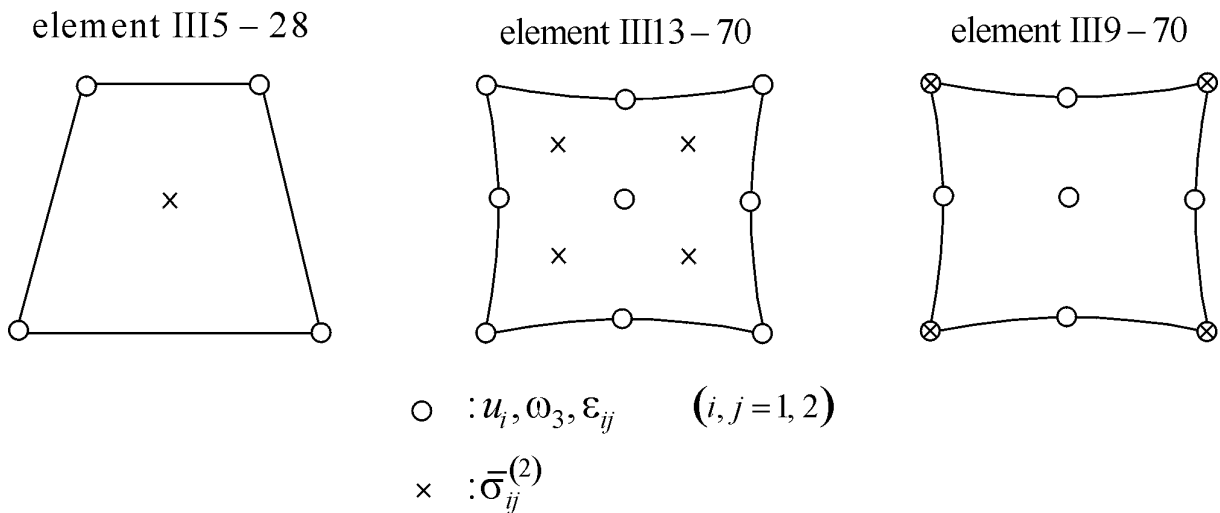
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\omega} & \mathbf{K}_{u\varepsilon} & \mathbf{K}_{u\sigma} \\ \mathbf{K}_{\omega u} & \mathbf{K}_{\omega\omega} & \mathbf{K}_{\omega\varepsilon} & \mathbf{K}_{\omega\sigma} \\ \mathbf{K}_{\varepsilon u} & \mathbf{K}_{\varepsilon\omega} & \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} & \mathbf{K}_{\varepsilon\sigma} \\ \mathbf{K}_{\sigma u} & \mathbf{K}_{\sigma\omega} & \mathbf{K}_{\sigma\varepsilon} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^* \\ \omega^* \\ \varepsilon^* \\ \bar{\sigma}^{(2)*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{Bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{K}]\{\mathbf{d}^*\} = \{\mathbf{F}\}$$

όπου  $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$ ,  $\omega^* = \omega_3^*$ ,  $\varepsilon^* = (\varepsilon_{11}^*, \varepsilon_{22}^*, 2\varepsilon_{12}^*)$  και  $\bar{\sigma}^{(2)*} = (\bar{\sigma}_{11}^{(2)*}, \bar{\sigma}_{22}^{(2)*}, \bar{\sigma}_{(12)}^{(2)*}, \bar{\sigma}_{[12]}^{(2)*})$  είναι οι κομβικοί άγνωστοι.

Ο έλεγχος συρραφής εκτελείται και σε αυτήν την περίπτωση σε μία τετραγωνική περιοχή, η οποία διαιρείται σε  $N \times N$  στοιχεία (Σχήματα 4.2 και 4.3), όπου  $N$  είναι ο αριθμός των στοιχείων ανά διάσταση.

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται /51/ είναι οι:

- (α)  $n_u + n_\omega + n_\varepsilon \geq n_{\bar{\sigma}^{(2)}}$ , όπου  $n_x$  είναι οι μη-δεσμευμένοι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν στον κομβικό άγνωστο  $x$ , και
- (β) δεν υπάρχουν μηδενικές ιδιοτιμές στο μητρώο  $[K]$ , δεδομένου ότι περιγράφονται οι απαραίτητες συνοριακές συνθήκες, ώστε να αποτρέπεται η ολόσωμη κίνηση στερεού σώματος.



**Σχήμα 4.1:** Τύπος πεπερασμένων στοιχείων III5-28, III9-70 και III13-70 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III.

Στην περίπτωση του στοιχείου III5-28 οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται αντιστοιχούν σε πεδία μετατοπίσεων της μορφής

$$u_i = A_i + B_i x_1 + C_i x_2 + D_i x_1 x_2, \quad i = 1, 2$$

ενώ για τα στοιχεία III9-70 και III13-70 της μορφής

$$u_i = A_i + B_i x_1 + C_i x_2 + D_i x_1 x_2 + E_i x_1^2 + F_i x_2^2 + G_i x_1 x_2^2 + H_i x_1^2 x_2 + K_i x_1^2 x_2^2, \quad i = 1, 2$$

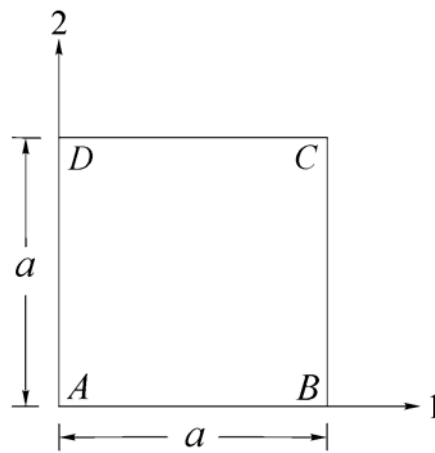
όπου οι συντελεστές  $A_i, B_i, \dots, K_i$  είναι σταθερές.

Οι απαιτούμενες μαζικές δυνάμεις για την ισορροπία,  $f_i = -\sigma_{ji,j}$ , είναι  $f_1 = -D_2(\mu + \lambda)$  και  $f_2 = -D_1(\mu + \lambda)$  για την πρώτη κατανομή, και

$$f_1 = -\lambda(D_2 + 2H_2 x_1 + 2G_2 x_2 + 4K_2 x_1 x_2) - 2(2\mu + \lambda)(E_1 + H_1 x_2 + K_1 x_2^2) + \mu(4\ell^2 K_1 - D_2 - 2F_1 - 2G_1 x_1 - 2H_2 x_1 - 2K_1 x_1^2 - 2G_2 x_2 - 4K_2 x_1 x_2),$$

$$f_2 = -\lambda(D_1 + 2H_1 x_1 + 2G_1 x_2 + 4K_1 x_1 x_2) - 2(2\mu + \lambda)(F_2 + G_2 x_1 + K_2 x_1^2) + \mu(4\ell^2 K_2 - D_1 - 2E_2 - 2H_1 x_1 - 2G_1 x_2 - 2H_2 x_2 - 2K_2 x_2^2 - 4K_1 x_1 x_2)$$

για τη δεύτερη.



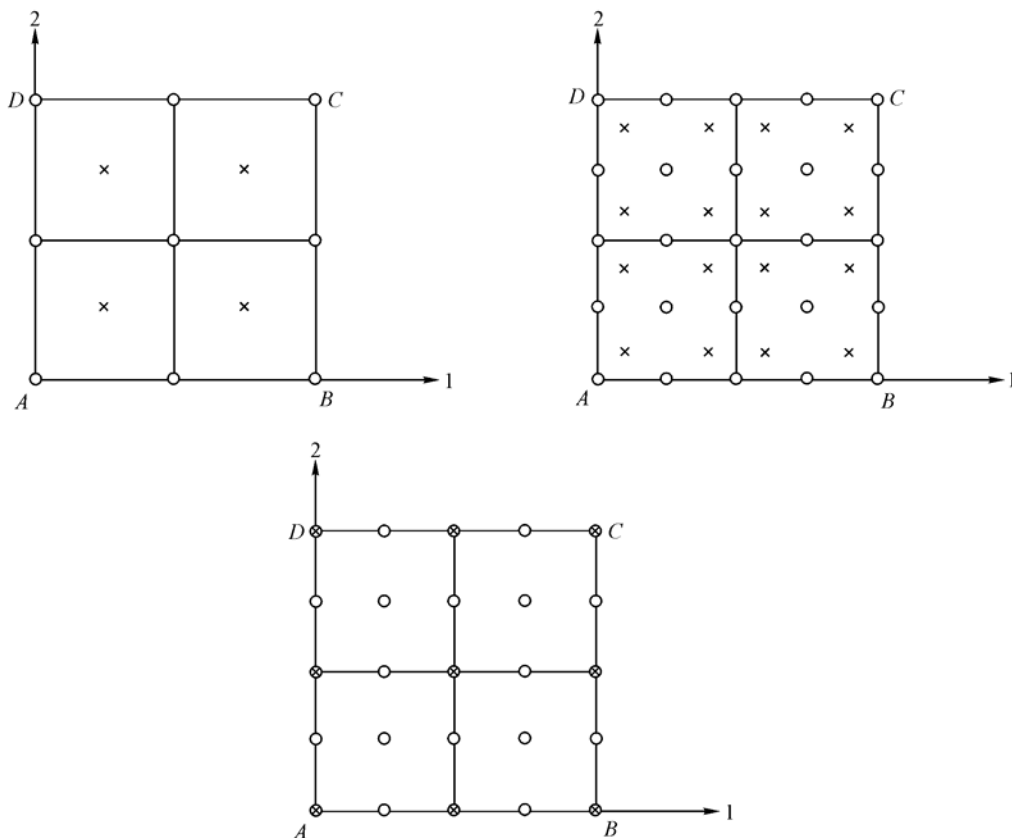
**Σχήμα 4.2:** Η περιοχή στην οποία εκτελείται ο έλεγχος συρραφής.

Συγκεκριμένα, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι

$u_1, u_2, \omega_3, \varepsilon_{22}$  στις πλευρές  $AB$  και  $CD$

$u_1, u_2, \omega_3, \varepsilon_{11}$  στις πλευρές  $BC$  και  $AD$ .

Στο Σχήμα 4.3 απεικονίζεται ο κάναβος που προέρχεται από τη διακριτοποίηση της περιοχής του Σχήματος 4.2 και αναφέρεται στους τρεις τύπους στοιχείων που χρησιμοποιούνται.



**Σχήμα 4.3:** Διακριτοποίηση της περιοχής για το στοιχείο των πέντε, των δεκατριών και των εννέα κόμβων.

Ο υπολογισμός του συστήματος των εξισώσεων που περιγράφουν το πρόβλημα γίνεται με τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά Gauss. Στο στοιχείο III5-28 εφαρμόζεται ολοκλήρωση  $2 \times 2$  κατά Gauss στον όγκο του στοιχείου και χρησιμοποιείται ολοκλήρωση 2-σημείων για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στο σύνορο. Αντίστοιχα, στα στοιχεία III9-70 και III13-70 το ολοκλήρωμα στον όγκο του στοιχείου υπολογίζεται με  $3 \times 3$  ολοκλήρωση κατά Gauss, ενώ για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος εφαρμόζεται ολοκλήρωση 3-σημείων. Το πρόβλημα επιλύεται λαμβάνοντας και μη υπόψη τους συνοριακούς όρους, που επιβάλλουν τη σχέση  $D_j u_i = (\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k)^t$ . Στην πρώτη περίπτωση το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει είναι συμμετρικό, ενώ η μη θεώρηση των συνοριακών όρων οδηγεί σε μη-συμμετρικό μητρώο ακαμψίας. Για την επίλυση και των δύο παραπάνω, τα οποία είναι ζωνικά, χρησιμοποιείται η υπορουτίνα DGBSV της LAPACK. Η μέθοδος υπολογισμού του παρουσιάζεται στο Παράρτημα II, υποκεφάλαιο 2.

Από την ανισότητα  $n_u + n_\omega + n_\varepsilon \geq n_{\sigma^{(2)}}$  προκύπτει ότι η αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη σύγκλισης για κάθε ένα από τα τρία στοιχεία είναι

$$N \geq 1 \text{ για III5-28, III13-70, III9-70,}$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός στοιχείων ανά διάσταση.

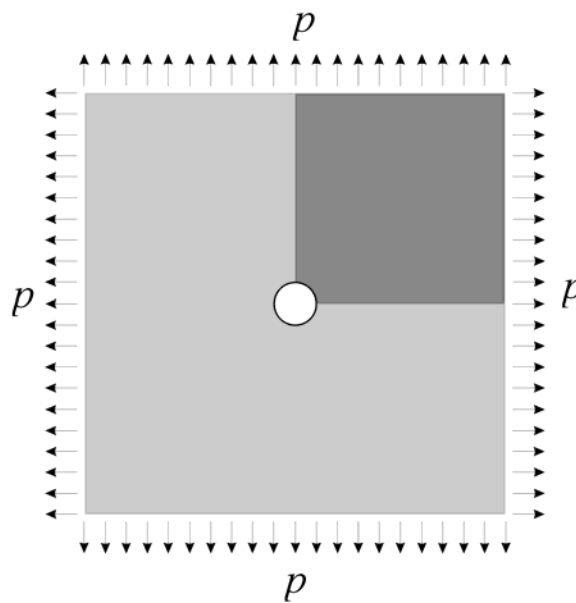
Στη συνέχεια ελέγχεται ο αριθμός των μηδενικών ιδιοτιμών του μητρώου ακαμψίας και τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.1						
Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III-Έλεγχος συρραφής						
Στοιχείο	$N \times N$	$n_u + n_\omega + n_\varepsilon$	$n_{\sigma^{(2)}}$	$n_u + n_\omega + n_\varepsilon \geq n_{\sigma^{(2)}}$	Μηδενικές ιδιοτιμές	Αποτέλεσμα
<b>III5-28</b>	1×1	4	4	✓	<b>1</b>	Απορρίπτεται
<b>III5-28</b>	2×2	18	16	✓	<b>4</b>	Απορρίπτεται
<b>III5-28</b>	4×4	82	64	✓	<b>4</b>	Απορρίπτεται
<b>III13-70</b>	1×1	18	16	✓	<b>5</b>	Απορρίπτεται
<b>III13-70</b>	2×2	82	64	✓	<b>5</b>	Απορρίπτεται
<b>III13-70</b>	4×4	354	256	✓	<b>5</b>	Απορρίπτεται
<b>III9-70</b>	1×1	18	16	✓	<b>10</b>	Απορρίπτεται
<b>III9-70</b>	2×2	82	36	✓	<b>0</b>	Δεκτό
<b>III9-70</b>	4×4	354	100	✓	<b>0</b>	Δεκτό

Το στοιχείο III9-70 δεν παρουσιάζει μηδενικές ιδιοτιμές, αναπαράγει την ακριβή λύση και περνά τον έλεγχο συρραφής (εκτός από την ειδική περίπτωση  $1 \times 1$  για την οποία ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στο Κεφαλαίο 3). Αντιθέτως τα στοιχεία III5-28 και III13-70 παρουσιάζουν μηδενικές ιδιοτιμές και δεν αναπαράγουν την ακριβή λύση. Είναι σημαντικό πως η αδυναμία των δύο τελευταίων στοιχείων εντοπίζεται στη μη δυνατότητα υπολογισμού στους κόμβους των αγνώστων που αντιστοιχούν στις τάσεις  $\bar{\sigma}_{ij}^{(2)}$ . Ωστόσο, λόγω του σφάλματος στρογγυλοποίησης στον υπολογιστή, το μητρώο  $[\mathbf{K}]$  εμφανίζεται ως αριθμητικά αντιστρέψιμο και είναι δυνατόν να υπολογιστούν αριθμητικές λύσεις για τα δύο αυτά στοιχεία. Τα  $\bar{\sigma}_{ij}^{(2)}$  που προκύπτουν δεν είναι τα ακριβή και παρουσιάζουν συμπεριφορά «σκακιέρας». Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέση τιμή στην περιοχή αναφοράς συμπίπτει με την ακριβή λύση. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη της μηδενικής ιδιοτιμής και σε περίπτωση που τα αποτελέσματα λαμβάνονται στο κέντρο του στοιχείου είναι δυνατόν να μην γίνει αντιληπτή.

**4.7.2. Εφαρμογές: το πρόβλημα της άπειρης πλάκας με οπή.**

Στη συνέχεια επιλύεται το πρόβλημα μίας άπειρης πλάκας με μία κυκλική οπή ακτίνας  $a$ , η οποία υποβάλλεται σε διαξονικό εφελκυσμό, Σχήμα 4.4. Για την επίλυση του προβλήματος εφαρμόζεται η θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως. Υπενθυμίζεται πως και οι τρεις τύποι της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως οδηγούν στο ίδιο πεδίο μετατοπίσεων. Ωστόσο ο τύπος III οδηγεί, όπως αναφέρθηκε ήδη, σε άμεσο υπολογισμό των πραγματικών τάσεων και επομένως εφαρμόζεται με ακρίβεια για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στο Παράρτημα III παρουσιάζεται η επίλυση του προβλήματος με τη θεωρία τύπου I.



**Σχήμα 4.4:** Πρόβλημα πλάκας με οπή σε διαξονική φόρτιση.

**4.7.2.1. Η ακριβής λύση του προβλήματος.**

Το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό, επομένως το πεδίο μετατοπίσεων είναι της μορφής

$$u_r = u(r), \quad u_\theta = u_z = 0$$

όπου  $(r, \theta, z)$  είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες με κέντρο των αξόνων στο κέντρο της κυκλικής οπής. Για το μετασχηματισμό των μοναδιαίων διανυσμάτων  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  σε  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  χρησιμοποιούνται οι σχέσεις  $\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2$ . Επίσης ισχύουν,

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad D = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \text{και} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r.$$

Οι μη-μηδενικές κινηματικές μεταβλητές που επιβιώνουν είναι οι

$$\varepsilon_{rr} = \alpha_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \alpha_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \bar{\kappa}_{rrr} = \frac{d^2u}{dr^2} \quad \text{και} \quad \bar{\kappa}_{r\theta\theta} = \bar{\kappa}_{\theta\theta r} = \bar{\kappa}_{\theta r\theta} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}$$

ενώ  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  και  $\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{0}$ .

Οι συζυγείς ποσότητες που προκύπτουν είναι οι

$$\bar{\mu}_{\theta z} = -\bar{\mu}_{z\theta} = \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \equiv \bar{\mu},$$

$$\bar{\mu}_{rrr} = \ell^2 \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{d^2u}{dr^2} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \right] = \bar{\mu}_1,$$

$$\bar{\mu}_{r\theta\theta} = \bar{\mu}_{\theta r\theta} = \bar{\mu}_{\theta\theta r} = \frac{1}{3} \ell^2 \left[ \lambda \frac{d^2u}{dr^2} + (\lambda + 6\mu) \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \right] = \bar{\mu}_2,$$

$$\bar{\mu}_{rzz} = \bar{\mu}_{zzr} = \bar{\mu}_{zrz} = \frac{1}{3} \ell^2 \lambda \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) = \bar{\mu}_3$$

και

$$\sigma_{rr}^{(0)} = (2\mu + \lambda) \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = (2\mu + \lambda) \frac{u}{r} + \lambda \frac{du}{dr},$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \nu (\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) = 2\nu (\mu + \lambda) \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right),$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(2)} = -\frac{1}{3} \ell^2 \left[ (3\lambda + 6\mu) \frac{d^3u}{dr^3} + (4\lambda + 6\mu) \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} - (5\lambda + 12\mu) \left( \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^3} \right) \right]$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} = -\frac{1}{3} \ell^2 \left[ \lambda \frac{d^3u}{dr^3} + (4\lambda + 6\mu) \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} + (\lambda + 6\mu) \left( \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^3} \right) \right] \quad \text{και}$$

$$\bar{\sigma}_{zz}^{(2)} = -\frac{1}{3} \ell^2 \lambda \left( \frac{d^3u}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^3} \right)$$

Από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος της συνοριακής τιμής προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mathbf{Q}}^t = \bar{\mu} \mathbf{e}_z \quad \text{και} \quad \bar{\mathbf{P}} = \left( \sigma_{rr} + \frac{\bar{\mu}_2}{r} \right) \mathbf{e}_r,$$

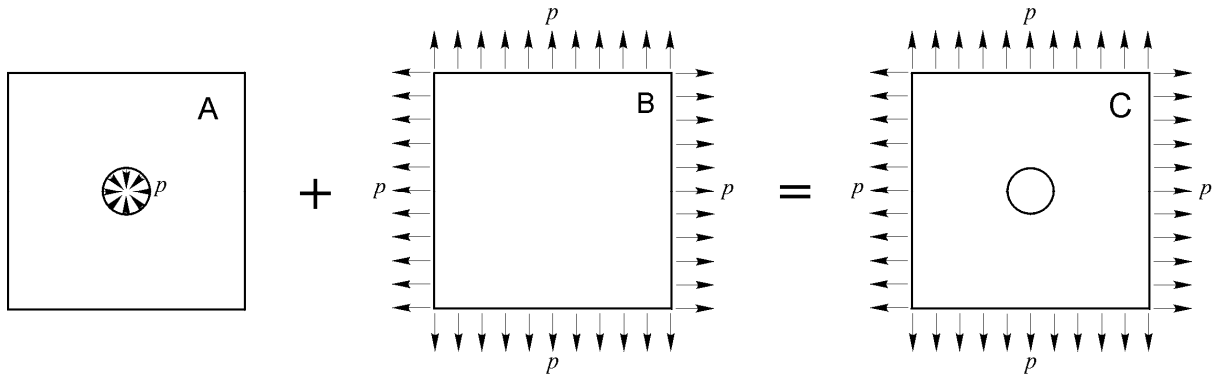
οπότε στην επιφάνεια της σπής όπου  $r = a$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$  και  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$  ισχύει

$$\bar{\mathbf{P}} = - \left( \sigma_{rr} + \frac{\bar{\mu}_2}{a} \right) \mathbf{e}_r = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \sigma_{rr} = -\frac{\bar{\mu}_2}{a}.$$

Στις κλασικές θεωρίες η τελευταία σχέση είναι  $\sigma_{rr} = 0$ .

#### 4.7.2.2. Ακριβής λύση για το πεδίο των μετατοπίσεων.

Το πρόβλημα του διαξονικού εφελκυσμού άπειρης πλάκας με κυκλική οπή μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία των λύσεων που φαίνονται στο Σχήμα 4.5.



**Σχήμα 4.5:** Επαλληλία λύσεων στο πρόβλημα πλάκας με οπή σε διαξονική φόρτιση.

Η ακριβής λύση του προβλήματος της άπειρης πλάκας με κυκλική οπή και εσωτερική πίεση  $p$  (Πρόβλημα A, Σχήμα 4.5) έχει αναπτυχθεί από τον Γ. Εξαδάκτυλο /15/.

Η ακριβής λύση του απλού προβλήματος B, που προστίθεται στο πρόβλημα A, έχει ως εξής:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = 2\nu p$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{E}[p - \nu(p + 2\nu p)] = p \frac{1-2\nu}{2G}$$

και

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} \Rightarrow u = r\varepsilon_{rr} + c \stackrel{c=0}{\Rightarrow} u = pr \frac{1-2\nu}{2G}.$$

Τελικά η ακριβής λύση του προβλήματος C για το πεδίο των μετατοπίσεων έχει τη μορφή

$$u(r) = \frac{p}{2G} \left\{ (1-2\nu)r + \frac{a^2}{r} - \frac{\ell}{c} \left[ \frac{a}{r} K_1\left(\frac{a}{\ell}\right) - (1-2\nu) K_1\left(\frac{r}{\ell}\right) \right] \right\}$$

όπου

$$c = \frac{1-2\nu}{2} K_0\left(\frac{a}{\ell}\right) + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{4\ell}{a} + \frac{a}{\ell} \right) K_1\left(\frac{a}{\ell}\right)$$

και  $K_n(x)$  είναι οι συναρτήσεις Bessel.



#### 4.7.2.3. Επίλυση του προβλήματος.

Λόγω της αξονικής συμμετρίας προσομοιώνεται μόνο το ένα τέταρτο της πλάκας με κυκλική οπή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Οι υπολογισμοί γίνονται για  $\nu = 0.3$  και  $\ell = a/3$ . Το μήκος  $L$  λαμβάνεται  $L = 10a$ . Επειδή ακριβώς το  $L$  είναι μεγάλο σε σχέση με τα  $a$  και  $\ell$  εκτιμάται πως το αριθμητικό πρόβλημα προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια το πραγματικό πρόβλημα της άπειρης πλάκας.

Το πρόβλημα επιλύεται αριθμητικά για τη θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως τύπου III με τη χρήση του στοιχείου III9-70. Ο κάναβος αποτελείται από 200 στοιχεία και 6090 βαθμούς ελευθερίας.

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην περιοχή ABCDE είναι οι ακόλουθες.

$$u_2 = 0, \quad \bar{P}_1 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \bar{R} = 0 \text{ στην } AB,$$

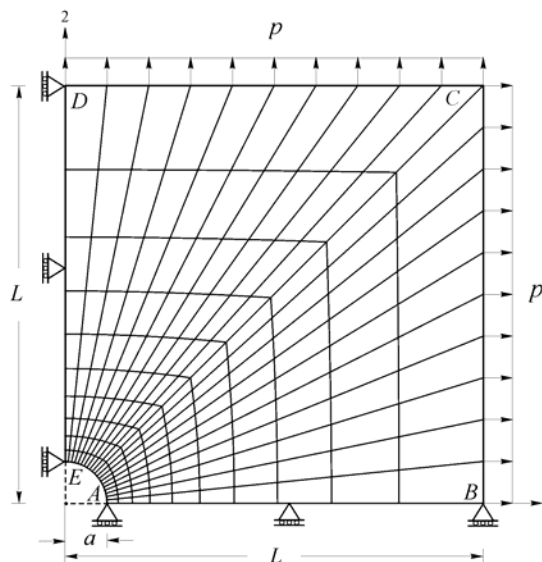
$$u_1 = 0, \quad \bar{P}_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \quad \bar{R} = 0 \text{ στην } DE,$$

$$\bar{P}_1 = p, \quad \bar{P}_2 = 0, \quad \bar{Q}_3^t = 0, \quad \bar{R} = 0 \text{ στην } BC,$$

$$\bar{P}_1 = 0, \quad \bar{P}_2 = p, \quad \bar{Q}_3^t = 0, \quad \bar{R} = 0 \text{ στην } CD,$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \quad \bar{Q}_3^t = 0, \quad \bar{R} = 0 \text{ στην } AE \text{ και}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \text{ σε όλες τις γωνίες.}$$



Σχήμα 4.6: Διακριτοποίηση πλάκας με οπή.

Σημειώνεται πως μακριά από την οπή η τάση ταυτίζεται με αυτήν της κλασικής θεωρίας, κοντά στην οπή όμως, όπου  $\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$ , είναι  $\sigma_{rr} = -\bar{\mu}_2/a$ . Η τάση που προκύπτει είναι ίση με την πραγματική τάση.

#### 4.7.2.4. Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αδιαστατοποιημένα στα Σχήματα 4.7-4.15 υπολογίζονται στο κέντρο των στοιχείων πλησιέστερα στον άξονα 1, δηλαδή για  $\theta = 2.25^\circ$ .

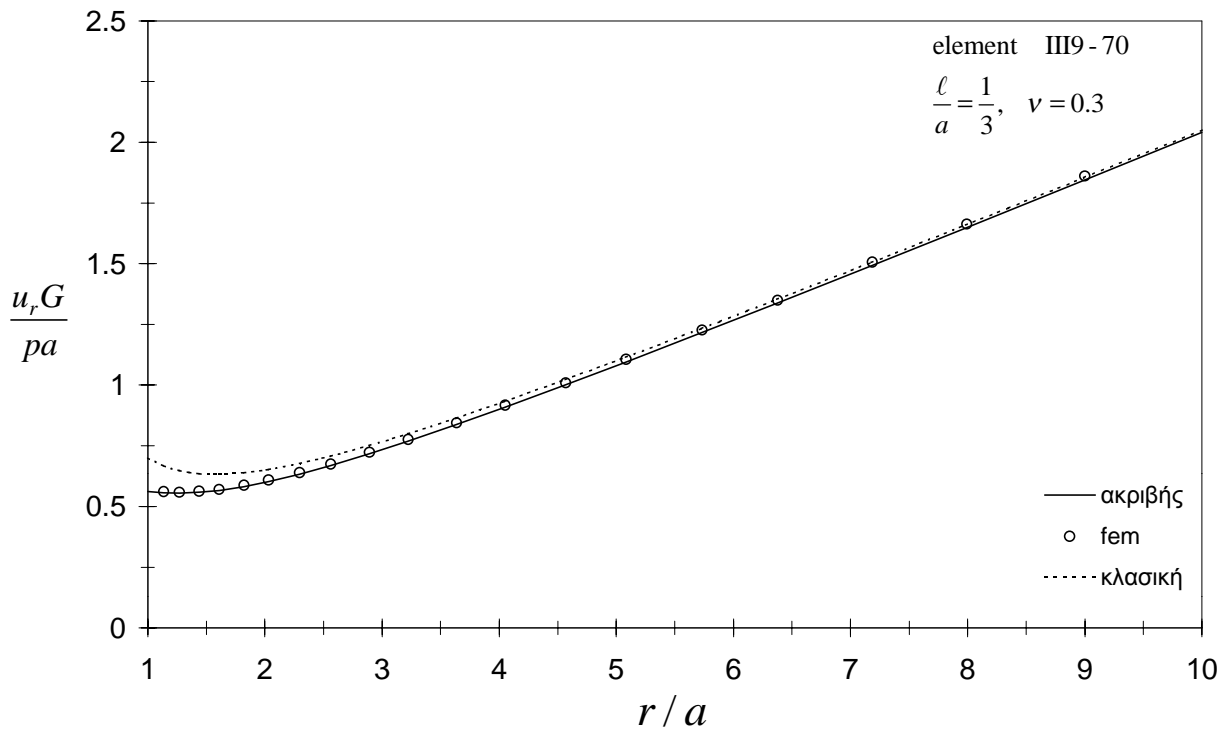
Στα σχήματα που ακολουθούν οι ευθείες γραμμές δηλώνουν την ακριβή λύση ενώ τα διακριτά σημάδια τη λύση των πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης για τη μετατόπιση (Σχήμα 4.7), την παραμόρφωση (Σχήμα 4.8) και τις τάσεις  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{\theta\theta}$  (Σχήμα 4.13) δίνεται με διακεκομμένη γραμμή η λύση που προκύπτει στην κλασική θεωρία, δηλαδή για  $\ell = 0$ .

Στο Σχήμα 4.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τη μετατόπιση. Η πραγματική τάση που προκύπτει από τη θεωρία τύπου III εμφανίζεται στο Σχήμα 4.13. Αξίζει να παρατηρηθεί η διαφορά που υπάρχει μεταξύ της κλασικής θεωρίας και της θεωρίας τύπου III, για την τιμή της τάσης στο σύνορο  $r = a$ . Συγκεκριμένα, σύμφωνα με την κλασική θεωρία για  $r = a$  και  $\theta = 0^\circ$  οι τάσεις προκύπτουν  $\sigma_{rr}/p = 0$  και  $\sigma_{\theta\theta}/p = 2$ , ενώ η θεωρία τύπου III δίνει, για  $\ell = a/3$ ,  $\sigma_{rr}/p = 0.16$  και  $\sigma_{\theta\theta}/p = 1.94$ . Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη παράγραφο,

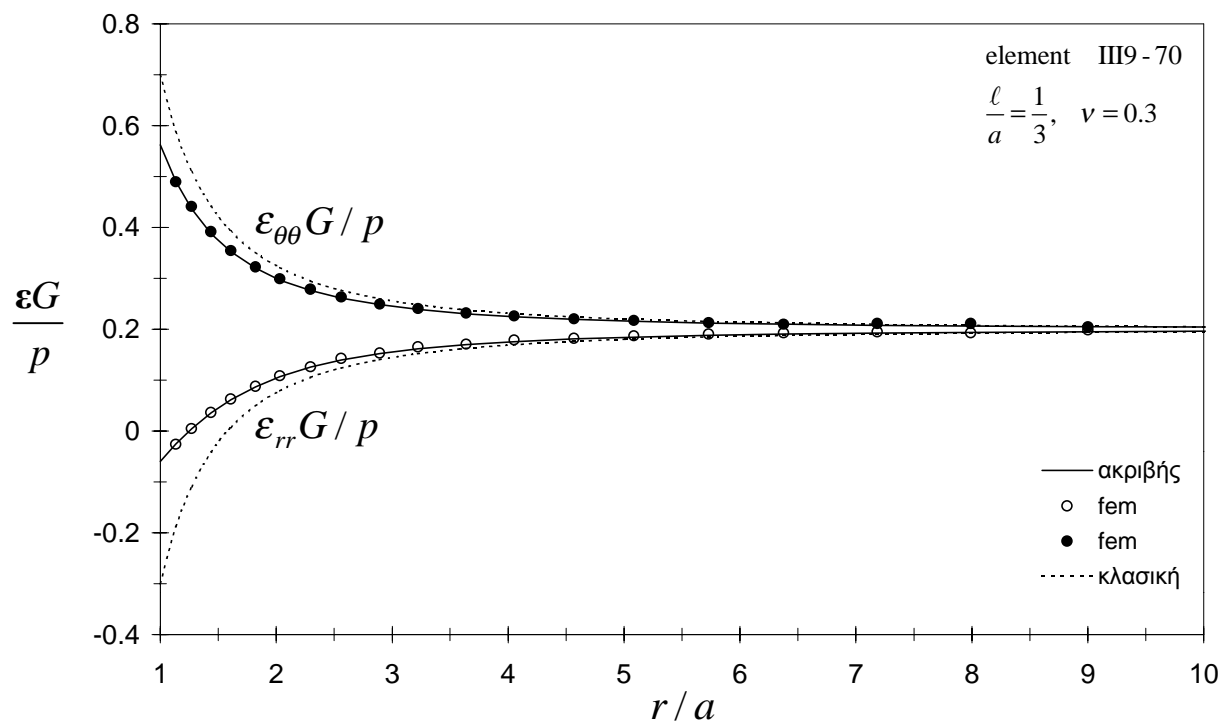
στη θεωρία τύπου III είναι  $\sigma_{rr} = -\frac{\bar{\mu}_2}{a}$ , ενώ στην κλασική θεωρία ισχύει  $\sigma_{rr} = 0$ .

Αν αγνοηθούν οι συνοριακοί όροι η λύση για τα  $\sigma_{ij}$  εμφανίζει αστάθεια κοντά στην οπή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.14.

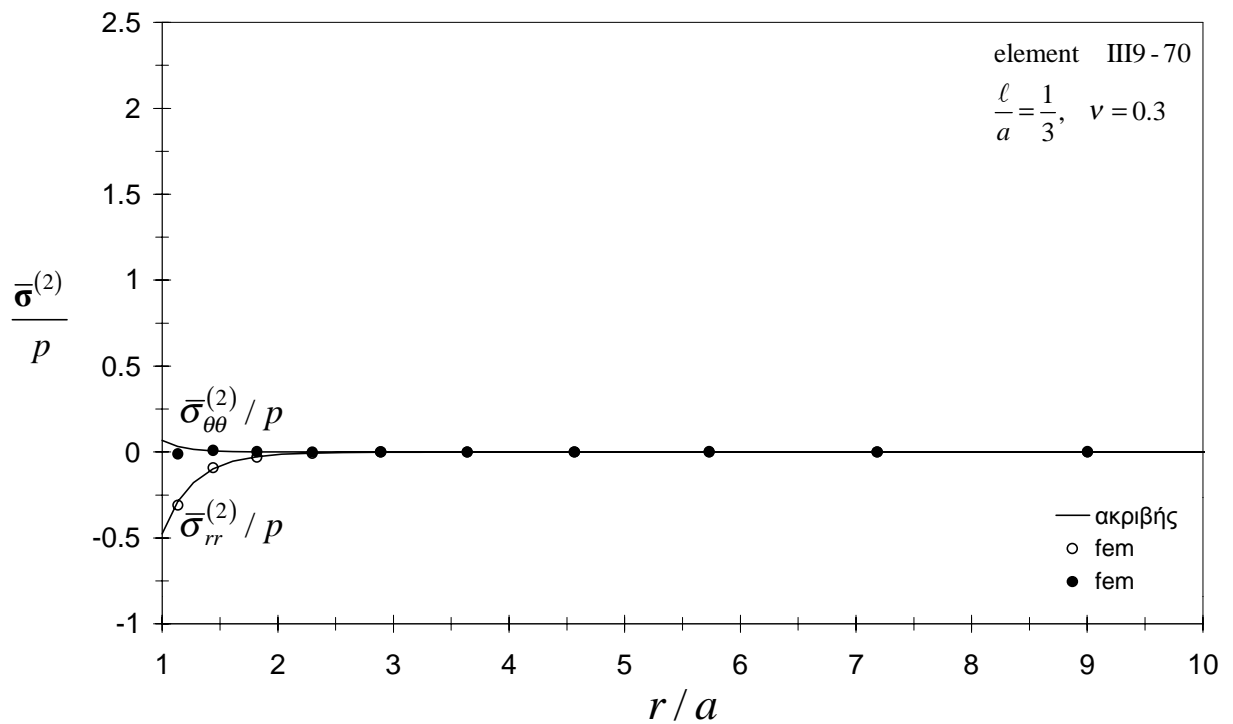
Τέλος, στο Σχήμα 4.15 είναι εμφανής η επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους στο συντελεστή συγκεντρώσεως των τάσεων. Οι τιμές αντιστοιχούν σε έναν κόμβο με  $r = a$  και  $\theta = 0^\circ$ . Οι μαύροι ρόμβοι δηλώνουν την τιμή του  $\ell = a/3$  που έχει χρησιμοποιηθεί στο πρόβλημα.



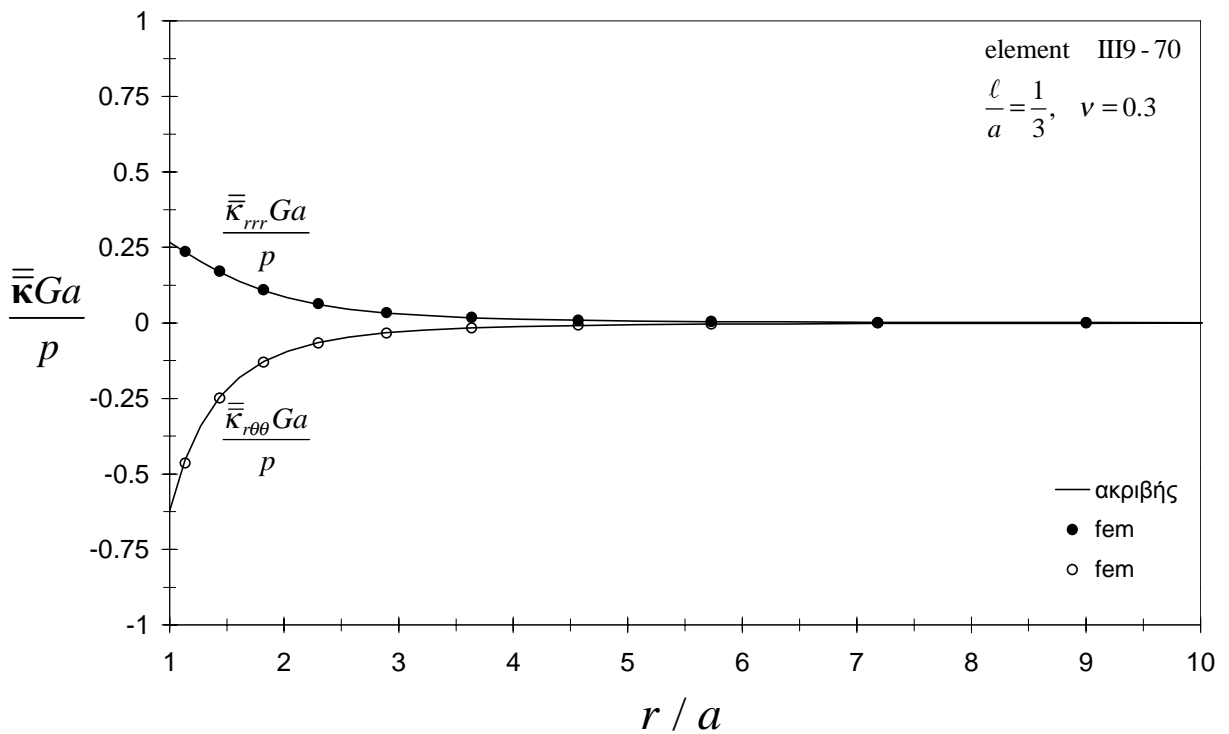
Σχήμα 4.7: Μεταβολή της μετατόπισης. Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή και την κλασική λύση του προβλήματος.



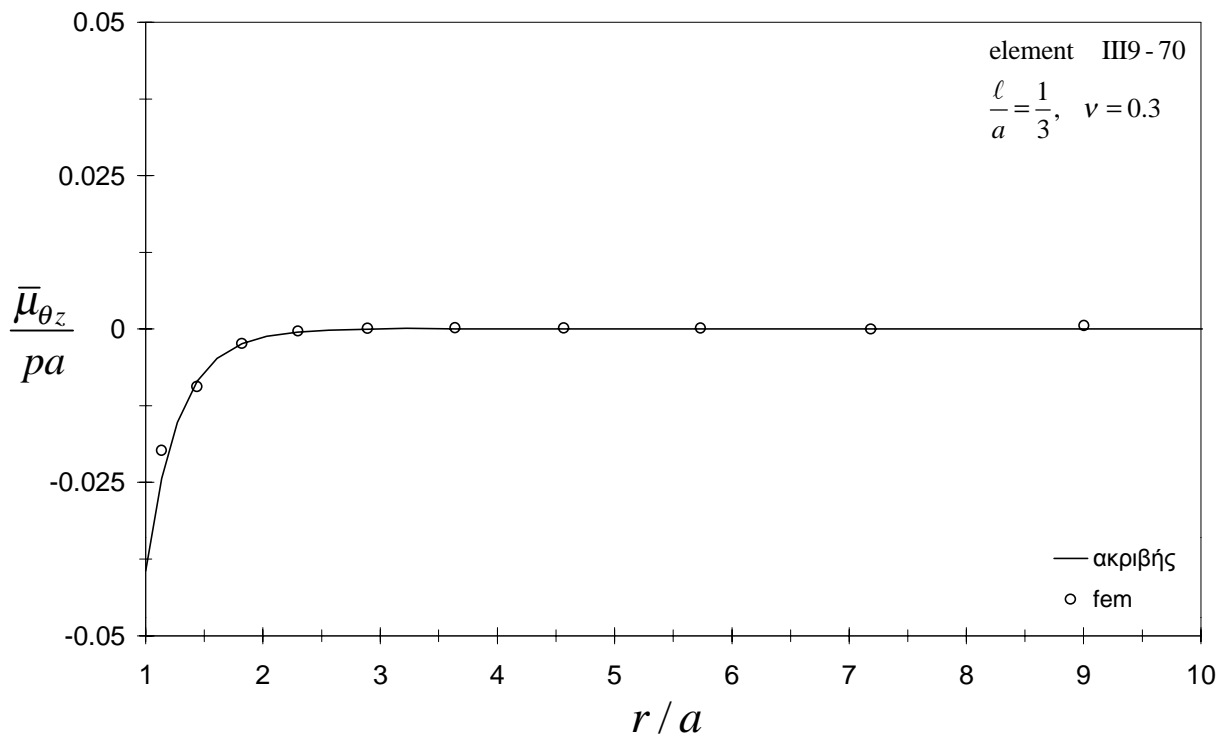
Σχήμα 4.8: Μεταβολή της παραμόρφωσης. Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή και την κλασική λύση του προβλήματος.



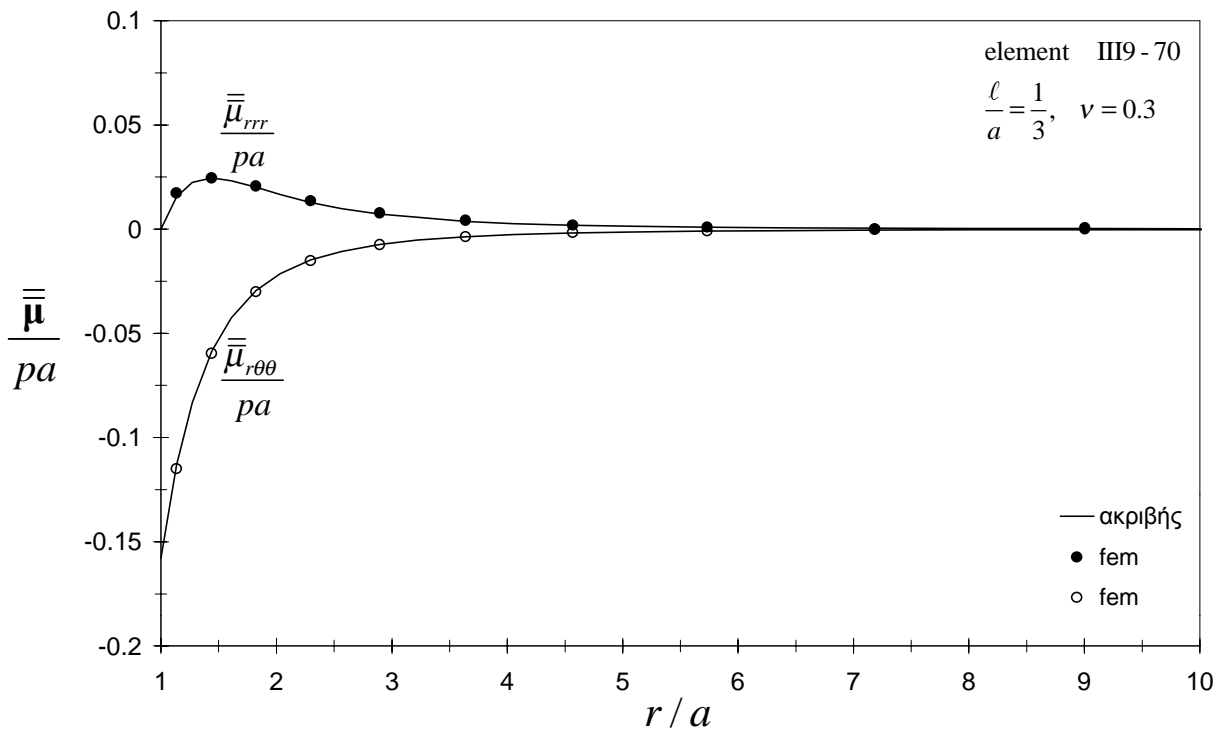
**Σχήμα 4.9:** Μεταβολή της τάσης  $\bar{\sigma}^{(2)}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση του προβλήματος.



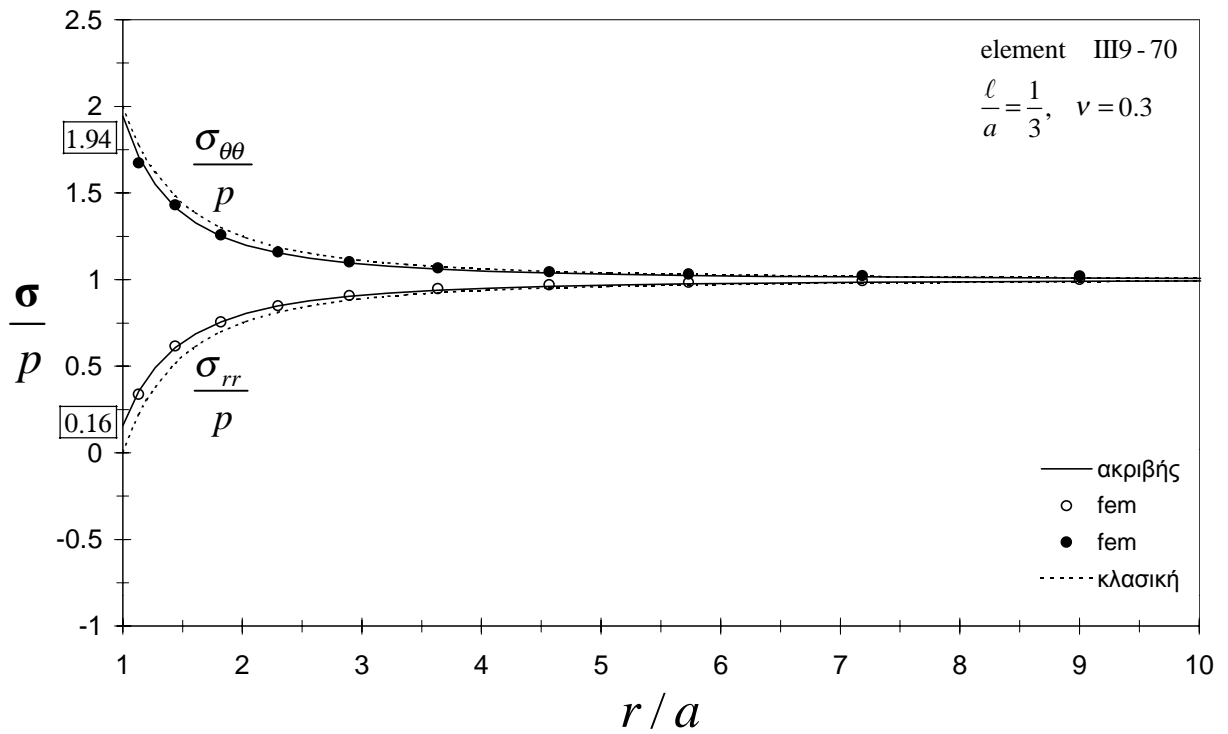
**Σχήμα 4.10:** Μεταβολή του  $\bar{\kappa}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση του προβλήματος.



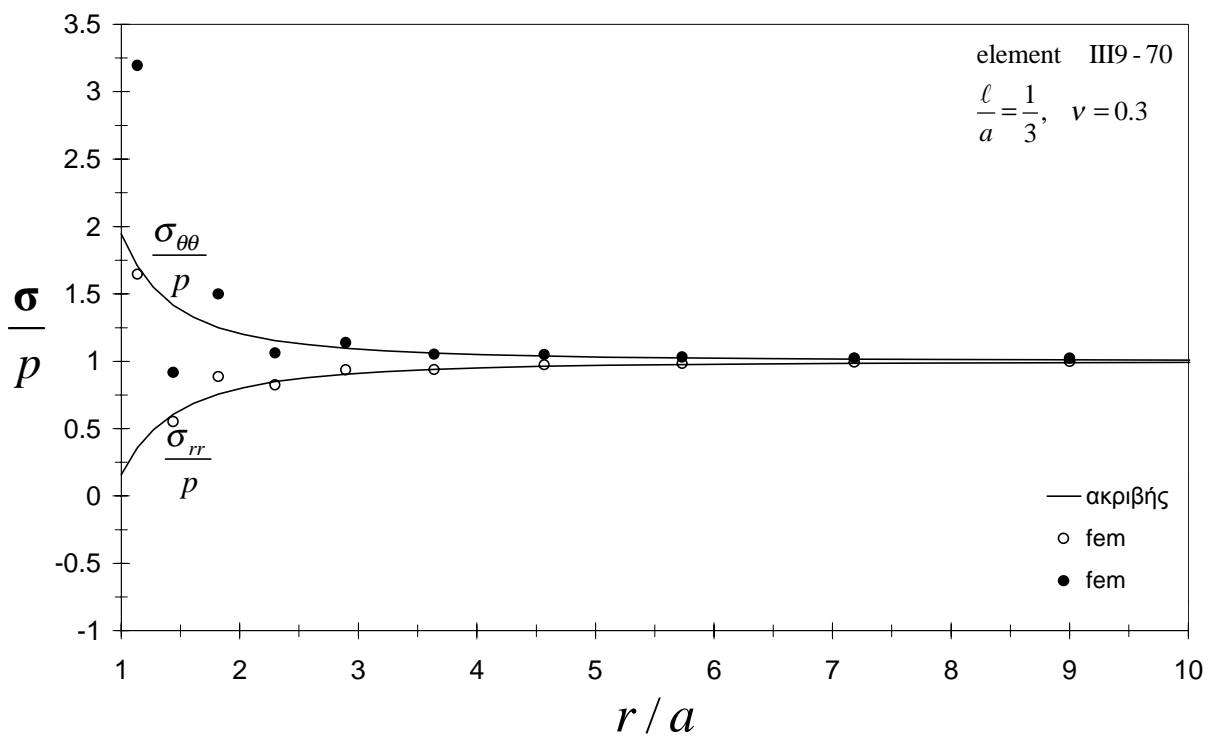
Σχήμα 4.11: Μεταβολή του  $\bar{\mu}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση του προβλήματος.



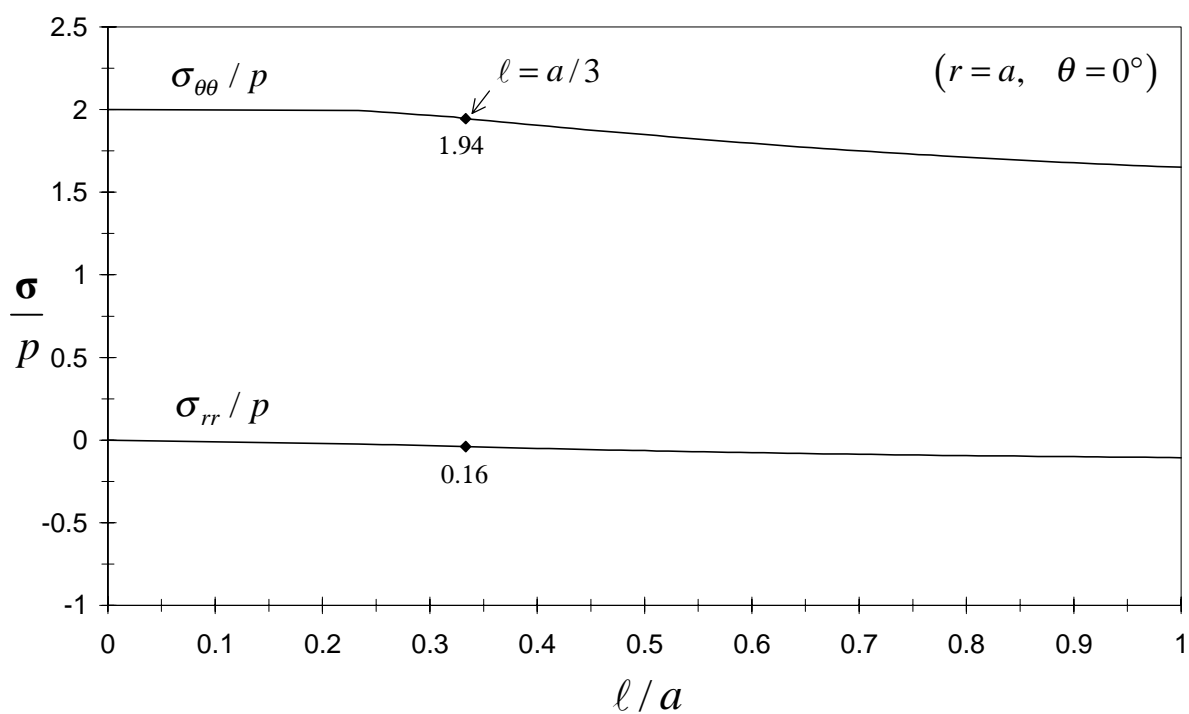
Σχήμα 4.12: Μεταβολή του  $\bar{\mu}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση του προβλήματος.



Σχήμα 4.13: Μεταβολή της πραγματικής τάσης. Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή και την κλασική λύση του προβλήματος.



Σχήμα 4.14: Μεταβολή της πραγματικής τάσης χωρίς τους συνοριακούς όρους. Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση του προβλήματος.



**Σχήμα 4.15:** Επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους στο συντελεστή συγκεντρώσεως των τάσεων, στο σημείο ( $r = a, \theta = 0^\circ$ ).

### 4.7.3. Το πρόβλημα της αντιεπίπεδης θραύσης (mode III).

#### 4.7.3.1. Ανάπτυξη στοιχείων.

Τα στοιχεία που υποβάλλονται στον έλεγχο συρραφής είναι:

(α) το στοιχείο **III9-70** (Σχήμα 4.16) το οποίο είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο με εννέα κόμβους και 70 κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες ( $u_3, -\omega_2, \omega_1, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ ) είναι κομβικοί άγνωστοι και στους εννέα κόμβους, ενώ οι ποσότητες ( $\bar{\sigma}_{(13)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{(23)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[13]}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[23]}^{(2)}$ ) αποτελούν επιπλέον κομβικούς αγνώστους στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους.

(β) το στοιχείο **III9-35** (προκύπτει από το στοιχείο III9-70 στην ειδική περίπτωση όπου  $\varepsilon_{13} = -\omega_2 = \beta_{31}/2$  και  $\varepsilon_{23} = \omega_1 = \beta_{32}/2$ ). Πρόκειται για ισοπαραμετρικό στοιχείο με εννέα κόμβους και τριανταπέντε κομβικούς αγνώστους (Σχήμα 4.16). Οι ποσότητες ( $u_3, \beta_{31}, \beta_{32}$ ) είναι κομβικοί άγνωστοι και στους εννέα κόμβους, ενώ οι ποσότητες ( $\bar{\sigma}_{13}^{(2)}, \bar{\sigma}_{23}^{(2)}$ ) αποτελούν επιπλέον κομβικούς αγνώστους στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους.

Τα παραπάνω στοιχεία εξασφαλίζουν συνεχή πεδία για όλους τους κομβικούς αγνώστους.



$$0: u_3, -\omega_2, \omega_1, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$$

$$\times: \bar{\sigma}_{(13)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{(23)}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[13]}^{(2)}, \bar{\sigma}_{[23]}^{(2)}$$

$$0: u_3, \beta_{31}, \beta_{32}$$

$$\times: \bar{\sigma}_{13}^{(2)}, \bar{\sigma}_{23}^{(2)}$$

**Σχήμα 4.16:** Τύποι πεπερασμένων στοιχείων III9-70 και III9-35 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III.

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται αντιστοιχούν σε πεδία μετατοπίσεων της μορφής

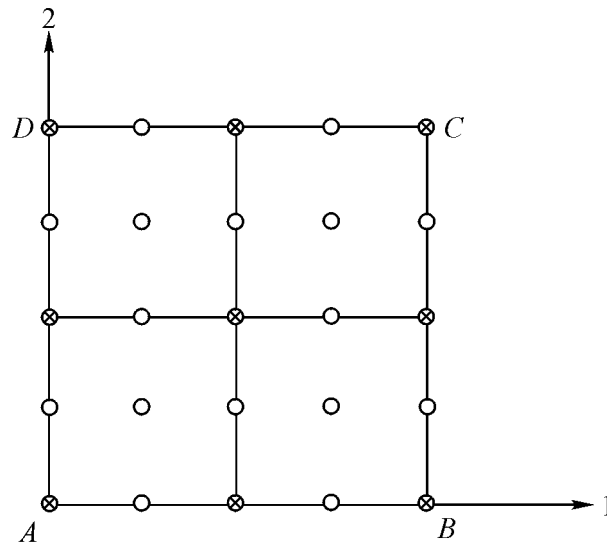
$$u_3 = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 + ex_1^2 + fx_2^2 + gx_1x_2^2 + hx_1^2x_2 + kx_1^2x_2^2,$$

όπου οι συντελεστές  $a, b, \dots, k$  είναι σταθερές.



Η απαιτούμενη μαζική δύναμη για την ισοροπία,  $f_i = -\sigma_{ji,j}$ , είναι

$$f_3 = -2(e + f - 4\ell^2 k + gx_1 + kx_1^2 + hx_2 + kx_2^2)\mu.$$



**Σχήμα 4.17:** Διακριτοποίηση της περιοχής για τα στοιχεία III9-70, III9-35.

Το πεδίο μετατοπίσεων που αναφέρθηκε παραπάνω εφαρμόζεται στην περιοχή του Σχήματος 4.2. Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι

$$u_3, 2\omega_1 = \beta_{32} \quad \text{στις πλευρές } AB \text{ και } CD$$

$$u_3, -2\omega_2 = \beta_{31} \quad \text{στις πλευρές } BC \text{ και } AD.$$

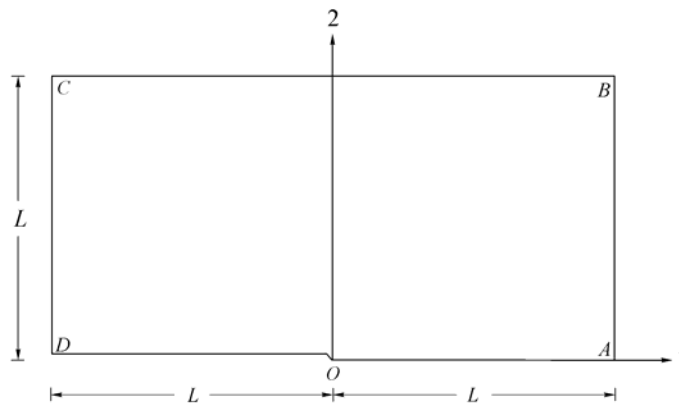
Κατά την ανάπτυξη του μητρώου ακαμψίας το ολοκλήρωμα στον όγκο του στοιχείου υπολογίζεται με  $3 \times 3$  ολοκλήρωση κατά Gauss, ενώ για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος εφαρμόζεται ολοκλήρωση 3-σημείων. Το πρόβλημα επιλύεται λαμβάνοντας υπόψη τους συνοριακούς όρους, που επιβάλλουν τη σχέση  $D_j u_i = (\varepsilon_{ij} - e_{ijk} \omega_k)^t$ . Και στις δύο περιπτώσεις το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει είναι συμμετρικό-ζωνικό και για την επίλυσή του χρησιμοποιείται η υπορουτίνα DGBSV της LAPACK. Η μέθοδος υπολογισμού του παρουσιάζεται στο Παράρτημα II, υποκεφάλαιο 3.

Και τα δύο στοιχεία πληρούν τα κριτήρια σύγκλισης, που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.7.1, για τον κánaβο των  $2 \times 2$  στοιχείων (Σχήμα 4.17). Στην περίπτωση του ενός στοιχείου ο έλεγχος είναι και πάλι πολύ περιοριστικός για το στοιχείο III9-70, ενώ για το στοιχείο III9-35 η καταμέτρηση των αγνώστων δεν ικανοποιεί το (α) αναγκαίο κριτήριο σύγκλισης. Τα αποτελέσματα του ελέγχου συρραφής συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2 που ακολουθεί.

Πίνακας 4.2						
Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III-Έλεγχος συρραφής						
Στοιχείο	$N \times N$	$n_u + n_\omega + n_\varepsilon$	$n_{\sigma^{(2)}}$	$n_u + n_\omega + n_\varepsilon \geq n_{\sigma^{(2)}}$	Μηδενικές ιδιοτιμές	Αποτέλεσμα
III9-70	1×1	28	16	✓	3	Απορρίπτεται
III9-70	2×2	98	36	✓	<b>0</b>	Δεκτό
III9-35	1×1	7	8	×	3	Απορρίπτεται
III9-35	2×2	39	18	✓	<b>0</b>	Δεκτό

#### 4.7.3.2. Επίλυση προβλήματος ανιεπίπεδης θραύσης (mode-III).

Σε αυτό το τμήμα της διατριβής η θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος της ανιεπίπεδης θραύσης, mode-III, σε ένα ομογενές γραμμικά ελαστικό υλικό. Στο Σχήμα 4.18 απεικονίζεται η γεωμετρία του προβλήματος. Λόγω της αντισυμμετρίας μοντελοποιείται μόνο το μισό τμήμα της περιοχής.



Σχήμα 4.18: Πρόβλημα ανιεπίπεδης θραύσης. Η γεωμετρία που μοντελοποιείται.

#### 4.7.3.3. Περιγραφή της αναλυτικής λύσης.

Η ακριβής λύση του παραπάνω προβλήματος αναπτύχθηκε από τον Γεωργιάδη [22], ο οποίος χρησιμοποίησε τη θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως τύπου II για τους υπολογισμούς του. Ο Γεωργιάδης απέδειξε πως η μεταβολή των τάσεων,  $\hat{\sigma}_{23} = \sigma_{23}^{(0)} + \hat{\sigma}_{23}^{(2)}$ , μπροστά από την ακμή της ρωγμής είναι της μορφής

$$\hat{\sigma}_{23}(r, \theta = 0) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{K_{III}}{\sqrt{\ell}} f\left(\frac{r}{\ell}\right)$$

όπου

$$f(x) = \int_0^1 \left[ \frac{2(1-\omega)^2(1+\omega)^{3/2} e^{-\omega x}}{3\omega N(\omega)} - \frac{(1-\omega)^{1/2} N\left(-\frac{1}{\omega}\right)}{\omega^{5/2} e^{x/\omega}} \right] d\omega$$

και

$$N(x) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tan^{-1} \left[ \frac{(1-z^2)^{3/2}}{z^3} \right] \frac{dz}{z+x} \right\}.$$

Επίσης, απέδειξε ότι η ασυμπτωτική μεταβολή της τάσης,  $\hat{\sigma}_{23}$ , καθώς  $r \rightarrow 0$  είναι

$$\hat{\sigma}_{23}(r, \theta = 0) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \frac{K_{III} \ell}{r^{3/2}},$$

ενώ η ασυμπτωτική μεταβολή της μετατόπισης,  $u_3$ , στην πλευρά της ρωγμής έχει τη μορφή,

$$u_3(r, \theta = \pi) = \frac{4}{3\sqrt{3\pi}} \frac{K_{III}}{\mu \ell} r^{3/2}, \text{ καθώς } r \rightarrow 0.$$

Στις συγκρίσεις που γίνονται στη συνέχεια χρησιμοποιείται και η γνωστή ασυμπτωτική λύση της αντιστάσεως θραύσεως για  $r \rightarrow \infty$

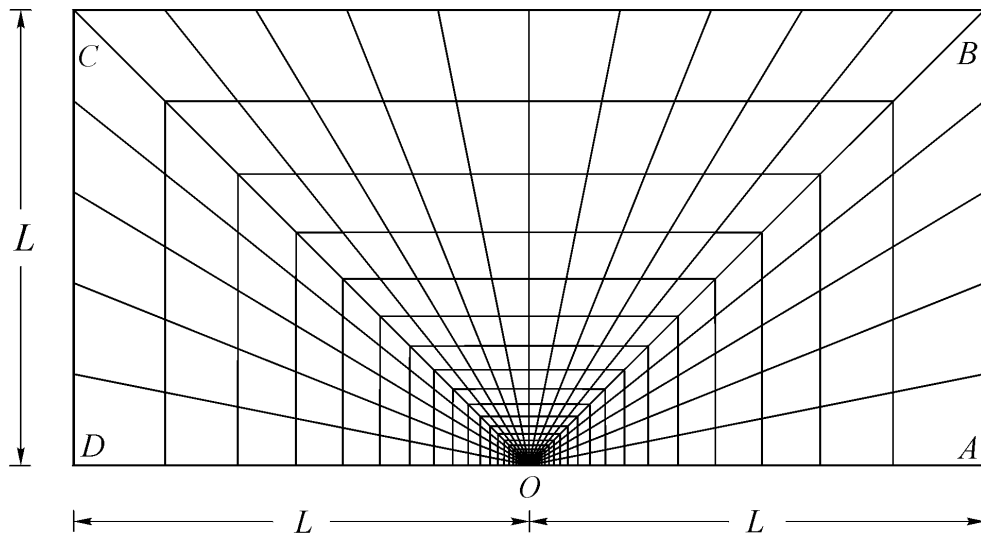
$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

Στις παραπάνω σχέσεις  $K_{III}$  είναι ο συντελεστής εντάσεως των τάσεων, ενώ  $(r, \theta)$  οι πολικές συντεταγμένες με κέντρο αξόνων την ακμή της ρωγμής.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα παρατηρείται ότι  $\hat{\sigma}_{13} = \hat{\sigma}_{31} = \tilde{\sigma}_{13} = \sigma_{13}$  και  $\hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} = \tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{23}$ , αλλά  $\hat{\sigma}_{31} \neq \tilde{\sigma}_{31}$  και  $\hat{\sigma}_{32} \neq \tilde{\sigma}_{32}$ . Συνεπώς, και οι τρεις τύποι της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως έχουν ως αποτέλεσμα τον υπολογισμό της πραγματικής τάσης  $\sigma_{13}$  και  $\sigma_{23}$ , όχι όμως και της  $\sigma_{31}$  και  $\sigma_{32}$ .

#### 4.7.3.4. Περιγραφή της αριθμητικής λύσης.

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιείται ο κানাβος του Σχήματος 4.19, ο οποίος αποτελείται από τετραγωνικά στοιχεία. Στην πρώτη σειρά στοιχείων γύρω από την ακμή της ρωγμής οι τρεις κόμβοι κάθε στοιχείου με συντεταγμένες  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  ενώνονται με αποτέλεσμα να προκύπτει ένα τριγωνικό στοιχείο. Το μήκος αυτών των πρώτων στοιχείων είναι  $0.0004\ell$ , ενώ  $L = 1000\ell$ .



Σχήμα 4.19: Πρόβλημα αντιπέδησης θραύσης. Ο κানাβος.

Η ασυμπτωτική λύση για το πεδίο των μετατοπίσεων είναι της μορφής

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{και} \quad u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Ανάλογα το πεδίο μετατοπίσεων που εφαρμόζεται στον κানাβο είναι

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{και} \quad u_3 = u_3(x_1, x_2).$$

Οι μόνες μη-μηδενικές κινηματικές μεταβλητές που επιβιώνουν για το παραπάνω πεδίο μετατοπίσεων είναι οι  $2\varepsilon_{31} = -2\omega_2 = u_{3,1} = \beta_{31}$ ,  $2\varepsilon_{32} = 2\omega_1 = u_{3,2} = \beta_{32}$ ,  $\bar{\kappa}_{11}$ ,  $\bar{\kappa}_{21}$ ,  $\bar{\kappa}_{12}$ ,  $\bar{\kappa}_{22}$ ,  $\bar{\kappa}_{113} = \bar{\kappa}_{311} = \bar{\kappa}_{131}$ ,  $\bar{\kappa}_{223} = \bar{\kappa}_{322} = \bar{\kappa}_{232}$  και  $\bar{\kappa}_{123} = \bar{\kappa}_{213} = \bar{\kappa}_{312}$ . Οι αντίστοιχες συζυγείς ποσότητες είναι οι  $\bar{\sigma}_{13}^{(0)} = \bar{\sigma}_{31}^{(0)}$ ,  $\bar{\sigma}_{23}^{(0)} = \bar{\sigma}_{32}^{(0)}$ ,  $\bar{\mu}_{11}$ ,  $\bar{\mu}_{21}$ ,  $\bar{\mu}_{12}$ ,  $\bar{\mu}_{22}$ ,  $\bar{\mu}_{113} = \bar{\mu}_{311} = \bar{\mu}_{131}$ ,  $\bar{\mu}_{223} = \bar{\mu}_{322} = \bar{\mu}_{232}$  και  $\bar{\mu}_{123} = \bar{\mu}_{213} = \bar{\mu}_{312}$ . Επίσης οι ποσότητες  $\bar{\sigma}_{13}^{(2)}$ ,  $\bar{\sigma}_{23}^{(2)}$ ,  $\bar{\sigma}_{31}^{(2)}$  και  $\bar{\sigma}_{32}^{(2)}$  είναι γενικά μη-μηδενικές.

Το πρόβλημα επιλύεται αριθμητικά με τη χρήση του στοιχείου I19-35. Το ολοκλήρωμα στον όγκο υπολογίζεται με ολοκλήρωση  $3 \times 3$  στα σημεία Gauss. Αντίστοιχα, γίνεται ολοκλήρωση 3-σημείων για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος. Όπως αναφέρθηκε ήδη, μπορεί να χρησιμοποιηθεί εναλλακτικά η θεωρία τύπου I. Λεπτομέρειες αναφέρονται στο Παράρτημα III.

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην περιοχή OABCD είναι οι ακόλουθες.

$$\begin{aligned} u_3 = 0, \quad \bar{R}_3 = 0, \quad \bar{Q} = \mathbf{0} \quad \text{στην } OA, \\ u_3, \quad -2\omega_2 = \beta_{31}, \quad \bar{Q}_1 = 0 \quad \text{στην } AB, \\ u_3, \quad 2\omega_1 = \beta_{32}, \quad \bar{Q}_2 = 0 \quad \text{στην } BC, \\ u_3, \quad -2\omega_2 = \beta_{31}, \quad \bar{Q}_1 = 0 \quad \text{στην } CD, \\ \bar{P}_3 = 0, \quad \bar{R}_3 = 0, \quad \bar{Q} = \mathbf{0} \quad \text{στην } OD \text{ και} \\ \bar{E}_3 = 0 \quad \text{σε όλες τις γωνίες.} \end{aligned}$$

Ο κানাβος αποτελείται από 1600 στοιχεία και 23045 βαθμούς ελευθερίας.

#### 4.7.3.5. Αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα και οι συγκρίσεις με την ακριβή λύση παρουσιάζονται για την τάση για  $\theta = 4.5^\circ$ , ενώ για τη μετατόπιση για  $\theta = 175.5^\circ$ .

Στο Σχήμα 4.20 με ευθεία γραμμή δηλώνεται η ασυμπτωτική λύση για τη μετατόπιση,

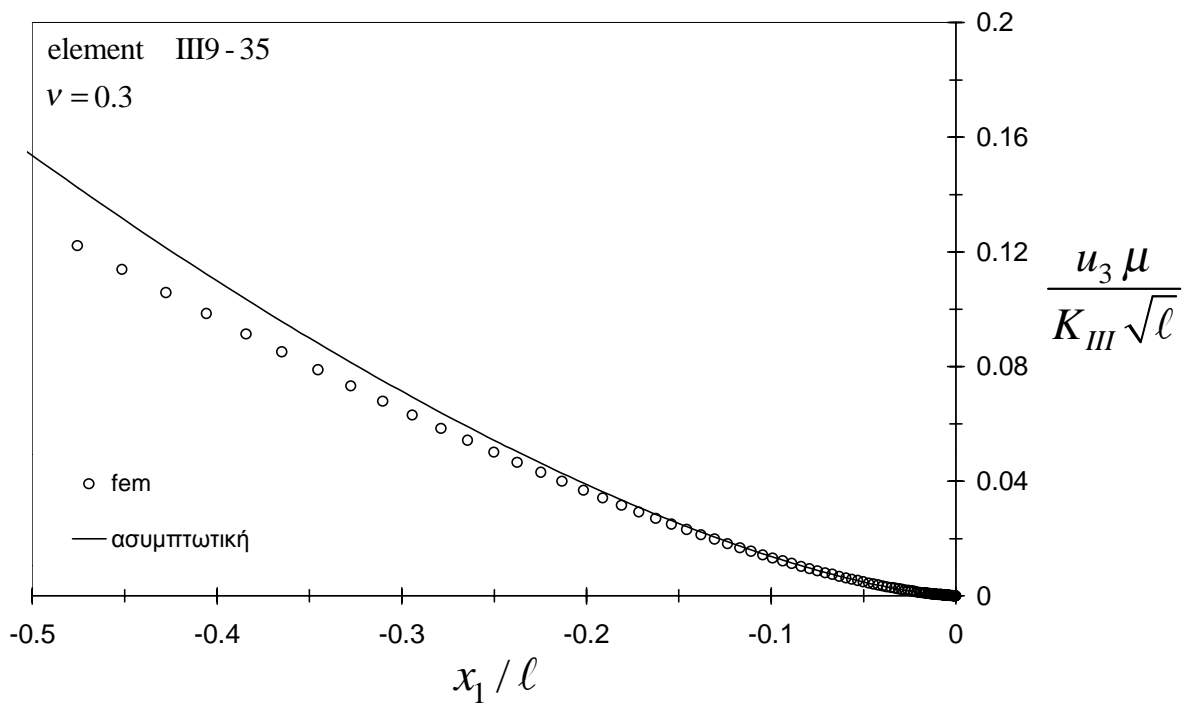
$$u_3(r, \theta = \pi) = \frac{4}{3\sqrt{3}\pi} \frac{K_{III}}{\mu l} r^{3/2}, \quad \text{I22I}, \quad \text{ενώ με διακριτά σημάδια η λύση των πεπερασμένων}$$

στοιχείων. Τα μεγέθη είναι αδιαστατοποιημένα.

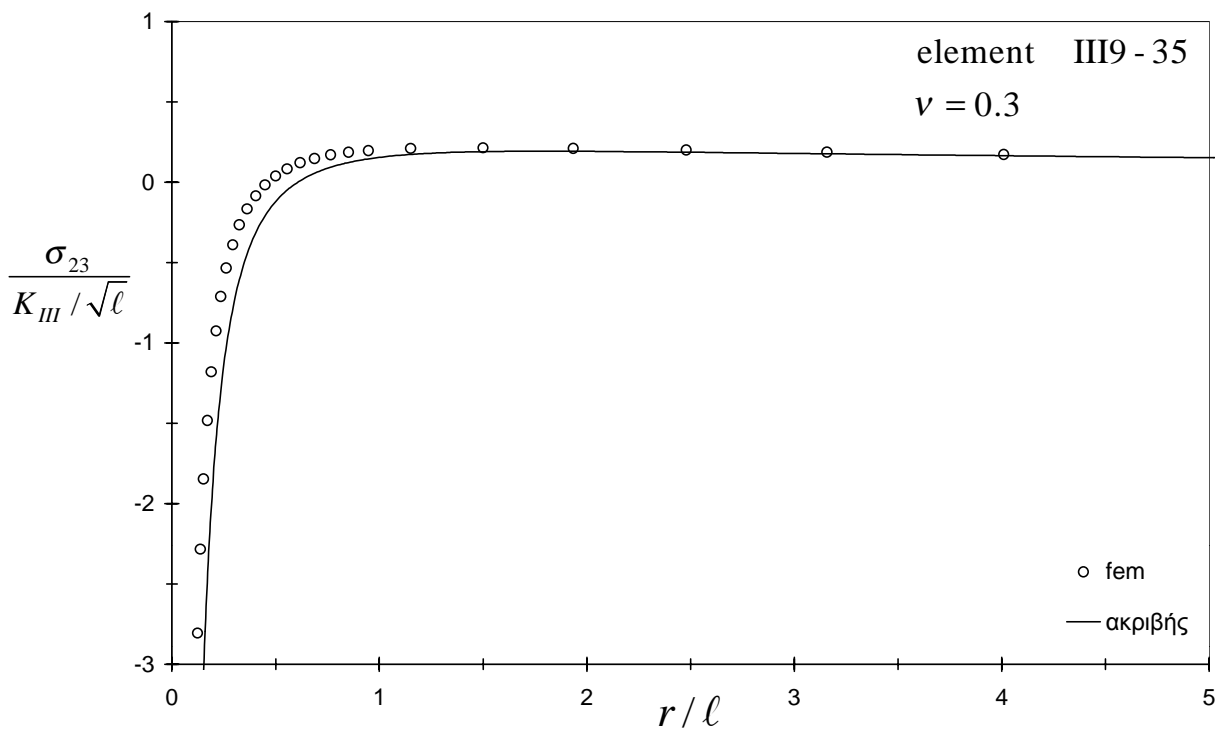
Το Σχήμα 4.21 παρουσιάζει τη σύγκριση της τάσης  $\sigma_{23}$  που προκύπτει από τα πεπερασμένα στοιχεία με την ακριβή λύση, I22I.

Η σύγκριση της τάσης  $\sigma_{23}$  που προκύπτει από τα πεπερασμένα στοιχεία με τις δύο ασυμπτωτικές λύσεις  $\sigma_{23}(r \rightarrow 0)$  και  $\sigma_{23}(r \rightarrow \infty)$  γίνεται σε λογαριθμική κλίμακα στο Σχήμα 4.22.

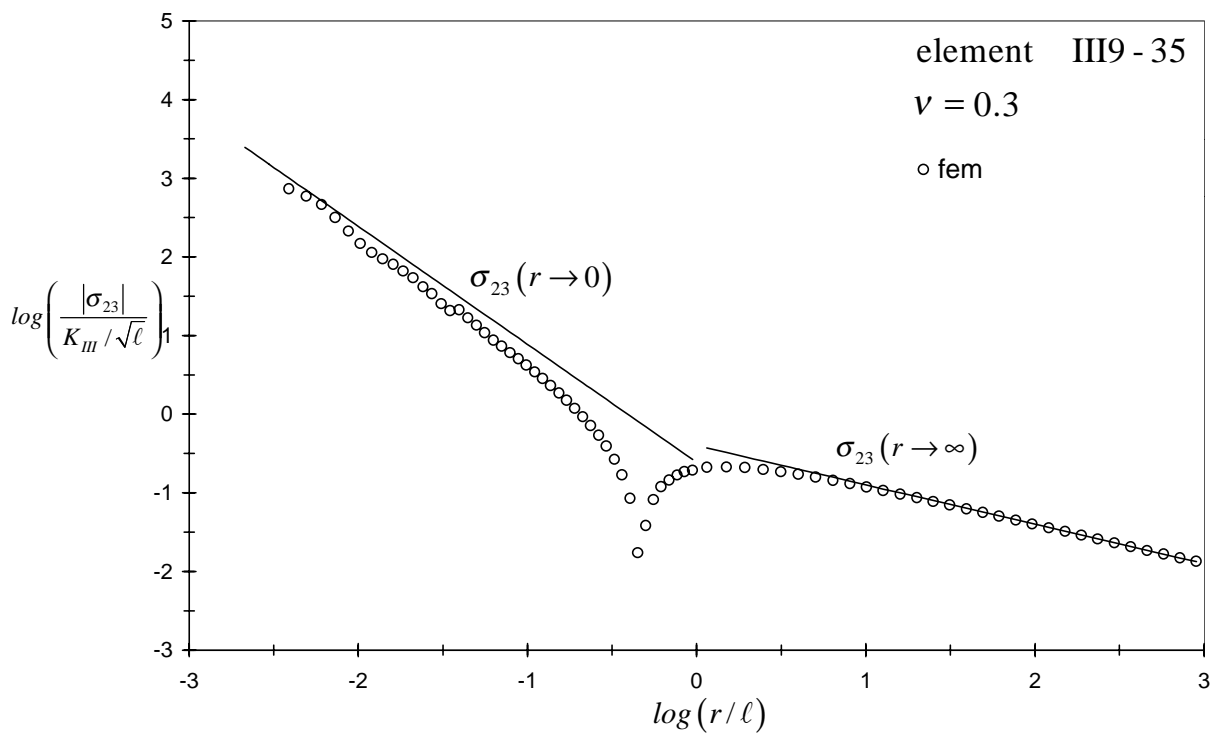
Τέλος, στο Σχήμα 4.23 φαίνεται η ταύτιση των τάσεων  $\tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{23}$ . Με ευθεία γραμμή σχεδιάζεται η ακριβής λύση  $\sigma_{23}$ , με ανοιχτούς κύκλους η τάση  $\tilde{\sigma}_{23}$  και με μαύρους ρόμβους η  $\sigma_{23}$ .



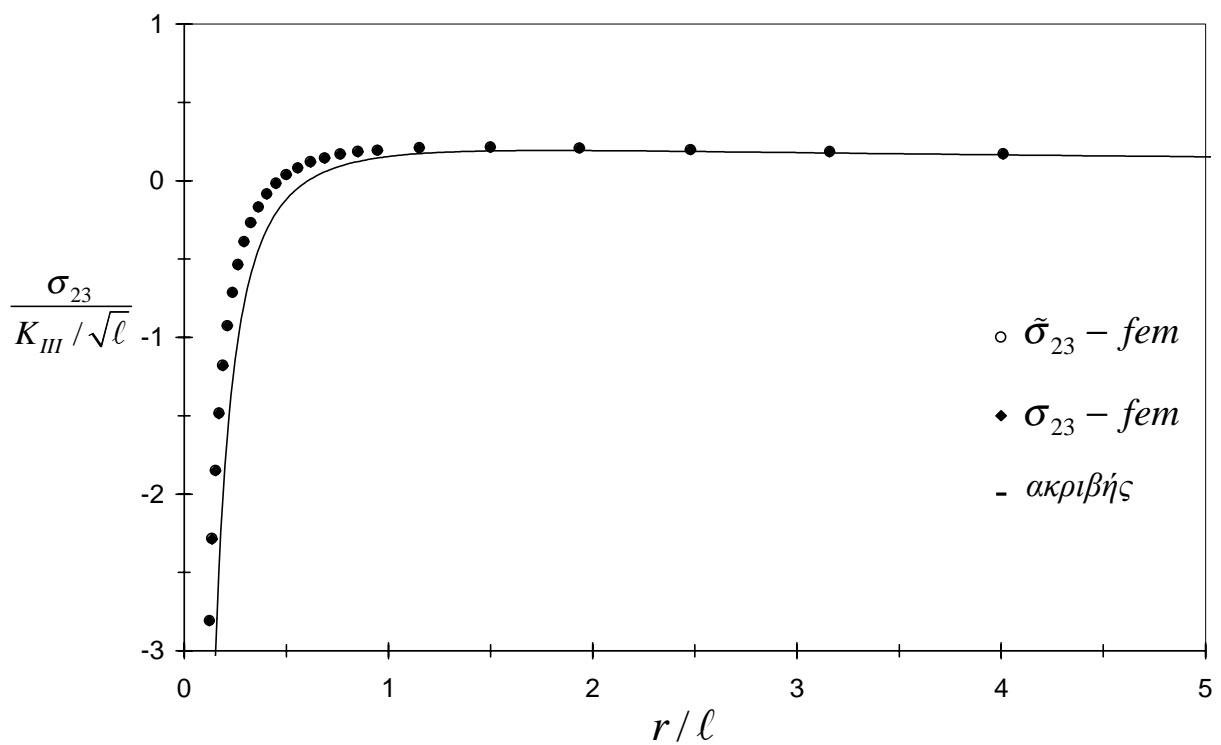
Σχήμα 4.21: Μεταβολή της μετατόπισης. Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ασυμπτωτική λύση.



Σχήμα 4.22: Μεταβολή της πραγματικής τάσης  $\sigma_{23}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση του προβλήματος.



Σχήμα 4.23: Λογαριθμική μεταβολή της πραγματικής τάσης  $\sigma_{23}$ . Σύγκριση με τις ασυμπτωτικές λύσεις.



Σχήμα 4.24: Μεταβολή της πραγματικής τάσης  $\sigma_{23}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM  $\tilde{\sigma}_{23}$  και  $\sigma_{23}$  με την ακριβή λύση του προβλήματος.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Συμπεράσματα

Οι θεωρίες που μελετήθηκαν στην παρούσα διδακτορική διατριβή λαμβάνουν υπόψη τη μικροδομή του υλικού και επομένως είναι σε θέση να δώσουν απάντηση σε προβλήματα στα οποία η συμπεριφορά του υλικού εξαρτάται από κάποιο χαρακτηριστικό μήκος,  $\ell$ . Αντικείμενο της διατριβής αποτέλεσε τόσο η περιγραφή των καταστατικών εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών, όσο και η ανάπτυξη των υπολογιστικών τεχνικών που σε συνδυασμό με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι δυνατό να εφαρμοστούν για την επίλυση ποικίλων προβλημάτων.

Όσο αφορά στο πρώτο μέρος δόθηκε μία αναλυτική περιγραφή των καταστατικών εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών. Υπενθυμίζεται πως η εισαγωγή των τάσεων ζεύγους στις κλασικές θεωρίες εμπλουτίζει τις κλασικές εξισώσεις και οδηγεί σε πολύπλοκες συνοριακές συνθήκες οι οποίες δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ένα σημαντικό τμήμα της διατριβής αφιερώθηκε στην περιγραφή της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως και συγκέντρωσε με τρόπο μεθοδικό την τεχνογνωσία που σχετίζεται με αυτήν. Ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στη διατύπωση των σχέσεων που συνδέουν τις πραγματικές τάσεις και τα πραγματικά φορτία. Οι σχέσεις αυτές δεν είναι προφανείς. Μόνο στη θεωρία τύπου III η τάση προκύπτει ίση με την πραγματική τάση του Cauchy, γι αυτό και η συγκεκριμένη θεωρία προσφέρεται για υπολογιστικές εφαρμογές.

Οι υπολογιστικές τεχνικές που αναπτύχθηκαν στηρίζονται στη μικτή μέθοδο επίλυσης με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων, όπου επιπλέον κομβικοί άγνωστοι προστίθενται στους κλασικούς κομβικούς αγνώστους. Όπως αποδείχθηκε από τα αποτελέσματα, στη μικτή μέθοδος επίλυσης είναι απαραίτητο να ληφθεί υπόψη η σχέση που συνδέει τους μη-ανεξάρτητους κομβικούς αγνώστους στο σύνορο. Διαφορετικά η λύση παρουσιάζει αστάθεια στο σύνορο.

Για τα ισοπαραμετρικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν έγινε έλεγχος συρραφής ανώτερης τάξης. Σημειώνεται πως ο απλός έλεγχος συρραφής δεν είναι επαρκής και είναι δυνατόν να



οδηγήσει σε παραπλανητικά αποτελέσματα όταν εφαρμόζεται σε στοιχεία που χρησιμοποιούνται σε μικτές υπολογιστικές μεθόδους.

Οι υπολογιστικές μέθοδοι που προτείνονται χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση πρότυπων προβλημάτων γραμμικής ελαστικότητας και τα συγκριτικά αποτελέσματα επιβεβαίωσαν την ακρίβεια τους.

Συνοψίζοντας, η παρούσα διδακτορική διατριβή εκτιμάται πως προσφέρει στην κατανόηση των θεωριών τύπου κλίσεως και προτείνει τις υπολογιστικές μεθόδους εφαρμογής τους. Ταυτόχρονα αποτελεί το εφαλτήριο για περαιτέρω έρευνα και εφαρμογή των προτεινόμενων μεθόδων σε μη-γραμμικά προβλήματα, όπως το πρόβλημα της πλαστικότητας.

## Βιβλιογραφία

- /1/** Aifantis, E. C. (1992), "On the role of gradients in the localization of deformation and fracture", *Int. J. Eng. Sci.* 30, pp. 1279-1299.
- /2/** Babuška, I. (1973), "The finite element method with Lagrange multipliers", *Numer. Math.* 20, pp. 179-192
- /3/** Bazant, Z. P., Belytscko, T. B. and Chang, T. P. (1984), "Continuum theory for strain softening", *J. Engng. Mech. Div. ASCE* 110, pp. 1666-1692.
- /4/** Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T. (1981), *FINITE ELEMENTS, An Introduction*, Volume I, Prentice-Hall, Inc.
- /5/** Begley, M. R. and Hutchinson, J. W. (1997), "The mechanics of size-dependent indentation", *Harvard University Report MECH 309*.
- /6/** Brezzi, F. (1974), "On the existence, uniqueness, and approximations of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers", *RAIPO B-R2*, pp. 129-151.
- /7/** Brezzi, F. and Bathe, K.-J. (1990), "A discourse on the stability conditions for mixed finite element formulations", *Comp. Methods. Appl. Mech. Eng.* 82, pp. 27-57.
- /8/** Brown, L. M. and Ham, R. K. (1971), "Dislocation particle interactions", *Strengthening Methods in Crystals*, Elsevier Publishing Company Ltd., pp. 12-136.
- /9/** Coleman, B. D. and Hodgdon, M. L. (1985), "On shear bands in ductile materials", *Arch. Ration. Mech. Anal.* 85, pp. 219-247.
- /10/** Cosserat, E. et F. (1909), *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et Fils, Paris.
- /11/** de Borst, R. (1991), "Simulation of strain localisation: A reappraisal of the Cosserat continuum", *Eng. Comput.* 8, pp. 317-332.
- /12/** de Borst, R. and Muhlhaus, H. B. (1992), "Gradient dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects", *Int. J. Numer. Methods Eng.* 35, pp. 521-540.
- /13/** de Borst, R. and Pamin, J. (1996), "Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity", *Int. J. Numer. Methods Eng.* 39, pp. 2477-2505.
- /14/** de Borst, R. and Sluys, L. J. (1991), "Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 90, pp. 805-827.
- /15/** Exadaktylos, G. (2001), "On the problem of the circular hole in an elastic material with microstructure", υποβληθέν

- /16/** Exadaktylos, G. (1998), "Gradient elasticity with surface energy: Mode-I crack problem", *Int. J. Solids and Structures* 35, pp. 421-456.
- /17/** Exadaktylos, G., Vardoulakis, I. and Aifantis, E. (1996), "Cracks in gradient elastic bodies with surface energy", *Int. J. Fracture* 79, pp. 107-119.
- /18/** Fleck, N. A. and Hutchinson, J. W. (1993), "A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity", *J. Mech. Phys. Solids* 41, pp. 1825-1857.
- /19/** Fleck, N. A. and Hutchinson, J. W. (1997), "Strain gradient plasticity", *Advances in Applied Mechanics* 13, pp. 295-361.
- /20/** Fleck, N. A., Muller, G. M., Ashby, M. F. and Hutchinson, J. W. (1994), "Strain gradient plasticity: theory and experiment", *Acta Metall. Mater.* 42, pp. 475-487.
- /21/** Fleck, N. A., Shu, J. Y. and King, W. E. (1999), "Finite elements for materials with strain gradient effects", *Int. J. Num. Methods Eng.* 44, pp. 373-391.
- /22/** Georgiadis, H. (2000), "Exact analysis of crack-tip fields in gradient-elastic anti-plane shear deformation", *Recent Advances in Mechanics*, Honorary Volume for Prof. A. N. Kounadis, edited by J. T. Katsikadelis, D. E. Beskos and E. E. Gdoutos, pp. 263-272, National Technical University of Athens.
- /23/** Georgiadis, H., Vardoulakis, I. and Lykotrafitis, G. (1999), "Torsional surface waves in a gradient-elastic half-space", *Wave Motion*, υποβληθέν.
- /24/** Huang, Y., Zhang, L., Guo, T.F. and Hwang, K.C. (1997), "Mixed-Mode near-tip fields for cracks in materials with strain gradient effects", *J. Mech. Phys. Solids* 45, pp. 439-465.
- /25/** Koiter, W. T. (1964), "Couple stresses in the theory of elasticity" I and II, *Proc. K. Ned. Akad. Wet. (B)* 67, pp. 17-44.
- /26/** "LAPACK Users' Guide", Third Edition (1999), The Society of Industrial and Applied Mathematics.
- /27/** Leblond, J. B., Perrin, G. and Devaux, J. (1994), "Bifurcation effects in ductile materials with damage localization", *Journal of Applied Mechanics* 61, pp. 236-242.
- /28/** Mindlin, R. D. and Tiersten, H. F. (1962), "Couple-stresses in linear elasticity", *Archs Ration. Mech. Anal.* 11, pp. 415-448.
- /29/** Mindlin, R. D. (1964), "Microstructure in linear elasticity", *Archs Ration. Mech. Anal.* 10, pp. 51-78.
- /30/** Mindlin, R. D. (1962), "Influence of Couple-stresses on Stress Concentrations", *Exp. Mechanics*. January 1963, pp. 1-7.

- /31/** Mindlin, R. D. and Eshel, N. N. (1968), "On first strain-gradient theories in linear elasticity", *Int. J. Solids Struct.* 4, pp. 109-124.
- /32/** Papanastasiou, P. and Vardoulakis, I. (1992), "Numerical analysis of progressive localization with application to borehole stability", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.* 16, pp. 183-198.
- /33/** Pijaudier-Cabot, G. and Bazant, Z. P. (1987), "Nonlocal damage theory", *J. Engng. Mech. ASCE* 113, pp. 1512-1533.
- /34/** Poole, W. J., Ashby, M. F. and Fleck, N. A. (1996), "Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals", *Scripta Metall. Mater.* 34, 559-564.
- /35/** Ramaswamy, S. and Aravas, N. (1998), "Finite element implementation of gradient plasticity models Part I: Gradient-dependent yield functions", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 163, pp. 11-32.
- /36/** Ramaswamy, S. and Aravas, N. (1998), "Finite element implementation of gradient plasticity models Part II: Gradient-dependent evolution equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 163, pp. 33-53.
- /37/** Ru, C. Q. and Aifantis, E. C. (1993), "A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity", *Acta Mechanica* 101, pp. 59-68.
- /38/** Shu, J. Y. and Fleck, N. A. (1998), "The prediction of a size effect in microindentation", *Int. J. Solids Struct.* 35, pp. 1363-1383.
- /39/** Stelmashenko, N. A., Walls, M. G., Brown, L. M. and Milman, Yu. V. (1993), "Microindentations on W and Mo oriented single crystals: An STM study", *Acta Metall. Mater.* 41, pp. 2855-2865.
- /40/** Toupin, R. A. (1962), "Elastic materials with couple-stresses", *Archs Ration. Mech. Anal.* 11, pp. 385-414.
- /41/** Tvergaard, V. and Needleman, A. (1995), "Effects of nonlocal damage in porous plastic solids", *Int. J. Solids Struct.* 32, pp. 1063-1077.
- /42/** Vardoulakis, I. (1989), "Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory", *Ingenieur Archiv* 59, pp. 106-113.
- /43/** Vardoulakis, I. and Aifantis, E. C. (1989), "Gradient dependent dilatancy and its implications in shear banding and liquefaction", *Ingenieur-Archiv* 59, pp. 197-208.
- /44/** Vardoulakis, I. and Aifantis E. (1991), "A gradient flow theory of plasticity for granular materials", *Acta Mechanica* 87, pp. 197-217.
- /45/** Vardoulakis, I., Exadaktylos, G. and Aifantis, E. (1996), "Gradient elasticity with surface energy. Mode III crack problem", *Int. J. Solids and Structures* 33, pp. 4531-4559.

- /46/** Vardoulakis, I. and Franziskonis, G. (1992), "Micro-structure in kinematic-hardening plasticity", *Eur. J. Mech./Solids* 11, pp. 467-486.
- /47/** Vardoulakis, I. and Georgiadis, H.G. (1997), "SH surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy", *Journal of Elasticity* 47, pp. 147-165.
- /48/** Vardoulakis, I. and Sulem, J. (1995), "Bifurcation Analysis in Geomechanics", *Blackie Academic & Professional, (Chapman Hall)*.
- /49/** Voigt, W. (1887), "Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle", *Abh. Ges. Wiss. Göttingen* 34.
- /50/** Xia, Z. C. and Hutchinson, J. W. (1996), "Crack tip fields in strain gradient plasticity", *J. Mech. Phys. Solids* 44, pp. 1621-1648.
- /51/** Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L. (2000), *The Finite Element Method*, 5<sup>th</sup> edition, Butterworth-Heinemann.
- /52/** Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L. (1997), "The finite element patch test revisited. A computer test for convergence, validation and error estimates", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 149, pp. 223-254.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

**Παρατήρηση 1:**  $A_{ij} = A_{ij}^t + A_{ki}^t n_k n_j + 2A_{[ik]} n_k n_j + n_i n_j n_k n_l A_{kl}$ .

**Απόδειξη.**

Είναι γνωστό ότι

$$A_{ij}^n = A_{ik} n_k n_j = n_k (A_{(ik)} + A_{[ik]}) n_j = \frac{1}{2} n_k (A_{ik} + A_{ki}) n_j + n_k A_{[ik]} n_j = \frac{1}{2} A_{ij}^n + \frac{1}{2} n_k A_{ki} n_j + n_k A_{[ik]} n_j,$$

οπότε

$$A_{ij}^n = 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k A_{ki} n_j.$$

Επίσης

$$\begin{aligned} A_{ij}^n &= 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k (A_{ki}^t + A_{ki}^n) n_j = 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k (A_{ki}^t + A_{kl} n_l n_i) n_j = \\ &= 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k A_{ki}^t n_j + \underbrace{n_k A_{kl} n_l n_i n_j}_{n_k A_{(kl)} n_l n_i n_j} = 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k A_{ki}^t n_j + n_k A_{(kl)} n_l n_i n_j, \end{aligned}$$

ή 
$$A_{ij}^n = 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k A_{ki}^t n_j + n_k A_{(kl)} n_l n_i n_j,$$

οπότε 
$$A_{ij} = A_{ij}^t + A_{ij}^n \Rightarrow A_{ij} = A_{ij}^t + n_k A_{ki}^t n_j + 2A_{[ik]} n_k n_j + n_k A_{(kl)} n_l n_i n_j.$$

**Εφαρμογή:** Για  $A_{ij} = u_{i,j}$  ισχύει:

$$u_{i,j} = D_j u_i + (D_i u_k) n_k n_j + 2u_{[i,k]} n_k n_j + n_i n_j n_k n_l u_{(k,l)}$$

οπότε 
$$D_j u_i + (D_i u_k) n_k n_j = u_{i,j} - 2u_{[i,k]} n_k n_j - n_i n_j n_k n_l u_{(k,l)}$$

ή

$$\boxed{(D u_i) n_j = n_k n_j D_i u_k + 2u_{[i,k]} n_k n_j + n_k u_{(k,p)} n_p n_i n_j}$$

**Παρατήρηση 2:**  $A_{ij}^t = B_{ij}^t \Leftrightarrow A_{ij}^t + n_k A_{ki}^t n_j = B_{ij}^t + n_k B_{ki}^t n_j .$

**Απόδειξη.**

Η απόδειξη της κατευθύνσεως  $\Rightarrow$  είναι προφανής.

Αποδεικνύεται τώρα η κατεύθυνση  $\Leftarrow$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} C_{ij}^t &= A_{ij}^t + n_k A_{ki}^t n_j = B_{ij}^t + n_k B_{ki}^t n_j \Rightarrow C_{ij}^t = C_{ij} - C_{il} n_l n_j = \\ &= A_{ij}^t + n_k A_{ki}^t n_j - \underbrace{A_{il}^t n_l n_j}_0 - n_k A_{ki}^t \underbrace{n_l n_l n_j}_1 = B_{ij}^t + n_k B_{ki}^t n_j - \underbrace{B_{il}^t n_l n_j}_0 - n_k B_{ki}^t \underbrace{n_l n_l n_j}_1 \end{aligned}$$

ή  $C_{ij}^t = A_{ij}^t = B_{ij}^t .$

**Εφαρμογή:** Για  $A_{ij} = u_{i,j}$  και  $B_{ij} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij}$ , ισχύει ότι

$$u_{i,j}^t = D_j u_i = (\varepsilon_{ij} + \Omega_{ij})^t \Leftrightarrow D_j u_i + n_j n_k D_i u_k = (\varepsilon_{ij} + \Omega_{ij})^t + (\varepsilon_{ij} + \Omega_{ij})^t n_k n_j .$$

Οπότε, σύμφωνα με την εφαρμογή της Παρατηρήσεως 1, η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$D_j u_i = (\varepsilon_{ij} + \Omega_{ij})^t \Leftrightarrow u_{i,j} - 2n_j n_k u_{[i,k]} - n_i n_j n_p n_q u_{(p,q)} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} - 2n_j n_k \Omega_{ik} - n_i n_j n_p n_q \varepsilon_{pq} .$$

**Παρατήρηση 3: Κατηγορίες συναρτήσεων**

Έστω μία συνάρτηση  $u(x)$ , όπου  $x \in \Omega$ . Ορίζονται οι παρακάτω κατηγορίες συναρτήσεων.

A)  $u(x) \in C^k$  εάν ορίζονται οι παράγωγοι της  $u(x)$  μέχρι και τάξεως  $k$  και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $\Omega$ .

B)  $L^2 u(x) \in L^2$  εάν ορίζεται το ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} u^2 dx$ , δηλαδή  $L^2 = \left\{ u \mid \int_{\Omega} u^2 dx < \infty \right\}$ .

Γ)  $u(x) \in H^k$  εάν  $u(x) \in L^2$ ,  $u'(x) \in L^2$ , ...,  $u^{(k)}(x) \in L^2$ .

**Παρατήρηση 4:**

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ \left[ (D_p n_p) n_k - D_k \right] (n_j \bar{\mu}_{jki} + n_i n_j n_l \bar{\mu}_{jlk}) \right\} u_i^* dS = \int_{\partial\Omega} (n_j \bar{\mu}_{jki} + n_i n_j n_l \bar{\mu}_{jlk}) D_k u_i^* dS - \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} [[\ell_j (n_k \bar{\mu}_{jki} + n_i n_k n_l \bar{\mu}_{lkj})]] u_i^* ds. \quad (1)$$

**Απόδειξη.**

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό για την εφαπτομενική παράγωγο  $D_k$ , είναι φανερό πως

$$D_j q_j = (D_p n_p) n_j q_j + [\nabla \times (\mathbf{n} \times \mathbf{q})] \cdot \mathbf{n}. \quad (2)$$

Από την προηγούμενη εξίσωση και το θεώρημα του Stokes προκύπτει

$$\int_S D_j q_j dS = \int_S (D_p q_p) n_j q_j dS + \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} [[\mathbf{n} \times \mathbf{q}]] \cdot \mathbf{s} ds. \quad (3)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$[[\mathbf{n} \times \mathbf{q}]] \cdot \mathbf{s} = [[e_{ijk} n_j q_k]] s_i = [[(\mathbf{s} \times \mathbf{n})_k q_k]] = [[\ell_k q_k]], \quad (4)$$

η (3) γίνεται

$$\int_S D_j q_j dS = \int_S (D_p q_p) n_j q_j dS + \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} [[\ell_j q_j]] ds. \quad (5)$$

Για  $q_j = \bar{m}_{ij} u_i^*$  η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\int_S D_j (\bar{m}_{ij} u_i^*) dS = \int_S (D_p q_p) n_j \bar{m}_{ij} u_i^* dS + \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} [[\ell_j \bar{m}_{ij}]] u_i^* ds. \quad (6)$$

Καθώς

$$D_j (\bar{m}_{ij} u_i^*) = (D_j \bar{m}_{ij}) u_i^* + \bar{m}_{ij} D_j u_i^* \quad (7)$$

η (6) μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_S \left\{ \left[ (D_p q_p) n_j - D_j \right] \bar{m}_{ij} \right\} u_i^* dS = \int_S \bar{m}_{ij} D_j u_i^* dS + \sum_{\alpha} \oint_{C^\alpha} [[\ell_j \bar{m}_{ij}]] u_i^* ds. \quad (8)$$

Τέλος θέτοντας  $\bar{m}_{ij} = n_k \bar{\mu}_{kji} + n_i n_p n_k \bar{\mu}_{kpi}$  στην (8) προκύπτει η εξίσωση (1).



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II

### Εφαρμογή των υπολογιστικών τεχνικών με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων

#### 1. Μικροπολική θεωρία.

##### Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης.

Οι άγνωστοι του προβλήματος περιγράφονται σε μητρωϊκή μορφή ( $n$  =βαθμοί ελευθερίας του στοιχείου):

$$\left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = [N(\mathbf{x})]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = [N(\mathbf{x})]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ \omega_3 \right\}_{1 \times 1} = [N_{\omega}(\mathbf{x})]_{1 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ \omega_3^* \right\}_{1 \times 1} = [N_{\omega}(\mathbf{x})]_{1 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \sigma_{[ij]}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ \sigma_{[12]} \right\}_{1 \times 1} = [N_{[\sigma]}(\mathbf{x})]_{1 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \sigma_{[ij]}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ \sigma_{[12]}^* \right\}_{1 \times 1} = [N_{[\sigma]}(\mathbf{x})]_{1 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

Επίσης, οι παράγωγοι των κομβικών αγνώστων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις.

$$\left\{ u_{(i,j)}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ 0 \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = [B(\mathbf{x})]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{(i,j)}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{1,1}^* \\ u_{2,2}^* \\ 0 \\ u_{1,2}^* + u_{2,1}^* \end{Bmatrix} = [B(\mathbf{x})]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ u_{[i,j]}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left\{ u_{2,1} - u_{1,2} \right\}_{1 \times 1} = [B_u(\mathbf{x})]_{1 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{[i,j]}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \frac{1}{2} \left\{ u_{2,1}^* - u_{1,2}^* \right\}_{1 \times 1} = [B_u(\mathbf{x})]_{1 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = 2\mu u_{(i,j)} + \lambda u_{(k,k)} \delta_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\left\{ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ 0 \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = [C] \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \} = [C] [B(\mathbf{x})] \{ d^e \}$$

$$\left\{ \mathbf{k}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} K_{13}^* \\ K_{23}^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \omega_{3,1}^* \\ \omega_{3,2}^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = [B_\omega(\mathbf{x})] \{ d^{e*} \} \quad \text{και}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \mu_{13} \\ \mu_{23} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = 4G\ell^2 [B_\omega(\mathbf{x})] \{ d^e \}.$$

Από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος και τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η εξίσωση του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου:

$$\begin{aligned} [k^e] = \int_{\Omega_e} \left( [B]^T [C] [B] + 2 \{ B_u \} [N_{[\sigma]}] - 2 \{ N_\omega \} [N_{[\sigma]}] \right) d\Omega + \\ + \int_{\Omega_e} \left( 4G\ell^2 [B_\omega]^T [B_\omega] + 2 \{ N_{[\sigma]} \} [B_u] - 2 \{ N_{[\sigma]} \} [N_\omega] \right) d\Omega . \end{aligned}$$

## 2. Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως III - Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης.

### 2.1. Στοιχείο III9-70.

Τα παρακάτω μητρώα περιγράφουν τους κομβικούς αγνώστους του προβλήματος όπου  $n$  είναι ο αριθμός των κομβικών αγνώστων (βαθμοί ελευθερίας) του στοιχείου.

$$\left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = [N(\mathbf{x})] \{ d^e \}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = [N(\mathbf{x})] \{ d^{e*} \}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \{ \omega_3 \}_{1 \times 1} = [N_\omega(\mathbf{x})] \{ d^e \}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \{ \omega_3^* \}_{1 \times 1} = [N_\omega(\mathbf{x})] \{ d^{e*} \}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ 2\varepsilon_{12}^* \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(ij)}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(2)} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(2)} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(2)} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_{(\sigma)}(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(ij)}^{(2)*}(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11}^{(2)*} \\ \bar{\sigma}_{22}^{(2)*} \\ \bar{\sigma}_{12}^{(2)*} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} N_{(\sigma)}(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \bar{\sigma}_{[12]}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} N_{[\sigma]}(\mathbf{x}) \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ \bar{\sigma}_{[12]}^{(2)*}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} N_{[\sigma]}(\mathbf{x}) \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}.$$

Στη συνέχεια περιγράφονται οι παράγωγοι των κομβικών αγνώστων.

$$\left\{ u_{(i,j)}(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} B(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{(i,j)}^*(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{1,1}^* \\ u_{2,2}^* \\ u_{1,2}^* + u_{2,1}^* \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} B(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ u_{[i,j]}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ u_{2,1} - u_{1,2} \right\}_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} B_u(\mathbf{x}) \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{[i,j]}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ u_{2,1}^* - u_{1,2}^* \right\}_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} B_u(\mathbf{x}) \\ 1 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) = 2\mu u_{(i,j)} + \lambda u_{(k,k)} \delta_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}) \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{(0)} \\ \sigma_{22}^{(0)} \\ \sigma_{12}^{(0)} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} C \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(i,j)}(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(\mathbf{x}) \\ 3 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{j,i} \Rightarrow \left\{ \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{13} \\ \bar{\kappa}_{23} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \omega_{3,1} \\ \omega_{3,2} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} B_{\omega}(\mathbf{x}) \\ 2 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} B_{\omega}(\mathbf{x}) \\ 2 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\mathbf{x}) \right\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11,1} \\ \varepsilon_{11,2} \\ \varepsilon_{22,1} \\ \varepsilon_{22,2} \\ 2\varepsilon_{12,1} \\ 2\varepsilon_{12,2} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} B_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ 6 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^e \\ n \times 1 \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}^*(\mathbf{x}) \right\}_{6 \times 1} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11,1}^* \\ \varepsilon_{11,2}^* \\ \varepsilon_{22,1}^* \\ \varepsilon_{22,2}^* \\ 2\varepsilon_{12,1}^* \\ 2\varepsilon_{12,2}^* \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} B_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ 6 \times n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d^{e*} \\ n \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i}) \Rightarrow$$

$$\{\bar{\bar{\kappa}}(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\kappa}}_{111} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{211} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{122} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{222} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 6} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11,1} \\ \varepsilon_{11,2} \\ \varepsilon_{22,1} \\ \varepsilon_{22,2} \\ 2\varepsilon_{12,1} \\ 2\varepsilon_{12,2} \end{Bmatrix}_{6 \times 1} = [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \{\bar{\bar{\kappa}}^*(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{2}{9} \ell^2 [2(\lambda + 3\mu)\bar{\kappa}_{ij} - 2\lambda\bar{\kappa}_{ji} + 3\lambda e_{ijk}\bar{\kappa}_{kl}] \Rightarrow$$

$$\{\bar{\mu}(\mathbf{x})\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_{13} \\ \bar{\mu}_{23} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \frac{4}{9} \ell^2 (\lambda + 3\mu) \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{13} \\ \bar{\kappa}_{23} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} + \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\kappa}}_{111} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{211} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{122} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{222} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left( c [B_\omega(\mathbf{x})]_{2 \times n} + [R]_{2 \times 4} [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} \right) \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \{\bar{\mu}^*(\mathbf{x})\}_{2 \times n} = \left( c [B_\omega(\mathbf{x})]_{2 \times n} + [R]_{2 \times 4} [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} \right) \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

Επίσης,

$$\bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{\ell^2}{9} [3\lambda(\bar{\kappa}_{ilk}\delta_{ij} + \bar{\kappa}_{lli}\delta_{jk} + \bar{\kappa}_{lij}\delta_{ki}) + 18\mu\bar{\kappa}_{ijk} + 2\lambda\bar{\kappa}_{pq}(\delta_{ij}e_{pqk} + \delta_{jk}e_{pqi} + \delta_{ki}e_{pqj})] \Rightarrow$$

$$\{\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\mu}}_{111} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{211} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{122} \\ \bar{\bar{\mu}}_{222} \end{Bmatrix} = \ell^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 6\mu + \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & 6\mu + \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 2\mu + \lambda \end{bmatrix}}_{[D_\kappa]} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\kappa}}_{111} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{211} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{122} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{222} \end{Bmatrix} + \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{[R]^T} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{13} \\ \bar{\kappa}_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x})\} = \left( [D_\kappa]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} + [R]^T_{4 \times 2} [B_\omega(\mathbf{x})]_{2 \times n} \right) \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \{\bar{\bar{\mu}}^*(\mathbf{x})\} = \left( [D_\kappa]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} + [R]^T_{4 \times 2} [B_\omega(\mathbf{x})]_{2 \times n} \right) \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$T_{(ik)} = n_j \bar{\mu}_{jki} \Rightarrow \{\mathbf{T}(\mathbf{x})\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{(12)} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} n_1 \bar{\bar{\mu}}_{111} + n_2 \bar{\bar{\mu}}_{211} \\ n_1 \bar{\bar{\mu}}_{122} + n_2 \bar{\bar{\mu}}_{222} \\ n_1 \bar{\bar{\mu}}_{211} + n_2 \bar{\bar{\mu}}_{122} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} n_1 & \frac{1}{3}n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}n_1 & n_2 \\ 0 & \frac{1}{3}n_1 & \frac{1}{3}n_2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\mu}}_{111} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{211} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{122} \\ \bar{\bar{\mu}}_{222} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \equiv$$

$$= [\bar{F}(\mathbf{x})]_{3 \times 4} \{\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = [\bar{F}(\mathbf{x})]_{3 \times 4} \left( [D_\kappa]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 6} [B_\varepsilon(\mathbf{x})]_{6 \times n} + [R]^T_{4 \times 2} [B_\omega(\mathbf{x})]_{2 \times n} \right) \{d^e\}_{n \times 1} \equiv [H(\mathbf{x})]_{3 \times n} \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και} \quad \left\{ \mathbf{T}^* (\mathbf{x}) \right\} = \begin{bmatrix} H(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \left\{ d^{e*} \right\}.$$

Το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος δίδεται από τη σχέση:

$$\left[ \bar{k}^e \right] = \left[ \bar{k}_\Omega^e \right] + \left[ \bar{k}_S^e \right]$$

όπου η ολοκλήρωση στον όγκο του στοιχείου δίνει,

$$\begin{aligned} \left[ \bar{k}_\Omega^e \right] = \int_{\Omega_e} & \left\{ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{(\sigma)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{[\sigma]} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} N_\omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{[\sigma]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\omega \end{bmatrix}^T \left( c \begin{bmatrix} B_\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\varepsilon \end{bmatrix} \right) - \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} N_\varepsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{(\sigma)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\varepsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_\varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_\omega \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} N_{[\sigma]} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B_u \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} N_{[\sigma]} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_\omega \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} N_{(\sigma)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_{(\sigma)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_\varepsilon \end{bmatrix} \right\} d\Omega \end{aligned}$$

και η ολοκλήρωση στο σύνορο του στοιχείου

$$\begin{aligned} \left[ \bar{k}_S^e \right] = \int_{\partial\Omega_e} & \left[ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} N_\varepsilon \end{bmatrix}^T \right] \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}^T - \left[ \begin{bmatrix} B_u \end{bmatrix}^T - 2 \begin{bmatrix} N_\omega \end{bmatrix}^T \right] \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}^T - \left[ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} N_\varepsilon \end{bmatrix}^T \right] \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} dS + \\ & + \int_{\partial\Omega_e} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}^T \left[ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_\varepsilon \end{bmatrix} \right] - \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} B_u \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} N_\omega \end{bmatrix} \right] - \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_\varepsilon \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} dS \end{aligned}$$

με

$$\begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_1 n_2 \\ n_1 n_2 \\ n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_2^2 & 2n_1 n_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & 2n_1 n_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & 2n_1 n_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 n_2 \end{bmatrix}.$$

### 3. Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως ΙΙΙ - Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το πρόβλημα της αντιεπίπεδης θραύσης (mode ΙΙΙ).

#### 3.1. Στοιχείο ΙΙΙ9-70.

Τα παρακάτω μητρώα περιγράφουν τους κομβικούς αγνώστους του προβλήματος όπου  $n$  είναι ο αριθμός των κομβικών αγνώστων (βαθμοί ελευθερίας) του στοιχείου.

$$\left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\} = \left\{ u_3 \right\} = \begin{bmatrix} N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \left\{ d^e \right\} \quad \text{και} \quad \left\{ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\} = \left\{ u_3^* \right\} = \begin{bmatrix} N(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \left\{ d^{e*} \right\}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\omega}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_2^* \\ \boldsymbol{\omega}_1^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13}^* \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23}^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(ij)}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(13)}^{(2)} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(23)}^{(2)} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{(\sigma)}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(ij)}^{(2)*}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(13)}^{(2)*} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{(23)}^{(2)*} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{(\sigma)}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{[ij]}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{[13]}^{(2)} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{[23]}^{(2)} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{[\sigma]}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{[ij]}^{(2)*}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{[13]}^{(2)*} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{[23]}^{(2)*} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_{[\sigma]}(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

Παράγωγοι των αγνώστων του προβλήματος.

$$\left\{ u_{(i,j)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ B(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{(i,j)}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{3,1}^* \\ u_{3,2}^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ B(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) &= 2\mu u_{(i,j)} + \lambda u_{(k,k)} \delta_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{13}^{(0)} \\ \boldsymbol{\sigma}_{23}^{(0)} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ C \right]_{2 \times 2} \left\{ u_{(i,j)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times n} = \left[ C \right]_{2 \times 2} \left[ B(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{\kappa}}_{ij} = \boldsymbol{\omega}_{j,i} \Rightarrow \left\{ \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{11} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{21} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{22} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{1,1} \\ \boldsymbol{\omega}_{1,2} \\ -(-\boldsymbol{\omega}_{2,1}) \\ -(-\boldsymbol{\omega}_{2,2}) \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}$$

$$\text{και} \quad \left\{ \bar{\boldsymbol{\kappa}}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left[ B_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13,1} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13,2} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23,1} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23,2} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13,1}^* \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{13,2}^* \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23,1}^* \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{23,2}^* \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i}) \Rightarrow \{\bar{\bar{\kappa}}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\kappa}}_{113} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{213} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{123} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{223} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13,1} \\ 2\varepsilon_{13,2} \\ 2\varepsilon_{23,1} \\ 2\varepsilon_{23,2} \end{Bmatrix} = [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \{d^e\}$$

$$\text{και } \{\bar{\bar{\kappa}}^*(\mathbf{x})\} = [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}.$$

Επίσης,

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{2}{9} \ell^2 [2(\lambda + 3\mu) \bar{\kappa}_{ij} - 2\lambda \bar{\kappa}_{ji} + 3\lambda e_{ijk} \bar{\kappa}_{kl}] \Rightarrow$$

$$\{\bar{\mu}(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_{11} \\ \bar{\mu}_{21} \\ \bar{\mu}_{12} \\ \bar{\mu}_{22} \end{Bmatrix} = \frac{2}{9} \ell^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 6\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + 3\mu) & -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda & 2(\lambda + 3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\mu \end{bmatrix}}_{[R_1]} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{21} \\ \bar{\kappa}_{12} \\ \bar{\kappa}_{22} \end{Bmatrix}_{4 \times n} + \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[R_2]} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{113} \\ \bar{\kappa}_{213} \\ \bar{\kappa}_{123} \\ \bar{\kappa}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} =$$

$$= \left( [R_1] [B_\omega(\mathbf{x})] + [R_2] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \right) \{d^e\}$$

$$\text{και } \{\bar{\mu}^*(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = \left( [R_1] [B_\omega(\mathbf{x})] + [R_2] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \right) \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{\ell^2}{9} \left[ 3\lambda (\bar{\kappa}_{ilk} \delta_{ij} + \bar{\kappa}_{lik} \delta_{jk} + \bar{\kappa}_{ljk} \delta_{ki}) + 18\mu \bar{\kappa}_{ijk} + 2\lambda \bar{\kappa}_{pq} (\delta_{ij} e_{pqk} + \delta_{jk} e_{pqi} + \delta_{ki} e_{pqj}) \right] \Rightarrow$$

$$\{\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} 3\bar{\bar{\mu}}_{113} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{213} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{123} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{223} \end{Bmatrix} = \ell^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 6\mu + \lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 6\mu + \lambda \end{bmatrix}}_{[D_\kappa]} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{113} \\ \bar{\kappa}_{213} \\ \bar{\kappa}_{123} \\ \bar{\kappa}_{223} \end{Bmatrix} + \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[R_2]^T} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{21} \\ \bar{\kappa}_{12} \\ \bar{\kappa}_{22} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x})\} = \left( [D_\kappa] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] + [R_2]^T [B_\omega(\mathbf{x})] \right) \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \{\bar{\bar{\mu}}^*(\mathbf{x})\} = \left( [D_\kappa] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] + [R_2]^T [B_\omega(\mathbf{x})] \right) \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$T_{ik} = n_j \bar{\mu}_{jki} = T_{ki} \Rightarrow \{\mathbf{T}(\mathbf{x})\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_1 \bar{\mu}_{113} + n_2 \bar{\mu}_{213} \\ n_1 \bar{\mu}_{123} + n_2 \bar{\mu}_{223} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \begin{Bmatrix} 3\bar{\mu}_{113} \\ 3\bar{\mu}_{213} \\ 3\bar{\mu}_{123} \\ 3\bar{\mu}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \equiv$$

$$\equiv [\bar{F}(\mathbf{x})]_{2 \times 4} \{\bar{\mu}(\mathbf{x})\}_{4 \times 1} = [\bar{F}(\mathbf{x})]_{2 \times 4} \left( [D_\kappa] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] + [R_2]^T [B_\omega(\mathbf{x})] \right) \{d^e\}_{n \times 1} \equiv [H(\mathbf{x})]_{2 \times n} \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \{\mathbf{T}^*(\mathbf{x})\}_{2 \times 1} = [H(\mathbf{x})]_{2 \times n} \{d^{e*}\}_{n \times 1}.$$

Επίσης χρησιμοποιούνται και τα παρακάτω μητρώα.

$$[S] = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_1 n_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \quad [Q] = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \quad \{W\} = \begin{Bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{Bmatrix}$$

Άρα το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου που προκύπτει από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\boxed{[\bar{k}^e] = [\bar{k}_\Omega^e] + [\bar{k}_S^e]}$$

όπου

$$\begin{aligned} [\bar{k}_\Omega^e] = \int_{\Omega_e} \left\{ [B]_{n \times 2}^T [C]_{2 \times 2} [B]_{2 \times n} + [B]_{n \times 2}^T [N_{(\sigma)}]_{2 \times n} + [B]_{n \times 2}^T [N_{(\sigma)}]_{2 \times n} - 2 [N_\omega]_{n \times 2}^T [N_{(\sigma)}]_{2 \times n} + [B_\omega]_{n \times 4}^T \left( [R_1]_{4 \times 4} [B_\omega]_{4 \times n} + [R_2]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 4} [B_\varepsilon]_{4 \times n} \right) - \right. \\ \left. - [N_\varepsilon]_{n \times 2}^T [N_{(\sigma)}]_{2 \times n} + [B_\varepsilon]_{n \times 4}^T [E]_{4 \times 4} \left( [D_K]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 4} [B_\varepsilon]_{4 \times n} + [R_2]_{4 \times 4}^T [B_\omega]_{4 \times n} \right) + [N_{(\sigma)}]_{n \times 2}^T [B]_{2 \times n} - 2 [N_{(\sigma)}]_{n \times 2}^T [N_\omega]_{n \times 2} + \right. \\ \left. + [N_{(\sigma)}]_{n \times 2}^T [B]_{2 \times n} - [N_{(\sigma)}]_{n \times 2}^T [N_\varepsilon]_{2 \times n} \right\} d\Omega \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} [\bar{k}_S^e] = \int_{\partial\Omega_e} \left[ \left( [B]_{n \times 2}^T - [N_\varepsilon]_{n \times 2}^T \right) - \left( [B]_{n \times 2}^T - 2 [N_\omega]_{n \times 2}^T \right) [S]_{2 \times 2}^T \right] [H]_{2 \times n} dS + \\ + \int_{\partial\Omega_e} [H]_{n \times 2}^T \left[ \left( [B]_{2 \times n} - [N_\varepsilon]_{2 \times n} \right) - [S]_{2 \times 2} \left( [B]_{2 \times n} - 2 [N_\omega]_{2 \times n} \right) \right] dS + \\ + \int_{\partial\Omega_e} \left\{ \left( \frac{1}{2} [B]_{n \times 2}^T - [N_\omega]_{n \times 2}^T \right) \{W\}_{2 \times 1} [Q]_{1 \times 4} \left( [R_1]_{4 \times 4} [B_\omega]_{4 \times n} + [R_2]_{4 \times 4} [E]_{4 \times 4} [B_\varepsilon]_{4 \times n} \right) \right\} dS + \\ + \int_{\partial\Omega_e} \left\{ \left( [B_\omega]_{n \times 4}^T [R_1]_{4 \times 4}^T + [B_\varepsilon]_{n \times 4}^T [E]_{4 \times 4}^T [R_2]_{4 \times 4}^T \right) \{Q\}_{4 \times 1}^T [W]_{1 \times 2}^T \left( \frac{1}{2} [B]_{2 \times n} - [N_\omega]_{2 \times n} \right) \right\} dS \end{aligned}$$

### 3.2. Στοιχείο III9-35.

Καθώς  $-\omega_2 = \varepsilon_{13}$  και  $\omega_1 = \varepsilon_{23}$  είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω διαδικασία στην οποία αποφεύγεται η επανάληψη των αγνώστων αυτών και εξοικονομείται υπολογιστική δύναμη.

Συγκεκριμένα οι άγνωστοι του προβλήματος γίνονται

$$\left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ u_3 \right\}_{1 \times 1} = \left[ N(\mathbf{x}) \right]_{1 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ u_3 \right\}_{1 \times 1} = \left[ N(\mathbf{x}) \right]_{1 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$



$$\{\mathbf{\beta}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \beta_{31} \\ \beta_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\omega_2 \\ 2\omega_1 \end{Bmatrix} = [N_{\beta}(\mathbf{x})] \{d^e\} \quad \text{και}$$

$$\{\mathbf{\beta}^*(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \beta_{31}^* \\ \beta_{32}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{3,1}^* \\ u_{3,2}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13}^* \\ 2\varepsilon_{23}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2\omega_2^* \\ 2\omega_1^* \end{Bmatrix} = [N_{\beta}(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}$$

$$\{\bar{\sigma}_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{13}^{(2)} \\ \bar{\sigma}_{23}^{(2)} \end{Bmatrix} = [N_{\sigma}(\mathbf{x})] \{d^e\} \quad \text{και} \quad \{\bar{\sigma}_{ij}^{(2)*}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{13}^{(2)*} \\ \bar{\sigma}_{23}^{(2)*} \end{Bmatrix} = [N_{\sigma}(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των κομβικών αγνώστων.

Οι παράγωγοι των αγνώστων του προβλήματος είναι:

$$\{u_{(i,j)}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} = [B(\mathbf{x})] \{d^e\} \quad \text{και} \quad \{u_{(i,j)}^*(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} u_{3,1}^* \\ u_{3,2}^* \end{Bmatrix} = [B(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)} = 2\mu u_{(i,j)} + \lambda u_{(k,k)} \delta_{ij} \Rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{13}^{(0)} \\ \sigma_{23}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix} = [C] \{u_{(i,j)}(\mathbf{x})\} = [C] [B(\mathbf{x})] \{d^e\}$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \omega_{,i} \Rightarrow \{\bar{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{21} \\ \bar{\kappa}_{12} \\ \bar{\kappa}_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{1,1} \\ \omega_{1,2} \\ -(-\omega_{2,1}) \\ -(-\omega_{2,2}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \beta_{32,1} \\ \beta_{32,2} \\ -\beta_{31,1} \\ -\beta_{31,2} \end{Bmatrix} = [B_{\omega}(\mathbf{x})] \{d^e\}$$

$$\text{και} \quad \{\bar{\boldsymbol{\kappa}}^*(\mathbf{x})\} = [B_{\omega}(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}(\mathbf{x})\} = \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{13,1} \\ 2\varepsilon_{13,2} \\ 2\varepsilon_{23,1} \\ 2\varepsilon_{23,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{31,1} \\ \beta_{31,2} \\ \beta_{32,1} \\ \beta_{32,2} \end{Bmatrix} = [B_{\varepsilon}(\mathbf{x})] \{d^e\} \quad \text{και} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}_{ij,k}^*(\mathbf{x})\} = [B_{\varepsilon}(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}$$

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ki,j} + \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i}) \Rightarrow \left\{ \bar{\bar{\kappa}}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\kappa}}_{113} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{213} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{123} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{223} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{31,1} \\ \beta_{31,2} \\ \beta_{32,1} \\ \beta_{32,2} \end{Bmatrix} = [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \{d^e\}$$

$$\kappa \text{ και } \left\{ \bar{\bar{\kappa}}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{2}{9} \ell^2 [2(\lambda + 3\mu) \bar{\kappa}_{ij} - 2\lambda \bar{\kappa}_{ji} + 3\lambda e_{ijk} \bar{\kappa}_{kl}] \Rightarrow$$

$$\left\{ \bar{\mu}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \bar{\mu}_{11} \\ \bar{\mu}_{21} \\ \bar{\mu}_{12} \\ \bar{\mu}_{22} \end{Bmatrix} = \frac{2}{9} \ell^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 6\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + 3\mu) & -2\lambda & 0 \\ 0 & -2\lambda & 2(\lambda + 3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\mu \end{bmatrix}}_{[R_1]} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{21} \\ \bar{\kappa}_{12} \\ \bar{\kappa}_{22} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} + \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[R_2]} \begin{Bmatrix} \bar{\bar{\kappa}}_{113} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{213} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{123} \\ \bar{\bar{\kappa}}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} =$$

$$= \left( [R_1] [B_\omega(\mathbf{x})] + [R_2] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \right) \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\kappa \text{ και } \left\{ \bar{\mu}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left( [R_1] [B_\omega(\mathbf{x})] + [R_2] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] \right) \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$\bar{\bar{\mu}}_{ijk} = \frac{\ell^2}{9} \left[ 3\lambda (\bar{\kappa}_{ilk} \delta_{ij} + \bar{\kappa}_{lli} \delta_{jk} + \bar{\kappa}_{lji} \delta_{ki}) + 18\mu \bar{\kappa}_{ijk} + 2\lambda \bar{\kappa}_{pq} (\delta_{ij} e_{pqk} + \delta_{jk} e_{pqi} + \delta_{ki} e_{pqj}) \right] \Rightarrow$$

$$\left\{ \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} 3\bar{\bar{\mu}}_{113} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{213} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{123} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \ell^2 \underbrace{\begin{bmatrix} 6\mu + \lambda & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 6\mu + \lambda \end{bmatrix}}_{[D_\kappa]} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{113} \\ \bar{\kappa}_{213} \\ \bar{\kappa}_{123} \\ \bar{\kappa}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} + \frac{2}{3} \ell^2 \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[R_2]^T} \begin{Bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{21} \\ \bar{\kappa}_{12} \\ \bar{\kappa}_{22} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left( [D_\kappa] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] + [R_2]^T [B_\omega(\mathbf{x})] \right) \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\kappa \text{ και } \left\{ \bar{\bar{\mu}}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left( [D_\kappa] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] + [R_2]^T [B_\omega(\mathbf{x})] \right) \{d^{e*}\}_{n \times 1}$$

$$T_{ik} = n_j \bar{\mu}_{jki} = T_{ki} \Rightarrow \left\{ \mathbf{T}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} T_{13} \\ T_{23} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} n_1 \bar{\bar{\mu}}_{113} + n_2 \bar{\bar{\mu}}_{213} \\ n_1 \bar{\bar{\mu}}_{123} + n_2 \bar{\bar{\mu}}_{223} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \begin{Bmatrix} 3\bar{\bar{\mu}}_{113} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{213} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{123} \\ 3\bar{\bar{\mu}}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \mathbf{T}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = [\bar{F}(\mathbf{x})]_{2 \times 4} \left\{ \bar{\bar{\mu}}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = [\bar{F}(\mathbf{x})]_{2 \times 4} \left( [D_\kappa] [E] [B_\varepsilon(\mathbf{x})] + [R_2]^T [B_\omega(\mathbf{x})] \right) \{d^e\}_{n \times 1} \equiv [H(\mathbf{x})]_{2 \times n} \{d^e\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \left\{ \mathbf{T}^* (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \left[ \mathbf{H} (\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}.$$

Επίσης χρησιμοποιούνται τα μητρώα:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_1 n_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_2 & n_2^2 \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{W}\} = \begin{Bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{Bmatrix}$$

Άρα το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\left[ \bar{k}^e \right]_{n \times n} = \left[ \bar{k}_{\Omega}^e \right]_{n \times n} + \left[ \bar{k}_S^e \right]_{n \times n}$$

όπου

$$\begin{aligned} \left[ \bar{k}_{\Omega}^e \right] = \int_{\Omega_e} \left\{ \left[ \mathbf{B} \right]^T \left[ \mathbf{C} \right] \left[ \mathbf{B} \right] + \left[ \mathbf{B} \right]^T \left[ \mathbf{N}_{\sigma} \right] - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right]^T \left[ \mathbf{N}_{\sigma} \right] + \left[ \mathbf{B}_{\omega} \right]^T \left( \left[ \mathbf{R}_1 \right] \left[ \mathbf{B}_{\omega} \right] + \left[ \mathbf{R}_2 \right] \left[ \mathbf{E} \right] \left[ \mathbf{B}_{\varepsilon} \right] \right) - \right. \\ \left. + \left[ \mathbf{B}_{\varepsilon} \right]^T \left[ \mathbf{E} \right]^T \left( \left[ \mathbf{D}_{\kappa} \right] \left[ \mathbf{E} \right] \left[ \mathbf{B}_{\varepsilon} \right] + \left[ \mathbf{R}_2 \right]^T \left[ \mathbf{B}_{\omega} \right] \right) + \left[ \mathbf{N}_{\sigma} \right]^T \left[ \mathbf{B} \right] - \left[ \mathbf{N}_{\sigma} \right]^T \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right] \right\} d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \bar{k}_S^e \right] = \int_{\partial\Omega_e} \left( \left[ \mathbf{B} \right]^T - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right]^T \right) \left[ \mathbf{S} \right]^T \left[ \mathbf{H} \right] dS + \int_{\partial\Omega_e} \left[ \mathbf{H} \right]^T \left[ \mathbf{S} \right] \left( \left[ \mathbf{B} \right] - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right] \right) dS + \\ + \int_{\partial\Omega_e} \left( \left[ \mathbf{B} \right]^T - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right]^T \right) \left[ \mathbf{H} \right] dS + \int_{\partial\Omega_e} \left[ \mathbf{H} \right]^T \left( \left[ \mathbf{B} \right] - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right] \right) dS + \\ + \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{2} \left\{ \left( \left[ \mathbf{B} \right]^T - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right]^T \right) \left\{ \mathbf{W} \right\} \left[ \mathbf{Q} \right] \left( \left[ \mathbf{R}_1 \right] \left[ \mathbf{B}_{\omega} \right] + \left[ \mathbf{R}_2 \right] \left[ \mathbf{E} \right] \left[ \mathbf{B}_{\varepsilon} \right] \right) \right\} dS + \\ + \int_{\partial\Omega_e} \frac{1}{2} \left\{ \left( \left[ \mathbf{B}_{\omega} \right]^T \left[ \mathbf{R}_1 \right]^T + \left[ \mathbf{B}_{\varepsilon} \right]^T \left[ \mathbf{E} \right]^T \left[ \mathbf{R}_2 \right]^T \right) \left\{ \mathbf{Q} \right\}^T \left\{ \mathbf{W} \right\}^T \left( \left[ \mathbf{B} \right] - \left[ \mathbf{N}_{\beta} \right] \right) \right\} dS + \end{aligned}$$

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

### Θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως I

#### 1. Το πρόβλημα συνοριακής τιμής.

Σε αυτό το σημείο της διατριβής παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως, τύπου I. Ακολουθώντας τα βήματα του κεφαλαίου 4, το πρόβλημα μπορεί να περιγραφεί εναλλακτικά από τη συνθήκη  $\delta\Pi = 0$ , όπου

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}) = & \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tilde{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\alpha})) dV + \int_{\Omega} (u_{i,j} - \alpha_{ij}) \tilde{\sigma}_{ji}^{(2)} dV + \\ & - \int_{\Omega} f_i u_i dV - \int_{\Gamma_P} \tilde{P}_i u_i dS - \int_{\Gamma_R} \tilde{R}_i n_j \alpha_{ij} dS - \sum_{\alpha} \oint_{C_E^{\alpha}} \tilde{E}_i u_i ds + \\ & + \int_{\partial\Omega} (D_j u_i - \alpha_{ij}^t) n_k \tilde{\mu}_{kji}(\boldsymbol{\alpha}) dS \end{aligned} \quad (1)$$

όπου

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \quad \tilde{\kappa}_{ijk} = \alpha_{k(i,j)}, \quad \tilde{\mu}_{ijk} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{\kappa}_{ijk}}, \quad \delta u_i = 0 \text{ στο } \Gamma_u \text{ και στο } C_u^{\alpha}, \text{ και } n_k \delta \alpha_{ik} = 0 \text{ στο } \Gamma_d.$$

Το παραπάνω συναρτησιακό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάπτυξη υπολογιστικών τεχνικών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπου οι ποσότητες  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  και  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$  θεωρούνται ως ανεξάρτητοι κομβικοί άγνωστοι. Σε πρόσφατη εργασία τους ο Fleck και οι συνεργάτες του [21] χρησιμοποίησαν υπολογιστικές μεθόδους που αντιστοιχούν στην παραπάνω έκφραση, χωρίς όμως να λάβουν υπόψη τον τελευταίο όρο ο οποίος επιβάλλει τη συνθήκη  $D_j u_i = \alpha_{ij}^t$  στο σύνορο. Η παράλειψη αυτού του όρου οδηγεί σε μη-συμμετρικό μητρώο ακαμψίας και, όπως αποδείχθηκε κατά τη διάρκεια των εφαρμογών που έγιναν στα πλαίσια της διατριβής, προκαλεί «ταλάντωση» της αριθμητικής λύσης στο σύνορο του σώματος.

Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί πως ο αριθμητικός υπολογισμός της πραγματικής τάσης και της πραγματικής τάσης ζεύγους δεν αποτελεί τετριμμένη διαδικασία, όταν χρησιμοποιείται η θεωρία τύπου I.

Γενικά η τάση,  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(0)} - \tilde{\mu}_{kij,k}$ , είναι διαφορετική από την πραγματική τάση.

Συγκεκριμένα η πραγματική τάση και η πραγματική τάση ζεύγους προκύπτουν ως

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} - \frac{1}{3}\tilde{\sigma}_{ji}^{(2)} - \frac{1}{3}\tilde{\mu}_{ijk,k} \quad \text{και} \quad \mu_{ij} = \frac{4}{3}\tilde{\mu}_{ikp}e_{jkp}. \quad (2)$$

Οι ποσότητες  $\sigma_{ij}^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}$  και  $\tilde{\mu}_{ijk}$  υπολογίζονται αμέσως, ο ορισμός όμως του  $\sigma_{ij}$  από την (2) απαιτεί τον υπολογισμό του  $\tilde{\mu}_{ijk,k}$ , το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της ακρίβειας.

Συμπερασματικά, η ασθενής μορφή του προβλήματος έχει την ακόλουθη μορφή.

Να βρεθούν οι ποσότητες  $\mathbf{u} \in H^1$ ,  $\boldsymbol{\alpha} \in H^1$  και  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \in L^2$  τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji}^{(0)} + \tilde{\sigma}_{ji}^{(2)}) u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega} \tilde{T}_{ik} u_{i,k}^* dS = \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} \tilde{P}_i u_i^* dS + \sum_{\alpha} \oint_{C_{\xi}^{\alpha}} \tilde{E}_i u_i^* ds \quad \forall \mathbf{u}^* \in U, \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} (-\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} \alpha_{ji}^* + \tilde{\mu}_{kij} \tilde{\kappa}_{kij}^*) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tilde{T}_{ik} \alpha_{ik}^* dS = \int_{\Gamma_R} \tilde{R}_i n_k \alpha_{ik}^* dS \quad \forall \boldsymbol{\alpha}^* \in V, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} (u_{i,j} - \alpha_{ij}) \tilde{\sigma}_{ji}^{(2)*} d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)*} \in L^2, \quad (5)$$

$$\int_{\partial\Omega} (u_{i,k}^t - \alpha_{ik}^t) \tilde{T}_{ik}^* dS = 0 \quad \forall \boldsymbol{\alpha}^* \in V_0, \quad (6)$$

και

$$u_i = \tilde{u}_i \quad \text{στην } \Gamma_u \quad (7)$$

$$Du_i = \tilde{d}_i \quad \text{στην } \Gamma_d \quad (8)$$

$$u_i = \tilde{u}_i^{\alpha} \quad \text{στην } C_u^{\alpha} \quad (9)$$

όπου

$$U = \left\{ \mathbf{u}^* \left( \mathbf{u}^* \in H^1, \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_u \text{ και στην } C_u^{\alpha} \right) \right\} \quad (10)$$

$$V = \left\{ \boldsymbol{\alpha}^* \left( \boldsymbol{\alpha}^* \in H^1, \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ στην } \Gamma_d \right) \right\}. \quad (11)$$

και

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial u_{(i,j)}}, \quad \tilde{T}_{ij} = n_k \tilde{\mu}_{kji}, \quad \tilde{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{ijk}}, \quad \tilde{W} = \tilde{W}(u_{(i,j)}, \tilde{\kappa}_{ijk}(\boldsymbol{\alpha})), \quad \text{και} \\ \tilde{\kappa}_{ijk}(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_{k(i,j)}, \quad \text{και} \quad \tilde{\kappa}_{ijk}^* = \alpha_{k(i,j)}^*. \quad (12)$$

Στις εφαρμογές που ακολουθούν, θεωρείται ένα υλικό στο οποίο η ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης έχει τη μορφή  $W = \tilde{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\kappa}})$  και

$$\tilde{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{\kappa}_{ijk}} = \frac{\ell^2}{2} \left[ \lambda (\tilde{\kappa}_{ipp} \delta_{jk} + \tilde{\kappa}_{jpp} \delta_{ik}) + \mu (2\tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{kji} + \tilde{\kappa}_{kij}) \right].$$

## 2. Επίλυση προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

### 2.1. Ανάπτυξη στοιχείων.

Τα στοιχεία που υποβάλλονται στον έλεγχο συρραφής είναι (Σχήμα III.1):

(α) το στοιχείο **I5-28**. Πρόκειται για ισοπαραμετρικό στοιχείο με πέντε κόμβους και εικοσιοκτώ κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{12})$  είναι κομβικοί άγνωστοι στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους, ενώ οι ποσότητες  $(\tilde{\sigma}_{11}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{21}^{(2)})$  εμφανίζονται ως κομβικοί άγνωστοι στον κεντρικό κόμβο. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ , ενώ η ποσότητα  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$  είναι μόνον τμηματικά συνεχής.

(β) το στοιχείο **I13-70** το οποίο είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο με δεκατρείς κόμβους και 70 κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{12})$  είναι κομβικοί άγνωστοι στους εννέα κόμβους που βρίσκονται στις πλευρές και στο κέντρο του στοιχείου, ενώ οι ποσότητες  $(\tilde{\sigma}_{11}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{21}^{(2)})$  αποτελούν κομβικούς αγνώστους σε τέσσερις εσωτερικούς κόμβους οι οποίοι αντιστοιχούν στα σημεία  $2 \times 2$  ολοκλήρωσης κατά Gauss. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ , ενώ η ποσότητα  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)}$  είναι μόνον τμηματικά συνεχής. Τέλος,

(γ) το στοιχείο **III9-70**. Είναι ισοπαραμετρικό στοιχείο με εννέα κόμβους και εβδομήντα κομβικούς αγνώστους. Οι ποσότητες  $(u_1, u_2, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{12})$  είναι κομβικοί άγνωστοι και στους εννέα κόμβους, ενώ οι ποσότητες  $(\tilde{\sigma}_{11}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{21}^{(2)})$  αποτελούν επιπλέον κομβικούς αγνώστους στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους. Το συγκεκριμένο στοιχείο εξασφαλίζει τη συνεχή πεδία για όλους τους κομβικούς αγνώστους.

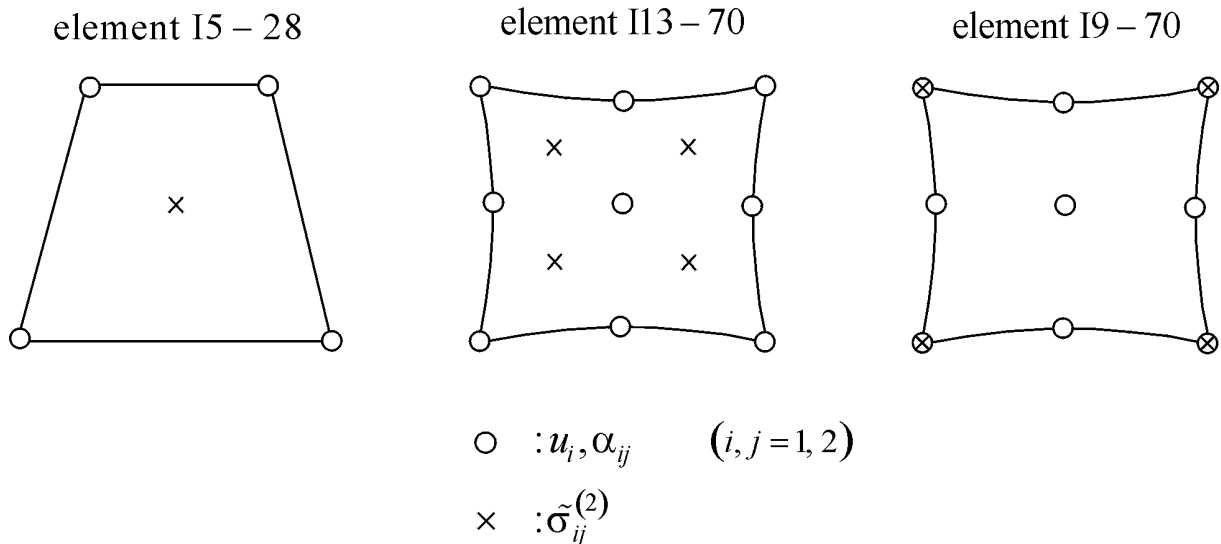
Στην περίπτωση του στοιχείου I5-28 η κατανομή που επιβάλλεται, ώστε το στοιχείο να είναι σε θέση να αναπαράγει την ακριβή λύση, είναι της μορφής

$$u_i = A_i + B_i x_1 + C_i x_2 + D_i x_1 x_2, \quad i = 1, 2$$

ενώ για τα στοιχεία I9-70 και I3-70 της μορφής

$$u_i = A_i + B_i x_1 + C_i x_2 + D_i x_1 x_2 + E_i x_1^2 + F_i x_2^2 + G_i x_1 x_2^2 + H_i x_1^2 x_2 + K_i x_1^2 x_2^2, \quad i = 1, 2$$

όπου οι συντελεστές  $A_i, B_i, \dots, K_i$  είναι σταθερές.



**Σχήμα III.1:** Τύπος πεπερασμένων στοιχείων I5-28, I9-70 και I13-70 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως I.

Οι απαιτούμενες μαζικές δυνάμεις για την ισορροπία,  $f_i = -\sigma_{ji,j}$ , είναι  $f_1 = -D_2(\mu + \lambda)$  και  $f_2 = -D_1(\mu + \lambda)$  για την πρώτη κατανομή, και

$$f_1 = -\lambda(D_2 + 2H_2x_1 + 2G_2x_2 + 4K_2x_1x_2) - 2(2\mu + \lambda)(E_1 + H_1x_2 + K_1x_2^2) + 4K_1\ell^2(3\mu + \lambda) - \mu(D_2 + 2F_1 + 2G_1x_1 + 2H_2x_1 + 2K_1x_1^2 + 2G_2x_2 + 4K_2x_1x_2),$$

$$f_2 = -\lambda(D_1 + 2H_1x_1 + 2G_1x_2 + 4K_1x_1x_2) - 2(2\mu + \lambda)(F_2 + G_2x_1 + K_2x_1^2) + 4\ell^2K_2(3\mu + \lambda) - \mu(D_1 + 2E_2 + 2H_1x_1 + 2G_1x_2 + 2H_2x_2 + 2K_2x_2^2 + 4K_1x_1x_2)$$

για τη δεύτερη.

Το πεδίο μετατοπίσεων που αναφέρθηκε παραπάνω εφαρμόζεται στην περιοχή του Σχήματος 4.2. Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι

$$u_1, u_2, \alpha_{22}, \alpha_{12} \text{ στις πλευρές } AB \text{ και } CD$$

$$u_1, u_2, \alpha_{11}, \alpha_{21} \text{ στις πλευρές } BC \text{ και } AD.$$

Η συμπεριφορά των παραπάνω στοιχείων είναι ανάλογη με των αντίστοιχων της θεωρίας τύπου III. Το στοιχείο I9-70 περνάει τον έλεγχο συρραφής, ενώ αντίθετα τα στοιχεία I5-28 και I13-70 αποτυγχάνουν.

**2.2. Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το στοιχείο 19-70.**

Οι μεταβλητές του προβλήματος περιγράφονται στις παρακάτω σχέσεις με μορφή μητρώων, όπου  $n$  είναι ο αριθμός των μεταβλητών (βαθμοί ελευθερίας) ανά στοιχείο.

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} & \text{και} & \left\{ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \\ \\ \left\{ \mathbf{a}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ N_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} & \text{και} & \left\{ \mathbf{a}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{11}^* \\ \alpha_{22}^* \\ \alpha_{21}^* \\ \alpha_{12}^* \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ N_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \\ \\ \left\{ \tilde{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^{(2)} \\ \tilde{\sigma}_{22}^{(2)} \\ \tilde{\sigma}_{12}^{(2)} \\ \tilde{\sigma}_{21}^{(2)} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ N_\sigma(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} & \text{και} & \left\{ \tilde{\sigma}^{(2)*}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}^{(2)*} \\ \tilde{\sigma}_{22}^{(2)*} \\ \tilde{\sigma}_{12}^{(2)*} \\ \tilde{\sigma}_{21}^{(2)*} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ N_\sigma(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \end{aligned}$$

Σε μητρωϊκή μορφή περιγράφονται και οι παράγωγοι των αγνώστων του προβλήματος. Έτσι,

$$\left\{ u_{i,j}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_u(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{i,j}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{1,1}^* \\ u_{2,2}^* \\ u_{2,1}^* \\ u_{1,2}^* \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_u(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) = 2\mu u_{(i,j)} + \lambda u_{(k,k)} \delta_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\left\{ \sigma^{(0)}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{(0)} \\ \sigma_{22}^{(0)} \\ \sigma_{12}^{(0)} \\ \sigma_{21}^{(0)} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,1} \\ u_{1,2} \end{Bmatrix} = [C]_{4 \times 4} \left\{ u_{i,j}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times n} = [C]_{4 \times 4} [B_u(\mathbf{x})]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \alpha_{ij,k}(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11,1} \\ \alpha_{11,2} \\ \alpha_{22,1} \\ \alpha_{22,2} \\ \alpha_{12,1} \\ \alpha_{12,2} \\ \alpha_{21,1} \\ \alpha_{21,2} \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \left[ B_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{8 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \alpha_{ij,k}^*(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} \alpha_{11,1}^* \\ \alpha_{11,2}^* \\ \alpha_{22,1}^* \\ \alpha_{22,2}^* \\ \alpha_{12,1}^* \\ \alpha_{12,2}^* \\ \alpha_{21,1}^* \\ \alpha_{21,2}^* \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \left[ B_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{8 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$



$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \alpha_{k(i,j)} \Rightarrow$$

$$\left\{ \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{111}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{211}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{122}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{222}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{121}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{221}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{112}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{212}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{Bmatrix} \alpha_{11,1} \\ \alpha_{11,2} \\ \alpha_{22,1} \\ \alpha_{22,2} \\ \alpha_{12,1} \\ \alpha_{12,2} \\ \alpha_{21,1} \\ \alpha_{21,2} \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \left\{ \alpha_{ij,k}(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} B_{\alpha}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{8 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}$$

$$\text{Ομοίως } \left\{ \tilde{\kappa}^*(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} B_{\alpha}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{8 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}.$$

Επίσης,

$$\left\{ \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mu}_{111}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{211}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{122}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{222}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{121}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{221}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{112}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mu}_{212}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \frac{\ell^2}{2} \begin{bmatrix} 2(2\mu + \lambda) & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \frac{3\mu + \lambda}{2} & 0 & \lambda & \frac{3\mu + \lambda}{2} & 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & \frac{3\mu + \lambda}{2} & 0 & 0 & \mu & 0 & \frac{3\mu + \lambda}{2} \\ 0 & \lambda & 0 & 2(2\mu + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\mu + \lambda}{2} & 0 & \lambda & \frac{3\mu + \lambda}{2} & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 2\mu & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda & 0 & \frac{3\mu + \lambda}{2} & 0 & 0 & \mu & 0 & \frac{3\mu + \lambda}{2} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{111}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{211}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{122}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{222}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{121}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{221}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{112}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{212}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{8 \times 1} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \tilde{D} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \left\{ \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{D} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} \tilde{A} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} B_{\alpha}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{8 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \left\{ \tilde{\mu}^*(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{D} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} \tilde{A} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} B_{\alpha}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{8 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\tilde{T}_{ik} = n_j \tilde{\mu}_{jki} \Rightarrow$$

$$\left\{ \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{11} \\ \tilde{T}_{22} \\ \tilde{T}_{21} \\ \tilde{T}_{12} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} n_1 \tilde{\mu}_{111} + n_2 \tilde{\mu}_{211} \\ n_1 \tilde{\mu}_{122} + n_2 \tilde{\mu}_{222} \\ n_1 \tilde{\mu}_{112} + n_2 \tilde{\mu}_{212} \\ n_1 \tilde{\mu}_{121} + n_2 \tilde{\mu}_{221} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2/2 & 0 & 0 & n_2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1/2 & n_2 & 0 & 0 & 0 & n_1/2 \\ 0 & 0 & n_2/2 & 0 & 0 & 0 & n_1 & n_2/2 \\ 0 & n_1/2 & 0 & 0 & n_1/2 & n_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mu}_{111} \\ \tilde{\mu}_{211} \\ \tilde{\mu}_{122} \\ \tilde{\mu}_{222} \\ \tilde{\mu}_{121} \\ \tilde{\mu}_{221} \\ \tilde{\mu}_{112} \\ \tilde{\mu}_{212} \end{Bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \tilde{F}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{4 \times 8} \left\{ \tilde{\mu}(\mathbf{x}) \right\}_{8 \times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{F}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{4 \times 8} \begin{bmatrix} \tilde{D} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} \tilde{A} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \begin{bmatrix} B_{\alpha}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{8 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \equiv \begin{bmatrix} H(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}.$$

$$\text{Ομοίως } \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left[ \mathbf{H}(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}.$$

Στη συνέχεια περιγράφεται ένας συστηματικός τρόπος υπολογισμού του κάθετου  $A_{ij}^n$  και εφαπτομενικού  $A_{ij}^t$  μέρους ενός γενικού τανυστή  $A_{ij}$

$$A_{ij}^n = A_{ik} n_k n_j \Rightarrow$$

$$\left\{ A^n(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} A_{11}^n \\ A_{22}^n \\ A_{21}^n \\ A_{12}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{1k} n_k n_1 \\ A_{2k} n_k n_2 \\ A_{2k} n_k n_1 \\ A_{1k} n_k n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (A_{11}n_1 + A_{12}n_2)n_1 \\ (A_{21}n_1 + A_{22}n_2)n_2 \\ (A_{21}n_1 + A_{22}n_2)n_1 \\ (A_{11}n_1 + A_{12}n_2)n_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 & n_1 n_2 \\ 0 & n_2^2 & n_1 n_2 & 0 \\ 0 & n_1 n_2 & n_1^2 & 0 \\ n_1 n_2 & 0 & 0 & n_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{21} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \equiv \underbrace{\left[ G^n(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times 4} \underbrace{\left\{ A(\mathbf{x}) \right\}}_{4 \times 1}$$

$$A_{ik}^t = A_{ik} - A_{ik}^n \Rightarrow \left\{ A^t(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} A_{11}^t \\ A_{22}^t \\ A_{21}^t \\ A_{12}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-n_1^2 & 0 & 0 & -n_1 n_2 \\ 0 & 1-n_2^2 & -n_1 n_2 & 0 \\ 0 & -n_1 n_2 & 1-n_1^2 & 0 \\ -n_1 n_2 & 0 & 0 & 1-n_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{22} \\ A_{21} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \equiv \underbrace{\left[ G^t(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times 4} \underbrace{\left\{ A(\mathbf{x}) \right\}}_{4 \times 1}$$

Με τον τρόπο αυτό μπορεί να υπολογιστεί το εφαπτομενικό μέρος οποιουδήποτε τανυστή:

$$\left\{ u_{i,j}^t(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \underbrace{\left[ G^t(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times 4} \underbrace{\left\{ u_{i,j}(\mathbf{x}) \right\}}_{4 \times 1} = \underbrace{\left[ G^t(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times 4} \underbrace{\left[ B_u(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times n} \underbrace{\left\{ d^e \right\}}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \alpha_{ij}^t(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \underbrace{\left[ G^t(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times 4} \underbrace{\left\{ \alpha_{ij}(\mathbf{x}) \right\}}_{4 \times 1} = \underbrace{\left[ G^t(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times 4} \underbrace{\left[ N_\alpha(\mathbf{x}) \right]}_{4 \times n} \underbrace{\left\{ d^e \right\}}_{n \times 1}.$$

Τελικά το μητρώο ακαμψίας που προκύπτει από την ασθενή διατύπωση του προβλήματος είναι:

$$\left[ \tilde{k}^e \right]_{n \times n} = \left[ \tilde{k}_\Omega^e \right]_{n \times n} + \left[ \tilde{k}_S^e \right]_{n \times n}$$

όπου,

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{k}_\Omega^e \right] &= \int_{\Omega_e} \left( \left[ B_u \right]^T \left[ C \right] \left[ B_u \right] + \left[ B_u \right]^T \left[ N_\sigma \right] - \left[ N_\alpha \right]^T \left[ N_\sigma \right] \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_e} \left( \left[ B_\alpha \right]^T \left[ \tilde{A} \right]^T \left[ \tilde{D} \right] \left[ \tilde{A} \right] \left[ B_\alpha \right] - \left[ N_\sigma \right]^T \left[ N_\alpha \right] + \left[ N_\sigma \right]^T \left[ B_u \right] \right) d\Omega \end{aligned}$$

το τοπικό μητρώο ακαμψίας που προκύπτει από την ολοκλήρωση στον όγκο του στοιχείου, και,

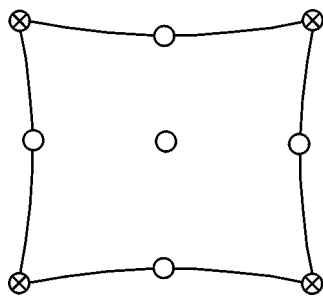
$$[\tilde{k}_S^e] = \int_{\partial\Omega_e} \left( [B_u]^T - [N_\alpha]^T \right) [G^t]^T [H] + [H]^T [G^t] ([B_u] - [N_\alpha]) dS$$

το τοπικό μητρώο ακαμψίας που προκύπτει από την ολοκλήρωση στην ελεύθερη επιφάνεια του στοιχείου.

**2.3. Εφαρμογές: το πρόβλημα της άπειρης πλάκας με οπή.**

Το πρόβλημα (Σχήμα 4.6) για τη θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως τύπου I επιλύεται αριθμητικά με τη χρήση του στοιχείου I9-70 (Σχήμα III.2).

element I9 – 70



O :  $u_1, u_2, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{12}$   
 X :  $\tilde{\sigma}_{11}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{22}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{12}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{21}^{(2)}$

**Σχήμα III.2:** Τύπος πεπερασμένου στοιχείου I9-70.

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην περιοχή ABCDE είναι οι ακόλουθες.

$u_2 = 0, \tilde{P}_1 = 0, \alpha_{21} = 0, \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$  στην AB ,

$u_1 = 0, \tilde{P}_2 = 0, \alpha_{12} = 0, \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$  στην DE ,

$\tilde{P}_1 = p, \tilde{P}_2 = 0, \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$  στην BC ,

$\tilde{P}_1 = 0, \tilde{P}_2 = p, \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$  στην CD ,

$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$  στην AE και

$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$  σε όλες τις γωνίες.

Σημειώνεται πως μακριά από την οπή η τάση ταυτίζεται με αυτήν της κλασικής θεωρίας, κοντά στην οπή όμως, όπου  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$ , είναι  $\tilde{\sigma}_{rr} = -\tilde{\mu}_2/a$ . Ο κάναβος αποτελείται από 200 στοιχεία και 6090 βαθμούς ελευθερίας.

### 2.3.1. Περιγραφή της αναλυτικής λύσης.

Οι μη-μηδενικές κινηματικές μεταβλητές που επιβιώνουν είναι οι

$$\varepsilon_{rr} = \alpha_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \alpha_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \tilde{\kappa}_{rrr} = \frac{d^2u}{dr^2} \quad \text{και} \quad \tilde{\kappa}_{r\theta\theta} = \tilde{\kappa}_{\theta\theta r} = \tilde{\kappa}_{\theta r\theta} = \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}.$$

Οι συζυγείς ποσότητες που προκύπτουν είναι οι

$$\tilde{\mu}_{rrr} = \ell^2 \left[ (2\mu + \lambda) \frac{d^2u}{dr^2} + \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \right] \equiv \tilde{\mu}_1,$$

$$\tilde{\mu}_{\theta r\theta} = \tilde{\mu}_{r\theta\theta} = \frac{\ell^2}{2} \left[ \lambda \frac{d^2u}{dr^2} + (4\mu + \lambda) \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \right] \equiv \tilde{\mu}_2,$$

$$\tilde{\mu}_{\theta\theta r} = \ell^2 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \equiv \tilde{\mu}_3,$$

$$\tilde{\mu}_{zrz} = \tilde{\mu}_{rzz} = \frac{\ell^2}{2} \lambda \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} \right) \equiv \tilde{\mu}_4$$

και

$$\sigma_{rr}^{(0)} = (2\mu + \lambda) \frac{du}{dr} + \lambda \frac{u}{r},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = (2\mu + \lambda) \frac{u}{r} + \lambda \frac{du}{dr},$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = \nu (\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}) = 2\nu (\mu + \lambda) \left( \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} = -\frac{\ell^2}{2} \left[ (4\mu + 2\lambda) \frac{d^3u}{dr^3} + (4\mu + 3\lambda) \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} + (8\mu + 3\lambda) \left( -\frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^3} \right) \right],$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} = -\frac{\ell^2}{2} \left[ \lambda \frac{d^3u}{dr^3} + (4\mu + 3\lambda) \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2} + 4\mu \left( \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^3} \right) \right] \quad \text{και}$$

$$\tilde{\sigma}_{zz}^{(2)} = -\frac{\ell^2}{2} \lambda \left( \frac{d^3u}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^3} \right).$$

Από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος της συνοριακής τιμής προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mu}_1 \mathbf{e}_r \quad \text{και} \quad \tilde{\mathbf{P}} = \left( \tilde{\sigma}_{rr} + \frac{\tilde{\mu}_2}{r} \right) \mathbf{e}_r,$$

οπότε στην επιφάνεια της σφαιρας όπου  $r = a$ ,  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$  και  $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$  ισχύει

$$\tilde{\mathbf{P}} = -\left( \tilde{\sigma}_{rr} + \frac{\tilde{\mu}_2}{a} \right) \mathbf{e}_r = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \tilde{\sigma}_{rr} = -\frac{\tilde{\mu}_2}{a}.$$

Στις κλασικές θεωρίες η τελευταία σχέση είναι  $\sigma_{rr} = 0$ .

Υπενθυμίζεται πως το πεδίο των μετατοπίσεων είναι κοινό για όλους τους τύπους της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως (Παράγραφος 4.7.2.2).

**2.3.2. Αποτελέσματα**

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα Σχήματα III.3-III.9 υπολογίζονται στο κέντρο των στοιχείων πλησιέστερα στον άξονα 1, δηλαδή για  $\theta = 2.25^\circ$ . Οι ευθείες γραμμές δηλώνουν την ακριβή λύση ενώ τα διακριτά σημάδια τη λύση των πεπερασμένων στοιχείων.

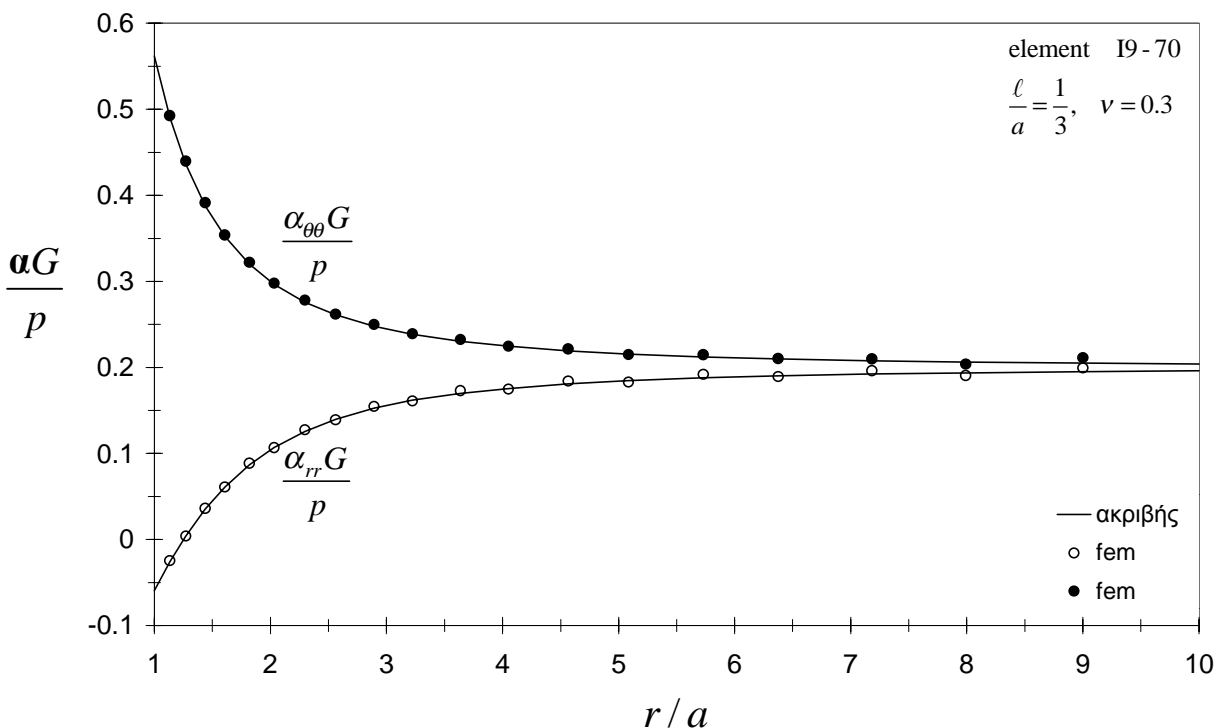
Στο Σχήμα III.8 συγκρίνεται η αριθμητική λύση, για τις τάσεις  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{\theta\theta}$ , με την κλασική λύση (διακεκομμένη γραμμή). Επίσης, στο Σχήμα III.9 γίνεται σύγκριση των αριθμητικών λύσεων που προέκυψαν με εφαρμογή των θεωριών τύπου I και III για τις  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{\theta\theta}$ . Όπως φαίνεται δεν υπάρχει μεγάλη απόκλιση στις τιμές των δύο θεωριών. Γενικά η διαφορά στις τάσεις μεταξύ των τύπων I και III, εντοπίζεται στις συνιστώσες  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}$  και  $\bar{\sigma}_{ij}^{(2)}$ . Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η διαφορά αυτή είναι

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} = \frac{\ell^2}{6} \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^3} \right), \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} = \frac{\ell^2}{6} \lambda \left( \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{2u}{r^3} \right),$$

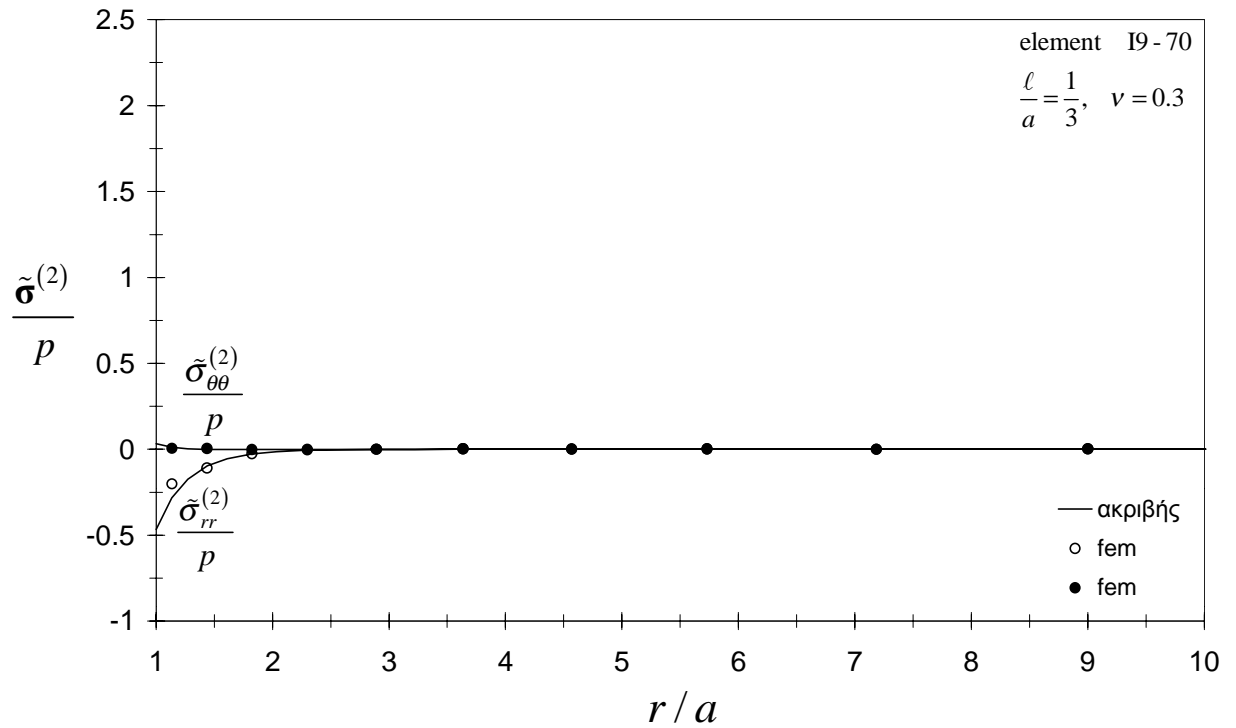
$$\bar{\sigma}_{zz}^{(2)} - \tilde{\sigma}_{zz}^{(2)} = \frac{\ell^2}{6} \lambda \left( \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r^3} \right),$$

και εξαρτάται από την τιμή του  $\ell$ .

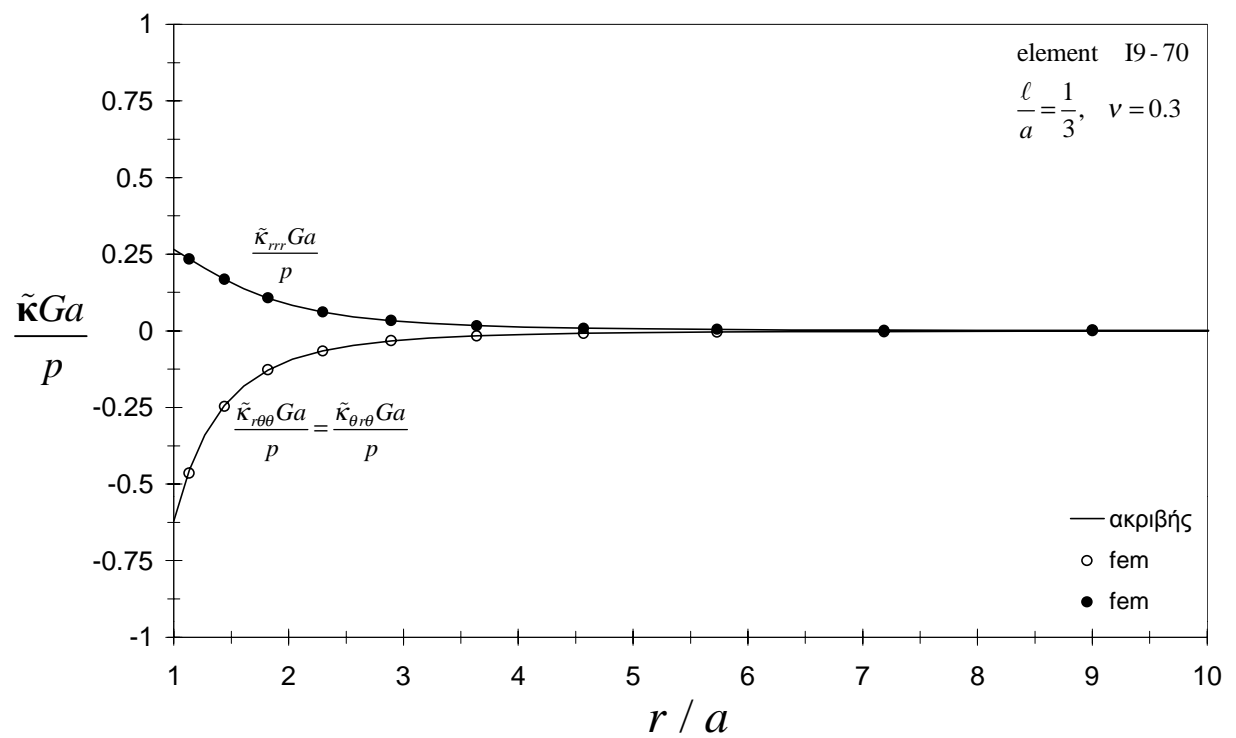
Υπενθυμίζεται πως το πεδίο των μετατοπίσεων είναι το ίδιο για τους τρεις τύπους της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως, γι αυτό δεν παρουσιάζεται ξανά.



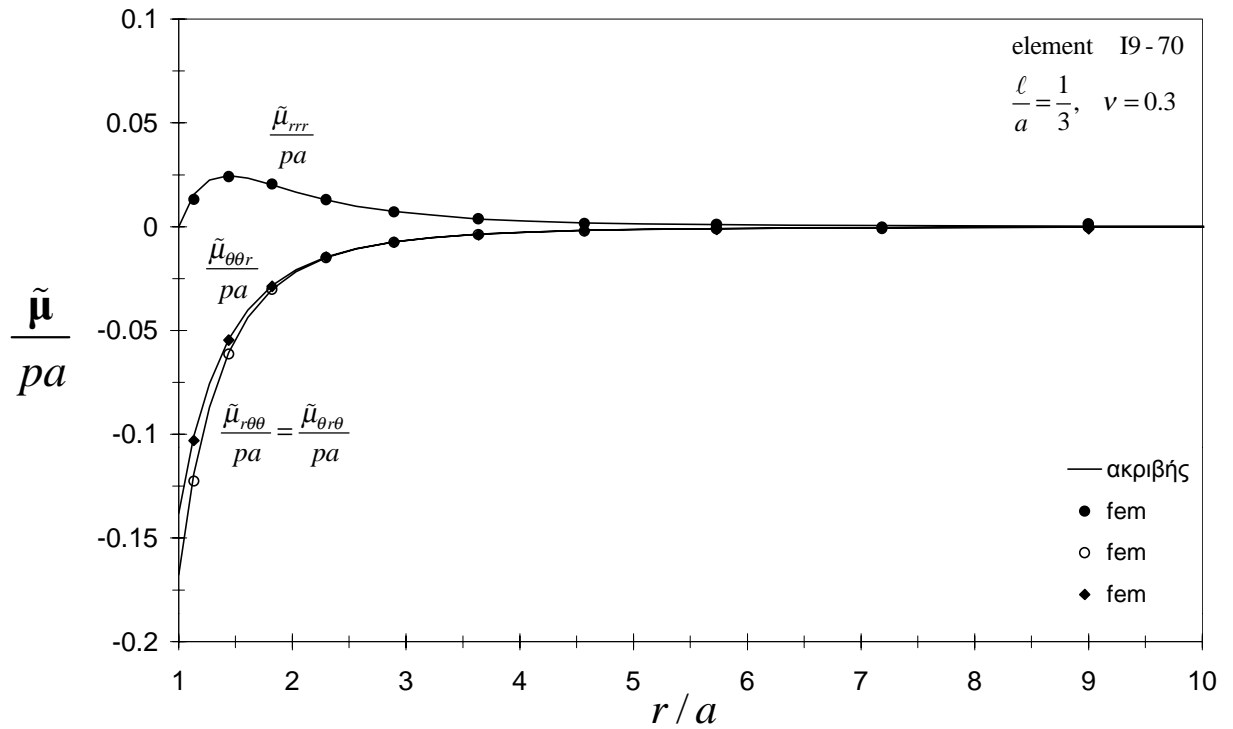
**Σχήμα III.3:** Μεταβολή της κλίσης της μετατόπισης. Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.



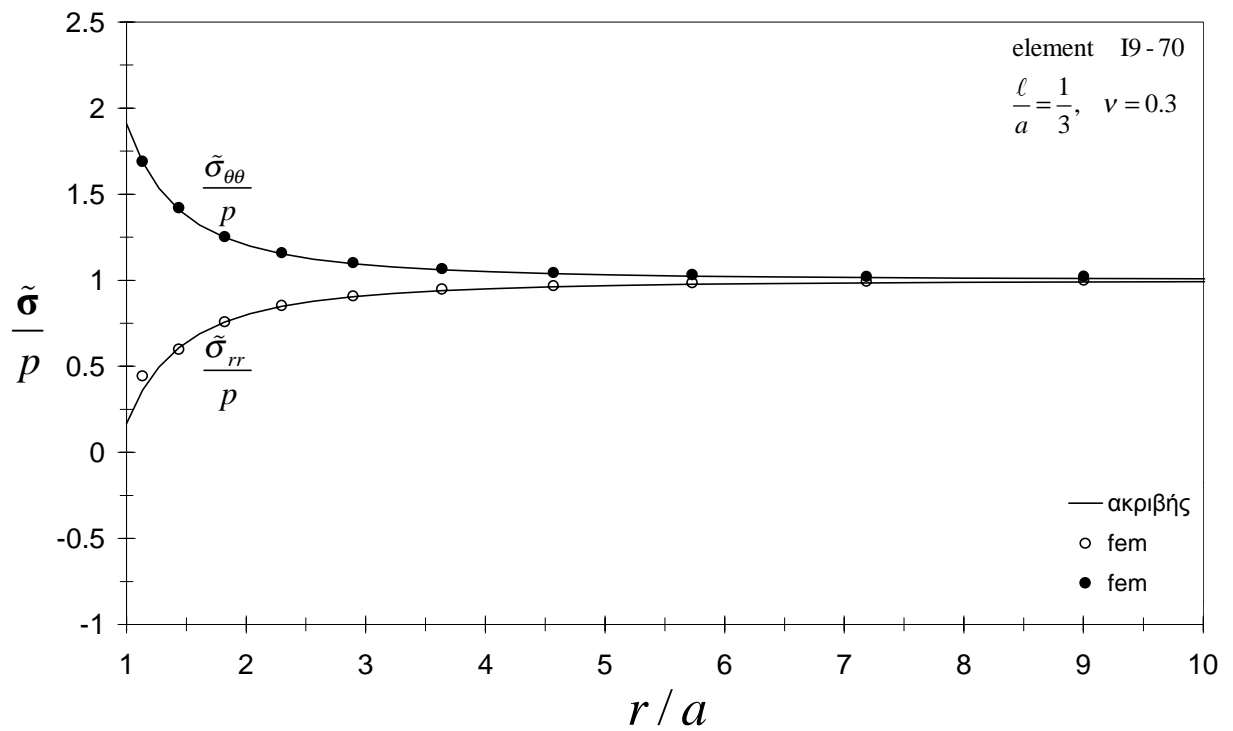
Σχήμα III.4: Μεταβολή της τάσης  $\tilde{\sigma}^{(2)}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.



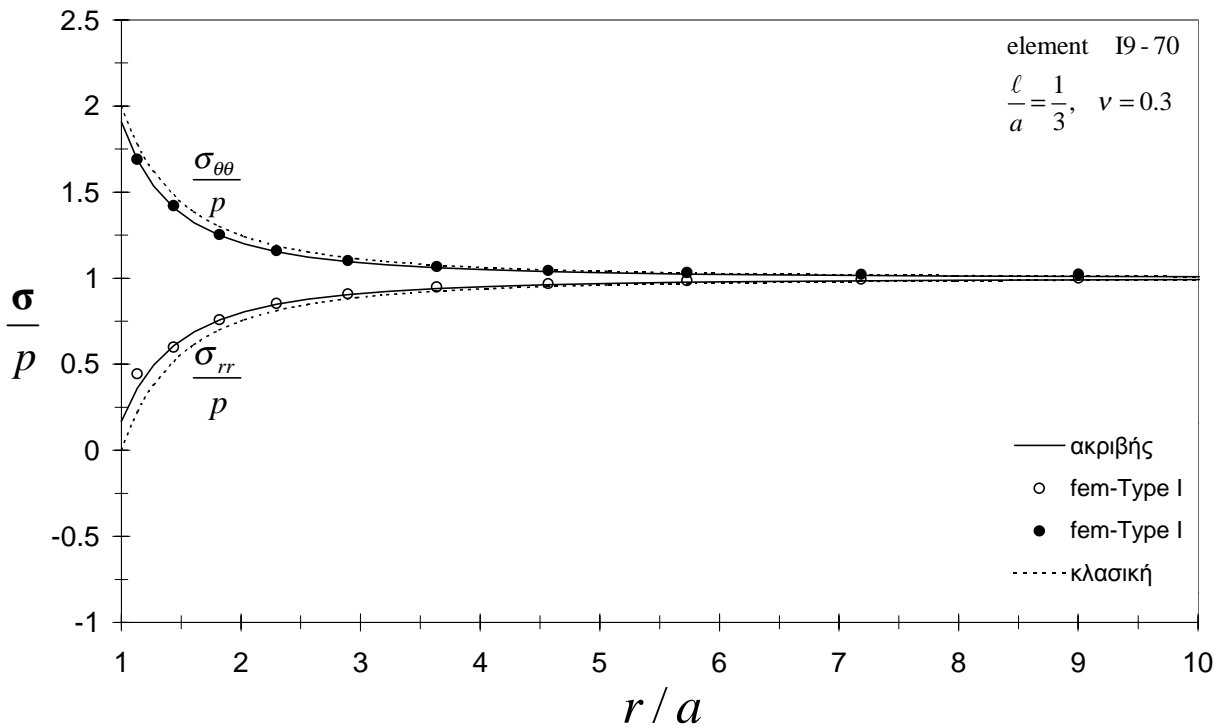
Σχήμα III.5: Μεταβολή του  $\tilde{k}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.



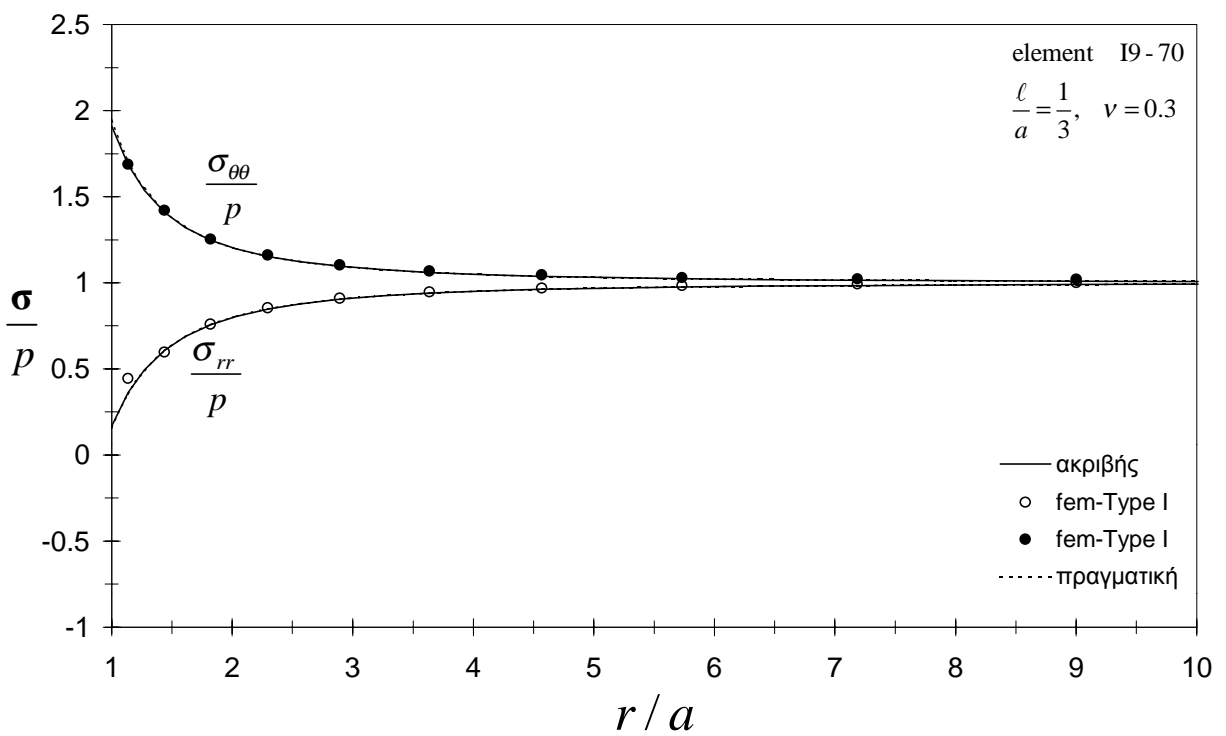
Σχήμα III.6: Μεταβολή του  $\tilde{\mu}$  . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.



Σχήμα III.7: Μεταβολή της συνολικής τάσης  $\tilde{\sigma}$  . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή λύση.



**Σχήμα III.8:** Μεταβολή της συνολικής τάσης  $\tilde{\sigma}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με την ακριβή και την κλασική λύση.



**Σχήμα III.9:** Μεταβολή της συνολικής τάσης  $\tilde{\sigma}$ . Σύγκριση αποτελεσμάτων FEM με ακριβή και την πραγματική τάση.

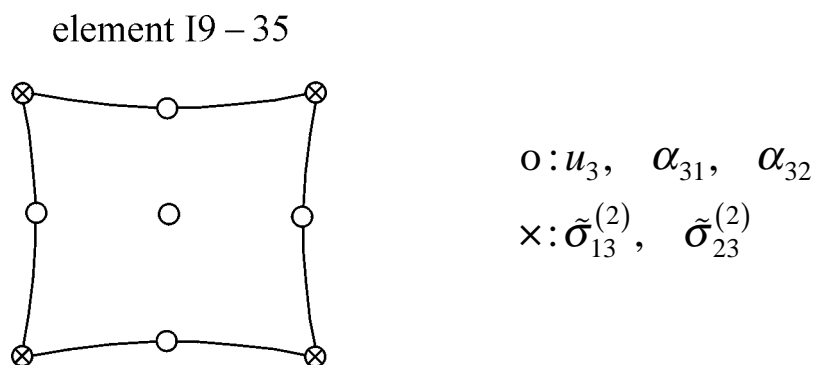


**2.4. Εφαρμογές: επίλυση προβλήματος αντιεπίπεδης θραύσης (mode III).**

**2.4.1. Ανάπτυξη στοιχείου.**

Το στοιχείο που υποβάλλεται στον έλεγχο συρραφής είναι το στοιχείο **I9-35**. Πρόκειται για ισοπαραμετρικό στοιχείο με εννέα κόμβους και τριανταπέντε κομβικούς αγνώστους (Σχήμα III.10). Οι ποσότητες ( $u_3, \alpha_{31}, \alpha_{32}$ ) είναι κομβικοί άγνωστοι και στους εννέα κόμβους, ενώ οι ποσότητες ( $\tilde{\sigma}_{13}^{(2)}, \tilde{\sigma}_{23}^{(2)}$ ) αποτελούν επιπλέον κομβικούς αγνώστους στους τέσσερις γωνιακούς κόμβους.

Το παραπάνω στοιχείο εξασφαλίζει συνεχή πεδία για όλους τους κομβικούς αγνώστους.



**Σχήμα III.10:** Τύπος πεπερασμένου στοιχείου I9-35 για τον έλεγχο συρραφής με χρήση της θεωρίας τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως I.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η κατανομή που επιβάλλεται είναι της μορφής

$$u_3 = a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2 + ex_1^2 + fx_2^2 + gx_1x_2^2 + hx_1^2x_2 + kx_1^2x_2^2,$$

όπου οι συντελεστές  $a, b, \dots, k$  είναι σταθερές.

Η απαιτούμενη μαζική δύναμη για την ισορροπία,  $f_i = -\sigma_{ji,j}$ , είναι

$$f_3 = -2(e + f - 4l^2k + gx_1 + kx_1^2 + hx_2 + kx_2^2)\mu.$$

Το πεδίο μετατοπίσεων που αναφέρθηκε παραπάνω εφαρμόζεται στην περιοχή του Σχήματος 4.2. Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι

$u_3, \alpha_{32}$  στις πλευρές AB και CD

$u_3, \alpha_{31}$  στις πλευρές BC και AD.

Ακολουθώντας τη διαδικασία για τον έλεγχο συρραφής, διαπιστώνεται πως το στοιχείο είναι αξιόπιστο και τα αποτελέσματα ταυτίζονται με την ακριβή λύση.

**2.4.2. Ανάπτυξη μητρώου ακαμψίας για το στοιχείο 19-35.**

Οι μεταβλητές του προβλήματος περιγράφονται στις παρακάτω σχέσεις με μορφή μητρώων, όπου  $n$  είναι ο αριθμός των μεταβλητών ανά στοιχείο.

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} &= \left\{ u_3 \right\}_{1 \times 1} = \left[ N(\mathbf{x}) \right]_{1 \times n} \left\{ d^e \right\}_{1 \times 1} & \text{και} & \left\{ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \right\}_{1 \times 1} = \left\{ u_3^* \right\}_{1 \times 1} = \left[ N(\mathbf{x}) \right]_{1 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{1 \times 1} \\ \\ \left\{ \mathbf{a}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} & \text{και} & \left\{ \mathbf{a}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \alpha_{31}^* \\ \alpha_{32}^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \\ \\ \left\{ \tilde{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{13}^{(2)} \\ \tilde{\sigma}_{23}^{(2)} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_\sigma(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} & \text{και} & \left\{ \tilde{\sigma}^{(2)*}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{13}^{(2)*} \\ \tilde{\sigma}_{23}^{(2)*} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ N_\sigma(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \end{aligned}$$

Σε μητρωϊκή μορφή περιγράφονται και οι παράγωγοι των αγνώστων του προβλήματος. Έτσι,

$$\left\{ u_{i,j}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ B(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ u_{i,j}^*(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_{3,1}^* \\ u_{3,2}^* \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ B(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}) = 2\mu u_{(i,j)} + \lambda u_{(k,k)} \delta_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \Rightarrow$$

$$\left\{ \sigma^{(0)}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{13}^{(0)} \\ \sigma_{23}^{(0)} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \left[ C \right]_{2 \times 2} \left\{ u_{i,j}(\mathbf{x}) \right\}_{2 \times n} = \left[ C \right]_{2 \times 2} \left[ B(\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \alpha_{ij,k}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \alpha_{31,1} \\ \alpha_{31,2} \\ \alpha_{32,1} \\ \alpha_{32,2} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1} \quad \text{και} \quad \left\{ \alpha_{ij,k}^*(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \alpha_{31,1}^* \\ \alpha_{31,2}^* \\ \alpha_{32,1}^* \\ \alpha_{32,2}^* \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ B_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \alpha_{k(i,j)} = \tilde{\kappa}_{jik} \Rightarrow$$

$$\left\{ \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\kappa}_{113}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{213}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{123}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\kappa}_{223}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{Bmatrix} \alpha_{31,1} \\ \alpha_{31,2} \\ \alpha_{32,1} \\ \alpha_{32,2} \end{Bmatrix}_{4 \times n} = \left[ \tilde{A} \right]_{4 \times 4} \left\{ \alpha_{ij,k}(\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left[ \tilde{A} \right]_{4 \times 4} \left[ B_\alpha(\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^e \right\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \left\{ \tilde{\mathbf{k}}^* (\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left[ \tilde{\mathbf{A}} \right]_{4 \times 4} \left[ B_\alpha (\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\left\{ \tilde{\boldsymbol{\mu}} (\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mu}_{113} \\ \tilde{\mu}_{213} \\ \tilde{\mu}_{123} \\ \tilde{\mu}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \frac{\ell^2}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & \mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}}_{[\tilde{D}]} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{113} (\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{213} (\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{123} (\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{K}}_{223} (\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ \tilde{D} \right]_{4 \times 4} \left\{ \tilde{\mathbf{k}} (\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left[ \tilde{D} \right]_{4 \times 4} \left[ \tilde{\mathbf{A}} \right]_{4 \times 4} \left[ B_\alpha (\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\text{και } \left\{ \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* (\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \left[ \tilde{D} \right]_{4 \times 4} \left[ \tilde{\mathbf{A}} \right]_{4 \times 4} \left[ B_\alpha (\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\tilde{T}_{ik} = n_j \tilde{\mu}_{jki} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{\mathbf{T}} (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} &= \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{31} \\ \tilde{T}_{32} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} n_1 \tilde{\mu}_{113} + n_2 \tilde{\mu}_{213} \\ n_1 \tilde{\mu}_{123} + n_2 \tilde{\mu}_{223} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 & n_2/2 & n_2/2 & 0 \\ 0 & n_1/2 & n_1/2 & n_2 \end{bmatrix}}_{[\tilde{F}(\mathbf{x})]_{2 \times 4}} \begin{Bmatrix} \tilde{\mu}_{113} \\ \tilde{\mu}_{213} \\ \tilde{\mu}_{123} \\ \tilde{\mu}_{223} \end{Bmatrix}_{4 \times 1} = \left[ \tilde{F} (\mathbf{x}) \right]_{2 \times 4} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\mu}} (\mathbf{x}) \right\}_{4 \times 1} = \\ &= \left[ \tilde{F} (\mathbf{x}) \right]_{2 \times 4} \left[ \tilde{D} \right]_{4 \times 4} \left[ \tilde{\mathbf{A}} \right]_{4 \times 4} \left[ B_\alpha (\mathbf{x}) \right]_{4 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \equiv \left[ H (\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1} \end{aligned}$$

$$\text{και } \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^* (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \left[ H (\mathbf{x}) \right]_{2 \times n} \left\{ d^{e*} \right\}_{n \times 1}$$

$$\tilde{T}_{ij}^n = \tilde{T}_{ik} n_k n_j \Rightarrow$$

$$\left\{ \tilde{\mathbf{T}}^n (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{31}^n \\ \tilde{T}_{32}^n \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} (\tilde{T}_{31} n_1 + \tilde{T}_{32} n_2) n_1 \\ (\tilde{T}_{31} n_1 + \tilde{T}_{32} n_2) n_2 \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 \\ n_1 n_2 & n_2^2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{31} \\ \tilde{T}_{32} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \equiv \left[ G^n (\mathbf{x}) \right]_{2 \times 2} \left\{ \tilde{\mathbf{T}} (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1}$$

$$\text{και } \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^{n*} (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \left[ G^n (\mathbf{x}) \right]_{2 \times 2} \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^* (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1}$$

$$\tilde{T}_{ik}^t = \tilde{T}_{ik} - \tilde{T}_{ik}^n \Rightarrow \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^t (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{31}^t \\ \tilde{T}_{32}^t \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{31} - \tilde{T}_{31}^n \\ \tilde{T}_{32} - \tilde{T}_{32}^n \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 1-n_1^2 & -n_1 n_2 \\ -n_1 n_2 & 1-n_2^2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{31} \\ \tilde{T}_{32} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \equiv \left[ G^t (\mathbf{x}) \right]_{2 \times 2} \left\{ \tilde{\mathbf{T}} (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1}$$

$$\text{και } \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^{t*} (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1} = \left[ G^t (\mathbf{x}) \right]_{2 \times 2} \left\{ \tilde{\mathbf{T}}^* (\mathbf{x}) \right\}_{2 \times 1}.$$

Τελικά προκύπτουν τα μητρώα ακαμψίας στον όγκο και στην επιφάνεια του στοιχείου:

$$\begin{aligned} [\tilde{k}_\Omega^e] &= \int_{\Omega_e} \left( [B]^T [C] [B] + [B]^T [N_\sigma] - [N_\alpha]^T [N_\sigma] \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega_e} \left( [B_\alpha]^T [\tilde{A}]^T [\tilde{D}] [\tilde{A}] [B_\alpha] - [N_\sigma]^T [N_\alpha] + [N_\sigma]^T [B] \right) d\Omega \end{aligned}$$

$$[\tilde{k}_S^e] = \int_{\partial\Omega_e} \left( ([B]^T - [N_\alpha]^T) [G^t] [H] + [H]^T [G^t] ([B] - [N_\alpha]) \right) dS$$

και το συνολικό μητρώο ακαμψίας του στοιχείου

$$[\tilde{k}^e] = [\tilde{k}_\Omega^e] + [\tilde{k}_S^e].$$

### 2.4.3. Περιγραφή της αριθμητικής λύσης.

Η ασυμπτωτική λύση για το πεδίο των μετατοπίσεων είναι της μορφής

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{και} \quad u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Ανάλογα το πεδίο μετατοπίσεων που εφαρμόζεται στον κানাβο είναι

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{και} \quad u_3 = u_3(x_1, x_2).$$

Οι μόνες μη-μηδενικές κινηματικές μεταβλητές που επιβιώνουν για το παραπάνω πεδίο μετατοπίσεων είναι οι  $\alpha_{31} = u_{3,1}$ ,  $\alpha_{32} = u_{3,2}$ ,  $\tilde{\kappa}_{113}$ ,  $\tilde{\kappa}_{223}$  και  $\tilde{\kappa}_{123} = \tilde{\kappa}_{213}$ . Οι αντίστοιχες συζυγείς

ποσότητες είναι οι  $\sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{31}^{(0)}$ ,  $\sigma_{23}^{(0)} = \sigma_{32}^{(0)}$ ,  $\tilde{\mu}_{113}$ ,  $\tilde{\mu}_{223}$ ,  $\tilde{\mu}_{131} = \tilde{\mu}_{311}$ ,  $\tilde{\mu}_{232} = \tilde{\mu}_{322}$ ,  $\tilde{\mu}_{123} = \tilde{\mu}_{213}$  και  $\tilde{\mu}_{231} = \tilde{\mu}_{321}$ . Επίσης οι ποσότητες  $\tilde{\sigma}_{13}^{(2)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{23}^{(2)}$ ,  $\tilde{\sigma}_{31}^{(2)}$  και  $\tilde{\sigma}_{32}^{(2)}$  είναι γενικά μη-μηδενικές.

Το πρόβλημα για τη θεωρία τύπου κλίσεως της παραμορφώσεως τύπου I επιλύεται αριθμητικά με τη χρήση του στοιχείου I9-35.

Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στην περιοχή OABCD είναι οι ακόλουθες.

$$u_3 = 0, \quad \tilde{R}_3 = 0 \quad \text{στην } OA,$$

$$u_3, \quad \alpha_{31} = u_{3,1} \quad \text{στην } AB,$$

$$u_3, \quad \alpha_{32} = u_{3,2} \quad \text{στην } BC,$$

$$u_3, \quad \alpha_{31} = u_{3,1} \quad \text{στην } CD,$$

$$\tilde{P}_3 = 0, \quad \tilde{R}_3 = 0 \quad \text{στην } OD \quad \text{και}$$

$$\tilde{E}_3 = 0 \quad \text{σε όλες τις γωνίες.}$$

Ο κানাβος αποτελείται από 1600 στοιχεία και 23045 βαθμούς ελευθερίας.

Τα αποτελέσματα ταυτίζονται με αυτά της θεωρίας τύπου III, όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 4.