ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

Φράγματα ιδιοτιμών διαταραγμένων Ερμιτιανών πινάκων

Οδυσσεύς Κοντογεώργος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

Μαρία Αδάμ

Λαμία, Ιούνιος 2019

UNIVERSITY OF THESSALY

SCHOOL OF SCIENCE

INFORMATICS AND COMPUTATIONAL BIOMEDICINE

Perturbation bounds for eigenvalues of Hermitian matrices

Odyssefs Kontogeorgos

Master thesis

Maria Adam

Lamia, June 2019

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΙΑΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΒΙΟΛΟΓΙΑ»

Φράγματα ιδιοτιμών διαταραγμένων Ερμιτιανών πινάκων

Οδυσσεύς Κοντογεώργος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

Μαρία Αδάμ

Λαμία, Ιούνιος 2019

«Υπεύθυνη Δήλωση μη λογοκλοπής και ανάληψης προσωπικής ευθύνης»

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, και γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα και ενυπογράφως ότι η παρούσα εργασία με τίτλο «Φράγματα ιδιοτιμών διαταραγμένων Ερμιτιανών πινάκων» αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές από τις οποίες χρησιμοποίησα δεδομένα, ιδέες, φράσεις, προτάσεις ή λέξεις, είτε επακριβώς (όπως υπάρχουν στο πρωτότυπο ή μεταφρασμένες) είτε με παράφραση, έχουν δηλωθεί κατάλληλα και ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Ο ΔΗΛΩΝ

Ημερομηνία

Υπογραφή

Φράγματα ιδιοτιμών διαταραγμένων Ερμιτιανών πινάκων

Οδυσσεύς Κοντογεώργος

Τριμελής Επιτροπή:

Μαρία Αδάμ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια (επιβλέπουσα)

Πλαγιανάκος Βασίλειος, Καθηγητής

Κωνσταντίνος Δελήμπασης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πολύ συχνά στις εφαρμογές, παρουσιάζεται η αναγκαιότητα να μελετηθούν συμμετρικοί πίνακες, στην επεξεργασία σήματος, στην ανάλυση δεδομένων μετά την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων, κ.α.. Οι σημαντικότερες ιδιότητες των Ερμιτιανών ή συμμετρικών πινάκων είναι αυτές που συνδέονται με το φάσμα τους και το αριθμητικό πεδίο τους, ιδιότητες που δίνουν κίνητρο για τη μελέτη αυτών καθώς και των υποπινάκων τους, επίσης Ερμιτιανοί ή συμμετρικοί πίνακες μικρότερης διάστασης από τον αρχικό. Σε αρκετά προβλήματα, το ενδιαφέρον της μελέτης περιορίζεται στον εντοπισμό των μεγαλύτερων και των ελάχιστων ιδιοτιμών των Ερμιτιανών ή συμμετρικών πινάκων, επειδή αυτές είναι οι λύσεις προβλημάτων μεγιστοποίησης και ελαχιστοποίησης, αντίστοιχα [2, 3, 5]. Τέλος, στις περιπτώσεις όπου τα δεδομένα οδηγούν σε πίνακες μεγάλων διαστάσεων, όπου δεν μπορούμε για λόγους πολυπλοκότητας να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων, χρειάζεται να αναπτύξουμε προσεγγιστικές μεθόδους υπολογισμού τους, οι οποίες συνήθως απαιτούν τη γνώση της ελάχιστης και της μέγιστης ιδιοτιμής του πίνακα.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μελετηθούν άνω και κάτω φράγματα των ιδιοτιμών ενός διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα όταν η διαταραχή του $n \times n$ τετραγωνικού πίνακα A προκύπτει από ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$. Η αναζήτηση των φραγμάτων γίνεται με την εφαρμογή του θεωρήματος Weyl, του Cauchy's Interlace Theorem και των ιδιοτήτων που παρέχονται από το αριθμητικό πεδίο των πινάκων.

Τα κεφάλαια της παρούσης εργασίας, υποδιαιρούνται σε ενότητες με χρήση δύο αριθμών, οι οποίες περιλαμβάνουν ορισμούς, θεωρήματα, προτάσεις, χρήσιμα σχόλια και παραδείγματα, τα οποία απαριθμούνται επίσης με δύο αριθμούς, ο πρώτος αναφέρεται στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στην αύξουσα σειρά του στο κεφάλαιο.

Επίσης σε κάθε ενότητα οι σχέσεις, που αναφέρονται στη θωρία ή στις αποδείξεις, απαριθμούνται με τρία ψηφία, το πρώτο ψηφίο αφορά στο κεφάλαιο, το δεύτερο στην ενότητα και το τρίτο στην αύξουσα σειρά της σχέσης στην ενότητα.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες των πινάκων, ορισμοί και προτάσεις απαραίτητο υλικό για τη συνέχεια. Γίνεται αναφορά στα χαρακτηριστικά ποσά ενός τετραγωνικού πίνακα, στο φάσμα του, στη νόρμα διανύσματος και στη νόρμα πίνακα, στην παραγοντοποίηση πίνακα καθώς και δίνονται αντίστοιχα παραδείγματα. Επίσης, ορίζεται το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα και αναφέρονται οι σημαντικότερες ιδιότητές του.

Τα αποτελέσματα της μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναπτύσσονται στο δεύτερο κεφάλαιο αυτής. Τα θεωρήματα, που παρουσιάζονται εδώ, αναφέρονται στη μελέτη των ιδιοτιμών του πίνακα που προήλθε από τον Ερμιτιανό πίνακα A, όταν αυτός «διαταράχθηκε» από τον πίνακα yy^*, όπου $y \in \mathbb{C}^n$ είναι το διάνυσμα της διαταραχής. Συγκεκριμένα, με την αξιοποίηση γνωστών ανισώσεων εγκλωβισμού των ιδιοτιμών του αθροίσματος Ερμιτιανών πινάκων (θεώρημα Weyl, [5]) και των ιδιοτήτων του αριθμητικού πεδίου του Ερμιτιανού πίνακα μελετώνται και εντοπίζονται άνω και κάτω φράγματα για την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα $A - yy^*$, φράγματα που εξαρτώνται από την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A, αντίστοιχα, καθώς και από το μέτρο του διανύσματος y, χρησιμοποιώντας ως μέτρο τη 2-νόρμα του διανύσματος, $\|y\|_2$. Αρχικά, στο Θεώρημα 2.5 αποδεικνύεται ότι ο «εγκλωβισμός» της ελάχιστης ιδιοτιμής του διαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$ γίνεται αριστερά από τον αριθμό $\lambda_{\min}(A)-\|y\|_2^2$ και δεξιά από την ελάχιστη ιδιοτιμή του A, $\lambda_{\min}(A)$, ενώ στο Θεώρημα 2.8 αποδεικνύεται ότι ο «εγκλωβισμός» της μέγιστης ιδιοτιμής του διαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$ γίνεται αριστερά από τον πραγματικό αριθμό $\lambda_2(A)$ (η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα A) και δεξιά από τον πραγματικό αριθμό $\lambda_{\max}(A)$, ο οποίος είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του A. Στα Θεωρήματα 2.13 και 2.18, αποδεικνύεται ότι τα παραπάνω φράγματα περιορίζονται από τις ιδιοτιμές κατάλληλων 2×2 Ερμιτιανών πινάκων, οι οποίοι κατασκευάζονται από τις δύο μικρότερες ιδιοτιμές του A και τις δύο μεγαλύτερες ιδιοτιμές του και κατάλληλες «συνιστώσες» του διανύσματος $y\in\mathbb{C}^n$. Όλα τα αποτελέσματα επαληθεύονται από κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα.

Στος τέλος της διπλωματικής εργασίας παρατίθεται ένας κατάλογος με τα συγγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν ως πηγές για την εκπόνηση της εργασίας και στη συνέχεια ακολουθούν τα παραρτήματα, στα οποία αναγράφονται οι κώδικες σε γλώσσα matlab που χρησιμοποιήθηκαν, για την επαλήθευση των σημαντικότερων θεωρητικών αποτελέσματων της παρούσας έρευνας.

Κλείνοντας θα ήθελα να απευθύνω ένα ευχαριστώ σε όλους του Διδάσκοντες καθηγητές του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας με τίτλο «Πληροφορική και Υπολογιστική Βιοϊατρική», κ. Πλαγιανάκο Βασίλειο, κα Αδάμ Μαρία, κ. Δελήμπαση Κωνσταντίνο, κ. Σανδαλίδη Χάρη, κ. Μπάγκο Παντελή, κ. Κακαρούντα Αθανάσιο και κ. Σπαθούλα Γεώργιο.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να εκφράσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην κ. Αδάμ Μαρία, η οποία ως επιβλέπουσα καθηγήτρια, πρόσφερε αμέριστα στήριξη, συμπαράσταση και συνεργασία διαθέτοντας αρκετό από το χρόνο της στην ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Λέξεις κλειδιά

Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, Ερμιτιανοί πίνακες, παραγοντοποίηση πίνακα, ορθομοναδιαία αναλλοίωτη ομοιότητα, κυρτή θήκη, διαταραχή πίνακα από τυχαίο διάνυσμα, κάτω και άνω όρια ιδιοτιμών διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα, όρια εσωτερικών ιδιοτιμών διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα.

Κεφάλαιο 1°

Βασικές έννοιες από Γραμμική Άλγεβρα

1.1 Βασικοί ορισμοί και είδη πινάκων

Σ΄ αυτή τη διπλωματική εργασία με $\mathbb{R}$ συμβολίζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών ενώ με $\mathbb{C}$ συμβολίζεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Με το σύμβολο $\mathbb{F}$ δηλώνεται είτε το σύνολο $\mathbb{R}$ είτε το σύνολο $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1

Ονομάζουμε **πίνακα** μια ορθογώνια διάταξη, διάστασης $m\times n$, από $m\cdot n$ αριθμούς του συνόλου $\mathbb{F}$, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε m γραμμές και n στήλες. Η διάσταση της ορθογώνιας διάταξης ονομάζεται *διάσταση ή μέγεθος* του πίνακα, οι δε αριθμοί ονομάζονται *στοιχεία* του πίνακα.

Ένας πίνακας δηλώνεται με τη διάστασή του και σημειώνεται με κάποιο κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου. Όταν χρειάζεται να σημειωθούν τα στοιχεία του πίνακα γράφουμε $A=\left(\alpha_{ij}\right)$, όπου οι δείκτες i,j δηλώνουν τη θέση που κατέχει το στοιχείο α_{ij} στην ορθογώνια διάταξη, συγκεκριμένα, το i αναφέρεται στη γραμμή του, το δε j στη στήλη του, δηλαδή, $1\le i\le m$ και $1\le j\le n$.

Το σύνολο των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{F}$ συμβολίζεται $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

Αν διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες από τον $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, ο πίνακας που απομένει ονομάζεται **υποπίνακας** του αρχικού πίνακα A.

Ένας υποπίνακας του $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, που απομένει από τη διαγραφή των k τελευταίων γραμμών και αντίστοιχων στηλών του, ονομάζεται **κύριος υποπίνακας** του A, ο οποίος ανήκει στο $M_{(m-k)\times(n-k)}\left(\mathbb{F}\right)$.

Για παράδειγμα,

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών διάστασης 2×3, με στοιχεία $\alpha_{ij}\in\mathbb{F}$, όπου $1\le i\le 2$ και $1\le j\le 3$, συνεπώς ο πίνακας A ανήκει στο $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$, οπότε σημειώνουμε $A\in M_{2\times 3}(\mathbb{F})$.

Ένας υποπίνακας του A μπορεί να είναι ένας 2×2 πίνακας, για παράδειγμα $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{pmatrix}$, όπου παραλήφθηκε η 2^{η} στήλη του αρχικού, ενώ κύριος υποπίνακας του A είναι ο $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\end{pmatrix}$, ο οποίος προκύπτει από τη διαγραφή της τελευταίας γραμμής και στήλης του A.

Ορισμός 1.2

Ένας πίνακας $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **σύνθετος πίνακας** ή **block πίνακας**, αν τα στοιχεία του είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από το μέγεθος του αρχικού πίνακα A και δημιουργούνται από τη διαμέριση του A με οριζόντιες και κατακόρυφες νοητές γραμμές και είναι τοποθετημένα στη i-γραμμή και j-στήλη του σύνθετου πίνακα.

Ο σύνθετος πίνακας $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ συμβολίζεται με $A=(A_{ij})$, όπου οι υποπίνακες-block A_{ij} σημειώνονται με δύο δείκτες, ο i δηλώνει τη θέση του block ως προς τη γραμμή στο σύνθετο πίνακα και ο j δηλώνει τη θέση του block ως προς τη στήλη. Εδώ να σημειώσουμε ότι όλοι οι υποπίνακες-block που ανήκουν στη i-γραμμή του σύνθετου πίνακα έχουν το ίδιο πλήθος γραμμών και όλοι οι υποπίνακες-block που ανήκουν στη j-στήλη του σύνθετου πίνακα έχουν το ίδιο πλήθος στηλών.

- Για παράδειγμα, ο σύνθετος πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & -1 & 2\\ 2i & 5 & 1 & 0 & 1\\ 4 & -3 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2i & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

αποτελείται από τους υποπίνακες-block

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2i & 5\\ 4 & -3\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ A_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

□

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα **είδη** των πινάκων που χρησιμοποιούνται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

- Στην περίπτωση που το πλήθος m των γραμμών ενός πίνακα A είναι ίσο με το πλήθος n των στηλών του $(m=n)$, τότε ο πίνακας ονομάζεται **τετραγωνικός** και τα στοιχεία α_{ij}, με $i=j$, ονομάζονται **διαγώνια στοιχεία** του πίνακα $A=(\alpha_{ij})$ και ανήκουν στην **κύρια διαγώνιο του πίνακα A**. Για έναν τετραγωνικό πίνακα γράφουμε $A \in M_n(\mathbb{F})$, όπου $M_n(\mathbb{F})$ είναι το σύνολο όλων των τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{F}$.

- Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **άνω τριγωνικός**, όταν όλα τα στοιχεία του, που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιό του, είναι όλα μηδενικά, δηλαδή ισχύει $\alpha_{ij}=0,\ i>j$. Αντίστοιχα ο πίνακας ονομάζεται **κάτω τριγωνικός**, όταν όλα τα στοιχεία του, που βρίσκονται πάνω από τη διαγώνιό του, είναι όλα μηδενικά, δηλαδή είναι $\alpha_{ij}=0,\ i<j$.

  Για παράδειγμα στη συνέχεια ο πίνακας A είναι άνω τριγωνικός, ενώ ο πίνακας B είναι κάτω τριγωνικός.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{p\times q}(\mathbb{F})$, τότε ορίζεται το **ευθύ άθροισμα** των πινάκων A και B ως ένας άλλος πίνακας $C \in M_{(m+p)\times(n+q)}(\mathbb{F})$ ως εξής:

$$C=A\oplus B=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

  Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

  τότε το ευθύ άθροισμα των A και B είναι

$$C = A \oplus B \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

- Ο πίνακας $A \in M_{1\times n}(\mathbb{F})$

$$A = (\alpha_{11} \;\; \alpha_{12} \;\; \dots \;\; \alpha_{1n})$$

ονομάζεται **πίνακας-γραμμή,** ενώ ο πίνακας $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ με

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \vdots \\ \beta_{n1} \end{pmatrix}$$

ονομάζεται **πίνακας-στήλη ή διάνυσμα.**

Επειδή οι διανυσματικοί χώροι $M_{1\times n}(\mathbb{F})$, $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ και $\mathbb{F}^n$ είναι ισόμορφοι, στην παρούσα διπλωματική εργασία, εφόσον δεν υπάρχει σύγχυση για το χώρο στον οποίο οι παραπάνω μοναδιάστατοι πίνακες ανήκουν, θα σημειώνεται ότι αυτοί ανήκουν στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$.

- Ένας πίνακας ονομάζεται **μηδενικός**, και συμβολίζεται $A = O$ αν έχει όλα τα στοιχεία του μηδενικά, δηλαδή $\alpha_{ij} = 0$ με $1 \le i \le m$ και $1 \le j \le n$.

- Έστω πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Αν όλα τα στοιχεία του πίνακα A είναι θετικοί αριθμοί $\alpha_{ij} > 0$, τότε ο A ονομάζεται **θετικός** και γράφουμε $A > 0$. Αν για τα στοιχεία του A ισχύει $\alpha_{ij} \ge 0$, ο A ονομάζεται **μη αρνητικός** πίνακας και γράφουμε $A \ge 0$.

- Για ένα πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ο πίνακας $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ονομάζεται **ανάστροφος** του A και έχει ως γραμμές τις στήλες του A και ως στήλες τις γραμμές του A.

  Για παράδειγμα ο 2×3 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  έχει ανάστροφο τον 3×2 πίνακα

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

- Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **συμμετρικός** όταν $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ με $1 \le i \le n$ και $1 \le j \le n$. Είναι προφανές πως για τους συμμετρικούς πίνακες ισχύει $A = A^T$.
  Για παράδειγμα ο πίνακας
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$
  είναι συμμετρικός και προφανώς ισχύει $A = A^T$.
  Στην παρούσα εργασία όπου αναφερόμαστε σε συμμετρικούς πίνακες, θα εννοείται πως οι πίνακες έχουν στοιχεία μέσα από το σύνολο των πραγματικών αριθμών και η σχέση $A = A^T$ θα ικανοποιείται.

- Για πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ με $A = (z_{ij})$, όπου $z_{ij} = x_{ij} + i \cdot y_{ij}$, $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε **συζυγή** του A τον πίνακα $\overline{A} = (\overline{z_{ij}})$, όπου $\overline{z_{ij}} = x_{ij} - i \cdot y_{ij}$, $x_{ij}, y_{ij} \in \mathbb{R}$. Ο ανάστροφος του $\overline{A} = (\overline{z_{ij}})$, δηλαδή ο $\overline{A}^T = (\overline{A})^T$ ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του πίνακα A και συμβολίζεται με A^*. Ισχύει επομένως $A^* = \overline{A}^T = (\overline{A})^T$.

  Για παράδειγμα ο πίνακας
  $$A = \begin{pmatrix} 2i & 1-3i & -\sqrt{2} \\ 0 & -i & 1 \\ 2+3i & 2-i & 3 \end{pmatrix}$$
  έχει συζυγή τον πίνακα
  $$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2i & 1+3i & -\sqrt{2} \\ 0 & i & 1 \\ 2-3i & 2+i & 3 \end{pmatrix}$$
  και αναστροφοσυζυγή τον
  $$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} -2i & 0 & 2-3i \\ 1+3i & i & 2+i \\ -\sqrt{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Στην περίπτωση που $A \in M_n(\mathbb{C})$ και ισχύει $A = A^*$, ο A ονομάζεται **Ερμιτιανός**, και αν επιπλέον $A = -A^*$, ο A ονομάζεται **αντιερμιτιανός.** Είναι προφανές πως αν A είναι Ερμιτιανός, τότε ισχύει ότι $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$.

  Για παράδειγμα ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3+i \\ -3 & -i & -2i \\ 3-i & 2i & 0 \end{pmatrix},$$
  είναι Ερμιτιανός. Ακόμη αν $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ Ερμιτιανοί, τότε και οι πίνακες $A + A^*$, AA^*, A^*A, $A^k, k \in \mathbb{N}^*$, $kA + mB$ με $k, m \in \mathbb{F}$ είναι επίσης Ερμιτιανοί πίνακες.

- Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγώνιος** όταν $\alpha_{ij} = 0$ με $i \neq j$. Δηλαδή διαγώνιος είναι ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει μηδενικά όσα στοιχεία του δεν βρίσκονται στη διαγώνιό του, ενώ ένα τουλάχιστον στοιχείο πάνω στη διαγώνιό του, είναι διαφορετικό από το 0.
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{nn})$$

- Στην ειδική περίπτωση ενός διαγώνιου πίνακα που όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι μονάδες, τότε ο πίνακας ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται
$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, 1, ..., 1)$$

Στη θεωρία γραφημάτων και στην Άλγεβρα Boole χρησιμοποιούνται πίνακες με μοναδικά στοιχεία τους φυσικούς αριθμούς 0, 1. Εδώ χρήσιμοι πίνακες με στοιχεία τα 0, 1 είναι αυτοί που ορίζονται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.3

Ένας πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **πίνακας μετάθεσης** (permutation matrix) αν όλα τα στοιχεία του είναι 0 ή 1 έτσι ώστε σε κάθε γραμμή ή στήλη να υπάρχει μόνο ένα στοιχείο 1 και τα υπόλοιπα να είναι 0.

- Για παράδειγμα οι πίνακες

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι πίνακας μετάθεσης.

□

1.2 Άλγεβρα και μέτρα πινάκων

Για δύο πίνακες $A=(\alpha_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $B=(\beta_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ αν ισχύει

$$(\alpha_{ij})=(\beta_{ij}),\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$$

οι πίνακες χαρακτηρίζονται ίσοι και γράφουμε $A=B$.

Έστω πίνακας $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. **Απόλυτη τιμή του A** ορίζουμε τον πίνακα $|A|=(|\alpha_{ij}|)\in M_{mxn}(\mathbb{F})$.

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1-i & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

έχει απόλυτη τιμή τον

$$|A|=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1.2.1 Άθροισμα πινάκων

Για δύο πίνακες $A, B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ με $A=(\alpha_{ij}), 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$ και $B=(\beta_{ij}), 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$, ορίζουμε **άθροισμα των πινάκων A και B** τον πίνακα $\Gamma\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),\ \ \Gamma=(\gamma_{ij}), 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$ για τον οποίο ισχύει:

$A+B=\Gamma\Rightarrow(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})=(\gamma_{ij}),\ \ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$. Όπως είναι φανερό το άθροισμα πινάκων ορίζεται μόνο αν οι πίνακες έχουν ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών.

Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1-i & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3i & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Τότε

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1-i & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3i & 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2+3 & -1+1 & 0-4 \\ (1-i)+(3i) & 0+2 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 1+2i & 2 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Γινόμενο αριθμού επί πίνακα

Αν $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A=(\alpha_{ij})$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ και $\lambda\in\mathbb{F}$, τότε ορίζουμε **γινόμενο του αριθμού λ με τον πίνακα Α**, τον πίνακα $\lambda\cdot A$, ως εξής: $\lambda\cdot A=\lambda(\alpha_{ij})=(\lambda\alpha_{ij})$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

Για παράδειγμα αν $A=\begin{pmatrix} 2 & i \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ και $\lambda=-2i$, τότε

$$(-2i)A=(-2i)\begin{pmatrix} 2 & i \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2i)\cdot 2 & (-2i)\cdot i \\ (-2i)\cdot(-2) & (-2i)\cdot 3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$(-2i)A=\begin{pmatrix} -4i & 2 \\ 4i & -6i \end{pmatrix}$$

Στην πρόσθεση πινάκων και στο γινόμενο αριθμού με πίνακα ισχύουν οι ακόλουθες **ιδιότητες**:

1. Αντιμεταθετική $A+B=B+A$
2. Προσεταιριστική $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$
3. Ουδέτερο στοιχείο είναι ο μηδενικός πίνακας $A+O=O+A=A$
4. Αντίθετος πίνακας $A+(-1)A=A-A=O$
5. Επιμεριστική $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$, $\lambda,\mu\in\mathbb{F}$
6. Επιμεριστική $\mu(A+B)=\mu A+\mu B$, $\mu\in\mathbb{F}$
7. Προσεταιριστική $\lambda(\mu A)=\mu(\lambda A)=(\lambda\mu)A$

1.2.3 Γινόμενο πινάκων

Το γινόμενο $A \cdot B$ ενός πίνακα A επί έναν πίνακα B ορίζεται μόνο όταν **ο αριθμός των στηλών του αριστερά πίνακα (A) είναι ίδιος με τον αριθμό των γραμμών του δεξιά πίνακα (B)**. Έτσι το γινόμενο $A \cdot B$, $A \in M_{m\times q}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{q\times n}(\mathbb{F})$ είναι ένας πίνακας Γ ο οποίος είναι διάστασης $m \times n$. Δηλαδή $\underbrace{A}_{m\times q} \cdot \underbrace{B}_{q\times n} = \underbrace{\Gamma}_{m\times n} = (\gamma_{ij})$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ όπου για το στοιχείο γ_{ij} ισχύει:

$$\gamma_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \cdots\cdots + \alpha_{iq}\beta_{qj} = \sum_{m=1}^{q} \alpha_{im}\beta_{mj}, \;\; 1 \le i \le m, \;\; 1 \le j \le n$$

Για παράδειγμα αν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε το γινόμενο $A \cdot B$ είναι ο πίνακας:

$$\Gamma = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

□

Προσοχή! Στο γινόμενο πινάκων ΔΕΝ ισχύει γενικά η αντιμεταθετική ιδιότητα. Για παράδειγμα για τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \;\; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ενώ ορίζεται το γινόμενο AB, δεν ορίζεται το γινόμενο BA.

Ακόμη για τους πίνακες $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ ενώ **ορίζονται τα γινόμενα** AB και BA, **δεν είναι της ίδιας διάστασης.** Πράγματι, $\underbrace{A}_{m\times n} \cdot \underbrace{B}_{n\times m} = \underbrace{AB}_{m\times m}$ ενώ $\underbrace{B}_{n\times m} \cdot \underbrace{A}_{m\times n} = \underbrace{AB}_{n\times n}$.

Για παράδειγμα αν

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix},$$

τότε

$$AB=\begin{pmatrix}-3 & -11\\ -3 & 1\end{pmatrix},$$

ενώ

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix}.$$

Στο γινόμενο πινάκων (με την προϋπόθεση ότι ορίζεται το γινόμενό τους), έχουμε και τις ακόλουθες **ιδιότητες**:

1. $\lambda A = O \Rightarrow \lambda = 0$ ή $A = O$
2. Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda A = \lambda B$, τότε $A = B$
3. Αν $A \neq O$ και $\lambda A = \mu A$, τότε $\lambda = \mu$
4. Προσεταιριστική $A(B\Gamma) = A(B\Gamma)$
5. Επιμεριστική $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$, $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$
6. Προσεταιριστική $\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B$
7. Για πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται και η δύναμη πίνακα $\underbrace{AAA\cdots A}_{k} = A^k,\ k \in \mathbb{N}^*$ ενώ $A^0 = I_n$

1.2.4 Μέτρο διανύσματος

Μέτρο (νόρμα – norm) ενός **διανύσματος** $x \in \mathbb{F}^n$ ορίζουμε μια πραγματική απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to [0,+\infty)$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες, [3, 5, 9, 12]:

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{F}$

iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in \mathbb{F}^n$, (τριγωνική ανισότητα)

Για το διάνυσμα $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{F}^n$ αποδεικνύεται ότι η έκφραση $\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p}$, $1\le p<+\infty$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις (i) - (iv), οπότε ορίζει ένα μέτρο στον $\mathbb{F}^n$ το οποίο χαρακτηρίζεται και ως p – νόρμα.

Οι συνηθέστερες νόρμες που χρησιμοποιούνται για ένα διάνυσμα $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{F}^n$, είναι:

a) $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\{|x_i|\}$ γνωστή και ως **νόρμα άπειρο**

b) $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ γνωστή και ως **νόρμα ένα**

c) $$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2} \qquad (1.2.1)$$

γνωστή ως **νόρμα 2 ή Ευκλείδεια νόρμα.**

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι η (1.2.1) γράφεται και ως:

$$\|x\|_2=\sqrt{x^*x} \qquad (1.2.2)$$

Για παράδειγμα, το διάνυσμα $x=(2,\ 1-2i,\ 3,\ -1)\in\mathbb{C}^4$ έχει:

- $\|x\|_\infty=\max\{|2|,|1-2i|,|3|,|-1|\}=\max\{2,\sqrt{5},3,1\}=3$
- $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{4}|x_i|=|2|+|1-2i|+|3|+|-1|=2+\sqrt{5}+3+1=6+\sqrt{5}$
- $\|x\|_2=\sqrt{|2|^2+|1-2i|^2+|3|^2+|-1|^2}=\sqrt{4+5+9+1}=\sqrt{19}$

1.2.5 Νόρμα πίνακα

Νόρμα τετραγωνικού πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια πραγματική απεικόνιση $\|\cdot\|:M_n(\mathbb{F})\to[0,+\infty)$ που έχει τις παρακάτω ιδιότητες, [3, 5, 12]:

i) $\|A\|\ge 0$

ii) $\|A\|=0\Leftrightarrow A=O$

iii) $\|\lambda A\|=|\lambda|\cdot\|A\|,\ \forall\lambda\in\mathbb{F}$

iv) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|,\ \forall A,B\in M_n(\mathbb{F})$

v) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|, \ \forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχουμε αντίστοιχες νόρμες (όπως και στις νόρμες των διανυσμάτων) τις ακόλουθες:

a) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right\}$ γνωστή και ως **νόρμα γραμμής**

b) $\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| \right\}$ γνωστή και ως **νόρμα στήλης**

c) $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} |\alpha_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^* A)}$ γνωστή και ως **νόρμα Frobenius**,

όπου $tr(A^* A)$ συμβολίζει το ίχνος του συμμετρικού (Ερμιτιανού) πίνακα $A^* A$.

d) Επίσης τη **φασματική νόρμα ή νόρμα – 2** που είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$|||\, A \,||| = \sqrt{\rho(A^* A)}, \tag{1.2.3}$$

όπου $\rho(A^* A)$ συμβολίζει τη φασματική ακτίνα του συμμετρικού (Ερμιτιανού) πίνακα $A^* A$. (για τον ορισμό της φασματικής ακτίνας, βλέπε Ορισμό 1.17 στην ενότητα 1.4)

Ορισμός 1.4

Έστω $v_i, \ i = 1, 2, \cdots, n$ διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την πράξη του εσωτερικού γινομένου. Το σύνολο $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ ονομάζεται **ορθοκανονικό**, αν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $\|v_i\| = 1, \ \forall v_i \in S, \ \ i = 1, 2, \cdots, n$

ii) $v_i \cdot v_j = 0, \ \ \forall i \ne j$

1.3 Ορισμένες έννοιες και ιδιότητες τετραγωνικών πινάκων

Ορισμός 1.5

Ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού πίνακα, ονομάζουμε το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του. Δηλαδή για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ γράφουμε

$$\operatorname{tr}(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} .$$

Για το ίχνος ενός πίνακα, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

ii) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \cdot \operatorname{tr}(A)$

iii) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Ορισμός 1.6

Έστω ένα τυχαίο μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ και ένας Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν ισχύει $x^* A x > 0$ ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος,** ενώ αν ισχύει $xAx^* > 0$, τότε ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος.**

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος, ενώ ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

θετικά ημιορισμένος, αφού για το μη μηδενικό διάνυσμα

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Έχουμε για τον A :

$$x^* A x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (2\alpha - \beta)\alpha + (\alpha + \beta)\beta =$$

$$= 2\alpha^2 + \beta^2 > 0$$

Και αντίστοιχα για τον B :

$$x^{*}Bx=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\alpha+\beta & -5\alpha+\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=(4\alpha+\beta)\alpha+(-5\alpha+\beta)\beta=$$

$$=4\alpha^{2}-4\alpha\beta+\beta^{2}=(2\alpha-\beta)^{2}\geq 0$$

□

Ορισμός 1.7

Αν για έναν πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει κάποιος άλλος πίνακας $B\in M_n(\mathbb{F})$ ώστε $AB=BA=I_n$, τότε ο A ονομάζεται **αντιστρέψιμος** και ο πίνακας B ονομάζεται **αντίστροφος του A.** Στην περίπτωση αυτή ο B συμβολίζεται με A^{-1}. Δηλαδή έχουμε την ισοδυναμία

$$AB=BA=I_n \Leftrightarrow B=A^{-1} \text{ και έχουμε } AA^{-1}=A^{-1}A=I_n\,.$$

Για αντιστρέψιμους πίνακες $A, B\in M_n(\mathbb{F})$ ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 5 & -7\end{pmatrix},$$

έχει αντίστροφο τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}7 & 4\\ -5 & 3\end{pmatrix},$$

αφού

$$\begin{pmatrix}3 & -4\\ 5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 5 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\,.$$

Άρα

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα και ο πίνακας

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

έχει αντίστροφο τον πίνακα

$$\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix},$$

αφού

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}=I_3.$$

Άρα

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

Ορισμός 1.8

Δύο πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται **όμοιοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει $P^{-1}AP = B \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$. Ο πίνακας P ονομάζεται πίνακας ομοιότητας.

Ορισμός 1.9

Αν για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$$

τότε ο A ονομάζεται **ορθογώνιος,** ενώ αν για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ισχύει

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* = I_n$$

τότε ο A ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**.

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.9 με τον Ορισμό 1.7 μπορούμε να αποδείξουμε τις δύο πρώτες ιδιότητες των ορθογωνίων/ορθομοναδιαίων πινάκων που αναφέρονται στην ακόλουθη πρόταση. Η απόδειξη των επόμενων ιδιοτήτων στηρίζεται στον Ορισμό 1.4 και στη μέθοδο Gram-Schmidt [4, 9, 11].

Πρόταση 1.10

- ένας ορθογώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο ανάστροφός του, δηλαδή

$$\text{A ορθογώνιος τότε } A^{-1} = A^T \qquad (1.3.1)$$

- ένας ορθομοναδιαίος πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι ο αναστροφοσυζυγής του, δηλαδή

$$\text{A ορθομοναδιαίος τότε } A^{-1} = A^* \qquad (1.3.2)$$

- Οι γραμμές (οι στήλες) των ορθογωνίων πινάκων αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων (βλέπε, Ορισμό 1.4).
- Οι γραμμές (οι στήλες) των ορθομοναδιαίων πινάκων αποτελούν ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων (βλέπε, Ορισμό 1.4).

Ορισμός 1.11

Έστω ένα διάνυσμα – στήλη $y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ και ένας ορθομοναδιαίος/ορθογώνιος πίνακας $V \in M_n(\mathbb{F})$ που έχει ως στήλες του τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ **Προβολή** του y πάνω στις διαδοχικές v_i έως v_j στήλες του πίνακα V, το οποίο θα σημειώνεται $y_{i:j}$, ορίζουμε το $(j-i+1)\times 1$ διάνυσμα

$$y_{i:j}=\begin{pmatrix} v_i^* y \\ v_{i+1}^* y \\ \vdots \\ v_j^* y \end{pmatrix},\ \text{με}\quad v_k^* y\in\mathbb{C},\ \ k=i,i+1,\cdots,j. \tag{1.3.3}$$

Επίσης ορίζουμε ως **k-συντεταγμένη** της προβολής, τον αριθμό

$$\hat{y}_k = v_k^* y \in \mathbb{F}. \tag{1.3.4}$$

Ορισμός 1.12

Για έναν τετραγωνικό πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ ορίζουμε την **απεικόνιση**

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F},\ \text{ή}\quad A \to \det(A)$$

Για την οποία ισχύει

$$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}),$$

για κάθε $j=1,2,3,\cdots,n$ όπου A_{ij} είναι ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον A, αν διαγράψουμε όλα τα στοιχεία της i-γραμμής και της j-στήλης. Συμβολικά για την **ορίζουσα** του πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ μπορούμε να γράψουμε

$$\det(A)=\det A=|A|=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Ειδικά για την ορίζουσα ενός 2×2 πίνακα, έχουμε:

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}=\alpha\delta-\beta\gamma$$

Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

έχει ορίζουσα, η οποία θα προκύψει γρηγορότερα αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω ορισμό για τα στοιχεία της $2^{ης}$ στήλης που έχει πολλά μηδενικά, οπότε η ορίζουσα υπολογίζεται ως εξής:

$$\det(A) = (-1)^{1+2} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A) = (-1)^3 (-3)(-1-8) = -27$$

Οι σημαντικότερες από τις **ιδιότητες των οριζουσών**, διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.13

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ οι ιδιότητες που αναφέρονται στις γραμμές του, όσον αφορά την ορίζουσά του, ισχύουν και για τις στήλες του.

1. Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.
2. Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει μηδενική γραμμή, τότε $\det A = 0$.
3. Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει δύο γραμμές ανάλογες, τότε $\det A = 0$.
4. Αν ο πίνακας $B \in M_n(\mathbb{F})$ προκύπτει από τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ με εναλλαγή δύο γραμμών ή δύο στηλών τότε $\det B = -\det A$.
5. Για κάθε άνω (κάτω) τριγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det A = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\cdots\alpha_{nn}$ όπου α_{ij}, $i = 1, 2, \cdots, n$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα A.
6. Ένας διαγώνιος πίνακας έχει ορίζουσα που ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Η ορίζουσα του μοναδιαίου I_n πίνακα ισούται με 1.
7. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A^T) = \det A$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$ και $\det(A^*) = \overline{\det A}$.
8. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
9. Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A^k) = (\det A)^k$.
10. Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύει $\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$.
11. Για έναν ορθογώνιο/ορθομοναδιαίο πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det A = \pm 1$.
12. Κάθε πίνακας μετάθεσης P αντιστρέφεται, ισχύει ότι $P^{-1} = P^T$ και $\det P = \pm 1$.

Παρατήρηση: Δεν ισχύει για το άθροισμα ανάλογη ιδιότητα με την 9. Δηλαδή για τους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ γενικά έχουμε $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Ορισμός 1.14

Ονομάζουμε **τάξη ή βαθμό** ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και συμβολίζουμε $\operatorname{rank}(A)$, τον μέγιστο αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του A.

Οι σημαντικότερες από τις **ιδιότητες για την τάξη του πίνακα** διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση. Για την απόδειξη αυτών βλέπε p. 13 [5].

Πρόταση 1.15

Έστω πίνακες $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ και $C \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$
2. $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$
3. $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A^*) = \operatorname{rank}(\overline{A})$
4. $\operatorname{rank}(AA^*) = \operatorname{rank}(A^*A) = \operatorname{rank}(A)$
5. Για ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ ή για έναν πίνακα $y \in M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, ισχύει $\operatorname{rank}(y) = 1$, αλλά και $\operatorname{rank}(yy^*) = 1$, λόγω του (4)
6. $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) - n \leq \operatorname{rank}(AC) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(C)\}$
7. Για πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει ότι:

   $$A \text{ αντιστρέψιμος} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$$

8. Αν για πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A) = 0$, τότε η τάξη του ισούται με την τάξη του κύριου υποπίνακα με τη μέγιστη διάσταση, ο οποίος έχει μη μηδενική ορίζουσα.

1.4 Χαρακτηριστικά ποσά τετραγωνικών πινάκων

Ορισμός 1.16

Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και ένα διάνυσμα - στήλη $x \in M_{n\times1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x,\ \ x \neq \mathbf{0} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Τότε ορίζεται ότι ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{F}$, ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα A και το διάνυσμα – στήλη $x \in M_{n\times1}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ. Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός πίνακα A ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Ορισμός 1.17

Η μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) του A και συμβολίζεται με $\rho(A)$, δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| :\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Ορισμός 1.18

Οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται ***ιδιοποσά ή χαρακτηριστικά ποσά*** του πίνακα A. Η δε εξίσωση $Ax = \lambda x,\ x \neq \mathbf{0}$ ονομάζεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** του A.

Από τη χαρακτηριστική εξίσωση $Ax = \lambda x,\ x \neq \mathbf{0}$, ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ παίρνουμε:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)x = \mathbf{0},\ \ x \neq \mathbf{0}$$

Η τελευταία ισότητα οδηγεί σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα, το οποίο δέχεται και μη μηδενικές λύσεις μόνο όταν $\det(A-\lambda I_n)=0$. Ο υπολογισμός της ορίζουσας $\det(A-\lambda I_n)=(-1)^n\det(\lambda I_n - A)$ οδηγεί σε ένα n – στού βαθμού πολυώνυμο.

Ορισμός 1.19

Έστω ο πίνακας $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{F})$. To n – στού βαθμού πολυώνυμο ως προς λ

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n - A)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{21} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0,\quad \beta_i\in\mathbb{F},\quad i=0,1,2,\cdots,n-1$$

ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A.

Οι ρίζες $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$ είναι

οι **ιδιοτιμές** του πίνακα A.

Σχόλιο 1.20

Αν θεωρήσουμε τον 2×2 πίνακα

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι:

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}\alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow$$
$$\chi_A(\lambda)=\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda+(\alpha\delta-\beta\gamma)$$

το οποίο ισοδύναμα γράφεται :

$$\chi_A(\lambda)=\lambda^2-\left[\operatorname{tr}(A)\right]\lambda+\det(A)$$

Ορισμός 1.21

Το χαρακτηριστικού πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ αναλύεται πάντα σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων στο σύνολο $\mathbb{C}$, άρα μπορούμε να γράψουμε ότι :

$$\chi_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow$$
$$\lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0=0 \Leftrightarrow$$
$$(\lambda-\lambda_1)^{\nu_1}(\lambda-\lambda_2)^{\nu_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{\nu_k}=0$$

όπου $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_k$ είναι όλες οι διαφορετικές (διακεκριμένες) ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ και $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_k$ είναι αντίστοιχα η πολλαπλότητα καθεμιάς, που ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα.** Είναι δε φανερό ότι για έναν πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_k=n$. Αν για κάποιο i ισχύει $\nu_i=1$, η αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_i χαρακτηρίζεται **διακεκριμένη** ή **απλή**, διαφορετικά ονομάζεται **πολλαπλή**.

Σχόλιο 1.22

1. Η τιμή $\chi_A(0)$ ισούται με την $(-1)^n\det A$.

   Πράγματι $\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)\overset{\lambda=0}{\Rightarrow}\chi_A(0)=\det(-A)=(-1)^n\det A$
2. Από τον Ορισμό 1.19 είναι φανερό ότι το φάσμα του πίνακα Α είναι το σύνολο $\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{F}:\ \chi_A(\lambda)=0\}$

Ορισμός 1.23

Το σύνολο $V(\lambda_i)=\{x\in M_{n\times 1}(\mathbb{F}):\ (A-\lambda I_n)x=\mathbf{0}\}$ ονομάζεται **ιδιοχώρος** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και είναι ένα μη κενό σύνολο του $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i και για τη διάσταση του $V(\lambda_i)$ ισχύει:

$$\dim(V(\lambda_i))=n-\mathrm{rank}(A-\lambda I_n)$$
(1.4.1)

Ο αριθμός $\dim(V(\lambda_i))$ ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και είναι το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i. Η σχέση που συνδέει την αλγεβρική με τη γεωμετρική πολλαπλότητα είναι:

$$1\le \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} \le \text{αλγεβρική πολλαπλότητα} \qquad (1.4.2)$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, φαίνονται τα βήματα υπολογισμού των ιδιοτιμών αλλά και των ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Για να υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά ποσά ενός πίνακα ακολουθούμε τα βήματα όπως στο ακόλουθο παράδειγμα αναφορικά με τον 3×3 πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Υπολογισμός του πίνακα $(A-\lambda I_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 5 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

(ii) Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \det(A-\lambda I_n)$

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \det(A-\lambda I_3) \Rightarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = (-1)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4-\lambda \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

(iii) Επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\chi_A(\lambda) = 0$ που οι ρίζες της είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(1-\lambda)(1+\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

(iv) Για κάθε μια από τις ιδιοτιμές λ_i υπολογίζουμε μια βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$ που περιέχει όλες τις λύσεις

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

του ομογενούς γραμμικού συστήματος $(A-\lambda I_n)x = \mathbf{0}$, $x \neq \mathbf{0}$.

- Για $\lambda_1 = 2$

$$(A-2I_3)x = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = O \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = x_2 = x_3 = z$$

Έτσι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι το

$$x = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}^*$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο

$$V(2) = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

- Για $\lambda_2 = 1$

$$(A - I_3)x = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = 2x_2 = 2x_3$$

Έτσι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ είναι το

$$x = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}^*$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο

$$V(1) = \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

- Για $\lambda_3 = -1$

$$(A - (-1)I_3)x = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = -x_3, \ \ x_2 = 0$$

Έτσι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = -1$ είναι το

$$x = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}^*$$

και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο

$$V(-1)=\left\{z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{R}^*\right\}. \qquad \square$$

1.5 Βασικές ιδιότητες και θεωρήματα των χαρακτηριστικών ποσών

Για τα χαρακτηριστικά ποσά ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, ισχύουν οι παρακάτω **βασικές ιδιότητες**, που αναφέρονται στην πρόταση που ακολουθεί:

Πρόταση 1.24

1. Αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, όχι απαραίτητα διακεκριμένες, τότε $\det(A) = \lambda_1 \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n \beta_0$, όπου β_0 είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
2. Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.
3. Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού καθώς και ενός διαγώνιου πίνακα, είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
4. Αν λ_i, x είναι τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^k ισχύει $A^k x = \lambda^k x$, όπου $k \in \mathbb{N}$.
5. Αν λ_i, x είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-1} είναι λ_i^{-1}, x.
6. Αν x_1, x_2 είναι ιδιοδιανύσματα του ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$ για την ιδιοτιμή λ_i ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε και το διάνυσμα $kx_1 + mx_2$ $k, m \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ_i.
7. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ όμοιοι πίνακες και $B = P^{-1}AP$, για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $P \in M_n(\mathbb{F})$, τότε ισχύουν:
   a. $\det(A) = \det(B)$
   b. $B^k = P^{-1}A^k P,\ k \in \mathbb{N}$
   c. Για έναν Ερμητιανό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και έναν τυχαίο ορθομοναδιαίο πίνακα $V \in M_n(\mathbb{F})$, οι πίνακες A και V^*AV έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
   d. Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ όμοιοι πίνακες, (δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ ώστε $B = P^{-1}AP$), και $\lambda_i(A)$, x τα ιδιοποσά του πίνακα A, τότε τα ιδιοποσά του πίνακα B είναι $\lambda_i(A)$, $(P^{-1})x$.
8. Οι πίνακες A και A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, άρα και τις ίδιες ιδιοτιμές.

9. Για το **ίχνος** $\operatorname{tr}(A)=\alpha_{11}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{nn}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}$ ενός πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$, ισχύει επιπλέον ότι $\operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$, όπου λ_i οι ιδιοτιμές του Α.
10. Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού (Ερμιτιανού) πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Τα ιδιοδιανύσματα του Α που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.
11. Ένας συμμετρικός πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν μια τουλάχιστον ιδιοτιμή του είναι μηδέν και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
12. Ένας συμμετρικός πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ είναι αρνητικά ορισμένος αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Είναι αρνητικά ημιορισμένος αν και μόνο αν μια τουλάχιστον ιδιοτιμή του είναι μηδέν και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.
13. **Θεώρημα Cayley – Hamilton.** Ένας πίνακας $A\in M_n(\mathbb{F})$ επαληθεύει τη χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλαδή ο πίνακας Α είναι ρίζα της εξίσωσης
$$\chi_A(A)=O \qquad (1.5.1)$$

Απόδειξη

1. Από τη σχέση $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)$ έχουμε
$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)\Rightarrow \lambda^n+\beta_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\beta_1\lambda+\beta_0=\det(A-\lambda I_n)\Rightarrow$$
$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\det(A-\lambda I_n)\overset{\lambda=0}{\Rightarrow}$$
$$(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\det(A)=\chi_A(0)\Rightarrow$$
$$\det(A)=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\beta_0$$
Παρατήρηση: Είναι φανερό πως ο Α αντιστρέφεται αν και μόνο αν ισχύει $\det(A)\neq 0$ ή αν και μόνο αν ο πίνακας Α δεν έχει ως ιδιοτιμή του το 0.
2. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Πρόταση 7.2].
3. Αν Α τριγωνικός κάτω (άνω) ή διαγώνιος πίνακας, τότε
$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)\Rightarrow$$
$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
4. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Πρόταση 7.3].
5. Αφού Α αντιστρέψιμος, από τη σχέση $Ax=\lambda x$ έχουμε:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \Leftrightarrow I_n x = \lambda\left(A^{-1}x\right) \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^{-1}I_n x = A^{-1}x \Leftrightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x$$

6. Προφανής.
7. (a) $$\det(B) = \det\left(P^{-1}AP\right) =$$

$$= \det\left(P^{-1}\right)\det(A)\det(P) = \left(\det(P)\right)^{-1}\det(A)\det(P) = \det(A)$$

(b) $$B^k = \left(P^{-1}AP\right)^k = \underbrace{\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right)\cdots\left(P^{-1}AP\right)}_{k-\text{παράγοντες}} =$$

$$P^{-1}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{I}A\underbrace{P\cdot P^{-1}}_{I}AP\cdots\cdots P^{-1}AP = P^{-1}\underbrace{AAA\cdots A}_{k-\text{παράγοντες}}P = P^{-1}A^kP$$

(c) Αρκεί να αποδειχθεί πως οι πίνακες A και V^*AV έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Πράγματι

$$\chi_{V^*AV}(\lambda) = \det\left(V^*AV - \lambda I_n\right) = \det\left(V^*AV - \lambda V^*I_nV\right) \Rightarrow$$
$$\chi_{V^*AV}(\lambda) = \det\left(V^*\left(A - \lambda I_n\right)V\right) = \det\left(V^*\right)\det\left(A - \lambda I_n\right)\det(V) \Rightarrow$$
$$\chi_{V^*AV}(\lambda) = \det\left(V^*\right)\det(V)\det\left(A - \lambda I_n\right) = \det\left(V^*V\right)\det\left(A - \lambda I_n\right) \Rightarrow$$
$$\chi_{V^*AV}(\lambda) = \det\left(I_n\right)\det\left(A - \lambda I_n\right) \Rightarrow$$
$$\chi_{V^*AV}(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right) \Rightarrow$$
$$\chi_{V^*AV}(\lambda) = \chi_A(\lambda)$$

Δηλαδή οι πίνακες A και V^*AV έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(d) Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B, ισχύει

$$\det(B - \lambda I) = \det\left(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P\right)\det\left(P^{-1}(A - \lambda I)P\right) =$$
$$= \det\left(P^{-1}\right)\det(A - \lambda I)\det(P) = \det\left(P^{-1}\right)\det(P)\det(A - \lambda I) =$$
$$= \det(A)$$

Άρα οι πίνακες A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο οπότε έχουν και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Ακόμη

$$B\left(P^{-1}x\right) = P^{-1}AP\left(P^{-1}x\right) = P^{-1}APP^{-1}x = P^{-1}Ax = P^{-1}(\lambda x) = \lambda\left(P^{-1}x\right)$$

8. Πράγματι, αφού η $\det(A - \lambda I)$ δίνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, έχουμε

$$\det(A - \lambda I) = \det\left((A - \lambda I)^T\right) = \det\left(A^T - (\lambda I)^T\right) = \det\left(A^T - \lambda I\right)$$

9. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Πρόταση 8.5].
10. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Πρόταση 7.6].

Πράγματι αν είναι λ_1, λ_2 δυο διαφορετικές ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού πίνακα και $x_1,\ x_2 \in \mathbb{C}^n$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, τότε

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \Leftrightarrow \underbrace{(Ax_1)^*}_{1\times n} = \underbrace{(\lambda_1 x_1)^*}_{1\times n} \overset{x_2 \neq \mathbf{0}}{\Leftrightarrow}$$

$$(Ax_1)^* x_2 = (\lambda_1 x_1)^* x_2 \Leftrightarrow x_1^* A^* x_2 = \lambda_1 x_1^* x_2 \overset{A=A^*}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1^*(Ax_2) = \lambda_1 (x_1^* x_2) \overset{Ax_2=\lambda_2 x_2}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1^*(\lambda_2 x_2) = \lambda_1 (x_1^* x_2) \Leftrightarrow \lambda_2 (x_1^* x_2) = \lambda_1 (x_1^* x_2) \Leftrightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)(x_1^* x_2) = 0 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1^* x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 \perp x_2$$

11. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Πρόταση 9.2(i)].
12. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Πρόταση 9.2(ii)].
13. Για την απόδειξη, βλέπε [5, Θεώρημα 7.1].

□

Σχόλιο

Το Θεώρημα Cayley – Hamilton υποδεικνύει έναν τρόπο εύρεσης του αντιστρόφου πίνακα, αν αυτός υπάρχει. Πράγματι, στην περίπτωση που ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος ($\det A \neq 0$), επειδή από την ιδιότητα (i) στην Πρόταση 1.24 έχουμε

$$\det A = \beta_0 \neq 0,$$

μπορούμε να γράψουμε την (1.5.1) του Θεωρήματος Cayley – Hamilton, ως ακολούθως:

$$\chi_A(A) = A^n + \beta_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \beta_1 A + \beta_0 I = O \Rightarrow$$
$$A\left(A^{n-1} + \beta_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \beta_1 I\right) = -\beta_0 I \Rightarrow.$$
$$A\left(-\frac{1}{\beta_0}\right)\left(A^{n-1} + \beta_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \beta_1 I\right) = I$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.7 η παραπάνω ισότητα οδηγεί

$$A^{-1} = -\frac{1}{\beta_0}\left(A^{n-1} + \beta_{n-1}A^{n-2} + \cdots + \beta_1 I\right)$$

- Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - \lambda^2 - 11\lambda - 3.$$

Σύμφωνα μα το Θεώρημα Cayley – Hamilton ισχύει:

$$\chi_A(A)=O \Rightarrow A^3-A^2-11A-3I=O \Rightarrow A^3-A^2-11A=3I \Rightarrow \frac{1}{3}A\left(A^2-A-11I\right)=I \Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\left(A^2-A-11I\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -2 & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

□

Ορισμός 1.25

Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ λέμε ότι **διαγωνοποιείται** (ή είναι **διαγωνοποιήσιμος** στο $\mathbb{F}$), **αν υπάρχει πίνακας ομοιότητας** $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}\cdot A\cdot P$ να είναι ένας **διαγώνιος** πίνακας (Λ) με στοιχεία της κύριας διαγωνίου του τις **ιδιοτιμές** λ_i, $i=1,2,\cdots,n$ του πίνακα A. Δηλαδή

$$\Lambda=P^{-1}AP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}=P^{-1}AP \qquad (1.5.2)$$

Αποδεικνύεται ότι ο πίνακας P, έχει ως στοιχεία του κατά στήλες, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A, δηλαδή $P=\left(u_1, \quad u_2, \quad \cdots \quad u_n\right)$ με u_i να είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_i(A)$ για $i=1,2,\cdots,n$.

➢ Για παράδειγμα ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

έχει:

- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+4=(\lambda-4)(\lambda-1)$
- Ιδιοτιμές $\chi_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=4, \quad \lambda_2=1$
- Ιδιοδιανύσματα – ιδιόχωρους

Για $\lambda_1 = 4$, τον $V(4) = \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχο «βασικό» ιδιοδιάνυσμα για $z = 1$ το $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Για $\lambda_2 = 1$, τον $V(1) = \begin{pmatrix} z \\ -2z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$, με αντίστοιχο «βασικό» ιδιοδιάνυσμα για $z = 1$ το $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- Πίνακα διαγωνοποίησης τον $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ με $P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Τέλος $P^{-1}AP = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$

  Με διαγώνιο πίνακα τον $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

□

Σχόλιο 1.26

1. Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται πάντοτε, αν έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές.
2. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, $k < n$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε ο A διαγωνοποιείται αν και μόνο αν $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\cdots(A - \lambda_k I) = O$.
3. Είναι προφανές ότι :
$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow P\left(P^{-1}AP\right)P^{-1} = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1} \qquad (1.5.3)$$
   και ότι :
$$\det(A) = \det\left(P\Lambda P^{-1}\right) = \det(P)\det(\Lambda)\det\left(P^{-1}\right) = \det(\Lambda) \qquad (1.5.4)$$

Στην περίπτωση Ερμιτιανού (συμμετρικού) πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, το **φασματικό θεώρημα** είναι εκείνο που εξασφαλίζει τη διαγωνοποίηση του πίνακα Α. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό για κάθε συμμετρικό (Ερμιτιανό) πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει **ορθογώνιος (ορθομοναδιαίος)** πίνακας και πραγματικός διαγώνιος πίνακας, που διαγωνοποιεί τον πίνακα Α, για την απόδειξη βλέπε [5, Θεώρημα 8.2].

Θεώρημα 1.27 (φασματικό)

Κάθε Ερμιτιανός (συμμετρικός) πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι **ορθογώνια (ορθομοναδιαία)** όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα $\Lambda \in M_n(\mathbb{F})$.

Σχόλια:

Ο ορθογώνιος (ορθομοναδιαίος) πίνακας $V \in M_n(\mathbb{F})$ του φασματικού θεωρήματος προκύπτει από τα διανύσματα – στήλες του πίνακα P της διαγωνοποίησης $\Lambda = P^{-1}AP$ του A και έχει ως στήλες του τα **ορθοκανονικοποιημένα** διανύσματα u_i του P, που μετά την εφαρμογή της μεθόδου ορθοκανονικοποίησης Gram – Schmidt [4, 9, 11] πάνω σ' αυτά, συμβολίζονται με v_i. Δηλαδή

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \text{ με } v_i \in \mathbb{C}^n, \text{ και } |v_i| = 1$$

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}$$

$$VV^* = V^*V = I_n \quad \text{και} \quad \mathbf{A = V\Lambda V^*}.$$

Τα διαγώνια στοιχεία του $\Lambda \in M_n(\mathbb{F})$είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$ του A και οι στήλες του ορθογώνιου/ορθομοναδιαίου πίνακα $V \in M_n(\mathbb{F})$ είναι οι βάσεις των αντίστοιχων ιδιόχωρων του A, δηλαδή

$$A = V\Lambda V^* = V\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}V^*, \qquad (1.5.5)$$

Συνοπτικά είναι

$$A = V\Lambda V^* = V\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}V^*$$

Παρακάτω θα δούμε τη διαγωνοποίηση ενός συμμετρικού (Ερμιτιανού) πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ με τη χρήση αντιστρέψιμου πίνακα $P \in M_3(\mathbb{R})$ ώστε $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \Lambda$ όπου $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ να είναι οι ιδιοτιμές του A, αλλά και με τη χρήση ορθομοναδιαίου πίνακα V ώστε $V^{-1}AV = \Lambda$.

- Για παράδειγμα, ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει

- χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda + 54,$$

- χαρακτηριστική εξίσωση

$$\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 27\lambda + 54 = 0,$$

- ιδιοτιμές τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\lambda_1 = 6$ και $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ (διπλή),
- και ιδιοδιανύσματα για $\lambda_1 = 6$ το

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  και για τις ιδιοτιμές $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ τα

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ αντίστοιχα.}$$

  Τα ζεύγη v_1, v_2 και v_1, v_3 είναι ορθογώνια (κάθετα μεταξύ τους) αλλά το ζεύγος v_2, v_3 όχι, αφού η ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ είναι διπλή.
- Ο πίνακας P της διαγωνοποίησης δημιουργείται από τα ιδιοδιανύσματα και είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  με ορίζουσα

$$\det(\mathrm{P}) = 9$$

άρα για τον αντίστροφό του έχουμε

$$\mathrm{P}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Επομένως για τη διαγωνοποίηση του A, παίρνουμε

$$\mathrm{A} = \mathrm{P\Lambda P}^{-1}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{A}$$

- Επίσης από τη σχέση

$$\mathrm{A} = \mathrm{P\Lambda P}^{-1}$$

μπορούμε να πάρουμε

$$\mathrm{A} = \mathrm{P\Lambda P}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \Lambda$$

αλλά και δυνάμεις του πίνακα A όπως π.χ.

$$\mathrm{A}^{15} = \left(\mathrm{P\Lambda P}^{-1}\right)^{15} = \left(\mathrm{P\Lambda P}^{-1}\right)\left(\mathrm{P\Lambda P}^{-1}\right)\cdots\left(\mathrm{P\Lambda P}^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}^{15} = \mathrm{P\Lambda}\underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{\mathrm{I}}\Lambda\mathrm{P}^{-1}\cdots\mathrm{P\Lambda P}^{-1} = \mathrm{P}\underbrace{\Lambda\Lambda\cdots\Lambda}_{15-\text{παράγοντες}}\mathrm{P}^{-1} \Rightarrow \mathrm{A}^{15} = \mathrm{P\Lambda}^{15}\mathrm{P}^{-1} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}^{15} = \mathrm{P} \cdot \begin{pmatrix} 6^{15} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{15} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{15} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{P}^{-1}$$

Για την διαγωνοποίηση του συμμετρικού/Ερμιτιανού πίνακα A με τη χρήση του **φασματικού θεωρήματος** έχουμε:

- Κατασκευή του ορθομοναδιαίου πίνακα V από τα ιδιοδιανύσματα του A, αφού πρώτα με τη μέθοδο Gram – Schmidt (βλέπε Gram–Schmidt process [4, 9, 11]) μετασχηματίσουμε και το ζεύγος v_2, v_3 σε ορθογώνια διανύσματα. Έτσι τα ορθογώνια ανά δύο διανύσματα είναι τα

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

Και ο πίνακας V θα προκύψει τελικά αφού μετατρέψουμε τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 σε μοναδιαία, διαιρώντας καθένα με το μέτρο του. Έτσι τα διανύσματα – στήλες του πίνακα V είναι

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{5}/5\\\sqrt{5}/5\end{pmatrix},\quad \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix}1\\-2/5\\4/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}/3\\-2\sqrt{5}/15\\4\sqrt{5}/15\end{pmatrix} \text{ ή}$$

$$V=\begin{pmatrix}2/3 & 0 & \sqrt{5}/3\\ 1/3 & 2\sqrt{5}/5 & -2\sqrt{5}/15\\ -2/3 & \sqrt{5}/5 & 4\sqrt{5}/15\end{pmatrix}$$

Ο πίνακας V ως ορθομοναδιαίος έχει αντίστροφο τον ανάστροφό του δηλαδή $V^{-1}=V^{T}$. Πράγματι μετά από πράξεις παίρνουμε ότι

$$V^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}10 & 5 & -10\\ 0 & 6\sqrt{5} & 3\sqrt{5}\\ 5\sqrt{5} & -2\sqrt{5} & 4\sqrt{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & -2/3\\ 0 & 2\sqrt{5}/5 & \sqrt{5}/5\\ \sqrt{5}/3 & -2\sqrt{5}/15 & 4\sqrt{5}/15\end{pmatrix}=V^{T}$$

- Τέλος με εκτέλεση πράξεων διαπιστώνουμε ότι $A=V\Lambda V^{T}$ ή ισοδύναμα

$$A=V\Lambda V^{-1}\Leftrightarrow V^{-1}AV=\Lambda=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad \square$$

Στο 2ο κεφάλαιο, γίνεται χρήση του $n\times n$ Ερμιτιανού πίνακα $yy^{*}\in M_n(\mathbb{F})$ ως πίνακα διαταραχής ενός συμμετρικού/Ερμιτιανού πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$, όπου $y\in\mathbb{C}^n$ ένα $n\times 1$ διάνυσμα. Για τον πίνακα αυτό χρήσιμη είναι η παρακάτω πρόταση, που προσδιορίζει τις ιδιοτιμές του.

Πρόταση 1.28

Αν $y\in\mathbb{C}^n$ διάνυσμα, τότε ο $n\times n$ πίνακας $A=yy^{*}$:

1. Είναι Ερμιτιανός θετικά ημιορισμένος, και
2. Έχει ελάχιστη ιδιοτιμή το 0 με πολλαπλότητα $n-1$ και μέγιστη ιδιοτιμή τη $\lambda_{max}(A)=\|y\|_2^2$. (1.5.6)

Απόδειξη

1. Αρχικά ο πίνακας $A=yy^{*}$ είναι Ερμιτιανός, αφού

$$A^* = \left(yy^*\right)^* = \left(y^*\right)^* y^* = yy^* = A$$

Επιπλέον για τυχαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ έχουμε

$$x^* A x = x^* y y^* x = \left(y^* x\right)^* \left(y^* x\right) = \left\| y^* x \right\|_2^2 \geq 0$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.24 (11), ο πίνακας $A = yy^*$ είναι θετικά ημιορισμένος.

2. Από την Πρόταση 1.24 (11) και πάλι, ο A ως θετικά ημιορισμένος έχει ιδιοτιμή το 0 και όλες οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, Πρόταση 1.24 (10). Λόγω της Πρότασης 1.15 (5), ισχύει ότι

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(yy^*\right) = 1 < n$$

Για τη διάσταση του ιδιοχώρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μηδέν, έχουμε ότι:

$$\dim\left(V(0)\right) = n - \operatorname{rank}\left(A - 0 \cdot I_n\right) = n - \operatorname{rank}(A) = n - 1$$

Και επειδή: γεωμετρική πολλαπλότητα $= n-1 \leq$ αλγεβρική πολλαπλότητα, έχουμε πως αλγεβρική πολλαπλότητα $= n-1$. Άρα η ιδιοτιμή μηδέν έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $\mathbf{n-1}$, που σημαίνει πως ο πίνακας $A = yy^*$ έχει μόνο μία θετική πραγματική ιδιοτιμή, έστω λ, με πολλαπλότητα 1. Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$\lambda = \|y\|_2^2$$

Για το διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{C}, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

Τότε για τον πίνακα $A = yy^*$ έχουμε

$$A = yy^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left|y_1^2\right| & y_1\overline{y_2} & \cdots & y_1\overline{y_n} \\ y_2\overline{y_1} & \left|y_2\right|^2 & \cdots & y_2\overline{y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n\overline{y_1} & y_n\overline{y_2} & \cdots & \left|y_n\right|^2 \end{pmatrix} \tag{1.5.7}$$

Για την $\|y\|_2^2$ έχουμε πως

$$\|y\|_2^2 = \sum_{1}^{n} \left|y_i\right|^2 = \left|y_1\right|^2 + \left|y_2\right|^2 + \cdots + \left|y_n\right|^2 = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(yy^*\right) \tag{1.5.8}$$

Για την Frobenius νόρμα του πίνακα A όμως έχουμε ότι

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right|^2 = \operatorname{tr}\left(A^* A\right) = \operatorname{tr}\left(\left(yy^*\right)^* yy^*\right) = \operatorname{tr}\left(yy^* yy^*\right) \Rightarrow$$

$$\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}\left(y\left(y^* y\right) y^*\right) \tag{1.5.9}$$

Για το γινόμενο $y^* y$ στην τελευταία σχέση (1.5.9) έχουμε ότι

$$y^* y = \overline{y}_1 y_1 + \overline{y}_2 y_2 + \ldots + \overline{y}_n y_n = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \ldots |y_n|^2 = \|y\|_2^2 > 0 \tag{1.5.10}$$

Έτσι η (1.5.9) λόγω της (1.5.10) και της (1.5.8) γίνεται

$$\|A\|_F^2 = y^* y \cdot \mathrm{tr}\left(yy^*\right) = \|y\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 = \|y\|_2^4 \Rightarrow$$

$$\|A\|_F^2 = \|y\|_2^4 \Rightarrow \|A\|_F = \|y\|_2^2 \tag{1.5.11}$$

Επομένως για το διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$, τον πίνακα $A = yy^*$ και τη φασματική νόρμα $||| A ||| = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \ \lambda \in \sigma\left(AA^*\right)\right\}$ (βλέπε, [5, section 5.6.6]), έχουμε ότι

$$||| A ||| \equiv \|A\|_2 \equiv \|A\|_F = \|y\|_2^2 \tag{1.5.12}$$

Από [5, problem 26 p. 316] και επειδή, όπως αποδείχτηκε παραπάνω οι $n-1$ ιδιοτιμές του Ερμιτιανού/συμμετρικού πίνακα $A = yy^*$ είναι ίσες με μηδέν και έχει μία μόνο θετική ιδιοτιμή, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\|A\|_F^2 = \left(\lambda_{\max}(A)\right)^2 \overset{\lambda>0}{\Rightarrow} \|A\|_F = \lambda_{\max}(A) \tag{1.5.13}$$

Έτσι τελικά από τις (1.5.12) και (1.5.13) έχουμε ότι

$$\|y\|_2^2 = \lambda_{\max}(A),$$

οπότε η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□

1.6 Αριθμητικό πεδίο πίνακα

Ορισμός 1.29

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$. **Αριθμητικό πεδίο,** $F(A)$, (numerical range ή field of value) του πίνακα A ονομάζεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

$$F(A) = \left\{ x^* A x : \ x \in \mathbb{C}^n \ \text{ με } \ \|x\|_2 = 1 \right\} \tag{1.6.1}$$

Σχόλια:

i) Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με την έννοια του αριθμητικού πεδίου, πλήθος ιδιοτήτων του έχουν αποδειχθεί. Οι αρχικές ιδιότητες που αποδείχθηκαν είναι ότι το σύνολο είναι κυρτό [10, Theorem 3.11], φραγμένο και συμπαγές [6, Property 1.2.1, p.8] υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει τις αποδείξεις στις αντίστοιχες προαναφερθείσες βιβλιογραφικές αναφορές.

ii) Το ενδιαφέρον των ερευνητών αυξήθηκε μετά την απόδειξη της ιδιότητας ότι το αριθμητικό πεδίο του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ περικλείει το φάσμα του πίνακα.

iii) Χρήσιμες ιδιότητες στις εφαρμογές είναι η ιδιότητα του ορθομοναδιαία αναλλοίωτου και της κυρτής θήκης του αριθμητικού πεδίου οι οποίες αναφέρονται στην πρόταση που ακολουθεί.

□

Πρόταση 1.30

1. Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$. Τότε $\sigma(A) \subseteq F(A)$.
2. Αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ Ερμιτιανός, τότε $F(A) \subset \mathbb{R}$.
   Συγκεκριμένα
   $$F(A) = \left[\lambda_{min}(A),\ \lambda_{max}(A) \right], \tag{1.6.2}$$
   όπου $\lambda_{min}(A)$, $\lambda_{max}(A)$ σημειώνει την ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A, αντιστοίχως.
3. Έστω $B \in M_k(\mathbb{F})$, $C \in M_n(\mathbb{F})$, $A \in M_{(k+n)}(\mathbb{F})$ και ο πίνακας A είναι ευθύ άθροισμα των B και C, τότε
   $$F(A) = F(B \oplus C) = Co\left\{ F(B) \cup F(C) \right\}, \tag{1.6.3}$$
   όπου με Co (convex hull) συμβολίζουμε την **κυρτή θήκη** των συνόλων $F(B)$ και $F(C)$.
4. Για τους πίνακες $A, U \in M_n(\mathbb{F})$ **με U ορθομοναδιαίο**, ισχύει
   $$F(U^* A U) = F(A) \tag{1.6.4}$$
   Η παραπάνω ισότητα αναφέρεται ως ορθομοναδιαία αναλλοίωτη ομοιότητα, [6, 10, 12].

Απόδειξη

1. Έστω λ μία ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το **μοναδιαίο** $x \in \mathbb{C}^n$, συνεπώς $Ax = \lambda x$ με $\|x\|_2 = 1$. Επειδή μπορούμε να γράψουμε
$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda \cdot \|x\|_2^2 = \lambda x^* x = x^* \lambda x = x^* A x,$$
οπότε είναι φανερό ότι ισχύει $\sigma(A) \subseteq F(A)$.

2. Αρχικά παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο του $F(A)$ ισχύει $x^* A x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $z = x^* A x \in F(A)$ έχουμε ότι:
$$\bar{z} = \overline{x^* A x} = \left(x^* A x\right)^* = x^* A^* \left(x^*\right)^* = x^* A x = z,$$
συνεπώς $z \in \mathbb{R} \Rightarrow F(A) \subset \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τις πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_i \equiv \lambda_i(A),\ i = 1, 2, \cdots, n$ του Ερμιτιανού πίνακα A, τις οποίες διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά όπως παρουσιάζεται παρακάτω
$$\lambda_{\min} \equiv \lambda_n \le \lambda_{n-1} \le \cdots \le \lambda_2 \le \lambda_1 \equiv \lambda_{\max}, \tag{1.6.5}$$
και τα αντίστοιχα ορθοκανονικοποιημένα με τη μέθοδο των Gram – Schmidt [4, 9, 11] ιδιοδιανύσματά τους $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Από το Φασματικό θεώρημα ο A διαγωνοποιείται
$$A = V \Lambda V^*$$
ή ισοδύναμα
$$V^* A V = \Lambda = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\right) \tag{1.6.6}$$
όπου ο ορθομοναδιαίος πίνακας $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ έχει ως στήλες του τα παραπάνω ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα $v_i \in \mathbb{C}^n,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

Έστω ένα μοναδιαίο διάνυμα $x \in \mathbb{C}^n$ για το οποίο υπάρχει διάνυσμα $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^n$ για το οποίο ισχύει
$$x = Vy. \tag{1.6.7}$$
Τότε μπορούμε να γράψουμε:
$$\|x\|_2^2 = 1 \Rightarrow x^* x = 1 \Rightarrow (Vy)^* (Vy) = 1 \Rightarrow$$
$$y^* V^* V y = 1 \Rightarrow y^* y = 1 \Rightarrow \|y\|_2^2 = 1 \Rightarrow \|y\|_2 = 1 \tag{1.6.8}$$
Συνεπώς από το μοναδιαίο διάνυσμα x της (1.6.7) παράγεται το μοναδιαίο διάνυσμα y της (1.6.8).

Τώρα χρησιμοποιώντας το μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ της (1.6.7), τη μορφή της διαγωνοποίησης (1.6.6) του πίνακα A, για τον πραγματικό αριθμό $x^* A x$ έχουμε

$$\begin{aligned}
x^*Ax &= (Vy)^* A(Vy) = y^*V^*AVy \overset{(1.6.6)}{=} y^*\Lambda y \\
&= \overline{y}_1\lambda_1 y_1 + \overline{y}_2\lambda_2 y_2 + \cdots + \overline{y}_n\lambda_n y_n = \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_2 |y_2|^2 + \cdots + \lambda_n |y_n|^2 \\
&\overset{(1.6.5)}{\leq} \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_1 |y_2|^2 + \cdots + \lambda_1 |y_n|^2 \\
&= \lambda_1 \left(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2\right) \\
&= \lambda_1 \|y\|_2^2 \\
&\overset{(1.6.8)}{=} \lambda_1 \equiv \lambda_{max}(A)
\end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Όμοια

$$\begin{aligned}
x^*Ax &= (Vy)^* A(Vy) = y^*V^*AVy \overset{(1.6.6)}{=} y^*\Lambda y \\
&= \overline{y}_1\lambda_1 y_1 + \overline{y}_2\lambda_2 y_2 + \cdots + \overline{y}_n\lambda_n y_n = \lambda_1 |y_1|^2 + \lambda_2 |y_2|^2 + \cdots + \lambda_n |y_n|^2 \\
&\overset{(1.6.5)}{\geq} \lambda_n |y_1|^2 + \lambda_n |y_2|^2 + \cdots + \lambda_n |y_n|^2 \\
&= \lambda_n \left(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2\right) \\
&= \lambda_n \|y\|_2^2 \\
&\overset{(1.6.8)}{=} \lambda_n \equiv \lambda_{min}(A)
\end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Έτσι από τις (1.6.9) και (1.6.10), έχουμε ότι

$$\lambda_{min}(A) \leq x^*Ax \leq \lambda_{max}(A) \tag{1.6.11}$$

Επομένως, συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.29, την ιδιότητα της κυρτότητας και της συμπάγειας του αριθμητικού πεδίου, την 1^{η} ιδιότητα της παρούσας Πρότασης με την (1.6.11) συμπεραίνουμε ότι

$$F(A) = \left[\lambda_{min}(A),\ \lambda_{max}(A)\right],$$

το οποίο αποδεικνύει, την (1.6.2).

3. Η απόδειξη δίνεται [6, 1.2.10 Property: Direct sums].
4. Η απόδειξη δίνεται [6, 1.2.8 Property: unitary similarity invariance].

□

Κεφάλαιο 2^{o}

Ιδιοτιμές διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα από διάνυσμα

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε αναφορά και απόδειξη θεωρημάτων, που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία, για τον εντοπισμό ορίων των ιδιοτιμών ενός διαταραγμένου τετραγωνικού πίνακα. Ως διαταραγμένο Ερμιτιανό πίνακα θεωρούμε τον πίνακα $A-yy^*$, όπου $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $y \in \mathbb{C}^n$.

Στα επόμενα με $A \in M_n(\mathbb{F})$ συμβολίζουμε έναν $n \times n$ **Ερμιτιανό** πίνακα, ο οποίος σύμφωνα με τη 10^{η} ιδιότητα της Πρότασης 1.24 έχει **πραγματικές** ιδιοτιμές, συνεπώς μπορούν να διαταχθούν ως εξής:

$$\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \le \lambda_{n-1}(A) \le \cdots \le \lambda_2(A) \le \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A) \tag{2.1.1}$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_{max}(A) \equiv \lambda_1(A) \ge \lambda_2(A) \ge \cdots \ge \lambda_{n-1}(A) \ge \lambda_n(A) \equiv \lambda_{min}(A)$$

Αν δεν υπάρχει σύγχυση στον πίνακα που αναφέρονται οι ιδιοτιμές, αυτές συμβολίζονται $\lambda_i \equiv \lambda_i(A),\ i=1,2,\cdots,n$

Το κεφάλαιο περιέχει δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα αναφέρεται το Θεώρημα Weyl, το οποίο προσδιορίζει τα φράγματα των ιδιοτιμών του αθροίσματος δύο Ερμιτιανών πινάκων ως συνάρτηση των ιδιοτιμών αυτών των πινάκων, καθώς και θεωρήματα που προσδιορίζουν φράγματα για τις ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού πίνακα A, που διαταράσσεται από έναν πίνακα yy^*, όπου $y \in \mathbb{C}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα και αναφέρεται το Cauchy interlacing Theorem. Στην επόμενη ενότητα αποδεικνύονται άνω και κάτω φράγματα για τις ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$ που επιτυγχάνονται με τη χρήση των εννοιών της κυρτής θήκης, του αριθμητικού πεδίου, της ορθομοναδιαίας αναλλοίωτης ομοιότητας αλλά και με το Cauchy's Interlace Theorem με τη χρήση των ιδιοτιμών και του αριθμητικού πεδίου κατάλληλου 2×2 Ερμιτιανού πίνακα.

Οι ανισώσεις των θεωρημάτων επαληθεύονται με παραδείγματα, τα οποία απαιτον την υλοποίηση των κωδίκων που αναπτύχθηκαν για αυτόν τον σκοπό και παρατίθενται στο Παράρτημα.

2.1 Φράγματα ιδιοτιμών διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα

Στη συνέχεα αναφέρεται το γνωστό θεώρημα Weyl, το οποίο αναφέρεται στον εντοπισμό φραγμάτων των διατεταγμένων ιδιοτιμών του αθροίσματος δύο Ερμιτιανών πινάκων. Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει την απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί [5, Theorem 4.3.1] και [2, Theorem III.2.1]. Το θεώρημα είναι χρήσιμο στις αποδείξεις των προτάσεων, που θα ακολουθήσουν για τον εντοπισμό φραγμάτων των ιδιοτιμών ενός διαταραγμένου πίνακα, $A-yy^*$, όταν η διαταραχή στον $n\times n$ Ερμιτιανό πίνακα A, προκαλείται από ένα $n\times 1$ διάνυσμα $y\in\mathbb{C}^n$.

Θεώρημα 2.1 (Weyl)

Έστω $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ Ερμιτιανοί πίνακες με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_i(A)\in\mathbb{R}$, $\lambda_i(B)\in\mathbb{R}$ και $\lambda_i(A+B)\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,n$, οι οποίες είναι διατεταγμένες με αύξουσα διάταξη, όπως στη (2.1.1). Τότε για κάθε $k=1,2,\cdots,n$ και για τις ιδιοτιμές του πίνακα $A+B$ ισχύει:

$$\lambda_k(A)+\lambda_{min}(B)\le\lambda_k(A+B)\le\lambda_k(A)+\lambda_{max}(B) \tag{2.1.2}$$

Στη συνέχεια από ένα διάνυσμα $y\in\mathbb{C}^n$ δημιουργούμε τον Ερμιτιανό πίνακα yy^*, ο οποίος έχει $\mathrm{rank}(yy^*)=1$ και δημιουργεί τη διαταραχή στον Ερμιτιανό πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$. Ανισοτικές σχέσεις για τις ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα παρουσιάζονται στο θεώρημα που ακολουθεί, την απόδειξή τους ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει, [5, Theorem 4.3.4].

Θεώρημα 2.2

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$ Ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i(A)\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\cdots,n$ διατεταγμένες με αύξουσα διάταξη, όπως στη (2.1.1) και ένα διάνυσμα $y\in\mathbb{C}^n$. Τότε για κάθε $k=3,4,\cdots,n$ ισχύει:

$$\lambda_k(A-yy^*)\le\lambda_{k-1}(A)\le\lambda_{k-2}(A-yy^*), \tag{2.1.3}$$

$$\lambda_k(A)\le\lambda_{k-1}(A-yy^*)\le\lambda_{k-2}(A) \tag{2.1.4}$$

Σχόλιο 2.3

Το Θεώρημα 2.2 ισχύει και στην περίπτωση όπου η διαταραχή προκαλείται από το διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ προσθετικά στον πίνακα και τότε ανάλογες ανισοτικές σχέσεις με αυτές των (2.1.3) και (2.1.4) αποδεικνύεται ότι ισχύουν [5, Theorem 4.3.4] για κάθε $k = 3, 4, \cdots, n$

$$\lambda_k\left(A + yy^*\right) \le \lambda_{k-1}(A) \le \lambda_{k-2}\left(A + yy^*\right) \tag{2.1.5}$$

$$\lambda_k(A) \le \lambda_{k-1}\left(A + yy^*\right) \le \lambda_{k-2}(A) \tag{2.1.6}$$

Παρατηρούμε ότι στις ανισώσεις (2.1.3)-(2.1.6) οι ιδιοτιμές των διαταραγμένων πινάκων $A \pm yy^*$ συγκρίνονται με τις ιδιοτιμές του Ερμιτιανού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Παράδειγμα 2.4

Έστω ο Ερμιτιανός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ και το διάνυσμα $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Προκειμένου να επαληθεύσουμε το Θεώρημα 2.2 και τις ανισώσεις (2.1.3)-(2.1.6) για τους διαταραγμένους Ερμιτιανούς πίνακες $A - yy^*$, $A + yy^*$ από το διάνυσμα y, χρησιμοποιούμε το λογισμικό matlab και υπολογίζουμε:

$$A - yy^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 9 \\ -1 & 9 & -5 \end{pmatrix}, \quad A + yy^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

Το φάσμα των αντίστοιχων πινάκων είναι:

$$\sigma(A) = \left\{\lambda_1(A) = 6.0640,\ \lambda_2(A) = 0.5646,\ \lambda_3(A) = -2.6286\right\}$$

$$\sigma\left(A - yy^*\right) = \left\{\lambda_1\left(A - yy^*\right) = 4.1288,\ \lambda_2\left(A - yy^*\right) = 0.1861,\ \lambda_3\left(A - yy^*\right) = -14.3150\right\}$$

$$\sigma\left(A + yy^*\right) = \left\{\lambda_1\left(A + yy^*\right) = 15.8964,\ \lambda_2\left(A + yy^*\right) = 2.2955,\ \lambda_3\left(A + yy^*\right) = -0.1918\right\}$$

Από τις τιμές που παρατίθενται για τον $A - yy^*$ στον ακόλουθο πίνακα επαληθεύονται οι ανισώσεις στις σχέσεις (2.1.3) και (2.1.4).

$A-yy^*$			
k=3	$\lambda_3\left(A-yy^*\right)$	$\lambda_2(A)$	$\lambda_1\left(A-yy^*\right)$
	-14,3150	0,5646	4,1288
k=3	$\lambda_3(A)$	$\lambda_2\left(A-yy^*\right)$	$\lambda_1(A)$
	-2,6286	0,1861	6,0640

Από τις τιμές που παρατίθενται για τον $A+yy^*$ στον ακόλουθο πίνακα επαληθεύονται οι ανισώσεις στις σχέσεις (2.1.5) και (2.1.6).

$A+yy^*$			
k=3	$\lambda_3\left(A+yy^*\right)$	$\lambda_2(A)$	$\lambda_1\left(A+yy^*\right)$
	-0,1918	0,5646	15,8964
k=3	$\lambda_3(A)$	$\lambda_2\left(A+yy^*\right)$	$\lambda_1(A)$
	-2,6286	2,2955	6,0640

□

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1 (Weyl), αποδεικνύεται ανίσωση για τη **ελάχιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα** $A-yy^*$, η οποία συγκρίνεται με τη ελάχιστη ιδιοτιμή του Ερμιτιανού πίνακα $A\in M_n(\mathbb{F})$.

Θεώρημα 2.5

Έστω $A\in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$, $i=1,2,\ldots,n$, διατεταγμένες όπως στη (2.1.1) και $y\in\mathbb{C}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε ισχύει

$$\lambda_{min}(A)-\|y\|_2^2\le\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{min}(A) \qquad (2.1.7)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τους Ερμιτιανούς πίνακες $A-yy^*$ και yy^*, αντίστοιχα, στη σχέση (2.1.2) του Θεωρήματος 2.1 (Weyl) και θέτουμε $k=n$. Τότε προκύπτει

$$\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)+\lambda_{min}\left(yy^*\right)\le\lambda_{min}\left(A-yy^*+yy^*\right)\le\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)+\lambda_{max}\left(yy^*\right)$$

Επειδή $\lambda_{min}\left(yy^*\right)=0$ και $\lambda_{max}\left(yy^*\right)=\|y\|_2^2$ λόγω της Πρότασης 1.28 η παραπάνω γράφεται

$$\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{min}\left(A\right)\le\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)+\|y\|_2^2$$

Συνδυάζοντας το αριστερό μέρος της παραπάνω ανισότητας $\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{min}\left(A\right)$ με το δεξιό μέρος της γραμμένο ως $\lambda_{min}\left(A\right)-\|y\|_2^2\le\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)$ προκύπτει το ζητούμενο.

□

Σχόλιο 2.6

Χρησιμοπιώντας το δεξιό μέρος της ανίσωσης (2.1.3) του Θεωρήματος 2.2 και για $k=n$, προκύπτει $\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{n-1}\left(A\right)$. Επειδή $\lambda_{min}\left(A\right)\le\lambda_{n-1}\left(A\right)$, η (2.1.7) δίνει πλησιέστερο άνω φράγμα για την $\lambda_{min}\left(A-yy^*\right)$.

Παράδειγμα 2.7

Έστω ο ακόλουθος Ερμιτιανός πίνακας

```
A =

   2.00000  -2.00000  -3.50000  -3.50000   2.00000  -3.50000
  -2.00000   0.00000  -0.50000   3.00000   3.50000  -2.00000
  -3.50000  -0.50000  -5.00000   3.50000  -0.50000   4.50000
  -3.50000   3.00000   3.50000   0.00000  -2.00000  -1.50000
   2.00000   3.50000  -0.50000  -2.00000   3.00000   7.00000
  -3.50000  -2.00000   4.50000  -1.50000   7.00000  -3.00000
```

και το διάνυσμα

```
y =
```

```
-0.66063 - 1.49443i
 0.34053 - 0.26523i
-0.50802 - 0.13868i
-1.46175 + 0.35734i
 0.12666 - 2.19050i
 0.03703 + 0.31499i
```

Ο διαταραγμένος πίνακας $A-yy^{*}$, που σημειώνεται Apm είναι

```
Apm =

 Columns 1 through 3:

  -0.66977 - 0.00000i  -2.17141 + 0.68413i  -4.04286 - 0.66758i
  -2.17141 - 0.68413i  -0.18631 - 0.00000i  -0.36379 - 0.18197i
  -4.04286 + 0.66758i  -0.36379 + 0.18197i  -5.27731 - 0.00000i
  -3.93165 + 2.42056i   3.59255 + 0.26602i   2.80697 + 0.38425i
  -1.18988 - 1.63640i   2.87587 + 0.71234i  -0.73943 - 1.13037i
  -3.00481 + 0.15276i  -1.92906 - 0.11709i   4.56249 + 0.15488i

 Columns 4 through 6:

  -3.93165 - 2.42056i  -1.18988 + 1.63640i  -3.00481 - 0.15276i
   3.59255 - 0.26602i   2.87587 - 0.71234i  -1.92906 + 0.11709i
   2.80697 - 0.38425i  -0.73943 + 1.13037i   4.56249 - 0.15488i
  -2.26440 - 0.00000i  -1.03209 + 3.15670i  -1.55843 - 0.47367i
  -1.03209 - 3.15670i  -1.81433 - 0.00000i   7.68529 + 0.12101i
  -1.55843 + 0.47367i   7.68529 - 0.12101i  -3.10059 - 0.00000i
```

Στον κώδικα 1 του Παραρτήματος δίνεται η συνάρτηση

```
function [leftb,eigApmn,eigAn] = smallest(A)
```

με την οποία υπολογίζονται τα μεγέθη αριστερό (leftb) και δεξί (eigAn) φράγμα της ελάχιστης ιδιοτιμής (eigApmn) του διαταραγμένου πίνακα $A-yy^{*}$, τα οποία είναι:

```
leftb = -22.145
eigApmn = -13.865
eigAn = -11.832
```

επαληθεύοντας τη σχέση (2.1.7)

□

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1 (Weyl), αποδεικνύεται ανίσωση για τη **μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα** $A-yy^*$, η οποία συγκρίνεται με τις δύο μεγελύτερες ιδιοτιμές του Ερμιτιανού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Θεώρημα 2.8

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$, $i=1,2,\ldots,n$, διατεταγμένες όπως στη (2.1.1) και $y \in \mathbb{C}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε ισχύει

$$\lambda_2(A) \le \lambda_{max}\left(A-yy^*\right) \le \lambda_{max}(A) \qquad (2.1.8)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τους Ερμιτιανούς πίνακες $A-yy^*$ και yy^*, αντίστοιχα, στη σχέση (2.1.2) του Θεωρήματος 2.1 (Weyl) και θέτουμε $k=1$. Τότε προκύπτει

$$\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)+\lambda_{min}\left(yy^*\right) \le \lambda_{max}\left(A-yy^*+yy^*\right) \le \lambda_{max}\left(A-yy^*\right)+\lambda_{max}\left(yy^*\right)$$

Επειδή $\lambda_{min}\left(yy^*\right)=0$ και $\lambda_{max}\left(yy^*\right)=\|y\|_2^2$ λόγω της Πρότασης 1.28 η παραπάνω γράφεται :

$$\lambda_{max}\left(A-yy^*\right) \le \lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}\left(A-yy^*\right)+\|y\|_2^2 \qquad (2.1.9)$$

Επιπλέον θέτοντας $k=3$ στη σχέση (2.1.3) του Θεωρήματος 2.2 προκύπτει

$$\lambda_3\left(A-yy^*\right) \le \lambda_2(A) \le \lambda_1\left(A-yy^*\right) \equiv \lambda_{max}\left(A-yy^*\right) \qquad (2.1.10)$$

Συνδυάζοντας το δεξιό μέρος της (2.1.10) με το αριστερό μέρος της (2.1.9) προκύπτει το ζητούμενο.

□

Παράδειγμα 2.9

Έστω ο ακόλουθος Ερμιτιανός πίνακας

```
A =

  -3.00000  -6.50000   2.00000  -4.50000  -2.00000  -7.00000
  -6.50000   6.00000  -0.50000   2.50000  -1.50000   4.00000
   2.00000  -0.50000   5.00000  -1.50000   7.50000  -2.00000
  -4.50000   2.50000  -1.50000   2.00000  -1.00000   2.00000
  -2.00000  -1.50000   7.50000  -1.00000  -2.00000  -7.50000
  -7.00000   4.00000  -2.00000   2.00000  -7.50000   6.00000
```

και το διάνυσμα

```
y =

  -0.6365362 - 1.2835994i
   0.0066798 + 0.2380517i
  -0.7497628 - 0.7914802i
  -0.3094465 + 0.5862004i
   1.7616962 - 0.0063339i
   0.4848912 - 1.5392038i
```

Ο διαταραγμένος πίνακας $A - yy^*$, που σημειώνεται Apm είναι

```
Apm =

 Columns 1 through 3:

  -5.05281 - 0.00000i  -6.19018 - 0.14295i   0.50681 - 0.45859i
  -6.19018 + 0.14295i   5.94329 - 0.00000i  -0.30658 + 0.17320i
   0.50681 + 0.45859i  -0.30658 - 0.17320i   3.81141 - 0.00000i
  -3.94453 + 0.77034i   2.36252 - 0.07758i  -1.26805 + 0.68443i
  -0.88675 - 2.26534i  -1.51026 + 0.41942i   8.81584 - 1.39910i
  -8.66707 - 1.60216i   4.36317 + 0.12571i  -2.85470 - 1.53782i

 Columns 4 through 6:

  -3.94453 - 0.77034i  -0.88675 + 2.26534i  -8.66707 + 1.60216i
   2.36252 + 0.07758i  -1.51026 - 0.41942i   4.36317 - 0.12571i
  -1.26805 - 0.68443i   8.81584 + 1.39910i  -2.85470 + 1.53782i
   1.56061 - 0.00000i  -0.45114 - 1.03075i   3.05233 + 0.19206i
  -0.45114 + 1.03075i  -5.10361 - 0.00000i  -8.36398 - 2.70854i
   3.05233 - 0.19206i  -8.36398 + 2.70854i   3.39573 - 0.00000i
```

Στον κώδικα 2 του Παραρτήματος δίνεται η συνάρτηση

```
function [eigA2,eigApm1,eigA1]=largest(A)
```

με την οποία υπολογίζονται τα μεγέθη αριστερό (eigA2) και δεξί (eigA1) φράγμα της μέγιστης ιδιοτιμής (eigApm1) του διαταραγμένου πίνακα $A - yy^*$, τα οποία είναι:

```
eigA2 =  8.5559
eigApm1 =  19.643
eigA1 =  19.658
```

επαληθεύοντας τη σχέση (2.1.8)

□

Στη συνέχεα διατυπώνεται το γνωστό ως Cauchy's Interlacing Theorem ή ως Inclusion Principle, το οποίο αναφέρεται στη διάταξη των ιδιοτιμών του Ερμιτιανού πίνακα και ενός κυρίου υποπίνακά του (βλέπε Ορισμό 1.1). Ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει τις αντίστοιχες αποδείξεις για το πρώτο και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος που ακολουθεί [7, Theorem 1] και [5, Theorem 4.3.15].

Θεώρημα 2.10

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, διατεταγμένες όπως στη (2.1.1).

i. Αν $B \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ ένας κύριος υποπίνακας του $A \in M_n(\mathbb{F})$ με ιδιοτιμές $\lambda_i(B)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, διατεταγμένες όπως στη (2.1.1), τότε η σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές των πινάκων A, B είναι:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A) \equiv \lambda_n(A) \le \lambda_{n-1}(B) \le \lambda_{n-1}(A) \le \lambda_{n-2}(B) \le \lambda_{n-2}(A) \le \cdots \\ \cdots \le \lambda_1(B) \le \lambda_1(A) \equiv \lambda_{\max}(A) \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

ii. Αν ο κύριος υποπίνακας $B_m \in M_m(\mathbb{F})$ με $1 \le m < n$, που απομένει μετά τη διαγραφή των $n-m$ γραμμών και αντίστοιχων στηλών του A, τότε για τις ιδιοτιμές των πινάκων A, B_m για $n-m+1 \le k \le n$ ισχύει:

$$\lambda_k(A) \le \lambda_{k-(n-m)}(B_m) \le \lambda_{k-(n-m)}(A) \tag{2.1.12}$$

2.2 Φράγματα για την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα

Στην πρόταση που ακολουθεί προσδιορίζεται το αριθμητικό πεδίο ενός ειδικής μορφής Ερμιτιανού πίνακα, αποτέλεσμα ιδιαίτερα χρήσιμο στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.13.

Πρόταση 2.11

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, και ο Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta \end{pmatrix} - \left(V^* y\right)\left(V^* y\right)^*, \tag{2.2.1}$$

όπου $V \in M_n(\mathbb{F})$ ένας ορθομοναδιαίος πίνακας και $y \in \mathbb{C}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα.

Έστω $B \in M_2(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας τέτοιος ώστε

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

όπου $y_{1:(n-1)}$ είναι η προβολή του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$ πάνω στα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ και $\hat{y}_n$ η αντίστοιχη $n-$συντεταγμένη της προβολής, όπως αυτές οι ποσότητες ορίστηκαν στις (1.3.3) και (1.3.4) του Ορισμού 1.11. Τότε

i) Οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι:

$$\lambda_1(B) \equiv \lambda_{\max}(B) = \frac{\alpha + \beta - \|y\|_2^2 + \sqrt{\Delta}}{2} \tag{2.2.3}$$

$$\lambda_2(B) \equiv \lambda_{\min}(B) = \frac{\alpha + \beta - \|y\|_2^2 - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{2.2.4}$$

όπου $\Delta = \left(\left(\alpha - \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\right) - \left(\beta - \left|\hat{y}_n\right|^2\right)\right)^2 + 4\left|\hat{y}_n\right|^2 \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2$ (2.2.5)

ii) $F(A) = \left[\lambda_{\min}(B),\ \alpha\right]$

iii) $\lambda_{\min}(A) \equiv \lambda_{\min}(B)$ και $\lambda_{\max}(A) \equiv \alpha$

Απόδειξη

i) Ο 2×2 Ερμιτιανός πίνακας

$$B=\begin{pmatrix} \alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2 & -\overline{\hat{y}}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 \\ -\hat{y}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 & \beta-\left|\hat{y}_n\right|^2 \end{pmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda)&=\lambda^2-\left[\alpha+\beta-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2-\left|\hat{y}_n\right|^2\right]\cdot\lambda+\left(\alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\right)\left(\beta-\left|\hat{y}_n\right|^2\right)-\hat{y}_n\cdot\overline{\hat{y}}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\\ &=\lambda^2-\left[\alpha+\beta-\|y\|_2^2\right]\cdot\lambda+\alpha\beta-\alpha\left|\hat{y}_n\right|^2-\beta\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2,\end{aligned}$$

επειδή $\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2+\left|\hat{y}_n\right|^2=\|y\|^2$ και $\hat{y}_n\cdot\overline{\hat{y}}_n=\left|\hat{y}_n\right|^2$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\chi_B(\lambda)=0$ είναι

$$\begin{aligned}\Delta_B&=\left(\left(\alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\right)+\left(\beta-\left|\hat{y}_n\right|^2\right)\right)^2-4\left(\left(\alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\right)\left(\beta-\left|\hat{y}_n\right|^2\right)-\left|\hat{y}_n\right|^2\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\right)\\ &=\left(\left(\alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\right)-\left(\beta-\left|\hat{y}_n\right|^2\right)\right)^2+4\left|\hat{y}_n\right|^2\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2>0\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ρίζες της $\chi_B(\lambda)=0$ είναι δυο πραγματικοί αριθμοί που ταθτίζονται με τις ιδιοτιμές του B και δίνονται από

$$\lambda_1(B)=\frac{\alpha+\beta-\|y\|_2^2+\sqrt{\Delta_B}}{2},\quad \lambda_2(B)=\frac{\alpha+\beta-\|y\|_2^2-\sqrt{\Delta_B}}{2}$$

επαληθεύοντας τις (2.2.3)-(2.2.4) και τη (2.2.5).
Προφανώς από τις (2.2.3)-(2.2.4) προκύπτει άμεσα ότι ισχύει $\lambda_2(B)<\lambda_1(B)$.

ii) Θεωρούμε $Q_1\in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$ ορθομοναδιαίο πίνακα τέτοιον ώστε

$$Q_1\cdot y_{1:(n-1)}=\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e_{n-1} \tag{2.2.6}$$

με e_{n-1} το $(n-1)\times 1$ διάνυσμα της κανονικής βάσης του $M_{(n-1)\times 1}(\mathbb{R})$ δηλαδή $e_{n-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T$.

Επιπλέον ορίζουμε τον πίνακα $Q\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ως εξής:

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

Ο πίνακας Q στη (2.2.7) είναι ορθομοναδιαίος επειδή ο Q_1 είναι ορθομοναδιαίος και ισχύει:

$$Q^*Q=\begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=I_n$$

Τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα του ορθομοναδιαία αναλλοίωτου του αριθμητικού πεδίου του πίνακα (βλέπε, σχέση (1.6.4), Πρόταση 1.30), για τον ορθομοναδιαίο πίνακα Q, ισχύει ότι

$$F\left(Q^{*}AQ\right)=F\left(A\right). \tag{2.2.8}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.2.1), (2.2.6) και (2.2.7) μπορούμε να γράψουμε:

$$Q^{*}AQ=\begin{pmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} \alpha I_{n-1} & O \\ O & \beta \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^{*}_{1:(n-1)} & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} Q_1^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha I_{n-1}-y_{1:(n-1)}\cdot y^{*}_{1:(n-1)} & -y_{1:(n-1)}\cdot\bar{\hat{y}}_n \\ -\hat{y}_n\cdot y^{*}_{1:(n-1)} & \beta-\hat{y}_n\cdot\bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Q_1^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha\cdot Q_1-Q_1\cdot y_{1:(n-1)}\cdot y^{*}_{1:(n-1)} & -Q_1\cdot y_{1:(n-1)}\cdot\bar{\hat{y}}_n \\ -\hat{y}_n\cdot y^{*}_{1:(n-1)} & \beta-\left|\hat{y}_n\right|^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Q_1^{*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha\cdot Q_1\cdot Q_1^{*}-Q_1\cdot y_{1:(n-1)}\cdot y^{*}_{1:(n-1)}\cdot Q_1^{*} & -Q_1\cdot y_{1:(n-1)}\cdot\bar{\hat{y}}_n \\ -\hat{y}_n\cdot y^{*}_{1:(n-1)}\cdot Q_1^{*} & \beta-\left|\hat{y}_n\right|^2 \end{pmatrix}\overset{\left(Q_1Q_1^{*}=I_{n-1}\right)}{=}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha\cdot I_{n-1}-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e_{n-1}\cdot\left\|y^{*}_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e^{*}_{n-1} & -\bar{\hat{y}}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e_{n-1} \\ -\hat{y}_n\cdot\left\|y^{*}_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e^{*}_{n-1} & \beta-\left|\hat{y}_n\right|^2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha\cdot I_{n-1}-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot e_{n-1}\cdot e^{*}_{n-1} & -\bar{\hat{y}}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e_{n-1} \\ -\hat{y}_n\cdot\left\|y^{*}_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e^{*}_{n-1} & \beta-\left|\hat{y}_n\right|^2 \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

Στη (2.2.9) ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας $e_{n-1}\cdot e^{*}_{n-1}$ είναι

$$e_{n-1}\cdot e^{*}_{n-1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

οπότε ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας $\alpha\cdot I_{n-1}-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot e_{n-1}\cdot e^{*}_{n-1}$ γράφεται

$$\alpha\cdot I_{n-1}-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot e_{n-1}\cdot e_{n-1}^{*}=$$

$$=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha&0&\cdots&&0\\0&\alpha&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&&\\&&&\alpha&0\\0&&&0&\alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\end{pmatrix}\qquad(2.2.10)$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα της (2.2.10) στη (2.2.9) προκύπτει

$$Q^{*}AQ=\begin{pmatrix}\alpha\cdot I_{n-1}-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot e_{n-1}\cdot e_{n-1}^{*}&-\overline{\hat{y}}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2\cdot e_{n-1}\\-\hat{y}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}^{*}\right\|_2\cdot e_{n-1}^{*}&\beta-\left|\hat{y}_n\right|^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha&0&\cdots&0&0&0\\0&\alpha&&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&&\ddots&&&\\0&\cdots&&\alpha&0&0\\0&\cdots&&0&\alpha-\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2&-\overline{\hat{y}}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2\\0&\cdots&&0&-\hat{y}_n\cdot\left\|y_{1:(n-1)}^{*}\right\|_2&\beta-\left|\hat{y}_n\right|^2\end{pmatrix}\overset{(2.2.2)}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha\cdot I_{n-2}&O\\O&B\end{pmatrix}$$

Από την παραπάνω μορφή του πίνακα $Q^{*}AQ$ προκύπτει ότι ο πίνακας αυτός αποτελεί **ευθύ άθροισμα** των πινάκων $\alpha\cdot I_{n-2}$ και του πίνακα B που θεωρήθηκε στη (2.2.2), δηλαδή

$$Q^{*}AQ=\left(\alpha\cdot I_{n-2}\right)\oplus\left(B\right).\qquad(2.2.11)$$

Από τη μορφή του πίνακα $Q^{*}AQ$ στη (2.2.11), σύμφωνα με την 3^{η} ιδιότητα της Πρότασης 1.30 στην (1.6.3), το αριθμητικό πεδίο του $Q^{*}AQ$ ισούται με

$$F\left(Q^{*}AQ\right)=F\left[\left(\alpha\cdot I_{n-2}\right)\oplus\left(B\right)\right]=Co\left\{F\left(\alpha\cdot I_{n-2}\right)\cup F\left(B\right)\right\}.\qquad(2.2.12)$$

Ο πίνακας $\alpha \cdot I_{n-2}$ έχει μόνο μια ιδιοτιμή τον $\alpha \in \mathbb{R}$, άρα

$$F\left(\alpha \cdot I_{n-2}\right) = \{\alpha\}. \tag{2.2.13}$$

Επιπρόσθετα ο 2×2 Ερμιτιανός πίνακας B έχει πραγματικές ιδιοτιμές, οι οποίες υπολογίστηκαν στο (i) της Πρότασης 2.11, συνεπώς το αριθμητικό πεδίο του B, από την (1.6.2), ισούται με

$$F(B) = \left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right] \subset \mathbb{R}. \tag{2.2.14}$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες από τη (2.2.13)-(2.2.14) στη (2.2.12) και συνδυάζοντάς τη με τη (2.2.8), προκύπτει

$$F(A) = F\left(Q^* A Q\right) = \{\alpha\} \cup \left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right] \tag{2.2.15}$$

Επειδή $\lambda_2(B) < \lambda_1(B)$, πρέπει να βρούμε τη θέση του α στον πραγματικό άξονα σχετικά με το διάστημα $\left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right]$προκειμένου να ορίσουμε την ένωση $\{\alpha\} \cup \left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right]$.

Αξιοποιώντας τη μορφή του πίνακα B στη (2.2.2), εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.8 και το δεξιό τμήμα της ανίσωσης στη (2.1.8) έχουμε:

$$\lambda_{\max}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\right) \equiv \lambda_{\max}(B)$$
$$\equiv \lambda_1(B) \le \lambda_{\max}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right)$$

Επειδή από την υπόθεση $\alpha > \beta$ ισχύει $\lambda_{\max}\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) = \alpha$, οπότε η παραπάνω ανίσωση γράφεται

$$\lambda_1(B) \equiv \lambda_{\max}(B) \le \alpha \tag{2.2.16}$$

Συνδυάζοντας τη (2.2.15) με τη (2.2.16) μπορούμε να γράψουμε $F(A) = F\left(Q^* A Q\right) = \{\alpha\} \cup \left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right] = \left[\lambda_2(B),\ \alpha\right] \equiv \left[\lambda_{\min}(B), \alpha\right]$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του (ii).

iii) Επειδή ο $n \times n$ πίνακας A είναι Ερμιτιανός, το αριθμητικό του πεδίο, από την (1.6.2), είναι $F(A) = \left[\lambda_{\min}(A),\ \lambda_{\max}(A)\right]$, το οποίο οδηγεί άμεσα στην απόδειξη του (iii) λόγω του $F(A) = \left[\lambda_{\min}(B), \alpha\right]$.

□

Σχόλιο 2.12

Στην Πρόταση 2.11 υπολογίζεται το αριθμητικό πεδίο του ειδικού $n \times n$ Ερμιτιανού πίνακα A της (2.2.1) από τον $\alpha \in \mathbb{R}$, που βρίσκεται στο διαγώνιο πίνακα του A, καθώς και από την ελάχιστη ιδιοτιμή του 2×2 πίνακα B στη (2.2.2), όπως αυτή υπολογίστηκε στη (2.2.4), η οποία εξαρτάται από τους αριθμούς α, β και από το μέτρο του διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$.

□

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το βασικό θεώρημα, το οποίο προσδιορίζει αυστηρότερα φράγματα για την ελάχιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα από αυτά που προσδιορίστηκαν στο Θεώρημα 2.5.

Θεώρημα 2.13

Έστω Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, με ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, διατεταγμένες όπως στη (2.1.1) και ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$ με στήλες τα ιδιοδιανύσματα v_i αντίστοιχα των ιδιοτιμών $\lambda_i(A)$ του A. Έστω οι Ερμιτιανοί πίνακες $M \in M_n(\mathbb{F})$ και $L, U \in M_2(\mathbb{F})$ με

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) \cdot I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} - \left(V^* y\right)\left(V^* y\right)^* \tag{2.2.17}$$

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_n(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left\| y_{1:(n-1)} \right\|_2 \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\| y_{1:(n-1)} \right\|_2 & \overline{\hat{y}_n} \end{pmatrix} \tag{2.2.18}$$

και

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_n(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{y}_{n-1} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\hat{y}}_{n-1} & \overline{\hat{y}}_n \end{pmatrix}, \tag{2.2.19}$$

όπου $y_{1:(n-1)}$ είναι η προβολή του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$ πάνω στα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ και $\hat{y}_{n-1}$ η αντίστοιχη $(n-1)-$ συντεταγμένη της προβολής καθώς και $\hat{y}_n$ η αντίστοιχη $n-$συντεταγμένη της προβολής $y_{1:n}$, όπως αυτές οι ποσότητες ορίστηκαν στις (1.3.3) και (1.3.4) του Ορισμού 1.11. Τότε

i) Οι ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα M είναι:

$$\lambda_{\min}(M)=\lambda_{\min}(L)=\frac{\lambda_{n-1}(A)+\lambda_n(A)-\|y\|_2^2-\sqrt{\Delta_L}}{2}, \tag{2.2.20}$$

$$\lambda_{\max}(M)=\lambda_{\max}(L)=\frac{\lambda_{n-1}(A)+\lambda_n(A)-\|y\|_2^2+\sqrt{\Delta_L}}{2} \tag{2.2.21}$$

όπου

$$\Delta_L=\left(\left(\lambda_{n-1}(A)-\|y_{1:(n-1)}\|_2^2\right)-\left(\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2\right)\right)^2+4|\hat{y}_n|^2\|y_{1:(n-1)}\|_2^2$$

ii) $$\lambda_n(A)-\|y\|_2^2\le\lambda_{\min}(L)\le\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right) \tag{2.2.22}$$

iii) Οι ιδιοτιμές του 2×2 πίνακα U είναι:

$$\lambda_2(U)\equiv\lambda_{\min}(U)=\frac{\lambda_{n-1}(A)+\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2-|\hat{y}_{n-1}|^2-\sqrt{\Delta_U}}{2}, \tag{2.2.23}$$

$$\lambda_1(U)\equiv\lambda_{\max}(U)=\frac{\lambda_{n-1}(A)+\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2-|\hat{y}_{n-1}|^2+\sqrt{\Delta_U}}{2} \tag{2.2.24}$$

όπου

$$\Delta_U=\left(\lambda_{n-1}(A)-\lambda_n(A)+|\hat{y}_n|^2-|\hat{y}_{n-1}|^2\right)^2+4|\hat{y}_n|^2|\hat{y}_{n-1}|^2$$

iv) $$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{\min}(U)\le\lambda_n(A) \tag{2.2.25}$$

Υπενθυμίζεται ότι $\lambda_n(A)\equiv\lambda_{\min}(A)$.

Απόδειξη

i) Οι πίνακες M, L έχουν τη μορφή των πινάκων A, B που μελετήθηκαν στην Πρόταση 2.11 με $\alpha=\lambda_{n-1}(A)$ και $\beta=\lambda_n(A)$. Άρα οι ισότητες των ιδιοτιμών στις (2.2.20)-(2.2.21) προκύπτουν άμεσα από τις (2.2.3)-(2.2.4).

ii) Έστω $A-yy^*$ μια διαταραχή του πίνακα A με το τυχαίο διάνυσμα $y\in\mathbb{C}^n$ και έστω $z\in\mathbb{C}^n$ ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A-yy^*$, το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ του πίνακα $A-yy^*$. Τότε από τον ορισμό της ιδιοτιμής ενός πίνακα, και επειδή $\|z\|_2^2=z^*z=1$ παίρνουμε:

$$\left(A-yy^*\right)z=\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)z\Rightarrow$$

$$z^*\left(A-yy^*\right)z=z^*\cdot\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)z\Rightarrow$$

$$z^*\left(A-yy^*\right)z=\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)z^*z\Rightarrow$$

$$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)=z^*Az-z^*yy^*z \tag{2.2.26}$$

Διαμερίζουμε το διαγώνιο πίνακα Λ των ιδιοτιμών του A και τον αντίστοιχο πίνακα V των ιδιοδιανυσμάτων του ως εξής:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix}, \tag{2.2.27}$$

όπου

$$\Lambda_1 = \operatorname{diag}\left(\lambda_1(A) \quad \lambda_2(A) \quad \cdots \quad \lambda_{n-1}(A)\right),$$
$$V = \left(v_1 \quad \cdots \quad v_{n-1} \quad v_n\right) = \left(V_1 \ \vdots \ v_n\right), \tag{2.2.28}$$
$$V_1 = \left(v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{n-1}\right).$$

Από την ισότητα της διαγωνοποίησης του A, παίρνουμε:

$$A = V \cdot \Lambda \cdot V^* = \left(V_1 \ \vdots \ v_n\right) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^* \\ \cdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \tag{2.2.29}$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα A από τη σχέση (2.2.29) στη (2.2.26) προκύπτει:

$$\lambda_{\min}\left(A - yy^*\right) = z^* \cdot \left(V_1 \ \vdots \ v_n\right) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^* \\ \cdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \cdot z - z^* yy^* z \Rightarrow$$

$$\lambda_{\min}\left(A - yy^*\right) = z^* \cdot \left(V_1 \ \vdots \ v_n\right) \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^* \\ \cdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \cdot z - \left(y^* z\right)^* y^* z \Rightarrow$$

$$\lambda_{\min}\left(A - yy^*\right) = z^* \cdot V \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^* \\ \cdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \cdot z - \left(y^* z\right)^* \left(y^* z\right) \Rightarrow$$

$$\lambda_{\min}\left(A - yy^*\right) = \left(V^* z\right)^* \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1^* \\ \cdots \\ v_n^* \end{pmatrix} \cdot z - \left(y^* z\right)^* \left(y^* z\right) \tag{2.2.30}$$

Υπολογίζουμε το διάνυσμα $V^* \mathbf{z}$ στη (2.2.30), το οποίο από τη (2.2.28) γράφεται:

$$V^* z = \left(v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n\right)^* z = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} v_1^* z \\ v_2^* z \\ \vdots \\ v_n^* z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^* z \\ \cdots \\ v_n^* z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \tag{2.2.31}$$

όπου το διάνυσμα $V_1^* z = z_{1:(n-1)}$ και $\hat{z}_n = v_n^* z \in \mathbb{C}$, (βλέπε, Ορισμό 1.11).

Όμοια με παραπάνω για ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ το διάνυσμα $V^* \mathbf{y}$ από τη (2.2.28) γράφεται:

$$V^*y = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^* y = \begin{pmatrix} V_1^* y \\ \cdots \\ v_n^* y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \qquad (2.2.32)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο y^*z στη (2.2.30), χρησιμοποιώντας τις ισότητες από τις (2.2.31) και (2.2.32), το οποίο γράφεται

$$y^*z = y^* I_n z = y^* V V^* z = \left(V^* y\right)^* \left(V^* z\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^*_{1:(n-1)} & \vdots & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \qquad (2.2.33)$$

Το διάνυσμα V^*z είναι μοναδιαίο λόγω της (1.2.2) και του γεγονότος ότι το z επιλέχθηκε μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα, συνεπώς ισχύει:

$$\left\| V^* z \right\|_2^2 = \left(V^* z\right)^* \left(V^* z\right) = z^* V V^* z = z^* I_n z = z^* z = \|z\|_2^2 = 1 \qquad (2.2.34)$$

Έτσι η σχέση (2.2.30), λόγω των (2.2.31) και (2.2.33), γράφεται:

$$\lambda_{\min}\left(A - yy^*\right) = \left(V^* z\right)^* \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \left(V^* z\right) - \left(y^* z\right)^* \left(y^* z\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} z^*_{1:(n-1)} & \vdots & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} z^*_{1:(n-1)} & \vdots & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^*_{1:(n-1)} & \vdots & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \qquad (2.2.35)$$

Στην προηγούμενη ισότητα (2.2.35) θέτουμε:

$$\Pi = \begin{pmatrix} z^*_{1:(n-1)} & \vdots & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^*_{1:(n-1)} & \vdots & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \cdots \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \qquad (2.2.36)$$

Η σχέση (2.2.35) λόγω της (2.2.36) γράφεται:

$$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)=\left(z^*_{1:(n-1)} \;\vdots\; \bar{\hat{z}}_n\right)\cdot\begin{pmatrix}\Lambda_1 & O\\ O & \lambda_n(A)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}-\Pi$$

$$=\left(z^*_{1:(n-1)}\cdot\Lambda_1 \;\vdots\; \bar{\hat{z}}_n\cdot\lambda_n(A)\right)\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}-\Pi$$

$$=z^*{}_{1:(n-1)}\cdot\Lambda_1\cdot z_{1:(n-1)}+\lambda_n(A)\cdot\left|\hat{z}_n\right|^2-\Pi$$

$$=\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot\frac{z^*{}_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\cdot\Lambda_1\cdot\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}+\lambda_n(A)\cdot\left|\hat{z}_n\right|^2-\Pi \tag{2.2.37}$$

Στην τελευταία σχέση (2.2.37), σύμφωνα με τον Ορισμό 1.29, ο αριθμός $\frac{z^*{}_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\cdot\Lambda_1\cdot\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)$ ανήκει στο αριθμητικό πεδίο του πίνακα Λ_1, επειδή

$$\frac{z^*{}_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\cdot\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)=\frac{\left(z^*_{1:(n-1)}\right)\left(z_{1:(n-1)}\right)}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2^2}=\frac{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2^2}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2^2}=1,$$

συνεπώς μπορούμε να σημειώσουμε:

$$\frac{z^*{}_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\cdot\Lambda_1\cdot\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)\in F\left(\Lambda_1\right). \tag{2.2.38}$$

Επειδή ο Λ_1 είναι διαγώνιος πραγματικός πίνακας, σύμφωνα με την (1.6.2) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$F\left(\Lambda_1\right)=\left[\lambda_{n-1}(A),\ \lambda_{\max}(A)\right]\subset\mathbb{R}$$

οπότε η (2.2.38) γράφεται

$$\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)^*\cdot\Lambda_1\cdot\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)\in F\left(\Lambda_1\right)=\left[\lambda_{n-1}(A),\ \lambda_{\max}(A)\right]\subset\mathbb{R},$$

Συνεπώς

$$\lambda_{n-1}(A)\le\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)^*\cdot\Lambda_1\cdot\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)\le\lambda_{\max}(A)\equiv\lambda_1(A). \tag{2.2.39}$$

Έτσι η σχέση (2.2.37) λόγω της (2.2.39), μπορεί να γραφεί:

$$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)=$$

$$=\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot\left(\frac{z_{1:n-1}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)^*\cdot\Lambda_1\cdot\left(\frac{z_{1:(n-1)}}{\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2}\right)+\lambda_n\left(A\right)\cdot\left|\hat{z}_n\right|^2-\Pi$$

$$\geq\left\|z_{1:(n-1)}\right\|_2^2\cdot\lambda_{n-1}\left(A\right)+\lambda_n\left(A\right)\cdot\left|\hat{z}_n\right|^2-\Pi$$

$$=z_{1:(n-1)}^*\cdot I_{n-1}\cdot z_{1:(n-1)}\cdot\lambda_{n-1}\left(A\right)+\lambda_n\left(A\right)\cdot\left|\hat{z}_n\right|^2-\Pi$$

$$=\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{n-1}\left(A\right)\cdot I_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_n\left(A\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}-\Pi \qquad (2.2.40)$$

Αντικαθιστώντας τον αριθμό Π από τη (2.2.36) στη (2.2.40), παίρνουμε:

$$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)\geq\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{n-1}\left(A\right)\cdot I_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_n\left(A\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}-\Pi=$$

$$=\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_{n-1}\left(A\right)\cdot I_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_n\left(A\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{y}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{y}}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\lambda_{n-1}\left(A\right)\cdot I_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_n\left(A\right)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}y_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{y}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.2.33)}{=}\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\lambda_{n-1}\left(A\right)\cdot I_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_n\left(A\right)\end{pmatrix}-\left(V^*y\right)\left(V^*y\right)^*\right]\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.2.17)}{=}\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}^* & \vdots & \bar{\hat{z}}_n\end{pmatrix}\cdot M\cdot\begin{pmatrix}z_{1:(n-1)}\\ \cdots\\ \hat{z}_n\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.2.31)}{=}\left(V^*z\right)^*\cdot M\cdot\left(V^*z\right)$$

έτσι καταλήγουμε

$$\left(V^*z\right)^* \cdot M \cdot \left(V^*z\right) \le \lambda_{min}\left(A - yy^*\right) \tag{2.2.41}$$

Επειδή ο πίνακας M έχει τη μορφή του πίνακα στη (2.2.1) της Πρότασης 2.11 εφαρμόζοντας το (ii) της Πρότασης 2.11 συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$F(M) = \left[\lambda_{min}(L),\ \lambda_{n-1}(A)\right] \tag{2.2.42}$$

Εφόσον το διάνυσμα V^*z είναι μοναδιαίο (βλέπε (2.2.34)) ο αριθμός $\left(V^*z\right)^* \cdot M \cdot \left(V^*z\right)$ ανήκει στο αριθμητικό πεδίο του πίνακα M, άρα λόγω της (2.2.42) προκύπτει

$$\lambda_{min}(L) \le \left(V^*z\right)^* \cdot M \cdot \left(V^*z\right) \le \lambda_{n-1}(A) \tag{2.2.43}$$

Συνδυάζοντας το αριστερό μέρος της ανισότητας στη (2.2.43) με τη (2.2.41), αποδεικνύεται το δεξιό μέρος της ανισότητας στη (2.2.22).

Επειδή ο πίνακας V είναι ορθομοναδιαίος χρησιμοποιώντας την (1.2.2) υπολογίζουμε

$$\begin{pmatrix} \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 & \overline{\hat{y}_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2 + \left|\hat{y}_n\right|^2 = \|y\|_2^2 \tag{2.2.44}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.5 και το αριστερό μέρος της ανιότητας (2.1.7), λόγω της μορφής του Ερμιτιανού πίνακα L και της (2.2.44), μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_n(A) - \|y\|_2^2 \le \lambda_{min}(L) \tag{2.2.45}$$

το οποίο αποτελεί το αριστερό μέρος της ανισότητας στη (2.2.22) ολοκληρώνοντας την απόδειξή της.

iii) Από τη διαγωνοποίηση του πίνακα A στη (2.2.29) καταλήγουμε

$$V^*AV = \Lambda \tag{2.2.46}$$

και από τη διαταραχή του A με τον πίνακα yy^*, $y \in \mathbb{C}^n$, μπορούμε να γράψουμε:

$$V^*\left(A - yy^*\right)V = V^*AV - V^*yy^*V = \Lambda - \left(V^*y\right)\left(V^*y\right)^* \tag{2.2.47}$$

Αντικαθιστώντας στη (2.2.47) το διάνυσμα V^*y από τη (2.2.32) και τον πίνακα Λ από τη (2.2.27) έχουμε:

$$\begin{aligned} V^*\left(A - yy^*\right)V &= \Lambda - \left(V^*y\right)\left(V^*y\right)^* = \\ &= \Lambda - \begin{pmatrix} v_1^*y \\ \vdots \\ v_n^*y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^*v_1 & \cdots & y^*v_n \end{pmatrix} = \\ &= \Lambda - \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\hat{y}_1} & \cdots & \overline{\hat{y}_n} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$
=\Lambda-\begin{pmatrix}
|\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\overline{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_1\overline{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_1\overline{\hat{y}}_n \\
\hat{y}_2\overline{\hat{y}}_1 & |\hat{y}_2|^2 & \cdots & \hat{y}_2\overline{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_2\overline{\hat{y}}_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hat{y}_{n-1}\overline{\hat{y}}_1 & \hat{y}_{n-1}\overline{\hat{y}}_2 & \cdots & |\hat{y}_{n-1}|^2 & \hat{y}_{n-1}\overline{\hat{y}}_n \\
\hat{y}_n\overline{\hat{y}}_1 & \hat{y}_n\overline{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_n\overline{\hat{y}}_{n-1} & |\hat{y}_n|^2
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\lambda_1(A)-|\hat{y}_1|^2 & \cdots & -\hat{y}_1\overline{\hat{y}}_{n-1} & -\hat{y}_1\overline{\hat{y}}_n \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-\hat{y}_{n-1}\overline{\hat{y}}_1 & \cdots & \lambda_{n-1}(A)-|\hat{y}_{n-1}|^2 & -\hat{y}_{n-1}\overline{\hat{y}}_n \\
-\hat{y}_n\overline{\hat{y}}_1 & \cdots & -\hat{y}_n\overline{\hat{y}}_{n-1} & \lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2
\end{pmatrix} \qquad (2.2.48)
$$

Όπως παρατηρούμε ο υποπίνακας στην κάτω δεξιά γωνία του πίνακα στη (2.2.48) είναι ο πίνακας U όπως αυτος ορίστηκε στη (2.2.19) όταν γίνουν οι πράξεις στα διανύσματα οπότε αυτός γράφεται:

$$
U=\begin{pmatrix}
\lambda_{n-1}(A)-|\hat{y}_{n-1}|^2 & -\hat{y}_{n-1}\cdot\overline{\hat{y}}_n \\
-\hat{y}_n\cdot\overline{\hat{y}}_{n-1} & \lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2
\end{pmatrix} \qquad (2.2.49)
$$

Ο πίνακας στη (2.2.49), σύμφωνα με το Σχόλιο 1.20, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$
\chi_U(\lambda)=\lambda^2-\left[\operatorname{tr}(U)\right]\lambda+\det(U)
$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\chi_U(\lambda)=0$ είναι

$$
\begin{aligned}
\Delta_U &= \left(\left(\lambda_{n-1}(A)-|\hat{y}_{n-1}|^2\right)+\left(\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2\right)\right)^2 \\
&\quad -4\left(\left(\lambda_{n-1}(A)-|\hat{y}_{n-1}|^2\right)\left(\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2\right)-|\hat{y}_n|^2|\hat{y}_{n-1}|^2\right) \\
&= \left(\lambda_{n-1}(A)-\lambda_n(A)+|\hat{y}_n|^2-|\hat{y}_{n-1}|^2\right)^2+4|\hat{y}_n|^2|\hat{y}_{n-1}|^2>0
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, οι πραγματικές ρίζες της $\chi_U(\lambda)=0$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα U, οι οποίες επαληθεύουν τις (2.2.23) και (2.2.24) και δίνονται ως ακολούθως:

$$
\lambda_2(U)\equiv\lambda_{\min}(U)=\frac{\lambda_{n-1}(A)+\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2-|\hat{y}_{n-1}|^2-\sqrt{\Delta_U}}{2}
$$

$$
\lambda_1(U)\equiv\lambda_{\max}(U)=\frac{\lambda_{n-1}(A)+\lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2-|\hat{y}_{n-1}|^2+\sqrt{\Delta_U}}{2}
$$

iv) Οι πίνακες $A-yy^*$ και $V^*\left(A-yy^*\right)V$ είναι όμοιοι, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.8, οπότε έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (βλέπε, Πρότασης 1.24, ιδιότητα 7c), δηλαδή ισχύει:

$$
\lambda_i\left(V^*\left(A-yy^*\right)V\right)\equiv\lambda_i\left(A-yy^*\right),\ i=1,2,\ldots,n \qquad (2.2.50)
$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.10 (ii) στον πίνακα $V^*\left(A-yy^*\right)V$ της (2.2.48) για $k=n$ και $m=2$ απομένει ο υποπίνακας U και η ανισότητα στη (2.1.12) γράφεται:

$$\lambda_n\left(V^*\left(A-yy^*\right)V\right)\le\lambda_2\left(U\right)\le\lambda_2\left(V^*\left(A-yy^*\right)V\right) \tag{2.2.51}$$

Συνδυάζοντας τη (2.2.50) με τη (2.2.51) και $\lambda_1\left(U\right)>\lambda_2\left(U\right)$ η (2.2.51) γράφεται:

$$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{\min}\left(U\right)\le\lambda_2\left(A-yy^*\right) \tag{2.2.52}$$

Όπως παρατηρούμε το αριστερό μέρος της παραπάνω ανισότητας, μας εξασφαλίζει το αριστερό μέρος της ανίσωσης στη (2.2.25).
Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 2.5 και το δεξιό μέρος της ανισότητας (2.1.7) λόγω της μορφής του Ερμιτιανού πίνακα U μπορούμε να γράψουμε $\lambda_{\min}\left(U\right)\le\lambda_n\left(A\right)$.
Η τελευταία ανισότητα σε συνδυασμό με την (2.2.52) ολοκληρώνει την απόδειξη στη (2.2.25).

□

Σχόλιο 2.14

i) Με το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.13 δίνεται η δυνατότητα εντοπισμού «καλύτερων» κάτω και άνω φραγμάτων της ελάχιστης ιδιοτιμής $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ του δαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$, επειδή αποδείχθηκαν «κοντινότερα» φράγματα της $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ απ' ότι δόθηκαν στη σχέση (2.1.7). Συγκεκριμένα, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.13 στη (2.2.22) μεταξύ των αριθμών $\lambda_n\left(A\right)-\left\|y\right\|_2^2$ και $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ παρεμβάλλει τον αριθμό $\lambda_{\min}\left(L\right)$ και όπως εμφανίζεται στη (2.2.25), μεταξύ των αριθμών $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ και $\lambda_{\min}\left(A\right)$, παρεμβάλλει τον αριθμό $\lambda_{\min}\left(U\right)$. Έτσι επιτυγχάνεται βελτίωση των φραγμάτων (άνω και κάτω) της $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ και συνδυάζοντας τις (2.2.22) και (2.2.25) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_n\left(A\right)-\left\|y\right\|_2^2\le\lambda_{\min}\left(L\right)\le\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{\min}\left(U\right)\le\lambda_n\left(A\right)\equiv\lambda_{\min}\left(A\right) \tag{2.2.53}$$

Η συνεισφορά της (2.2.53) έγκειται στο ότι εντοπίζει την ελάχιστη ιδιοτιμή, $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$, του διαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$ στο ευθύγραμμο τμήμα

$\left[\lambda_{\min}\left(L\right),\lambda_{\min}\left(U\right)\right]$, δηλαδή

$$\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)\in\left[\lambda_{\min}\left(L\right),\lambda_{\min}\left(U\right)\right]$$

με

$$\left[\lambda_{\min}(L),\ \lambda_{\min}(U)\right]\subseteq\left[\lambda_n(A)-\|y\|_2^2,\ \lambda_{\min}(A)\right].$$

Επιπλέον από τις (2.2.20) και (2.2.23) τα φράγματα $\lambda_{\min}(L)$, $\lambda_{\min}(U)$ εξαρτώνται μόνο από τις δύο μικρότερες ιδιοτιμές του πίνακα A τις $\lambda_n(A)\equiv\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{n-1}(A)$, από το μέτρο $\|y\|_2$ του διανύσματος $y\in\mathbb{C}^n$ και από τις προβολές $|\hat{y}_n|$ και $|\hat{y}_{n-1}|$, υπολογισμοί που γίνονται μία φορά και off-line. Συνεπώς, σύμφωνα με την (2.2.53), αν απαιτείται ο εντοπισμός της ελάχιστης ιδιοτιμής, $\lambda_{\min}\left(A-yy^*\right)$ και όχι ο αριθμητικός προσδιορισμός της, δεν χρειάζονται επιπλέον υπολογισμοί ιδιοτιμών, αρκούν οι off-line υπολογισμοί των $\lambda_n(A)\equiv\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{n-1}(A)$, $\|y\|_2$, $|\hat{y}_n|$ και $|\hat{y}_{n-1}|$ και οι εφαρμογές των τύπων (2.2.20) και (2.2.23) για τον υπολογισμό των $\lambda_{\min}(L)$, $\lambda_{\min}(U)$, αντίστοιχα.

ii) Η (2.2.22) και η (2.2.25) που συνθέτουν την ανισότητα της (2.2.53) αποδεικνύονται με διαφορετικό τρόπο στην [8, Theorem 2.1]. Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία η ανίσωση στη (2.2.22) προκύπτει από το συνδυασμό των ιδιοτήτων του αριθμητικού πεδίου των πινάκων M και L οι οποίοι δίνονται στις (2.2.17) και (2.2.18), αντίστοιχα, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 2.11 και η ανίσωση στη (2.2.25) προκύπτει από το συνδυασμό των ιδιοτήτων του Θεωρήματος 2.10 και της ιδιότητας των ιδιοτιμών των ομοίων πινάκων $A-yy^*$ και U.

□

Παράδειγμα 2.15

Από τον ακόλουθο Ερμιτιανό πίνακα

```
A =

   0.00000  -1.50000   5.00000   6.50000   0.00000   1.50000
  -1.50000  -2.00000  -0.50000   8.00000   1.00000  -3.00000
   5.00000  -0.50000   2.00000  -3.00000  -3.00000   5.50000
   6.50000   8.00000  -3.00000   0.00000  -2.50000   0.00000
   0.00000   1.00000  -3.00000  -2.50000   0.00000   4.00000
   1.50000  -3.00000   5.50000   0.00000   4.00000   4.00000
```

και το διάνυσμα

```
y =

  -1.04345 + 0.78590i
   1.27631 + 1.68505i
  -1.08615 - 0.32824i
  -0.64223 + 0.61656i
  -0.97584 + 1.99982i
   1.02253 - 0.39710i
```

κατασκευάζουμε τους 2×2 πίνακες $L\to Lm$, $U\to Um$

```
Lm =

  -16.4256 -  0.0000i   -4.9848 +  1.0240i
   -4.9848 -  1.0240i  -16.3510 -  0.0000i

Um =

   -8.3866 -  0.0000i   -1.1317 +  2.7745i
   -1.1317 -  2.7745i  -16.3510 -  0.0000i
```

Στον κώδικα 3 του Παραρτήματος δίνεται η συνάρτηση

```
function [EigLmmin,EigApmmin,EigUmmin,leftb,eigAmin] =
LU_smallest(A)
```

με την οποία υπολογίζονται τα μεγέθη

$$\lambda_{\min}(\mathrm{L}) \to \mathrm{EigL\,min},\ \lambda_{\min}\left(\mathrm{A}-\mathrm{yy}^*\right) \to \mathrm{EigApm\,min}$$

$$\lambda_{\min}(\mathrm{U}) \to \mathrm{EigU\,min},\ \lambda_{\mathrm{n}}(\mathrm{A})-\|\mathrm{y}\|_2^2 \to \mathrm{leftb}$$

$$\mathrm{eigA\,min} \to \lambda_{\min}(\mathrm{A}) \equiv \lambda_{\mathrm{n}}(\mathrm{A})$$

```
EigLmmin = -21.477
EigApmmin = -19.830
EigUmmin = -17.352
leftb = -28.656
eigAmin = -14.246
```

τα οποία επαληθεύουν τις σχέσεις (2.2.22) και (2.2.25).

□

Στην πρόταση που ακολουθεί προσδιορίζεται το αριθμητικό πεδίο ενός ειδικής μορφής Ερμιτιανού πίνακα, αποτέλεσμα ιδιαίτερα χρήσιμο στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.18.

Πρόταση 2.16

Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, και ο Ερμιτιανός πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{F})$ της μορφής

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta \mathrm{I}_{\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}-\left(\mathrm{V}^*\mathrm{y}\right)\left(\mathrm{V}^*\mathrm{y}\right)^*, \tag{2.2.54}$$

όπου $\mathrm{V} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{F})$ ένας ορθομοναδιαίος πίνακας και $\mathrm{y} \in \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ ένα τυχαίο διάνυσμα.

Έστω $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας τέτοιος ώστε

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \hat{\mathrm{y}}_1 \\ \left\|\mathrm{y}_{2:\mathrm{n}}\right\|_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \bar{\hat{\mathrm{y}}}_1 & \left\|\mathrm{y}_{2:\mathrm{n}}\right\|_2 \end{pmatrix} \tag{2.2.55}$$

όπου $y_{2:n}$ είναι η προβολή του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$ πάνω στα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $v_2, v_3, \dots, v_n$ και $\hat{y}_1$ η αντίστοιχη $1-$συντεταγμένη της προβολής, όπως αυτές οι ποσότητες ορίστηκαν στις (1.3.3) και (1.3.4) του Ορισμού 1.11. Τότε

i) Οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι:

$$\lambda_1(B) \equiv \lambda_{\max}(B) = \frac{\alpha + \beta - \|y\|_2^2 + \sqrt{\Delta}}{2} \tag{2.2.56}$$

$$\lambda_2(B) \equiv \lambda_{\min}(B) = \frac{\alpha + \beta - \|y\|_2^2 - \sqrt{\Delta}}{2} \tag{2.2.57}$$

όπου

$$\Delta = \left(\left(\alpha - |\hat{y}_1|^2\right) - \left(\beta - \|y_{2:n}\|_2^2\right)\right)^2 + 4|\hat{y}_1|^2 \|y_{2:n}\|_2^2 > 0 \tag{2.2.58}$$

ii) $F(A) \equiv F(B) = \left[\lambda_{\min}(B),\ \lambda_{\max}(B)\right]$

iii) $\lambda_{\min}(A) \equiv \lambda_{\min}(B)$ και $\lambda_{\max}(A) \equiv \lambda_{\max}(B)$

Απόδειξη

i) Ο 2×2 Ερμιτιανός πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \alpha - |\hat{y}_1|^2 & -\hat{y}_1 \cdot \|y_{2:n}\|_2 \\ -\overline{\hat{y}}_1 \cdot \|y_{2:n}\|_2 & \beta - \|y_{2:n}\|_2^2 \end{pmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(B)\cdot\lambda + \det(B) \Rightarrow$$

$$\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - \left(\alpha - |\hat{y}_1|^2 + \beta - \|y_{2:n}\|_2^2\right)\cdot\lambda + \left(\alpha - |\hat{y}_1|^2\right)\left(\beta - \|y_{2:n}\|_2^2\right) - |\hat{y}_1|^2\|y_{2:n}\|_2^2$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\chi_B(\lambda) = 0$ είναι

$$\begin{aligned}\Delta_B &= \left[\left(\alpha - |\hat{y}_1|^2\right) + \left(\beta - \|y_{2:n}\|_2^2\right)\right]^2 - 4\left[\left(\alpha - |\hat{y}_1|^2\right)\left(\beta - \|y_{2:n}\|_2^2\right) - |\hat{y}_1|^2\|y_{2:n}\|_2^2\right] \\ &= \left(\left(\alpha - |\hat{y}_1|^2\right) - \left(\beta - \|y_{2:n}\|_2^2\right)\right)^2 + 4|\hat{y}_1|^2\|y_{2:n}\|_2^2 > 0\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι ρίζες της $\chi_B(\lambda) = 0$ είναι δυο πραγματικοί αριθμοί που ταυτίζονται με τις ιδιοτιμες του B και δίνονται από

$$\lambda_2(B) = \lambda_{\min}(B) = \frac{\alpha + \beta - \|y\|_2^2 - \sqrt{\Delta_B}}{2}, \quad \lambda_1(B) = \lambda_{\max}(B) = \frac{\alpha + \beta - \|y\|_2^2 + \sqrt{\Delta_B}}{2}$$

επαληθεύοντας τις (2.2.56)-(2.2.57) και τη (2.2.58).

Προφανώς από τις (2.2.56)-(2.2.57) προκύπτει άμεσα $\lambda_2(B) < \lambda_1(B)$.

ii) Θεωρούμε $Q_2 \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$ ορθομοναδιαίο πίνακα τέτοιον ώστε

$$Q_2 \cdot y_{2:n} = \left\| y_{2:n} \right\|_2 \cdot e_1 \tag{2.2.59}$$

με e_1 το $(n-1)\times 1$ διάνυσμα της κανονικής βάσης του $M_{(n-1)\times 1}(\mathbb{R})$, δηλαδή $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$.

Επιπλέον ορίζουμε τον πίνακα $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ως εξής:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2^* \end{pmatrix} \tag{2.2.60}$$

Ο πίνακας Q στη (2.2.60) είναι ορθομοναδιαίος, επειδή ο Q_2 είναι ορθομοναδιαίος και ισχύει:

$$Q^*Q = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$$

Τότε, σύμφωνα με την ιδιότητα του ορθομοναδιαία αναλλοίωτου του αριθμητικού πεδίου του πίνακα (βλέπε, σχέση (1.6.4), Πρόταση 1.30), για τον ορθομοναδιαίο πίνακα Q, ισχύει ότι

$$F\left(Q^*AQ\right) = F(A). \tag{2.2.61}$$

Αντικαθιστώντας τους πίνακες Q, A από τις (2.2.60) και (2.2.54), αντίστοιχα, μετά πό πράξεις, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $Q_2^*Q_2 = Q_2Q_2^* = I_{n-1}$ και την (2.2.59) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} Q^*AQ &= \begin{pmatrix} \alpha - |\hat{y}_1|^2 & -\hat{y}_1 \cdot y_{2:n}^* \cdot Q_2^* \\ -\overline{\hat{y}}_1 \cdot Q_2 \cdot y_{2:n} & \beta \cdot Q_2 \cdot Q_2^* \cdot I_{n-1} - Q_2 \cdot y_{2:n} \cdot y_{2:n}^* \cdot Q_2^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - |\hat{y}_1|^2 & -\hat{y}_1 \cdot \left(Q_2 \cdot y_{2:n}\right)^* \\ -\overline{\hat{y}}_1 \cdot \left(Q_2 \cdot y_{2:n}\right) & \beta \cdot I_{n-1} - \left(Q_2 \cdot y_{2:n}\right) \cdot \left(Q_2 \cdot y_{2:n}\right)^* \end{pmatrix} \\ &\overset{(2.2.59)}{=} \begin{pmatrix} \alpha - |\hat{y}_1|^2 & -\hat{y}_1 \cdot \left\| y_{2:n} \right\|_2 \cdot e_1^* \\ -\overline{\hat{y}}_1 \cdot \left\| y_{2:n} \right\|_2 \cdot e_1 & \beta \cdot I_{n-1} - \left\| y_{2:n} \right\|_2^2 \cdot e_1 \cdot e_1^* \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.2.62}$$

Αντικαθιστώντας το διάνυσμα της κανονικής βάσης e_1, ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας $\beta \cdot I_{n-1} - \left\| y_{2:n} \right\|_2^2 \cdot e_1 \cdot e_1^*$ γράφεται

$$\beta\cdot I_{n-1}-\left\|y_{2:n}\right\|_2^2\cdot e_1\cdot e_1^* =$$

$$=\beta\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}-\left\|y_{2:n}\right\|_2^2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\beta-\left\|y_{2:n}\right\|_2^2 & 0 & \cdots & & 0\\ 0 & \beta & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \beta & 0\\ 0 & & & 0 & \beta\end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τον παραπάνω πίνακα στη (2.2.62) προκύπτει

$$Q^*AQ=\begin{pmatrix}\alpha-\left|\hat{y}_1\right|^2 & -\hat{y}_1\cdot\left\|y_{2:n}\right\|_2 & 0 & \cdots & 0\\ -\overline{\hat{y}}_1\cdot\left\|y_{2:n}\right\|_2 & \beta-\left\|y_{2:n}\right\|_2^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \beta & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta\end{pmatrix}\overset{(2.2.55)}{=}$$

$$=\begin{pmatrix}B & O\\ O & \beta\cdot I_{n-2}\end{pmatrix}$$

Από την παραπάνω μορφή του πίνακα Q^*AQ προκύπτει ότι ο πίνακας αυτός αποτελεί **ευθύ άθροισμα** των πινάκων $\beta\cdot I_{n-2}$ και του πίνακα B που θεωρήθηκε στη (2.2.55), δηλαδή

$$Q^*AQ=\left(\beta\cdot I_{n-2}\right)\oplus\left(B\right). \qquad (2.2.63)$$

Το αριθμητικό πεδίο του Q^*AQ από τη μορφή του στη (2.2.63), σύμφωνα με την 3η ιδιότητα της Πρότασης 1.30 στην (1.6.3), ισούται με

$$F\left(Q^*AQ\right)=F\left[\left(\beta\cdot I_{n-2}\right)\oplus\left(B\right)\right]=Co\left\{F\left(\beta\cdot I_{n-2}\right)\cup F\left(B\right)\right\}. \qquad (2.2.64)$$

Για τον πίνακα $\beta\cdot I_{n-2}$ ισχύει

$$F\left(\beta\cdot I_{n-2}\right)=\left\{\beta\right\}. \qquad (2.2.65)$$

Επιπρόσθετα ο 2×2 Ερμιτιανός πίνακας B έχει πραγματικές ιδιοτιμές, οι οποίες υπολογίστηκαν στο (i) της Πρότασης 2.16, συνεπώς το αριθμητικό πεδίο του B, από την (1.6.2), ισούται με

$$F(B)=\left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right]\subset\mathbb{R}. \qquad (2.2.66)$$

Αντικαθιστώντας τις ισότητες από τη (2.2.65)-(2.2.66) στη (2.2.64) και συνδυάζοντάς τη με τη (2.2.61), προκύπτει

$$F(A)=F\left(Q^*AQ\right)=\{\beta\}\cup\left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right] \qquad (2.2.67)$$

Επειδή $\lambda_2(B)<\lambda_1(B)$, πρέπει να βρούμε τη θέση του β στον πραγματικό άξονα σχετικά με το διάστημα $\left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right]$ προκειμένου να ορίσουμε την ένωση $\{\beta\}\cup\left[\lambda_2(B),\ \lambda_1(B)\right]$.

Αξιοποιώντας τη μορφή του πίνακα B στη (2.2.55), εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.8 και το αριστερό τμήμα της ανίσωσης στη (2.1.8) έχουμε:

$$\beta\equiv\lambda_2\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right)\le\lambda_{\max}\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \left\|y_{2:n}\right\|_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{\hat{y}}_1 & \left\|y_{2:n}\right\|_2\end{pmatrix}\right)\equiv\lambda_{\max}(B) \qquad (2.2.68)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.5 και το δεξιό τμήμα της ανίσωσης στη (2.1.7) έχουμε:

$$\lambda_{\min}(B)\le\lambda_{\min}\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right)=\beta \qquad (2.2.69)$$

Συνδυάζοντας τη (2.2.68)-(2.2.69) προκύπτει η ακόλουθη διάταξη

$$\lambda_{\min}(B)\le\beta\le\lambda_{\max}(B),$$

η οποία οδηγεί να γράψουμε τη (2.2.67) ως εξής:

$$F(A)=\{\beta\}\cup\left[\lambda_{\min}(B),\ \lambda_{\max}(B)\right]=\left[\lambda_{\min}(B),\ \lambda_{\max}(B)\right]\overset{(2.2.66)}{=}F(B),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του (ii).

ii) Λόγω του προηγούμενου συμπεράσματος, εύκολα μπορούμε να γράψουμε ότι $\lambda_{\min}(A)\equiv\lambda_{\min}(B)$ και $\lambda_{\max}(A)\equiv\lambda_{\max}(B)$.

□

Σχόλιο 2.17

Στην Πρόταση 2.16 αποδεικνύεται ότι το αριθμητικό πεδίο του ειδικού $n\times n$ Ερμιτιανού πίνακα A της (2.2.54) ταυτίζεται με το αριθμητικό πεδίο του 2×2 πίνακα B στη (2.2.55) το οποίο, λόγω ιδιοτήτων του αριθμητικού πεδίου, είναι

$$F(A) \equiv F(B) = \left[\lambda_{\min}(B),\ \lambda_{\max}(B)\right]$$

Όπου $\lambda_{\min}(B)$, $\lambda_{\max}(B)$ είναι οι ιδιοτιμές στις (2.2.57) και (2.2.56), αντίστοιχα, που υπολογίζονται από τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και το μέτρο $\|y\|_2^2$ του διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$.

□

Στη συνέχεια παρουσιάζεται το βασικό θεώρημα, το οποίο προσδιορίζει αυστηρότερα φράγματα για τη μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα από αυτά που προσδιορίστηκαν στο Θεώρημα 2.8.

Θεώρημα 2.18

Έστω Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, με ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, διατεταγμένες όπως στη (2.1.1) και ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$ με στήλες τα ιδιοδιανύσματα v_i αντίστοιχα των ιδιοτιμών $\lambda_i(A)$ του A. Έστω οι Ερμιτιανοί πίνακες $N \in M_n(\mathbb{F})$ και $\tilde{L}, \tilde{U} \in M_2(\mathbb{F})$ με

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2(A) \cdot I_{n-1} \end{pmatrix} - \left(V^* y\right)\left(V^* y\right)^*$$

(2.2.70)

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_1 & \bar{\hat{y}}_2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.71)$$

και

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \|y_{2:n}\|_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_1 & \|y_{2:n}\|_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.72)$$

όπου $y_{2:n}$ είναι η προβολή του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$ πάνω στα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $v_2, v_3, \ldots, v_n$ και $\hat{y}_1$ η αντίστοιχη $1-$συντεταγμένη της προβολής καθώς και $\hat{y}_2$ η αντίστοιχη $2-$συντεταγμένη της προβολής, όπως αυτές οι ποσότητες ορίστηκαν στις (1.3.3) και (1.3.4) του Ορισμού 1.11. Τότε

i) Οι ιδιοτιμές του $n \times n$ πίνακα N είναι:

$$\lambda_{\min}(N) = \lambda_{\min}(\tilde{U}) = \frac{\lambda_1(A) + \lambda_2(A) - \|y\|_2^2 - \sqrt{\Delta_{\tilde{U}}}}{2}, \qquad (2.2.73)$$

$$\lambda_{max}\left(N\right)=\lambda_{max}\left(\tilde{U}\right)=\frac{\lambda_1\left(A\right)+\lambda_2\left(A\right)-\left\|y\right\|_2^2+\sqrt{\Delta_{\tilde{U}}}}{2} \tag{2.2.74}$$

όπου

$$\Delta_{U\_}=\left(\lambda_1\left(A\right)-\left|\hat{y}_1\right|^2-\lambda_2\left(A\right)+\left\|y_{2:n}\right\|_2^2\right)^2+4\left|\hat{y}_1\right|^2\left\|y_{2:n}\right\|_2^2>0$$

ii) $$\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)\leq\lambda_{max}\left(\tilde{U}\right)\leq\lambda_{max}\left(A\right) \tag{2.2.75}$$

iii) Οι ιδιοτιμές του 2×2 πίνακα $L\_$ είναι:

$$\lambda_2\left(\tilde{L}\right)\equiv\lambda_{min}\left(\tilde{L}\right)=\frac{\lambda_1\left(A\right)+\lambda_2\left(A\right)-\left|\hat{y}_1\right|^2-\left|\hat{y}_2\right|^2-\sqrt{\Delta_{\tilde{L}}}}{2}, \tag{2.2.76}$$

$$\lambda_1\left(\tilde{L}\right)\equiv\lambda_{max}\left(\tilde{L}\right)=\frac{\lambda_1\left(A\right)+\lambda_2\left(A\right)-\left|\hat{y}_1\right|^2-\left|\hat{y}_2\right|^2+\sqrt{\Delta_{\tilde{L}}}}{2} \tag{2.2.77}$$

όπου

$$\Delta_{\tilde{L}}=\left(\lambda_1\left(A\right)-\lambda_2\left(A\right)-\left|\hat{y}_1\right|^2+\left|\hat{y}_2\right|^2\right)^2+4\left|\hat{y}_1\right|^2\left|\hat{y}_2\right|^2$$

iv) $$\lambda_2\left(A\right)\leq\lambda_{max}\left(\tilde{L}\right)\leq\lambda_{max}\left(A-yy^*\right) \tag{2.2.78}$$

Υπενθυμίζεται ότι $\lambda_1\left(A\right)\equiv\lambda_{max}\left(A\right)$.

Απόδειξη

i) Οι πίνακες N, $\tilde{L}$ έχουν τη μορφή των πινάκων A, B που μελετήθηκαν στην Πρόταση 2.16 με $\alpha=\lambda_1\left(A\right)$ και $\beta=\lambda_2\left(A\right)$. Άρα οι ισότητες των ιδιοτιμών στις (2.2.73)-(2.2.74) προκύπτουν άμεσα από τις (2.2.57) και (2.2.56), αντίστοιχα.

ii) Έστω $A-yy^*$ μια διαταραχή του πίνακα A με το τυχαίο διάνυσμα $y\in\mathbb{C}^n$ και έστω $z\in\mathbb{C}^n$ ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A-yy^*$, το οποίο αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)$ του πίνακα $A-yy^*$. Τότε από τον ορισμό της ιδιοτιμής ενός πίνακα, και επειδή $\left\|z\right\|_2^2=z^*z=1$ παίρνουμε:

$$\left(A-yy^*\right)z=\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)z\Rightarrow$$

$$z^*\left(A-yy^*\right)z=z^*\cdot\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)z\Rightarrow$$

$$z^*\left(A-yy^*\right)z=\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)z^*z\Rightarrow$$

$$\lambda_{max}\left(A-yy^*\right)=z^*Az-z^*yy^*z \tag{2.2.79}$$

Διαμερίζουμε το διαγώνιο πίνακα Λ των ιδιοτιμών του A και τον αντίστοιχο πίνακα V των ιδιοδιανυσμάτων του ως εξής:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad (2.2.80)$$

όπου

$\Lambda_2 = \mathrm{diag}\begin{pmatrix} \lambda_2(A) & \lambda_3(A) & \cdots & \lambda_n(A) \end{pmatrix}$,

$V = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & \vdots & V_2 \end{pmatrix}$,

(2.2.81)

με $V_2 = \begin{pmatrix} v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$.

Από την ισότητα της διαγωνοποίησης του A, παίρνουμε:

$$A = V \cdot \Lambda \cdot V^* = \begin{pmatrix} v_1 & \vdots & V_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1^* \\ \cdots \\ V_2^* \end{pmatrix} \qquad (2.2.82)$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα A από τη σχέση (2.2.82) στη (2.2.79) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\left(A - yy^*\right) &= z^*Az - z^*yy^*z \\ &= z^*\begin{pmatrix} v_1 & \vdots & V_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^* \\ \cdots \\ V_2^* \end{pmatrix} z - z^*yy^*z \\ &\overset{(2.2.81)}{=} z^*V\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix}V^*z - \left(y^*z\right)^*\left(y^*z\right) \\ &= \left(V^*z\right)^*\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix}\left(V^*z\right) - \left(y^*z\right)^*\left(y^*z\right) \qquad (2.2.83) \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη σχέση (2.2.83), υπολογίζουμε το διάνυσμα V^*z, που λόγω της (2.2.81) γράφεται:

$$V^*z = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^* z = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} v_1^*z \\ v_2^*z \\ \vdots \\ v_n^*z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^*z \\ \cdots \\ V_2^*z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix} \qquad (2.2.84)$$

όπου σημειωνεται $V_2^*z = z_{2:n}$ και $\hat{z}_1 = v_1^*z$, (βλέπε, Ορισμό 1.11).

Όμοια με παραπάνω, για ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$, το διάνυσμα V^*y από τη (2.2.81) γράφεται:

$$V^*y = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} v_1^*y \\ v_2^*y \\ \vdots \\ v_n^*y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^*y \\ \cdots \\ V_2^*y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \cdots \\ y_{2:n} \end{pmatrix} \qquad (2.2.85)$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γινόμενο y^*z στη (2.2.83), χρησιμοποιώντας τις ισότητες από τις (2.2.84) και (2.2.85), το οποίο γράφεται:

$$y^*z = y^*I_n z = y^*VV^*z = \left(V^*y\right)^*\left(V^*z\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \cdots \\ y_{2:n} \end{pmatrix}^* \left(V^*z\right) = \left(\bar{\hat{y}}_1 \ \vdots \ y^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix} \qquad (2.2.86)$$

Το διάνυσμα V^*z είναι μοναδιαίο λόγω της (1.2.2) και του γεγονότος ότι το z επιλέχθηκε μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα, συνεπώς ισχύει:

$$\left\|V^*z\right\|_2^2 = \left(V^*z\right)^*\left(V^*z\right) = z^*VV^*z = z^*I_n z = z^*z = \|z\|_2^2 = 1 \qquad (2.2.87)$$

Έτσι η σχέση (2.2.83), λόγω των (2.2.84) και (2.2.86), γράφεται:

$$\lambda_{\max}\left(A - yy^*\right) = \left(V^*z\right)^* \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \left(V^*z\right) - \left(y^*z\right)^* \cdot \left(y^*z\right) =$$

$$= \left(\bar{\hat{z}}_1 \ \vdots \ z^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix}$$

$$- \left(\bar{\hat{z}}_1 \ \vdots \ z^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \cdots \\ y_{2:n} \end{pmatrix} \left(\bar{\hat{y}}_1 \ \vdots \ y^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix}$$

(2.2.88)

Στην προηγούμενη σχέση (2.2.88) θέτουμε

$$\Pi = \left(\bar{\hat{z}}_1 \ \vdots \ z^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \cdots \\ y_{2:n} \end{pmatrix} \left(\bar{\hat{y}}_1 \ \vdots \ y^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix}, \qquad (2.2.89)$$

οπότε η σχέση (2.2.88), λόγω της (2.2.89), γίνεται:

$$\lambda_{\max}\left(A - yy^*\right) = \left(\bar{\hat{z}}_1 \ \vdots \ z^*_{2:n}\right) \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix} - \Pi$$

$$= \left(\bar{\hat{z}}_1 \cdot \lambda_1(A) \ \vdots \ z^*_{2:n} \cdot \Lambda_2\right) \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \cdots \\ z_{2:n} \end{pmatrix} - \Pi$$

$$= \bar{\hat{z}}_1 \cdot \lambda_1(A) \cdot \hat{z}_1 + z^*_{2:n} \cdot \Lambda_2 \cdot z_{2:n} - \Pi$$

$$= \left|\hat{z}_1\right|^2 \cdot \lambda_1(A) + \left\|z_{2:n}\right\|_2^2 \cdot \left(\frac{z^*_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2} \cdot \Lambda_2 \cdot \frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2} \right) - \Pi \qquad (2.2.90)$$

Στην τελευταία ισότητα (2.2.90), σύμφωνα με τον Ορισμό 1.29, ο αριθμός $\frac{z^*_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2} \cdot \Lambda_2 \cdot \left(\frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2} \right)$ ανήκει στο αριθμητικό πεδίο του πίνακα Λ_2, επειδή

$$\frac{z_{2:n}^*}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\cdot\left(\frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\right)=\frac{\left(z_{2:n}^*\right)\left(z_{2:n}\right)}{\left\|z_{2:n}\right\|_2^2}=\frac{\left\|z_{2:n}\right\|_2^2}{\left\|z_{2:n}\right\|_2^2}=1.$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\frac{z_{2:n}^*}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\cdot\Lambda_2\cdot\left(\frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\right)\in F\left(\Lambda_2\right) \tag{2.291}$$

Επειδή ο Λ_2 είναι διαγώνιος πραγματικός πίνακας, σύμφωνα με την (1.6.2) μπορούμε να γράψουμε

$$F\left(\Lambda_2\right)=\left[\lambda_n\left(A\right),\ \lambda_2\left(A\right)\right]\subset\mathbb{R}, \tag{2.2.92}$$

κατά συνέπεια η (2.2.91) λόγω της (2.2.92) μπορεί να γραφεί

$$\frac{z_{2:n}^*}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\cdot\Lambda_2\cdot\left(\frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\right)\in F\left(\Lambda_2\right)=\left[\lambda_n\left(A\right),\ \lambda_2\left(A\right)\right] \tag{2.2.93}$$

Συνεπώς είναι

$$\lambda_{\min}\left(A\right)\equiv\lambda_n\left(A\right)\le\frac{z_{2:n}^*}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\cdot\Lambda_2\cdot\left(\frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\right)\le\lambda_2\left(A\right) \tag{2.2.94}$$

Έτσι η σχέση (2.2.90) λόγω της (2.2.94), μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)&=\left|\hat{z}_1\right|^2\cdot\lambda_1\left(A\right)+\left\|z_{2:n}\right\|_2^2\cdot\left(\frac{z_{2:n}^*}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\cdot\Lambda_2\cdot\frac{z_{2:n}}{\left\|z_{2:n}\right\|_2}\right)-\Pi\\&\le\left|\hat{z}_1\right|^2\cdot\lambda_1\left(A\right)+\left\|z_{2:n}\right\|_2^2\cdot\lambda_2\left(A\right)-\Pi=\\&=\left|\hat{z}_1\right|^2\cdot\lambda_1\left(A\right)+z_{2:n}^*\cdot\lambda_2\left(A\right)\cdot z_{2:n}-\Pi=\\&=\left(\bar{\hat{z}}_1\ \vdots\ z_{2:n}^*\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\left(A\right)&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\lambda_2\left(A\right)\cdot I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\\cdots\\z_{2:n}\end{pmatrix}-\Pi\end{aligned} \tag{2.2.95}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τον αριθμό Π από τη (2.2.89) στη (2.2.95), έχουμε:

$$\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)\le\left(\bar{\hat{z}}_1 \;\vdots\; z^*_{2:n}\right)\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)\cdot I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\ \cdots\\ z_{2:n}\end{pmatrix}-\Pi=$$

$$=\left(\bar{\hat{z}}_1 \;\vdots\; z^*_{2:n}\right)\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)\cdot I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\ \cdots\\ z_{2:n}\end{pmatrix}$$

$$-\left(\bar{\hat{z}}_1 \;\vdots\; z^*_{2:n}\right)\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \cdots\\ y_{2:n}\end{pmatrix}\left(\bar{\hat{y}}_1 \;\vdots\; y^*_{2:n}\right)\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\ \cdots\\ z_{2:n}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\bar{\hat{z}}_1 \;\vdots\; z^*_{2:n}\right)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)\cdot I_{n-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \cdots\\ y_{2:n}\end{pmatrix}\left(\bar{\hat{y}}_1 \;\vdots\; y^*_{2:n}\right)\right]\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\ \cdots\\ z_{2:n}\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.2.85)}{=}\left(\bar{\hat{z}}_1 \;\vdots\; z^*_{2:n}\right)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)\cdot I_{n-1}\end{pmatrix}-\left(V^*y\right)\left(V^*y\right)^*\right]\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\ \cdots\\ z_{2:n}\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.2.70)}{=}\left(\bar{\hat{z}}_1 \;\vdots\; z^*_{2:n}\right)\cdot N\cdot\begin{pmatrix}\hat{z}_1\\ \cdots\\ z_{2:n}\end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.2.84)}{=}\left(V^*z\right)^*\cdot N\cdot\left(V^*z\right)$$

έτσι καταλήγουμε

$$\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)\le\left(V^*z\right)^*\cdot N\cdot\left(V^*z\right) \tag{2.2.96}$$

Επειδή οι πίνακες N, $\tilde{U}$ έχουν τη μορφή των πινάκων A, B των (2.2.54) και (2.2.55) αντίστοιχα, εφαρμόζοντας το (ii) της Πρότασης 2.16 συμπεραίνουμε ότι:

$$F(N)=F\left(\tilde{U}\right)=\left[\lambda_{\min}\left(\tilde{U}\right),\,\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)\right] \tag{2.2.97}$$

Εφόσον το διάνυσμα V^*z είναι μοναδιαίο (βλέπε (2.2.87)) ο αριθμός $\left(V^*z\right)^*\cdot N\cdot\left(V^*z\right)$ ανήκει στο αριθμητικό πεδίο του πίνακα N, άρα λόγω της (2.2.97) προκύπτει

$$\lambda_{\min}\left(\tilde{U}\right)\le\left(V^*z\right)^*\cdot N\cdot\left(V^*z\right)\le\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right) \tag{2.2.98}$$

Συνδυάζοντας τώρα το δεξιό μέρος της ανισότητας στη (2.2.98) με τη (2.2.96) αποδεικνύεται η ανισότητα στο αριστερό μέρος της (2.2.75), δηλαδή

$$\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right) \tag{2.2.99}$$

Επειδή ο πίνακας V είναι ορθομοναδιαίος, χρησιμοποιώντας την (1.2.2) υπολογίζουμε

$$\begin{pmatrix}\bar{\hat{y}}_1 & \left\|y_{2:n}\right\|_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \left\|y_{2:n}\right\|_2\end{pmatrix}=\left|\hat{y}_1\right|^2+\left\|y_{2:n}\right\|_2^2=\left\|y\right\|_2^2$$

(2.2.100)

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.8, το δεξιό μέρος της ανισότητας στη (2.1.8) λόγω της μορφής του Ερμιτιανού πίνακα $\tilde{U}$ και της (2.2.100), δίνει:

$$\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)\le\lambda_{\max}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & 0\\ 0 & \lambda_2(A)\end{pmatrix}\right)=\lambda_1(A)\equiv\lambda_{\max}(A) \qquad (2.2.101)$$

Έτσι συνδυάζοντας τις (2.2.99) και (2.2.101) αποδεικνύεται η (2.2.75).

iii) Από τη διαγωνοποίηση του πίνακα A στη (2.2.82) καταλήγουμε:

$V^*AV=\Lambda$

από τη διαταραχή του A με τον πίνακα yy^*, $y\in\mathbb{C}^n$, μπορούμε να γράψουμε:

$$V^*\left(A-yy^*\right)V=V^*AV-V^*yy^*V=\Lambda-\left(V^*y\right)\left(V^*y\right)^* \qquad (2.2.102)$$

Αντικαθιστώντας στη (2.2.102) το διάνυσμα V^*y από τη (2.2.85) και τον πίνακα Λ από τη (2.2.80) έχουμε:

$$V^*\left(A-yy^*\right)V=$$

$$=\Lambda-\left(V^*y\right)\left(V^*y\right)^*=$$

$$=\Lambda-\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \hat{y}_2\\ \vdots\\ \hat{y}_{n-1}\\ \hat{y}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\hat{y}}_1 & \bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \bar{\hat{y}}_{n-1} & \bar{\hat{y}}_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2(A) & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}(A) & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n(A)\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\left|\hat{y}_1\right|^2 & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_n\\ \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_1 & \left|\hat{y}_2\right|^2 & \cdots & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \left|\hat{y}_{n-1}\right|^2 & \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_n\\ \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_{n-1} & \left|\hat{y}_n\right|^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1(A)-|\hat{y}_1|^2 & -\hat{y}_1\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & -\hat{y}_1\bar{\hat{y}}_n \\ -\hat{y}_2\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A)-|\hat{y}_2|^2 & \cdots & -\hat{y}_2\bar{\hat{y}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{y}_n\bar{\hat{y}}_1 & -\hat{y}_n\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \lambda_n(A)-|\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.103)$$

Στη (2.2.103) ο 2×2 υποπίνακας στην άνω αριστερά γωνία παρατηρούμε ότι είναι ο πίνακας $\tilde{L}$, όπως αυτός ορίστηκε στη (2.2.71), όταν γίνουν οι πράξεις στα διανύσματα και τότε προφανώς αυτός γράφεται:

$$\tilde{L}=\begin{pmatrix} \lambda_1(A)-|\hat{y}_1|^2 & -\hat{y}_1\bar{\hat{y}}_2 \\ -\hat{y}_2\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A)-|\hat{y}_2|^2 \end{pmatrix} \qquad (2.2.104)$$

Ο πίνακας στη (2.2.104), σύμφωνα με το Σχόλιο 1.20, έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_{\tilde{L}}(\lambda)=\lambda^2-\left[\mathrm{tr}\left(\tilde{L}\right)\right]\lambda+\det\left(\tilde{L}\right)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\chi_{\tilde{L}}(\lambda)=0$ είναι

$$\begin{aligned}\Delta_{\tilde{L}} &= \left(\left(\lambda_1(A)-|\hat{y}_1|^2\right)+\left(\lambda_2(A)-|\hat{y}_2|^2\right)\right)^2 \\ &\quad -4\left(\left(\lambda_1(A)-|\hat{y}_1|^2\right)\left(\lambda_2(A)-|\hat{y}_2|^2\right)-|\hat{y}_1|^2|\hat{y}_2|^2\right) \\ &=\left(\lambda_1(A)-\lambda_2(A)-|\hat{y}_1|^2+|\hat{y}_2|^2\right)^2+4|\hat{y}_1|^2|\hat{y}_2|^2>0\end{aligned}$$

Συνεπώς, οι πραγματικές ρίζες της $\chi_{\tilde{L}}(\lambda)=0$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\tilde{L}$, οι οποίες δίνονται από τις ισότητες στις (2.2.76) και (2.2.77).

iv) Επειδή οι πίνακες $A-yy^*$ και $V^*\left(A-yy^*\right)V$ είναι όμοιοι, έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (βλέπε, Πρόταση 1.24, ιδιότητα 7c), άρα ισχύει:

$$\lambda_i\left(V^*\left(A-yy^*\right)V\right)\equiv\lambda_i\left(A-yy^*\right),\ i=1,2,\ldots,n \qquad (2.2.105)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.10 (ii) στον πίνακα $V^*\left(A-yy^*\right)V$ της (2.2.103) για $k=n-m+1$ και $m=2$ απομένει ο υποπίνακας $\tilde{L}$, οπότε το δεξιό μέρος της ανισότητας (2.1.12) δίνει:

$$\lambda_1\left(\tilde{L}\right)\le\lambda_1\left(V^*\left(A-yy^*\right)V\right)$$

ή ισοδύναμα λόγω της (2.2.105) η παραπάνω ανισότητα γράφεται

$$\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right)\le\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right) \qquad (2.2.106)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.8, το αριστερό μέρος της ανισότητας στη (2.1.8) λόγω της μορφής του Ερμιτιανού πίνακα L_-, δίνει:

$$\lambda_2\left(\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & 0\\ 0 & \lambda_2(A)\end{pmatrix}\right)\le\lambda_{\max}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & 0\\ 0 & \lambda_2(A)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ \hat{y}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\hat{y}}_1 & \bar{\hat{y}}_2\end{pmatrix}\right),$$

δηλαδή

$$\lambda_2(A)\le\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right) \qquad (2.2.107)$$

Συνδυάζοντας τη (2.2.106) με τη (2.2.107) αποδεικνύεται η ανισότητα στη (2.2.78), ολοκληρώνοντας την απόδειξη.

□

Σχόλιο 2.19

Κατά αναλογία των σχολίων στο Σχόλιο 2.14 έχουμε και εδώ να σημειώσουμε τα ακόλουθα:

i) Με το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.18 δίνεται η δυνατότητα εντοπισμού «καλύτερων» κάτω και άνω φραγμάτων της μέγιστης ιδιοτιμής $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$ του δαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$, επειδή αποδείχθηκαν «κοντινότερα» φράγματα της $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$ απ' ότι δόθηκαν στη σχέση (2.1.8). Συγκεκριμένα, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.18 στη (2.2.78) μεταξύ των αριθμών $\lambda_2(A)$ και $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$ της σχέσης (2.1.8) παρεμβάλλει τον αριθμό $\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right)$ και όπως εμφανίζεται στη (2.2.75), μεταξύ των αριθμών $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$ και $\lambda_{\max}(A)$ της ίδιας σχέσης, παρεμβάλλει τον αριθμό $\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)$. Έτσι επιτυγχάνεται βελτίωση των φραγμάτων (άνω και κάτω) της $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$ και συνδυάζοντας τις (2.2.78) και (2.2.75) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_2(A)\le\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right)\le\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)\le\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)\le\lambda_1(A)\equiv\lambda_{\max}(A) \tag{2.2.108}$$

Η συνεισφορά της (2.2.108) έγκειται στο ότι εντοπίζει τη μέγιστη ιδιοτιμή, $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$, του διαταραγμένου πίνακα $A-yy^*$ στο ευθύγραμμο τμήμα $\left[\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right),\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)\right]$, δηλαδή

$$\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)\in\left[\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right),\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)\right] \tag{2.2.109}$$

με

$$\left[\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right),\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)\right]\subseteq\left[\lambda_2(A),\lambda_{\max}(A)\right].$$

Επιπλέον από τις (2.2.77) και (2.2.74) τα φράγματα $\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right)$, $\lambda_{\max}\left(\tilde{U}\right)$ εξαρτώνται μόνο από τις δύο μεγαλύτερες ιδιοτιμές του πίνακα A τις $\lambda_2(A),\lambda_1(A)\equiv\lambda_{\max}(A)$, από το μέτρο $\|y\|_2$ του διανύσματος $y\in\mathbb{C}^n$ και από τις προβολές $|\hat{y}_1|$ και $|\hat{y}_2|$, υπολογισμοί που γίνονται μία φορά και off-line. Συνεπώς, σύμφωνα με την (2.2.109), αν απαιτείται ο εντοπισμός της μέγιστης ιδιοτιμής, $\lambda_{\max}\left(A-yy^*\right)$ και όχι ο αριθμητικός προσδιορισμός της, δεν χρειάζονται επιπλέον υπολογισμοί ιδιοτιμών, αρκούν οι off-line υπολογισμοί των

$\lambda_2(A), \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A)$, $\|y\|_2$, $|\hat{y}_1|$ και $|\hat{y}_2|$ και οι εφαρμογές των τύπων (2.2.77) και (2.2.74) για τον υπολογισμό των $\lambda_{max}(\tilde{L})$, $\lambda_{max}(\tilde{U})$, αντίστοιχα.

ii) Η (2.2.78) και η (2.2.75) που συνθέτουν την ανισότητα της (2.2.108) αποδεικνύονται με διαφορετικό τρόπο στην [8, Theorem 2.4]. Συγκεκριμένα, στην παρούσα εργασία η ανίσωση στη (2.2.75) προκύπτει από το συνδυασμό των ιδιοτήτων του αριθμητικού πεδίου των πινάκων N και $\tilde{U}$, οι οποίοι δίνονται στις (2.2.70) και (2.2.72), αντίστοιχα, αξιοποιώντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 2.16 και η ανίσωση στη (2.2.78) προκύπτει από το συνδυασμό των ιδιοτήτων του Θεωρήματος 2.10 και της ιδιότητας των ιδιοτιμών των ομοίων πινάκων $A - yy^*$ και $\tilde{L}$.

□

Παράδειγμα 2.20

Από τον ακόλουθο Ερμιτιανό πίνακα

```
A =

   5.00000  -7.50000  -0.50000   1.00000   4.00000   0.00000
  -7.50000  -1.00000  -2.50000  -9.00000  -1.00000  -7.00000
  -0.50000  -2.50000  -7.00000   8.50000  -0.50000  -3.00000
   1.00000  -9.00000   8.50000  -4.00000   2.00000   0.50000
   4.00000  -1.00000  -0.50000   2.00000   5.00000  -4.00000
   0.00000  -7.00000  -3.00000   0.50000  -4.00000   4.00000
```

και το διάνυσμα

```
y =

   1.86023 + 0.55077i
  -1.07970 - 0.26523i
   0.72342 + 0.43219i
  -0.00454 + 0.17397i
  -1.44001 + 1.53653i
  -0.52544 + 0.36394i
```

κατασκευάζουμε τους 2×2 πίνακες $L\_ \to Lm$, $U\_ \to Um$

```
Lm =

   12.83334 -  0.00000i   -0.50493 +  1.51956i
   -0.50493 -  1.51956i    9.28530 -  0.00000i

Um =

   12.8333 -  0.0000i   -3.6904 -  2.9445i
   -3.6904 +  2.9445i    2.4872 -  0.0000i
```

Στον κώδικα 4 του Παραρτήματος δίνεται η συνάρτηση

```
function [EigLmmax,EigApmmax,EigUmmax,eigA2,eigA1] =
LU_largest(A)
```

με την οποία υπολογίζονται τα μεγέθη

$$\mathrm{EigLm\,max} \to \lambda_{\max}\left(L_{-}\right),\ \mathrm{EigApm\,max} \to \lambda_{\max}\left(A - yy^{*}\right)$$

$$\mathrm{EigUm\,max} \to \lambda_{\max}\left(U_{-}\right)$$

$$\mathrm{eigA2} \to \lambda_{2}\left(A\right),\ \mathrm{eigA1} \to \lambda_{1}\left(A\right)$$

```
EigLmmax =  13.449
EigApmmax =  14.006
EigUmmax =  14.664
eigA2 =  10.169
eigA1 =  15.735
```

τα οποία επαληθεύουν τις σχέσεις (2.2.75) και (2.2.78) .

□

Βιβλιογραφία

1. Μ. Αδάμ, Αριθμητικά πεδία πινάκων ειδικής μορφής. Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών, 2000.
   Available: https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/12477.
2. R. Bhatia, Matrix Analysis, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, NY, 1997.
3. G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computations, 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.
4. Γ. Δονάτος και Μ. Αδάμ, Γραμμική Άλγεβρα θεωρία και εφαρμογές, Αθήνα, Gutenberg, 2008.
5. R. A. Horn and C. R. Johnson Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1990.
6. R. A. Horn and C. R. Johson, Topics in Matrix Analysis, University Press, 1991.
7. S.-G. Hwang, Cauchy's Interlace Theorem for Eigenvalues of Hermitian Matrices, Notes Monthly, Vol. 111, (2004, February), pp. 157-159.
   Availiable at http://matrix.skku.ac.kr/Series-E/Monthly-E.pdf
8. C. F. Ipsen and B. Nadler, Refined perturbation bounds for eigenvalues of Hermitian and non-Hermitian matrices, Siam J. Matrix Anal. Appl., Vol. 31, No. 1, pp. 40-53.
9. Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές, Αθήνα 3η έκδοση 2003.
10. G.W. Stewart and Ji-G. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic Press Limited, UK, 1990.
11. Θ. Χρυσάκης Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα 2013.
12. Π. Ψαρράκος, Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Σημειώσεις Αθήνα 2015
    Available: http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/Topics_in_Matrix_Analysis.pdf.

Παράρτημα

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε τα προγράμματα σε λογισμικό Matlab για τα παραδείγματα που αναφέρονται στα αντίστοιχα θεωρήματα.

Κώδικας 1

```
function [leftb,eigApmn,eigAn] = smallest(A)

% Επαλήθευση του θεωρήματος 2.5 - για τα φράγματα της
μικρότερης ιδιοτιμής του A-yy*
[n,m]=size(A);
% Εισαγωγή τυχαίου μιγαδικού διανύσματος y διάστασης,
υπολογισμός του διαταραγμένου πίνακα Apm=A-yy* και της
νόρμας-2 του y
w=sqrt(-1);
z1=randn(n,1);
z2=randn(n,1);
y=z1+z2*w;
Apm=A-y*y';
ny2=norm(y);

% Υπολογισμός ιδιοτιμών του πίνακα A και διάταξη αυτών σε
φθίνουσα σειρά
DA=sort(eig(A), 'descend');

% Υπολογισμός ιδιοτιμών διαταραγμένου πίνακα Apm και
διάταξη αυτών σε φθίνουσα σειρά
DApm=sort(eig(Apm), 'descend');

% Προσδιορισμός της μικρότερης ιδιοτιμής του A
eigAn=DA(n);

leftb= eigAn-ny2^2;
% Κάτω όριο της μικρότερης ιδιοτιμής του πίνακα Apm=A-yy*
eigApmn=DApm(n);
eigAn;

% Έλεγχος εφαρμογής του θεωρήματος 2.5
if (leftb <=eigApmn) && (eigApmn<= eigAn)
    disp('ισχύει η σχέση 2.1.7 του θεωρήματος 2.5')
else
    disp('ΔΕΝ ισχύει η σχέση 2.1.7 του θεωρήματος 2.5')
end


end
```

Κώδικας 2

```
function [eigA2,eigApm1,eigA1]=largest(A)

% Επαλήθευση του θεωρήματος 2.8 - για τα όρια της
μεγαλύτερης ιδιοτιμής του A-yy*
[n,m]=size(A)
% Εισαγωγή τυχαίου μιγαδικού διανύσματος y διάστασης nx1
και υπολογισμός του διαταραγμένου πίνακα Apm=A-yy*
w=sqrt(-1);
z1=randn(n,1);
z2=randn(n,1);
y=z1+z2*w;
Apm=A-y*y';

% Υπολογισμός ιδιοτιμών του πίνακα A και διάταξη αυτών σε
φθίνουσα σειρά
D=sort(eig(A),'descend');

% Προσδιορισμός των δύο μεγαλύτερων ιδιοτιμών του A
eigA1=D(1);
eigA2=D(2);

% Υπολογισμός ιδιοτιμών διαταραγμένου πίνακα Apm=A-yy*
και διάταξη αυτών σε φθίνουσα σειρά
DApm=sort(eig(Apm),'descend');

% Προσδιορισμός της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του Apm
eigApm1=DApm(1);

if (eigA2 <=eigApm1) && (eigApm1<= eigA1)
    disp('ισχύει η σχέση 2.1.8 του θεωρήματος 2.8')
else
    disp('ΔΕΝ ισχύει η σχέση 2.1.8 του θεωρήματος 2.8')
end


end
```

Κώδικας 3

```
function [EigLmmin,EigApmmin,EigUmmin,leftb,eigAmin] =
LU_smallest(A)

[n,m]=size(A);

% Εισαγωγή τυχαίου μιγαδικού διανύσματος y με τιμές στο
[-1,1] διάστασης  nx1
y1=randn(n,1);
y2=randn(n,1);
% Δημιουργία του τυχαίου μιγαδικού διανύσματος y
y=y1+y2*i;
y

[W,DA]=eig(A);
V=zeros(n,n);
D=zeros(n,n);
for j=1:n;
    V(:,j)=W(:,(n-j+1));
    D(j,j)=DA((n-j+1),(n-j+1));
end

lmin_1=D((n-1),(n-1)); % lmin_1 -> λ_(n-1)(A)
eigAmin=D(n,n); % eigAmin -> λ_n(A)
u=[lmin_1;eigAmin];
Lp1=diag(u);

Vn_1=V(:,1:(n-1));
y11=Vn_1'*y;
yn=V(:,n)'*y;
ynplin1=V(:,(n-1))'*y;
ny11=norm(y11);
ayn=abs(yn);
ny2=(norm(y))^2;

% Ορίζεται ο πίνακας  Lm -> L- και υπολογίζονται οι
ιδιοτιμές του
% EigLmin -> λmin(L-)
Ly=[ny11; yn];
Lm=Lp1-Ly*Ly'
EigLm=eig(Lm);
EigLmmin=min(EigLm);

% Ορίζεται ο πίνακας Um -> U- και υπολογίζονται οι
ιδιοτιμές του EigUmin -> λmin(U-)
Uy=[ynplin1;yn];
Um=Lp1-Uy*Uy'
EigUm=eig(Um);
EigUmmin=min(EigUm);
```

```
% Δημιουργία του πίνακα Διαταραχής Apm -> A-yy*
Apm=A-y*y';
% Υπολογισμός ιδιοτιμών διαταραγμένου πίνακα Apm -> A-yy*
% EigApmmin -> λmin(A-yy*)
EigApm=eig(Apm);
EigApmmin=min(EigApm);

if (EigLmmin<=EigApmmin) && (EigApmmin<=EigUmmin)
 disp('Επαληθεύεται το δεξιό μέρος της ανισότητας 2.2.22
και το αριστερό μέρος της ανισότητας 2.2.25 του
θεωρήματος 2.13')
else
   disp('ΔΕΝ επαληθεύεται το δεξιό μέρος της ανισότητας
2.2.22 και το αριστερό μέρος της ανισότητας 2.2.25 του
θεωρήματος 2.13')
end

leftb=eigAmin-ny2;
if (leftb<=EigLmmin)&&
(EigLmmin<=EigUmmin)&&(EigUmmin<=eigAmin)
    disp('Επαληθεύεται το αριστερό μέρος της ανισότητας
2.2.22 και το δεξιό μέρος της ανισότητας 2.2.25 του
θεωρήματος 2.13' )
else
   disp('ΔΕΝ επαληθεύεται το αριστερό μέρος της
ανισότητας 2.2.22 και το δεξιό μέρος της ανισότητας
2.2.25 του θεωρήματος 2.13')
end


end
```

Κώδικας 4

```
function [EigLmmax,EigApmmax,EigUmmax,eigA2,eigA1] =
LU_largest(A)
[n,m]=size(A);
% Εισαγωγή τυχαίου μιγαδικού διανύσματος y με τιμές στο
[-1,1] διάστασης  nx1
y1=randn(n,1);
y2=randn(n,1);
% Δημιουργία του τυχαίου μιγαδικού διανύσματος y
y=y1+y2*i;
y

[W,DA]=eig(A);
V=zeros(n,n);
D=zeros(n,n);
for j=1:n;
    V(:,j)=W(:,(n-j+1));
    D(j,j)=DA((n-j+1),(n-j+1));
end

eigA1=D(1,1); % eigA1 -> λ1(A)=λmax(A)
eigA2=D(2,2); % eigA2 -> λ2(A)
u=[eigA1;eigA2];
Lp1=diag(u);

V2n=V(:,2:n);
y2n=V2n'*y;
y1=V(:,1)'*y;
y2=V(:,2)'*y;
ny2n=norm(y2n);
ay1=abs(y1);
ny2=(norm(y))^2;

% Ορίζεται ο πίνακας Lm -> L- και υπολογίζονται οι
ιδιοτιμές του
% EigLmmax -> λmax(L-)
Ly=[y1; y2];
Lm=Lp1-Ly*Ly'
EigLm=eig(Lm);
EigLmmax=max(EigLm);

% Ορίζεται ο πίνακας Um -> U- και υπολογίζονται οι
ιδιοτιμές του
% EigUmax -> λmax(U-)
Uy=[y1;ny2n];
Um=Lp1-Uy*Uy'
EigUm=eig(Um);
EigUmmax=max(EigUm);

% Δημιουργία του πίνακα Διαταραχής App -> A-yy*
```

```
Apm=A-y*y';
% Υπολογισμός ιδιοτιμών διαταραγμένου πίνακα Apm -> A-yy*
% EigApmmax -> λmax(A-yy*)
EigApm=eig(Apm);
EigApmmax=max(EigApm);

if (EigLmmax<=EigApmmax) && (EigApmmax<=EigUmmax)
 disp('Επαληθεύεται το δεξιό μέρος της ανισοτικής σχέσης
2.2.78 του θεωρήματος 2.18 και το αριστερό μέρος της
ανισοτικής σχέσης 2.2.75 του θεωρήματος 2.18')
else
   disp('ΔΕΝ επαληθεύεται το δεξιό μέρος της ανισοτικής
σχέσης 2.2.78 του θεωρήματος 2.18 και το αριστερό μέρος
της ανισοτικής σχέσης 2.2.75 του θεωρήματος 2.18')
end

if (eigA2<=EigLmmax)&&
(EigLmmax<=EigUmmax)&&(EigUmmax<=eigA1)
    disp('Επαληθεύεται το αριστερό μέρος της ανισοτικής
σχέσης 2.2.78 του θεωρήματος 2.18 και το δεξιό μέρος της
ανισοτικής σχέσης 2.2.75 του θεωρήματος 2.18')
else
   disp('ΔΕΝ επαληθεύεται το αριστερό μέρος της
ανισοτικής σχέσης 2.2.78 του θεωρήματος 2.18 και το δεξιό
μέρος της ανισοτικής σχέσης 2.2.75 του θεωρήματος 2.18')
end


end
```

Abstract

The aim of this master thesis is to study the eigenvalues bounds of perturbations Hermitian matrices $A \in M_n(\mathbb{F})$ from column vector $y \in \mathbb{C}^n$, which are formulated by $A - yy^*$. Firstly we investigated the known inequalities that arises from Weyl's Theorem and its applications. In the following, we improve the above bounds using the numerical range of suitable 2x2 Hermitian matrices, whose the entries are given as projection of the perturbation onto a particular eigenspace.