ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

Διαταραχή Ιδιοτιμών Ερμιτιανού Πίνακα

Χρίστος Τριανταφύλλου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

Μαρία Αδάμ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Λαμία, Ιούνιος 2019

UNIVERSITY OF THESSALY

SCHOOL OF SCIENCE

INFORMATICS AND COMPUTATIONAL BIOMEDICINE

Perturbation Bounds For Eigenvalues of a Hermitian Matrix

Christos Triantafyllou

Master thesis

Supervisor

Dr. Maria Adam

Associate Professor

Lamia, June 2019

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΙΑΤΡΙΚΗ ΚΑΙ ΒΙΟΛΟΓΙΑ»

Διαταραχή Ιδιοτιμών Ερμιτιανού Πίνακα

Χρίστος Τριανταφύλλου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

Μαρία Αδάμ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Λαμία, Ιούνιος 2019

«Υπεύθυνη Δήλωση μη λογοκλοπής και ανάληψης προσωπικής ευθύνης»

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, και γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα και ενυπογράφως ότι η παρούσα εργασία με τίτλο «Διαταραχή Ιδιοτιμών Ερμιτιανού Πίνακα» αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές από τις οποίες χρησιμοποίησα δεδομένα, ιδέες, φράσεις, προτάσεις ή λέξεις, είτε επακριβώς (όπως υπάρχουν στο πρωτότυπο ή μεταφρασμένες) είτε με παράφραση, έχουν δηλωθεί κατάλληλα και ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Ο/Η ΔΗΛΩΝ/-ΟΥΣΑ

Ημερομηνία

Υπογραφή

Διαταραχή Ιδιοτιμών Ερμιτιανού Πίνακα

Χρίστος Τριανταφύλλου

Τριμελής Επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο, κ Μαρία Αδάμ (επιβλέπουσα) Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Ονοματεπώνυμο, κ. Βασίλης Πλαγιανάκος Καθητητής

Ονοματεπώνυμο, κ. Κων/νος Δελήμπασης Αναπληρωτής Καθηγητής

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Είναι γνωστή η εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας σε διάφορους επιστημονικούς τομείς για παράδειγμα, η πραγματοποίηση μελέτης μοντέλων και προβλημάτων σε επιστήμες όπως Οικονομία, Κοινωνιολογία, Γενετική, Οικολογία, Θεωρία Παιγνίων, Φυσική.

Πολύ συχνά στις εφαρμογές, παρουσιάζεται η αναγκαιότητα να μελετηθούν Ερμιτιανοί πίνακες, όπως κατά την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, στην επεξεργασία σήματος και στην επεξεργασία εικόνας, κ.α.. Οι σημαντικότερες ιδιότητες των Ερμιτιανών πινάκων είναι ότι έχουν πραγματικές ιδιοτιμές, διαγωνοποιούνται από ένα σύνολο ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων, το αριθμητικό τους πεδίο είναι το ευθύγραμμο τμήμα του πραγματικού άξονα με άκρα τη μικρότερη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα. Επίσης μπορούμε να προσεγγίσουμε τις ιδιοτιμές των Ερμιτιανών πινάκων από πίνακες μικρότερης διάστασης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ως διαταραχή ενός τετραγωνικού Ερμιτιανού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ από ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$ ορίζεται ο Ερμιτιανός πίνακας $A + yy^*$. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι η μελέτη των φραγμάτων της ελάχιστης και της μέγιστης ιδιοτιμής ενός διαταραγμένου Ερμιτιανού πίνακα $A + yy^*$ ως συνάρτηση των ιδιοτιμών του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ και της 2-νόρμας του διανύσματος y. Επιπρόσθετα, τα γνωστά φράγματα των ιδιοτιμών του διαταραγμένου πίνακα, που καθορίστηκαν από το Θεώρημα Weyl, βελτιώνονται με την έκφραση του διαταραγμένου πίνακα μέσω προβολής του διανύσματος $y \in \mathbb{C}^n$ σε ένα συγκεκριμένο υπόχωρο ιδιοδανυσματων του αρχικού Ερμιτιανού πίνακα.

Κάθε κεφάλαιο αυτής της εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες αριθμούνται με δυο αριθμούς, ενώ κάποια αριθμούνται με τρεις αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, εφόσον υπάρχει υποδιαίρεση, στην υποδιαίρεσή της.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας πινάκων, ορισμοί, προτάσεις και θεωρήματα που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Γίνεται αναφορά στα είδη των πινάκων, στις πράξεις πινάκων, την ομοιότητα, τη νόρμα διανύσματος, τη νόρμα πίνακα, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα και τη διαγωνοποίηση. Επίσης παρουσιάζεται το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα και αποδεικνύονται οι ιδιότητες που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το βασικό κομμάτι της εργασίας αυτής. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρεται το Θεώρημα Weyl καθώς και θεωρήματα που περιορίζουν τα όρια των ιδοτιμών Ερμιτιανών πινάκων, που διαταράσσεται από πίνακα yy^* και αναφέρεται το Cauchy interlacing Theorem. Στη συνέχεια αποδεικνύονται οι σχέσεις που εντοπίζουν την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα σε διαστήματα του πραγματικού άξονα που εμπεριέχονται στα αντίστοιχα διαστήματα που προέκυπταν από το Θεώρημα Weyl και τις γενικεύσεις του. Τα αποτελέσματα επαληθεύονται από παραδείγματα.

Στο τέλος της εργασίας παρουσιάζονται τα σχετικά συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο κείμενο. Πολλά από αυτά είναι χρήσιμα για εμβάθυνση και περαιτέρω μελέτη των προαναφερόμενων εννοιών. Στο Παράρτημα υπάρχουν οι κώδικες των θεωρημάτων σε MATLAB.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω του διδάσκοντες καθηγητές του Διατμηματικού Πρόγραμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (Π.Μ.Σ.) με τίτλο «Πληροφορική και Υπολογιστική Βιοϊατρική», κ. Πλαγιανάκο Βασίλειο, κα Αδάμ Μαρία, κ. Δελήμπαση Κων/νο, κ. Σανδαλίδη Χάρη, κ Μπάγκο Παντελή, κ. Κακαρούντα Αθανάσιο και κ. Σπαθούλα Γεώργιο. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα πρέπει να εκφράσω στην κα Αδάμ Μαρία που ήταν η επιβλέπουσα αυτής της εργασίας, για την υπομονή της, τη συμπαράστασή της και το χρόνο που διέθεσε οποιαδήποτε στιγμή την χρειάστηκα.

Abstract

The aim of this master thesis is to improve the eigenvalues bounds of perturbations Hermitian matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ from column vector $y \in \mathbb{C}^n$, regarding the bounds given by Weyl's Theorem. We express the change of eigenvalues in terms of a projection of the perturbation onto a particular eigenspace, rather than the full pertubation.

Λέξεις Κλειδιά

Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Ερμιτιανοί Πίνακες, Διαγωνοποίηση, Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα, Διαταραχή nxn Ερμιτιανού Πίνακα από Τυχαίο Διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικότερες έννοιες της Άλγεβρας των Πινάκων οι οποίες είναι απαραίτητες για το 2ο Κεφάλαιο.

Για τον ορισμό των βασικών εννοιών ενός πίνακα A, είναι αναγκαία η αναφορά στους παρακάτω συμβολισμούς.

- Το σύνολο $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.
- Το σύνολο $\mathbb{R}_+$ συμβολίζει το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

1.1 Ορισμοί - Είδη Πινάκων

Ορισμός 1.1.1
Πίνακας Α είναι μια ορθογώνια διάταξη σε m γραμμές και n στήλες, $m.n$ στοιχείων (αριθμών) του συνόλου $\mathbb{F}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ή σύντομα $A = (\alpha_{ij}), 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n$

Οι αριθμοί $\alpha_{i,j}$ ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα, οι δείκτες i, j αναφέρονται ο πρώτος στις γραμμές και ο δεύτερος στις στήλες του A και για τον πίνακα A σημειώνουμε mxn τον **τύπο** του ή τη **διάστασή** του. Το σύνολο των mxn πινάκων με στοιχεία από το σύνολο $\mathbb{F}$ στη συνέχεια θα συμβολίζεται με $M_{mxn}(\mathbb{F})$.

Αν διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες από τον πίνακα A, ο πίνακας που απομένει ονομάζεται **υποπίνακας** του πίνακα A. Ένας υποπίνακας του πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathcal{F})$, που απομένει από τη διαγραφή των k γραμμών και αντίστοιχων στηλών του πίνακα A αρχικών ή τελικών, ονομάζεται **κύριος υποπίνακάς** του.

Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathcal{F})$ ονομάζεται **σύνθετος πίνακας** ή **block πίνακας** αν έχει στοιχεία που είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από το μέγεθος του A. Ο σύνθετος πίνακας συμβολίζεται με $A = \left(A_{ij}\right)$, όπου A_{ij} είναι ένας υποπίνακας, στοιχείο του A, που προκύπτει από τη διαμέριση του αρχικού πίνακα A με κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές και είναι τοποθετημένος στην i γραμμή και j στήλη του **σύνθετου πίνακα.**

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 1+i \\ 2 & 0 & 1 & 2i \\ \hline 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

όπου $A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$, $A_{21} = (1 \quad 3)$ και $A_{22} = (2 \quad -3)$

Ένας $2x3$ κύριος υποπίνακας του πίνακα A είναι ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■

1.1.2 Είδη Πινάκων

1) Ένας $1xn$ πίνακας λέγεται **πίνακας-γραμμή**, ανήκει στο $M_{1\times n}(\mathbb{F})$ και στην παρούσα εργασία συμβολίζεται $\mathbb{F}_{1xn}$. Ένας $nx1$ πίνακας λέγεται **πίνακας-στήλη** ή **διάνυσμα,** ανήκει στο $M_{n\times 1}(\mathbb{F})$ και συμβολίζεται $\mathbb{F}_{nx1}$. Για παράδειγμα ο πίνακας $A = (1 \quad -2 \quad 1) \in \mathbb{F}_{1x3}$ είναι πίνακας γραμμή και $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_{3x1}$ είναι πίνακας στήλη.

   Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας, επειδή ο καθένας διανυσματικός χώρος $\mathbb{F}_{1xn}$ και $\mathbb{F}_{nx1}$ είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$ οι παραπάνω πίνακες γραμμής ή στήλης θεωρείται ότι ανήκουν στον $\mathbb{F}^n$.
2) Εάν όλα τα στοιχεία ενός mxn πίνακα είναι ίσα με μηδέν, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με $\mathbb{O}_{mxn}$ ή απλά με $\mathbb{O}$.
3) Έστω $A = (\alpha_{ij})$ ένας mxn πίνακας. Ο nxm όταν δεν υπάρχει σύγχυση με τη διάστασή του πίνακας (α_{ji}) ονομάζεται **ανάστροφος** του A και συμβολίζεται με A^T.

   Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Έστω $A = (\alpha_{ij})$ ένας mxn πίνακας. Ο mxn πίνακας $(\bar{a}_{ij})$, ο οποίος έχει στοιχεία του τα συζυγή στοιχεία του A, ονομάζεται **συζυγής** του A και συμβολίζεται $\overline{A}$.
   Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 & -2i \\ 3 & i & 0 \end{pmatrix}$, τότε $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 2i \\ 3 & -i & 0 \end{pmatrix}$.
5) Έστω $A = (\alpha_{ij})$, ένας mxn πίνακας. Ο mxn πίνακας $(\bar{a}_{ji})$ ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του A και συμβολίζεται $A^* = \bar{A}^T$.
   Για παράδειγμα,, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ -3i & 1 & 0 \end{pmatrix}$, τότε A*$= \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ -2i & 1 \\ 1-2i & 0 \end{pmatrix}$.
6) Ένας πίνακας, που έχει τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών $(m = n)$, ονομάζεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο όλων των nxn πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ συμβολίζεται με $M_n(\mathbb{F})$.
7) Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **διαγώνιος**, αν για κάθε $i \neq j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή, αν κάθε στοιχείο που δεν βρίσκεται στη διαγώνιο είναι ίσο με μηδέν. Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται $A = diag(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.
   Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας nxn, που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1, ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται
$$I_n = diag(1,1,\dots,1).$$
   Δηλαδή, είναι
$$I_n = (\delta_{ij}),$$
   όπου
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ i = j \\ 0, & \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$$

8) Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **άνω τριγωνικός**, αν για κάθε $i > j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή, αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.
   Αντίθετα ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ λέγεται **κάτω τριγωνικός**, αν για κάθε $i < j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Πίνακας άνω τριγωνικός

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Πίνακας κάτω τριγωνικός

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.1.3

Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **θετικός** (positive) όταν όλα τα στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί και συμβολίζεται $A > 0$

Ένας πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **μη αρνητικός** (nonnegative) όταν τα στοιχεία του είναι μη αρνητικοί αριθμοί και συμβολίζεται $A \geq 0$

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 45 & 10 \end{pmatrix}$ είναι θετικός και ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 5 \\ 12 & 7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ είναι μη αρνητικός.

Ορισμός 1.1.4

Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Η **απόλυτη τιμή** του πίνακα A συμβολίζεται με $|A|$ και ορίζεται ο μη αρνητικός πίνακας με $|A| = (|\alpha_{ij}|)$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1-i & 0 \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$ έχει απόλυτη τιμή $|A|=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Όπως παρατηρούμε η απόλυτη τιμή του A είναι ένας μη αρνητικός πίνακας, $|A| \geq 0$.

Ορισμός 1.1.5

- Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **συμμετρικός** (symmetric), όταν $\alpha_{ij} = a_{ji}$, για κάθε $i, j = 1,2, \dots n$. Ισοδύναμα πρέπει να ισχύει $A = A^T$.

  Για παράδειγμα ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός.

- Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **αντισυμμετρικός** (skew-symmetric), όταν $\alpha_{ij} = -a_{ji}$, για κάθε $i, j = 1,2, \dots n$ Ισοδύναμα πρέπει να ισχύει $A^T = -A$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός.

- Ένας πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **Ερμιτιανός** (Hermitian), όταν $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$, για κάθε $i, j = 1,2, \dots n$.Ισοδύναμα πρέπει να ισχύει $A = A^*$. Προφανώς για τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ισχύει $\alpha_{ii} = \bar{\alpha}_{ii}$, για κάθε $i, j = 1,2, \dots n$ από όπου συμπεραίνουμε ότι η κύρια διαγώνιος αποτελείται μόνο από πραγματικούς αριθμούς.

  Για παράδειγμα, ο πίνακας $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2+i & 3i \\ -2-i & 0 & 4 \\ -3i & 4 & -2 \end{pmatrix}$ είναι **Ερμιτιανός.**

Ορισμός 1.1.6

Έστω ο Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$. Αν για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ ισχύει $x^*Ax > 0$, τότε ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος πίνακας** (positive definite matrix), ενώ όταν ισχύει $x^*Ax \geq 0$, τότε ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος πίνακας** ή **μη αρνητικά ορισμένος πίνακας** (nonnegative definite matrix).

Για παράδειγμα ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος, επειδή για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1 \quad x_2) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$x^* Ax = x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 = (2x_1 + 3x_2)^2 + x_2^2 > 0.$$

Ο πίνακας $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος, επειδή για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3) \in \mathbb{R}^3$ ισχύει

$$x^* Ax = x^T Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 =$$

$$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 + (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3)^2 + (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3)^2 \geq 0 .$$

Εκτός από την άλγεβρα Boole και τη θεωρία γραφημάτων, όπου οι πίνακες με στοιχεία 0,1 παίζουν σημαντικό ρόλο, στη συνέχεια ορίζεται μια κατηγορία πινάκων με στοιχεία 0,1, που είναι ιδιαίτερα σημαντικοί στην ανάλυση πινάκων.

Ορισμός 1.1.7

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **πίνακας μετάθεσης** (permutation matrix) αν όλα τα στοιχεία του είναι 0 ή 1 έτσι ώστε σε κάθε γραμμή ή στήλη η μονάδα να υπάρχει μόνο μια φορά και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν. Για παράδειγμα, οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι πίνακες μετάθεσης.

Οι πίνακες μετάθεσης προκύπτουν από μετάθεση των γραμμών του μοναδιαίου

πίνακα I_n.

`

1.2 Άλγεβρα πινάκων, Νόρμα διανύσματος – Νόρμα πίνακα

Ορισμός 1.2.1

Δύο πίνακες $A = (\alpha_{ij})$ και $B = (\beta_{ij})$ λέγονται **ίσοι** και γράφουμε $\boldsymbol{A = B}$ αν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, τον ίδιο αριθμό στηλών και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, συνεπώς για κάθε i, j ισχύει

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij}$$

Ορισμός 1.2.2

Έστω οι πίνακες $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathcal{F})$ και $B = (\beta_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathcal{F})$. **Άθροισμα** των A, B πινάκων ορίζεται ο mxn πίνακας $A + B$ με στοιχεία γ_{ij} έτσι ώστε:

$$\gamma_{ij} = a_{ij} + \beta_{ij}$$

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, τότε:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας του πίνακες $A, B, \mathbb{O} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ώς χαρακτηριστικές ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων μπορούμε να αναφέρουμε τις ακόλουθες:

1) αντιμεταθετική ιδιότητα: $A + B = B + A$

2) προσεταιριστική ιδιότητα: $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
3) μηδενικός πίνακας: $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
4) αντίθετος πίνακας $A + (-A) = (-A) + A = \mathbb{O}$

Ορισμός 1.2.3

Έστω ο πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in M_{mxn}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Το **γινόμενο** kA είναι ο mxn πίνακας kA με στοιχεία $k\alpha_{ij}$ και ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** πίνακα επί αριθμό.

Για παράδειγμα , αν θεωρήσουμε $k = -2$ και

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

τότε

$$-2A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -6 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Θεωρώντας $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ και $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ως χαρακτηριστικές ιδιότητες του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πίνακα επί αριθμό μπορούμε να αναφέρουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
4) $1A = A$
5) $\alpha A = \mathbb{O}, \textit{τότε}\ \alpha = 0$ ή $A = \mathbb{O}$
6) $\alpha\nu\ \alpha \neq 0,\ \kappa\alpha\iota\ \alpha A = \alpha B\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ A = B$
7) $\alpha\nu\ A \neq \mathbb{O},\ \kappa\alpha\iota\ \alpha A = \beta A\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha = \beta$

Ορισμός 1.2.4

Έστω οι πίνακες $A = \left(\alpha_{ij}\right) \in M_{m\times k}(\mathbb{F})$ και $B = \left(\beta_{ij}\right) \in M_{k\times n}(\mathbb{F})$. Το **γινόμενο** AB είναι ο mxn πίνακας AB με στοιχεία γ_{ij} τέτοια ώστε:

$$\gamma_{ij} = a_{i1}\beta_{1j} + a_{i2}\beta_{2j} + \cdots + a_{ik}\beta_{kj} = \sum_{m=1}^{k} a_{im}\beta_{mj}$$

Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\0&2&1\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{pmatrix}-1&3\\0&1\\2&5\end{pmatrix}, \text{ τότε } \quad AB=\begin{pmatrix}1&18\\2&7\end{pmatrix}$$

Επίσης, αν

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3&7\\-3&-2\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad BA=\begin{pmatrix}-2&7\\-3&3\end{pmatrix}.$$

Από το τελευταίο παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι αν ορίζονται τα γινόμενα AB, BA εν γένει ισχύει $AB \neq BA$.

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων

Θεωρώντας κατάλληλους πίνακες από άποψη διαστάσεων A, B, Γ και $\alpha \in \mathbb{F}$ ως χαρακτηριστικές ιδιότητες του γινομένου πινάκων μπορούμε να αναφέρουμε:

1) Προσεταιριστική $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$
2) Επιμεριστική $A(B+\Gamma) = AB + A\Gamma$ και $(B+\Gamma)A = BA + \Gamma A$
3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Επιπλέον αν $A \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται η **δύναμη** πίνακα ως εξής:

$$\mathrm{A}^{\mathrm{k}} = \underbrace{\mathrm{A.A.A...A}}_{\mathrm{k}\ \varphi o \rho \acute{\varepsilon} \varsigma},\ k \in \mathbb{N}^* \text{ και } A^0 = I_n.$$

Μια άλλη πράξη η οποία χρησιμοποιείται λιγότερο συχνά, είναι το **ευθύ άθροισμα** (direct sum) που συμβολίζεται με $\oplus$(βλέπε, [8]).

Ορισμός 1.2.5
Έστω το ζεύγος πινάκων $A = (\alpha_{ij}) \in M_{mxn}(\mathbb{F})$ και $B = (\beta_{ij}) \in M_{pxq}(\mathbb{F})$ ο $(m+p)x(n+q)$ πίνακας $(A \oplus B)$ ορίζεται να είναι :

$$A \oplus B = \begin{pmatrix}A_{mxn} & \mathbb{O}_{mxq}\\ \mathbb{O}_{pxn} & B_{pxq}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1n}&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&0&\beta_{11}&\cdots&\beta_{1q}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0&\beta_{p1}&\cdots&\beta_{pq}\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Για παράδειγμα , αν $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ τότε

$$A\oplus B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Το ευθύ άθροισμα των πινάκων είναι ένας block πίνακας, και συγκεκριμένα το ευθύ άθροισμα τετραγωνικών πινάκων είναι ένας block διαγώνιος πίνακας με διαγώνια block τους πίνακες από το ευθύ άθροισμα.

Γενικά το ευθύ άθροισμα k το πλήθος nxn πινάκων ορίζεται ως:

$$\bigoplus_{i=1}^{k} A_i = diag(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & A_2 & \cdots & \mathbb{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & A_k\end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.2.6

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με στοιχεία στο $\mathbb{F}$. Μια απεικόνιση

$$* : VxV \to \mathbb{F} : \ (u,v) \to u * v$$

ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) στο V, όταν για κάθε $u, v, w \in V$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $(\alpha u + bv) * w = a(u * w) + b(v * w)$
ii) $u * v = \overline{v * u}$
iii) $u * u \geq 0$
iv) $u * u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες iii), iv) του Ορισμού 1.2.6 μπορούμε να ορίσουμε μέτρο για τα στοιχεία-διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V. Θεωρώντας στη συνέχεια ότι ο διανυσματικός χώρος είναι ο $\mathbb{F}^n$ (που είναι ισόμορφος με $\mathbb{F}^{1xn}$ και $\mathbb{F}^{nx1}$),[1] ορίζουμε το μέτρο του διανύσματος στον $\mathbb{R}^n$ και δίνουμε τα σημαντικότερα μέτρα του.

Ορισμός 1.2.7

Νόρμα (norm) ή **μέτρο** ενός διανύσματος $x \in \mathbb{F}^n$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

[1] Βλέπε Ενότητα 1.1.2 **Είδη Πινάκων** της παρούσης εργασίας

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ και $x, y \in \mathbb{F}^n$

iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{F}^n$

Η iv) ιδιότητα είναι γνωστή ως τριγωνική ανισότητα (Triangle Inequality).

Για ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ οι πιο γνωστές νόρμες είναι οι ακόλουθες:

- $\boldsymbol{p}$ **− νόρμα** του $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ είναι:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε p -νόρμα, με $1 \leq p < +\infty$, ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 1.2.7, συνεπώς η $p -$ νόρμα ορίζει ένα μέτρο στον $\mathbb{F}^n$.

Ειδικότερα, για ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ και $p = 2$, η παραπάνω νόρμα γράφεται:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{1.2}$$

γνωστή ως **Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{C}^n$.**

Στην περίπτωση που $x \in \mathbb{R}^n$ η παραπάνω νόρμα γράφεται:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

γνωστή ως **Ευκλείδεια νόρμα στον** $\mathbb{R}^n$.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{F}_{nx1} \simeq \mathbb{F}^n$ ισχύει:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^* x} \tag{1.3}$$

Ορισμός 1.2.8

Μια νόρμα $\|*\|$ ονομάζεται **ορθομοναδιαία αναλλοίωτη** (unitarity invariant) όταν ισχύει:

$$\|Ux\| = \|x\|$$

για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ και ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{F}_{nx1} \simeq \mathbb{F}^n$ είναι **ορθομοναδιαία αναλλοίωτη** καθώς για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{F}_{nx1}{}^n$ και για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ ισχύει:

$$\|Ux\|_2^2 = (Ux)^*(Ux) = x^*U^*Ux = x^*I_nx = x^*x = \|x\|_2^2$$

Συνδυάζοντας την (1.2) και (1.3) για την Ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος $x \in \mathbb{F}^n$ θα γράφουμε:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \sqrt{x^*x}$$

- **άπειρο-**νόρμα

$$\|x\|_\infty = \underbrace{\max}_{1\le i\le n}\{|x_i|\} \tag{1.4}$$

- **1**- νόρμα

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1.5}$$

Η **1**- νόρμα είναι γνωστή και ως νόρμα Μανχάταν **(Manxattan norm)**

Το όνομα της σχετίζεται με την απόσταση που θα διανύσει ένα αυτοκίνητο κινούμενο πάνω σε ένα ορθογώνιο πλέγμα δρόμων, ώστε ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων να καταλήξει στο ζητούμενο σημείο x.

Για παράδειγμα, αν έχουμε το διάνυσμα $x = (1, -2, -1, -3i)$, τότε τα αντίστοιχα μέτρα $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$ και $\|x\|_2$ είναι:

$\|x\|_\infty, = \max\{\, |1|, |-2|, |-1|, |-3i|\} = 3$

$\|x\|_1 = |1| + |-2| + |-1| + |3i| = 7$

$\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-2|^2 + |-1|^2 + |3i|^2} = \sqrt{1+4+1+9} = \sqrt{15} = 3.8730$

Ορισμός 1.2.9

Νόρμα (norm) ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: M_n(\mathbb{F}) \to [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

i) $\|A\| \geq 0$

ii) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}$

iii) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}$

iv) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$

v) $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\| \ \forall A, B \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$

Η ιδιότητα iv) είναι γνωστή ως τριγωνική ανισότητα και η ανισότητα στην v) είναι γνωστή ως ανισότητα Cauchy-Schwarz

Για ένα πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ οι πιο γνωστές νόρμες είναι οι ακόλουθες:

- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \}$ **(νόρμα γραμμή)** (1.6)

- $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \}$ **(νόρμα στήλη)** (1.7)

- $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ **(Frobenius νόρμα)** (1.8)

- $|||A||| = \sqrt{\rho(A^*A)}$ **(φασματική νόρμα)-spectral norm** (1.9)

όπου $\rho(A^*A)$ είναι η φασματική ακτίνα[2] του Ερμιτιανού πίνακα A^*A

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 1 \\ -1 & 3 & -i \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, τότε οι προαναφερθείσες νόρμες είναι:

η νόρμα γραμμή από την (1.6) υπολογίζεται:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3}\{ \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| \} = \max\{ |2| + |-2i| + |1|, |-1| + |3| + |-i|, |2| + |-4| + |1| \}$$

$$= \max\{ 5,5,7\} = 7$$

η νόρμα στήλη από την (1.7) υπολογίζεται:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 3}\{ \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| \} = \max\{ |2| + |-1| + |2|, |-2i| + |3| + |-4|, |1| + |-i| + |1| \}$$

$$= \max\{5,9,3\} = 9$$

[2] Βλέπε (1.23)

η Frobenius νόρμα από την (1.8) υπολογίζεται:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}|^2} =$$

$$= \sqrt{|2|^2 + |-2i|^2 + |1|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |-i|^2 + |2|^2 + |-4|^2 + 1^2} = \sqrt{41}$$

$$\approx\ 6{,}40$$

η φασματική νόρμα από την (1.8) υπολογίζεται:

$$|||A||| = \sqrt{\rho(A^* A)} = 5{,}9415$$

Η Frobenius νόρμα μπορούμε να πούμε πως είναι η Ευκλείδεια νόρμα του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$. Επίσης είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, (βλέπε Ορισμό 1.2.8) επειδή αν γράψουμε κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ στη μορφή $A = (\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ όπου $\alpha_i \in \mathbb{F}_{nx1}$ να είναι i στήλη του A τότε έχουμε:

$$\|A\|_F^2 = \|\alpha_1\|_F^2 + \|\alpha_2\|_F^2 + \cdots + \|\alpha_n\|_F^2 \tag{1.10}$$

Η 2-νορμα διανύσματος στον $\mathbb{F}^n$ είναι **ορθομοναδιαία αναλλοίωτη** όπως είδαμε στον Ορισμό 1.2.8 οπότε για τον ορθομοναδιαίο $U \in M_n(\mathbb{F})$

$$\begin{aligned}\|UA\|_F^2 &= \|U\alpha_1\|_F^2 + \|U\alpha_2\|_F^2 + \cdots + \|U\alpha_n\|_F^2 \\ &= \|\alpha_1\|_F^2 + \|\alpha_2\|_F^2 + \cdots + \|\alpha_n\|_F^2 \\ &= \|A\|_F^2\end{aligned}$$

άρα

$$\|UA\|_F^2 = \|A\|_F^2 \tag{1.11}$$

Επειδή ισχύει $\|A\|_F = \|A^*\|_F$ για κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει ότι για κάθε ζεύγος ορθομοναδιαίων πινάκων $U, V \in M_n(\mathbb{F})$, ισχύει:

$$\|UAV\|_F = \|U(AV)\|_F \overset{(1.11)}{=} \|AV\|_F = \|(AV)^*\|_F = \|V^* A^*\|_F \overset{(1.11)}{=} \|A^*\|_F = \|A\|_F$$

Η **φασματική νόρμα (spectral norm)** από την (1.9) υπολογίζεται:

Επειδή οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^* A$ είναι πραγματικές και μη αρνητικές αφού είναι μη αρνητικά ορισμένος. Επομένως είναι $\rho(A^* A) = \lambda_{max}(A^* A) = \overline{\lambda_{max}(A^* A)} \geq 0$.

Για οποιοδήποτε μη μηδενικό μοναδιαίο διάνυσμα x

$$|||A|||^2 = \max_{x \neq 0} \frac{|||Ax|||^2}{\|x\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{(Ax)^* Ax}{x^* x} = \max_{x \neq 0} \frac{x^* A^* Ax}{x^* x} = \frac{x^* \lambda_{max}(A^* A) x}{x^* x} = \lambda_{max}(A^* A).$$

Άρα

$$|||A||| = \sqrt{\rho(A^* A)}$$

■

1.3 Συμπληρωματικοί ορισμοί βασικών εννοιών τετραγωνικών πινάκων

Ορισμός 1.3.1

Το **ίχνος** (trace) ενός πίνακα $\mathrm{A} = (\alpha_{ij}) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$ ορίζεται το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, δηλαδή

$$trA = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{1.12}$$

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του $A \in M_n(\mathbb{F})$ (βλέπε, Ορισμό 1.4.1). Στη βιβλιογραφία, [2, 3, 6] αποδεικνύεται ότι το trA του πίνακα A ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα.

Δηλαδή

$$trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \tag{1.13}$$

Επιπλέον θεωρώντας τους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ και τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{F}$ σχετικά με το ίχνος μπορούν να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
ii) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
iii) $tr(AB) = tr(BA)$

Την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [2,6] και στις αναφορές που αναφέρονται στα παραπάνω βιβλία.

Συνδυάζοντας τον ορισμό της νόρμας Frobenius τις (1.12) - (1.13) έχουμε την ισότητα:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^* A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (A^* A)} \tag{1.14}$$

Ορισμός 1.3.2

Αν για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει $B \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **αντιστρέψιμος** (invetrible, nonsingular) και ο B λέγεται **αντίστροφος** του A ο οποίος σημειώνεται A^{-1}.

Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες τότε αποδεικνύονται [2, 6] μεταξύ των άλλων και οι ιδιότητες:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Ορισμός 1.3.3
Ορίζουσα (determine) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, συμβολίζεται $\det(A)$, είναι μια απεικόνιση

$$det: M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \ : \ A \to \det(A)$$

για την οποία ισχύει

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) \qquad (1.15)$$

για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ ή $j = 1,2,\dots,n$, όπου A_{ij} είναι $(n-1)x(n-1)$ πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A, αν διαγράψουμε τα στοιχεία της i −γραμμής και της j −στήλης.

Ειδικά όταν ξέρουμε τα στοιχεία του πίνακα A, η ορίζουσα του $A \in M_n(\mathbb{F})$ σημειώνεται και $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ έχει ορίζουσα, που υπολογίζεται από την (1.15) στον Ορισμό 1.3.3 για $j = 2$ επειδή η 2η γραμμή έχει 2 μηδενικά στοιχεία.

$$\det(A) = -0\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1(2-14) - 0 = -12$$

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των οριζουσών διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, την απόδειξη των οποίων ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας που δίνεται στη βιβλιογραφία [2, 3, 6] και στις αναφορές σε αυτά.

Πρόταση 1.3.4
Έστω $A, \in M_n(\mathbb{F})$

i) *Οι ιδιότητες που αναφέρονται για τις γραμμές της ορίζουσας του πίνακα, ισχύουν και για τις στήλες του.*

ii) *Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $det(A) \neq 0$.*

iii) *Αν ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *έχει μηδενική γραμμή, τότε* $de\,t(A) = 0$.

iv) *Αν ο πίνακας* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *έχει δύο γραμμές ανάλογες, τότε* $de\,t(A) = 0$.

v) *Αν ο πίνακας* $B \in M_n(\mathbb{F})$ *προκύπτει από τον πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *με εναλλαγή δύο γραμμών ή δύο στηλών, τότε* $de\,t(B) = -de\,t(A)$.

vi) *Αν ο πίνακας* $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι άνω (κάτω) τριγωνικός τότε* $det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ *όπου* $\alpha_{ii}, i = 1,2, \dots, n$, *είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.*

vii) *Αν ο πίνακας* $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι διαγώνιος έχει ορίζουσα που ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα ισούται με* 1.

viii) *Για κάθε πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύουν* $det(A^T) = det(A)\,, det(\bar{A}) = \overline{det(A)}$, *και* $det(A^*) = \overline{det(A)}$.

ix) *Αν* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, *τότε* $det(AB) = det(A)\,.\,det(B)$.

x) *Για κάθε πίνακα* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ισχύει* $det(A^k) = (detA)^k, k \in \mathbb{N}$.

xi) *Αν* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $\lambda \in \mathbb{F}$ *τότε* $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

Σχόλιο: Δεν ισχύει για το άθροισμα ανάλογη ιδιότητα με την *ix)*, δηλαδή

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Ορισμός 1.3.5
Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **ορθομοναδιαίος,** αν ισχύει

$$A^*A = AA^* = I_n \tag{1.16}$$

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **ορθογώνιος,** αν ισχύει

$$A^T A = AA^T = I_n \tag{1.17}$$

Ορισμένες ιδιότητες για τους ορθομοναδιαίους / ορθογώνιους πίνακες μπορούμε να αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.3.5 και ιδιότητες που αναφέρονται στην Πρόταση 1.3.4.

Για την ορίζουσα ενός ορθομοναδιαίου πίνακα ισχύει: $\det(A) = \pm 1$.

Πράγματι, από την ισότητα του Ορισμού 1.3.5, $A^*A = I_n$ μπορούμε να γράψουμε

$$\det(A^*A) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det(A^*)\det(A) = 1 \Leftrightarrow (\det(A))^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\det(A) = 1 \text{ ή } \det(A) = -1.$$

Από την ισότητα $A^*A = I_n$ συμπεραίνουμε ότι ο αντίστροφος του ορθομοναδιαίου είναι ο αναστροφοσυζυγής του.

Παράδειγμα

i) Ο πίνακας $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}$ είναι ορθομοναδιαίος. Πράγματι

$$A\,A^{*}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{pmatrix}=I_3$$

Όμοια από την (1.17) συμπεραίνουμε ότι

ii) Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος. Πράγματι,

$$A\,A^{T}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=I_2$$

■

Ορισμός 1.3.6
Δύο πίνακες $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται **όμοιοι** (similar) και συμβολίζονται $B\sim A$ αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P\in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει $B=P^{-1}AP$.

Ο πίνακας P ονομάζεται **πίνακας ομοιότητας.**

Στην ακόλουθη πρόταση διατυπώνονται οι ιδιότητες που ικανοποιούνται από μια σχέση ομοιότητας.

Πρόταση 1.3.7

*Η ομοιότητα είναι μια σχέση **ισοδυναμίας** (equivalence) στο σύνολο των $M_n(\mathbb{F})$. Επομένως για κάθε $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ ισχύουν:*

i) *Η ανακλαστική ιδιότητα $A\sim A$*
ii) *Η συμμετρική ιδιότητα $A\sim B \Leftrightarrow B\sim A$*
iii) *Η μεταβατική ιδιότητα $A\sim B$ και $B\sim \Gamma$ τότε $A\sim \Gamma$*

Απόδειξη:

i) $A\sim A$ με πίνακα ομοιότητας $P=I_n$

ii) Ο $B \sim A$ αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow PBP^{-1} = A \Leftrightarrow (P^{-1})^{-1}BP^{-1} = A \Leftrightarrow A \sim B$. Επομένως $A \sim B$ με πίνακα ομοιότητας τον P^{-1}.

iii) Ο $A \sim B$ αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει $A = P^{-1}BP$. Ο $B \sim \Gamma$ αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε να ισχύει $B = Q^{-1}\Gamma Q$. Επομένως
$$A = P^{-1}BP = P^{-1}Q^{-1}\Gamma QP = (QP)^{-1}\Gamma QP.$$
Ο $A \sim \Gamma$ με πίνακα ομοιότητας τον QP.

■

Ορισμός 1.3.8
Έστω πίνακας $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Ονομάζουμε **βαθμό** ή **βαθμίδα** του πίνακα A και συμβολίζουμε $rank(A)$, το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του πίνακα A.

Στην παρακάτω πρόταση αναφέρουμε τις ιδιότητες που σχετίζονται με το βαθμό ενός πίνακα, την απόδειξη των οποίων ο αναγνώστης μπορεί να βρει σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στην βιβλιογραφία.

Πρόταση 1.3.9
Έστω $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$

i) $rank(A) \leq min\{m, n\}$
ii) $rank(A) = rank(A^*) = rank(A^T) = rank(\overline{A})$
iii) $A \in M_n(\mathbb{F})$ *είναι αντιστρέψιμος* $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rank(A) = n$
iv) *Αν* $A, B \in M_{mxn}(\mathbb{F})$ *τότε:* $rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$
v) *Αν* $A \in M_{mxn}(\mathbb{F})$ *και* $B \in M_{nxk}(\mathbb{F})$ *τότε:*
$rank(A) + rank(B) - n \leq rank(AB) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$
vi) $rank(AA^*) = rank(A^*A) = rank(A)$
vii) *Αν* $y \in \mathbb{F}^n$ *, τότε* $rank(yy^*) = rank(y) = 1$

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Με γραμμοπράξεις υπολογίζεται το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του πίνακα, το οποίο δείχνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του A συνεπώς από τον Ορισμό 1.3, υπολογίζεται ο βαθμός του A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Gamma'_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma'_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1 \\ \Gamma'_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Gamma''_3 \to \Gamma'_3 - \Gamma'_2 \\ \Gamma''_4 \to \Gamma'_4 - 2\Gamma'_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προέκυψαν 2 μη-μηδενικές γραμμές, άρα $rank(A) = 2$.

Ορισμός 1.3.10
Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V, εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται ορθοκανονικό αν ισχύουν:

i) $\|v_i\| = 1$, για κάθε $v_i \in S$ με $i = 1,2,\dots,n$
ii) $v_i * v_j = 0$, για κάθε $i \neq j$, δηλαδή v_i κάθετο v_j

και $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου, που είναι γνωστή ως **αλγόριθμος ορθοκανονικοποίησης των Gram – Schmidt.**

Έστω ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V, εφοδιασμένου με εσωτερικό γινόμενο $*$ και τη νόρμα $\|\cdot\|$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Βήμα 1 Θέτουμε

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 * u_1}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 * u_2}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{v_3 * u_1}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$\vdots$$

$$u_n = v_n - \frac{v_n * u_{n-1}}{\|u_{n-1}\|^2} u_{n-1} - \cdots - \frac{v_n * u_1}{\|u_1\|^2} u_1$$

Βήμα 2 Ορίζουμε τα διανύσματα:

$$w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1, w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \dots,\ w_n = \frac{1}{\|u_n\|} u_n$$

Τα διανύσματα $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι ορθοκανονικά επειδή είναι κάθετα μεταξύ τους και είναι μοναδιαία, άρα ικανοποιούν τις ιδιότητες που περιγράφονται στον Ορισμό 1.3.10.

Για παράδειγμα θεωρούμε τα διανύσματα $v_1 = (1,2,2), v_2 = (-1,0,2)$ και $v_3 = (0,0,1)$ του $\mathbb{R}^3$ και το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Αν τοποθετήσουμε τα διανύσματα ως στήλες (ή γραμμές) σε έναν πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ θα διαπιστώσουμε ότι $det(A) = 2 \neq 0$, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω αλγόριθμο **των Gram – Schmidt** έχουμε:

$$u_1 = v_1 = (1,2,2)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 = (-1,0,2) - \frac{-1+0+4}{1^2+2^2+2^2}(1,2,2)$$

$$= (-1,0,2) - \frac{3}{9}(1,2,2) = (-1,0,2) - \frac{1}{3}(1,2,2) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{v_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1$$

$$= (0,0,1) - \frac{0+0+\frac{4}{3}}{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - \frac{0+0+2}{1+4+4}(1,2,2)$$

$$= (0,0,1) - \frac{\frac{4}{3}}{4}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{9}(1,2,2)$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{9}(1,2,2)$$

$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{9}, \frac{2}{9} - \frac{4}{9}, 1 - \frac{8}{9}\right) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τα μέτρα των διανυσμάτων u_1, u_2, u_3 χρησιμοποιώντας τη 2-νόρμα από την (1.2) υπολογίζεται:

$$\|u_1\|_2 = 3, \qquad \|u_2\|_2 = 2, \qquad \|u_3\|_2 = \frac{1}{3}$$

Διαιρώντας τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 με τα αντίστοιχα μέτρα τους, βρίσκουμε ένα σύνολο των ορθοκανονικών διανυσμάτων

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** στη συνάρτηση `function v= GramSchmidt(v)`, εισάγουμε έναν πίνακα με στήλες τα διανύσματα που θέλουμε να ορθοκανονικοποιήσουμε, γίνεται έλεγχος ώστε να είναι τουλάχιστον δύο οι στήλες και η έξοδος της συνάρτησης είναι ένας πίνακας που έχει στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα.

1.4 Χαρακτηριστικά ποσά τετραγωνικού πίνακα και ιδιότητές τους

Ορισμός 1.4.1
Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, και ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{F}_{nx1}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x \text{ με } x \neq 0 \tag{1.18}$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα A, το διάνυσμα x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα (**eigenvector) του A, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.
Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα A.
Η εξίσωση $Ax = \lambda x$ για $x \neq 0$ στην (1.18) ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** (characteristic equation) του πίνακα A και είναι ισοδύναμη με το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I_n)x = 0 \tag{1.19}$$

Οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος (1.19) υπάρχουν όταν οι ρίζες του $x_A(\lambda)$ στην (1.21) είναι οι **ιδιοτιμές** του πίνακα A.
Η ορίζουσα του πίνακα $(A - \lambda I_n)$ είναι 0 δηλαδή όταν:

$$\det(A - \lambda I_n) = det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

Από την (1.20) προκύπτει το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**

$$\begin{aligned} x_A(\lambda) &= (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + \alpha_0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

όπου $\alpha_i \in \mathcal{F}$, $i = 0,1,2, \dots, n-1$.

Οι ρίζες του $x_A(\lambda)$ στην (1.21) είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A συμβολίζεται $\sigma(A)$ και ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα, δηλαδή

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \ x_A(\lambda) = 0\}. \tag{1.22}$$

Επιπλέον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στην (1.21) μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο $\mathbb{F}$ και να γραφεί στη μορφή

$$x_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \dots (\lambda - \lambda_\kappa)^{\nu_\kappa},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$, είναι όλες οι διαφορετικές (διακεκριμένες) ρίζες του $x_A(\lambda)$ στο $\mathbb{F}$ και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\kappa$ η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της αντίστοιχης ιδιοτιμής.

Είναι φανερό ότι, για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_\kappa = n$$

Αν για κάποιο $i = 1,2, \dots, \kappa$ ισχύει $\nu_i = 1$, η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **διακεκριμένη** ή **απλή**, διαφορετικά ονομάζεται **πολλαπλή**.

Παρατήρηση: Από την (1.21) η τιμή $x_A(0)$ συνδέεται με την ορίζουσα του πίνακα A με την παρακάτω σχέση:

$$x_A(0) = (-1)^n \det(A)$$

Από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A, αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται με $\rho(A)$, δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \tag{1.23}$$

Αντικαθιστώντας κάθε μια διακεκριμένη ιδιοτιμή, $\lambda = \lambda_i$ στο σύστημα (1.19), δηλαδή

$$(A - \lambda_i I_n)x = 0$$

υπολογίζεται η γενική λύση του ομογενούς συστήματος η οποία είναι ένα σύνολο διανυσμάτων, που συμβολίζεται με $V(\lambda_i)$.

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \{x \in \mathbb{F}_{nx1} : \ (A - \lambda_i I_n)x = 0\} \tag{1.24}$$

λέγεται **ιδιόχωρος,** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και είναι ένα υποσύνολο του $M_{n\times1}(\mathbb{F})$ διαφορετικό του κενού.

Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i και η διάσταση του $V(\lambda_i)$, συμβολίζεται με $\dim\big(V(\lambda_i)\big)$

$$\dim(V(\lambda_i)) = n - rank(A - \lambda_\iota I_n) \tag{1.25}$$

ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i. Ο αριθμός $\dim\big(V(\lambda_i)\big)$ δείχνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i και αποδεικνύεται ότι ισχύει :

$$\mathbf{1 \leq dim\big(V(\lambda_i)\big) \leq \alpha\lambda\gamma\varepsilon\beta\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{o}\tau\eta\tau\alpha} \tag{1.26}$$

Αλγόριθμος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

i) Υπολογισμός του πίνακα $A - \lambda I_n$ και της ορίζουσας $\det(A - \lambda I_n)$.
ii) Επίλυση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A .
iii) Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, υπολογίζεται μια βάση του ιδιόχωρου $V(\lambda_i)$, λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A - \lambda_i I_n)x = 0$.

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Από την (1.21) υπολογίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $x_A(\lambda)$ καθώς και οι ρίζες του $x_A(\lambda)$ που είναι:

$$(-1)^3 \det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-1)^3 \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda)[(4-\lambda)(5-\lambda) - 1] - (4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0$$

Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6$, οπότε το φάσμα του A είναι $\sigma(A) = \{3,4,6\}$.

Για $\lambda_1 = 4$ από την (1.24), (1.25) υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V(4)$ ο οποίος περιέχει όλα τα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{3x1}$, που είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(A - 4I)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ -z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow z = 0, \qquad y = -x$$

Οπότε $V(4) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Για $\lambda_2 = 3$ ο ιδιόχωρος $V(3)$ περιέχει τα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{3x1}$, που είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(A-3I)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad - \ z = 0 \\ y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = y = z$$

Οπότε $V(3) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

Για $\lambda_3 = 6$ ο ιδιόχωρος $V(6)$ περιέχει όλα τα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{3x1}$ που είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$(A-6I)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x \qquad - \ z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ -x \ \ - y - \quad z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = y, \quad z = -2x$$

Οπότε $V(6) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Στις ακόλουθες προτάσεις παρουσιάζονται και αποδεικνύονται οι σημαντικότερες ιδιότητες των χαρακτηριστικών ποσών.

Πρόταση 1.4.2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του (όχι απαραίτητα διακεκριμένες) τότε:

$$\det(A) = \lambda_1 . \lambda_2 \dots . \lambda_n = (-1)^n a_o$$

Απόδειξη:

Από την (1.19) έχουμε

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + \alpha_0 = (\lambda - \lambda_1).(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Για λ=0 είναι $\alpha_0 = (-1)^n . \lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_n$ και

$$\det(-A) = a_0 \Leftrightarrow (-1)^n \det(A) = a_0 \Leftrightarrow \det(A) = (-1)^n a_0$$

■

Σχόλιο:

i) Από την ισότητα της Πρότασης 1.4.2 είναι φανερό ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο αριθμός 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A.

ii) Από την ισότητα της Πρότασης 1.4.2 συμπεραίνουμε ότι:

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow (-1)^n \alpha_0 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha_0 \neq 0$$

Συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει σταθερό όρο διάφορο του 0.

Πρόταση 1.4.3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ οι πίνακες A και A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές συνεπώς $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, πράγματι εφαρμόζοντας την ιδιότητα viii) της Πρότασης 1.3.4 και την (1.21) έχουμε

$$x_{A^T}(\lambda) = \det(\lambda I - A^T) = \det(\lambda I - A)^T = \det(\lambda I - A) = x_A(\lambda)$$

Από την τελευταία ισότητα έχουμε τον ισχυρισμό.

■

Πρόταση 1.4.4

Αν λ, x είναι χαρακτηριστικά ποσά του $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^k ισχύει $A^k x = \lambda^k x$, όπου $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη:

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την εξίσωση (1.18) επί A έχουμε:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^2 x = \lambda A x \overset{(1.18)}{=} \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να γράψουμε:

$$A^3 x = A(A^2 x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2 (Ax) = \lambda^3 x$$

και επαγωγικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$A^k x = \lambda^k x, \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

■

Πρόταση 1.4.5

Αν λ, x είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-1} είναι λ^{-1} και x.

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $Ax = \lambda x$ μπορούμε να γράψουμε:

$$x = I_n x = (A^{-1}Ax) = A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x)$$

όμως $\lambda \neq 0$ επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος (βλέπε Σχόλιο i) μετά την Πρόταση 1.4.2) οπότε

$$A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

■

Συνδυάζοντας τις δύο ιδιότητες των Προτάσεων 1.4.4 - 1.4.5 μπορούμε να διατυπώσουμε:

Αν λ, x είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-k} είναι λ^{-k} και x, όπου $k \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 1.4.6
Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα και ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Απόδειξη:

Έστω ο άνω τριγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Τότε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα vi) της Πρότασης 1.3.4 μπορούμε να γράψουμε:

$$\det(\lambda I_n - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \alpha_{11})(\lambda - \alpha_{22}) \dots (\lambda - \alpha_{nn}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \alpha_{11}, \lambda = \alpha_{22}, \dots, \lambda = \alpha_{nn}.$$

Οπότε $\sigma(A) = \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}\}$

■

Πρόταση 1.4.7
Αν x_1, x_2 είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A αντίστοιχα της ιδιοτιμής λ, τότε το διάνυσμα $kx_1 + \mu x_2$, για κάθε $k, \mu \in \mathbb{F}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ.

Απόδειξη:

Από τις ισότητες $Ax_1 = \lambda x_1, Ax_2 = \lambda x_2$ μπορούμε να γράψουμε

$$A(kx_1 + \mu x_2) = kAx_1 + \mu Ax_2 = k\lambda x_1 + \mu\lambda x_2 = \lambda(kx_1 + \mu x_2)$$

Από το οποίο είναι φανερό ότι επαληθεύεται ο Ορισμός 1.4.1 δηλαδή η ιδιοτιμή λ του πίνακα A έχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $kx_1 + \mu x_2$.

■

Πρόταση 1.4.8

Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι όμοιοι πίνακες . Αν λ , x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του πίνακα A, τότε:

i) $det(A) = det(B)$

ii) $B^k = P^{-1}A^kP$, *για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου P είναι ο πίνακας ομοιότητας.*

iii) $x_A(\lambda) = x_B(\lambda)$

iv) λ , P^{-1} *x είναι αντίστοιχα ιδιοποσά του B, όπου P πίνακας ομοιότητας.*

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3.6 αν P είναι ο πίνακας ομοιότητας των ομοίων πινάκων A, B γράφουμε $B = P^{-1}AP$ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα xi) της Πρότασης 1.3.4 μπορούμε να γράψουμε:

i) $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(A).(\det(P^{-1}P))$

$$= \det(A)\det(I) = \det(A).1 = \det(A)$$

ii) $B^k = (P^{-1}AP)^k = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP)}_{k\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$

$$= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\dots(PP^{-1})AP$$

$$= P^{-1}AI_nAI_n\dots I_nAP = P^{-1}\underbrace{AA\dots A}_{k\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}P = P^{-1}A^k P.$$

iii) Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B έχουμε:

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)$$

$$= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P) = (detP)^{-1}\det(\lambda I - A)\,detP$$

$$= \det(\lambda I - A)$$

Άρα οι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και με την ίδια πολλαπλότητα, επειδή έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα.

iv) Επίσης

$$B(P^{-1}x) = (P^{-1}AP)(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda P^{-1}x$$

■

Άρα επαληθεύεται ο Ορισμός 1.4.1 και η (1.18) για τον πίνακα B με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $P^{-1}x$ στην ιδιοτιμή λ.

Ένα σημαντικό θεώρημα παρουσιάζεται στην συνέχεια γνωστό ως θεώρημα **Cayley-Hamilton,** την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής άλγεβρας που ανήκει στη βιβλιογραφία, [2, 3, 6].

Θεώρημα 1.4.9 (Cayley-Hamilton)
Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ επαληθεύει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του, δηλαδή

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_o I = \mathbb{O}$$

Επιπλέον αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_o}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I) \tag{1.27}$$

Παράδειγμα

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο υπολογίζεται από την (1.21) και είναι:

$$x_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει:

$$x_A(\lambda) = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 39\lambda - 45 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_A(A) = A^3 - 11A^2 + 39A - 45I = \mathbb{O}$$

Επειδή $\alpha_o = -45 \neq 0$, σύμφωνα με το Σχόλιο που ακολουθεί την Πρόταση 1.4.2 έχουμε ότι $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ ορίζεται ο A^{-1}. Έπίσης από την (1.27) υπολογίζεται ο A^{-1} που είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{45}(A^2 - 11A + 39I) = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

■

Ορισμός 1.4.10
Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathcal{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** στο $\mathcal{F}$ αν είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathcal{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος, δηλαδή,

$$D = P^{-1}AP,$$

όπου $D \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Στη συνέχεια διατυπώνεται μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένας πίνακας να είναι διαγωνοποιήσιμος, η οποία εξαρτάται από τα διανύσματα του A και την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, [2, 3, 6, 7].

Θεώρημα 1.4.11
Ένας $A \in M_n(\mathbb{F})$. Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ έχει ως στήλες n-γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του A. Τότε ο πίνακας ομοιότητας $P \in M_n(\mathbb{F})$ έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}_{nx1}$ του A, τα οποία αντιστοιχούν στις $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμές του A και η διαγώνια μορφή του A είναι:

$$D = P^{-1}AP, \tag{1.28}$$

όπου $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και $P = (x_1\ x_2 \dots x_n)$.

Σχόλιο: Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος, προφανώς από τη διαγώνια μορφή στην (1.28) είναι φανερό ότι η ορίζουσα του πίνακα D όπου ο πίνακας D ορίστηκε στο Θεώρημα 1.4.11.

Άρα

$$\det(A) = \det(D) = \lambda_1 . \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$\text{και} \ \ P = (x_1\ x_2 \dots x_n)$$

1.5 Ιδιότητες Ερμιτιανών και συμμετρικών πινάκων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, οι Ερμιτιανοί / συμμετρικοί πίνακες παίζουν κεντρικό ρόλο στις αποδείξεις, γι' αυτό σ' αυτή την ενότητα συγκεντρώνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες των πινάκων αυτών.

Χρησιμοποιώντας τον όρο " Ερμιτιανό" για πίνακα με μιγαδικά στοιχεία και τον όρο

" συμμετρικό" για πίνακα με πραγματικά στοιχεία (βλέπε, Ορισμός 1.1.5), εδώ θα αναφερόμαστε και στα δύο είδη των πινάκων και θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό των στοιχείων του $\mathbb{F}$.

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της άλγεβρας των Ερμιτιανών / συμμετρικών πινάκων, την απόδειξή τους ο αναγνώστης μπορεί να παράγει από τον Ορισμό 1.1.5 ή να μελετήσει [2, 6, 7].

Πρόταση 1.5.1
Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{mxn}(\mathbb{F}), C \in M_{nxr}(\mathbb{F})$ και οι αριθμοί $\alpha, b \in \mathbb{F}$, τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

i) $(A^*)^*=A$
ii) $(aA+bB)^*=\bar{a}A^*+\bar{b}B^*$
iii) $(AC)^*=C^*A^*$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για δεδομένο πίνακα $M \in M_n(\mathbb{F})$ μπορούμε να υπολογίσουμε κατάλληλους πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιους ώστε να ισχύει:

$$M = A + iB$$

Οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ που έχουν την προαναφερθείσα ιδιότητα είναι

$$A = \frac{M+M^*}{2}, \qquad B = \frac{M-M^*}{2i} \tag{1.29}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες i) – ii) της Πρότασης 1.5.1 διαπιστώνουμε ότι οι πίνακες A, B στην (1.29) είναι Ερμιτιανοί / συμμετρικοί.

Πράγματι,

$$A^* = \left(\frac{M+M^*}{2}\right)^* = \frac{M^*+(M^*)^*}{2} = \frac{M+M^*}{2} = A$$

και

$$B^* = \left(\frac{M-M^*}{2i}\right)^* = \frac{M^*-(M^*)^*}{-2i} = \frac{M^*-M}{-2i} = \frac{M-M^*}{2i} = B$$

Προφανώς αντικαθιστώντας τους A, B από την (1.29) επαληθεύουμε την ισότητα

$$A + Bi = \frac{M+M^*}{2} + \frac{M-M^*}{2i} i = \frac{M+M^*}{2} + \frac{M-M^*}{2} = M$$

Στη συνέχεια διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι σημαντικότερες προτάσεις που αναφέρονται στα χαρακτηριστικά ποσά των Ερμιτιανών / συμμετρικών πινάκων.

Πρόταση 1.5.2
Οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού πίνακα είναι όλες πραγματικές.

Απόδειξη:

Έστω A ένας Ερμιτιανός (συμμετρικός) πίνακας, λ μια ιδιοτιμή του και $x \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Επειδή ο A είναι Ερμιτιανός (συμμετρικός) έχουμε:

$$\overline{x^*Ax} = (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$$

Από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο αριθμός x^*Ax είναι πραγματικός.

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.4.1 από την (1.18) και την (1.3) μπορούμε να γράφουμε:

$$x^*Ax = x^*\lambda x = \lambda x^*x = \lambda \|x\|_2^2 \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow}$$

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{\|x\|_2^2}$$

Επειδή ο $x^*Ax \in \mathbb{R}$, από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$

■

Σχόλιο:

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.5.2 μας επιτρέπει να θεωρούμε και να σημειώνουμε στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας την ακόλουθη διάταξη για τις ιδιοτιμές Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα.

$$\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \cdots \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A) \qquad (1.30)$$

Πρόταση 1.5.3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Οι ιδιοτιμές του A είναι θετικοί αριθμοί.

Στην ειδική περίπτωση όπου $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας θετικά ημιορισμένος, τότε το 0 είναι ιδιοτιμή του A.

Απόδειξη:

Με ανάλογα βήματα όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.5.2 για το $x \neq 0$ ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της πραγματικής ιδιοτιμής λ του A καταλήγουμε

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{\|x\|_2^2} \in \mathbb{R}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.6 για το θετικά ορισμένο πίνακα ισχύει $x^*Ax > 0$, άρα η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{\|x\|_2^2} > 0$$

Αν ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος, τότε από τον ορισμό του $x^*Ax \geq 0$. Την παραπάνω έκφραση της ιδιοτιμής τη διαμορφώνει

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{\|x\|_2^2} \geq 0$$

Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή 0 του πίνακα A.

■

Πρόταση 1.5.4
Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός πίνακας. Σε διακεκριμένες ιδιοτιμές του A αντιστοιχούν ορθογώνια ιδιοδιανύσματα.

Υπενθυμίζεται ότι οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικοί αριθμοί

Απόδειξη:

Αν x_1, x_2 δυο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές λ_1, λ_2, του A τότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4.1 και τον Ορισμό 1.1.5 έχουμε:

$$(Ax_1)^* x_2 = x_1^* A^* x_2 = x_1^* A x_2 = \lambda_2 x_1^* x_2$$

$$(Ax_1)^* x_2 = (x_2^* A x_1)^* = (\lambda_1\, x_2^* x_1)^* = \bar{\lambda}_1 x_1^* x_2$$

Από τις δύο παραπάνω ισότητες είναι φανερό ότι

$$\lambda_1 x_1^* x_2 = \lambda_2 x_1^* x_2 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1^* x_2 - \lambda_2 x_1^* x_2 = 0 \Leftrightarrow (\,\lambda_1 - \lambda_2) x_1^* x_2 = 0$$

Επειδή υποθέσαμε $\lambda_1 \neq \lambda_2$ από την τελευταία ισότητα έχουμε $x_1^* x_2 = 0$, άρα x_1 κάθετο στο x_2 (βλέπε Ορισμός 1.3.10 ii))

■

Πρόταση 1.5.5
Έστω πίνακας $A \in M_{mxn}(\mathbb{F})$. Τότε οι πίνακες $AA^* \in M_m(\mathbb{F}), A^*A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι θετικά ημιορισμένοι.

Απόδειξη:

Αρχικά για κάθε πίνακα Ερμιτιανό / συμμετρικό, επειδή εφαρμόζονται οι ιδιότητες της Πρότασης 1.5.1, μπορούμε να γράψουμε:

$$(AA^*)^* = (A^*)^* A^* = AA^*,$$

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

από όπου συμπεραίνουμε τον Ορισμό 1.1.5 για τους πίνακες AA^*, A^*A αντίστοιχα.

Επιπλέον θεωρώντας τα μη μηδενικά διανύσματα $x \in \mathrm{M}_{\mathrm{mx1}}(\mathbb{F}) \equiv \mathbb{F}_{mx1}, z \in \mathrm{M}_{\mathrm{nx1}}(\mathbb{F}) \equiv \mathbb{F}_{nx1}$, εφαρμόζοντας την ιδιότητα i) της Πρότασης 1.5.1 την (1.3) και την ιδιότητα i) της νόρμας διανύσματος (βλέπε, Ορισμός 1.2.7) έχουμε:

$$x^* AA^* x = (A^* x)^* A^* x = \|A^* x\|_2^2 \geq 0$$

και

$$z^* AA^* z = (A^* z)^* A^* z = \|A^* z\|_2^2 \geq 0$$

Συνεπώς επαληθεύεται ο ορισμός του θετικά ημιορισμένου πίνακα, (βλέπε, Ορισμός 1.1.6), για τους πίνακες AA^*, A^*A το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

Στην ακόλουθη πρόταση περιορίζεται το αποτέλεσμα της Πρόταση 1.5.5 σ' ένα πίνακα διάνυσμα και δίνονται πληροφορίες για τη μέγιστη ιδιοτιμή του θετικά ημιορισμένου.

Πρόταση 1.5.6

Έστω ένα μη μηδενικό διάνυσμα $y \in M_{nx1}(\mathbb{F}) \equiv \mathbb{F}_{nx1}$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

i) *Ο nxn πίνακας $A = yy^* \in M_n(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανός θετικά ημιορισμένος*
ii) *Οι ιδιοτιμές του είναι το 0 με αλγεβρική πολλαπλότητα $n-1$ και*

$$\lambda_{max}(yy^*) = ||y||_2^2 \tag{1.31}$$

Απόδειξη:

i) Άμεση εφαρμογή της Πρότασης 1.5.5.

ii) Επειδή ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος έχει ιδιοτιμή το 0, (βλέπε ειδική περίπτωση στην Πρόταση 1.5.3).
Υπολογίζοντας τη διάσταση του ιδιόχωρου $V(0)$, που αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή, απο την (1.25) έχουμε:

$$\dim\big(V(0)\big) = n - rank(yy^* - 0I) = n - rank(yy^*)$$

Όμως σύμφωνα με την ιδιότητα vii) της Πρότασης 1.3.9 ισχύει:

$$rank(yy^*) = rank(y) = 1$$

οπότε καταλήγουμε

$$\dim\big(V(0)\big) = n - 1$$

το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν ακριβώς $n-1$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 0.

Συνδυάζοντας την (1.26) με το τελευταίο αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι η ιδιοτιμή 0 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα τουλάχιστον $n-1$.

Προφανώς όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι n, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μια μη μηδενική ιδιοτιμή, που ισούται με $\|y\|_2^2$.

Επειδή για το διάνυσμα $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{F})$ έχουμε:

$$A = yy^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \cdots & \overline{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y_1|^2 & y_1\overline{y}_2 & \cdots & y_1\overline{y}_n \\ y_2\overline{y}_1 & |y_2|^2 & \cdots & y_2\overline{y}_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_n\overline{y}_1 & y_n\overline{y}_2 & \cdots & |y_n|^2 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια νόρμα από την (1.2) και την παραπάνω μορφή του A γράφουμε:

$$tr(A) = tr(yy^*) = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2 \overset{(1.2)}{=} \|y\|_2^2 \tag{1.32}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την (1.14), την ii) ιδιότητα του ίχνους (βλέπε, στην συνέχεια του Ορισμού 1.3.1), την ιδιότητα της Ευκλείδειας νόρμας στην (1.3)

$$\|A\|_F^2 \overset{(1.14)}{=} tr(AA^*) = tr(\,(yy^*)^*yy^*) = tr(y(y^*y)y^*) \overset{ii)}{=} yy^*tr(yy^*)$$

$$\overset{(1.3)}{=} \|y\|_2^2\, tr(A) \overset{(1.32)}{=} \|y\|_2^2\|y\|_2^2 = \|y\|_2^4$$

Συνεπώς

$$\|A\|_F = \|y\|_2^2 \tag{1.33}$$

Συνδυάζοντας το γεγονός ότι ο A είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας, σύμφωνα με το i) της παρούσας Πρότασης, με την αλγεβρική πολλαπλότητα του 0, που είναι μεγαλύτερη ή ίση με $n-1$ και την ιδιότητα των ιδιοτιμών του πίνακα A^k, (βλέπε, Πρόταση 1.4.4) συμπεραίνουμε ότι:

αν οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\underbrace{0,0,\dots,0}_{(n-1)-\varphi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma}\ , \lambda_1(A) = \lambda_{max}(A)$$

τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^*A = AA = A^2$ είναι

$$\underbrace{0,0,\dots,0}_{(n-1)-\varphi o\rho \acute{\varepsilon}\varsigma}\ , \left(\lambda_{max}(A)\right)^2. \tag{1.34}$$

Τέλος αντικαθιστώντας στην (1.14) τις ιδιοτιμές του A^2 από την (1.34) έχουμε:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_\iota(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_\iota(A^2) = 0 + 0 + 0 \dots + \left(\lambda_{max}(A)\right)^2 = \left(\lambda_{max}(A)\right)^2$$

από όπου προκύπτει

$$\|A\|_F^2 = \lambda_{max}(A) \tag{1.35}$$

Συγκρίνοντας την (1.33) με την (1.35) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $y \neq 0$ ολοκληρώνεται η απόδειξη της (1.31),

δηλαδή

$$\lambda_{max}(A) = \lambda_{max}(yy^*) = ||y||_2^2$$

■

Στη συνέχεια θα δούμε ότι κάθε Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος και μάλιστα η διαγωνοποίηση επιτυγχάνεται μέσω ενός ορθοκανονικού - ορθογώνιου μετασχηματισμού. Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή ως **Φασματικό Θεώρημα**, του οποίου την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [2, 3, 6, 7].

Θεώρημα 1.5.7 (Φασματικό Θεώρημα)
Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$ *Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας. Ο πίνακας* A *διαγωνοποιείται από ορθομοναδιαίο πίνακα* V [3] *και είναι όμοιος με πραγματικό διαγώνιο* Λ, *με διαγώνια*

μορφή

$$A = V\Lambda V^* \tag{1.36}$$

$$\Lambda = diag(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)) \in M_n(\mathbb{R}) \tag{1.37}$$

όπου

Με τις ιδιοτιμές $\lambda_i(A), 1 \leq i \leq n$ *να έχουν τη διάταξη της* (1.30), *ο πίνακας* V *να έχει ως στήλες τα ορθομοναδιαία ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα των ιδιοτιμών* $\lambda_\iota(A)$,

δηλαδή

$$V = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n) \tag{1.38}$$

Παράδειγμα

Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** το `Script spectral_theorem.m`

Εφαρμόζοντας το Script επαληθεύουμε το φασματικό θεώρημα (Θεώρημα 1.5.7)
Εισάγαμε τον Ερμιτιανό / συμμετρικός πίνακας :

[3] Σύμφωνα με τον Ορισμός 1.3.5, ισχύει $VV^* = V^*V = I_n$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.5000 & -1.0000 \\ 0 & 3.0000 & 0 & 2.0000 \\ -0.5000 & 0 & -3.0000 & -0.5000 \\ -1.0000 & 2.0000 & -0.5000 & 3.0000 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$x_A(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 - \frac{29}{2}\lambda^2 + \frac{71}{4}\lambda + \frac{25}{4}$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x_A(\lambda) = 0$

$$\lambda_1(A) = 5.1108, \lambda_2(A) = 1.3402, \lambda_3(A) = -0.2885 \text{ και } \lambda_4(A) = -3.1624$$

Ο ορθομοναδιαίος πίνακας V της (1.38) είναι:

$$V=\begin{pmatrix} -0.1371 & -0.4247 & 0.8739 & -0.1927 \\ 0.6809 & -0.6995 & -0.2229 & 0.0400 \\ -0.0358 & -0.0177 & -0.2287 & -0.9727 \\ 0.7186 & 0.5781 & 0.3665 & -0.1232 \end{pmatrix}$$

Ο διαγώνιος πίνακας Λ της (1.37) είναι:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} 5.1108 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.3402 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2885 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.1624 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας τους παραπάνω πίνακες V,Λ επαληθεύεται η (1.36) και η ισχύς του Φασματικού θεωρήματος, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε μετά από τις πράξεις:

$$V\Lambda V^* =\begin{pmatrix} 0.0000 & -0.0000 & -0.5000 & -1.0000 \\ -0.0000 & 3.0000 & -0.0000 & 2.0000 \\ -0.5000 & -0.0000 & -3.0000 & -0.5000 \\ -1.0000 & 2.0000 & -0.5000 & 3.0000 \end{pmatrix}=A$$

■

1.6 Αριθμητικό πεδίο

Υπενθυμίζουμε ότι οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{F}^n$ και $\mathbb{F}_{nx1}$ είναι ισόμορφοι οπότε όταν αναφερόμαστε στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$ θεωρούμε τον $\mathbb{F}_{nx1}$, (βλέπε σημείωση 1) στην ενότητα 1.1.2 Είδη Πινάκων).

Ορισμός 1.6.1

Αριθμητικό πεδίο (field of values**)** ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, συμβολίζεται $F(A)$, ονομάζεται το σύνολο των αριθμών

$$F(A) \equiv \{x^*Ax \in \mathbb{F} \;:\; x \in \mathbb{F}^n, \|x\|_2 = 1\} \tag{1.39}$$

Πρόταση 1.6.2
Έστω $\mathrm{A} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{F})$. Το $F(A)$ είναι ένα κυρτό, συνεκτικό, φραγμένο και συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Απόδειξη:

Την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει [4 Section 1.2, Section 1.3].

■

Οι σημαντικότερες ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα παρουσιάζονται και αποδεικνύονται στη συνέχεια οι οποίες είναι χρήσιμες στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Πρόταση 1.6.3
Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $U \in M_n(\mathbb{F})$ ένας ορθομοναδιαίος πίνακας. Τότε ισχύει:

$$F(U^*AU) = F(A)$$

Απόδειξη:

Έστω ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ δηλαδή $x^*x = 1$ και $U \in M_n(\mathbb{F})$ ένας ορθομοναδιαίος πίνακας. Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 1.6.1 μπορούμε να γράψουμε:

$$x^*(U^*AU)x = (Ux)^*A\,(Ux) = y^*Ay \in F(A)$$

όπου $y = Ux \in \mathbb{F}^n$. Χρησιμοποιώντας την (1.3) και τον Ορισμό 1.3.5

$$\|y\|_2^2 = y^*y = (Ux)^*\,(Ux) = x^*U^*Ux = x^*I_nx = x^*x = 1,$$

$$F(U^*AU) \subseteq F(A) \tag{1.40}$$

Άρα έχουμε:

Επίσης

$$x^*Ax = x^*I_nAI_nx = x^*UU^*AUU^*x = (U^*x)^*U^*AU(U^*x) = z^*U^*AUz$$

Όπου z= $U^*x \in \mathbb{F}^n$και μέσω της (1.3) έχουμε:

$$\|z\|_2^2 = z^*z = (U^*x)^*\,(U^*x) = x^*UU^*x = x^*I_nx = x^*x = 1$$

$$F(A) \subseteq F(U^*AU) \tag{1.41}$$

Άρα

Από τις (1.40), (1.41) προκύπτει

$$F(U^*AU) = F(A),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

Πρόταση 1.6.4
Για το μοναδιαίο πίνακα $I_n \in M_n(\mathbb{R})$ και έναν αριθμό $\alpha \in \mathbb{F}$, ισχύει

$$F(aI_n) = \{a\} \qquad (1.42)$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 1.6.1 μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} F(aI_n) &= \{x^*(aI_n)x, \quad x \in \mathbb{F}^n, \|x\|_2 = 1\} \\ &= \{a(x^*I_nx),\ x \in \mathbb{F}^n, \|x\|_2 = 1\} \\ &= \{a(x^*x),\ x \in \mathbb{F}^n,\ \|x\|_2 = 1\} \\ &= \{a\} \end{aligned}$$

■

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου πινάκων ειδικής μορφής.

Μια πληρέστερη παρουσίαση των ιδιοτήτων ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [1, 4] και στις αναφορές τους. Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Πρόταση 1.6.5

i) Το $F(A)$ περιέχει το φάσμα του A, δηλαδή $\sigma(A) \subseteq F(A)$.

ii) *Για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *ισχύει* $F(aA + \beta I_n) = \alpha F(A) + \beta$

iii) $F(A) = F(A^T)$ *και* $F(A^*) = F(\overline{A}) = \overline{F(A)}$

iv) *Αν* $M = B \oplus \Gamma, B \in M_n(\mathbb{F}), \Gamma \in M_k(\mathbb{F})$,*τότε:*
$$F(M) = convex\ hull\{F(B) \cup F(\Gamma)\}$$

Απόδειξη

i) Θεωρώντας $\lambda \in \sigma(A)$ και $x \in \mathbb{F}^n$ το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ, χρησιμοποιώντας την (1.3) και τον Ορισμό 1.6.1 μέσω της (1.39) μπορούμε να γράψουμε:
$$\lambda = \lambda.1 = \lambda\, ||x||_2^2 = \lambda x^* x = x^* \lambda x = x^* A x \in F(A)$$
Άρα $\lambda \in F(A) \Rightarrow \sigma(A) \subseteq F(A)$.

ii) Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 1.6.1 μπορούμε να γράψουμε
$$\begin{aligned} F(aA + \beta I) &= \{x^*(\alpha A + \beta I_n)x, x \in \mathbb{F}^n, \|x\|_2 = 1\} \\ &= \{x^*(\alpha A)x + x^*(\beta I_n)x,\ x \in \mathbb{F}^n, \|x\|_2 = 1\} \end{aligned}$$

$$= \{a(x^*Ax) + \beta(x^*I_nx),\ x \in \mathbb{F}^n, \|x\|_2 = 1\}$$
$$= aF(A) + \{\beta\}$$

iii) Έστω ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$. Τότε

$$x^*Ax = x^*\ (A^*)^*\ x = (x^*A^*x)^* = \overline{(x^*A^*x)}^T = (\overline{x^*}\ \overline{A^*}\bar{x})^T$$
$$= \left((\bar{\bar{x}})^T\left(\bar{\bar{A}}\right)^T\bar{x}\right)^T = (x^TA^T\bar{x})^T \tag{1.43}$$

για το διάνυσμα $y = \bar{x}$ ισχύουν

$$\|y\|_2 = \|\bar{x}\|_2 = \|x\|_2 = 1 \tag{1.44}$$

και

$$y^* = (\bar{x})^* = (\bar{\bar{x}})^T = x^T \tag{1.45}$$

Επειδή $x^TA^T\bar{x} \in \mathbb{F}$ από την (1.45) η ισότητα στην (1.43) γράφεται:
$$x^*Ax = (x^TA^T\bar{x})^T \ \equiv x^TA^T\bar{x} = y^*A^Ty$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα και την (1.44) έχουμε:

$$F(A) = F(A^T)$$

Επιπλέον, για το μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ και την (1.45) μπορούμε να γράψουμε:

$$x^*\bar{A}x = \bar{x}^T\bar{A}\,x = \bar{x}^T\bar{A}\,\bar{\bar{x}} = \overline{x^TA\bar{x}} = \overline{y^*A^Ty}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ισότητα με την (1.44) έχουμε

$$F\left(\bar{A}\right) = \overline{F(A)} \tag{1.46}$$

Ακόμη, για το μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{F}^n$ γράφουμε

$$x^*A^*x = \bar{x}^T\bar{A}^Tx = \bar{x}^T\bar{A}^T(x^T)^T = (x^T\bar{A}\bar{x})^T \tag{1.47}$$

Επειδή $x^T\bar{A}\bar{x} \in \mathbb{F}$ από την (1.45) η ισότητα (1.47) γράφεται:

$$x^*A^*x = (x^T\bar{A}^T\bar{x})^T \equiv x^T\bar{A}\bar{x} = y^*\bar{A}y$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την (1.44) έχουμε

$$F(A^*) = F(\bar{A}) \tag{1.48}$$

Με την (1.46) και (1.48) ολοκληρώνεται η απόδειξη, δηλαδή

$$F(A^*) = F(\overline{A}) = \overline{F(A)}$$

iv) Ο πίνακας $M = B \oplus \Gamma \in M_{n+k}(\mathbb{F})$ επειδή $B \in M_n(\mathbb{F})$ και , $\Gamma \in M_k(\mathbb{F})$

Ένα μοναδιαίο διάνυσμα $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{F}^{n+k} \simeq \mathbb{F}_{(n+k)x1}$ με $x \in \mathbb{F}^n \simeq \mathbb{F}_{nx1}$ και $y \in \mathbb{F}^k \simeq \mathbb{F}_{kx1}$ από την (1.3) γράφεται:

$$\|z\|_2^2 = z^* z = (x^*\ y^*)\binom{x}{y} = x^* x + y^* y = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 = 1 \tag{1.49}$$

Για το παραπάνω $z \in \mathbb{F}^{n+k}$

$$z^*\,(B \oplus \Gamma) z = x^* B x + y^* \Gamma y \tag{1.50}$$

- Αν $\|x\|_2 = 1$ τότε από την (1.49) συνεπάγεται $\|y\|_2 = 0 \Rightarrow y = 0$, οπότε από την (1.50) έχουμε:
$$z^*\,(B \oplus \Gamma) z = x^* B x\ ;\ \|x\|_2 = 1\ ,$$
Επομένως
$$F(B) \subseteq F(B \oplus \Gamma) \tag{1.51}$$

- Αν $\|y\|_2 = 1$ τότε από την (1.49) συνεπάγεται $\|x\|_2 = 0 \Rightarrow x = 0$, οπότε από την (1.50) έχουμε:
$$z^*\,(B \oplus \Gamma) z = y^* B y\ ;\ \|y\|_2 = 1\ ,$$
Επομένως
$$F(\Gamma) \subseteq F(B \oplus \Gamma) \tag{1.52}$$

Από (1.51) και (1.52) έχουμε ότι:
$$F(B) \cup F(\Gamma) \subseteq F(B \oplus \Gamma)$$
Επειδή το αριθμητικό πεδίο είναι κυρτό σύνολο (βλέπε, Πρόταση 1.6.2) ο προηγούμενος εγκλεισμός δίνει:

$$convex\ hull\ \{F(B) \cup F(\Gamma)\} \subseteq convex\ hull\{F(B \oplus \Gamma)\} = F(B \oplus \Gamma) \tag{1.53}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύεται ο αντίστροφος εγκλεισμός.

Χρησιμοποιούμε το μοναδιαίο διάνυσμα $z = \binom{x}{y} \in \mathbb{F}^{n+k}$ όπως προηγούμενα

$$z = \binom{x}{y} \in \mathbb{F}^{n+k} \text{ με } x \in \mathbb{F}^n \text{ και } y \in \mathbb{F}^k$$

τις σχέσεις (1.49), (1.50) και στη συνέχεια διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $y = 0 \Rightarrow \|x\|_2 = 1$, οπότε από την (1.50) έχουμε:

$$z^* \,(B \oplus \Gamma) z = x^* B x \in F(B) \subseteq \textit{ convex hull } \{F(B) \cup F(\Gamma)\}$$

- Αν $x = 0 \Rightarrow \|y\|_2 = 1$, οπότε από την (1.50) έχουμε:

$$z^* \,(B \oplus \Gamma) z = y^* \Gamma y \in F(\Gamma) \subseteq \textit{convex hull } \{F(B) \cup F(\Gamma)\}$$

- Αν $x, y \neq 0$, τότε η (1.50) γράφεται:

$$z^* \,(B \oplus \Gamma) z = x^* B x + y^* \Gamma y = \|x\|_2^2 \left[\frac{x^* B x}{\|x\|_2^2}\right] + \|y\|_2^2 \left[\frac{y^* \Gamma y}{\|y\|_2^2}\right] \qquad (1.54)$$

Από την την (1.49) , η (1.54) φανερώνει ότι $z^* \,(B \oplus \Gamma) z$ είναι κυρτός συνδυασμός των

$$\frac{x^* B x}{\|x\|_2^2} \in F(B) \text{ και } \frac{y^* \Gamma y}{\|y\|_2^2} \in F(\Gamma)$$

Επειδή θεωρήσαμε ότι $\|z\|_2^2 = 1$ χρησιμοποιώντας τα τελευταία αποτελέσματα και την η (1.54) συμπεραίνουμε ότι:

$$F(M) = F(B \oplus \Gamma) \subseteq \textit{convex hull } \{F(B) \cup F(\Gamma)\} \qquad (1.55)$$

Από τις (1.53) και (1.55) προκύπτει ότι

$$F(M) = F(B \oplus \Gamma) = \textit{convex hull}\{F(B) \cup F(\Gamma)\}.$$

■

Πρόταση 1.6.6
Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας. Τότε το $F(A)$ είναι υποσύνολο του πραγματικού άξονα και ισχύει:

$$F(A) = [\lambda_{min}(A),\ \lambda_{max}(A)] \subset \mathbb{R} \qquad (1.56)$$

όπου $\lambda_{min}(A)$, $\lambda_{max}(A)$ η ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του A, αντίστοιχα.

Απόδειξη

Αρχικά αποδεικνύεται ότι $F(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{F}^n$ μοναδιαίο διάνυσμα ($\|x\|_2 = 1$). Επειδή $x^* A x \in \mathbb{F}$, για να είναι $\mathbb{F} \equiv \mathbb{R}$, πρέπει να αποδειχθεί ότι:

$$x^* A x = \overline{x^* A x} \qquad (1.57)$$

Πράγματι η (1.57) ισχύει, επειδή μπορούμε να γράψουμε:

$$\overline{x^*Ax} = (x^*Ax)^* = x^*A^*(x^*)^* = x^*A^*x = x^*Ax$$

επειδή ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός.

Άρα $F(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με το Φασματικό θεώρημα (Θεώρημα 1.5.7) ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διαγωνοποιείται από ορθομοναδιαίο πίνακα $V \in M_n(\mathbb{F})$, ο οποίος έχει στήλες τα ορθομοναδιαία $v_i, 1 \leq i \leq n$ του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_i(A), 1 \leq i \leq n$ για τον οποίο από την (1.36) μπορούμε να γράψουμε:

$$V^*AV = diag\big(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)\big) \tag{1.58}$$

Θεωρώντας ότι $V = (v_1 \; v_2 \dots v_n)$ και οι ιδιοτιμές όπως στην (1.30) δηλαδή

$$\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \dots \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A).$$

Αν θέσουμε $x = Vy$ για κατάλληλο $y \in \mathbb{F}^n$, χρησιμοποιώντας την (1.3) και τον Ορισμό 1.3.5 παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$1 = \|x\|_2^2 = x^*x = (Vy)^*(Vy) = y^*V^*Vy = y^*y = \|y\|_2^2 \tag{1.59}$$

συνεπώς το y είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

Επιπλέον χρησιμοποιώντας την (1.58) τη διάταξη των ιδιοτιμών την (1.2) και την (1.59) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x^*Ax &= (Vy)^*A\,(Vy) = y^*V^*\,AVy = y^*diag(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A))y \\ &= \lambda_1(A)|y_1|^2 + \lambda_2(A)|y_2|^2 + \dots + \lambda_n(A)|y_n|^2 \\ &\leq \lambda_1(A)|y_1|^2 + \lambda_1(A)|y_2|^2 + \dots + \lambda_1(A)|y_n|^2 \\ &= \lambda_1(A)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2) \\ &= \lambda_1(A)\|y\|_2^2 = \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A). \end{aligned}$$

Άρα

$$x^*Ax \leq \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A) \tag{1.60}$$

Όμοια με προηγούμενα και χρησιμοποιώντας τη διάταξη των ιδιοτιμών την (1.59) και την (1.2) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x^*Ax &= (Vy)^*A\,(Vy) = y^*V^*\,AVy = y^*diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)y \\ &= \lambda_1(A)|y_1|^2 + \lambda_2(A)|y_2|^2 + \dots + \lambda_n(A)|y_n|^2 \\ &\geq \lambda_n(A)|y_1|^2 + \lambda_n(A)|y_2|^2 + \dots + \lambda_n(A)|y_n|^2 \\ &= \lambda_n(A)(|y_1|^2 + |y_2|^2 + \dots + |y_n|^2) \\ &= \lambda_n(A)\|y\|_2^2 = \lambda_n(A) \equiv \lambda_{min}(A) \end{aligned}$$

Άρα

$$x^*Ax \geq \lambda_n(A) \equiv \lambda_{min}(A) \tag{1.61}$$

Συνδυάζοντας τις (1.60) και (1.61) έχουμε:

$$\lambda_{min}(A) \leq x^*Ax \leq \lambda_{max}(A) \tag{1.62}$$

Επειδή το αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα είναι συμπαγές και κυρτό σύνολο (βλέπε, Πρόταση 1.6.2) και $F(A) \subseteq \mathbb{R}$ από την (1.62) συμπεραίνουμε ότι

$$F(A) = [\lambda_{min}(A), \lambda_{max}(A)] \subset \mathbb{R}$$

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διαταραχή ιδιοτιμών Ερμιτιανού Πίνακα

Υπενθυμίζεται ότι οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{F}^n \cong \mathbb{F}_{nx1}$, οπότε στο παρόν κεφάλαιο όταν αναφερόμαστε στο διανυσματικό $\mathbb{F}^n$ θεωρούμε τον $\mathbb{F}_{nx1}$.

Ορισμός 2.1.1
Έστω ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $V = (v_1\ v_2 \dots v_n) \in M_n(\mathbb{F})$ με $v_i \in \mathbb{F}^n$ σημειώνονται οι στήλες του V και ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{F}^n$. Ονομάζουμε **προβολή** του y στο σύνολο των διανυσμάτων $v_i, v_{I+1}, \dots v_j$ η οποία σημειώνεται $y_{i:j}$ για κάθε $1 \leq i \leq j \leq n$ το διάνυσμα στήλη του $\mathbb{F}^{\,j-(i-1)}$ και δίνεται από

$$y_{i:j} = \left(v_i\ v_{i+1} \dots v_j\right)^\star y = \begin{pmatrix} v_i^\star y \\ v_{i+1}^\star y \\ \vdots \\ v_j^\star y \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Για κάθε $1 \leq k \leq n$, η $k-$ συντεταγμένη του διανύσματος $y_{i:j}$ σημειώνεται

$$\hat{y}_k = v_k^\star y \in \mathbb{F}. \tag{2.2}$$

Στο παρόν κεφάλαιο όταν αναφερόμαστε σε Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, θεωρούμε ότι οι πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots , n$ (βλέπε, Πρόταση 1.5.2) έχουν τη διάταξη που ορίστηκε στην (1.30), δηλαδή

$$\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \cdots \leq \lambda_2(A) \leq \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A) \tag{2.3}$$

Θεώρημα του Weyl

Στη συνέχεια διατυπώνεται το θεώρημα Weyl, το οποίο δίνει φράγματα για τις ιδιοτιμές του αθροίσματος δύο Ερμιτιανών πινάκων ως συνάρτηση των ιδιοτιμών τους. Την απόδειξη του ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [3, Theorem 4.3.1].

Θεώρημα 2.1.2
Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ Ερμιτιανοί / συμμετρικοί πίνακες με ιδιοτιμές $\lambda_i(A), \lambda_i(B), i = 1,2 \dots . n$ διατεταγμένες όπως στη (2.3). Για τις ιδιοτιμές $\lambda_i(A+B), i = 1,2, \dots , n$ του πίνακα $A+B$ και για $k = 1,2, \dots , n$ ισχύει:

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_1(B), \tag{2.4}$$

Παράδειγμα 2.1.3
Θεωρούμε τους συμμετρικούς πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ο συμμετρικός πίνακας $A + B$ είναι:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A, σημειωμένες με τη διάταξη (2.3), είναι:

$$\lambda_3(A) = -2.7893, \lambda_2(A) = 0.0761 \text{ και } \lambda_1(A) = 4.7132$$

Οι ιδιοτιμές του B, σημειωμένες με τη διάταξη (2.3), είναι:

$$\lambda_3(B) = -4.3471, \lambda_2(B) = 1.5987 \text{ και } \lambda_1(B) = 4.7484$$

Οι ιδιοτιμές του $A + B$ σημειωμένες με τη διάταξη (2.3), είναι:

$$\lambda_3(A + B) = -5.1109,\ \ \lambda_2(A + B) = 0.1752 \text{ και } \ \lambda_1(A + B) = 8.9358$$

Στον επόμενο πίνακα επαληθεύονται τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.1.2 και η (2.8) για $k = 1,2,3$.

k	$\lambda_k(A) + \lambda_3(B)$	$\lambda_k(A + B)$	$\lambda_k(A) + \lambda_1(B)$
3	-7.1364	-5.1109	1.9591
2	-4.2710	0.1752	4.8245
1	0.3661	8.9358	9.4616

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{F}^n$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο πίνακας yy^* είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός, επειδή ισχύει:

$$(yy^*)^* = (y^*)^* y^* = yy^*$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας την viii) της Πρότασης 1.3.9 και την ιδιότητα ii) της Πρότασης 1.5.6 και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της (2.3) για τις διατεταγμένες ιδιοτιμές του πίνακα yy^*, συμπεραίνουμε ότι ισχύουν:

$$\lambda_n(yy^*) \equiv \lambda_{min}(yy^*) = 0, \text{ με αλγεβρική πολλαπλότητα } n - 1$$

και

$$\lambda_1(yy^*) \equiv \lambda_{max}(yy^*) = \|y\|_2^2, \text{ είναι απλή ιδιοτιμή.}$$

Θεωρώντας έναν Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, αντικαθιστώντας τις παραπάνω ιδιοτιμές στο θεώρημα Weyl (Θεώρημα 2.1.2), για $k = 1,2, \dots, n$, έχουμε ότι η ανισότητα (2.8) γράφεται:

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(yy^*) \le \lambda_k(A + yy^*) \le \lambda_k(A) + \lambda_1(yy^*)$$

από όπου προκύπτει

$$\lambda_k(A) \le \lambda_k(A + yy^*) \le \lambda_k(A) + \|y\|_2^2, \tag{2.5}$$

Η (2.9) με το συμβολισμό της (2.3) για $k = 1$ δίνει:

$$\lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}(A + yy^*) \le \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2, \tag{2.6}$$

και για $k = n$ δίνει:

$$\lambda_{min}(A) \le \lambda_{min}(A + yy^*) \le \lambda_{min}(A) + \|y\|_2^2. \tag{2.7}$$

Στη συνέχεια ο πίνακας $A + yy^*$ αποτελεί μια διαταραχή του $A \in M_n(\mathbb{F})$ από ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{F}^n$, γι' αυτό ο πίνακας ονομάζεται διαταραγμένος. Επιπλέον τα φράγματα οποιασδήποτε ιδιοτιμής ενός Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα διαταραγμένου από ένα Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα rank 1, εξαρτώνται μόνο από τις ιδιοτιμές του αρχικού Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα, γεγονός που διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση, της οποίας η απόδειξη δίνεται [3, Theorem 4.3.4].

Πρόταση 2.1.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας με διατεταγμένες ιδιοτιμές $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots ,n$, όπως στη (2.3) , τότε για $k = 3,4, \dots , n$ ισχύουν:

$$\lambda_k(A + yy^*) \le \lambda_{k-1}(A) \le \lambda_{k-2}(A + yy^*) \tag{2.8}$$

$$\lambda_k(A) \le \lambda_{k-1}(A + yy^*) \le \lambda_{k-2}(A) \tag{2.9}$$

Φράγματα για τη μικρότερη ιδιοτιμή του διαταραγμένου Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ από ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{F}^n$, υπολογίζονται στην επόμενη πρόταση, όπου αποδεικνύεται ότι τα φράγματα μπορεί να είναι ανεξάρτητα από το μέτρο του διανύσματος y, διαφοροποιώντας έτσι τη (2.7) εξαρτώνται μόνο από τις δύο μικρότερες ιδιοτιμές του A. Το αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας.

Πρόταση 2.1.5

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots ,n$, διατεταγμένες όπως στη (2.3) και ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{F}^n$. Τότε για την ελάχιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$ ισχύει:

$$\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \le \lambda_{min}(A + yy^*) \le \lambda_{n-1}(A) \tag{2.10}$$

Απόδειξη:

Η (2.8) για $k = n$ δίνει:

$$\lambda_{min}(A + yy^*) \equiv \lambda_n(A + yy^*) \le \lambda_{n-1}(A) \le \lambda_{n-2}(A + yy^*)$$

Συνδυάζοντας το αριστερό μέλος της παραπάνω ανίσωσης με τη (2.7) καταλήγουμε

$$\lambda_{min}(A) \ \le \lambda_{min}(A + yy^*) \le \lambda_{n-1}(A)$$

■

Παράδειγμα 2.1.6
Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** η συνάρτηση:

```
function[y,A,App,ln,lnpp,ln_1]= small(A,s)
```

Έχει είσοδο τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα A,
s: το διάστημα ακεραίων τιμών για τη δημιουργία του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{F}^n$.
Οι έξοδοι είναι:
y: το τυχαίο διάνυσμα
A: ο Ερμιτιανός πίνακας
App: $A + yy^*$
ln: $\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A)$
$lnpp$: $\lambda_n(A + yy^*)$
ln_1: $\lambda_{n-1}(A)$

Τώρα για $n = 4$ και $s = 7$ έχουμε:

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 7.0000 & 1.0000 & 3.5000 & -4.5000 \\ 1.0000 & -4.0000 & 3.5000 & -0.5000 \\ 3.5000 & 3.5000 & 1.0000 & 0 \\ -4.5000 & -0.5000 & 0 & -4.0000 \end{pmatrix},$$

$$App = \begin{pmatrix} 32.0000 & -19.0000 & 33.5000 & -14.5000 \\ -19.0000 & 12.0000 & -20.5000 & 7.5000 \\ 33.5000 & -20.5000 & 37.0000 & -12.0000 \\ -14.5000 & 7.5000 & -12.0000 & 0 \end{pmatrix},$$

ln = -6.4448, *lnpp* = -5.6704, *ln_1* = -5.1060

Ισχύει

$$-6.4448 \le -5.6704 \le -5.1060$$

Επομένως επαληθεύεται η σχέση (2.10).

Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** η συνάρτηση

```
function [y,A,App,l1,lr,l1pp] =larg(A,s)
```

Έχει είσοδο τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα A,

s: το διάστημα ακεραίων τιμών για τη δημιουργία του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{F}^n$.
Οι έξοδοι είναι:
y: το τυχαίο διάνυσμα
A: ο Ερμιτιανός πίνακας
App: $A + yy^*$
l1: $\lambda_{max}(A) \equiv \lambda_1(A)$
$l1pp$: $\lambda_1(A + yy^*)$
lr: $\lambda_{max}(A) \equiv \lambda_1(A) + \|y\|^2$

Τώρα για $n = 4$ και $s = 6$ έχουμε:

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 0.5000 & -2.0000 \\ -1.0000 & -6.0000 & 1.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 1.5000 & 6.0000 & 1.0000 \\ -2.0000 & 0.5000 & 1.0000 & 3.0000 \end{pmatrix},$$

$$App = \begin{pmatrix} 10.0000 & -16.0000 & 6.5000 & -2.0000 \\ -16.0000 & 19.0000 & -8.5000 & 0.5000 \\ 6.5000 & -8.5000 & 10.0000 & 1.0000 \\ -2.0000 & 0.5000 & 1.0000 & 3.0000 \end{pmatrix},$$

Έχουμε

$$l1 = 6.5147, l1pp = 35.6313, lr = 44.5147$$

Ισχύει

$$6.5147 \leq 35.6313 \leq 44.5147$$

Επαληθεύεται η (2.6).

■

Πρόταση 2.1.7 (Cauchy’ s interlacing)
Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές* $\lambda_i(A), i = 1,2,\dots,n$, *διατεταγμένες ιδιοτιμές όπως στη* (2.3).

- *Αν* $B \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ *ένας κύριος υποπίνακας* [4] *του* A *με διατεταγμένες ιδιοτιμές* $\lambda_i(B), i = 1,2,\dots,n-1$ *όπως στη* (2.3) *τότε η σχέση που συνδέει τις ιδιοτιμές των πινάκων* A, B *είναι:*

$$\begin{aligned}\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \le \lambda_{n-1}(B) \le \lambda_{n-1}(A) \le \lambda_{n-2}(B) \le \lambda_{n-2}(A) \le \cdots \\ \le \lambda_1(B) \le \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A)\end{aligned} \tag{2.11}$$

- *Αν ο κύριο υποπίνακας* $B_m \in M_m(\mathbb{F})$ *με* $1 \le m < n$ *απομένει μετά τη διαγραφή των* $n-m$ *γραμμών και αντίστοιχα στηλών του* A, *τότε για τις ιδιοτιμές των πινάκων* A, B_m *για* $n-m+1 \le k \le n$ *ισχύει:*

$$\lambda_k(A) \le \lambda_{k-(n-m)}(B_m) \le \lambda_{k-(n-m)}(A) \tag{2.12}$$

Παράδειγμα 2.1.8

Έστω ο συμμετρικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3.0000 & -1.0000 & 0.5000 & 2.5000 \\ -1.0000 & -1.0000 & -2.0000 & 2.0000 \\ 0.5000 & -2.0000 & 0 & 1.0000 \\ 2.5000 & 2.0000 & 1.0000 & -2.0000 \end{pmatrix}$

Οι διατεταγμένες ιδιοτιμές του A είναι:

$$\sigma(A) = \{\, \lambda_4(A) = -5.0774, \lambda_3(A) = -0.7444, \lambda_2(A) = 1.5473, \lambda_1(A) = 4.2745\}$$

Θεωρούμε τον κύριο υποπίνακα B που προκύπτει από τη διαγραφή της τελευταίας γραμμής και της τελευταίας στήλης του πίνακα A,

$$B = \begin{pmatrix} 3.0000 & -1.0000 & 0.5000 \\ -1.0000 & -1.0000 & -2.0000 \\ 0.5000 & -2.0000 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι διατεταγμένες ιδιοτιμές του πίνακα B είναι:

$$\sigma(B) = \{\, \lambda_3(B) = -2.6046, \lambda_2(B) = 1.0544, \lambda_1(B) = 3.5502\}$$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται το Cauchy’s Interlacing Theorem επειδή:

$$\lambda_4(A) = -5.0774 \le \lambda_3(B) = -2.6046 \le \lambda_3(A) = -0.7444 \le \lambda_2(B) = 1.0544 \le \lambda_2(A) = 1.5473 \le \lambda_1(B) = 3.5502 \le \lambda_1(A) = 4.2745.$$

■

Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** το `Script` cauchy_interlace.m επαληθεύει την ισχύ του παραπάνω θεωρήματος.

[4] Βλέπε Ορισμό 1.1.1

Στη συνέχεια θα περιορίσουμε τα φράγματα της ελάχιστης ιδιοτιμής $\lambda_{min}(A + yy^*)$ του Ερμιτιανού / συμμετρικού διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$ που διαταράσσεται από ένα Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα rank 1, λαμβάνοντας υπόψιν την προβολή του $A + yy^*$ σε ένα υπόχωρο δύο διαστάσεων, που περιγράφεται από ένα πίνακα $2x2$.

[βλέπε, [5]].

Βελτίωση των φραγμάτων της ελάχιστης ιδιοτιμής του πίνακα $A + yy^*$

Θεώρημα 2.1.9

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots, n$, διατεταγμένες ιδιοτιμές όπως στη (2.3) και $V = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n) \in M_n(\mathbb{F})$ ορθομοναδιαίος πίνακας με στήλες v_i τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα των ιδιοτιμών $\lambda_i(A)$. Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $y \in \mathbb{F}^n$.

Έστω οι Ερμιτιανοί / συμμετρικοί πίνακες $D \in M_n(\mathbb{F})$ και $L \in M_2(\mathbb{F})$ με

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + (V^* y)(V^* y)^* \tag{2.13}$$

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|y_{1:(n-1)}\|_2 \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|y_{1:(n-1)}\|_2 & \overline{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Όπου $y_{1:(n-1)}$ είναι η προβολή του $y \in \mathbb{F}^n$ στον υπόχωρο $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ και η $\hat{y}_n$ είναι η $n-$ συντεταγμένη του y, όπως αυτά ορίστηκαν στη (2.1) και (2.2), αντίστοιχα.

Τότε

$$\lambda_{min}(D) = \lambda_{min}(L) = \frac{\lambda_n(A) + \lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 + |\hat{y}_n|^2 - \sqrt{\Delta_L}}{2} \tag{2.15}$$

$$\lambda_{max}(D) = \lambda_{max}(L) = \frac{\lambda_n(A) + \lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 + |\hat{y}_n|^2 + \sqrt{\Delta_L}}{2} \tag{2.16}$$

όπου

$$\Delta_L = \left(tr(L)\right)^2 - 4det(L)$$

$$\lambda_{min}(A) \equiv \lambda_n(A) \le \lambda_{min}(L) \le \lambda_{min}(A + yy^*) \tag{2.17}$$

Απόδειξη

Επειδή ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός σύμφωνα με το Φασματικό θεώρημα διαγωνοποιείται από ορθομοναδιαίο πίνακα V με στήλες v_i τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα αντίστοιχα των πραγματικών ιδιοτιμών $\lambda_\iota(A), i = 1,2,\dots,n$ και με διαγώνια μορφή όπως στην (1.36), δηλαδή $A = V\Lambda V^*$, όπου $\Lambda = diag\big(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_n(A)\big)$.

Κάνουμε διαμέριση στους πίνακες V, Λ θεωρώντας

$$V = (V_1 \quad v_n) \text{ και } \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

όπου

$$V_1 = (v_1\, v_2 \dots v_{n-1}) \in M_{nx(n-1)}(\mathbb{F}) \tag{2.19}$$

και

$$\Lambda_1 = diag\big(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_{n-1}(A)\big) \tag{2.20}$$

Έστω ένα μοναδιαίο διάνυσμα $z \in \mathbb{F}^n$ του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$, το οποίο αντιστοιχεί στην ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{min}(A + yy^*)$.

Από τον Ορισμό 1.4.1 της ιδιοτιμής από την (1.3) και από το γεγονός ότι το z είναι μοναδιαίο διάνυσμα έχουμε:

$$(A + yy^*)z = \lambda_{\min}(A + yy^*)z \Rightarrow$$

$$z^*(A + yy^*)z = \lambda_{min}(A + yy^*)\|z\|_2^2$$

έτσι:

$$\lambda_{min}(A + yy^*) = z^*Az + z^*yy^*z.$$

Αντικαθιστώντας τον A με τη διαγώνια μορφή του (διαγωνοποίηση) και χρησιμοποιώντας την (2.18) η παραπάνω ισότητα γράφεται:

$$\begin{aligned} \lambda_{min}(A + yy^*) &= z^*V \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} V^*z + (y^*z)^*(y^*z) \\ &= (V^*z)^* \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} V^*z + (y^*z)^*(y^*z) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Όμως από τη διαμέριση του V από τη (2.18) και τον Ορισμό 2.1.1 έχουμε:

$$V^*z = \begin{pmatrix} V_1^* \\ v_n^* \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} V_1^*z \\ v_n^*z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

όπου

$$\hat{z}_n \equiv v_n^* z \in \mathbb{F}$$

Παρατηρούμε ότι το V^*z είναι μοναδιαίο διάνυσμα, επειδή το z θεωρήθηκε το μοναδιαίο διάνυσμα του πίνακα $A + yy^*$ και από την (1.3) επιτρέπεται να γράψουμε:

$$\|V^*z\|_2^2 = (V^*z)^*V^*z = z^*VV^*z = z^*I_nz = z^*z = 1 \tag{2.23}$$

Επιπλέον συνδυάζοντας την (2.18), την (2.23) και (2.1) - (2.2) προκύπτει:

$$y^*z = y^*I_nz = y^*VV^*z = (V^*y)^*\, V^*z = \left(\begin{pmatrix} V_1^* \\ v_n^* \end{pmatrix} y\right)^* (V^*z)$$

$$= \begin{pmatrix} V_1^*y \\ v_n^*y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

όπου

$$\hat{y}_n \equiv v_n^* y \in \mathbb{F}$$

Στην (2.21) αντικαθιστώντας από τις (2.22) και (2.24) έχουμε:

$$\lambda_{min}(A + yy^*) = (V^*z)^* \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} V^*z + (y^*z)^*(y^*z)$$

$$= \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \left(\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}\right)^* \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^*\Lambda_1 & \bar{\hat{z}}_n\lambda_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}$$

$$= z_{1:(n-1)}^*\Lambda_1 z_{1:(n-1)} + \lambda_n(A)|\hat{z}_n|^2$$

$$+ \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}$$

$$= \|z_{1:(n-1)}\|_2^2 \frac{z_{1:(n-1)}^*}{\|z_{1:(n-1)}\|} \Lambda_1 \frac{z_{1:(n-1)}}{\|z_{1:(n-1)}\|} + \lambda_n(A)|\hat{z}_n|^2$$

$$+ \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{z_{1:(n-1)}^*}{\|z_{1:(n-1)}\|_2}\Lambda_1\frac{z_{1:(n-1)}}{\|z_{1:(n-1)}\|_2}$ ανήκει στο αριθμητικό πεδίο Ορισμός 1.6.1 του διαγώνιου πίνακα $\Lambda_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ επειδή το διάνυσμα $\frac{z_{1:(n-1)}}{\|z_{1:(n-1)}\|_2}$ είναι μοναδιαίο,

$$\left\|\frac{z_{1:(n-1)}}{\|z_{1:(n-1)}\|_2}\right\|_2 = \frac{\|z_{1:(n-1)}\|_2}{\|z_{1:(n-1)}\|_2} = 1,$$

το αριθμητικό πεδίο του διαγώνιου πίνακα Λ_1 είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα του πραγματικού άξονα, με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του Λ_1, (βλέπε, Πρόταση 1.6.6) και επιπλέον ο πίνακας Λ_1 δίνεται από την (2.20) έχουμε:

$$F(\Lambda_1) = [\lambda_{n-1}(\Lambda_1), \lambda_{max}(\Lambda_1)] \equiv [\lambda_{n-1}(A), \lambda_{max}(A)]$$

Επομένως για τον αριθμό ισχύει:

$$\lambda_{n-1}(A) \leq \frac{z_{1:(n-1)}^*}{\|z_{1:(n-1)}\|_2}\Lambda_1\frac{z_{1:(n-1)}}{\|z_{1:(n-1)}\|_2} \leq \lambda_{max}(A) \tag{2.26}$$

Η (2.25) από το αριστερό μέρος της ανίσωσης στη (2.26) και χρησιμοποιώντας τη (2.22) γράφεται:

$$\begin{aligned}
\lambda_{min}(A+yy^*) &= \|z_{1:(n-1)}\|^2\frac{z_{1:(n-1)}^*}{\|z_{1:(n-1)}\|}\Lambda_1\frac{z_{1:(n-1)}}{\|z_{1:(n-1)}\|} + \lambda_n(A)|\bar{z}_n|^2 + \\
&+\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \\
&\geq \|z_{1:(n-1)}\|^2\lambda_{n-1}(A) + \lambda_n(A)|\bar{z}_n|^2 + \\
&+\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix} + \\
&+\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} z_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{z}}_n \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} z_{1:(n-1)} \\ \hat{z}_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.22)}{=} (V^*z)^*DV^*z \tag{2.27}$$

Είναι φανερό ότι ο πίνακας D είναι Ερμιτιανός πίνακας ως άθροισμα Ερμιτιανών πινάκων και από την (2.23) το V^*z είναι μοναδιαίο διάνυσμα, συνεπώς ο αριθμός $(V^*z)^*DV^*z \in F(D)$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.6.6 για το αριθμητικό πεδίο $F(D)$ ισχύει:

$$F(D) = [\lambda_{min}(D), \lambda_{max}(D)] \tag{2.28}$$

όπου με $\lambda_{min}(D)$, $\lambda_{max}(D) \in \mathbb{R}$. Συνεπώς για τον πραγματικό αριθμό $(V^*z)^*DV^*z$ ισχύει:

$$\lambda_{min}(D) \leq (V^*z)^*DV^*z \leq \lambda_{max}(D)$$

Συνδυάζοντας το αριστερό μέρος της παραπάνω ανισότητας με την (2.27) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_{min}(A + yy^*) \geq (V^*z)^*DV^*z \geq \lambda_{min}(D) \tag{2.29}$$

Θεωρούμε έναν ορθομοναδιαίο πίνακα $Q_1 \in M_{(n-1)}(\mathbb{F})$ τέτοιον ώστε:

$$Q_1 . y_{1:(n-1)} = \|y_{1:(n-1)}\|_2 e_{n-1} \tag{2.30}$$

όπου $e_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ είναι το διάνυσμα της ορθοκανονικής βάσης, του $\mathbb{R}^{n-1}$, δηλαδή όλα τα στοιχεία 0 και στην $n-1$ συντεταγμένη 1.

Επιπλέον θεωρούμε τον πίνακα:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

ο οποίος είναι ορθομοναδιαίος, επειδή ισχύει:

$$Q^*Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.6.3 για τον ορθομοναδιαίο πίνακα $Q \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει:

$$F(Q^*DQ) = F(D) \tag{2.31}$$

Στη συνέχεια, από τη μορφή γραφής του V στη (2.18) και από τον ορισμό της προβολής στον Ορισμό 2.1.1 έχουμε:

$$V^*y = (V_1 \quad v_n)^*y = \begin{pmatrix} V_1^* \\ v_n^* \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} V_1^*y \\ v_n^*y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Επιπλέον από τους ορισμούς στις (2.31), (2.13) και τη (2.33) μπορούμε να γράψουμε:

$$Q^*DQ = \begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}^* \left[\begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1:(n-1)}^* & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)I_{n-1} + y_{1:(n-1)}y_{1:(n-1)}^* & y_{1:(n-1)}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n y_{1:(n-1)}^* & \lambda_n(A) + |\bar{y}_n|^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)Q_1 I_{n-1} + Q_1 y_{1:(n-1)}y_{1:(n-1)}^* & Q_1 y_{1:(n-1)}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n y_{1:(n-1)}^* & \lambda_n(A) + |\bar{y}_n|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)Q_1 Q_1^* + Q_1 y_{1:(n-1)}y_{1:(n-1)}^* Q_1^* & Q_1 y_{1:(n-1)}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n y_{1:(n-1)}^* Q_1^* & \lambda_n(A) + |\bar{y}_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)Q_1 Q_1^* + Q_1 y_{1:(n-1)}y_{1:(n-1)}^* Q_1^* & Q_1 y_{1:(n-1)}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n y_{1:(n-1)}^* Q_1^* & \lambda_n(A) + |\bar{y}_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)I_{n-1} + Q_1 y_{1:(n-1)}y_{1:(n-1)}^* Q_1^* & Q_1 y_{1:(n-1)}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n y_{1:(n-1)}^* Q_1^* & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

Ο ορισμός του $Q_1 \in M_{(n-1)}(\mathbb{F})$ στην (2.30) μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$y_{1:(n-1)}^* Q_1^* = \left(Q_1 y_{1:(n-1)}\right)^* = \left(\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 e_{n-1}\right)^* = \left\|y_{1:(n-1)}\right\| e_{n-1}^*$$

και για τον $(n-1)x(n-1)$ πίνακα

$$Q_1 y_{1:(n-1)} y_{1:(n-1)}^* Q_1^* = \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 e_{n-1} \left(\left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 e_{n-1}\right)^* = \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2 e_{n-1} e_{n-1}^*$$

$$= \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Αντικαθιστώντας στη (2.34) τη (2.35) έχουμε:

$$Q^*DQ = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{n-1}(A) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_{n-1}(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1}(A) + \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2^2 & \bar{\hat{y}}_n \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{y}_n \left\|y_{1:(n-1)}\right\|_2 & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A)I_{n-2} & \mathbb{O}_{(n-2)xn} \\ \mathbb{O}_{2x(n-2)} & L \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

όπου ο L είναι ο $2x2$ Ερμιτιανός πίνακας

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 & \bar{\hat{y}}_n \|y_{1:(n-1)}\|_2 \\ \hat{y}_n \|y_{1:(n-1)}\|_2 & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|y_{1:(n-1)}\|_2 \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|y_{1:(n-1)}\|_2 & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}$$

Ορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τον L στη (2.14).

Ο πίνακας Q^*DQ από τη μορφή του στη (2.36), είναι το άθροισμα των πινάκων $\lambda_{n-1}(A)I_{n-2}$ και L. Σύμφωνα με την ιδιότητα iv) του αριθμητικού πεδίου στην Πρόταση 1.6.5, ισχύει:

$$F(Q^*DQ) = convex\ hull\{F(\lambda_{n-1}(A)I_{n-2}) \cup F(L)\} \tag{2.37}$$

Επειδή $F(\lambda_{n-1}(A)I_{n-2}) = \{\lambda_{n-1}(A)\}$, (βλέπε, την (1.42) στην Πρόταση 1.6.4).

Επιπλέον για τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα L γνωρίζουμε από την Πρόταση 1.6.6 ότι ισχύει:

$$F(L) = [\lambda_{min}(L), \lambda_{max}(L)] \subset \mathbb{R} \tag{2.38}$$

Συνδυάζοντας την ανίσωση (2.10), (βλέπε, Πρόταση 2.1.5) με τη μορφή του πίνακα L στη (2.14) και χρησιμοποιώντας τη διάταξη $\lambda_n(A) \leq \lambda_{n-1}(A)$, για την ελάχιστη ιδιοτιμή του L μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{min}(L) \leq \lambda_{n-1}(A) \tag{2.39}$$

Συνδυάζοντας τη μορφή του L με την ανίσωση στη (2.6) για τη μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα L μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_{n-1}(A) \leq \lambda_{max}(L) \leq \lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 + |\hat{y}_n|^2 \tag{2.40}$$

Συνδυάζοντας (2.39) με τη (2.40) γράφουμε:

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{min}(L) \leq \lambda_{n-1}(A) \leq \lambda_{max}(L) \leq \lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 + |\hat{y}_n|^2 \tag{2.41}$$

Από τη (2.41) είναι φανερό ότι:

$$\lambda_{n-1}(A) \in [\lambda_{min}(L), \lambda_{max}(L)] \overset{(2.38)}{=} F(L)$$

το οποίο μας επιτρέπει να γράψουμε τη (2.37) ως ακολούθως:

$$F(Q^*DQ) = F(D) = F(L) = [\lambda_{min}(L), \lambda_{max}(L)] \tag{2.42}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα L από τη (2.14) και (2.36), είναι

$$\lambda^2 - tr(L)\lambda + \det(L) = 0 \tag{2.43}$$

όπου

$$tr(L) = \lambda_n(A) + \lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 + |\hat{y}_n|^2 \tag{2.44}$$

και

$$det(L) = \left(\lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2\right)(\lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2) - \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 |\hat{y}_n|^2 \tag{2.45}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.44), (2.45) στη διακρίνουσα του τριωνύμου της (2.43) έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta_L &= \left(tr(L)\right)^2 - 4\det(L) \\ &= \left(\lambda_{n-1}(A) + \|y_{1:(n-1)}\|_2^2 - \lambda_n(A) - |\hat{y}_n|^2\right)^2 + 4\|y_{1:(n-1)}\|_2^2 |\hat{y}_n|^2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

από όπου είναι φανερό ότι $\Delta_L > 0$.

Συνεπώς το τριώνυμο στην (2.43) έχει δύο πραγματικές ρίζες, που δίνονται ως

$$\lambda_{min}(L) = \frac{tr(L) - \sqrt{\Delta_L}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{max}(L) = \frac{tr(L) + \sqrt{\Delta_L}}{2},$$

όπου $tr(L)$ δίνεται στη σχέση (2.44) και Δ_L στη σχέση (2.46).

Συνδυάζοντας τη (2.42) με τη (2.28) μπορούμε να γράψουμε

$$[\lambda_{min}(D), \lambda_{max}(D)] = F(D) = F(L) = [\lambda_{min}(L), \lambda_{max}(L)],$$

από όπου συμπεραίνουμε τα αριστερά μέρη των (2.15) και (2.16), δηλαδή

$$\lambda_{min}(D) = \lambda_{min}(L) \quad \text{και} \qquad \lambda_{max}(D) = \lambda_{max}(L).$$

Τέλος, συνδυάζοντας τη (2.15) με τις ανισώσεις (2.29) και (2.41) προκύπτει

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{min}(L) \overset{(2.15)}{=} \lambda_{min}(D) \overset{(2.29)}{\leq} \lambda_{min}(A + yy^*)$$

η οποία ανίσωση επαληθεύει την (2.17) και ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

■

Σχόλιο 2.1.10

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1.9, μπορούμε να εντοπίσουμε τη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$ με μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτή που γινόταν με τη χρήση των (2.7) και (2.10).

Συγκεκριμένα, στο αριστερό άκρο της ανισότητας (2.7) ή (2.10), μεταξύ των ελαχίστων ιδιοτιμών των πινάκων A και $A + yy^*$ παρεμβάλλεται η ελάχιστη ιδιοτιμή του $2x2$ πίνακα L βλέπε στη (2.17).

Θεώρημα 2.1.11

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας με διατεταγμένες ιδιοτιμές* $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots, n,$ *όπως στη* (2.3) *και* $V = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n) \in M_n(\mathbb{F})$ *ορθομοναδιαίος πίνακας όπως ορίστηκε στο* *Θεώρημα 2.1.9*. *Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα* $y \in \mathbb{F}^n$ *και* $U \in M_2(\mathbb{F})$ *ο Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας*

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{y}_{n-1} \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\hat{y}}_{n-1} & \overline{\hat{y}}_n \end{pmatrix} \tag{2.47}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_{n-1}(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 & \hat{y}_{n-1}\overline{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n\overline{\hat{y}}_{n-1} & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix}$$

όπου $\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n$ *είναι η* $(n-1)$ *−συντεταγμένη,* $n-$ *συντεταγμένη του* y *όπως ορίστηκε στη* (2.2). *Τότε*

$$\lambda_{min}(U) = \frac{\lambda_{n-1}(A) + \lambda_n(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 + |\hat{y}_n|^2 - \sqrt{\Delta_U}}{2} \tag{2.48}$$

$$\lambda_{max}(U) = \frac{\lambda_n(A) + \lambda_{n-1}(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 + |\hat{y}_n|^2 + \sqrt{\Delta_U}}{2} \tag{2.49}$$

όπου $\Delta_U = \big(tr(U)\big)^2 - 4det(U)$ *και*

$$\lambda_{min}(A + yy^*) \le \lambda_{min}(U) \le \lambda_{n-1}(A) \tag{2.50}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας το ορθομοναδιαίο πίνακα V με στήλες v_i τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα των ιδιοτιμών $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots, n,$ όπως στη (2.18) για τον διαταραγμένο πίνακα $A + yy^*$ και το Θεώρημα 1.5.7 (Φασματικό θεώρημα) μπορούμε να γράψουμε:

$$V^*(A + yy^*)V = V^*AV + V^*yy^*V = \Lambda + V^*y(V^*y)^* \tag{2.51}$$

όπου Λ είναι ο διαγώνιος πίνακας που ορίζεται στη (2.18) με διαγώνια στοιχεία τις διατεταγμένες ιδιοτιμές $\lambda_i(A)$.

Για τον πίνακα V^*y, όπως στη (2.33) μπορούμε να σημειώσουμε:

$$V^*y = (v_1\ v_2 \dots v_n)^* y = \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} v_1^* y \\ v_2^* y \\ \vdots \\ v_n^* y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

όπου $\hat{y}_i, i = 1,2, \dots, n$ ορίζονται στη (2.2) για κάθε v_i ορθοκανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα του A και αντίστοιχη στήλη του πίνακα V.

Αντικαθιστώντας του πίνακες Λ και V^*y στη (2.51) έχουμε:

$$V^*(A + yy^*)V =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_1 & \bar{\hat{y}}_2 & \dots & \bar{\hat{y}}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_2 & \dots & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_1 & |\hat{y}_2|^2 & \dots & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_2 & \dots & |\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A) + |\hat{y}_2|^2 & \cdots & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_2 & \dots & \lambda_{n-1}(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 & \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_{n-1} & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 \end{pmatrix} \tag{2.53}$$

Από όπου ορίζεται ο $2x2$ Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας U της (2.47) να είναι ο $2x2$ υποπίνακας του $V^*(A + yy^*)V$ που εμφανίζεται στην κάτω δεξιά γωνία του.

Οι ιδιοτιμές του U υπολογίζονται από τις ρίζες του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου:

$$x_U(\lambda) = \lambda^2 - tr(U)\lambda + \det(U),$$

όπου

$$tr(U) = \lambda_{n-1}(A) + \lambda_n(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 + |\hat{y}_n|^2 \tag{2.54}$$

και

$$det(U) = (\lambda_{n-1}(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2)(\lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2) - |\hat{y}_n|^2|\hat{y}_{n-1}|^2 \tag{2.55}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.54) και (2.55) υπολογίζεται η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_U(\lambda)$ ότι ισούται με

$$\begin{aligned} \varDelta_U &= \left(tr(U)\right)^2 - 4\det(U) \\ &= (\lambda_{n-1}(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 - \lambda_n(A) - |\hat{y}_n|^2)^2 + 4|\hat{y}_n|^2|\hat{y}_{n-1}|^2 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Προφανώς $\Delta_U > 0$, συνεπώς υπάρχουν δύο πραγματικές ρίζες του $x_U(\lambda)$, που είναι οι ιδιοτιμές του U και δίνονται ακολούθως

$$\lambda_{min}(U) = \frac{tr(U)-\sqrt{\Delta_U}}{2} \text{ και } \qquad \lambda_{max}(U) = \frac{tr(U)+\sqrt{\Delta_U}}{2}$$

όπου $tr(U), \Delta_U$ δίνονται στη (2.54) και (2.56), αντίστοιχα.

Οι παραπάνω ιδιοτιμές μετά την αντικατάσταση του $tr(U)$ επαληθεύουν τις ισότητες (2.48) και (2.49), αντίστοιχα.

Επιπλέον οι πίνακες $A + yy^*$ και $V^*(A + yy^*)V$ είναι όμοιοι συνεπώς έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, δηλαδή ισχύει:

$\lambda_i(A + yy^*) \equiv \lambda_i(V^*(A + yy^*)V)$ για κάθε $i = 1,2, \dots, n$, (βλέπε, Πρόταση 1.4.8) γεγονός που μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.1.7 (Cauchy' s interlacing) στον πίνακα $V^*(A + yy^*)V$ της (2.53) για τον $2x2$ υποπίνακα του U και να συγκρίνουμε τις ιδιοτιμές του $A + yy^*$.

Θεωρώντας $m = 2, k = n$ εφαρμόζοντας τη (2.12) στον πίνακα $V^*(A + yy^*)V$ της (2.53) έχουμε:

$$\begin{aligned} &\lambda_{min}(A + yy^*) \equiv \lambda_n(A + yy^*) \equiv \lambda_n(V^*(A + yy^*)V) \leq \lambda_2(U) \equiv \\ &\lambda_{min}(U) \leq \lambda_2(V^*(A + yy^*)V) \equiv \lambda_2(A + yy^*) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Δηλαδή

$$\lambda_{min}(A + yy^*) \equiv \lambda_n(A + yy^*) \leq \lambda_{min}(U)$$

Επιπλέον από τη μορφή του πίνακα U στη (2.47) και τη (2.10) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_{min}(U) \leq \lambda_{n-1}(A) \tag{2.58}$$

Συνδυάζοντας τη (2.57) και το δεξί μέρος της (2.58) καταλήγουμε στη (2.50), το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

Σχόλιο 2.1.12

i) Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1.11 μπορούμε να εντοπίσουμε τη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του $A + yy^*$ με μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτήν που επιτεύχθηκε με τη (2.10). Συγκεκριμένα, στο δεξί άκρο της (2.10) μεταξύ της ελάχιστης ιδιοτιμής του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$και της $\lambda_{n-1}(A)$ παρεμβάλλεται η ελάχιστη ιδιοτιμή του $2x2$ πίνακα U, βλέπε στη (2.50).

ii) Συνδυάζοντας το Σχόλιο 2.1.10 με το παραπάνω σχόλιο i) καταλαβαίνουμε ότι ο εντοπισμός της $\lambda_{min}(A + yy^*)$ γίνεται σε ένα διάστημα του πραγματικού άξονα που είναι πιο ¨κλειστό¨ στην ιδιοτιμή του $\lambda_{min}(A+yy^*)$ από το διάστημα που δημιουργεί η (2.10). Πράγματι, από τη (2.10) γνωρίζαμε ότι:

$$\lambda_{min}(A+yy^*) \in [\lambda_{min}(A), \lambda_{n-1}(A)]$$

ενώ από τις ανισώσεις (2.17) και (2.50) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_{min}(A+yy^*) \in [\lambda_{min}(L), \lambda_{min}(U)]$$

με $[\lambda_{min}(L), \lambda_{min}(U)] \subset [\lambda_{min}(A), \lambda_{n-1}(A)]$.
Συνεπώς τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 2.1.9 και 2.1.11 δίνουν:

$$\lambda_{min}(A) \le \lambda_{min}(L) \le \lambda_{min}(A+yy^*) \le \lambda_{min}(U) \le \lambda_{n-1}(A) \tag{2.59}$$

με L, U οι Ερμιτιανοί / συμμετρικοί πίνακες των (2.14) και (2.47), αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.1.13

Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** η συνάρτηση
```
function[y,A,App,Lp,Up,lmin,EigLpmin,Eig1App,EigUpmin,lmin_1
] = smallLU(A)
```
Έχει είσοδο τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα A.
Οι έξοδοι είναι:
y: το τυχαίο διάνυσμα
A: ο Ερμιτιανός πίνακας
App: Ο διαταραγμένος πίνακας $A+yy^*$
`Lp`: Ο πίνακας L

`Up`: Ο πίνακας U

`lmin`: Η ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{min} \equiv \lambda_n(A)$

`EigLpmin`: Η ιδιοτιμή $\lambda_{min}(L)$ σημειώνει την ελάχιστη ιδιοτιμή του L

`Eig1App`: Η ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{min}(A+yy^*)$ του διαταραγμένου $A+yy^*$

`EigUpmin`: Η ελάχιστη ιδιοτιμή $\lambda_{min}(U)$

`lmin_1`: Η ιδιοτιμή $\lambda_{n-1}(A)$ του πίνακα A

Για $n=4$ και $s=6$ έχουμε:

$$y = \begin{pmatrix} 1.1006 - 0.7423i \\ 1.5442 - 1.0616i \\ 0.0859 + 2.3505i \\ -1.4916 - 0.6156i \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3.0000 & 2.5000 & 1.5000 & 2.5000 \\ 2.5000 & -4.0000 & -3.5000 & -1.5000 \\ 1.5000 & -3.5000 & 1.0000 & -2.0000 \\ 2.5000 & -1.5000 & -2.0000 & 3.0000 \end{pmatrix}$$

$$App = \begin{pmatrix} 4.7624 + 0.0000i & 4.9876 + 0.0221i & -0.1502 - 2.6507i & 1.3153 + 1.7847i \\ 4.9876 - 0.0221i & -0.4885 + 0.0000i & -5.8625 - 3.7208i & -3.1498 + 2.5341i \\ -0.1502 + 2.6507i & -5.8625 + 3.7208i & 6.5320 + 0.0000i & -3.5751 - 3.4530i \\ 1.3153 - 1.7847i & -3.1498 - 2.5341i & -3.5751 + 3.4530i & 5.6038 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 14.6164 + 0.0000i & 1.8166 - 0.9993i \\ 1.8166 + 0.9993i & -7.1680 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 8.3987 + 0.0000i & 0.7299 - 1.3125i \\ 0.7299 + 1.3125i & -7.1680 + 0.0000i \end{pmatrix}$$

$$lmin \ = -7.4966, EigLpmin \ = -7.3636, Eig1App \ = -7.3548,$$
$$EigUpmin \ = -7.3116, lmin\_1 \ = 1.5353$$

Επαληθεύεται η ανισότητα (2.17) του Θεωρήματος 2.1.9 και η σχέση (2.50) του Θεωρήματος 2.1.11

$$\lambda_{min}(L) = -7.3636, \qquad \lambda_{min}(U) = -7.3116$$

$$\lambda_n(A) = -7.4966 \leq \lambda_{min}(L) = -7.3636 \leq \lambda_{min}(A + yy^*) = -7.3548 \leq \lambda_{min}(U) = -7.3116 \leq \lambda_{n-1}(A) = 1.5353$$

■

Στη συνέχεια θα βελτιώσουμε τα φράγματα του θεωρήματος του Weyl's, για τη μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$, ενός Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα A που διαταράσσεται από τον πίνακα yy^* με $rank$ 1, βρίσκοντας την προβολή του $A + yy^*$ σε ένα υπόχωρο δύο διαστάσεων, που περιγράφεται από ένα πίνακα $2x2$. [βλέπε, [5]].

Βελτίωση των φραγμάτων της μέγιστης ιδιοτιμής του πίνακα $A + yy^*$

Θεώρημα 2.1.14

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *ένας Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές* $\lambda_i(A), i = 1,2, \dots, n$, *διατεταγμένες ιδιοτιμές όπως στη (2.3) και* $V \in M_n(\mathbb{F})$ *ορθομοναδιαίος πίνακας όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 2.1.9. Έστω* $y \in \mathbb{F}^n$ *ένα τυχαίο διάνυσμα, και οι Ερμιτιανοί / συμμετρικοί πίνακες* $E \in M_n(\mathbb{F}), K \in M_2(\mathbb{F})$ *και* $\Pi \in M_2(\mathbb{F})$ *τέτοιοι ώστε:*

$$E = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2(A) I_{n-1} \end{pmatrix} + (V^* y)(V^* y)^* \qquad (2.60)$$

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_1 & \bar{\hat{y}}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1 \bar{\hat{y}}_2 \\ \bar{\hat{y}}_1 \hat{y}_2 & |\hat{y}_2|^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (2.61)$$

και

$$\Pi = \begin{pmatrix} \lambda_{max}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \|y_{2:n}\|_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_1 & \|y_{2:n}\|_2 \end{pmatrix} \qquad (2.62)$$

όπου $y_{2:n}$ *είναι η προβολή του* y *στον υπόχωρο των ιδιοδιανυσμάτων των στηλών* $v_2, v_3 \dots, v_n$ του V και $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$ *είναι* η $1-$ *συντεταγμένη και* $2-$ *συντεταγμένη του* y *όπως ορίστηκαν στη (2.1) και (2.3) αντίστοιχα.*

Τότε:

i) $$\lambda_{min}(K) = \frac{\lambda_{max}(A) + \lambda_2(A) + |\hat{y}_1|^2 + |\hat{y}_2|^2 - \sqrt{\Delta_K}}{2} \qquad (2.63)$$

ii) $$\lambda_{max}(K) = \frac{\lambda_{max}(A) + \lambda_2(A) + |\hat{y}_1|^2 + |\hat{y}_2|^2 + \sqrt{\Delta_K}}{2} \qquad (2.64)$$

όπου $\Delta_K = \big(tr(K)\big)^2 - 4\det(K)$

iii) $$\lambda_{min}(\Pi) = \frac{\lambda_{max}(A) + \lambda_2(A) + \|y\|_2^2 - \sqrt{\Delta_\Pi}}{2} \qquad (2.65)$$

iv) $$\lambda_{max}(E) = \lambda_{max}(\Pi) = \frac{\lambda_{max}(A) + \lambda_2(A) + \|y\|_2^2 + \sqrt{\Delta_\Pi}}{2} \qquad (2.66)$$

όπου $\Delta_\Pi = \big(tr(\Pi)\big)^2 - 4\det(\Pi)$

v) $$\lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}(K) \le \lambda_{max}(A + yy^*) \qquad (2.67)$$

και

$$\lambda_{max}(\Pi) \leq \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \quad (2.68)$$

$$\lambda_{max}(K) \leq \lambda_{max}(A + yy^*) \leq \lambda_{max}(\Pi) \quad (2.69)$$

Απόδειξη

Με ανάλογη διαδικασία, που ακολουθήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.1.9 στον ορθομοναδιαίο πίνακα V και στο διαγώνιο πίνακα Λ κάνουμε τις ακόλουθες διαμερίσεις:

$$V = (v_1 \quad V_2) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

όπου $v_i, i = 1,2, \dots, n$ τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα τοποθετημένα στις στήλες του V και είναι αντίστοιχα των πραγματικών ιδιοτιμών λ_i του A και οι πίνακες:

$$V_2 = (v_2 \ \ v_3 \ \dots \ v_n) \in M_{nx(n-1)}(\mathbb{F}) \quad (2.71)$$

$$\Lambda_2 = diag(\lambda_2(A), \lambda_3(A), \dots, \lambda_n(A) \equiv \lambda_{min}(A)) \quad (2.72)$$

Έστω ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $w \in \mathbb{F}^n$ του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$ το οποίο αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή, $\lambda_{max}(A + yy^*)$.

Από τον Ορισμό 1.4.1 ιδιοτιμή ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα, από την (1.3) από $\|w\|_2^2 = 1$ και από την εφαρμογή του Φασματικού θεωρήματος (βλέπε, Θεώρημα 1.5.7) μπορούμε να γράψουμε:

$(A + yy^*)w = \lambda_{max}(A + yy^*)w \Rightarrow$

$w^*(A + yy^*)w = \lambda_{max}(A + yy^*)w^*w \Rightarrow$

$w^*(A + yy^*)w = \lambda_{max}(A + yy^*)\|w\|_2^2$

από όπου προκύπτει:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A + yy^*) &= w^*(A + yy^*)w = w^*Aw + w^*yy^*w \\ &= w^*V\Lambda V^*w + w^*yy^*w \\ &\overset{(2.70)}{=} (V^*w)^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} V^*w + (y^*w)^*(y^*w) \end{aligned} \quad (2.73)$$

από τη διαμέριση του V στην (2.70) μπορούμε να γράψουμε:

$$V^{*}\text{w}=\begin{pmatrix} v_1^{*} \\ V_2^{*} \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} v_1^{*}w \\ V_2^{*}w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ w_{2:n} \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

Επιπλέον το $V^{*}w$ στη (2.74) είναι μοναδιαίο διάνυσμα επειδή ο V θεωρήθηκε ορθομοναδιαίος πίνακας και το w μοναδιαίο διάνυσμα, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\|V^{*}\text{w}\|_2^2 = (V^{*}\text{w})^{*}V^{*}w = w^{*}VV^{*}w = w^{*}I_n w = w^{*}w = 1 \tag{2.75}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς στις (2.1) και (2.2) τον V από τη (2.70) και V_2 από τη (2.71), μπορούμε να γράψουμε:

$$V^{*}y = (v_1 \quad V_2)^{*}y = \begin{pmatrix} v_1^{*} \\ V_2^{*} \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} v_1^{*}y \\ V_2^{*}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ y_{2:n} \end{pmatrix}$$

και (2.76)

$$\|V^{*}y\|_2^2 = (V^{*}\text{y})^{*}V^{*}y = y^{*}VV^{*}y = y^{*}I_n y = y^{*}y = \|y\|_2^2$$

$$y^{*}w = y^{*}VV^{*}w = (V^{*}\text{y})^{*}V^{*}w \underset{(2.77)}{\overset{(2.76)}{=}} \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ y_{2:n} \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ w_{2:n} \end{pmatrix} = (\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^{*}) \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ w_{2:n} \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

Τώρα συνδυάζοντας τη (2.74) με τις (2.76) και τους ορισμούς (2.1) - (2.2) γράφουμε:

Στη (2.73) αντικαθιστούμε τα διανύσματα $V^{*}\text{w}$ και $y^{*}w$ από τις (2.74) και (2.77) αντίστοιχα και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\lambda_{max}(A + yy^{\cdot}) = (\bar{\widehat{w}}_1 \quad w_{2:n}^{*}) \begin{pmatrix} \lambda_{max}(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ w_{2:n} \end{pmatrix} + \\
+ (\bar{\widehat{w}}_1 \quad w_{2:n}^{*}) \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ y_{2:n} \end{pmatrix} (\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^{*}) \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ w_{2:n} \end{pmatrix} \\
= |\widehat{w}_1|^2 \lambda_{max}(A) + w_{2:n}^{*}\Lambda_2\, w_{2:n} + \\
+ (\bar{\widehat{w}}_1 \quad w_{2:n}^{*}) \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ y_{2:n} \end{pmatrix} (\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^{*}) \begin{pmatrix} \widehat{w}_1 \\ w_{2:n} \end{pmatrix} \\
= |\widehat{w}_1|^2 \lambda_{max}(A) + \|w_{2:n}\|_2^2 \frac{w_{2:n}^{*}}{\|w_{2:n}\|_2^2} \Lambda_2 \frac{w_{2:n}}{\|w_{2:n}\|_2^2} +
\end{aligned}$$

$$+(\bar{\hat{w}}_1 \quad w_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ y_{2:n}\end{pmatrix}(\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ w_{2:n}\end{pmatrix} \tag{2.78}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{w_{2:n}^*}{\|w_{2:n}\|_2^2}\Lambda_2\frac{w_{2:n}}{\|w_{2:n}\|_2^2}$ είναι αριθμός που ανήκει στο αριθμητικό πεδίο (βλέπε, Ορισμό 1.6.1) του διαγώνιου πίνακα $\Lambda_2 \in M_{(n-1)x(n-1)}(\mathbb{R})$ επειδή το διάνυσμα $\frac{w_{2:n}}{\|w_{2:n}\|_2^2}$ είναι μοναδιαίο.

Επιπλέον είναι γνωστό ότι το αριθμητικό πεδίο του Λ_2 είναι ευθύγραμμο τμήμα του πραγματκού άξονα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη ιδιοτιμή του (βλέπε, Πρόταση 1.6.6), συνεπώς από τη (2.72) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} F(\Lambda_2) &= [\lambda_{min}(\Lambda_2),\ \lambda_{max}(\Lambda_2)] \\ &= [\lambda_{min}(A),\ \lambda_2(A)] \end{aligned} \tag{2.79}$$

Επομένως για τον αριθμό $\frac{w_{2:n}^*}{\|w_{2:n}\|_2^2}\Lambda_2\frac{w_{2:n}}{\|w_{2:n}\|_2^2}$ από την (2.79) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_{min}(A) \leq \frac{w_{2:n}^*}{\|w_{2:n}\|_2^2}\Lambda_2\frac{w_{2:n}}{\|w_{2:n}\|_2^2} \leq \lambda_2(A) \tag{2.80}$$

Η (2.78) από τη (2.80) και τις (2.74), (2.76) γράφεται:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A+yy^*) &\leq |\hat{w}_1|^2\lambda_{max}(A) + \|w_{2:n}\|_2^2\lambda_2(A) + \\ &+(\bar{\hat{w}}_1 \quad w_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ y_{2:n}\end{pmatrix}(\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ w_{2:n}\end{pmatrix} \\ &= (\bar{\hat{w}}_1 \quad w_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ w_{2:n}\end{pmatrix} + \\ &+(\bar{\hat{w}}_1 \quad w_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ y_{2:n}\end{pmatrix}(\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ w_{2:n}\end{pmatrix} \\ &= (\bar{\hat{w}}_1 \quad w_{2:n}^*)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)I_{n-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ y_{2:n}\end{pmatrix}(\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^*)\right]\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ w_{2:n}\end{pmatrix} \\ &\overset{(2.76)}{=} (\bar{\hat{w}}_1 \quad w_{2:n}^*)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)I_{n-1}\end{pmatrix} + V^*y(V^*y)^*\right]\begin{pmatrix}\hat{w}_1\\ w_{2:n}\end{pmatrix} \\ &\overset{(2.74)}{=} (V^*w)^*\, EV^*w \end{aligned} \tag{2.81}$$

όπου E ορίζει τον πίνακα στη (2.60) .

Είναι φανερό ότι ο $E \in M_n(\mathbb{F})$ είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας και από τη (2.75) το V^*w είναι μοναδιαίο διάνυσμα συνεπώς $(V^*w)^*\, EV^*w \in F(E)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.6.6 για το αριθμητικό πεδίο $F(E)$ έχουμε:

$$F(E) = [\lambda_{min}(E),\ \lambda_{max}(E)] \tag{2.82}$$

όπου $\lambda_{min}(E),\ \lambda_{max}(E) \in \mathbb{R}$.

Συνδυάζοντας (2.81) και (2.82) έχουμε:

$$\lambda_{max}(A + yy^*) \leq \lambda_{max}(E) \tag{2.83}$$

Θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα $Q_2 \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ τέτοιον ώστε:

$$Q_2^* \cdot y_{2:n} = \|y_{2:n}\|_2\, e_1 \tag{2.84}$$

όπου e_1 είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^{n-1}$ με μονάδα στην πρώτη συντεταγμένη και τις υπόλοιπες μηδενικές.

Επιπλέον θεωρούμε τον

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

ο οποίος είναι ορθομοναδιαίος πίνακας επειδή ο Q_2 στη (2.84) θεωρήθηκε ορθομοναδιαίος και ισχύει:

$$\tilde{Q}^*\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2^*Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$$

Αντικαθιστώντας τον πίνακα E από τη (2.60), τον $\tilde{Q}$ από τη (2.85), και τον V^*y από τη (2.76) και χρησιμοποιώντας τη (2.84) μπορούμε να γράψουμε:

$$\tilde{Q}^* E\, \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2^* \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \lambda_1(A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2(A)I_{n-1} \end{pmatrix} + (V^*y)(V^*y)^*\right]\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1 y_{2:n}^* \\ y_{2:n}\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A)I_{n-1} + y_{2:n}y_{2:n}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1 y_{2:n}^* \\ Q_2^* y_{2:n}\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A)Q_2^* + Q_2^* y_{2:n}y_{2:n}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1 y_{2:n}^* Q_2 \\ Q_2^* y_{2:n}\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A)Q_2^*Q_2 + Q_2^* y_{2:n}y_{2:n}^* Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.84)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1 \|y_{2:n}\|_2\, e_1^* \\ \bar{\hat{y}}_1 \|y_{2:n}\|_2\, e_1 & \lambda_2(A)I_{n-1} + \|y_{2:n}\|_2^2 e_1 e_1^* \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\|y_{2:n}\|_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{\hat{y}}_1\|y_{2:n}\|_2 & \lambda_2(A) + \|y_{2:n}\|_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Pi & \mathbb{O}_{2x(n-2)} \\ \mathbb{O}_{(n-2)x2} & \lambda_2(A)I_{n-2} \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

όπου Π, είναι ο $2x2$ Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας

$$\Pi = \begin{pmatrix} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\|y_{2:n}\|_2 \\ \bar{\hat{y}}_1\|y_{2:n}\|_2 & \lambda_2(A) + \|y_{2:n}\|_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\|y_{2:n}\|_2 \\ \bar{\hat{y}}_1\|y_{2:n}\|_2 & \|y_{2:n}\|_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{max}(A) & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \|y_{2:n}\| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\hat{y}}_1 & \|y_{2:n}\| \end{pmatrix}$$

ορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο τον πίνακα Π στη (2.62).

Ο πίνακας $\tilde{Q}^*E\,\tilde{Q}$ από τη μορφή του στη (2.86) είναι το ευθύ άθροισμα των πινάκων Π και $\lambda_2(A)I_{n-1}$. Σύμφωνα με την ιδιότητα iv) της Πρότασης 1.6.5 έχουμε:

$$F\left(\tilde{Q}^*E\,\tilde{Q}\right) = convex\ hull\{\{\lambda_2(A\} \cup F(\Pi)\} \tag{2.87}$$

Επιπλέον για τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα Π γνωρίζουμε ότι:

$$F(\Pi) = [\,\lambda_{min}(\Pi), \lambda_{max}(\Pi)] \subset \mathbb{R} \tag{2.88}$$

Από τη μορφή του Π στη (2.62) τη (2.10) και τη (2.6) προκύπτουν οι ανισοτικές σχέσεις:

$$\lambda_2(A) \leq \lambda_{min}(\Pi) \leq \lambda_{max}(A) \tag{2.89}$$

και

$$\lambda_{max}(A) \leq \lambda_{max}(\Pi) \leq \lambda_{max}(A) + |\hat{y}_1|^2 + \|y_{2:n}\|_2^2$$

Παρατηρούμε ότι από την ιδιότητα του V (ορθομοναδιαίος) και από τη (2.76) μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}(\bar{\hat{y}}_1 \quad y_{2:n}^*)\begin{pmatrix}\hat{y}_1\\ y_{2:n}\end{pmatrix} = |\hat{y}_1|^2 + \|y_{2:n}\|_2^2 = (V^*y)^*V^*y = y^*VV^*y = y^*y \\ = \|y\|_2^2\end{aligned} \tag{2.90}$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.90) στην παραπάνω ανισότητα της $\lambda_{max}(\Pi)$ αυτή γράφεται:

$$\lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}(\Pi) \le \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \tag{2.91}$$

Συνδυάζοντας τη (2.89) και (2.91) μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_2(A) \le \lambda_{min}(\Pi) \le \lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}(\Pi) \le \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \tag{2.92}$$

Από τη (2.92) είναι φανερό ότι:

$$\lambda_2(A) \notin [\,\lambda_{min}(\Pi), \lambda_{max}(\Pi)] \overset{(2.88)}{=} F(\Pi),$$

και

$$\lambda_{max}(A) \in [\,\lambda_{min}(\Pi), \lambda_{max}(\Pi)] \overset{(2.88)}{=} F(\Pi)$$

το οποίο μας επιτρέπει να γράψουμε τη (2.87) ως:

$$F\big(\widetilde{Q}^*E\,\widetilde{Q}\big) = [\lambda_2(A), \lambda_{max}(\Pi)].$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.6.6 επειδή $\widetilde{Q}$ είναι ορθομοναδιαίος η παραπάνω ισότητα δίνει

$$F(E) = F\big(\widetilde{Q}^*E\,\widetilde{Q}\big) = [\lambda_2(A), \lambda_{max}(\Pi)] \tag{2.93}$$

Τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Π στη (2.62) είναι:

$$x_\Pi(\lambda) = \lambda^2 - tr(\Pi)\lambda + \det(\Pi) \tag{2.94}$$

όπου

$$tr(\Pi) = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + |\hat{y}_1|^2 + \|y_{2:n}\|_2^2 = \lambda_1(A) + \lambda_2(A) + \|y\|_2^2 \tag{2.95}$$

και

$$det(\Pi) = \lambda_1(A)\lambda_2(A) + \lambda_1(A)\|y_{2:n}\|_2^2 + \lambda_2(A)|\hat{y}_1|^2 - |\hat{y}_1|^2\|y_{2:n}\|_2^2 \qquad (2.96)$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στη (2.94) του Π μετά την αντικατάσταση των $tr(\Pi), det(\Pi)$ από (2.95) και (2.96) διαπιστώνουμε ότι :

$$\Delta_\Pi = \left(tr(\Pi)\right)^2 - 4\det(\Pi) =$$
$$= \left(\lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 - \lambda_2(A) - \|y_{2:n}\|_2^2\right)^2 + 4|\hat{y}_1|^2\|y_{2:n}\|_2^2 \geq 0, \qquad (2.97)$$

συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $x_\Pi(\lambda)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες που είναι:

$$\lambda_{min}(\Pi) = \frac{tr(\Pi) - \sqrt{\Delta_\Pi}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{max}(\Pi) = \frac{tr(\Pi) + \sqrt{\Delta_\Pi}}{2}$$

όπου $tr(\Pi), det(\Pi)$ δίνονται στις σχέσεις (2.95) και (2.96) και (2.97). Έτσι αποδεικνύεται το δεξί μέρος των ισοτήτων στις (2.65), (2.66).

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ισότητες των $\lambda_{min}(\Pi), \lambda_{max}(\Pi)$ με τη (2.93) είναι προφανές ότι η μέγιστη ιδιοτιμή του nxn Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα δίνεται από την (2.66), επειδή ισχύει: $F(E) = [\lambda_2(A), \lambda_{max}(\Pi)]$.

Τέλος, συνδυάζοντας τη (2.83) με τις (2.66) και (2.91) καταλήγουμε

$$\lambda_{max}(A + yy^*) \leq \lambda_{max}(\Pi) \leq \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \qquad (2.98)$$

επαληθεύοντας τη (2.68) και το δεξί μέρος της ανίσωσης (2.69).

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.11, χρησιμοποιώντας τον V και τον Λ από τη (2.70) και εφαρμόζοντας το Φασματικό θεώρημα στον πίνακα A, για τον διαταραγμένο πίνακα $A + yy^*$μπορούμε να παράγουμε την ισότητα (2.53) δηλαδή

$$V^*(A + yy^*)V =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1(A) + |\hat{y}_1|^2 & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_1\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_1 & \lambda_2(A) + |\hat{y}_2|^2 & \cdots & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_{n-1} & \hat{y}_2\bar{\hat{y}}_n \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \lambda_{n-1}(A) + |\hat{y}_{n-1}|^2 & \hat{y}_{n-1}\bar{\hat{y}}_n \\ \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_1 & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_2 & \cdots & \hat{y}_n\bar{\hat{y}}_{n-1} & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} K & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix} \qquad (2.99)$$

όπου

K είναι ο Ερμιτιανός / συμμετρικός πίνακας που ορίστηκε στη (2.61),

D_1 είναι ένας $2x(n-2)$ πίνακας,

D_2 είναι ένας $(n-2)x2$ πίνακας και

D_3 είναι ο πίνακας $(n-2)x(n-2)$.

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα $\begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ I & \mathbb{O} \end{pmatrix}$ ο πίνακας στην (2.99) δίνει:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ I & \mathbb{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ I & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_2 & D_3 \\ K & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{O} & I \\ I & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_3 & D_2 \\ D_1 & K \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_3(A) + |\hat{y}_3|^2 & \cdots & \hat{y}_3\bar{\hat{y}}_3 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & D_2 \\ \vdots & \vdots & \lambda_n(A) + |\hat{y}_n|^2 & \\ \hline & D_1 & & K \end{array}\right) \tag{2.100}$$

Οι πίνακες $A + yy^*$ και $V^*(A + yy^*)V = \begin{pmatrix} K & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} D_3 & D_2 \\ D_1 & K \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι, συνεπώς έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, δηλαδή , για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ ισχύει:

$$\lambda_i(\, V^*(A + yy^*)V) = \lambda_i\,(A + yy^*) = \lambda_i\left(\begin{pmatrix} K & D_1 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix}\right) = \lambda_i\left(\begin{pmatrix} D_3 & D_2 \\ D_1 & K \end{pmatrix}\right).$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.1.7 (Cauchy’ s interlacing) στον πίνακα $\begin{pmatrix} D_3 & D_2 \\ D_1 & K \end{pmatrix}$ από τη (2.12) για $k = n-1, m = 2$ παράγουμε:

$$\lambda_{n-1}(\, V^*(A + yy^*)V) \leq \lambda_1(K) \leq \lambda_1(\, V^*(A + yy^*)V).$$

Από την ομοιότητα των πινάκων $V^*(A + yy^*)V$ και $A + yy^*$ η παραπάνω ανίσωση γράφεται: (2.12)

$$\lambda_{n-1}(A + yy^*) \leq \lambda_{max}(K) \leq \lambda_{max}(\, A + yy^*) \tag{2.101}$$

Επιπλέον από τη μορφή του K στη (2.61) και τη (2.6) μπορούμε να γράψουμε:

$$\lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}(K) \le \lambda_{max}(A) + |\hat{y}_1|^2 + |\hat{y}_2|^2 \tag{2.102}$$

Το δεξί μέρος και το αριστερό μέρος των ανισώσεων στις (2.101) και (2.102) αντίστοιχα επαληθεύουν τη (2.67).

Συνδυάζοντας τη (2.98) με τη (2.101) και το αριστερό μέρος των ανισώσεων στην (2.102) προκύπτει:

$$\lambda_{max}(A) \le \lambda_{max}(K) \le \lambda_{max}(A + yy^*) \le \lambda_{max}(\Pi) \le \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \tag{2.103}$$

Οι κεντρικές ανισότητες στη (2.103) επαληθεύουν τη (2.69).

Τέλος από τον πίνακα K στη (2.61) υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$x_K(\lambda) = \lambda^2 - tr(K)\lambda + \det(K)$$

όπου

$$tr(K) = \lambda_{max}(A) + \lambda_2(A) + |\hat{y}_1|^2 + |\hat{y}_2|^2 \tag{2.104}$$

$$det(K) = \left(\lambda_{max}(A) + |\hat{y}_1|^2\right)\left(\lambda_2(A) + |\hat{y}_2|^2\right) - |\hat{y}_1|^2|\hat{y}_2|^2 \tag{2.105}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.104), (2.105) υπολογίζεται η διακρίνουσα του τριωνύμου $x_K(\lambda)$ που ισούται με:

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \left(tr(K)\right)^2 - 4\det(K) = \\ &= \left(\lambda_{max}(A) + |\hat{y}_1|^2 - \lambda_2(A) - |\hat{y}_2|^2\right)^2 + 4|\hat{y}_1|^2|\hat{y}_2|^2 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Προφανώς $\Delta_K > 0$, συνεπώς υπάρχουν δύο πραγματικές ρίζες του $x_K(\lambda)$, που είναι ιδιοτιμές του K και δίνονται από

$$\lambda_{min}(K) = \frac{tr(K) - \sqrt{\Delta_K}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{max}(K) = \frac{tr(K) + \sqrt{\Delta_K}}{2}$$

όπου $tr(K)$, Δ_K δίνονται από τις (2.104), (2.105) αντίστοιχα.

Οι παραπάνω ιδιοτιμές $\lambda_{min}(K)$, $\lambda_{max}(K)$ μετά την αντικατάσταση των ποσοτήτων $tr(K)$, Δ_K επαληθεύουν τις ισότητες στις (2.63) και (2.64) το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎

Σχόλιο 2.1.15
Ο εντοπισμός της μέγιστης ιδιοτιμής του διαταραγμένου πίνακα $A+yy^*$, $\lambda_{max}(A+yy^*)$, γίνεται σε ένα διάστημα του πραγματικού άξονα που είναι πιο ¨ κλειστό ¨ στην ιδιοτιμή $\lambda_{max}(A+yy^*)$ από το διάστημα που δημιουργεί η (2.6). Πράγματι από τη (2.6) γνωρίζαμε ότι:

$$\lambda_{max}(A+yy^*) \in [\, \lambda_{max}(A), \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \,]$$

ενώ από τη (2.69) γνωρίζουμε ότι:

$$\lambda_{max}(A+yy^*) \in [\, \lambda_{max}(K), \lambda_{max}(\Pi) \,]$$

και από τη (2.67) ότι $\lambda_{max}(K) \geq \lambda_{max}(A)$ συνεπώς

$$[\, \lambda_{max}(K), \lambda_{max}(\Pi) \,] \subset [\, \lambda_{max}(A), \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \,].$$

Έτσι συνδυάζοντας τις (2.67), (2.68) και (2.69) για την $\lambda_{max}(A+yy^*)$ μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.103) δηλαδή,

$$\lambda_{max}(A) \leq \lambda_{max}(K) \leq \lambda_{max}(A+yy^*) \leq \lambda_{max}(\Pi) \leq \lambda_{max}(A) + \|y\|_2^2 \qquad (2.107)$$

όπου οι $2x2$ Ερμιτιανοί / συμμετρικοί πίνακες K, Π δίνονται από τις (2.61) και (2.62) αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.1.16

Στο **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ** η συνάρτηση
```
function [y,A,App,Lp,Up,l1,EigLpmax,Eig1App,EigUpmax,lee] = largeLU(A)
```
Έχει είσοδο τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα A.
Οι έξοδοι είναι:
y: το τυχαίο διάνυσμα
A: ο Ερμιτιανός πίνακας
App: Ο πίνακας $A+yy^*$
`Lp`: Ο πίνακας L_+

`Up`: Ο πίνακας U_+

`l1`: Η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_1(A) \equiv \lambda_{max}(A)$ του πίνακα A

`EigLpmax`: Η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{max}(K)$ του πίνακα K

`Eig1App`: Η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{max}(A+yy^*)$ του διαταραγμένου πίνακα $A+yy^*$

`EigUpmax`: Η μέγιστη ιδιοτιμή $\lambda_{max}(\Pi)$ του πίνακα Π

`lee`: Η παράσταση $\lambda_{max}(A) + \left||y|\right|^2$

Για $n=4$ και $s=6$ έχουμε:

$$y = \begin{pmatrix} \text{-0.2620 - 0.9792i} \\ \text{-1.7502 - 1.1564i} \\ \text{-0.2857 - 0.5336i} \\ \text{-0.8314 - 2.0026i} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3.0000 & 0 & 2.0000 & 5.0000 \\ 0 & -3.0000 & -2.0000 & -1.5000 \\ 2.0000 & -2.0000 & 1.0000 & -3.5000 \\ 5.0000 & -1.5000 & -3.5000 & 0 \end{pmatrix}$$

$$App = \begin{pmatrix} \text{-1.9725 + 0.0000i} & \text{1.5909 + 1.4108i} & \text{2.5973 + 0.1399i} & \text{7.1788 + 0.2894i} \\ \text{1.5909 - 1.4108i} & \text{1.4005 + 0.0000i} & \text{-0.8830 - 0.6035i} & \text{2.2709 - 2.5436i} \\ \text{2.5973 - 0.1399i} & \text{-0.8830 + 0.6035i} & \text{1.3663 + 0.0000i} & \text{-2.1940 - 0.1285i} \\ \text{7.1788 - 0.2894i} & \text{2.2709 + 2.5436i} & \text{-2.1940 + 0.1285i} & \text{4.7017 + 0.0000i} \end{pmatrix}$$

$$Lp = \begin{pmatrix} \text{7.6501 + 0.0000i} & \text{-1.5410 + 0.6648i} \\ \text{-1.5410 - 0.6648i} & \text{3.1741 + 0.0000i} \end{pmatrix}$$

$$Up = \begin{pmatrix} \text{7.6501 + 0.0000i} & \text{-1.5493 - 4.4341i} \\ \text{-1.5493 + 4.4341i} & \text{9.7941 + 0.0000i} \end{pmatrix}$$

$$l1 \ = \ 4.7431, EigLpmax \ = 8.2095, Eig1App \ = 11.0019,$$

$$EigUpmax \ = 13.5399, lee \ = 15.2391$$

Επαληθεύεται η ανισότητα (2.69) του Θεωρήματος 2.1.14 καθώς και η (2.107) του Σχολίου 2.1.15 επειδή ισχύει:

$$\lambda_{max}(A) \leq \lambda_{max}(K) \leq \lambda_{max}(A + yy^*) \leq \lambda_{max}(\Pi) \leq \lambda_{max}(A) + \left||y|\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$4.7431 \leq 8.2095 \leq 11.0019 \leq 13.5399 \leq 15.2391$$

■

Βιβλιογραφία

1. Μ. Αδάμ, Αριθμητικά πεδία πινάκων ειδικής μορφής. Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών, 2000. Available: https://www.didaktorika.gr/eadd/handle/10442/12477.
2. Γ. ΔΟΝΑΤΟΣ και Μ. ΑΔΑΜ, Γραμμική Άλγεβρα θεωρία και εφαρμογές, Αθήνα, Gutenberg, 2008.
3. R. A. Horn and C. R. Johnson Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1990.
4. R. A. Horn and C. R. Johson, Topics in Matrix Analysis, University Press, 1991
5. C. F. Ipsen and B. Nadler, Refined perturbation bounds for eigenvalues of Hermitian and non-Hermitian matrices. Siam J. Matrix Anal. Appl. Vol. 31, No. 1, pp. 40-53.
6. Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, Γραμμική Άλγεβρα, Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές, Αθήνα 3η έκδοση 2003.
7. Θ. Χρυσάκης Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα 2013.
8. Π. Ψαρράκος, Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Σημειώσεις Αθήνα 2015 Available: http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/Topics_in_Matrix_Analysis.pdf.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στη συνέχεια παρατίθενται σε MATLAB οι κώδικες που αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία, για την επαλήθευση των Προτάσεων και των Θεωρημάτων.

Αλγόριθμος ορθοκανονικοποίησης των **Gram – Schmidt** (βλέπε, Ορισμό 1.3.10)

Συνάρτηση που υπολογίζει την προβολή ενός διανύσματος v σε ένα διάνυσμα u.

```
function w = proj(u,v)
        w = (dot(v,u) / dot(u,u)) * u;
    end
```

Η παρακάτω συνάρτηση υλοποιεί τον Αλγόριθμο ορθοκανονικοποίησης των **Gram – Schmidt.** Εισάγουμε τα διανύσματα που θέλουμε να ορθοκανονικοποιήσουμε στις στήλες του πίνακα v1 και εξάγεται ο πίνακας v με αντίστοιχες στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα διανύσματα.

```
function  v= GramSchmidt(v1)

clc
format rat
k = size(v,2);
```

Έλεγχος ώστε ο πίνακας να είναι τουλάχιστον 2x2

```
    if k>=2
        for i = 1:1:k
            v(:,i) = v(:,i) / norm(v(:,i));


            for j = i+1:1:k
                v(:,j) = v(:,j) - proj(v(:,i),v(:,j));
            end
        end
    else
        disp(' Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον δύο
διανύσματα')
    end
end
```

Για το Θεώρημα 1.5.7 (Φασματικό Θεώρημα)

Το παρακάτω script επαληθεύει το Φασματικό θεώρημα.

Script spectral_theorem.m

Ο θετικός ακέραιος n είναι η διάσταση του συμμετρικού πίνακα A, και s είναι το εύρος των ακεραίων που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του συμμετρικού πίνακα A.

```
clear all
clc
syms x
A=input('Δώστε τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα A :  ');
n=size(A)
```

Υπολογισμός του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συμμετρικού πίνακα A, των ιδιοτιμών του A και τοποθέτηση των ιδιοτιμών κατά φθίνουσα διάταξη.

```
polyA = charpoly(A,x)
 [W,DA]=eig(A);
V=zeros(n,n);
D=zeros(n,n);
    for j=1:n
        V(:,j)=W(:,(n-j+1));
        D(j,j)=DA((n-j+1),(n-j+1));
     end
disp(' Ο ορθομοναδιαίος πίνακας V είναι:'); disp(V)
disp(' Ο διαγώνιος πίνακας είναι:'); disp(D)
disp(' Το γινόμενο VΛV* είναι: '); disp(V*D*V')
```

Για τη σχέση (2.6).

Επαληθεύεται η σχέση (2.6) για τη μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$ ενός Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα A.

```
function [y,A,App,l1,lr,l1pp] =larg(A,s)

    if A==A'
        [m,n]=size(A)
        y=randi([-s,s],n,1);
        Y=y*y';
        ny2=norm(y);
```

Έλεγχος αν ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός.

Δημιουργία του τυχαίου διανύσματος y του Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα yy^* με rank 1, και υπολογισμός της $\|y\|_2^2$.

```
        D=sort(eig(A), 'descend');
        l1=D(1);
```

Υπολογισμός των ιδιοτιμών του πίνακα A, ταξινόμηση αυτών κατά φθίνουσα διάταξη και επιλογή της $\lambda_{max}(A)$.

```
        App=A+Y;
        Dpp=sort(eig(App), 'descend');
        l1pp=Dpp(1);
        lr=l1+ny2^2;
```

Δημιουργία του πίνακα $A + yy^*$ προσδιορισμός των ιδιοτιμών του, ταξινόμηση αυτών κατά φθίνουσα διάταξη, επιλογή της $\lambda_{max}(A + yy^*)$ και υπολογισμός της τιμής $\lambda_{max}(A + yy^*) + \|y\|_2^2$.

```
        if (l1<=l1pp) && (l1pp<=lr)
            disp('Ισχύει η σχέση 2.6')
        else
            disp('Δεν ισχύει η σχέση 2.6')
        end
    else
        disp('Δεν είναι ο πίνακας Ερμιτιανός/ συμμετρικός')
    end
end
```

Για τη σχέση (2.10) της Πρότασης 2.1.5

Επαληθεύεται η σχέση (2.10) για την ελάχιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα $A + yy^*$ ενός Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα A.

```
function [y,A,App,ln,lnpp,ln_1] = small(A,s)
    if A==A'
        [m,n]=size(A)
        y=randi([-s,s],n,1);
        Y=y*y';
```

Έλεγχος αν ο πίνακας A είναι Ερμιτιανός / συμμετρικός.

Δημιουργία του τυχαίου διανύσματος y και του Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα yy^* με rank 1.

```
        D=sort(eig(A), 'descend');
        ln=D(n);
        ln_1=D(n-1);
```

Υπολογισμός των ιδιοτιμών του πίνακα A, ταξινόμηση αυτών κατά φθίνουσα διάταξη και επιλογή της $\lambda_{min}(A)$ και της $\lambda_{n-1}(A)$

```
        App=A+Y;
        Dpp=sort(eig(App), 'descend');
        lnpp=Dpp(n);
```

Δημιουργία του πίνακα $A + yy^*$ προσδιορισμός των ιδιοτιμών του, ταξινόμηση αυτών κατά φθίνουσα διάταξη, επιλογή της $\lambda_{min}(A + yy^*)$ και υπολογισμός αυτής.

```
        if (ln<=lnpp) && (lnpp<= ln_1)
            disp('Ισχύει η συνθήκη 2.10 ')
        else
            disp('Δεν ισχύει η συνθήκη 2.10')
        end
    end
end
```

Για την Πρόταση 2.1.7 (Cauchy’ s interlacing)

Script cauchy_interlace.m

```
clc
clear all
A=input('Δώστε τον Ερμιτιανό  πίνακα A,
A = ');
n=size(A);
m=input('Δώστε τη διάσταση m του κύριου
υποπίνακα του A, m =');


Bm=A(1:m, 1:m)

eA=sort(eig(A), 'descend')
eBm=sort(eig(Bm), 'descend')



for k=n-m+1:n
    eA(k-n+m)
    eBm(k-n+m)
    eA(k)
    if (eA(k)<=eBm(k-n+m))& (eBm(k-n+m)<= eA(k-n+m))
        disp('Ισχύει το Cauchy’s interlacing theorem')
    else
        disp('Δεν ισχύει το Cauchy’s interlacing theorem')
    end
end
```

Εισαγωγή του Ερμιτιανού / συμμετρικού πίνακα A

n: Η Διάσταση του πίνακα A.

m: η διάσταση του κύριου υποπίνακα B_m

Υπολογισμός των ιδιοτιμών των πινάκων A και B_m και ταξινόμηση των ιδιοτιμών κατά φθίνουσα διάταξη.

Έλεγχος για την ισχύ του Cauchy’s interlacing theorem.

Η επόμενη συνάρτηση υλοποιεί τα αποτελέσματα των θεωρημάτων 2.1.9 , 2.1.11 και τη σχέση (2.59) του Σχολίου 2.1.12 για έναν Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

```
function
[y,A,App,Lp,Up,lmin,EigLpmin,Eig1App,EigUpmin,lmin_1] =
smallLU(A)
    if A==A'
       [m,n]=size(A);
        y1=randi(n,1);
        y2=randn(n,1);
        y=y1+y2*1i;
```

Δημιουργία του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{F}^n$.

```
       [W,DA]=eig(A);
        V=zeros(n,n);
        D=zeros(n,n);
            for j=1:n
                V(:,j)=W(:,(n-j+1));
                D(j,j)=DA((n-j+1),(n-j+1));
            end
```

Υπολογισμός των ιδιοτιμών του πίνακα A και ταξινόμηση αυτών κατά φθίνουσα διάταξη.

```
        lmin_1=D((n-1),(n-1));
        lmin=D(n,n);
```

Προσδιορισμός των ιδιοτιμών $\lambda_n(A), \lambda_{n-1}(A)$.

```
        u=[lmin_1;lmin];
        Lp1=diag(u);
        Vnplin1=V(:,1:(n-1));
        y11=Vnplin1'*y;
        ynn=V(:,n)'*y;
        ynplin1=V(:,(n-1))'*y;
        ny11=norm(y11);
        ny2=(norm(y))^2;
        Ly=[ny11; ynn];
        Lp=Lp1+Ly*Ly';
        EigLp=eig(Lp);
        EigLpmin=min(EigLp);
```

Δημιουργία του πίνακα L, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του L και η $\lambda_{min}(L)$.

```
        Uy=[ynplin1;ynn];
        Up=Lp1+Uy*Uy';
        EigUp=eig(Up);
        EigUpmin=min(EigUp);
```

Δημιουργία του πίνακα U, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του U και η $\lambda_{min}(U)$.

```
        Y=y*y';
        App=A+Y;
        EigApp=eig(App);
        Eig1App=min(EigApp);
```

Δημιουργία του πίνακα διαταραχής , $A + yy^*$ επιλογή και της $\lambda_{min}(A + yy^*)$

```
            if (lmin<=EigLpmin)&&
(EigLpmin<=Eig1App) &&
(Eig1App<=EigUpmin)&&(EigUpmin<=lmin_1)
```

```
                disp('Για την ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα
διαταραχής A+yy* ισχύει η σχέση 2.59 ')
            else
                disp('Δεν ισχύει η σχέση 2.59 για την
ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα διαταραχής A+yy*')
            end
    else
        disp('Δεν είναι ο πίνακας Ερμιτιανός/ συμμετρικός')
    end
end
```

Η επόμενη συνάρτηση υλοποιεί τα αποτελέσματα της ανισότητας (2.69) του Θεωρήματος 2.1.14 καθώς και η (2.107) του Σχολίου 2.1.15 για τον Ερμιτιανό / συμμετρικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

```
function [y,A,App,Lp,Up,l1,EigLpmax,Eig1App,EigUpmax,lee] = 
largeLU(A)
    if A==A'
       [m,n]=size(A);
        y1=randn(n,1);
        y2=randn(n,1);
        y=y1+y2*1i;

    [W,DA]=eig(A);
    V=zeros(n,n);
    D=zeros(n,n);
    for j=1:n
        V(:,j)=W(:,(n-j+1));
        D(j,j)=DA((n-j+1),(n-j+1));
    end
    l1=D(1,1);
    l2=D(2,2);

    u=[l1;l2];
    Lp1=diag(u);
    V2n=V(:,2:n);
    y2n=V2n'*y;
    y1=V(:,1)'*y;
    y2=V(:,2)'*y;
    ny2n=norm(y2n);
    ny2=(norm(y))^2;
    Ly=[y1; y2];
    Lp=Lp1+Ly*Ly';
    EigLp=eig(Lp);
    EigLpmax=max(EigLp);
    Uy=[y1;ny2n];
    Up=Lp1+Uy*Uy';
    EigUp=eig(Up);
    EigUpmax=max(EigUp);

    Y=y*y';
    App=A+Y;
    EigApp=eig(App);
    Eig1App=max(EigApp);

     lee=l1+ny2;

        if (l1<=EigLpmax)&&(EigLpmax<=Eig1App) && 
(Eig1App<=EigUpmax) &&(EigUpmax<=lee)
            disp('Ισχύει η σχέση 2.107 για τον πίνακα 
διαταραχής A+yy*')
```

Δημιουργία του τυχαίου διανύσματος $y \in \mathbb{F}^n$.

Υπολογισμός των ιδιοτιμών του πίνακα A και ταξινόμηση αυτών κατά φθίνουσα διάταξη.

Επιλογή των ιδιοτιμών $\lambda_1(A)$ και $\lambda_2(A)$

Δημιουργία των πινάκων K, Π.

Υπολογισμός των ιδιοτιμών $\lambda_{max}(K)$, $\lambda_{max}(\Pi)$

Δημιουργία του πίνακα διαταραχής , $A + yy^*$ και επιλογή της $\lambda_{max}(A + yy^*)$.Υπολογισμός της ποσότητας $\lambda_{max}(A + yy^*) + \|y\|_2^2$

```
        else
            disp('Δεν ισχύει η σχέση 2.107 για τον πίνακα
διαταραχής A+yy*')
        end
    else
        disp('Δεν είναι ο πίνακας Ερμιτιανός/ συμμετρικός')
    end

end
```