



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Μέθοδοι Προσομοίωσης Κυκλωμάτων και Θερμικών  
Μοντέλων Μεγάλης Κλίμακας με Κανονική Δομή**

Simulation Methods for Large Scale Circuit and  
Thermal Models with Regular Structure

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΣΤΑΥΡΙΔΗ**

**Επιβλέπων**

Γεώργιος Σταμούλης

Βόλος, Φεβρουάριος 2020

---





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Μέθοδοι Προσομοίωσης Κυκλωμάτων και Θερμικών  
Μοντέλων Μεγάλης Κλίμακας με Κανονική Δομή**

Simulation Methods for Large Scale Circuit and  
Thermal Models with Regular Structure

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΣΤΑΥΡΙΔΗ**

Επιτροπή Επίβλεψης

Επιβλέπων

Γεώργιος Σταμούλης

Καθηγητής

Συνεπιβλέπων

Φώτιος Πλέσσας

Αναπληρωτής Καθηγητής

Συνεπιβλέπων

Γεώργιος Δημητρίου

Επίκουρος Καθηγητής

Βόλος, Φεβρουάριος 2020





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.  
Κωνσταντίνος Σταυρίδης, 2020.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

---

**ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗΣ ΔΕΟΝΤΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ  
ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ**

«Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα διπλωματική εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισοφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής».

Ο/Η Δηλών/ούσα

*(Υπογραφή)*

Κωνσταντίνος Σταυρίδης

26 Φεβρουαρίου 2020

## Περίληψη

---

Κατά την σχεδίαση ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος είναι αναγκαία η ανάλυση και η προσομοίωσή του, για την ομαλή λειτουργία του. Καθώς η τεχνολογία αναπτύσσεται, το μέγεθος των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων αυξάνεται εκθετικά, με αποτέλεσμα, η βιομηχανία να αντιμετωπίζει μεγάλο πρόβλημα στην αποδοτική θερμική ανάλυση των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, αλλά και στην προσομοίωση των δικτύων τροφοδοσίας τους.

Σε αυτή την εργασία, παρουσιάζεται η μεθοδολογία για την προσομοίωση του θερμικού μοντέλου και των δικτύων τροφοδοσίας. Στη συνέχεια, αναλύονται και αξιολογούνται οι αριθμητικές μέθοδοι για επίλυση γραμμικών συστημάτων και επιλέγεται η μέθοδος που ταιριάζει καλύτερα στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Έπειτα, παρατίθενται τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτήν την εργασία, ώστε να πραγματοποιηθεί η προσομοίωση που αναφέρεται παραπάνω, καθώς και ο σχεδιασμός της υλοποίησης. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και γίνεται παράθεση των συμπερασμάτων που απορρέουν.





# Abstract

---

For the proper operation of the integrated circuits, their analysis and simulation are required, during the designing phase. The rapid technological progress increases the size of integrated circuits exponentially, causing severe problems to the industry, both in the efficient analysis of the integrated circuits and in the simulation of their power delivery networks.

This thesis introduces the methodology for the simulation of the thermal model and the power delivery networks. Afterwards, the numerical methods are analyzed and evaluated, while the most efficient of them is selected for the problem that this thesis deals with. In addition, the tools that were used for the simulation, as well as, the designing of the implementation are presented. The results and the conclusions are listed at the end.



*στην οικογένειά μου*



## Ευχαριστίες

---

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Σταμούλη για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας και για την ευκαιρία που μου έδωσε να την εκπονήσω στο εργαστήριο Ηλεκτρονικής. Επίσης, ευχαριστώ ιδιαίτερα τους συνεπιβλέποντες καθηγητές κ. Πλέσσα Φώτιο και κ. Δημητρίου Γεώργιο για την καθοδήγησή τους και την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την καθοδήγηση και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

Βόλος, Φεβρουάριος 2020

*Κωνσταντίνος Σταυρίδης*



# Περιεχόμενα

---

<b>Περίληψη</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Ευχαριστίες</b>	<b>13</b>
<b>Πρόλογος</b>	<b>21</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>23</b>
1.1 Συνεισφορές . . . . .	24
1.2 Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	24
<b>2 Θεωρητικό υπόβαθρο</b>	<b>27</b>
2.1 Δίκτυα τροφοδοσίας . . . . .	27
2.1.1 Μοντελοποίηση δικτύων τροφοδοσίας . . . . .	27
2.1.2 Μεταβατική ανάλυση δικτύων τροφοδοσίας . . . . .	28
2.2 Θερμικά κυκλώματα . . . . .	29
2.2.1 Μοντελοποίηση Θερμικής Ανάλυσης . . . . .	29
2.2.2 Προσομοίωση Θερμικού μοντέλου με μεταβλητό χρονικό βήμα .	32
<b>3 Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων</b>	<b>33</b>
3.1 Άμεσες Μέθοδοι . . . . .	33
3.2 Επαναληπτικές Μέθοδοι . . . . .	33
3.3 Μέθοδοι Ανάλυσης και Προσομοίωσης . . . . .	34
3.3.1 Δίκτυο Τροφοδοσίας . . . . .	34
3.3.2 Θερμικό μοντέλο . . . . .	35
3.4 Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων με Προρρυθμιστή . . . . .	35
<b>4 Εργαλεία Υλοποίησης</b>	<b>39</b>
4.1 Περιγραφή Αλγορίθμου Υλοποίησης . . . . .	39
4.1.1 Δίκτυα Τροφοδοσίας . . . . .	39
4.1.2 Θερμικό Μοντέλο . . . . .	44
4.2 Γλώσσα προγραμματισμού C++ . . . . .	44
4.3 Βιβλιοθήκη Eigen . . . . .	45

---

4.4 Βιβλιοθήκη FFTW . . . . .	45
<b>5 Υλοποίηση</b>	<b>47</b>
5.1 Λεπτομέρειες υλοποίησης . . . . .	47
5.2 Πειράματα . . . . .	50
5.2.1 Υπολογιστικό σύστημα υλοποίησης . . . . .	50
5.2.2 Αποτελέσματα . . . . .	50
<b>6 Επίλογος</b>	<b>53</b>
6.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα . . . . .	53
<b>Παραρτήματα</b>	<b>55</b>
<b>Α΄ Παραδείγματα Βιβλιογραφικών Αναφορών</b>	<b>57</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>61</b>



## Κατάλογος Σχημάτων

---

5.1	UML Διάγραμμα Κλάσης ConjugateGradient . . . . .	48
5.2	UML της κλάσης Fast Fourier Preconditioner . . . . .	49
5.3	Μέσος όρος επαναλήψεων για την προσομοίωση δικτύων τροφοδοσίας. . . . .	51
5.4	Μέσος χρόνος για την προσομοίωση δικτύων τροφοδοσίας. . . . .	52
5.5	Μέσος όρος επαναλήψεων για την προσομοίωση θερμικού μοντέλου. . . . .	52
5.6	Μέσος χρόνος για την προσομοίωση θερμικού μοντέλου. . . . .	52



## Κατάλογος Πινάκων

---

2.1	Αναλογία μεταξύ θερμικού και ηλεκτρικού κυκλώματος. . . . .	31
5.1	Χρόνος εκτέλεσης των τριών επιλυτών σε πραγματικό χρόνο για τα δίκτυα τροφοδοσίας. <b>Κόμβοι</b> , αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των κόμβων, <b>Επίπεδα</b> , είναι ο αριθμός των μεταλλικών στρωμάτων, <b>Χρόνος (s)</b> , αντιπροσωπεύει τον μέσο χρόνο που χρειάζεται η μέθοδος για την επίλυση, <b>Επαν.</b> , είναι ο μέσος όρος επαναλήψεων που χρειάζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι για να συγκλίνουν, <b>Επιτ1</b> , δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με τη μέθοδο CHOLMOD και <b>Επιτ2</b> , δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με τη μέθοδο ICPCG. . . . .	50
5.2	Χρόνος εκτέλεσης των τριών επιλυτών σε πραγματικό χρόνο για τα θερμικά μοντέλα. <b>Σημεία Διακρ.</b> , αντιπροσωπεύουν τα σημεία διακριτοποίησης στους άξονες $x$ και $y$ , <b>Επίπεδα</b> , είναι ο αριθμός των επιπέδων σε κάθε ολοκληρωμένο κύκλωμα και αντιστοιχίζεται στον άξονα $z$ , <b>Χρόνος (s)</b> , αντιπροσωπεύει τον μέσο χρόνο που χρειάζεται για την επίλυση, <b>Επαν.</b> , είναι ο μέσος όρος επαναλήψεων που χρειάζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι για να συγκλίνουν, <b>Επιτ1</b> , δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με την μέθοδο CHOLMOD και <b>Επιτ2</b> , δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με την μέθοδο ICPCG. . . . .	51



# Πρόλογος

---

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε για την ολοκλήρωση των σπουδών μου στο τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και την απόκτηση του διπλώματος στην πόλη του Βόλου υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Σταμούλη Γεώργιου.



## Κεφάλαιο **1**

### Εισαγωγή

---

**Η** ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας τις τελευταίες δεκαετίες έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία αναγκών τόσο σε επίπεδο υλικού όσο και σε επίπεδο λογισμικού. Μία από τις ανάγκες που εγείρονται είναι για κατασκευή ολοκληρωμένων κυκλωμάτων με υψηλή απόδοση και χαμηλή κατανάλωση ενέργειας. Αυτό έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη ολοκληρωμένων κυκλωμάτων με μεγάλη πολυπλοκότητα [1]. Για παράδειγμα, υπάρχουν επεξεργαστές την τελευταία δεκαετία που απαριθμούν έως και μερικές δεκάδες δισεκατομμύρια τρανζίστορ. Η πολυπλοκότητα που έχουν πλέον αυτά τα συστήματα καθιστά την ανάλυση και την προσομοίωσή τους αρκετά δύσκολη, αλλά ταυτοχρόνως ζωτικής σημασίας. Η πλήρης θερμική ανάλυση του chip και η προσομοίωση του δικτύου τροφοδοσίας, ιδιαίτερα για 3D δομές, αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες για να εξασφαλιστεί η αξιοπιστία και η ομαλή λειτουργία των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.

Από τη μία τα δίκτυα τροφοδοσίας μεγάλης κλίμακας μοντελοποιούνται ως γραμμικά κυκλώματα, αντιστάσεων  $R$ , πυκνωτών  $C$ , πηνιών  $L$  και από την άλλη η θερμική ανάλυση προσεγγίζεται από τις μεθόδους Finite Element Method (FEM), Finite Difference Method (FDM) και τη μέθοδο ανάπτυξης ενός ισοδύναμου RC ηλεκτρικού κυκλώματος. Και οι δύο περιπτώσεις οδηγούν στην ανάγκη επίλυσης πολύ μεγάλης διάστασης γραμμικών κυκλωμάτων. Η επίλυση αυτών πραγματοποιείται είτε με άμεσες μεθόδους είτε με επαναληπτικές, έχοντας η καθεμία τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της.

Οι άμεσες μέθοδοι, οι οποίες χρησιμοποιούν πολλαπλασιασμούς πινάκων, αποτελούσαν το βασικό εργαλείο επίλυσης των παραγόμενων γραμμικών συστημάτων στο παρελθόν, λόγω της αξιοπιστίας τους απέναντι στα περισσότερα προβλήματα. Ωστόσο, οι άμεσες μέθοδοι δεν μπορούν να ανταποκριθούν καλά στα σημερινά δεδομένα. Οι διαστάσεις των παραγόμενων γραμμικών συστημάτων είναι αρκετά μεγάλες και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να είναι αρκετά κοστοβόρες τόσο σε χρόνο εκτέλεσης όσο και σε απαιτήσεις μνήμης, όταν ένα κύκλωμα ξεπεράσει τις μερικές χιλιάδες στοιχεία.

Σε αντίθεση με τις άμεσες μεθόδους, οι επαναληπτικές μέθοδοι κάνουν χρήση

μόνο πολλαπλασιασμών πίνακα επί διάνυσμα και εσωτερικών γινομένων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μονοπωλούν το ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια, καθώς αποτελούν μια λύση η οποία έχει καλή απόδοση σε χρόνο εκτέλεσης αλλά και σε απαιτήσεις μνήμης. Οι επαναληπτικές μέθοδοι που ανήκουν στην κατηγορία των υποχώρων Krylov, έχουν ακόμα καλύτερη απόδοση [2]. Ωστόσο, πάντα υπάρχουν και μειονεκτήματα. Το βασικό πρόβλημα που αντιμετωπίζουν οι επαναληπτικές μέθοδοι είναι ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι μη προβλέψιμος. Καταλυτικό ρόλο για την επίτευξη ενός ικανοποιητικού ρυθμού σύγκλισης αποτελούν οι ιδιότητες του πίνακα του γραμμικού συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης κατάστασης του πίνακα θα πρέπει να βρίσκεται κοντά στον αριθμό ένα. Στην περίπτωση, όμως, που χρησιμοποιηθεί ένας μηχανισμός "preconditioning", τότε θα επιφέρει στο γραμμικό σύστημα καλύτερες ιδιότητες και θα μπορέσει να εξασφαλιστεί μία γρήγορη σύγκλιση.

Μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση για τη λύση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν για την πραγμάτωση της στατικής ή μεταβατικής προσομοίωσης του δικτύου τροφοδοσίας[3] και της θερμικής ανάλυσης του ολοκληρωμένου κυκλώματος [4], σχεδιάζει και υλοποιεί μία σχεδόν ιδανική, παραλληλοποιήσιμη, "preconditioning" προσέγγιση. Σε συνδυασμό με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων πραγματοποιείται επιτάχυνση και μείωση της χρήσης μνήμης κατά δύο τάξεις μεγέθους.

Στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας επιλέχθηκε να υλοποιηθεί η παραπάνω προσέγγιση σε μία γλώσσα προγραμματισμού με αρκετά πλεονεκτήματα τόσο σε χρόνο όσο και σε μνήμη. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιήθηκαν εργαλεία και βιβλιοθήκες για βελτιστοποίηση της ήδη υπάρχουσας πρότασης.

## 1.1 Συνεισφορές

Η συνεισφορά της διπλωματικής συνοψίζεται ως εξής:

1. Υλοποίηση της προτεινόμενης μεθόδου [3], [4] στη γλώσσα προγραμματισμού C++.
2. Προσπάθεια βελτιστοποίησης του προγράμματος που προκύπτει από την υλοποίηση, κάνοντας χρήση των βιβλιοθηκών Eigen, FFTW και της διεπαφής OpenMp.

## 1.2 Διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας

Στο κυρίως μέρος της διπλωματικής εργασίας αναλύονται τα εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2, παρέχεται το θεωρητικό υπόβαθρο για το πως επιτυγχάνεται η θερμική ανάλυση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, καθώς και η προσομοίωση των δικτύων τροφοδοσίας τους.



- Στο Κεφάλαιο 3, αναλύονται οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους.
- Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζεται εκτενώς η προσέγγιση [3], [4] για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων που απορρέουν από την ανάγκη ανάλυσης και προσομοίωσης των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Παράλληλα, αναλύονται τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την υλοποίηση του συστήματος.
- Στο Κεφάλαιο 5, περιγράφεται αναλυτικά η προτεινόμενη σχεδίαση και υλοποίηση στη γλώσσα προγραμματισμού C++, με χρήση state-of-the-art βιβλιοθηκών, όπως τις Eigen και FFTW.
- Στο Κεφάλαιο 6, γίνεται συζήτηση των αποτελεσμάτων και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν.



## Κεφάλαιο **2**

### Θεωρητικό υπόβαθρο

---

**Σ**το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά η μοντελοποίηση των δικτύων τροφοδοσίας και των θερμικών κυκλωμάτων, έτσι ώστε να εφαρμοστεί η μεταβατική ανάλυσή τους.

#### 2.1 Δίκτυα τροφοδοσίας

##### 2.1.1 Μοντελοποίηση δικτύων τροφοδοσίας

Για να μπορέσει να εξασφαλιστεί η ομαλή λειτουργία ενός ολοκληρωμένου κυκλώματος θα πρέπει να πραγματοποιούνται προσομοιώσεις του δικτύου τροφοδοσίας, είτε με σταθερό είτε με μεταβλητό χρονικό βήμα.

Το δίκτυο τροφοδοσίας απαρτίζεται από ένα ορθογώνιο πλέγμα αγωγών μετάλλου με πολύ συνηθισμένες χωρικές γεωμετρίες. Σε ρεαλιστικές συνθήκες, αποτελεί ένα τριοδιάστατο πλέγμα από στρώματα μετάλλου. Για να μπορέσει το δίκτυο τροφοδοσίας να προσομοιωθεί θα πρέπει να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα RLC μέσω της διαδικασίας εξαγωγής κυκλώματος [5].

Το κλασικό μοντέλο ώστε να μπορέσει να γίνει η μεταβατική προσομοίωση ενός δικτύου τροφοδοσίας, προκύπτει μοντελοποιώντας κάθε τμήμα αγωγού, μεταξύ δύο επαφών, ως μία αντίσταση σε σειρά με μία επαγωγή και με γειωμένες χωρητικότητες. Ας υποθέσουμε ότι το μοντέλο θα απαρτίζεται από  $b$  R-L σύνθετους κλάδους και  $N$  κόμβους χωρίς τροφοδοσία. Έχοντας μοντελοποιήσει το γραμμικό σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί, αξιοποιώντας τη μέθοδο Modified Nodal Analysis (MNA), θα προκύψουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις [6]:

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{e}(t) \quad (2.1)$$

όπου,

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{nb} \\ -\mathbf{A}_{nb}^T & \mathbf{R}_b \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n(t) \\ \mathbf{i}_b(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_n(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, το  $\mathbf{A}_{nb}$  αναφέρεται στον  $N \times b$  πίνακα γειτνίασης των σύνθετων κατευθυνόμενων R-L κλάδων. Ένα στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{A}_{nb}$  ισούται με  $a_{ij} = +1$ , αν ο  $j$  κλάδος εξέρχεται από τον  $i$  κόμβο, με  $a_{ij} = -1$ , αν ο  $j$  κλάδος εισέρχεται στον  $i$  κόμβο και με  $a_{ij} = 0$ , αν ο  $j$  κλάδος δεν συμπίπτει με τον  $i$  κόμβο. Το  $\mathbf{i}_b(t)$  αντιπροσωπεύει το  $b \times 1$  διάνυσμα των ρευμάτων των κλάδων. Το  $\mathbf{v}_n(t)$  αντιπροσωπεύει το  $N \times 1$  διάνυσμα των τάσεων των κλάδων. Το  $\mathbf{e}_n(t)$  αντιπροσωπεύει το  $N \times 1$  διάνυσμα των διεγέρσεων στους κόμβους από ανεξάρτητες πηγές. Το  $\mathbf{C}_n$  αντιπροσωπεύει τον  $N \times N$  διαγώνιο πίνακα με τις χωρητικότητες των κόμβων. Το  $\mathbf{R}_b$  αντιπροσωπεύει τον  $b \times b$  διαγώνιο πίνακα με τις αντιστάσεις των R-L σύνθετων κλάδων. Τέλος, το  $\mathbf{L}_b$  αντιπροσωπεύει τον  $b \times b$  διαγώνιο πίνακα με τις αυτεπαγωγές των R-L σύνθετων κλάδων.

### 2.1.2 Μεταβατική ανάλυση δικτύων τροφοδοσίας

Στο πλαίσιο της προσομοίωσης του δικτύου τροφοδοσίας, θα πρέπει η εξίσωση (2.1) να διακριτοποιηθεί. Για την επίτευξη της διακριτοποίησης θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Backward-Euler. Η γραμμική εξίσωση που θα προκύψει, παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\left( \tilde{\mathbf{G}} + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h_k} \right) \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{e}(t_k) + \frac{\tilde{\mathbf{C}}}{h_k} \mathbf{x}(t_{k-1}) \quad (2.2)$$

το  $t_k = 1, \dots$  αποτελεί την ακολουθία των διακριτών χρονικών σημείων και το  $h_k = t_k - t_{k-1}$  αποτελεί το χρονικό βήμα τη στιγμή  $t_k$ . Το χρονικό βήμα κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης θα μεταβάλλεται. Αν στην εξίσωση (2.2), εφαρμόσουμε πράξεις μεταξύ των μπλοκ των πινάκων [6], θα παραχθεί το σύστημα των παρακάτω αναδρομικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{A}_{nb} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h_k} \right)^{-1} \mathbf{A}_{nb}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h_k} \right) \mathbf{v}_n(t_k) = \\ & \frac{\mathbf{C}_n}{h_k} \mathbf{v}_n(t_{k-1}) - \mathbf{A}_{nb} \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h_k} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h_k} \mathbf{i}_b(t_{k-1}) + \mathbf{e}_n(t_k) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{i}_b(t_k) = \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h_k} \right)^{-1} \frac{\mathbf{L}_b}{h_k} \mathbf{i}_b(t_{k-1}) + \left( \mathbf{R}_b + \frac{\mathbf{L}_b}{h_k} \right)^{-1} \mathbf{A}_{nb}^T \mathbf{v}_n(t_k) \quad (2.4)$$

Σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή  $t_k$  θα γίνεται η επίλυση της γραμμικής εξίσωσης (2.3) και στη συνέχεια από την εξίσωση (2.4) θα εξαγονται οι τιμές των ρευμάτων στους κλάδους. Αν θέλουμε να μοντελοποιήσουμε το σύστημα ως ένα RC κύκλωμα, τότε θα αφαιρέσουμε τις επαγωγές από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων και θα παραχθεί το ακόλουθο:

$$\left( \mathbf{A}_{nb} \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{A}_{nb}^T + \frac{\mathbf{C}_n}{h_k} \right) \mathbf{v}_n(t_k) = \frac{\mathbf{C}_n}{h_k} \mathbf{v}_n(t_{k-1}) + \mathbf{e}_n(t_k) \quad (2.5)$$

Τα συστήματα πινάκων που περιέχουν οι εξισώσεις (2.3), (2.4) και (2.5) είναι συμμετρικά και θετικά ορισμένα. Συνεπώς, υπάρχει η δυνατότητα αξιοποίησης μεθόδων είτε άμεσων είτε επαναληπτικών, όπως η μέθοδος Συζυγών Κλίσεων (Conjugate Gradient), για την επίλυσή τους. Οι συγκεκριμένες μέθοδοι, μπορούν να αποτελέσουν μία αρκετά αποδοτική λύση για την επίλυση γραμμικών συστημάτων μεγάλης κλίμακας, όπως θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3.

## 2.2 Θερμικά κυκλώματα

Η συνεχής ανάπτυξη των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων σε συνδυασμό με την αύξηση της θερμοκρασίας της λειτουργίας των συσκευών, έχει προκαλέσει την ανάγκη δημιουργίας ενός θερμικού μοντέλου. Μέσω του θερμικού μοντέλου θα μπορούν οι σχεδιαστές και κατασκευαστές να σχεδιάσουν πιο γρήγορα και με μεγαλύτερη ακρίβεια τα ολοκληρωμένα κυκλώματα. Οι υψηλές θερμοκρασίες των κυκλωμάτων, έχουν υποβαθμίσει και την απόδοσή τους. Επομένως, οι εκτιμήσεις που μπορούν να γίνουν μέσω ανάλυσης στο στάδιο του σχεδιασμού θα επιδράσουν θετικά ώστε να υλοποιηθεί πιο άμεσα ο σχεδιασμός, κάνοντας χρήση ακριβέστερων παραμέτρων.

### 2.2.1 Μοντελοποίηση Θερμικής Ανάλυσης

Αρχικά, θα πρέπει να μοντελοποιηθεί ο τρόπος με τον οποίο μεταφέρεται η θερμότητα. Υπάρχουν τρεις τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η μεταφορά θερμότητας, η αγωγιμότητα, η ακτινοβολία και η συναγωγή [7]. Το βασικό τρόπο μεταφοράς θερμότητας αποτελεί η αγωγιμότητα, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί ακόμα καλύτερα μέσω του νόμου Fourier [8]:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -k_t \nabla T(\mathbf{r}, t) \quad (2.6)$$

Ο νόμος Fourier για την αγωγιμότητα θερμότητας, όπως φαίνεται και από την εξίσωση (2.6), εκφράζει ότι το διάνυσμα πυκνότητας ροής της θερμότητας  $\mathbf{q}$  είναι

ανάλογο της θερμικής αγωγιμότητας  $k_t$  του υλικού και της αρνητικής κλίσης, σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  και κάθε σημείο  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  στην επιφάνεια, της θερμοκρασίας.

Σύμφωνα, όμως, με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η απόκλιση της ροής θερμότητας  $\mathbf{q}$  ισούται και με τη διαφορά μεταξύ της ισχύος, που παράγεται από εξωτερικές πηγές και του ρυθμού μεταβολής της θερμοκρασίας, όπως φαίνεται στη παρακάτω εξίσωση:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t) - \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

Στη συνέχεια, προστέθηκαν και ορισμένα νέα στοιχεία σε σύγκριση με την εξίσωση (2.6). Εδώ το  $c_p$  αντιπροσωπεύει την ειδική θερμική χωρητικότητα του υλικού, το  $r$  την πυκνότητα του υλικού και τέλος την συχνότητα ισχύος των πηγών θερμότητας αντιπροσωπεύει το  $g(\mathbf{r}, t)$ . Αν συνδυάσουμε τις εξισώσεις (2.6) και (2.7), θα πάρουμε ως αποτέλεσμα:

$$-k_t \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t) - \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

που αν γραφτεί με τη μορφή παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= k_t \nabla^2 T(\mathbf{r}, t) + g(\mathbf{r}, t) \\ &= k_t \left( \frac{\partial^2 T(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right) + g(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Συνήθως, ακολουθείται από ορισμένες ειδικές οριακές συνθήκες [9]. Για την επίλυση της εξίσωσης (2.9) θα χρησιμοποιηθεί μία συνηθισμένη διαδικασία, κατά την οποία θα γίνει διακριτοποίηση κατά μήκος των τριών χωρικών συντεταγμένων με βήματα  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ . Επιπρόσθετα, θα πρέπει να αντικατασταθούν οι μερικοί παράγωγοι δεύτερης τάξης με προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών. Συμπερασματικά, θα προκύψει η παρακάτω έκφραση, για τη θερμοκρασία  $T_{i,j,k}$  στα διακριτά σημεία  $(i,j,k)$  σε αναλογία με τα γειτονικά τους στοιχεία:

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{dT_{i,j,k}}{dt} &= k_t \frac{T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \\ &\quad + k_t \frac{T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} \\ &\quad + k_t \frac{T_{i,j,k+1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} + g_{i,j,k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

είτε πολλαπλασιάζοντας με  $\Delta x \Delta y \Delta z$ :

$$\begin{aligned}
& \rho c_p (\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{dT_{i,j,k}}{dt} \\
& -k_t \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} (T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}) \\
& -k_t \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} (T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}) \\
& -k_t \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} (T_{i,j,k+1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k-1}) \\
& = g_{i,j,k} (\Delta x \Delta y \Delta z)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Αν κάνουμε χρήση της αναλογίας ενός ηλεκτρικού κυκλώματος και ενός θερμικού κυκλώματος (Πίνακας 2.1), παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2.11) μπορεί να προσαρμοστεί σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα στο οποίο υπάρχει ένας κόμβος σε κάθε χωρικό σημείο ή ένα κελί στο θερμικό κύκλωμα.

Πίνακας 2.1: Αναλογία μεταξύ θερμικού και ηλεκτρικού κυκλώματος.

Ηλεκτρικό κύκλωμα	Θερμικό κύκλωμα
Τάση	Θερμοκρασία
Ρεύμα	Θερμική Ροή
Ηλεκτρική Αγωγιμότητα	Θερμική Αγωγιμότητα
Ηλεκτρική Αντίσταση	Θερμική Αντίσταση
Ηλεκτρική Χωρητικότητα	Θερμική Χωρητικότητα
Πηγή Ρεύματος	Πηγή Θερμότητας

Όλοι οι κόμβοι είναι συνδεδεμένοι με τους γειτονικούς τους, χωρικά, μέσω αγωγιμοτήτων σε όλες τις κατευθύνσεις  $x$ ,  $y$ ,  $z$  με τιμές:

$$G_x \equiv \frac{k_t \Delta y \Delta z}{\Delta x}, G_y \equiv \frac{k_t \Delta x \Delta z}{\Delta y}, G_z \equiv \frac{k_t \Delta x \Delta y}{\Delta z} \tag{2.12}$$

Επίσης, σε κάθε κόμβο ή σε κάθε θερμικό κελί, συνδέεται γειωμένη χωρητικότητα με τιμή:

$$C \equiv \rho c_p (\Delta x \Delta y \Delta z) \tag{2.13}$$

Οι πηγές θερμότητας μοντελοποιούνται στο ισοδύναμο κύκλωμα ως πηγές ρεύματος, από τη στιγμή που συνιστούν διεγέρσεις εισόδου, με τιμές:

$$I_{i,j,k} \equiv g_{i,j,k} (\Delta x \Delta y \Delta z) \tag{2.14}$$

Οι πηγές ρεύματος συνδέονται σε συγκεκριμένα σημεία  $(i,j,k)$  ή κόμβους κυκλώματος, στους οποίους υπάρχει ροή θερμότητας.

Κάνοντας χρήση της μεθόδου Modified Nodal Analysis, το ισοδύναμο ηλεκτρικό κύκλωμα περιγράφεται από ένα σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, στο πεδίο

του χρόνου :

$$\mathbf{G}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, το  $\mathbf{G}$  αναφέρεται στον  $n \times n$  πίνακα αγωγιμοτήτων, ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (2.12). Το  $\mathbf{C}$  αναφέρεται στον  $n \times n$  διαγώνιο πίνακα χωρητικότητων (2.13), το  $\mathbf{x}$  αποτελεί το διάνυσμα των αγνώστων θερμοκρασιών  $T_{i,j,k}$ , μεγέθους  $n$ , στα σημεία διακριτοποίησης. Τέλος, το  $\mathbf{u}$  περιγράφει το διάνυσμα των διεγέρσεων εισόδου από τις πηγές ρεύματος  $I_{i,j,k}$  (2.14).

### 2.2.2 Προσομοίωση Θερμικού μοντέλου με μεταβλητό χρονικό βήμα

Έχοντας πλέον μοντελοποιήσει το σύστημά μας, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε την προσομοίωση του θερμικού μοντέλου. Υλοποιώντας την προσομοίωση, θα εξαχθεί η θερμότητα των επιμέρους στοιχείων του ολοκληρωμένου κυκλώματος και με τον συγκεκριμένο τρόπο, ο σχεδιαστής θα έχει τη δυνατότητα να παρέμβει στο κύκλωμα πολύ πριν την κατασκευή.

Για την επίτευξη της προσομοίωσης, όμως, θα πρέπει το σύστημα να διακριτοποιηθεί, δηλαδή να αντικατασταθούν με χρονικές στιγμές  $t_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , τα χρονικά διαστήματα. Στη συνέχεια, όπως έχει προαναφερθεί, αξιοποιώντας την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης backward-Euler, υπολογίζεται η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή  $t_k$ :

$$\left(\mathbf{G} + \frac{\mathbf{C}}{h_k}\right)\mathbf{x}(t_k) = \frac{\mathbf{C}}{h_k}\mathbf{x}(t_{k-1}) + \mathbf{u}(t_k) \quad (2.16)$$

Στην εξίσωση (2.16), το  $h_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  υποδηλώνει το μεταβλητό χρονικό βήμα τη στιγμή  $t_k$ .

Συμπερασματικά, για την προσομοίωση των δικτύων τροφοδοσίας, καθώς και των θερμικών κυκλωμάτων γεννάται η ανάγκη επίλυσης τεράστιων γραμμικών συστημάτων σε κάθε χρονική στιγμή  $t_k$ . Στο κεφάλαιο 3, θα γίνει ανάλυση των αριθμητικών μεθόδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση τέτοιων συστημάτων.



## Κεφάλαιο **3**

# Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων

---

**Σ**το κεφάλαιο αυτό γίνεται περιγραφή και αξιολόγηση των μεθόδων επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Στη συνέχεια, επιλέγεται η πιο αποτελεσματική μέθοδος για την επίλυση των αραιών, πολύ μεγάλης κλίμακας γραμμικών συστημάτων, που θα δημιουργηθούν στο πλαίσιο των αναγκών αυτής της διπλωματικής.

### 3.1 Άμεσες Μέθοδοι

Οι αριθμητικές μέθοδοι, οι οποίες χρησιμοποιούνται για την επίλυση γραμμικών συστημάτων, φτάνοντας στη λύση μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό πράξεων, ονομάζονται άμεσες. Ο αριθμός των πράξεων που θα χρειαστεί μία άμεση μέθοδος για να τερματίσει εξαρτάται πλήρως από το μέγεθος του συστήματος [10].

Μεγάλο πλεονέκτημα των άμεσων μεθόδων αποτελεί το γεγονός ότι η λύση του συστήματος που θα παράγουν θα είναι ακριβής και όχι κατά προσέγγιση. Οι άμεσες μέθοδοι χρησιμοποιήθηκαν κατά κόρον τις προηγούμενες δεκαετίες, λόγω της ακρίβειας και της προβλέψιμης συμπεριφοράς που παρείχαν σε πραγματικά προβλήματα.

Αντίθετα, όταν το μέγεθος των γραμμικών συστημάτων μεγαλώνει, παρατηρείται ότι οι απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο και σε μνήμη αυξάνονται σε βαθμό που τις καθιστά απαγορευτικές. Ο βασικός παράγοντας του προβλήματος είναι ότι στις άμεσες μεθόδους γίνεται χρήση πολλαπλασιασμού πινάκων, με αποτέλεσμα οι διαστάσεις των γινομένων να αυξάνονται εκθετικά.

### 3.2 Επαναληπτικές Μέθοδοι

Στην εποχή μας, η ανάγκη επίλυσης μεγάλων γραμμικών συστημάτων οδήγησε στην αξιοσημείωτη στροφή προς τις επαναληπτικές μεθόδους σε αρκετούς επιστημονικούς τομείς. Διοδιάστατα μοντέλα και κυρίως τριδιάστατα, χρησιμοποιώντας άμεσες μεθόδους, οδηγούσαν σε απαιτήσεις τόσο σε μνήμη όσο και σε χρόνο που ήταν αρκετά μεγάλες, έως και απαγορευτικές [2]. Ένας επιπλέον λόγος που οδήγησε στη

χρήση των επαναληπτικών μεθόδων είναι η ανάγκη εκμετάλλευσης του γεγονότος ότι πολλά συστήματα πλέον είναι αραιά. Επιπρόσθετα, ο συνδυασμός ενός μηχανισμού preconditioning με τις επαναληπτικές μεθόδους υποχώρων Krylon επέφερε αποδοτικές μεθόδους που μπορούσαν να ανταγωνιστούν τις άμεσες μεθόδους. Συνεπώς, η χρήση πλέον των επαναληπτικών μεθόδων είναι σχεδόν απαραίτητη. Οι επαναληπτικές μέθοδοι, ουσιαστικά, γεννούν σε κάθε επανάληψη μία προσέγγιση της λύσης, εφαρμόζοντας εσωτερικά γινόμενα και πολλαπλασιασμούς πίνακα επί διάνυσμα.

Σημαντικό πλεονέκτημα των επαναληπτικών, έναντι των άμεσων μεθόδων, αποτελεί η ευκολία υλοποίησής τους σε παράλληλες αρχιτεκτονικές. Ο πολλαπλασιασμός πίνακα επί διάνυσμα μπορεί να αποσυντεθεί σε πολλαπλασιασμούς μπλοκ του πίνακα με μέρος του διανύσματος. Εφαρμόζοντας το συγκεκριμένο κατακερματισμό, κάθε επιμέρους πράξη έχει τη δυνατότητα να εκτελεστεί σε διαφορετικό πυρήνα επεξεργαστή. Αντίθετα, οι άμεσες μέθοδοι εμπλέκουν εξαρτήσεις μεταξύ αρκετών στοιχείων, γεγονός που καθιστά, αυτόματα, την υλοποίησή τους σε παράλληλες αρχιτεκτονικές, πολύπλοκη.

Το κύριο μειονέκτημα των επαναληπτικών μεθόδων είναι ότι πολλές φορές ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου δεν μπορεί να προβλεφθεί. Οι ιδιότητες των πινάκων του συστήματος και πιο συγκεκριμένα, ο δείκτης κατάστασής τους, διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στη σύγκλιση. Για την αντιμετώπιση αυτού του φαινομένου, συχνά γίνεται εφαρμογή του μηχανισμού preconditioning, ο οποίος προσεγγίζει τη λύση κάνοντας χρήση ενός πίνακα με καλύτερες ιδιότητες από του αρχικού. Βέβαια, για να μπορέσει να επιδράσει αποδοτικά αυτός ο μηχανισμός, τις περισσότερες φορές ο preconditioner πίνακας θα πρέπει να κατασκευαστεί για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Για το λόγο αυτό, δεν χρησιμοποιούνται κατά κόρον οι επαναληπτικές μέθοδοι, προς το παρόν.

### 3.3 Μέθοδοι Ανάλυσης και Προσομοίωσης

#### 3.3.1 Δίκτυο Τροφοδοσίας

Έχουν προταθεί αρκετοί μέθοδοι για ανάλυση και προσομοίωση ενός δικτύου τροφοδοσίας στο πέρασμα των χρόνων. Στο [6] προτείνεται μία μέθοδος preconditioning των επαναληπτικών μεθόδων υποχώρων Krylon και συγκεκριμένα της μεθόδου Συζυγών Κλίσεων. Όμως ο προρυθμιστής που χρησιμοποιήθηκε, ο μη πλήρης Cholesky, αποτελεί προρυθμιστή γενικού σκοπού, με συνέπεια να δίνει αποδοτικές λύσεις μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Το ίδιο ισχύει και στις περιπτώσεις που χρησιμοποιείται ως preconditioner ο μη πλήρης LU [11].

Αρκετά ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις αποτελούν οι πολυπλεγματικές τεχνικές. Χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές μερικών διαφορικών εξισώσεων και αν συνδυαστούν με τεχνικές διακριτοποίησης σχηματίζουν αρκετά γρήγορες μεθόδους.

Preconditioners, οι οποίοι σχηματίζονται με τέτοιες τεχνικές και σε παράλληλες αρχιτεκτονικές προτείνονται στα [12], [13]. Δυστυχώς, αυτές οι μέθοδοι δεν μπορούν να εγγυηθούν μία γρήγορη σύγκλιση.

Επιπρόσθετα, αναπτύχθηκαν και τεχνικές preconditioning με ιεραρχικούς γράφους [14], οι οποίες μπορούσαν να επιτύχουν καλή σύγκλιση για προβλήματα που ήταν βασισμένα σε γράφους. Ωστόσο, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στο [14], παρόλο που εκμεταλλευόταν τον παραλληλισμό, αξιοποιώντας παράλληλες μαζικές τεχνικές (όπως οι κάρτες γραφικών), αποτελούσε μέθοδο γενικού σκοπού και δεν εκμεταλλευόταν την τοπολογία του δικτύου τροφοδοσίας. Επίσης, σε άλλες προσεγγίσεις με ιεραρχικούς γράφους χρειαζόταν επίλυση τριδιαγώνιων συστημάτων, με αποτέλεσμα η παραλληλοποίηση της μεθόδου να ήταν αρκετά πολύπλοκη.

Ταυτόχρονα, αρκετά αποδοτικές μέθοδοι προτείνονται στα [15], [16] με επιπυτές Fast Poisson και preconditioners εφαρμόσιμους και σε τριδιαγώνια και σε πολυπλεγματικά συστήματα.

Τέλος, η προσέγγιση [3] που θα υλοποιηθεί στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, χρησιμοποιεί για την ανάλυση του δικτύου τροφοδοσίας, δύο αρκετά παραλληλοποιήσιμους preconditioners σε συνδυασμό με τη Μέθοδο Συζυγών Κλίσεων. Μία προσέγγιση αρκετά υποσχόμενη, καθώς φαίνεται να επιτυγχάνει επιταχύνσεις έως και 100× συγκριτικά με επαναληπτικές μεθόδους με μη πλήρεις προρυθμιστές, όπως ο Cholesky και ο LU.

### 3.3.2 Θερμικό μοντέλο

Όπως για ένα δίκτυο τροφοδοσίας, έτσι και για τα θερμικά μοντέλα, έχουν γίνει αρκετές προσεγγίσεις για την προσομοίωσή τους. Οι περισσότερες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί βασίζονται στις μεθόδους Finite Difference Method (FDM), Finite Element Method (FEM) και στις συναρτήσεις Green.

Υπάρχουν προσεγγίσεις πολυπλεγματικές, οι οποίες προσαρμόζουν το χώρο και το χρόνο κατάλληλα [17], [18] και βασίζονται στη μέθοδο Finite Difference Method (FDM). Επίσης, προσεγγίσεις που βασίζονται στις συναρτήσεις του Green [19] με μετασχηματισμούς Discrete Cosine Transform και Inverse Discrete Cosine Transform.

Στο πλαίσιο της διπλωματικής, θα παρουσιαστεί αναλυτικά η προσέγγιση [4], η οποία απορρέει από την [3] που αναφέρεται στο τέλος της υποενότητας 3.3.1, καθώς φαίνεται να επιτυγχάνει βελτίωση στο ρυθμό σύγκλισης έως και 25×, συγκριτικά με μη πλήρεις προρυθμιστές.

## 3.4 Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων με Προρυθμιστή

Ο αλγόριθμος των Συζυγών Κλίσεων αποτελεί μία από τις πιο γνωστές μεθόδους για την επίλυση αραιών, συμμετρικών, θετικά ορισμένων γραμμικών συστημάτων[20].

Παράγει μία ακολουθία διανυσμάτων σε κάθε επανάληψη που προσεγγίζουν επιτυχώς τη λύση. Το σφάλμα μειώνεται σε κάθε επανάληψη χωρίς να ακολουθεί κάποιο μοτίβο, δηλαδή σε κάποιες επαναλήψεις, ανεξαρτήτως τον αριθμό επανάληψης, το σφάλμα μειώνεται αρκετά και σε άλλες όχι.

Ο επιθυμητός αριθμός βημάτων κατά τη σύγκλιση της μεθόδου, είναι πολύ μικρότερος του μεγέθους του συστήματος. Επειδή, όμως, το σφάλμα μειώνεται ακανόνιστα, αν μειωθεί αρκετά στις πρώτες επαναλήψεις θα υπάρξει γρήγορα σύγκλιση. Βασικό προαπαιτούμενο για αυτό, αποτελεί ο δείκτης κατάστασης του πίνακα.

Ο δείκτης κατάστασης ισούται με  $k_2 = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ , όπου  $\lambda_{max}$  η ιδιοτιμή του πίνακα με τη μεγαλύτερη τιμή και όπου  $\lambda_{min}$  με τη μικρότερη τιμή. Αν ο δείκτης κατάστασης βρίσκεται κοντά στον αριθμό ένα, τότε θα επέλθει γρήγορη σύγκλιση. Σε διαφορετική περίπτωση η σύγκλιση θα είναι αργή και η μέθοδος μη αποδοτική [20].

Οι προβλέψεις για τη σύγκλιση δεν είναι δυνατόν να είναι ακριβείς, όμως ο αριθμός των επαναλήψεων για να φτάσει η μέθοδος στη σύγκλιση μπορεί να οριοθετηθεί από το δείκτη κατάστασης του πίνακα. Δηλαδή, έχει άνω όριο τη ρίζα του δείκτη κατάστασης του πίνακα  $O(\sqrt{k_2(\mathbf{A})})$ . Το γεγονός αυτό καθιστά την μέθοδο Συζυγών Κλίσεων αρκετά ισχυρή έναντι άλλων επαναληπτικών μεθόδων.

Επιπρόσθετα, η μέθοδος Συζυγών Κλίσεων αποτελεί και μία προσέγγιση αρκετά αποδοτική σε μνήμη και ταυτόχρονα σε υπολογιστικό χρόνο. Σε κάθε επανάληψη κάνει έναν πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα, τρεις ενημερώσεις διανυσμάτων και δύο εσωτερικά γινόμενα. Ταυτόχρονα, χρειάζεται να κρατά στη μνήμη μόνο πέντε διανύσματα.

Για την επίτευξη της γρήγορης σύγκλισης θα πρέπει να εφαρμοστεί στον αλγόριθμο και ένας μηχανισμός προρρυθμιστή, ώστε το γραμμικό σύστημα που θα γεννηθεί να έχει καλύτερες ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, θα πρέπει να έχει καλό δείκτη κατάστασης, ώστε να επιτύχει γρήγορη σύγκλιση, όπως προαναφέρθηκε. Μία καλή προσέγγιση αποτελεί η χρήση ενός προρρυθμιστή  $\mathbf{M}$ , ο οποίος προσεγγίζει αρκετά καλά τον πίνακα  $\mathbf{A}$ , ώστε να ισχύει  $\mathbf{M}^{-1} \approx \mathbf{A}^{-1}$ . Αν και εφόσον ισχύει η παραπάνω συνθήκη, προκύπτει ότι  $k_2(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}) = k_2(\mathbf{I}) = 1$ . Η υλοποίηση της μεθόδου με προρρυθμιστή παρουσιάζεται στον αλγόριθμο (3.1).

Ο προρρυθμιστής που θα χρησιμοποιηθεί για υλοποίηση στη γλώσσα προγραμματισμού c++ στο πλαίσιο της εργασίας παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.

---

 ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 3.1: Μέθοδος Συζυγών Κλίσεων με Προρυθμιστή
 

---

```

1:  $\mathbf{x} =$  αρχική μαντεψιά  $\mathbf{x}^{(0)}$ 
2:  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}$ 
3: for  $i = 1, 2, \dots$  do
4:   Λύσε  $\mathbf{M}\mathbf{z}^{(i-1)} = \mathbf{r}^{(i-1)}$  (Βήμα Επίλυσης με Προρυθμιστή)
5:    $\rho_{i-1} = \mathbf{r}^{(i-1)T} \cdot \mathbf{z}^{(i-1)}$ 
6:   if  $i == 1$  then
7:      $\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{z}^{(0)}$ 
8:   else
9:      $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ 
10:     $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{z}^{(i-1)} + \beta_{i-1}\mathbf{p}^{(i-1)}$ 
11:   end if
12:    $\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(i)}$ 
13:    $a_i = \rho_{i-1} / (\mathbf{p}^{(i)T} \cdot \mathbf{q}^{(i)})$ 
14:    $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} + a_i\mathbf{p}^{(i)}$ 
15:    $\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i-1)} - a_i\mathbf{q}^{(i)}$ 
16:   έλεγχος για σύγκλιση, συνέχεια αν χρειάζεται
17: end for

```

---



## Κεφάλαιο 4

### Εργαλεία Υλοποίησης

---

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν για την προτεινόμενη υλοποίηση. Αρχικά περιγράφεται ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε κατά την υλοποίηση. Στη συνέχεια περιγράφονται οι βιβλιοθήκες Eigen και FFTW στη γλώσσα προγραμματισμού C++, για βελτιστοποίηση του υπάρχοντος αλγορίθμου.

#### 4.1 Περιγραφή Αλγορίθμου Υλοποίησης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ο αλγόριθμος για την επίλυση του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{Mz} = \mathbf{r}$ , του βήματος 4, της Μεθόδου Συζυγών Κλίσεων με Προρυθμιστή (Αλγόριθμος 3.1). Στη συνέχεια, περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής του Προρυθμιστή  $\mathbf{M}$ .

##### 4.1.1 Δίκτυα Τροφοδοσίας

Ας υποθέσουμε ότι ο  $\mathbf{M}$  είναι ένας  $N \times N$ , τριδιαγώνιος κατά μπλοκ πίνακας, με  $N = lmn$  και μέγεθος μπλοκ  $mn \times mn$ . Ο αριθμός  $l$  στην περίπτωση μας είναι αρκετά μικρός, καθώς αναπαριστά τον αριθμό των μεταλλικών στρωμάτων του δικτύου τροφοδοσίας. Όπως θα δούμε στην παρακάτω εξίσωση, η μορφή του πίνακα  $\mathbf{M}$  έχει ως εξής:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & & & & \\ \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_2 & \gamma_2 \mathbf{I}_{mn} & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \gamma_{l-2} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_{l-1} & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} \\ & & & & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

όπου  $\mathbf{I}_{mn}$  είναι ο ο μοναδιαίος πίνακας διαστάσεων  $mn \times mn$  και όπου  $\mathbf{M}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , είναι διαδοχικά οι διαγώνιοι και τριδιαγώνιοι κατά μπλοκ πίνακες, μεγέθους

$mn \times mn$ . Τα μπλοκ των πινάκων σε αριθμό είναι  $m$  και έχουν διαστάσεις  $n \times n$ . Η μορφή τους δίνεται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$\mathbf{M}_i = \text{diag}(\mathbf{T}_i, \dots, \mathbf{T}_i), i = 1, 3, \dots \quad (4.2)$$

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} (a_i + \beta_i)\mathbf{I}_n & -a_i\mathbf{I}_n & & & \\ -a_i\mathbf{I}_n & (2a_i + \beta_i)\mathbf{I}_n & -a_i\mathbf{I}_n & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -a_i\mathbf{I}_n & (2a_i + \beta_i)\mathbf{I}_n & -a_i\mathbf{I}_n \\ & & & -a_i\mathbf{I}_n & (a_i + \beta_i)\mathbf{I}_n \end{bmatrix}, i = 2, 4, \dots \quad (4.3)$$

όπου  $\mathbf{I}_n$  είναι ο ο μοναδιαίος πίνακας, διαστάσεων  $n \times n$  και όπου  $\mathbf{T}_i, i = 1, 3, \dots$ , οι τριδιαγώνιοι πίνακες, μεγέθους  $n \times n$ , της μορφής:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} a_i + \beta_i & -a_i & & & \\ -a_i & 2a_i + \beta_i & -a_i & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -a_i & 2a_i + \beta_i & -a_i \\ & & & -a_i & a_i + \beta_i \end{bmatrix} = a_i \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix} + \beta_i \mathbf{I} \quad (4.4)$$

Για την λύση του γραμμικού συστήματος  $\mathbf{Mz} = \mathbf{r}$  θα χρησιμοποιηθεί ένας επιλυτής γρήγορου μετασχηματισμού με  $O(N \log(mn))$  πράξεις. Όπως θα δούμε, κάθε πίνακας  $\mathbf{T}_i$  έχει  $n$  διακριτές ιδιοτιμές οι οποίες δίνονται παρακάτω:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \beta_i + 4a_i \sin^2\left(\frac{(j-1)\pi}{2n}\right) = \beta_i + a_i(2 - 2\cos\left(\frac{(j-1)\pi}{n}\right)) \quad (4.5)$$

και ένα σετ ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{q}_j, j = 1, \dots, n$ :

$$q_{j,k} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{(2k-1)(j-1)\pi}{2n}\right), & j = 1, \quad k = 1, \dots, n \\ \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(\frac{(2k-1)(j-1)\pi}{2n}\right), & j = 2, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (4.6)$$

Κάθε ιδιοδιάνυσμα είναι το ίδιο για κάθε πίνακα  $\mathbf{T}_i$  και δεν εξαρτάται από τις τιμές  $a_i$  και  $\beta_i$ . Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας  $\mathbf{Q}_n = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$  έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{q}_j$ , τότε μέσω της ανάλυσης των ιδιοτιμών του  $\mathbf{T}_i$ , ο πίνακας μπορεί



να διαγωνοποιηθεί ως εξής  $\mathbf{Q}_n^T \mathbf{T}_i \mathbf{Q}_n = \Lambda_i = \text{diag}(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n})$ . Έχοντας υπόψη, ότι  $\mathbf{Q}_n^T \mathbf{Q}_n = \mathbf{I}$  και τη διαγωνοποίηση του πίνακα  $\mathbf{T}_i$ , τότε το σύστημα  $\mathbf{Mz} = \mathbf{r}$  με  $\mathbf{M}$  της εξίσωσης (4.1) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{r} \Leftrightarrow \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & & & \\ \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_2 & \gamma_2 \mathbf{I}_{mn} & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \gamma_{l-2} \mathbf{I}_{mn} & \tilde{\mathbf{M}}_{l-1} & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} \\ & & & & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{r}} \quad (4.8)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{M}}_i = \text{diag}(\Lambda_i, \dots, \Lambda_i), i = 1, 3, \dots$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{z}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^T & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{r}$$

Αν τα διανύσματα  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}$  διασπαστούν σε  $lm$  μπλοκ, μεγέθους  $n \times 1$  το καθένα:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{lm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{lm} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_{lm} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{z}}_{lm} \end{bmatrix}$$

τότε θα έχουμε  $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{r}_i$  και  $\tilde{\mathbf{z}}_i = \mathbf{Q}_n^T \mathbf{z}_i \Leftrightarrow \mathbf{z}_i = \mathbf{Q}_n \tilde{\mathbf{z}}_i$ ,  $i = 1, \dots, lm$ .

Στο σημείο αυτό, όπως έχει αποδειχθεί [21], κάθε γινόμενο  $\mathbf{Q}_n^T \mathbf{r}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i$  αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό Discrete Cosine Transform τύπου II (DCT-II) στο  $\mathbf{r}_i$ . Κάθε γινόμενο  $\mathbf{Q}_n \tilde{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i$  αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό Inverse Discrete Cosine Transform τύπου II (IDCT-II) στο  $\tilde{\mathbf{z}}_i$ . Επομένως, θα χρειαστούν  $lm$  ανεξάρτητοι μετασχηματισμοί DCT-II και  $lm$  ανεξάρτητοι μετασχηματισμοί IDCT-II, μεγέθους  $n$ . Συνεπώς, συνολικά  $O(lmn \log n) = O(N \log n)$  πράξεις.

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα αντιμετάθεσης  $\mathbf{P}$  μεγέθους  $mn \times$

$mn$ , ο οποίος αντιμεταθέτει τα στοιχεία ενός διανύσματος ή τις γραμμές ενός πίνακα ως εξής,  $1, n+1, \dots, (m-1)n+1, 2, n+2, \dots, (m-1)n+2, \dots, n, n+n, \dots, (m-1)n+n$  και επίσης, αν ορίσουμε τους πίνακες  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_1^T$ , οι οποίοι θα συνθέτουν δύο διαγώνιους πίνακες κατά μπλοκ μεγέθους  $lmn \times lmn$  και ισούνται με  $\mathbf{P}_1 = \text{diag}(\mathbf{P}, \dots, \mathbf{P})$ ,  $\mathbf{P}_1^T = \text{diag}(\mathbf{P}^T, \dots, \mathbf{P}^T)$ , τότε το σύστημα της εξίσωσης (4.8) θα είναι ισοδύναμο με:

$$\mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & & & \\ \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_2 & \gamma_2 \mathbf{I}_{mn} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \gamma_{l-2} \mathbf{I}_{mn} & \tilde{\mathbf{M}}_{l-1} & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} \\ & & & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{M}_l \end{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{r}} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & & & \\ \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{D}_2 & \gamma_2 \mathbf{I}_{mn} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \gamma_{l-2} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{D}_{l-1} & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} \\ & & & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{D}_l \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}^{\mathbf{P}_1} = \tilde{\mathbf{r}}^{\mathbf{P}_1} \quad (4.9)$$

όπου,

$$\mathbf{D}_i = \text{diag}(\hat{\eta}_{i,1} \mathbf{I}_m, \dots, \hat{\eta}_{i,n} \mathbf{I}_m), \quad i = 1, 3, \dots$$

$$\mathbf{D}_i = \text{diag}(T_i, \dots, T_i), \quad i = 2, 4, \dots$$

Αν ο  $\mathbf{Q}_m$  είναι ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων των  $\mathbf{T}_{ij}$ , και ισχύει  $\mathbf{Q}_m^T \mathbf{T}_i \mathbf{Q}_m = \Lambda_i = \text{diag}(\hat{\eta}_{i,1}, \dots, \hat{\eta}_{i,m})$ , τότε το σύστημα (4.9) θα ισοδυναμεί με:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & & & \\ \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \tilde{\mathbf{D}}_2 & \gamma_2 \mathbf{I}_{mn} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \gamma_{l-2} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{D}_{l-1} & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} \\ & & & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} & \tilde{\mathbf{D}}_l \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{r}} \quad (4.10)$$

όπου  $\tilde{\mathbf{D}}_i = \text{diag}(\Lambda_i, \dots, \Lambda_i)$ ,  $i = 2, 4, \dots$ , και

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m^T & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Q}_m^T & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}}_1^{\mathbf{P}_1}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_m^T & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{Q}_m^T & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1^{\mathbf{P}_1}$$

Τα διανύσματα  $\tilde{\mathbf{z}}^{\mathbf{P}_1}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}}^{\mathbf{P}_1}$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}$  και  $\tilde{\mathbf{r}}$  θα διασπαστούν σε  $ln$  υποδιανύσματα, μεγέθους  $m$ . Σε κάθε υποδιάνυσμα θα εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός DCT-II για να επέλ-

Θει το τελικό διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{f}}$  και ο μετασχηματισμός IDCT-II για να επέλθει το τελικό διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{z}}$ .

Στη συνέχεια, αν χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα αντιμετάθεσης  $\mathbf{P}_2$ , μεγέθους  $N \times N$ , ο οποίος αντιμεταθέτει τα στοιχεία ενός διανύσματος ή τις γραμμές ενός πίνακα ως εξής,  $1, mn + 1, 2mn + 1, \dots, (l - 1)mn + 1, 2, mn + 2, 2mn + 2, \dots, (l - 1)mn + 2, \dots, mn, mn + mn, 2mn + mn, \dots, (l - 1)mn + mn$ , τότε θα προκύψει το παρακάτω ισοδύναμο σύστημα:

$$\mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & & & \\ \gamma_1 \mathbf{I}_{mn} & \tilde{\mathbf{D}}_2 & \gamma_2 \mathbf{I}_{mn} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \gamma_{l-2} \mathbf{I}_{mn} & \mathbf{D}_{l-1} & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} \\ & & & \gamma_{l-1} \mathbf{I}_{mn} & \tilde{\mathbf{M}}_l \end{bmatrix} \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{f}} \Leftrightarrow$$

$$\text{diag}(\tilde{\mathbf{T}}_{1,1}, \tilde{\mathbf{T}}_{1,2}, \dots, \tilde{\mathbf{T}}_{1,m}, \tilde{\mathbf{T}}_{2,1}, \tilde{\mathbf{T}}_{2,2}, \dots, \tilde{\mathbf{T}}_{2,m}, \dots, \tilde{\mathbf{T}}_{n,m}) \tilde{\mathbf{z}}^{P_2} = \tilde{\mathbf{f}}^{P_2} \quad (4.11)$$

όπου,

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{1,i} & \gamma_1 & & & \\ \gamma_1 & \hat{\beta}_{2,j} & \gamma_2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \gamma_{l-1} & \hat{\beta}_{l-1,i} & \gamma_l \\ & & & \gamma_l & \hat{\beta}_{l,j} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.12)$$

Αν τα διανύσματα  $\tilde{\mathbf{z}}^{P_2}, \tilde{\mathbf{f}}^{P_2}$  διασπαστούν σε  $mn$  υποδιανύσματα, τότε η λύση του συστήματος (4.11) θα αναχθεί στη λύση  $mn$  τριδιαγώνιων συστημάτων, συνολικού κόστους  $O(lmn) = O(N)$

Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται συνοπτικά στον Αλγόριθμο 4.1. Επίσης, ο προρυθμιστής πίνακας  $\mathbf{M}$  που χρησιμοποιείται στον αλγόριθμο, παρουσιάζεται αναλυτικά στο [3]. Ο προρυθμιστής θα πρέπει να προσεγγίζει αρκετά καλά τον πίνακα  $A$  και ταυτόχρονα, να δίνει τη δυνατότητα εφαρμογής αποδοτικών αλγορίθμων για τη λύση του συστήματος  $\mathbf{Mz} = \mathbf{r}$ . Ο συγκεκριμένος προρυθμιστής κατασκευάζεται αξιοποιώντας τη χωρική γεωμετρία του δικτύου τροφοδοσίας προς προσομοίωση.

---

**ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 4.1: Αλγόριθμος για το βήμα επίλυσης με προρυθμιστή  $Mz = r$** 


---

- 1: Διάσπαση του  $\mathbf{r}$  σε  $lm$  υποδιανύσματα  $\mathbf{r}_i$  μεγέθους  $n$ , και εφαρμογή μετασχηματισμού DCT-II ( $\mathbf{Q}_n^T \mathbf{r}_i$ ) σε κάθε  $\mathbf{r}_i$  για να παραχθεί το  $\tilde{\mathbf{r}}$ .
  - 2: Διάσπαση του  $\tilde{\mathbf{r}}$  σε  $l$  υποδιανύσματα  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  μεγέθους  $mn$ , αντιμεταθέτοντας τα στοιχεία κάθε υποδιανύσματος, κάνοντας χρήση του πίνακα  $\mathbf{P}$ , ο οποίος διατάσσει τα στοιχεία τους ως,  $1, n + 1, \dots, (m - 1)n + 1, 2, n + 2, \dots, (m - 1)n + 2, \dots, n, n + n, \dots, (m - 1)n + n$ , για να παραχθεί το  $\tilde{\mathbf{r}}^{P_1}$ .
  - 3: Διάσπαση του  $\tilde{\mathbf{r}}^{P_1}$  σε  $ln$  υποδιανύσματα  $\tilde{\mathbf{r}}_i^{P_1}$  μεγέθους  $m$ , και εφαρμογή μετασχηματισμού DCT-II ( $\mathbf{Q}_m^T \tilde{\mathbf{r}}_i^{P_1}$ ) σε κάθε υποδιάνυσμα για να παραχθεί το  $\tilde{\tilde{\mathbf{r}}}$ .
  - 4: Αντιμετάθεση των στοιχείων του  $\tilde{\tilde{\mathbf{r}}}$ , εφαρμόζοντας τον πίνακα  $\mathbf{P}_2$ , ο οποίος διατάσσει τα στοιχεία του ως,  $1, mn + 1, 2mn + 1, \dots, (l - 1)mn + 1, 2, mn + 2, 2mn + 2, \dots, (l - 1)mn + 2, \dots, mn, mn + mn, 2mn + mn, \dots, (l - 1)mn + mn$ , για να προκύψει το  $\tilde{\tilde{\mathbf{r}}}^{P_2}$ .
  - 5: Υπολογισμός των πινάκων  $\tilde{\mathbf{T}}_{n,m}$ , και επίλυση των  $mn$  τριδιαγώνιων συστημάτων για να προκύψει το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{z}}^{P_2}$ .
  - 6: Εφαρμογή του ανάστροφου πίνακα  $\mathbf{P}_2^T$ , στο διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{z}}^{P_2}$ , για να προκύψει το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{z}}$ .
  - 7: Διάσπαση του  $\tilde{\mathbf{z}}$  σε  $ln$  υποδιανύσματα  $\tilde{\mathbf{z}}_i$  μεγέθους  $m$ , και εφαρμογή του μετασχηματισμού IDCT-II ( $\mathbf{Q}_m \tilde{\mathbf{z}}_i$ ) στο καθένα για να παραχθεί το  $\tilde{\mathbf{z}}^{P_1}$ .
  - 8: Διάσπαση του  $\tilde{\mathbf{z}}^{P_1}$  σε  $l$  υποδιανύσματα  $\tilde{\mathbf{z}}_i^{P_1}$  μεγέθους  $mn$ , και αντιμετάθεση των στοιχείων τους εφαρμόζοντας τον ανάστροφο πίνακα  $\mathbf{P}^T$ , ώστε να προκύψει  $\tilde{\mathbf{z}}$ .
  - 9: Διάσπαση του  $\tilde{\mathbf{z}}$  σε  $lm$  υποδιανύσματα  $\tilde{\mathbf{z}}_i$  μεγέθους  $n$ , και εφαρμογή του μετασχηματισμού IDCT-II ( $\mathbf{Q}_n \tilde{\mathbf{z}}_i$ ) στο καθένα, ώστε να παραχθεί η τελική λύση  $\mathbf{z}$ .
- 

### 4.1.2 Θερμικό Μοντέλο

Για την προσομοίωση του θερμικού μοντέλου, χρησιμοποιείται ο ίδιος αλγόριθμος (Αλγόριθμος 4.1) με παραπάνω και ο ίδιος προρυθμιστής με κάποιες προσαρμογές. Οι προσαρμογές παρουσιάζονται εκτενέστερα στο [4].

## 4.2 Γλώσσα προγραμματισμού C++

Η C++ είναι μία γλώσσα προγραμματισμού, η οποία σχεδιάστηκε ως επέκταση της C, με επιπλέον στοιχεία αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, συνδυάζοντας, έτσι, χαρακτηριστικά από γλώσσες υψηλού και χαμηλού επιπέδου.

Πιο αναλυτικά, η C++ αποτελεί μια φυσική συντακτική επέκταση της C, παραμένοντας συμβατή και συγκρίσιμη με τη δεύτερη, όσον αφορά την σύνταξη, τις επιδόσεις και την φορητότητα. Επομένως, επιτρέπει πολύ αποτελεσματικές υλοποιήσεις και διευκολύνει την μεταφορά κώδικα C σε C++, τόσο για συστήματα λογισμικού όσο και για προγραμματιστές.

Επιπλέον, προσφέρει τις δυνατότητες και τα οφέλη του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, όπως οι κλάσεις, η υπερφόρτωση τελεστών και η κληρονομικότητα, ενώ δεν απαιτεί την χρήση ενός εξελιγμένου προγραμματιστικού περιβάλλοντος.

## 4.3 Βιβλιοθήκη Eigen

Η Eigen αποτελεί μια βιβλιοθήκη της γλώσσας προγραμματισμού C++ με αντικείμενο τη γραμμική άλγεβρα. Χρησιμοποιείται για πράξεις μεταξύ πινάκων και διανυσμάτων. Παρέχει επιπυτές για γραμμικές εξισώσεις και σχετικούς αλγορίθμους [22].

Η συγκεκριμένη βιβλιοθήκη είναι αρκετά ευέλικτη, καθώς υποστηρίζει πίνακες όλων των μεγεθών είτε αραιούς είτε πυκνούς, αλλά και όλους τους αριθμητικούς τύπους και κάποια χαρακτηριστικά γεωμετρίας. Ταυτόχρονα, σε μία υποενότητα της βιβλιοθήκης, που δεν υποστηρίζεται άμεσα από την Eigen, προσφέρονται κάποια επιπλέον ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά, όπως η βελτιστοποίηση μη γραμμικών συστημάτων, ένας πολυωνυμικός επιλυτής, μετασχηματισμοί Fast Fourier Transform κ.ά.

Ένα ακόμα σημαντικό χαρακτηριστικό της Eigen είναι η ταχύτητά της. Τα templates εκφράσεων που χρησιμοποιούνται είναι κατασκευασμένα, με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνεται έξυπνη αποδέσμευση των προσωρινών μεταβλητών, όταν αυτό είναι απαραίτητο. Επιπλέον, οι σταθεροί πίνακες είναι πλήρως βελτιστοποιημένοι. Για τους μεγάλους πίνακες υφίσταται ειδική μέριμνα ώστε να είναι βολικοί για την κρυφή μνήμη (cache memory).

Για την επιλογή των αλγορίθμων έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αξιοπιστία, ενώ παράλληλα έχουν γίνει εξονυχιστικοί έλεγχοι για την αποτελεσματικότητά τους.

Τέλος, η διεπαφή που προσφέρει η Eigen είναι αρκετά εύχρηστη και ευνόητη, με αποτέλεσμα, η χρήση της βιβλιοθήκης για την υλοποίηση ενός κομματιού κώδικα να γίνεται με αρκετά απλό τρόπο. Ωστόσο, ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματά της, αποτελεί η συμβατότητά της με αρκετούς μεταγλωττιστές.

## 4.4 Βιβλιοθήκη FFTW

Η FFTW είναι μια βιβλιοθήκη της C, για τον υπολογισμό του μετασχηματισμών Fourier (Fast Fourier transform ή FFT) σε μία ή περισσότερες διαστάσεις. Η βιβλιοθήκη συμπεριλαμβάνει μετασχηματισμούς, όπως, οι διακριτοί μετασχηματισμοί συνημιτόνων/ημιτόνων (discrete cosine/sine transforms ή DCT/DST).

Κάποια από τα κύρια χαρακτηριστικά της FFTW είναι η ταχύτητα, η δυνατότητα χρήσης μετασχηματισμών αυθαίρετου μεγέθους, ο μετασχηματισμός πραγματικών άρτιων/περιπών δεδομένων, οι παράλληλοι μετασχηματισμοί και η δωρεάν χρήση της.

Πιο αναλυτικά, η FFTW έχει πολύ καλύτερη απόδοση από όλα τα υπόλοιπα λογισμικά που είναι διαθέσιμα για διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT). Αυτό οφείλεται στην παραλληλοποίηση του κώδικα, ο οποίος έχει χωριστεί σε μικρότερα, εξαιρετικά βελτιστοποιημένα και σύνθετα κομμάτια. Το κάθε κομμάτι υπολογίζει ένα

συγκεκριμένο μέρος του μετασχηματισμού και στη συνέχεια, τα επιμέρους κομμάτια συνδυάζονται με έναν αλγόριθμο δυναμικού προγραμματισμού, σύμφωνα με τον οποίο υπολογίζεται ο γρηγορότερος συνδυασμός, κατά τον χρόνο εκτέλεσης.

Παρόλο που η FFTW χρησιμοποιεί αρκετά πολύπλοκους υπολογισμούς, αυτό δεν φαίνεται στον χρήστη. Το συγκεκριμένο πλεονέκτημα πηγάζει από την αρκετά εύχρηστη διεπαφή που παρέχει η βιβλιοθήκη, για την χρήση των συναρτήσεών της.

## Κεφάλαιο 5

### Υλοποίηση

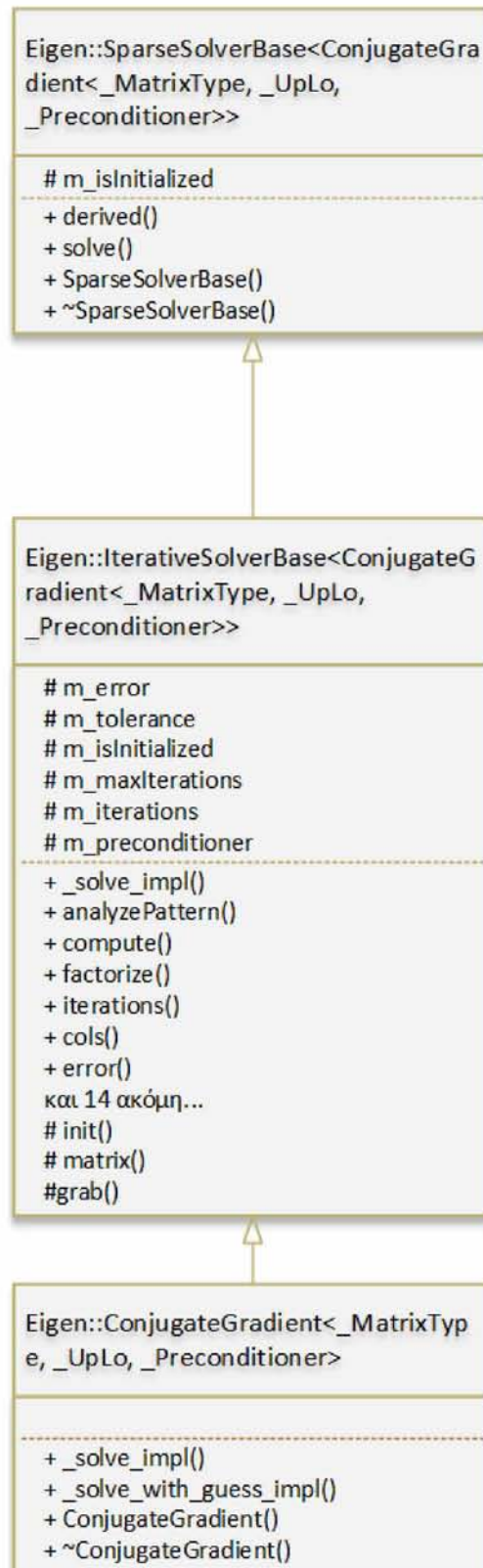
---

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η υλοποίηση του συστήματος, με βάση τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αρχικά, παρουσιάζεται ο σχεδιασμός της υλοποίησης. Στη συνέχεια, αναλύεται το υλικό που χρησιμοποιήθηκε και οι πόροι που απαιτήθηκαν. Τέλος, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της υλοποίησης.

#### 5.1 Λεπτομέρειες υλοποίησης

Αρχικά, για την υλοποίηση του αλγορίθμου των Συζυγών Κλίσεων με προρυθμιστή (Αλγόριθμος 4.1) χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη Eigen, στη γλώσσα προγραμματισμού C++. Πιο συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκε η κλάση ConjugateGradient, οι μέθοδοί της και οι μεταβλητές της (Σχήμα 5.1). Κατά την κατασκευή ενός αντικειμένου της κλάσης, παρέχεται η δυνατότητα να προσδιοριστεί το κομμάτι του πίνακα που θα χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του γραμμικού συστήματος. Δηλαδή, αν ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, η μέθοδος θα εκμεταλλευτεί μόνο το κομμάτι του πίνακα που έχει στοιχεία και όχι όλον τον πίνακα. Αυτό μπορεί να επιταχύνει αρκετά το χρόνο επίλυσης και να μειώσει τις απαιτήσεις μνήμης. Ταυτόχρονα, ο χρήστης μπορεί να προσδιορίσει ποιον προρυθμιστή θα χρησιμοποιήσει η μέθοδος, καθώς και να κατασκευάσει κάποιον δικό του. Οι προρυθμιστές που παρέχει η κλάση είναι ο Identity Preconditioner, ο Diagonal Preconditioner και ο incomplete Cholesky.

Για την κατασκευή του προρυθμιστή FourierTransformPreconditioner [3], αξιοποιήθηκε το γεγονός ότι υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής ενός ειδικού προρυθμιστή. Ο ειδικός προρυθμιστής υλοποιήθηκε, επεκτείνοντας το αρχείο της Eigen, BasicPreconditioners.h. Το συγκεκριμένο αρχείο, αποτελεί τη πηγή άντλησης για τους προρυθμιστές, για την κλάση Conjugate Gradient. Μέσα σε αυτό είναι υλοποιημένοι όλοι οι προρυθμιστές που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο χρήστης. Για την υλοποίηση, κατασκευάστηκε μία καινούρια κλάση με όνομα FastFourierPreconditioner, στην οποία υλοποιήθηκαν όλες οι μεταβλητές και οι συναρτήσεις που είχαν και οι υπόλοιποι προρυθμιστές (Σχήμα 5.2).

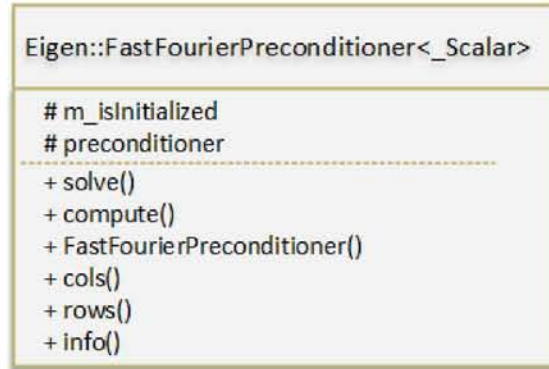


Σχήμα 5.1: UML Διάγραμμα Κλάσης ConjugateGradient

Όπως φαίνεται στο σχήμα (5.2), η καινούρια κλάση υλοποιεί τις συναρτήσεις `compute()` και `solve()`. Στη συνάρτηση `compute()` κατασκευάζεται ο προρυθμιστής



πίνακας `FourierTransformPreconditioner` σε αντιστοιχία με τα [3], [4]. Παράλληλα, στη συνάρτηση `solve()` υλοποιείται ο αλγόριθμος που παρουσιάζεται στο τέταρτο κεφάλαιο για την επίλυση του γραμμικού συστήματος  $Mz = r$  της μεθόδου των Συζυγών Κλίσεων (Αλγόριθμος 3.1).



Σχήμα 5.2: UML της κλάσης *Fast Fourier Preconditioner*

Αναλυτικότερα, για την υλοποίηση του αλγορίθμου, στα βήματα 1, 3, 5, 7 αξιοποιήθηκε η state-of-the-art βιβλιοθήκη FFTW (σε συνδυασμό με τη βιβλιοθήκη Eigen), για τους διακριτούς μετασχηματισμούς συνημιτόνων Τύπου-II. Η συγκεκριμένη βιβλιοθήκη, παρέχει τη δυνατότητα αξιοποίησης των πολλαπλών πυρήνων ενός επεξεργαστή, εκτελώντας τους μετασχηματισμούς παράλληλα. Σε αυτήν την υλοποίηση, εκμεταλλεύεται την παραλληλοποίηση μέσω της προγραμματιστικής διεπαφής εφαρμογής, OpenMP, η οποία υποστηρίζει εκτέλεση σε πολλαπλούς πυρήνες με κοινόχρηστη μνήμη.

Στη συνέχεια, για την επίλυση των τριδιαγώνιων συστημάτων του βήματος 5, χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος Thomas. Ο αλγόριθμος Thomas αποτελεί ένα αρκετά γρήγορο και αποδοτικό αλγόριθμο για την επίλυση, ειδικά, των τριδιαγώνιων συστημάτων [23]. Στο επιμέρους αυτό βήμα, η παραλληλοποίηση του αλγορίθμου θα επέφερε δυσάρεστα αποτελέσματα, καθώς τα τριδιαγώνια συστήματα είναι αρκετά μικρά. Συνεπώς, η επικοινωνία μεταξύ των νημάτων θα ήταν αρκετά κοστοβόρα. Όμως, μια αποδοτική λύση αποτελεί η ανάθεση ενός υποσυνόλου των τριδιαγώνιων συστημάτων σε κάθε πυρήνα που υπάρχει στο σύστημα. Εφαρμόζοντας αυτήν την τεχνική, ο χρόνος, θεωρητικά, θα μειωθεί αντιστρόφως ανάλογα με τον αριθμό των πυρήνων που θα χρησιμοποιηθούν. Δηλαδή, αν ο αριθμός των πυρήνων είναι  $k$ , ο αριθμός των στοιχείων στον άξονα  $x$  είναι  $m$  και ο αριθμός των στοιχείων στον άξονα  $y$  είναι  $n$ , τότε σε κάθε πυρήνα θα ανατεθούν  $mn/k$  τριδιαγώνια συστήματα. Ο παραλληλισμός υλοποιείται και εδώ με την OpenMP.

Η παραπάνω υλοποίηση, αυξάνει την επιτάχυνση του αλγορίθμου, καθώς παραλληλοποιεί μεγάλο κομμάτι του κώδικα σε συνδυασμό με state-of-the-art βιβλιοθήκες.

## 5.2 Πειράματα

### 5.2.1 Υπολογιστικό σύστημα υλοποίησης

Για να μπορέσει να αξιολογηθεί η προτεινόμενη υλοποίηση, πραγματοποιήθηκαν κάποια πειράματα μεταξύ διαφορετικών προρρυθμιστών στη μέθοδο Συζυγών Κλίσεων και της state-of-the-art, για συμμετρικά θετικά ορισμένα γραμμικά συστήματα, άμεσης μεθόδου CHOLMOD. Οι προρρυθμιστές που συγκρίθηκαν είναι ο παραπάνω προρρυθμιστής (FTP CG) και ο προρρυθμιστής IncompleteCholesky (ICPCG). Τα γραμμικά συστήματα για την προσομοίωση των δικτύων τροφοδοσίας εξήχθησαν από δίκτυα τροφοδοσίας μεγάλης κλίμακας. Επίσης, για την θερμική ανάλυση, τα γραμμικά συστήματα που χρησιμοποιήθηκαν, κατασκευάστηκαν ειδικά για αυτόν τον σκοπό. Κατασκευάστηκαν κάποια τεχνητά κυκλώματα, τα οποία αντιπροσωπεύουν μικροεπεξεργαστικούς σχεδιασμούς, όπως του MIPS. Η τεχνολογία κόμβου που χρησιμοποιήθηκε για αυτόν τον σκοπό είναι 32nm.

Τα Πειράματα εκτελέστηκαν όλα σε ένα σταθμό εργασίας με Linux, επεξεργαστή Intel Core i7 έβδομης γενιάς και χρονισμό στα 2.7GHz. Η κύρια μνήμη που χρησιμοποιήθηκε παρείχε στο σύστημα 8Gb. Για της επαναληπτικές μεθόδους, η ανοχή σε απόκλιση από την πραγματική λύση είχε οριστεί σε  $10^{-6}$ .

### 5.2.2 Αποτελέσματα

Στον Πίνακα (5.1), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των δικτύων τροφοδοσίας.

Πίνακας 5.1: Χρόνος εκτέλεσης των τριών επιλυτών σε πραγματικό χρόνο για τα δίκτυα τροφοδοσίας. **Κόμβοι**, αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των κόμβων, **Επίπεδα**, είναι ο αριθμός των μεταβλητικών σφωμάτων, **Χρόνος (s)**, αντιπροσωπεύει τον μέσο χρόνο που χρειάζεται η μέθοδος για την επίλυση, **Επαν.**, είναι ο μέσος όρος επαναλήψεων που χρειάζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι για να συγκλίνουν, **Επιτ1**, δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με τη μέθοδο CHOLMOD και **Επιτ2**, δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με τη μέθοδο ICPCG.

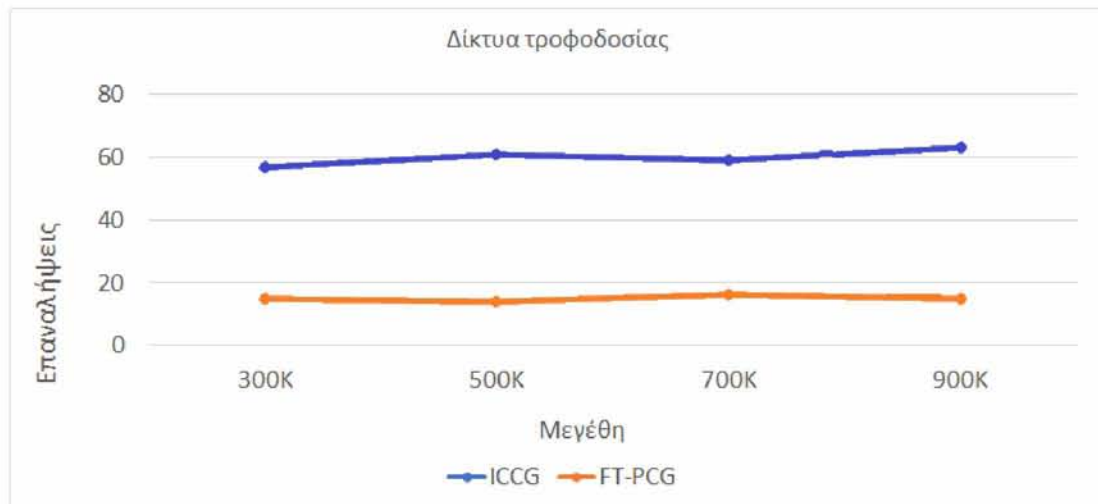
Κόμβοι	Επίπεδα	CHOLMOD	ICPCG			FTP CG		
		Χρόνος (s)	Επαν.	Χρόνος (s)	Επαν.	Χρόνος (s)	Επιτ1	Επιτ2
300K	8	10.63	57	2.45	15	1.92	5.53x	1.27x
500K	8	20.64	61	4.82	16	3.97	5.19x	1.21x
700K	8	33.05	59	7.31	14	5.92	5.58x	1.23x
900K	8	41.23	63	9.76	15	8.36	4.93x	1.16x

και στον Πίνακα (5.2), παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των θερμικών μοντέλων. Το μέγεθος των πινάκων των γραμμικών συστημάτων υπολογίζεται από το γινόμενο του τετραγώνου των σημείων διακριτοποίησης επί των επιπέδων.

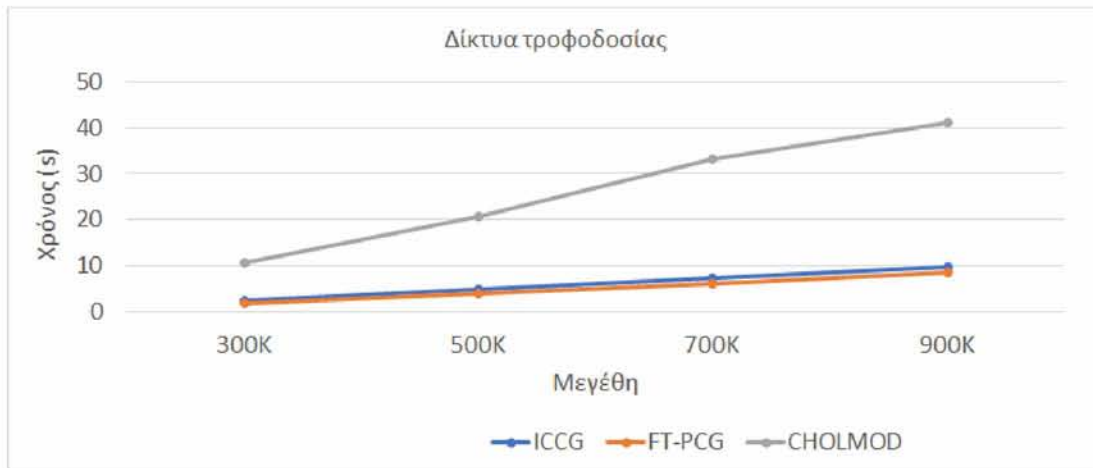
Πίνακας 5.2: Χρόνος εκτέλεσης των τριών επιλυτών σε πραγματικό χρόνο για τα θερμικά μοντέλα. **Σημεία Διακρ.**, αντιπροσωπεύουν τα σημεία διακριτοποίησης στους άξονες  $x$  και  $y$ , **Επίπεδα**, είναι ο αριθμός των επιπέδων σε κάθε ολοκληρωμένο κύκλωμα και αντιστοιχίζεται στον άξονα  $z$ , **Χρόνος (s)**, αντιπροσωπεύει τον μέσο χρόνο που χρειάζεται για την επίλυση, **Επαν.**, είναι ο μέσος όρος επαναλήψεων που χρειάζονται οι επαναληπτικές μέθοδοι για να συγκλίνουν, **Επιτ1**, δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με την μέθοδο CHOLMOD και **Επιτ2**, δηλώνει την επιτάχυνση της FTPCG σε σχέση με την μέθοδο ICPCG.

Σημεία Διακρ.	Επίπεδα	CHOLMOD Χρόνος (s)	ICPCG		FTPCG			
			Επαν.	Χρόνος (s)	Επαν.	Χρόνος (s)	Επιτ1	Επιτ2
200	5	2.97	52	0.59	13	0.38	7.81x	1.55x
350	5	11.36	59	2.23	15	1.89	6.01x	1.17x
480	6	24.37	62	5.15	16	4.03	6.04x	1.27x
700	7	76.45	61	17.03	15	8.56	8.93x	1.98x
860	8	111.39	59	23.47	16	11.42	9.75x	2.05x

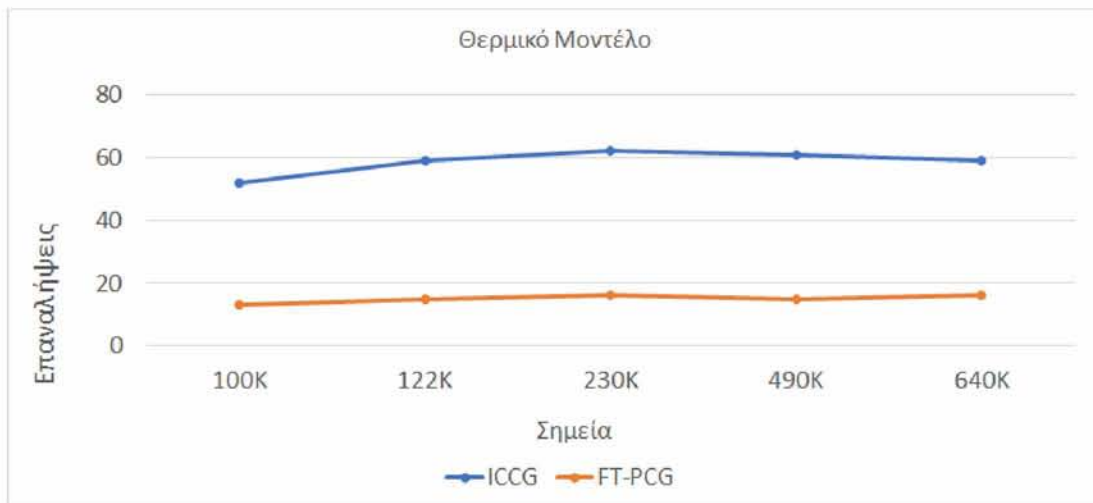
Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τους παραπάνω πίνακες, στις προσομοιώσεις των δικτύων τροφοδοσίας, αλλά και των θερμικών μοντέλων, υπάρχει αξιοσημείωτη επιτάχυνση με χρήση της FTPCG. Επιτυγχάνονται επιταχύνσεις  $6.01 \times -9.75 \times$  σε σχέση με τη state-of-the-art, άμεση μέθοδο CHOLMOD και  $1.17 \times -2.05 \times$  σε σχέση με τη state-of-the-art, επαναληπτική μέθοδο ICCG, για το θερμικό μοντέλο (Σχήματα 5.5 και 5.6). Ταυτόχρονα, επιτυγχάνονται επιταχύνσεις  $4.93 \times -5.58 \times$  σε σχέση με τη state-of-the-art, άμεση μέθοδο CHOLMOD και  $1.16 \times -1.27 \times$  σε σχέση με τη state-of-the-art, επαναληπτική μέθοδο ICCG, για τα δίκτυα τροφοδοσίας (Σχήματα 5.3 και 5.4).



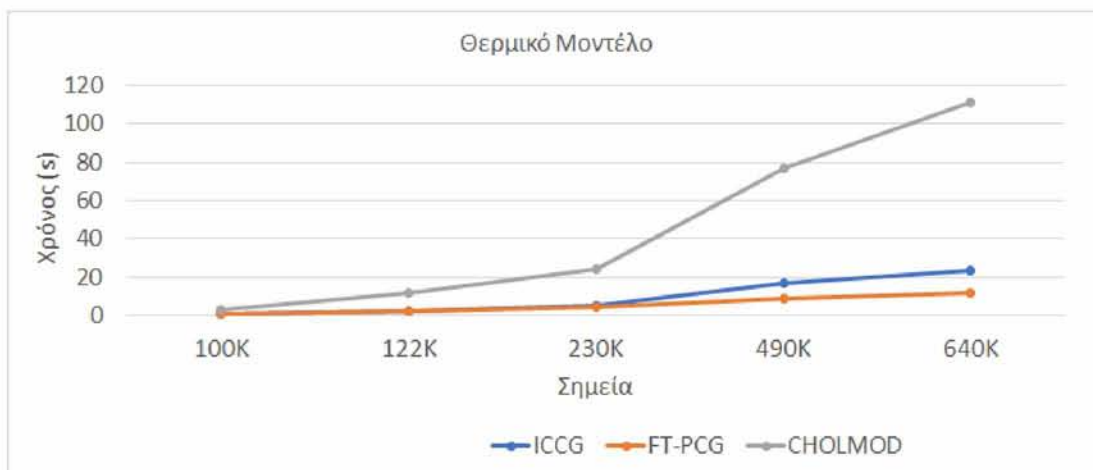
Σχήμα 5.3: Μέσος όρος επαναλήψεων για την προσομοίωση δικτύων τροφοδοσίας.



Σχήμα 5.4: Μέσος χρόνος για την προσομοίωση δικτύων τροφοδοσίας.



Σχήμα 5.5: Μέσος όρος επαναλήψεων για την προσομοίωση θερμικού μοντέλου.



Σχήμα 5.6: Μέσος χρόνος για την προσομοίωση θερμικού μοντέλου.

## Κεφάλαιο **6**

### Επίλογος

---

#### 6.1 Σύνοψη και Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική, παρουσιάστηκε η υλοποίηση ενός επιτυχή μεγάλης κλίμακας γραμμικών συστημάτων, βασισμένο στη μέθοδο Συζυγών Κλίσεων με προρυθμιστή, για την προσομοίωση δικτύων τροφοδοσίας και θερμικών μοντέλων. Η υλοποίηση, ενορκώθηκε στη γλώσσα προγραμματισμού C++, κάνοντας χρήση state-of-the-art βιβλιοθηκών, για περαιτέρω βελτιστοποίηση. Μετά από πειράματα που πραγματοποιήθηκαν για την αξιολόγηση της προτεινόμενης υλοποίησης, αποδείχθηκε ότι η συγκεκριμένη υλοποίηση έδωσε επιταχύνσεις,  $1.16 \times -2.05 \times$ , σε σύγκριση με τον state-of-the-art προρυθμιστή, IncompleteCholesky. Στις προσομοιώσεις αξιοποιήθηκαν γραμμικά συστήματα μεγέθους έως και μερικά εκατομμύρια.

Συνεπώς, το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι οι επαναληπτικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικών συστημάτων με προρυθμιστή, υλοποιημένες σε παράλληλες αρχιτεκτονικές, έχουν την δυνατότητα να αποδώσουν τη λύση του γραμμικού συστήματος τόσο σε μικρό αριθμό επαναλήψεων, όσο και σε μικρό χρονικό διάστημα. Για την επίτευξη μικρών χρόνων για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος, όπως φαίνεται παραπάνω, θα πρέπει να χρησιμοποιείται ένα σύστημα, το οποίο να είναι καλό σε απόδοση και αξιοπιστία. Επομένως, η χρήση τους στο μέλλον θα πρέπει να γίνει πιο συχνή, αφού τα ολοκληρωμένα κυκλώματα απαρτίζονται ολοένα και από περισσότερα στοιχεία.



## **Παραρτήματα**

---





## Παράρτημα **A'**

### Παραδείγματα Βιβλιογραφικών Αναφορών

---

Τύπος βιβλιογραφικής πηγής	Αριθμός αναφοράς
Βιβλίο ξενόγλωσσο	[2]
Άρθρο σε επιστημονικό περιοδικό	[3]
Παρουσίαση σε επιστημονικό συνέδριο	[6]
Ιστοσελίδα	[22]



## Βιβλιογραφία

---

- [1] P.K. Bondyopadhyay. “Moore’s law governs the silicon revolution”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, no. 1, pp. 78–81, 1998.
- [2] Yousef Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems: Second Edition*. SIAM, 2003.
- [3] Konstantis Daloukas, Nestor Evmorfopoulos, Panagiota Tsompanopoulou και George Stamoulis. “Parallel Fast Transform-Based Preconditioners for Large-Scale Power Grid Analysis on Graphics Processing Units (GPUs)”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 35, no. 10, pp. 1653–1666, 2016.
- [4] George Floros, Konstantis Daloukas, Nestor Evmorfopoulos και George Stamoulis. “A Preconditioned Iterative Approach for Efficient Full Chip Thermal Analysis on Massively Parallel Platforms”, *Technologies*, vol. 7, no. 1, pp. 1, 2019.
- [5] Sani R. Nassif. “Power grid analysis benchmarks”. *2008 Asia and South Pacific Design Automation Conference*, Feb. 2008, pp. 376–381.
- [6] Tsung Hao Chen και Charlie Chung Ping Chen. “Efficient large-scale power grid analysis based on preconditioned krylov-subspace iterative methods”. *Proceedings of the 38th annual Design Automation Conference, DAC '01*, Las Vegas, Nevada, USA, 2001. Association for Computing Machinery.
- [7] George Floros, Nestor Evmorfopoulos και George Stamoulis. “Efficient IC hotspot thermal analysis via low-rank Model Order Reduction”, *Integration*, vol. 66, pp. 1 – 8, 2019.
- [8] M. Necati Özışık. *Heat Transfer: A Basic Approach*. McGraw-Hill, 1985.
- [9] Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine και Frank P. Incropera. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7th Edition*. John Wiley & Sons, Incorporated, 2011.
- [10] Constantine Pozrikidis. *Numerical computation in science and engineering*, τόμος 6. Oxford university press New York, 1998.

- [11] Xue Xin Liu, Hai Wang και Sheldon X. D. Tan. “Parallel power grid analysis using preconditioned GMRES solver on CPU-GPU platforms”. *2013 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, Feb. 2013, pp. 561–568.
- [12] Zhuo Feng, Zhiyu Zeng και Peng Li. “Parallel On-Chip Power Distribution Network Analysis on Multi-Core-Multi-GPU Platforms”, *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 19, no. 10, pp. 1823–1836, 2011.
- [13] Zhuo Feng, Xueqian Zhao και Zhiyu Zeng. “Robust Parallel Preconditioned Power Grid Simulation on GPU With Adaptive Runtime Performance Modeling and Optimization”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 30, no. 4, pp. 562–573, 2011.
- [14] Dimitrios Garyfallou, Nestor Evmorfopoulos και Georgios Stamoulis. “A Combinatorial Multigrid Preconditioned Iterative Method for Large Scale Circuit Simulation on GPU s”. *2018 15th International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD)*, Feb. 2018, pp. 209–212.
- [15] Jianlei Yang, Yici Cai, Qiang Zhou και Jin Shi. “Friendly Fast Poisson Solver Preconditioning Technique for Power Grid Analysis”, *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, vol. 22, no. 4, pp. 899–912, 2014.
- [16] Marco Ament, Gunter Knittel, Daniel Weiskopf και Wolfgang Strasser. “A Parallel Preconditioned Conjugate Gradient Solver for the Poisson Problem on a Multi-GPU Platform”. *2010 18th Euromicro Conference on Parallel, Distributed and Network-based Processing*, Feb. 2010, pp. 583–592.
- [17] Peng Li, L.T. Pileggi, M. Asheghi και R. Chandra. “Efficient full-chip thermal modeling and analysis”. *IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design, 2004. ICCAD-2004.*, Feb. 2004, pp. 319–326.
- [18] Peng Li, L.T. Pileggi, M. Asheghi και R. Chandra. “IC thermal simulation and modeling via efficient multigrid-based approaches”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 25, no. 9, pp. 1763–1776, 2006.
- [19] Yong Zhan και Sachin S. Sapatnekar. “High-Efficiency Green Function-Based Thermal Simulation Algorithms”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 26, no. 9, pp. 1661–1675, 2007.

- [20] Richard Barrett, Michael W. Berry, Tony F. Chan, James Demmel, June Donato, Jack Dongarra, Victor Eijkhout, Roldan Pozo, Charles Romine και Henk van der Vorst. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, 1994.
- [21] Charles Van Loan. *Computational Frameworks for the Fast Fourier Transform*. SIAM, 1992.
- [22] Gael Guennebaud και Benoit Jacob. “Eigen: a c++ linear algebra library”, <http://eigen.tuxfamily.org>, 2014.
- [23] W T Lee. “Tridiagonal Matrices: Thomas Algorithm”, pp. 3.