ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

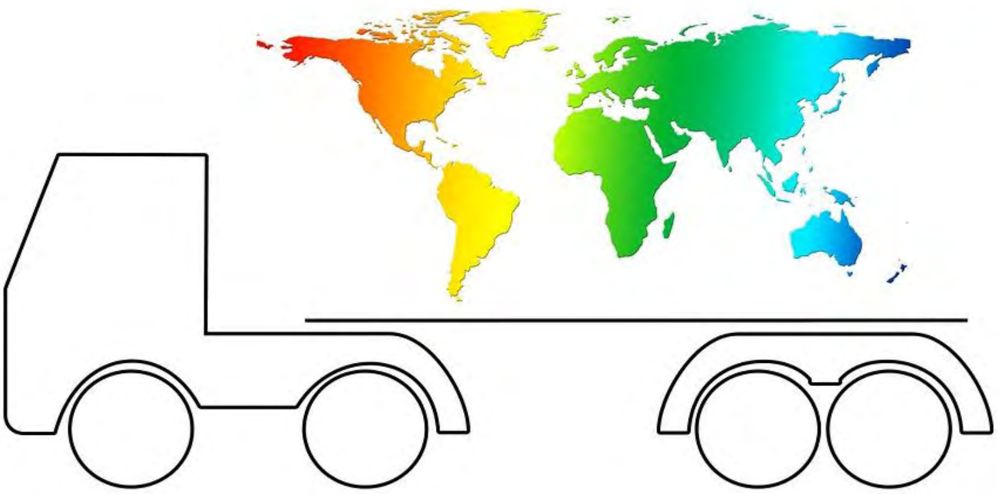
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΡΟΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΟΛΟΥ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Παναγιωτοπούλου Χριστίνα



Βόλος, 2019

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής: Δρ. Σαχαρίδης Γεώργιος

(Επιβλέπων) Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής: Δρ. Λυμπερόπουλος Γεώργιος

Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής: Δρ. Παντελής Δημήτριος

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Γεώργιο Σαχαρίδη, τον κ. Ιωάννη Λυχναρόπουλο καθώς και τους υποψήφιους διδάκτορες Φραγκογιό Αντώνιο και Ζωή Μόζα για την πολύτιμη βοήθεια και το χρόνο που αφιέρωσαν κατά τη διάρκεια της διπλωματικής μου. Επίσης είμαι ευγνώμων στα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τους καθηγητές κ. Γεώργιο Λυμπερόπουλο και κ. Δημήτριο Παντελή.

Οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου για την υποστήριξη και την κατανόηση καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ακόμα, ευχαριστώ τους συμφοιτητές μου Δημήτρη και Δέσποινα και τον Κώστα.

Περίληψη

Τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται αυξανόμενη χρήση πακέτων βελτιστοποίησης με βάση την επιχειρησιακή έρευνα και το μαθηματικό προγραμματισμό για την αποτελεσματική διαχείριση των αγαθών και υπηρεσιών στα συστήματα διανομής. Ο μεγάλος αριθμός πραγματικών εφαρμογών έχει δείξει ευρέως ότι η χρήση ηλεκτρονικών διαδικασιών για τον προγραμματισμό της διανομής μειώνει σημαντικά (5 μέχρι 20%) το παγκόσμιο κόστος μεταφοράς. Είναι προφανές ότι ο αντίκτυπος αυτών των αποταμιεύσεων στο παγκόσμιο οικονομικό σύστημα είναι σημαντικός. Πράγματι, η διαδικασία μεταφοράς περιλαμβάνει όλα τα στάδια των συστημάτων παραγωγής και διανομής και αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό από 10% έως 20% του τελικού κόστους των αγαθών. Ακόμα, η βελτιστοποίηση της διανομής έχει ως αποτέλεσμα την μείωση της συνολικής διανυθείσας απόστασης, συνεπώς μείωση στην κατανάλωση καυσίμου και μείωση των εκπομπών αερίων του θερμοκηπίου.

Η επιτυχία της αξιοποίησης των τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας οφείλεται στην εξέλιξη των συστημάτων υπολογιστών τόσο από πλευράς υλικού όσο και λογισμικού και στην αυξανόμενη ενσωμάτωση των συστημάτων πληροφοριών στην παραγωγική και εμπορική διαδικασία. Ένας άλλος παράγοντας επιτυχίας είναι η ανάπτυξη της μοντελοποίησης και των αλγοριθμικών εργαλείων που εφαρμόζονται τα τελευταία χρόνια. Πράγματι, τα προτεινόμενα μοντέλα λαμβάνουν υπόψη όλα τα χαρακτηριστικά των προβλημάτων διανομής που προκύπτουν σε πραγματικές εφαρμογές και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι και οι εφαρμογές ηλεκτρονικών υπολογιστών βρίσκουν καλές λύσεις για πραγματικά προβλήματα σε αποδεκτούς χρόνους υπολογισμών.

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εξετάζονται προβλήματα που αφορούν τη διανομή των αγαθών μεταξύ αποθηκών και τελικών χρηστών. Αυτά τα προβλήματα είναι ευρέως γνωστά ως Προβλήματα Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων. Συγκεκριμένα αναλύεται η επίλυση περίπτωσης Πολυαντικειμενικού Προβλήματος Δρομολόγησης Οχημάτων με Περιορισμένη Χωρητικότητα και Ετερογενή Στόλο. Παρουσιάζεται η μαθηματική μοντελοποίηση καθώς και ο τρόπος επίλυσης με ευρετικό αλγόριθμο, ομαδοποίησης αρχικώς-δρομολόγησης δευτερευόντως, συγκεκριμένα ομαδοποίηση με τον αλγόριθμο k-means και στη συνέχεια ακριβή επίλυση για κάθε ομάδα πελατών.

Summary

In recent decades there has been growing use of optimization packages based on operations research and mathematical programming for the efficient management of goods and services in distribution systems. The large number of real-world applications have shown broadly that the use of electronic processes for distribution planning reduces significantly (5 to 20%) the global transport costs. It is obvious that the impact of these savings on the global economic system is important. Indeed, the transfer process includes all stages of the production and distribution systems and represents a percentage of 10 to 20% of the final cost of the goods. Furthermore, optimization of distribution results in a reduction in the total distance travelled, thus reducing fuel consumption and reducing greenhouse gas emissions.

The success of exploiting the operational research techniques is due to the evolution of computer systems both in hardware and software and to the growing integration of information systems into the production and commercial process. Another factor of success is the development of modeling and algorithmic tools implemented in recent years. Indeed, the proposed models take into account all the features of the distribution problems that are present in real applications, and the corresponding algorithms and computer applications find good solutions for real problems at acceptable calculation times.

This thesis examines problems concerning the distribution of goods between warehouses and end users. These problems are commonly known as Vehicle Routing Problems. Specifically, it deals with solving the case of Capacitated Multi-objective Vehicle Routing Problem with Heterogeneous Fleet. Mathematical modeling is presented as well as the way of solving with a cluster first-route second heuristic algorithm, specifically clustering with the k-means algorithm and then with an exact solution for each group of clients.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος εικόνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μία βιβλιογραφική ανασκόπηση και παρουσιάζονται ορισμοί και πληροφορίες εισαγωγικού χαρακτήρα που αφορούν το αντικείμενο μελέτης της διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα γίνεται μία εισαγωγή στις έννοιες της διαχείρισης της Εφοδιαστικής Αλυσίδας και των μεταφορών.

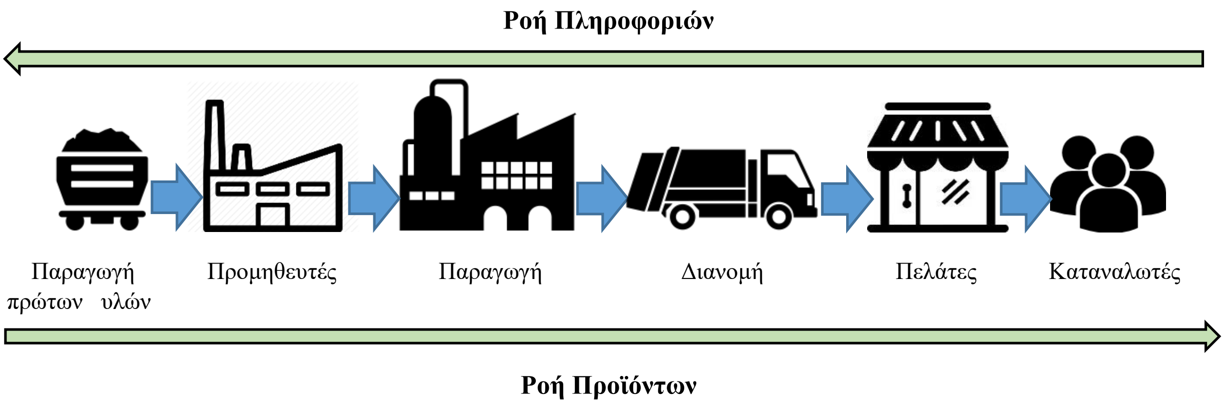
1.1 Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Στη σημερινή ιδιαιτέρως ανταγωνιστική παγκόσμια αγορά η πίεση για να βρεθούν νέοι τρόποι αντιμετώπισης των συνεχώς διαμορφωνόμενων τάσεων, όπως η μείωση του κόστους των λειτουργιών ενός οργανισμού, η αυξανόμενη μεταβλητότητα στη ζήτηση των καταναλωτών, η απαίτηση για διασφάλιση της ποιότητας των προϊόντων και η υψηλή ποιότητα υπηρεσιών στους πελάτες, συνεχώς αυξάνεται. Εν τούτοις, τα τελευταία χρόνια αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο η αποτελεσματική διαχείριση των δραστηριοτήτων της Εφοδιαστικής Αλυσίδας η οποία έχει ως αποτέλεσμα την επίτευξη των προαναφερθέντων στόχων και δίνει στην επιχείρηση σημαντικό ανταγωνιστικό πλεονέκτημα.

Όσον αφορά τον επίσημο ορισμό της Εφοδιαστικής Αλυσίδας και της Εφοδιαστικής το Συμβούλιο Διαχείρισης Αλυσίδων Εφοδιασμού (Council of Supply Chain Management Professionals) αναφέρει ότι:

«Η Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας περιλαμβάνει τον προγραμματισμό και τη διαχείριση όλων των δραστηριοτήτων που σχετίζονται με την προμήθεια, τη μετατροπή και όλες τις δραστηριότητες διαχείρισης των logistics. Σημαντικό στοιχείο είναι επίσης ο συντονισμός και η συνεργασία με τους εταίρους της αλυσίδας οι οποίοι μπορεί να είναι προμηθευτές, μεσάζοντες τρίτοι πάροχοι υπηρεσιών και πελάτες. Στην ουσία η διαχείριση εφοδιαστικής αλυσίδας ενσωματώνει τη διαχείριση προσφοράς και ζήτησης εντός και μεταξύ των εταιριών.»

«Η Διαχείριση της Εφοδιαστικής είναι το τμήμα της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας που σχεδιάζει, υλοποιεί και ελέγχει την αποδοτική και αποτελεσματική ροή και αποθήκευση αγαθών, υπηρεσιών και συναφών πληροφοριών μεταξύ του σημείου προέλευσης και του σημείου κατανάλωσης προκειμένου να ικανοποιεί τις απαιτήσεις των πελατών.»



Εικόνα 1-1: Λειτουργία εφοδιαστικής αλυσίδας.

1.2 Λειτουργίες της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Η διαχείριση της εφοδιαστικής είναι υπεύθυνη για την κυκλοφορία και την αποθήκευση των αγαθών καθώς κινούνται μέσω της εφοδιαστικής αλυσίδας. Αν ακολουθήσουμε κάποια αγαθά που διακινούνται σε έναν οργανισμό, μπορούμε να δούμε ότι στην εφοδιαστική περιλαμβάνονται συνήθως οι ακόλουθες δραστηριότητες.

- **Προμήθεια ή αγορά.** Η ροή των υλικών μέσω ενός οργανισμού συνήθως ξεκινάει όταν η προμήθεια αποστέλλει εντολή αγοράς σε προμηθευτές. Αυτό σημαίνει ότι η προμήθεια βρίσκει κατάλληλους προμηθευτές, διαπραγματεύεται τους όρους και τις προϋποθέσεις, οργανώνει την παράδοση, οργανώνει την ασφάλιση και την πληρωμή και κάνει ό, τι χρειάζεται για να πάρει τα εμπορεύματα στον οργανισμό.
- **Εσωτερική μεταφορά ή κυκλοφορία των αγαθών από τους προμηθευτές στην τοποθεσία λήψης του οργανισμού.** Αυτό προϋποθέτει επιλογή του είδους των μεταφορών (οδικών, σιδηροδρομικών, αεροπορικών, κ.ο.κ), εύρεση του καλύτερου μεταφορέα, σχεδιασμό διαδρομών, τήρηση όλων των απαιτήσεων ασφάλειας και νομικών απαιτήσεων, έγκαιρες παραδόσεις και με λογικό κόστος, κ.ο.κ.
- **Παραλαβή.** Εξασφαλίζει ότι τα παραδοθέντα αγαθά αντιστοιχούν στην παραγγελία, βεβαιώνει την παραλαβή, την εκφόρτωση των οχημάτων παράδοσης, την επιθεώρηση των υλικών για ζημιές και την ταξινόμησή τους.
- **Αποθήκευση ή απόθεμα.** Μετακίνηση των εμπορευμάτων σε αποθήκη. Πολλά υλικά χρειάζονται ειδική μεταχείριση, όπως τα κατεψυγμένα τρόφιμα, τα φάρμακα, οι χημικές ουσίες και τα επικίνδυνα εμπορεύματα. Εκτός από τη διασφάλιση αυτή θα πρέπει να είναι διαθέσιμα γρήγορα όταν χρειάζεται..
- **Έλεγχος αποθεμάτων.** Ορίζει τις πολιτικές απογραφής. Θεωρεί τα εμπορεύματα για αποθήκευση, την συνολική επένδυση, την εξυπηρέτηση πελατών, τα επίπεδα των αποθεμάτων, τα μεγέθη παραγγελιών, το χρονοδιάγραμμα παραγγελιών κ.ο.κ.
- **Προετοιμασία παραγγελιών.** Βρίσκει και αφαιρεί εμπορεύματα από τα αποθέματα. Τα εμπορεύματα για παραγγελία εντοπίζονται, ελέγχονται, αφαιρούνται από τα ράφια, ενοποιούνται σε ένα μόνο φορτίο, συσκευάζονται και μετακινούνται στο χώρο αναχώρησης για φόρτωση σε οχήματα παράδοσης.
- **Χειρισμός υλικών.** Μετακινεί υλικά μεταξύ των λειτουργιών ενός οργανισμού. Ο στόχος του χειρισμού υλικών είναι οι αποτελεσματικές κινήσεις, με σύντομες διαδρομές, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο εξοπλισμό, με ελαχιστοποίηση ζημιών, και χρησιμοποιώντας ειδικές συσκευασίες και χειρισμούς όπου χρειάζεται.
- **Εξωτερικές μεταφορές.** Παίρνουν υλικά από την περιοχή αναχώρησης και τα παραδίδουν στους πελάτες. (με προβληματισμούς παρόμοιους με τις εσωτερικές μεταφορές).
- **Ανακύκλωση, επιστροφές και διάθεση απορριμμάτων.** Ακόμη και όταν τα προϊόντα έχουν παραδοθεί στους πελάτες, το έργο της εφοδιαστικής δεν μπορεί να ολοκληρωθεί. Μπορεί, για παράδειγμα, να υπάρχουν προβλήματα με τα παραδιδόμενα υλικά - ίσως ήταν ελαττωματικά ή πάρα πολλά παραδόθηκαν ή ήταν το λάθος είδος - και πρέπει να συλλεχθούν και να επιστραφούν. Μερικές φορές υπάρχουν υλικά όπως παλέτες, κιβώτια παράδοσης και δοχεία τα οποία επιστρέφονται στους προμηθευτές για επαναχρησιμοποίηση. Ορισμένα υλικά δεν επαναχρησιμοποιούνται αλλά επιστρέφονται για ανακύκλωση, όπως μέταλλα, γυαλί, χαρτί, πλαστικά και έλαια. Τέλος, υπάρχουν υλικά που δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν ξανά, αλλά

επιστρέφονται για ασφαλή απόρριψη, όπως επικίνδυνες χημικές ουσίες. Δραστηριότητες που επιστρέφουν υλικά πίσω σε έναν οργανισμό ονομάζονται αντίστροφη εφοδιαστική ή αντίστροφη διανομή.

- **Τοποθεσία.** Ορισμένες από τις δραστηριότητες της εφοδιαστικής μπορούν να γίνουν σε διαφορετικές τοποθεσίες. Αποθέματα τελικών προϊόντων, για παράδειγμα, μπορούν να μετακινηθούν σε κοντινές αποθήκες, να τοποθετηθούν σε καταστήματα πλησιέστερα στους πελάτες, να μεταβιβαστούν σε άλλους οργανισμούς. Η διαχείριση της εφοδιαστικής πρέπει να βρει τις καλύτερες τοποθεσίες για αυτές τις δραστηριότητες και να εξετάσει θέματα σχετικά με το μέγεθος και τον αριθμό των εγκαταστάσεων. Αυτές είναι σημαντικές αποφάσεις που επηρεάζουν συνολικά σχεδιασμό της αλυσίδας εφοδιασμού.
- **Επικοινωνία.** Παράλληλα με τη φυσική ροή των υλικών είναι η αντίστοιχη ροή πληροφοριών. Αυτή συνδέει όλα τα τμήματα της αλυσίδας εφοδιασμού, μεταδίδοντας πληροφορίες σχετικά με τα προϊόντα, τη ζήτηση των πελατών, τα υλικά που πρέπει να μετακινηθούν, το χρονοδιάγραμμα, τα επίπεδα αποθεμάτων, τη διαθεσιμότητα, το κόστος, τα επίπεδα υπηρεσιών κ.ο.κ. Ο συντονισμός της ροής των πληροφοριών μπορεί να είναι πολύ δύσκολος.

Ανάλογα με τις περιστάσεις, πολλές άλλες δραστηριότητες μπορούν να συμπεριληφθούν στην εφοδιαστική. Ένας οργανισμός μπορεί να περιλαμβάνει τις προβλέψεις πωλήσεων, τον προγραμματισμό παραγωγής, την διαχείριση εξυπηρέτησης πελατών, τις διασυνδέσεις στο εξωτερικό, τις επιχειρήσεις τρίτων και ούτω καθεξής. Το σημαντικό δεν είναι η οριοθέτηση μεταξύ των λειτουργιών, αλλά η αναγνώριση ότι πρέπει όλοι να δουλέψουν συνεργατικά για να υπάρχει μια αποτελεσματική ροή υλικών.

(Waters, 2003)

1.3 Σημασία της Διαχείρισης της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Η δραστηριότητα εφοδιαστικής έχει ξεκινήσει στην πραγματικότητα χιλιάδες χρόνια πριν και αποτελεί την παλαιότερη μορφή οργανωμένου εμπορίου. Ωστόσο, λόγω των πολλών κοινωνικών και οικονομικών εξελίξεων παγκοσμίως, ο ρόλος της εφοδιαστικής σε επιχειρήσεις και οικονομίες, λαμβάνει αυξημένη προσοχή.

Στη δεκαετία του 1950, με την ανάπτυξη της νέας εταιρικής φιλοσοφίας του μάρκετινγκ, η εφοδιαστική συνδέεται ακόμη περισσότερο με την εξυπηρέτηση πελατών και τις συνιστώσες κόστους των προσπαθειών μάρκετινγκ μιας εταιρείας. Οι εταιρείες άρχισαν να συσχετίζουν την ικανοποίηση των πελατών με το κέρδος, με την εξυπηρέτηση των πελατών αργότερα να γίνει ο ακρογωνιαίος λίθος της διαχείρισης της εφοδιαστικής. Επίσης, στη δεκαετία του 1950, μια σημαντική μελέτη των οικονομικών των αερομεταφορών προσέφερε μια ακόμη διάσταση στον τομέα της εφοδιαστικής. Η μελέτη εισήγαγε την έννοια της συνολικής ανάλυσης κόστους, με την αεροπορική μεταφορά εμπορευμάτων ως το υψηλότερο κόστος μεταφοράς. Ωστόσο, οι αεροπορικές μεταφορές, όταν χρησιμοποιούνται αντί άλλων τρόπων μεταφοράς, θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε χαμηλότερο κόστος αποθεμάτων και αποθήκευσης, καθώς η εταιρεία τις διανείμει απευθείας στους πελάτες της. Το κείμενο αυτό, το οποίο εισήγαγε ουσιαστικά την έννοια της ανάλυσης του συνολικού κόστους στον τομέα της εφοδιαστικής, αυξάνοντας έτσι την έμφαση στον σημαντικό ρόλο της εφοδιαστικής, ονομάστηκε «Ο ρόλος της εναέριας μεταφοράς εμπορευμάτων στη φυσική διανομή».

Τα πρώτα κείμενα για την εφοδιαστική άρχισαν να εμφανίζονται στις αρχές της δεκαετίας του '60, όπου ήταν και η πρώτη φορά που ο Peter Drucker, ένας σημαντικός επιχειρηματικός εμπειρογνώμονας και συγγραφέας, δήλωσε ότι η εφοδιαστική ήταν μία από τις τελευταίες πραγματικές ευκαιρίες για οργανισμούς που επιθυμούν να βελτιώσουν την εταιρική τους αποδοτικότητα. Επίσης, στις αρχές της δεκαετίας του 1960, ο Edward Smykay, ο Donald Bowersox και ο Frank Mossman έγραψαν ένα από τα πρώτα κείμενα για τη διαχείριση της εφοδιαστικής. Το βιβλίο εξέτασε την εφοδιαστική από την άποψη της εταιρίας και συζήτησε την έννοια του συνολικού κόστους. Το 1963 ιδρύθηκε το Εθνικό Συμβούλιο Διαχείρισης Φυσικής Διανομής (τώρα το Συμβούλιο Διαχείρισης Αλυσίδων Εφοδιασμού - CSCMP) για να αναπτύξει τη θεωρία και την κατανόηση της διαδικασίας διανομής, να προωθήσει την τέχνη και την επιστήμη της διαχείρισης των συστημάτων διανομής και να προωθήσει τον επαγγελματικό διάλογο και την ανάπτυξη το πεδίο αυτό. Κατά τη διάρκεια της υπόλοιπης δεκαετίας του 1960 μέχρι και σήμερα πολλά βιβλία και συνέδρια αφιερώθηκαν στο θέμα της διαχείρισης της εφοδιαστικής.

Η απελευθέρωση του τομέα των μεταφορών στις ΗΠΑ στα τέλη της δεκαετίας του 1970 και στις αρχές της δεκαετίας του 1980 έδωσε στις οργανώσεις περισσότερες επιλογές ναυτιλίας, αυξάνοντας τον ανταγωνισμό εντός και μεταξύ των τρόπων μεταφοράς. Ως αποτέλεσμα, οι μεταφορείς έγιναν πιο δημιουργικοί, ευέλικτοι, προσανατολισμένοι προς τον πελάτη και ανταγωνιστικοί προκειμένου να επιτύχουν.

Κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1970 και του 1980, πολλές εταιρείες δυσκολεύονταν επίσης να διατηρήσουν τα παραδοσιακά επίπεδα κέρδους και τους ρυθμούς ανάπτυξης λόγω του αυξανόμενου εγχώριου και ξένου ανταγωνισμού, των κορεσμένων αγορών, της κυβερνητικής ρύθμισης και άλλων παραγόντων. Επομένως, οι Stock και ο Lambert (2001) επισημαίνουν ότι ένας οργανισμός μπορεί να ακολουθήσει μία ή περισσότερες από τις τρεις βασικές στρατηγικές σε μια τέτοια κατάσταση. Πρώτον, μπορεί να προσπαθήσει να δημιουργήσει επιπλέον όγκο πωλήσεων μέσω αυξημένων προσπαθειών μάρκετινγκ. Εντούτοις, αυτό μπορεί να είναι πολύ δύσκολο και δαπανηρό καθώς οι αυξανόμενες αυξήσεις των πωλήσεων σε κορεσμένες ή άκρως ανταγωνιστικές αγορές είναι δύσκολο να επιτευχθούν, ενώ στις αγορές χαμηλής ανάπτυξης ο ρυθμός ανάπτυξης μπορεί να είναι μικρότερος από ό, τι χρειάζεται η εταιρεία για να δημιουργήσει πρόσθετες πωλήσεις. Ακόμη και σε καταστάσεις με έντονη ανάπτυξη στην αγορά, μια εταιρεία μπορεί να μην είναι σε θέση να επιτύχει τις επιθυμητές αυξήσεις των πωλήσεων λόγω έλλειψης πόρων, ανταγωνισμού και άλλων συνθηκών της αγοράς. Ένας δεύτερος τρόπος βελτίωσης της κερδοφορίας μπορεί να είναι η αύξηση της τιμής του προϊόντος της εταιρείας. Και πάλι, οι αυξήσεις αυτές ενδέχεται να μην είναι δυνατές λόγω των συνθηκών της αγοράς και ανάλογα με την ελαστικότητα της ζήτησης, οι αυξήσεις των τιμών ενδέχεται να μην έχουν τον επιθυμητό αντίκτυπο στις πωλήσεις. Επιπλέον, οι εταιρείες διστάζουν να αυξήσουν τις τιμές εκτός αν το υψηλότερο κόστος των υλικών, της παραγωγής ή της εργασίας κάνει αυτές τις αυξήσεις αναπόφευκτες. Ως εκ τούτου, μια τρίτη στρατηγική, αυτή της μείωσης του κόστους λειτουργίας του οργανισμού, ήταν αυτή που οι περισσότερες εταιρείες έχουν επιδιώξει. Καθώς οι εταιρείες προσπάθησαν να εντοπίσουν τις περιοχές για εξοικονόμηση κόστους ή / και αύξηση παραγωγικότητας, οι περισσότεροι βρήκαν ότι η εφοδιαστική είναι ένας χώρος με την μεγαλύτερη πιθανότητα για σημαντική εξοικονόμηση κόστους.

Μέχρι τη δεκαετία του 1990, πολλές οργανώσεις αξιολογούσαν επίσης τις επιχειρηματικές τους διαδικασίες για να διαπιστώσουν εάν υπήρξε καλύτερος τρόπος εκτέλεσης τους, καθώς η εφοδιαστική παρουσίαζε έναν σημαντικό λειτουργικό τομέα όπου οι προσπάθειες ανασχεδιασμού είχαν ως αποτέλεσμα σημαντικές βελτιώσεις. Η προσέγγιση της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας αναγνωρίστηκε επίσης ως σημαντική έννοια καθώς η ανάπτυξή της και η υλοποίησή της ξεκίνησαν σε πολλές βιομηχανίες. Η σημασία της ανάπτυξης και της αυξανόμενης εστίασης στον ρόλο της εφοδιαστικής είναι η αντίληψη ότι πολλοί οργανισμοί και λειτουργικοί τομείς μπορούν να εντάξουν τις προσπάθειές τους για τη βελτιστοποίηση της ατομικής και συνδυασμένης απόδοσής τους, οδηγώντας στην ανάπτυξη μιας προσέγγισης συστημάτων σε όλο το κανάλι διανομής.

Η παγκοσμιοποίηση και οι τεχνολογικές εξελίξεις κατέστησαν την αγορά όλο και πιο ανταγωνιστική και τον ρόλο της εφοδιαστικής στην επιτυχία της επιχείρησης πιο κρίσιμο. Έχει επίσης γίνει ανεπαρκής η απλή παροχή προϊόντων στον πελάτη. Η εταιρεία πρέπει να προσφέρει αξία σε πολλές μορφές και ένας αυξανόμενος αριθμός εταιρειών προσπαθεί να εντάξει την εφοδιαστική για να παρέχει αυτή την αξία στους πελάτες. Οι διαχειριστές εφοδιαστικής δεν μπορούν πλέον να εργάζονται χωρίς να εξετάζουν όλα τα στοιχεία του συστήματος και λαμβάνοντας υπόψη τον τρόπο με τον οποίο οι αλλαγές θα επηρεάσουν το συνολικό κόστος της λειτουργίας διανομής της εταιρείας. Είναι γεγονός ότι οι αποφάσεις και οι πολιτικές υλικοτεχνικής υποδομής μπορούν να επηρεάσουν τις συνολικές πωλήσεις της εταιρείας καθώς και το κόστος των δραστηριοτήτων της.

Η τεχνολογία της πληροφορίας και οι επικοινωνίες αποτελούν σημαντικό στοιχείο στη διαδικασία διανομής και στην αύξηση της συνειδητοποίησης του ρόλου και της συμβολής της εφοδιαστικής. Η τεχνολογία των υπολογιστών και τα λογισμικά διανομής έχουν αυξήσει περαιτέρω το ενδιαφέρον των επιχειρήσεων για τη διαχείριση της εφοδιαστικής. Οι εταιρίες μπορούν να βελτιώσουν την αποδοτικότητα κόστους λόγω της ταχύτητας και της ακρίβειας του υπολογιστή. Μπορούν, επίσης, να χρησιμοποιούν εξελιγμένες τεχνικές για τη διαχείριση και τον έλεγχο δραστηριοτήτων όπως ο προγραμματισμός παραγωγής, ο έλεγχος απογραφής και η επεξεργασία παραγγελιών.

(Stock & Lambert, 2001).

Αυτά τα πλεονεκτήματα, καθώς και οι επιρροή που έχουν στην εμπορία, την παραγωγή και τις χρηματοοικονομικές δραστηριότητες της εταιρείας, μαζί με πολλούς άλλους παράγοντες, όπως εκείνοι που αναφέρθηκαν παραπάνω, έχουν συμβάλει στη δημιουργία κορυφαίου ενδιαφέροντος σχετικά με την εφοδιαστική. Με τη σειρά της, η ανώτατη διοίκηση έχει αυξήσει την προτεραιότητα των επενδύσεων για την εφοδιαστική σε συστήματα και επικοινωνίες. (Delaney, 1999).

1.4 Μεταφορές

Με τον όρο μεταφορές στον οικονομικό και εμπορικό χώρο εννοούμε την μετακίνηση των φορτίων ή επιβατών από μία τοποθεσία σε μία άλλη. Με τις μεταφορές επιτυγχάνεται, διαμέσου των καναλιών της εφοδιαστικής αλυσίδας, η διακίνηση και η παράδοση των προϊόντων από τον αρχικό προμηθευτή στον τελικό καταναλωτή. Οι μεταφορές αποτελούν συνήθως το πιο σημαντικό κομμάτι του κόστους εφοδιαστικής (logistics cost) μιας επιχείρησης φτάνοντας το 1/3 έως και 2/3 του κόστους της εφοδιαστικής. Η λειτουργία των μεταφορών είναι αναγκαία σε κάθε εφοδιαστική αλυσίδα, γιατί πολύ σπάνια τα προϊόντα παράγονται και καταναλώνονται στο ίδιο σημείο.

Ένα αποδοτικό και αποτελεσματικό σύστημα μεταφορών συμβάλλει:

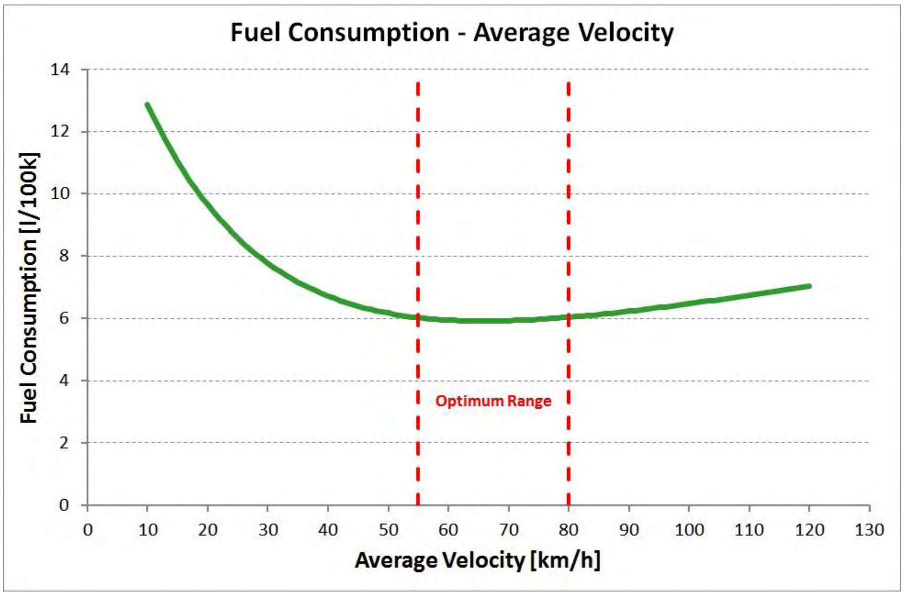
- στην ενίσχυση του ανταγωνισμού καθώς δίνει τη δυνατότητα διείσδυσης σε απομακρυσμένες αγορές (είσοδος ανταγωνιστικών προϊόντων οδηγεί σε σταθεροποίηση της τιμής τους κ.ο.κ.),
- στη διάθεση εποχιακών και ευαίσθητων προϊόντων όλο το χρόνο, π.χ. μπανάνες νοτίου Αμερικής στην Αθήνα το Γενάρη κ.ο.κ,
- στη δημιουργία οικονομιών κλίμακας εξαιτίας της διεύρυνσης της αγοράς και της αύξηση του όγκου πωλήσεων,
- στη μείωση του κόστους παραγωγής,
- και στη μείωση της τελικής τιμής διάθεσης στον καταναλωτή.

1.5 Μεταφορές και περιβάλλον

Οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις ενός στόλου οχημάτων εκτός από τις χρησιμοποιούμενες διαδρομές και τα χρονοδιαγράμματα επηρεάζονται από παράγοντες όπως το μέγεθος των οχημάτων και ο τύπος του χρησιμοποιούμενου καυσίμου. Τα πρακτικά μέτρα, όπως ο τρόπος οδήγησης των οχημάτων, μπορούν να έχουν αντίκτυπο στις εκπομπές. Στο Ηνωμένο Βασίλειο, το πρόγραμμα SAFED παρέχει κατάρτιση οδηγών για την ενθάρρυνση της ασφαλούς και οικονομικά αποδοτικής οδήγησης μέσω ενός ευρέος φάσματος παραγόντων. Οι παράγοντες περιλαμβάνουν την αεροδυναμική και το μέγεθος του φορτίου, την τεχνική πέδησης, τη χρήση γραναζιών, το σύστημα ελέγχου ταχύτητας και τον καθορισμό των βέλτιστων ταχυτήτων. Οι εταιρείες μπορούν να παρέχουν βραβεία αποδοτικότητας σε οδηγούς που επιτυγχάνουν στόχους όπως η χρήση λιγότερων καυσίμων. Τέτοιου είδους μέτρα έχουν δείξει ότι η κατανάλωση καυσίμου μειώνεται κατά 1.9 έως 13.5% (DfT, 2006) σε μια μελέτη και κατά 4,35% σε μια μελέτη των Ζαρκαδούλα, Ζωίδη και Τριτοπούλου (2007).

Ο έλεγχος των εκπομπών είναι η διαδικασία υπολογισμού της ποσότητας αερίων θερμοκηπίου ή άλλων ρύπων που απελευθερώνονται στην ατμόσφαιρα από μια συγκεκριμένη δραστηριότητα. Κατά την εκτίμηση των εκπομπών των οχημάτων μπορούν να ληφθούν υπόψη διάφοροι παράγοντες, συμπεριλαμβανομένου του βάρους φορτίου και της κατανομής, της ηλικίας του οχήματος, του μεγέθους του κινητήρα, του σχεδιασμού του οχήματος, του στυλ οδήγησης, της κλίσης του δρόμου και της ταχύτητας. Η ταχύτητα είναι ο κύριος παράγοντας σε σχέση με τη δρομολόγηση του οχήματος και μια διαδρομή που παράγεται κατά τη βελτιστοποίηση της απόστασης μπορεί να εκπέμπει περισσότερο CO_2 ή άλλα ρυπογόνα αέρια λόγω βραδύτερων ταχυτήτων από μια μακρύτερη εναλλακτική διαδρομή.

Μια απλή μέθοδος εκτίμησης των εκπομπών από ένα όχημα είναι με δεδομένη την απόσταση του προγραμματισμένου ταξιδιού και να εκτιμηθεί μια μέση ταχύτητα ή κατανάλωση καυσίμου ανά χλμ. Μια τέτοια προσέγγιση περιλαμβάνεται στο μοντέλο των Dessouky, Rahimi and Weidner (2003). Μια πιο λεπτομερής προσέγγιση θα ήταν ο διαχωρισμός κάθε ταξιδιού ανάλογα με τον οδικό τύπο (π.χ. αυτοκινητόδρομους, μεγάλους δρόμους, δευτερεύοντες δρόμους, οικιστικούς δρόμους) και η εκτίμηση μιας μέσης ταχύτητας ή κατανάλωσης καυσίμου για κάθε τύπο. Μια τέτοια προσέγγιση χρησιμοποιείται ήδη σε πολλά πακέτα λογισμικού για την εκτίμηση των χρόνων οδήγησης. Ωστόσο, η ταχύτητα, ιδιαίτερα στα κέντρα των πόλεων, έχει αποδειχθεί ότι διαφέρει σημαντικά κατά τη διάρκεια της ημέρας. Η κύρια αιτία αυτής της μεταβλητότητας είναι η συμφόρηση. Οποιαδήποτε εκτίμηση των εκπομπών που δεν λαμβάνει υπόψη αυτή τη διακύμανση θα είναι περιορισμένη ως προς την ακρίβειά της. Επιπλέον, η αποτυχία να προβλεφθεί η κυκλοφοριακή συμφόρηση μειώνει την αποτελεσματικότητα των χρονοδιαγραμμάτων που παράγονται από τα λογισμικά όταν εφαρμόζονται στον πραγματικό κόσμο. Η κυκλοφοριακή συμφόρηση εμποδίζει το όχημα να κινείται με βέλτιστη ταχύτητα με αποτέλεσμα να έχει αρνητικό αντίκτυπο στις συνολικές εκπομπές ρύπων. Όσο η ταχύτητα μειώνεται κάτω από το βέλτιστο επίπεδο, καθώς και όσο το όχημα επιταχύνει-επιβραδύνει λόγω της συμφόρησης αντί να κινείται με μία σταθερή ταχύτητα καταναλώνεται σημαντικά περισσότερο καύσιμο. Αυτό σημαίνει ότι οι εκτιμήσεις της κατανάλωσης καυσίμου δεν αντιπροσωπεύουν με ακρίβεια την κατανάλωση σε συνήθεις συνθήκες οδήγησης.



Εικόνα 1-2: Σχέση μεταξύ κατανάλωσης καυσίμου (l/100km) και μέσης ταχύτητας (km/h) σε ένα τυπικό τετραθέσιο βενζινοκίνητο αυτοκίνητο.
(https://myengineeringworld.net/2012/05/optimal-speed-for-minimum-fuel.html)

Η σύγχρονη τεχνολογία, ειδικά με την εμφάνιση συσκευών GPS, επιτρέπει την παρακολούθηση των οχημάτων. Τα δεδομένα από τα οχήματα αποθηκεύονται και στη συνέχεια μεταδίδονται σε κεντρική τοποθεσία και αναλύονται. Συνήθως καταγράφονται η ταχύτητα και η θέση. Ωστόσο, οι σύγχρονες συσκευές περιλαμβάνουν επίσης πληροφορίες σχετικά με τη ροή καυσίμου. Ελπίζουμε ότι στο μέλλον οι πληροφορίες σχετικά με την κατανάλωση καυσίμων που συλλέγονται με αυτόν τον τρόπο θα βοηθήσουν τον έλεγχο των εκπομπών. Εν τω μεταξύ, δεδομένα για τις ταχύτητες του οχήματος έχουν συγκεντρωθεί έτσι ώστε η μέση ταχύτητα για ένα τμήμα δρόμου κάθε στιγμή της ημέρας να είναι γνωστή. Αυτό παρέχει έναν τρόπο μέτρησης της συμφόρησης που συμβαίνει σε καθημερινή βάση.

Ο στόχος αυτής της προσέγγισης είναι να παράγει πιο αξιόπιστα χρονοδιαγράμματα, αλλά και η κατασκευή διαδρομών που τείνουν να αποφεύγουν τη συμφόρηση και τις εκπομπές που παράγονται με αργή κίνηση. Μια τέτοια προσέγγιση θα παράγει επίσης πιο αποτελεσματικά χρονοδιαγράμματα που θα μειώσουν τις υπερωρίες και θα βελτιώσουν την ικανοποίηση των πελατών τους μέσω πιο ακριβών παραδόσεων και συλλογών.

Η δρομολόγηση των οχημάτων είναι μόνο ένας από τους πολλούς παράγοντες που επηρεάζουν τις οικονομικές και περιβαλλοντικές επιδόσεις μιας διανομής αλλά η καλή δρομολόγηση και προγραμματισμός έχουν τη δυνατότητα να συμβάλουν σε μειώσεις των εκπομπών αερίων θερμοκηπίου και άλλων ρύπων.

(Alan McKinnon, 2010)

1.6 Τεχνικές βελτίωσης και νέες τεχνολογίες στις μεταφορές

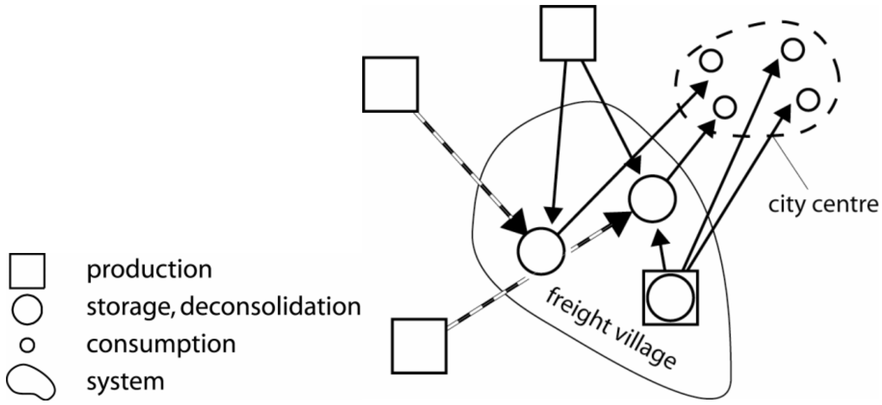
Η δρομολόγηση αποτελεί απαραίτητη και βασική διαδικασία σε μεγάλο αριθμό δημόσιων και ιδιωτικών επιχειρήσεων και οργανισμών. Έχει ρόλο-κλειδί στην αποτελεσματικότητα των μεταφορών και της εφοδιαστικής αλυσίδας στον βιομηχανικό, στον εμπορικό κλάδο και στη κοινωνία γενικότερα.. Η πρόοδος στις τεχνικές και στη διαχείριση των μεταφορών βελτιώνει την ταχύτητα παράδοσης, την ποιότητα των υπηρεσιών, το κόστος λειτουργίας, τη χρήση εγκαταστάσεων και την εξοικονόμηση ενέργειας. Κάποιες τεχνικές και τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται για την βελτίωση των μεταφορών εμπορευμάτων παρουσιάζονται παρακάτω:

- Συνεργατικά συστήματα μεταφοράς εμπορευμάτων (Cooperative freight systems).

  Το παραδοσιακό μοντέλο παράδοσης των εμπορευμάτων υποστηρίζει λιγότερα ταξίδια και μεγαλύτερα φορτία. Ακόμα, οι επιχειρήσεις μεταφορών στο παρελθόν διατηρούσαν συνήθως την επιχειρηματική τους δραστηριότητα ανεξάρτητα. Γεγονός που σημαίνει ότι δύο μεταφορείς μπορεί να εξυπηρετήσουν στην ίδια περιοχή. Σήμερα, οι τάσεις των αστικών εμπορευματικών μεταφορών τείνουν προς την κατεύθυνση της παράδοσης του "Just-in-time" και "από πόρτα σε πόρτα". Η λειτουργία των εμπορευματικών μεταφορών αλλάζει για να έχουν περισσότερα ταξίδια, αλλά λιγότερα φορτία προκειμένου να αυξηθεί η απόδοση με διαφορετικό τρόπο. Χωρίς βελτίωση στον τρόπο οργάνωσης των μεταφορών, το κόστος τους θα αυξηθεί σημαντικά για να ικανοποιηθούν οι τρέχουσες απαιτήσεις. Τα συνεργατικά συστήματα μεταφοράς εμπορευμάτων είναι ένας από τους τρόπους που αναμένεται να επιλύσουν αυτό το πρόβλημα. Τα συνεργατικά συστήματα μεταφοράς εμπορευμάτων ενσωματώνουν τους πόρους των συνεργαζόμενων εταιρειών για να βελτιστοποιήσουν τα οικονομικά οφέλη. Τα βασικά οφέλη της τεχνικής αυτής είναι ότι αυξάνονται τα φορτία παράδοσης σε κάθε διαδρομή, μειώνονται τα περιττά ταξίδια και κατά συνέπεια η ρύπανση και το κόστος · μειώνονται οι περιοχές επικαλύψεων και αυξάνεται η ποιότητα των υπηρεσιών και τα κέρδη των επιχειρήσεων.

- Εμπορευματικά κέντρα (Freight villages)

Η έννοια των εμπορευματικών κέντρων (τερματικός σταθμός) έχει εφαρμοστεί σε διάφορες πόλεις, όπως το Μονακό. Τα αγαθά συγκεντρώνονται και αναδιοργανώνονται στο εμπορευματικό κέντρο πριν μεταφερθούν στις αστικές περιοχές. Αυτό το σύστημα μπορεί να μειώσει τον απαιτούμενο αριθμό φορτηγών που χρησιμοποιούνται για παράδοση και διαχείριση. Τα φορτία που προέρχονται από έξω από μια πόλη αποστέλλονται στο εμπορευματικό κέντρο για να ταξινομηθούν και να προετοιμαστούν για την παράδοση στην περιοχή της πόλης. Αυτό θα μπορούσε να αυξήσει το φορτίο μεταφοράς των οχημάτων και να μειώσει τα περιττά ταξίδια στην αστική περιοχή. Επιπλέον, αυτή η ενσωμάτωση ωφελεί τον ιδιωτικό τομέα, μειώνοντας το κόστος, αλλά και το δημόσιο περιβάλλον με τη μείωση των ταξιδιών και της ατμοσφαιρικής ρύπανσης.



Εικόνα 1-3: Η δομή των εμπορευματικών κέντρων. (Potrol, 2003).

- Έλεγχος μεταφορών

Στην Ευρώπη, ορισμένες πόλεις εφαρμόζουν τον περιορισμό ορισμένων αρνητικών παραγόντων των μεταφορών στις αστικές εμπορευματικές μεταφορές. Οι εταιρείες που επιτρέπεται να παραδίδουν εμπορεύματα στην αστική περιοχή πρέπει να έχουν υψηλά ποσοστά φόρτωσης και τα οχήματα πρέπει να συμμορφώνονται με τα περιβαλλοντικά πρότυπα.

- Ευφυή συστήματα μεταφορών (Intelligent Transport Systems)

Οι εφαρμογές των ITS στα συστήματα μεταφορών είναι ευρέως διαδεδομένες. Οι πιο κοινές τεχνικές για την εφοδιαστική περιλαμβάνουν το Παγκόσμιο Σύστημα Στιγματοθέτησης (GPS), τα Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα (GIS) και προηγμένα πληροφοριακά συστήματα. Το GPS παρέχει την υπηρεσία του εντοπισμού οχημάτων. Θα μπορούσε βοηθήσει τα κέντρα ελέγχου να παρακολουθούν και να δρομολογούν φορτηγά. Το GIS παρέχει τη βασική γεωγραφική βάση δεδομένων για αυτούς οι οποίοι προγραμματίζουν τη δρομολόγηση ώστε να είναι σε θέση να οργανώσουν τις διαδρομές τους ευκολότερα και ταχύτερα. Τα προηγμένα πληροφοριακά συστήματα παρέχουν πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο τόσο για τους διαχειριστές όσο και για τους μεταφορείς ώστε να προσαρμόζουν τις διαδρομές τους καθώς προκύπτουν νέα δεδομένα και ανάγκες. Η ενσωμάτωση GPS, GIS και προηγμένων πληροφοριακών συστημάτων παρέχουν μεγάλη ευλυγισία στα συστήματα μεταφορών. Τα οφέλη της προσθήκης τους στη βελτιστοποίηση της δρομολόγησης είναι καλύτερη ποιότητα υπηρεσιών, μειωμένες περιττές διαδρομές και αυξημένος ρυθμός φόρτωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Πρόβλημα Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφονται τα βασικά χαρακτηριστικά και οι τρόποι επίλυσης ενός από τα βασικότερα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης του Προβλήματος Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων το οποίο πραγματεύεται αυτή η διπλωματική εργασία.

2.1 Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

Η έννοια της βελτιστοποίησης αποτελεί τη βάση της ανάλυσης για ένα μεγάλο αριθμό πολύπλοκων προβλημάτων απόφασης. Γενικά ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται από το ζεύγος (S,f) όπου S είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων και f είναι η αντικειμενική συνάρτηση που απεικονίζει κάθε στοιχείο $x \in S$ πάνω σε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών R, f: R → S. Ο στόχος κάθε προβλήματος βελτιστοποίησης είναι να βρεθεί μία λύση $x \in S$ που ανάλογα με τη διατύπωση του προβλήματος να ελαχιστοποιεί ή να μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση f.

2.2 Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή (ΠΠΠ)

Το πλέον θεμελιώδες πρόβλημα προγραμματισμού διανομής είναι αυτό του πλανόδιου πωλητή (Travelling Salesman Problem (TSP)) . Στο οποίο ο πωλητής επισκέπτεται πολλές πόλεις και επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης. Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην εύρεση μίας μόνο διαδρομής που να συνδέει τις πόλεις (κόμβους) με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική διανυθείσα απόσταση ή ο συνολικός χρόνος. Κάθε σημείο πρέπει να δέχεται επίσκεψη ακριβώς μία φορά. Ένα δίκτυο ορίζεται ως ένα σύνολο σημείων (κόμβων), **V** και ένα σύνολο πλευρών (κλάδων), **A** που συνδέουν τα σημεία αυτά.

Έστω ένα δίκτυο που αποτελείται από n σημεία. Η απευθείας απόσταση μεταξύ δύο σημείων i και j είναι ίση με cij. Εάν δεν υπάρχει πλευρά που να συνδέει απευθείας τα σημεία i και j, τότε cij = ∞. Θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή που ξεκινάει από τον κόμβο 1, επισκέπτεται όλα τα σημεία του δικτύου, το κάθε ένα ακριβώς μία φορά, και επιστρέφει πάλι στο σημείο 1. Ορίζουμε δυαδικές μεταβλητές απόφασης xij = 1, αν στη διαδρομή υπάρχει απευθείας μετάβαση από τον κόμβο i στον κόμβο j.Το πρόβλημα μορφοποιείται ως εξής:

$$\mathrm{Min} \sum_{(i,j)\in A}^{N} c_{ij} \times x_{ij}$$

Υπό τους περιορισμούς,

$$\sum_{j:(ij)\in A} X_{ij} = 1 \; \forall i \in \mathbf{V}$$

$$\sum_{i:(ij)\in A} X_{ij} = 1 \; \forall j \in \mathbf{V}$$

$$U_i - U_j + n \times X_{ij} \leq n - 1 \;\; , 2 \leq i \neq j \leq n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, i \in \mathbf{V}, j \in \mathbf{V}$$

Η προέλευση του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή είναι ασαφής. Ένα εγχειρίδιο για τους πλανόδιους πωλητές από το 1832 αναφέρει το πρόβλημα και περιλαμβάνει παραδείγματα περιηγήσεων μέσω της Γερμανίας και της Ελβετίας, αλλά δεν περιέχει καμία μαθηματική ανάλυση.

Το πρόβλημα του πλανόδιου πωλητή διατυπώθηκε μαθηματικά στη δεκαετία του 1800 από τον ιρλανδικό μαθηματικό W.R. Hamilton και από τον βρετανό μαθηματικό Thomas Kirkman. Η γενική μορφή του TSP φαίνεται να έχει αρχικά μελετηθεί από μαθηματικούς στη δεκαετία του 1930 στη Βιέννη και στο Χάρβαρντ, κυρίως από τον Karl Menger.

Αρχικά μελετήθηκε μαθηματικά στη δεκαετία του 1930 από τον Merrill M. Flood ο οποίος προσπαθούσε να λύσει ένα πρόβλημα δρομολόγησης σχολικών λεωφορείων. Ο Hassler Whitney στο Πανεπιστήμιο του Princeton εισήγαγε σύντομα το όνομα του προβλήματος του πλανόδιου πωλητή.

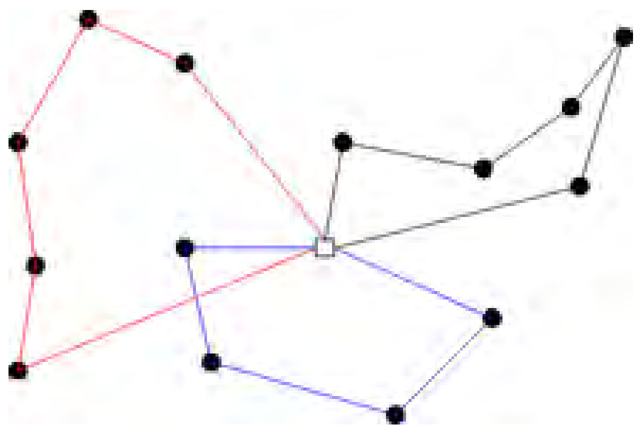
Στη δεκαετία του 1950 και του 1960, το πρόβλημα έγινε όλο και πιο δημοφιλές στους επιστημονικούς κύκλους της Ευρώπης και των ΗΠΑ, αφού η RAND Corporation στη Σάντα Μόνικα προσέφερε βραβεία για την επίλυση του προβλήματος. Οι αξιοσημείωτες συνεισφορές έγιναν από τους George Dantzig, Delbert Ray Fulkerson και Selmer M. Johnson από την RAND Corporation, οι οποίοι εξέφρασαν το πρόβλημα ως ένα ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα και χρησιμοποίησαν τεχνικές περιορισμού του εφικτού χώρου για την επίλυσή του. Ακόμα, έλυσαν ένα πρόβλημα για 48 πολιτείες των ΗΠΑ διαμορφώνοντάς το ως ένα γραμμικό πρόβλημα προγραμματισμού. Οι μέθοδοι που χρησιμοποίησαν έθεσαν τα θεμέλια για μελλοντική μελέτη στην συνδυαστική βελτιστοποίηση.

Εικόνα 2-1: Βέλτιστη διαδρομή για 48 πολιτείες των ΗΠΑ.
(https://optimization.mccormick.northwestern.edu/index.php/Traveling_salesman_problems)

2.3 Το Πρόβλημα Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων (ΠΔΣΟ)

Η γενίκευση του Προβλήματος Πλανόδιου Πωλητή είναι το Πρόβλημα της Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων (Vehicle Routing Problem (VRP)) το οποίο έχει σκοπό τον προσδιορισμό του βέλτιστου συνόλου των διαδρομών που θα χρησιμοποιηθούν από ένα στόλο οχημάτων για να μεταφέρουν αγαθά από έναν ή περισσότερους χώρους αποθήκευσης ώστε να εξυπηρετήσουν ένα δεδομένο σύνολο πελατών.

Έχουν παρέλθει 60 χρόνια από τότε που οι Dantzig και Ramser παρουσίασαν το πρόβλημα το 1959. Περιέγραψαν μία πραγματική εφαρμογή σχετικά με την παράδοση βενζίνης σε σταθμούς εξυπηρέτησης και πρότειναν την πρώτη μοντελοποίηση μαθηματικού προγραμματισμού και αλγοριθμική προσέγγιση. Λίγα χρόνια αργότερα το 1964 οι Clarke και Wright πρότειναν έναν αποτελεσματικό άπληστο ευρετικό αλγόριθμο ο οποίος βελτίωσε την προσέγγιση Dantzig-Ramser. Ακολουθώντας τις δύο αυτές αρχικές ιδέες εκατοντάδες μοντέλα και αλγόριθμοι προτάθηκαν για τη βέλτιστη προσεγγιστική λύση διαφορετικών εκδοχών του ΠΔΣΟ. Δεκάδες πακέτα για τη λύση διαφόρων πραγματικών προβλημάτων δρομολόγησης είναι τώρα διαθέσιμα στην αγορά. Αυτό το ενδιαφέρον για το ΠΔΣΟ οφείλεται στην πρακτική συνάφεια και τη σημαντική δυσκολία. Οι μεγαλύτερες περιπτώσεις ΠΔΣΟ που μπορούν να επιλυθούν με συνέπεια από τους πιο αποτελεσματικούς ακριβείς αλγορίθμους περιέχουν περίπου 50 πελάτες ενώ μεγαλύτερες περιπτώσεις μπορούν να επιλυθούν βέλτιστα μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.



Εικόνα 2-2: Τυπική λύση του Προβλήματος Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων.
(https://en.wikipedia.org/wiki/Vehicle_routing_problem)

2.4 Τυπικά Χαρακτηριστικά Προβλήματος Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων

Στη πραγματικότητα τα προβλήματα δρομολόγησης που καλούμαστε να επιλύσουμε διαμορφώνονται από διαφορετικά χαρακτηριστικά το καθένα, τα οποία καθορίζουν κάθε φορά τους περιορισμούς και τους στόχους της δρομολόγησης. Με βάση αυτά μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα διάφορα προβλήματα δρομολόγησης.

Τυπικά χαρακτηριστικά πελατών:

- Σημείο οδικού γραφήματος στο οποίο βρίσκεται ο πελάτης.
- Ποσότητα αγαθών (ζήτηση), ενδεχομένως διαφορετικών τύπων τα οποία πρέπει να παραδοθούν στον πελάτη. Η ζήτηση μπορεί να είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική.
- Περίοδοι της ημέρας (χρονικά παράθυρα) κατά τη διάρκεια των οποίων ο πελάτης μπορεί να εξυπηρετηθεί.
- Οι χρόνοι που απαιτούνται για την παράδοση ή την παραλαβή των εμπορευμάτων στη θέση του πελάτη. (χρόνοι φόρτωσης ή εκφόρτωσης), ανάλογα με τον τύπο του οχήματος.
- Υποσύνολο των διαθέσιμων οχημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εξυπηρέτηση του πελάτη (π.χ. λόγω περιορισμών πρόσβασης ή απαιτήσεων φόρτωσης και εκφόρτωσης).

Μερικές φορές δεν είναι δυνατό να ικανοποιηθεί πλήρως η ζήτηση του κάθε πελάτη. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι ποσότητες που πρέπει να παραδοθούν μπορούν να μειωθούν ή ένα υποσύνολο πελατών μπορεί να μην εξυπηρετηθεί με αντίστοιχες κυρώσεις (κόστη) για την μερική ή πλήρη έλλειψη εξυπηρέτησης.

Τυπικά χαρακτηριστικά οχημάτων:

- Αποθήκη οχημάτων (αφετηρία) και η δυνατότητα τερματισμού σε αποθήκη διαφορετική από την αρχική.
- Ομογενής ή ετερογενής στόλος.
- Χωρητικότητα του οχήματος εκφρασμένη ως μέγιστο βάρος ή όγκος ή αριθμός παλετών που μπορεί να φορτώσει το όχημα.
- Πιθανή υποδιαίρεση του οχήματος σε διαμερίσματα, τα οποία χαρακτηρίζονται από τη χωρητικότητά τους και τα είδη των εμπορευμάτων που μπορούν να μεταφέρουν.
- Διαθέσιμες συσκευές για τις εργασίες φόρτωσης και εκφόρτωσης.
- Υποσύνολο τόξων του οδικού γραφήματος που μπορεί να διασχίζεται από το όχημα.
- Δαπάνες που σχετίζονται με τη χρήση του οχήματος (ανά μονάδα απόστασης, ανά μονάδα χρόνου, ανά διαδρομή κλπ).

Οι οδηγοί που χειρίζονται τα οχήματα πρέπει να ικανοποιούν αρκετούς περιορισμούς που καθορίζονται από συμβάσεις και εταιρικούς κανονισμούς (για παράδειγμα χρόνος εργασίας κατά τη διάρκεια της ημέρας, αριθμός και διάρκεια διαλείμματος κατά τη διάρκεια της υπηρεσίας, μέγιστη διάρκεια συνεχούς οδήγησης, υπερωρίες). Ακολούθως, οι περιορισμοί που επιβάλλονται στους οδηγούς ενσωματώνονται σε εκείνους που συνδέονται με τα αντίστοιχα οχήματα.

Οι διαδρομές πρέπει να ικανοποιούν αρκετούς λειτουργικούς περιορισμούς, οι οποίοι εξαρτώνται από τη φύση των μεταφερόμενων εμπορευμάτων, την ποιότητα του επιπέδου υπηρεσιών και τα χαρακτηριστικά των πελατών και των οχημάτων. Μερικοί τυπικοί λειτουργικοί περιορισμοί είναι οι εξής: Κατά μήκος κάθε διαδρομής το τρέχων φορτίο κάθε οχήματος δε μπορεί να υπερβαίνει τη χωρητικότητα του οχήματος. Οι πελάτες που εξυπηρετούνται σε μία διαδρομή μπορούν να απαιτήσουν μόνο την παράδοση ή τη συλλογή αγαθών ή και τα δύο. Οι πελάτες μπορούν να εξυπηρετηθούν μόνο μέσα στα χρονικά τους παράθυρα. Μπορούν να επιβληθούν περιορισμοί προτεραιότητας στη σειρά με την οποία θα εξυπηρετηθούν οι πελάτες. Ένας τύπος περιορισμού προτεραιότητας προϋποθέτει ότι ένας συγκεκριμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί στην ίδια διαδρομή που εξυπηρετεί ένα σύνολο πελατών και ότι ο συγκεκριμένος πελάτης θα πρέπει να εξυπηρετηθεί πριν (ή μετά) από τους πελάτες που ανήκουν σε αυτό το υποσύνολο. Αυτή είναι η περίπτωση ,για παράδειγμα, των λεγόμενων προβλημάτων παραλαβής και παράδοσης (pickup and delivery problems) όπου σε μία διαδρομή μπορούν να γίνουν και τα δύο και τα αγαθά που συλλέγονται από κάποιον πελάτη θα πρέπει να μεταφερθούν στον πελάτη για παράδοση από το ίδιο όχημα. Ένας άλλος τύπος περιορισμού προτεραιότητας επιβάλλει ότι σε περίπτωση εξυπηρέτησης πελατών διαφορετικού τύπου στην ίδια διαδρομή, η σειρά εξυπηρέτησης των πελατών είναι σταθερή. Η κατάσταση αυτή για παράδειγμα προκύπτει στο λεγόμενο ΠΔΣΟ με backhauls (VRP with backhauls) όπου και πάλι οι διαδρομές μπορούν να εκτελέσουν τόσο τη συλλογή όσο και την παράδοση των εμπορευμάτων αλλά οι περιορισμοί που συνδέονται με τις εργασίες φόρτωσης και εκφόρτωσης και η δυσκολία αναδιάταξης του φορτίου του οχήματος κατά τη διάρκεια της διαδρομής σημαίνει ότι όλες οι παραδόσεις πρέπει να εκτελούνται πριν από τις συλλογές.

Η αξιολόγηση του συνολικού κόστους των διαδρομών και ο έλεγχος των λειτουργικών περιορισμών που τους επιβάλλεται, απαιτεί τη γνώση του κόστους ταξιδιού και του χρόνου ταξιδιού μεταξύ των πελατών και μεταξύ των πελατών και των αποθηκών. Για το σκοπό αυτό ο αρχικός δρόμος μετατρέπεται σε ένα πλήρες γράφημα του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στους πελάτες και τις αποθήκες.

Για τη δρομολόγηση του οχήματος μπορεί να ληφθούν υπόψη πολλοί και συχνά αντικρουόμενοι στόχοι. Κάποιοι τυπικοί στόχοι είναι:

- Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς που σχετίζεται με τη συνολική απόσταση ταξιδιού (ή το συνολικό χρόνο ταξιδιού) και τα πάγια έξοδα που συνδέονται με τα χρησιμοποιούμενα οχήματα και τους οδηγούς.
- Ελαχιστοποίηση του αριθμού των οχημάτων (ή των οδηγών) που απαιτούνται για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών.
- Εξισορρόπηση των διαδρομών, όσο αφορά το χρόνο ταξιδιού και το φορτίο του οχήματος.
- Ελαχιστοποίηση των κυρώσεων που συνδέονται με τη μερική εξυπηρέτηση των πελατών.
- Οποιοσδήποτε σταθμισμένος συνδυασμός αυτών των στόχων.

(Paolo Toth, 1987)

2.5 Πολυπλοκότητα Αλγορίθμων

Η επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης απαιτεί τη χρήση ενός αλγορίθμου. Η αποτελεσματικότητα ενός αλγορίθμου εξαρτάται από το βαθμό πολυπλοκότητας που παρουσιάζει ο αλγόριθμος. Η πολυπλοκότητα ενός αλγορίθμου εμφανίζεται υπό τις εξής δύο μορφές: την πολυπλοκότητα χώρου και την πολυπλοκότητα χρόνου. Η πολυπλοκότητα χώρου για το ΠΔΣΟ προσδιορίζεται από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την αποθήκευση του εξεταζόμενου γραφήματος και των πιθανών προσωρινών ή τελικών αποτελεσμάτων που παράγονται κατά τη διάρκεια εφαρμογής του αλγορίθμου. Ωστόσο, το γεγονός ότι οι χώροι αποθήκευσης (μνήμες) γίνονται όλο και μεγαλύτεροι και συνάμα φθηνότεροι καθιστά το ζήτημα της πολυπλοκότητας χώρου δευτερεύουσας σημασίας. Αντιθέτως η πολυπλοκότητα χρόνου παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Σε κάθε αλγόριθμο διακρίνουμε τη σημαντικότερη και βαρύνουσα πράξη. (π.χ. πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, σύγκριση στοιχείων, κλπ.). Η πολυπλοκότητα χρόνου είναι το πλήθος των εκτελέσεων της βασικής πράξης ώστε να παραχθούν τα δεδομένα εξόδου από τα δεδομένα εισόδου. Στην περίπτωση των προβλημάτων που εξετάζονται πάνω σε γραφήματα η πολυπλοκότητα χρόνου εξαρτάται από την τάξη ή/και το μέγεθος του γραφήματος (καθώς οι μεταβλητές παριστάνονται από τις ακμές του γραφήματος).

Η τάξη ενός αλγορίθμου χαρακτηρίζεται από το συμβολισμό **O** (O-notation) που εκφράζει το άνω όριο του πλήθους των απαιτούμενων πράξεων με τη βοήθεια μιας συνάρτησης f(n) και συμβολίζεται **O**(f(n)) όπου n είναι το μέγεθος του προβλήματος. Έτσι αν υποθέσουμε ότι ένα πρόβλημα επιλύεται από έναν αλγόριθμο το πολύ σε $f(n)=n^3$ πράξεις τότε λέγεται ότι η τάξη της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου είναι n^3 και συμβολίζεται ως **O**(n^3).

Οι αλγόριθμοι των οποίων η πολυπλοκότητα χρόνου είναι είτε πολυωνυμική είτε υπο-πολυωνυμική, δηλαδή η συνάρτηση f(n) είναι είτε ένα πολυώνυμο είτε μία συνάρτηση που φράσσεται από ένα πολυώνυμο, ονομάζονται χρονο-πολυωνυμικοί αλγόριθμοι. Αντιθέτως οι αλγόριθμοι που παρουσιάζουν μη-πολυωνυμική πολυπλοκότητα χρόνου ονομάζονται χρονο-εκθετικοί αλγόριθμοι. Στην περίπτωση των χρονο-εκθετικών αλγορίθμων η συνάρτηση f(n) παρουσιάζει τους ακόλουθους εκθετικούς ή «εκρηκτικούς» βαθμούς ανάπτυξης: 2^n, k^n (k>1), n!, n^n .

Τα προβλήματα Πλανόδιου Πωλητή και Δρομολόγησης Στόλου Οχημάτων επιλύονται από ακριβείς αλγορίθμους που παρουσιάζουν εκθετική πολυπλοκότητα. Γίνεται ,συνεπώς, κατανοητή η ανάγκη για ανάπτυξη χρονοπολυωνυμικών αλγορίθμων για την επίλυσή τους εντός λογικού υπολογιστικού χρόνου. Γι’ αυτό το λόγο η εφαρμογή των ευρετικών και ακολούθως των μεθευρετικών αλγορίθμων αποτελεί πολλές φορές τον μοναδικό τρόπο επίλυσης του ΠΔΣΟ.

(Χ. Ταραντίλης, 2002)

2.6 Η Θεωρία της Μη-αιτιοκρατικής Πολυωνυμικής Πληρότητας

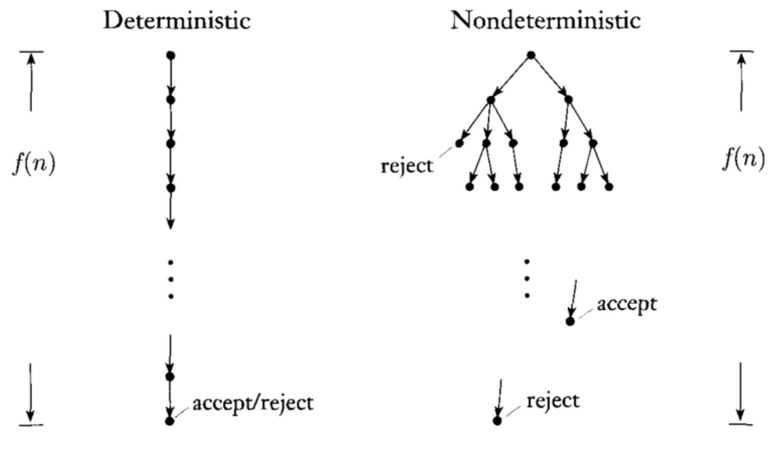
Η θεωρία της NP-Πληρότητας (NP-completeness theory) παίζει θεμελιώδη ρόλο στη μελέτη και στην ανάλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Η θεωρία της NP-Πληρότητας έχει προκύψει από την μελέτη των υπολογιστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης και έχει ως στόχο την εύρεση «πειστικών» κάτω φραγμάτων όσον αφορά την υπολογιστική πολυπλοκότητα συγκεκριμένων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ωστόσο, για λόγους ευκολίας στην διατύπωση των εννοιών, η θεωρία της NP-Πληρότητας αναπτύχθηκε για να εφαρμοσθεί μόνο σε μία κλάση «απλουστευόμενων» προβλημάτων βελτιστοποίησης, τα οποία ονομάστηκαν προβλήματα απόφασης. Ένα πρόβλημα απόφασης είναι κάποιο πρόβλημα για το οποίο για όλα τα εμπλεκόμενα υποδείγματα (instances) μπορεί να υπάρχει ως απάντηση του προβλήματος μία μόνον από τις δύο δυνατές λογικές καταστάσεις, η κατάφαση ή η άρνηση. Ένα υπόδειγμα για το οποίο το πρόβλημα αποκρίνεται καταφατικά ονομάζεται καταφατικό υπόδειγμα του προβλήματος, ενώ ένα υπόδειγμα για το οποίο το πρόβλημα αποκρίνεται αρνητικά ονομάζεται αρνητικό υπόδειγμα του προβλήματος.

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα απόφασης με την εισαγωγή μίας παραμέτρου, η οποία χρησιμοποιείται για τη σύγκριση με τη βέλτιστη τιμή ενός συγκεκριμένου υποδείγματος. Για παράδειγμα, η ερώτηση που τίθεται από το πρόβλημα απόφασης του ΠΔΣΟΧ για ένα δεδομένο υπόδειγμα είναι «υπάρχει μία εφικτή λύση για την οποία το συνολικό κόστος να είναι μικρότερο από έναν ακέραιο αριθμό l;» Αν για ένα δεδομένο υπόδειγμα η απάντηση είναι καταφατική τότε το υπόδειγμα χαρακτηρίζεται ως «καταφατικό υπόδειγμα» του ΠΔΣΟΧ, ενώ σε περίπτωση αρνητικής απάντησης το υπόδειγμα χαρακτηρίζεται ως «αρνητικό υπόδειγμα» του ΠΔΣΟΧ.

Γενικά, ένα πρόβλημα απόφασης θεωρείται ευκολότερο από το αντίστοιχο πρωτότυπο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για αυτό το λόγο η υπολογιστική δυσκολία ενός προβλήματος απόφασης υποδηλώνει και την υπολογιστική δυσκολία για το πρωτότυπο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η θεωρία της NP-Πληρότητας παρέχει ισχυρά αποδεικτικά στοιχεία του γεγονότος ότι η υπολογιστική δυσκολία μεγάλου αριθμού προβλημάτων απόφασης συνεπάγεται την εμφάνιση υπολογιστικών δυσκολιών στα αντίστοιχα προβλήματα βελτιστοποίησης.

Ένας αλγόριθμος αποτελεί μία πεπερασμένη ακολουθία σαφώς καθορισμένων βημάτων (επιτρέπεται το πολύ μια επόμενη κίνηση σε κάθε βήμα υπολογισμού). Οι αλγόριθμοι με την προφανή αυτή ιδιότητα ονομάζονται αιτιοκρατικοί (deterministic) αλγόριθμοι. Θα μπορούσε όμως να αγνοηθεί αυτή η ιδιότητα, ότι δηλαδή σε κάθε βήμα επιτρέπεται μία και μόνο επόμενη κίνηση, και να ορισθεί ως αλγόριθμος, ένα θεωρητικό (ουτοπικό) εργαλείο με εντολές μη σαφώς καθορισμένες, το οποίο να έδινε το αποτέλεσμα μιας εντολής, βρίσκοντας τη σωστή επιλογή μεταξύ πολλών επιλογών από το πεπερασμένο σύνολο. Η ουτοπική αυτή κατάσταση θα γινόταν εφικτή χρησιμοποιώντας την παρακάτω πρακτικά ανέφικτη εντολή, go to label 1, label 2.



Εικόνα 2-3: Τρόπος λειτουργίας μη-αιτιοκρατικού πολυωνυμικού αλγόριθμου.

Αυτή η εντολή δηλαδή θα διαχώριζε τον υπολογισμό σε δύο παράλληλες κινήσεις εντός ενός βήματος πάνω στο ίδιο επεξεργαστή, επιτρέποντας να λυθούν «δυσχείριστα» (intractable) προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχει στην πραγματικότητα χρόνο- πολυωνυμικός αλγόριθμος επίλυσης. Οι αλγόριθμοι αυτοί ονομάζονται μη-αιτιοκρατικοί πολυωνυμικοί αλγόριθμοι.

Ένα πρόβλημα απόφασης ανήκει στη κλάση P όταν μπορεί να επιλυθεί από ένα αιτιοκρατικό χρόνο-πολυωνυμικό αλγόριθμο. Στην περίπτωση που ο χρόνο-πολυωνυμικός αλγόριθμος είναι μη-αιτιοκρατικός τότε το πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κλάση NP. Από τους ορισμούς προκύπτει ότι $P \subseteq NP$. Αντιθέτως, δεν έχει αποδειχθεί μέχρι σήμερα ούτε ότι τα προβλήματα της κλάσης NP επιλύονται, ούτε ότι δεν επιλύονται από αιτιοκρατικούς πολυωνυμικούς αλγορίθμους, με αποτέλεσμα να μην γνωρίζουμε αν $NP \subseteq P$, δηλαδή αν P = NP ή P ≠ NP.

Ένα βασικό εργαλείο για το συσχετισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των διαφόρων προβλημάτων αποτελούν οι πολυωνυμικές αναγωγές (reductions) και οι μετασχηματισμοί (transformations). Συγκεκριμένα, ένα πρόβλημα A ανάγεται σε ένα πρόβλημα B σε πολυωνυμικό χρόνο, εάν και μόνο εάν

• υπάρχει ένας αλγόριθμος για το A που χρησιμοποιεί μια υπορουτίνα για να επιλυθεί το B

και

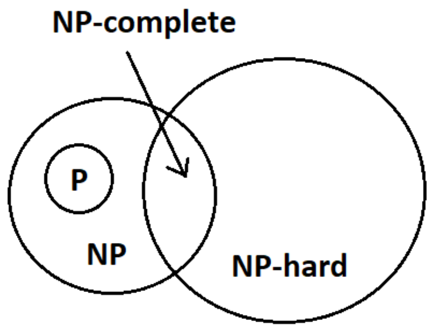
• η υπορουτίνα για να επιλυθεί το B μπορεί να καλεστεί το πολύ ένα αριθμό φορών που φράσσεται από ένα πολυώνυμο και

• ο αλγόριθμος επίλυσης του A εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Η πρακτική συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι εάν το πρόβλημα A ανάγεται πολυωνυμικώς σε ένα πρόβλημα B και υπάρχει ένας χρόνο-πολυωνυμικός αλγόριθμος για την επίλυση του B, τότε υπάρχει ομοίως και ένας χρόνο-πολυωνυμικός αλγόριθμος για το A. Μία ειδική περίπτωση πολυωνυμικής αναγωγής έχει την ακόλουθη μορφή: Ο αλγόριθμος επίλυσης του A κατασκευάζει αρχικώς την είσοδο (input) για την υποθετική υπορουτίνα επίλυσης του B σε πολυωνυμικό χρόνο, στη συνέχεια την καλεί μία φορά και τελικά επιστρέφει την απάντηση ως δική του. Αναγωγές αυτού του είδους ονομάζονται πολυωνυμικοί μετασχηματισμοί.

Ένα πρόβλημα απόφασης είναι NP-δύσκολο (NP-hard) όταν όλα τα προβλήματα που ανήκουν στην τάξη NP μετασχηματίζονται πολυωνυμικώς σε αυτό, ενώ δεν είναι δυνατό να αποδειχτεί ότι ανήκει στην κλάση NP. Ένα πρόβλημα απόφασης είναι NP-πλήρες (NP-complete) όταν ανήκει στην κλάση NP και είναι NP-δύσκολο.

Λαμβάνοντας υπ' όψη τους ορισμούς της πολυωνυμικής αναγωγής και του προβλήματος που χαρακτηρίζεται ως NP-δύσκολο, εξάγεται το συμπέρασμα ότι, εάν ένα NP-δύσκολο πρόβλημα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο τότε μπορούν όλα τα προβλήματα που ανήκουν στην τάξη NP.



Εικόνα 2-4: Σχέσεις των κλάσεων P, NP, NP-hard, και NP-complete.

Θα πρέπει να ειπωθεί ότι ο όρος NP-δύσκολο χρησιμοποιείται επίσης στη βιβλιογραφία για να περιγράφει τα προβλήματα βελτιστοποίησης, για κάθε ένα από τα οποία το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι NP-πλήρες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ΠΔΣΟΧ, όπου το πρόβλημα απόφασης είναι NP-πλήρες, γι' αυτό το αντίστοιχο πρόβλημα της βελτιστοποίησης αναφέρεται παντού στη βιβλιογραφία ως NP-δύσκολο.

Δεδομένης συνεπώς της δυσκολίας επίλυσης των NP-δύσκολων προβλημάτων βελτιστοποίησης, πλήθος ερευνητών εστίασαν την προσοχή τους στην ανάπτυξη αλγορίθμων οι οποίοι πέτυχαν την εύρεση καλών λύσεων μέσα σε λογικά χρονικά διαστήματα, χωρίς ωστόσο να μπορούν να εγγυηθούν την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Οι αλγόριθμοι αυτοί ονομάστηκαν ευρετικοί αλγόριθμοι ή ευρετικοί μέθοδοι ή απλά ευρετικοί (heuristics).

(Χ. Ταραντίλης, 2002)

2.7 Ακριβείς, Ευρετικοί και Μεθευρετικοί αλγόριθμοι

Οι ακριβείς αλγόριθμοι, δίνουν τη δυνατότητα να εντοπιστεί η βέλτιστη λύση του προβλήματος κάτι που δεν εξασφαλίζεται με τις άλλες κατηγορίες αλγορίθμων. Στην ουσία εξετάζουν το σύνολο των εφικτών λύσεων και γίνεται ο υπολογισμός της αντικειμενικής συνάρτησης ώστε να εντοπιστεί η βέλτιστη λύση. Τεχνικές μείωσης του χώρου των εφικτών λύσεων χρησιμοποιούνται ώστε να επιταχύνουν και να ολοκληρώσουν τη διαδικασία. Σύμφωνα με τη μέθοδο Cutting Plane μειώνεται ο χώρος των εφικτών λύσεων κάνοντας χρήση γραμμικών ανισοτήτων. Μια άλλη πολύ διαδεδομένη μέθοδος είναι η μέθοδος κλάδου και φραγής (Branch & Bound) που λειτουργεί σε δύο φάσεις, στην πρώτη φάση πραγματοποιείται τμηματοποίηση του χώρου των υποψήφιων – εφικτών λύσεων ενώ στη δεύτερη υπολογίζονται τα ανώτατα και κατώτατα όρια των τμημάτων αυτών. Η επίλυση βασίζεται στην παραδοχή ότι αν το κατώτερο όριο ενός συνόλου είναι μεγαλύτερο από το ανώτερο όριο του άλλου τότε μπορεί κανείς με ασφάλεια να αγνοήσει το πρώτο σύνολο. Η φάση αυτή καλείται «κλάδεμα». Η μέθοδος αυτή αποτέλεσε και τη βάση για πολλές ευρετικές διαδικασίες που έχουν προταθεί. Επεκτάσεις αυτών είναι και η Branch & Cut καθώς και η Branch & Price, άλλα και άλλες. Το μεγάλο μειονέκτημα των αλγορίθμων αυτών είναι ότι ανταποκρίνονται σε προβλήματα μικρού μεγέθους και δεν είναι εφαρμόσιμα για δίκτυα που αποτελούνται από περισσότερους από 50 κόμβους. Από την άλλη το πρόβλημα της δρομολόγησης έχει εφαρμογή σε μεγάλη γκάμα προβλημάτων και γι αυτό η επιστημονική κοινότητα έστρεψε το ενδιαφέρον της στο να αναπτύξει μεθόδους που θα προσεγγίζουν τη βέλτιστη λύση σε πολύ μικρό χρόνο, τις λεγόμενες ευρετικές μεθόδους.

Οι ευρετικές μέθοδοι διεξάγουν μια σχετικά περιορισμένη έρευνα του χώρου των λύσεων με αποτέλεσμα να μπορούν να επιλύουν (συνήθως όχι με βέλτιστο τρόπο) μεγάλης κλίμακας εφαρμογές του ΠΔΣΟ εντός πολύ λογικού υπολογιστικού χρόνου. Η περιορισμένη έρευνα των ευρετικών στο χώρο των λύσεων διεξάγεται βάση μιας σειράς κανόνων μέσω των οποίων επιχειρείται οι λύσεις που προκύπτουν σε κάθε επανάληψη να φέρουν όσο το δυνατό περισσότερο τα γενικά χαρακτηριστικά μιας καλής ποιότητας λύσεως του υπό εξέταση προβλήματος.

Οι μεθευρετικοί αλγόριθμοι άρχισαν να αναπτύσσονται τα τελευταία 25 χρόνια και το πρόθεμα «μετά» δηλώνει ότι αποτελούν μία υψηλότερου επιπέδου γενιά ευρετικών σε σχέση με τους προαναφερθέντες κλασικούς ευρετικούς. Μπορούμε να πούμε ότι οι μεθευρετικοί αποτελούν υψηλού επιπέδου διαδικασίες οι οποίες καθοδηγούν και τροποποιούν τη λειτουργία υποδεέστερων ευρετικών χρησιμοποιώντας διαφορετικών ειδών στρατηγικές. Αυτές οι στρατηγικές εφαρμόζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται μία δυναμική ισορροποία ανάμεσα στην αξιοποίηση του χώρου των λύσεων. Η επίτευξη αυτής της ισορροπίας έχει ως αποτέλεσμα αφενός τον άμεσο προσδιορισμό των περιοχών με υψηλής ποιότητας λύσεις και αφετέρου την αποφυγή της σπατάλης χρόνου σε περιοχές που είτε έχουν ήδη εξερευνηθεί είτε δε παρέχουν υψηλής ποιότητας λύσεις. Η χρήση αυτών των στρατηγικών έχει ως στόχο την καθοδήγηση της έρευνας εκτός των τοπικών ελαχίστων χαμηλής ποιότητας και αποτελεί τη βασική διαφορά των μεθευρετικών σε σχέση με τους κλασικούς ευρετικούς αλγορίθμους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μελέτη Περίπτωσης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το πραγματικό πρόβλημα δρομολόγησης που μελετήθηκε σε αυτή τη διπλωματική, η μαθηματική του μοντελοποίηση, ο τρόπος επίλυσης του καθώς και τα αποτελέσματα.

3.1 Περιγραφή Προβλήματος

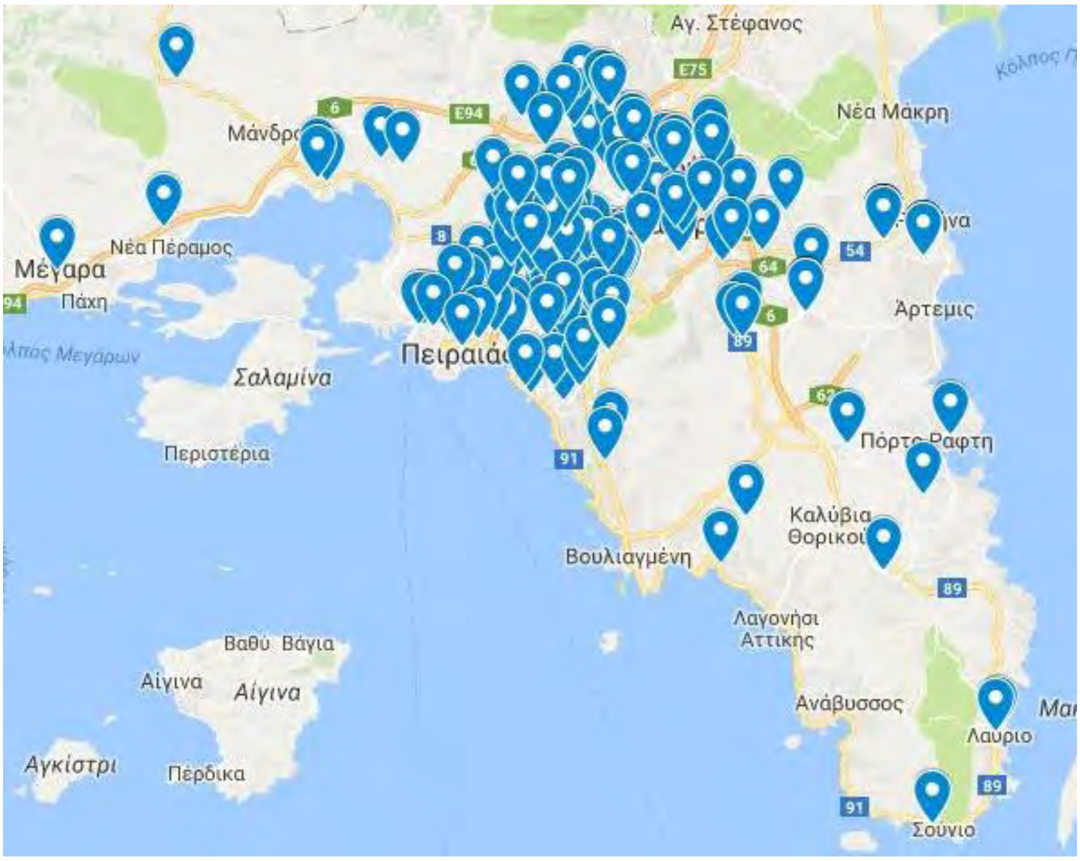
Το ΠΔΣΟ το οποίο θα μελετηθεί είναι ένα Πολυαντικειμενικό Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων με Περιορισμένη Χωρητικότητα και Ετερογενή Στόλο. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όλοι οι πελάτες πρέπει να εξυπηρετηθούν και οι ζητήσεις τους είναι γνωστές εκ των προτέρων. Η βάση των οχημάτων είναι μία ενιαία κεντρική αποθήκη και η χωρητικότητά του κάθε οχήματος είναι γνωστή. Το ζητούμενο είναι η εύρεση των βέλτιστων διαδρομών οι οποίες να ελαχιστοποιούν συγκεκριμένες παραμέτρους ανάλογα με το σκοπό που θέτουμε κάθε φορά. Οι παράμετροι αυτοί είναι η συνολική διανυθείσα απόσταση, ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων φορτηγών, ο αριθμός των φορτηγών με υψηλό συντελεστή προτίμησης, το κενό φορτίο εκκίνησης ως προς το βάρος και τον όγκο, η εκπομπή ρύπων ανά μονάδα απόστασης και τα τονοχιλιόμετρα.

3.2 Δεδομένα

Τα δεδομένα του προβλήματος παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Αποθήκη	1 αποθήκη. Γεωγραφικές συντεταγμένες αποθήκης. Αποστάσεις μεταξύ αποθήκης-πελατών. Χρόνοι μετάβασης μεταξύ αποθήκης-πελατών. Μέση ταχύτητα μετάβασης μεταξύ αποθήκης-πελατών. Εκπομπή ρύπων ανά μονάδα απόστασης λόγω μετάβασης μεταξύ αποθήκης-πελατών.
Πελάτες	171 πελάτες. Γεωγραφικές συντεταγμένες πελατών. Αποστάσεις μεταξύ πελατών. Χρόνοι μετάβασης μεταξύ πελατών. Ζήτηση πελατών εκφρασμένη σε βάρος και όγκο. Χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη. Μέση ταχύτητα μετάβασης μεταξύ πελατών. Εκπομπή ρύπων ανά μονάδα απόστασης λόγω μετάβασης μεταξύ πελατών.
Οχήματα	105 φορτηγά . Χωρητικότητα σε βάρος και σε όγκο. Συντελεστής Προτίμησης (Σημειώνεται ότι οι συντελεστές είναι 1, 2, 3, 4, 5 και προτιμώνται φορτηγά με χαμηλό συντελεστή προτίμησης)

Πίνακας 3-1: Δεδομένα προβλήματος.



Εικόνα 3-1: Οι θέσεις των πελατών απεικονιζόμενες σε χάρτη.

3.3 Μαθηματική Μοντελοποίηση

Σύνολα

- Σύνολο κόμβων: **N** = {0, 1, 2, …, N}, όπου ο κόμβος 0 αντιπροσωπεύει την αποθήκη και οι κόμβοι 1, 2, ..., N αντιπροσωπεύουν τους πελάτες.
- Σύνολο φορτηγών: **K** = {1, 2, …, K}

Δείκτες

- Πελάτες: i, j, h ∊ **N** – {0}
- Αποθήκη: i, j =0
- Φορτηγά: k ∊ **K**

Δεδομένα

Οι παρακάτω μεταβλητές αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα του προβλήματος συναρτήσει των παραπάνω δεικτών.

Μεταβλητή	**Περιγραφή**
D_{ij}	Αποστάσεις μεταξύ των πελατών και μεταξύ πελατών-αποθήκης
T_{ij}	Χρόνος μετάβασης μεταξύ των πελατών και μεταξύ πελατών-αποθήκης
DM_j	Ζήτηση του πελάτη j σε βάρος
DV_j	Ζήτηση του πελάτη j σε όγκο
CM_k	Χωρητικότητα του φορτηγού k σε βάρος
CV_k	Χωρητικότητα του φορτηγού k σε όγκο
PR_k	Συντελεστής προτίμησης φορτηγού k
TD_j	Χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη j
V_{ij}	Μέση ταχύτητα μετάβασης από τον πελάτη i στον πελάτη j
FC_{ij}	Εκπεμπόμενοι ρύποι ανά μονάδα απόστασης λόγω της μετάβασης από τον πελάτη i στον πελάτη j
M	Ένας μεγάλος αριθμός.

Πίνακας 3-2: Δεδομένα προβλήματος συναρτήσει δεικτών.

Για τον υπολογισμό των ρύπων ανά μονάδα απόστασης που εκπέμπονται λόγω μετάβασης από τον πελάτη i τον πελάτη j χρησιμοποιήθηκε μία συνάρτηση για την κατανάλωση καυσίμου από το λογισμικό COPERT. Το COPERT είναι ένα λογισμικό εργαλείο που χρησιμοποιείται παγκοσμίως για τον υπολογισμό των αέριων ρύπων και των εκπομπών των αερίων που οδηγούν στο φαινόμενο του θερμοκηπίου κατά τις οδικές μεταφορές. Η ανάπτυξη του λογισμικού αυτού συντονίζεται από τον Ευρωπαϊκό Οργανισμό Περιβάλλοντος - EEA (European Environment Agency), ένας οργανισμός με βάση τη Δανία που ανήκει στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Συγκεκριμένα, έχοντας τις χιλιομετρικές αποστάσεις μεταξύ σταθμού και πελατών, καθώς και τον χρόνο μετάβασης σε ώρες μεταξύ σταθμού και πελατών, υπολογίζεται η μέση ταχύτητα V_{ij} (km/hr) των φορτηγών κατά τη μετάβασή τους από το σημείο i στο σημείο j. Ο πίνακας FC_{ij} (gr_{CO2}/km) υπολογίζεται με την κάτωθι συνάρτηση:

$$FC_{COPERT} = \frac{1.74 \times 10^{-2} + 3.64 \times 10^{-1} \times Vij + 8.74 \times 10^{-3} \times Vij^2}{1 + 6.85 \times 10^{-2} \times Vij + 2.47 \times 10^{-4} \times Vij^2}$$

Μεταβλητές Απόφασης

- Xijk Δυαδική μεταβλητή. Παίρνει την τιμή 1 αν το φορτικό k μεταβεί από τον πελάτη i στον πελάτη j, αλλιώς παίρνει την τιμή 0.

- Yijk Ακέραια μεταβλητή. Εκφράζει το βάρος του φορτίου που μεταφέρει το φορτηγό k από τον πελάτη i στον πελάτη j.
- U_i Ακέραια μεταβήτή. Βοηθητική μεταβλητή που χρησιμοποιείται στον περιορισμό εξάλειψης υποδιαδρομών.

Περιορισμοί

Το σύνολο των περιορισμών του προβλήματος ορίζει το σύνολο των εφικτών λύσεων μέσα στις οποίες περιλαμβάνεται και η βέλτιστη λύση.

1. Δεν μπορεί να γίνει μετάβαση από τον πελάτη i στον πελάτη j όταν i=j.

$$\sum_{i=0}^{N} X_{iik} = 0 \,, \forall k \in \mathbf{K}$$

2. Κάθε πελάτης να εξυπηρετηθεί ακριβώς μία φορά.

$$\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=1}^{K} X_{ijk} = 1 \,, \forall i \in \mathbf{N} - \{0\}$$

3. Κάθε φορτηγό να ξεκινάει από την αποθήκη το πολύ μία φορά.

$$\sum_{j=1}^{N} X_{0jk} \leq 1 \,, \forall k \in \mathbf{K}$$

4. Σε κάθε πελάτη το φορτηγό που θα φτάσει πρέπει και να φύγει.

$$\sum_{i=0}^{N} X_{ihk} = \sum_{j=0}^{N} X_{hjk} \,,\ \forall h \in \mathbf{N} - \{0\},\ \forall k \in \mathbf{K}$$

5α. Σε κάθε διαδρομή ενός φορτηγού k οι ζητήσεις σε βάρος που ικανοποιούνται να είναι ίσες ή μικρότερες από τη χωρητικότητα του φορτηγού σε βάρος.

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} DM_j X_{ijk} \leq CM_k \,, \forall k \in \mathbf{K}$$

5β. Σε κάθε διαδρομή ενός φορτηγού k οι ζητήσεις σε όγκο που ικανοποιούνται να είναι ίσες ή μικρότερες από τη χωρητικότητα του φορτηγού σε όγκο.

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} DV_j X_{ijk} \leq CV_k \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}$$

6. Για κάθε φορτηγό ο συνολικός χρόνος μετακίνησης και εξυπηρέτησης δεν πρέπει να ξεπερνάει τις οκτώ ώρες.

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} X_{ijk}(T_{ij} + TD_j) \leq 480 \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}$$

7. Κάθε φορτηγό k να ξεκινάει από την αποθήκη.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} X_{ijk} \leq M \sum_{h=1}^{N} X_{0hk} \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}$$

8. Εξάλειψη υποδιαδρομών (Miller, Tucker, Zemlin 1960).

$$U_i - U_j + (N-1)X_{ijk} \leq N-2 \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}, \forall i, j \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Οι επόμενοι περιορισμοί αφορούν μόνο το πρόβλημα το οποίο έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση των τονοχιλιομέτρων.

9. Κάθε φορτηγό k να επιστρέφει στην αφετηρία με μηδενικό φορτίο.

$$\sum_{i=0}^{N} Y_{i0k} = 0 \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}$$

10. Εάν ένα φορτηγό k δε μεταβεί από τον πελάτη i στον πελάτη j, τότε το φορτίο από το i στο j για το φορτηγό είναι μηδενικό, διαφορετικά πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο από τη χωρητικότητά του σε βάρος.

$$Y_{ijk} \leq CM \times X_{ijk}, \forall i \in \mathbf{N}, \forall j \in \mathbf{N} \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}$$

11. Κάθε φορτηγό k κατά την εκκίνησή του πρέπει να έχει φορτίο ίσο με τη ζήτηση που θα εξυπηρετήσει.

$$\sum_{j=1}^{N} Y_{0jk} = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_{ijk} \times DM_j \text{ , } \forall k \in \mathbf{K}$$

12. Το φορτίο ενός φορτηγού k κατά την άφιξη του σε ένα πελάτη είναι ίσο με το άθροισμα της ζήτησης σε βάρος του πελάτη που εξυπηρετεί εκείνη τη στιγμή και των πελατών που πρόκειται να εξυπηρετήσει στη συνέχεια.

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Y_{ijk}} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} \mathrm{Y_{jik}} - \mathrm{DM_j} \quad , \forall \mathrm{j} \in \mathbf{N} - \{0\}$$

Αντικειμενικές Συναρτήσεις

Οι παραπάνω από ένας στόχοι της δρομολόγησης του προβλήματος που εξετάζεται δημιουργούν την ανάγκη για παραπάνω από μία αντικειμενικές συναρτήσεις οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

1. Ελαχιστοποίηση Απόστασης.

$$\mathrm{Min} \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} (\mathrm{D_{ij}} \times \mathrm{X_{ijk}})$$

2. Ελαχιστοποίηση αριθμού φορτηγών.

$$\mathrm{Min} \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{X_{0jk}}$$

3. Ελαχιστοποίηση φορτηγών με υψηλό συντελεστή προτίμησης.

$$\mathrm{Min} \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} (PR_{\mathrm{k}} \times \mathrm{X_{ijk}})$$

4α. Ελαχιστοποίηση κενού φορτίου εκκίνησης ως προς το βάρος.

$$\mathrm{Min} \{\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} (CM_{\mathrm{k}} \times \mathrm{X_{0jk}}) - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} (DM_{\mathrm{j}} \times \mathrm{X_{ijk}})\}$$

4β. Ελαχιστοποίηση κενού φορτίου εκκίνησης ως προς τον όγκο.

$$\mathrm{Min} \{\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} (CV_{\mathrm{k}} \times \mathrm{X_{0jk}}) - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K} (DV_{\mathrm{j}} \times \mathrm{X_{ijk}})\}$$

5. Ελαχιστοποίηση εκπομπής ρύπων.

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K}(FC_{ij} \times X_{ijk})$$

6. Ελαχιστοποίηση τονοχιλιομέτρων.

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=1}^{K}(D_{ij} \times Y_{ijk})$$

3.4 Τρόπος επίλυσης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα ΠΔΣΟ παρουσιάζουν εκθετική πολυπλοκότητα με αποτέλεσμα το πρόβλημα των 171 να είναι αδύνατο να επιλυθεί με ακριβή τρόπο εντός λογικού υπολογιστικού χρόνου. Επομένως για την επίλυσή του επιλέχθηκε μία ευρετική μέθοδος ομαδοποίησης αρχικώς-δρομολόγησης δευτερευόντως. Το σύνολο των πελατών διαιρείται σε 16 ομάδες με τον αλγόριθμο k-means. Το σύνολο των φορτηγών χωρίζεται επίσης σε αντίστοιχο αριθμό ομάδων οι οποίες αποτελούνται από φορτηγά διαφορετικής χωρητικότητας σε βάρος και όγκο και διαφορετικών συντελεστών προτίμησης. Στη συνέχεια το πρόβλημα επιλεύεται με ακριβή τρόπο για κάθε ομάδα με τη βοήθεια του λύτη ILOG CPLEX.

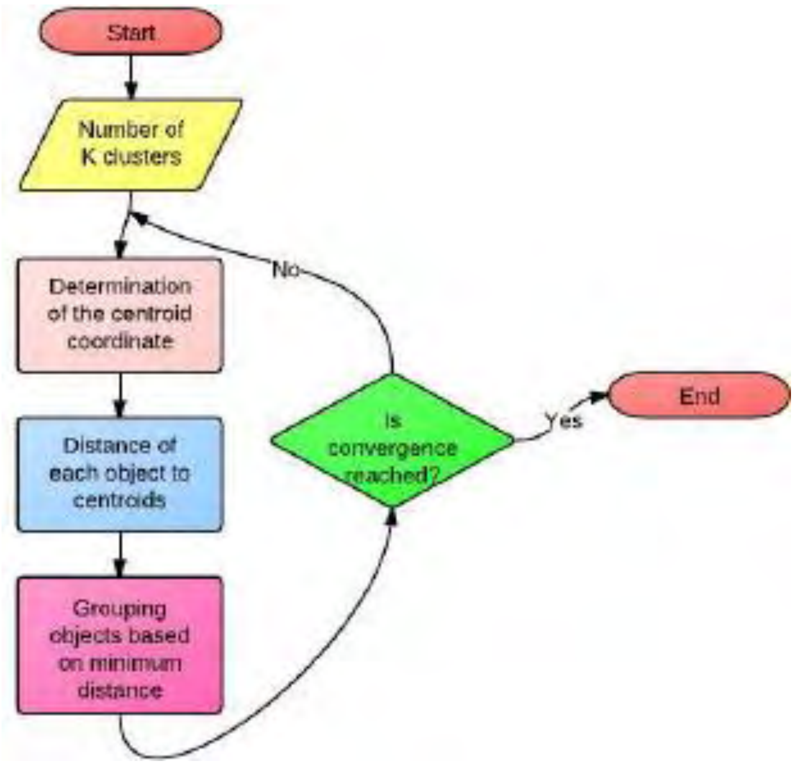
Αλγόριθμος k-means

Ο διαμεριστικός αλγόριθμος k-means (k-μέσων) είναι ένας από τους πιο απλούς και δημοφιλέστερους αλγορίθμους. Ο αλγόριθμος αυτός είναι δημοφιλής εξαιτίας της απλότητας της υλοποίησης του και της γραμμικής πολυπλοκότητας του η οποία είναι της τάξης n (**O**(n)), όπου n το σύνολο των στοιχείων. Η διαδικασία της ομαδοποίησης ενός συνόλου δεδομένων με βάση τον k-means είναι εύκολη, αρκεί να είναι εκ των προτέρων καθορισμένος ο αριθμός k των ομάδων (clusters) που θα προκύψουν. Η κύρια ιδέα είναι να προσδιοριστούν αρχικά k κεντροειδή (centroids), ένα για κάθε ομάδα. Το επόμενο βήμα είναι επιλογή κάθε στοιχείου από το σύνολο δεδομένων και συσχέτιση του με το κοντινότερο σε αυτό κεντροειδές. Όταν αυτό γίνει για όλα τα στοιχεία του συνόλου δεδομένων, το πρώτο βήμα έχει ολοκληρωθεί και μία πρώτη και «πρόχειρη» ομαδοποίηση έχει ήδη προκύψει. Στη συνέχεια, απαιτείται να υπολογιστούν ξανά k νέα κεντροειδή, τα οποία θα αποτελούν το κέντρο βάρους για κάθε ένα cluster που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα. Αφού λοιπόν οριστούν τα νέα k κεντροειδή, ακολουθεί και πάλι η ίδια διαδικασία ανάθεσης καθενός από τα στοιχεία του συνόλου δεδομένων στο κοντινότερο με αυτό, νέο πλέον, κεντροειδές. Έτσι, γίνεται μια επανάληψη της ίδιας διαδικασίας. Αποτέλεσμα αυτής της επανάληψης είναι ότι σε κάθε βήμα τα κεντροειδή αλλάζουν θέση (ορίζονται νέα) και τα στοιχεία ανατίθενται στην κατάλληλη ομάδα κάθε φορά με βάση το κοντινότερο κεντροειδές. Όταν σε κάποια επανάληψη δεν σημειωθούν αντιμεταθέσεις στοιχείων, τότε τερματίζει η εκτέλεση του αλγορίθμου. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι η ομαδοποίηση του συνόλου δεδομένων σε k ομάδες.

Ο αλγόριθμος στοχεύει να ελαχιστοποιήσει μία αντικειμενική συνάρτηση, την λεγόμενη συνάρτηση τετραγωνικού λάθους που ορίζεται ως εξής:

$$J = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left|x_i - c_j\right|^2$$

, όπου, $\left|x_i - c_j\right|^2$,είναι ένα μέτρο απόστασης που χρησιμοποιείται για να μετρά την απόσταση κάθε στοιχείου x_i από το κεντροειδές c_j του κάθε cluster.



Εικόνα 3-2: Τρόπος λειτουργίας αλγορίθμου k-means.

Η γλώσσα προγραμματισμού που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση του αλγορίθμου k-means είναι η C++. Χρησιμοποιώντας ως δεδομένα τις γεωγραφικές συντεταγμένες των πελατών και ορίζοντας ως αριθμό ομάδων, k, δεκαέξι ομάδες προέκυψε η ομαδοποίηση που παρουσιάζεται στην εικόνα 3-3, όπου οι πελάτες διαφορετικών clusters απεικονίζονται με διαφορετικό χρώμα. Αναλυτικά οι πελάτες και τα οχήματα που αντιστοιχούν σε κάθε ένα από τα 16 clusters μετά την ομαδοποίηση που προκύπτει από τον αλγόριθμο k-means παρουσιάζονται στο παράρτημα Γ, όπου τα ID των πελατών αναπαρίστανται από τους ακέραιους 1 έως 171, το ID της αποθήκης από τον αριθμό 0 και τα ID των φορτηγών από τους ακεραίους 1 έως 105.

Εικόνα 3-3: Αποτέλεσμα ομαδοποίησης πελατών με τον αλγόριθμο k-means.

ILOG CPLEX

Ο λύτης ILOG CPLEX χρησιμοποιείται για την επίλυση γραμμικών, ακεραίων και δευτεροβάθμιων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ο CPLEX επιτρέπει στον χρήστη να επιλύει εύκολα προβλήματα χρησιμοποιώντας τεχνικές δημιουργίας πίνακα ή γράφοντας μοντέλα ως C++ αντικείμενα περιορισμών και μεταβλητών.

Η τεχνική που χρησιμοποιείται για τη λύση μεικτών ακέραιων προβλημάτων στηρίζεται στη μέθοδο branch-and-bound. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται από τον CPLEX Mixed Integer βελτιστοποιητή. Ο λύτης αναλύει την καταλληλότητα της κάθε τεχνικής για το κάθε μοντέλο, αποδεσμεύοντας έτσι τον χρήστη από τον καθορισμό της τεχνικής που είναι κατάλληλη για το μοντέλο του. Ένα επιπρόσθετο πολύ σημαντικό πλεονέκτημα είναι ο συνδυασμός τεχνικών για την παραγωγή αποτελεσμάτων, που δε θα μπορούσαν να παραχθούν με καμία μεμονωμένη τεχνική.

Οι τεχνικές του ILOG CPLEX που λύνουν μεικτά ακέραια προβλήματα μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν δύο τμήματα. Στο πρώτο τμήμα μειώνεται το άνω όριο και στο δεύτερο τμήμα αυξάνεται το κάτω όριο. Όταν το πάνω όριο γίνει ίσο με το κάτω όριο το πρόβλημα έχει λυθεί. Το πάνω και το κάτω όριο αποτελούν δύο σημαντικές ποσότητες που δημιουργούνται κατά τη διαδικασία της διακλάδωσης. Τα άνω όρια δημιουργούνται όταν εντοπίζονται εφικτές ακέραιες λύσεις, ενώ τα κάτω όρια παίρνοντας τη μικρότερη αντικειμενική τιμή ενός γραμμικού προβλήματος ανάμεσα σε όλους τους τρέχοντες ενεργούς κόμβους.

Κατά την επίλυση ενός μεικτού ακέραιου προβλήματος ακολουθούνται τα παρακάτω τρία στάδια:

- Node Presolve: Ο ILOG CPLEX εφαρμόζει τεχνικές μείωσης του γραμμικού προγράμματος, πριν αρχίσει η διαδικασία της διακλάδωσης. Στο branch-and-cut δέντρο αναζήτησης εφαρμόζει τον περιορισμό του προβλήματος σε κάθε κόμβο χρησιμοποιώντας τεχνικές που ισχύουν για γενικού σκοπού μοντέλα. Ο CPLEX υλοποιεί συγκεκριμένες διαδικασίες σε κάθε κόμβο στον οποίο τροποποιεί τα όρια, έτσι ώστε να μην δημιουργήσει αλλαγές που επηρεάζουν τον πίνακα των περιορισμών. Οι δύο βασικές διαδικασίες που χρησιμοποιούνται είναι η bound-strengthening και η coefficient reduction.
- Node Heuristics: Χρησιμοποιούνται για την εύρεση εφικτών ακέραιων λύσεων. Έχοντας μία καλή ακέραια λύση όσο γίνεται νωρίτερα διευκολύνεται η συνολική διαδικασία του branch-and-cut. Μία καλή ακέραια λύση μειώνει το πλήθος των κόμβων που θα προσπελαστούν και επιταχύνει τη διαδικασία των ανεξάρτητων κόμβων παρέχοντας μία διαδικασία objective-cutoff για τον δυικό αλγόριθμο simplex. Στον CPLEX υλοποιείται μία πληθώρα ευρετικών. Η κάθε τεχνική εφαρμόζεται στη ρίζα και οι επιτυχημένες εφαρμόζονται περιοδικά στο δέντρο αναζήτησης.
- Cutting Planes: Διευκολύνουν τη διαδικασία branch-and-bound προσθέτοντας περιορισμούς που κόβουν μη ακέραιες λύσεις αυξάνοντας έτσι το κατώτερο όριο και διευκολύνοντας τη βελτιστότητα. Ο CPLEX επιτρέπει την υλοποίηση ενός πλήθους διαφορετικών ειδών cutting planes, το καθένα με τις δικές του ιδιαιτερότητες για το πότε και πόσο συχνά εφαρμόζεται.

3.5 Αποτελέσματα

Παρουσίαση αποτελεσμάτων ενός Cluster

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ILOG CPLEX που προέκυψαν έπειτα από την υλοποίηση του αλγορίθμου για τους πελάτες και τα φορτηγά που ανήκουν στο Cluster 14 (Πίνακας 3-3). Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για κάθε αντικειμενική συνάρτηση απεικονίζονται με τη μορφή διαδρομών σε χάρτες (Εικόνες 3-4 μέχρι 3-10). Παράλληλα υπολογίστηκαν για κάθε αντικειμενική συνάρτηση οι τιμές όλων των παραμέτρων οι οποίες ελαχιστοποιούνται στις υπόλοιπες αντικειμενικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, όταν ελαχιστοποιείται η συνολική διανυθείσα απόσταση εκτός από τα συνολικά χιλιόμετρα υπολογίζονται και οι τιμές των εκπεμπόμενων ρύπων, των τονοχιλιομέτρων, του κενού φορτίου και των υπόλοιπων παραμέτρων οι οποίες προκύπτουν με βάση τη διαδρομή που ελαχιστοποιεί την απόσταση. Οι πίνακες με τα αποτελέσματα των υπόλοιπων Clusters ,οι αντίστοιχοι με τον Πίνακα 3-3, βρίσκονται στο παράρτημα Δ.

CLUSTER 14			
Αντικειμενική 1	Αντικειμενική 2	Αντικειμενική 3	Αντικειμενική 4α
Solution Status= Optimal Solution Value= 40,328 Xijk(0,8,2)=1 Xijk(1,2,2)=1 Xijk(2,6,2)=1 Xijk(3,7,2)=1 Xijk(4,3,2)=1 Xijk(5,4,2)=1 Xijk(6,9,2)=1 Xijk(7,1,2)=1 Xijk(8,5,2)=1 Xijk(9,0,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,1,1)=1 Xijk(1,3,1)=1 Xijk(2,5,1)=1 Xijk(3,6,1)=1 Xijk(4,2,1)=1 Xijk(5,9,1)=1 Xijk(6,4,1)=1 Xijk(7,8,1)=1 Xijk(8,0,1)=1 Xijk(9,7,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,1,6)=1 Xijk(1,8,6)=1 Xijk(2,3,6)=1 Xijk(3,4,6)=1 Xijk(4,7,6)=1 Xijk(5,2,6)=1 Xijk(6,9,6)=1 Xijk(7,6,6)=1 Xijk(8,5,6)=1 Xijk(9,0,6)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 99 Xijk(0,7,0)=1 Xijk(1,0,0)=1 Xijk(2,5,0)=1 Xijk(3,6,0)=1 Xijk(4,8,0)=1 Xijk(5,3,0)=1 Xijk(6,4,0)=1 Xijk(7,9,0)=1 Xijk(8,1,0)=1 Xijk(9,2,0)=1
Αντικειμενική 4β	Αντικειμενική 5	Αντικειμενική 6	
Solution Status= Optimal Solution Value= 79 Xijk(0,9,1)=1 Xijk(1,5,1)=1 Xijk(2,6,1)=1 Xijk(3,0,1)=1 Xijk(4,7,1)=1 Xijk(5,3,1)=1 Xijk(6,8,1)=1 Xijk(7,2,1)=1 Xijk(8,1,1)=1 Xijk(9,4,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.830,2 Xijk(0,5,0)=1 Xijk(1,2,0)=1 Xijk(2,4,0)=1 Xijk(3,7,0)=1 Xijk(4,9,0)=1 Xijk(5,3,0)=1 Xijk(6,8,0)=1 Xijk(7,1,0)=1 Xijk(8,0,0)=1 Xijk(9,6,0)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 60.719,9 Xijk(0,8,0)=1 Xijk(1,0,0)=1 Xijk(4,6,0)=1 Xijk(6,1,0)=1 Xijk(8,4,0)=1 Xijk(0,5,1)=1 Xijk(2,7,1)=1 Xijk(3,0,1)=1 Xijk(5,9,1)=1 Xijk(7,3,1)=1 Xijk(9,2,1)=1	Yijk(0,8,0)=517 Yijk(4,6,0)=301 Yijk(6,1,0)=133 Yijk(8,4,0)=389 Yijk(0,5,1)=3024 Yijk(2,7,1)=684 Yijk(5,9,1)=2814 Yijk(7,3,1)=105 Yijk(9,2,1)=856

Πίνακας 3-3: Αποτελέσματα Cluster 14.

3.5.1 Ελαχιστοποίηση Απόστασης

(Αντικειμενική συνάρτηση 1)

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 40,3 km

Φορτηγά = 1 φορτηγό (k =2, ID =58)

Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 3

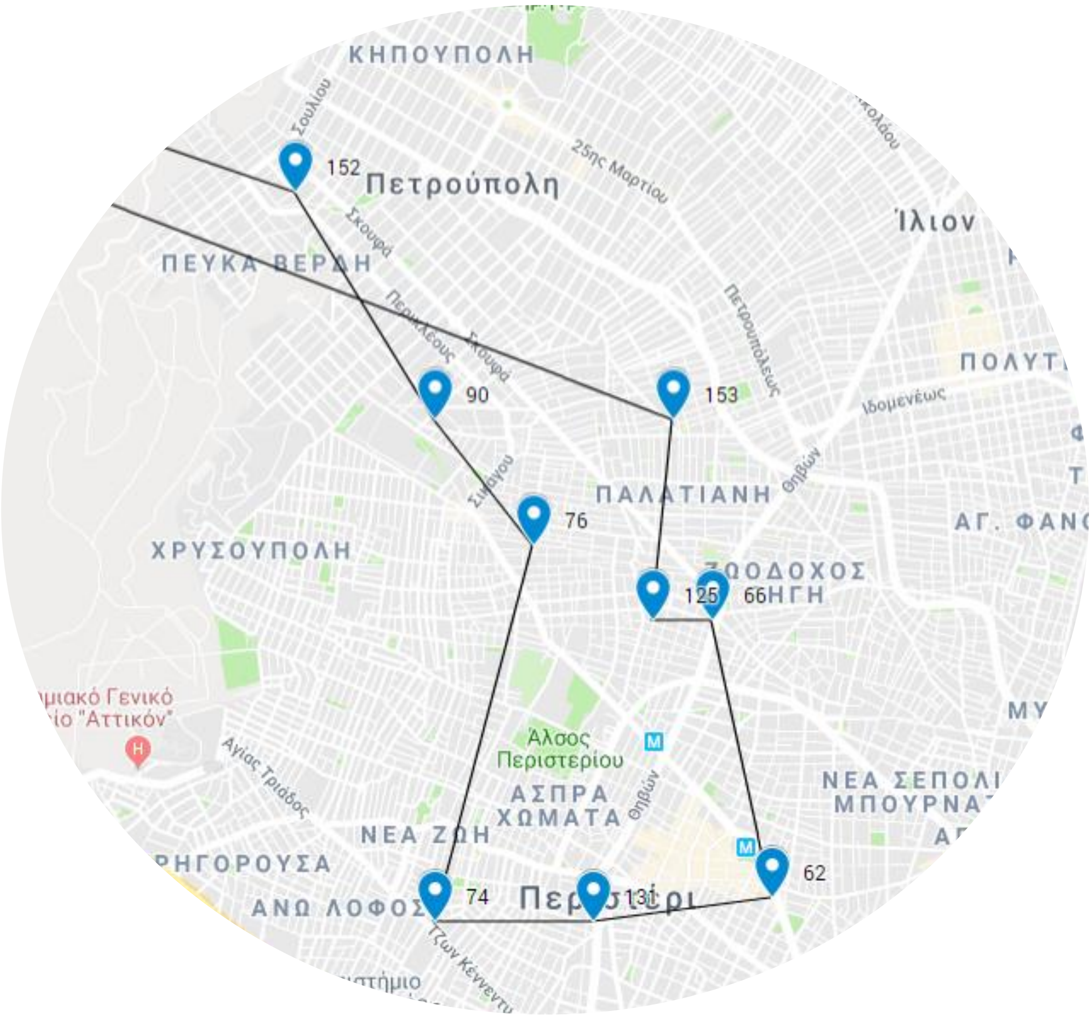
Κενό φορτίο σε βάρος = 10.159 μονάδες βάρους

Κενό φορτίο σε όγκο = 479 μονάδες όγκου

Εκπομπές ρύπων = 1.833 gr_{CO2}/km

Τονοχιλιόμετρα = 81.119 μονάδες βάρους*km

Διαδρομή : 0 > 152 > 90 > 76 > 74 > 131 > 62 > 66 > 125 > 153 > 0



Εικόνα 3-4: Ελαχιστοποίηση απόστασης (Cluster 14).

3.5.2 Ελαχιστοποίηση αριθμού φορτηγών

(Αντικειμενική συνάρτηση 2)

Φορτηγά = 1 φορτηγό (k =1, ID =65)

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 53,6 km

Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 3

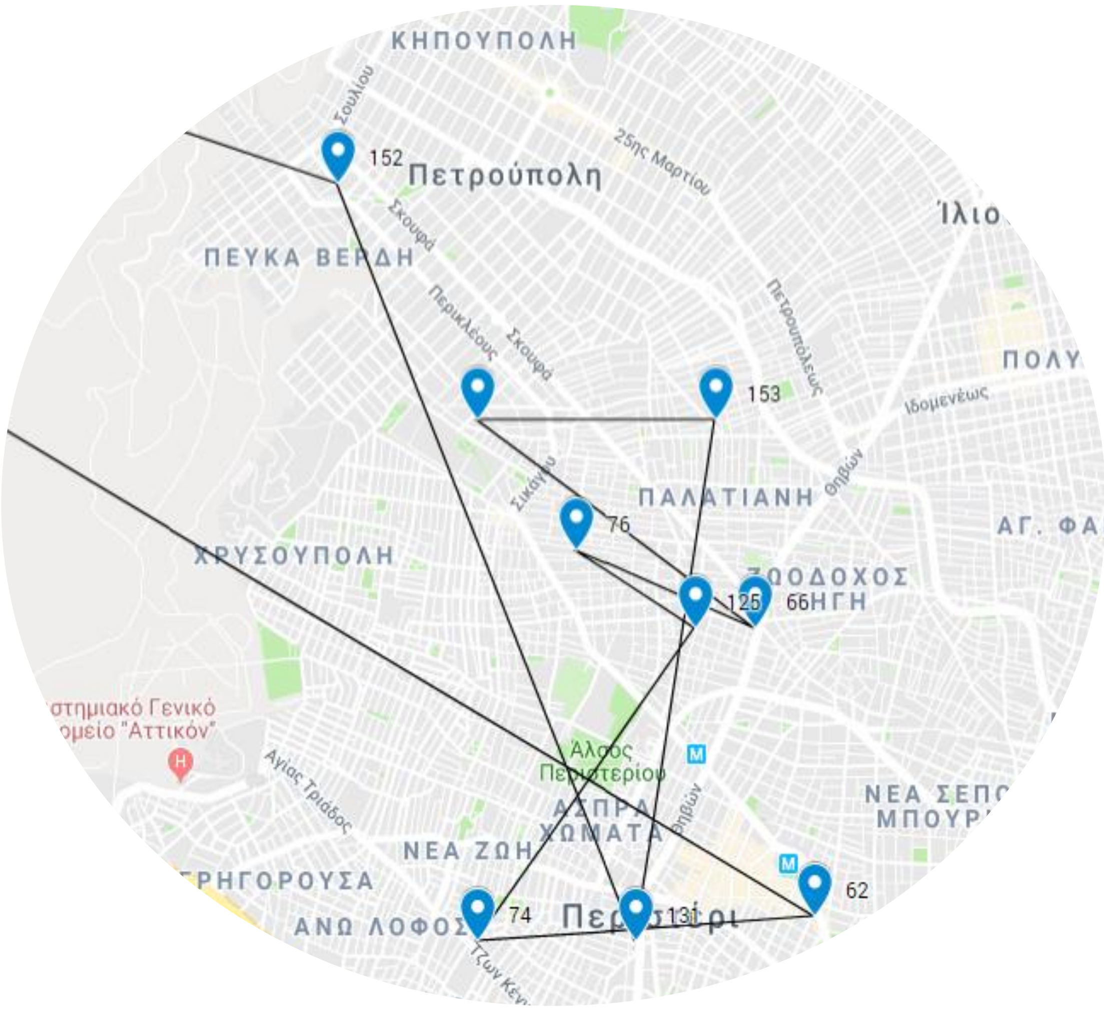
Κενό φορτίο σε βάρος = 219 μονάδες βάρους

Κενό φορτίο σε όγκο = 79 μονάδες όγκου

Εκπομπές ρύπων = 1.852 gr_{CO2}/km

Τονοχιλιόμετρα = 109.282 μονάδες βάρους*km

Διαδρομή : 0 > 62 > 74 > 125 > 76 > 66 > 90 > 153 > 131 > 152 > 0



Εικόνα 3-5: Ελαχιστοποίηση φορτηγών (Cluster 14).

3.5.3 Ελαχιστοποίηση αθροίσματος συντελεστών προτίμησης φορτηγών (Αντικειμενική συνάρτηση 3)

Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 1

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 54,3 km

Φορτηγά = 1 φορτηγό (k =6, ID =73)

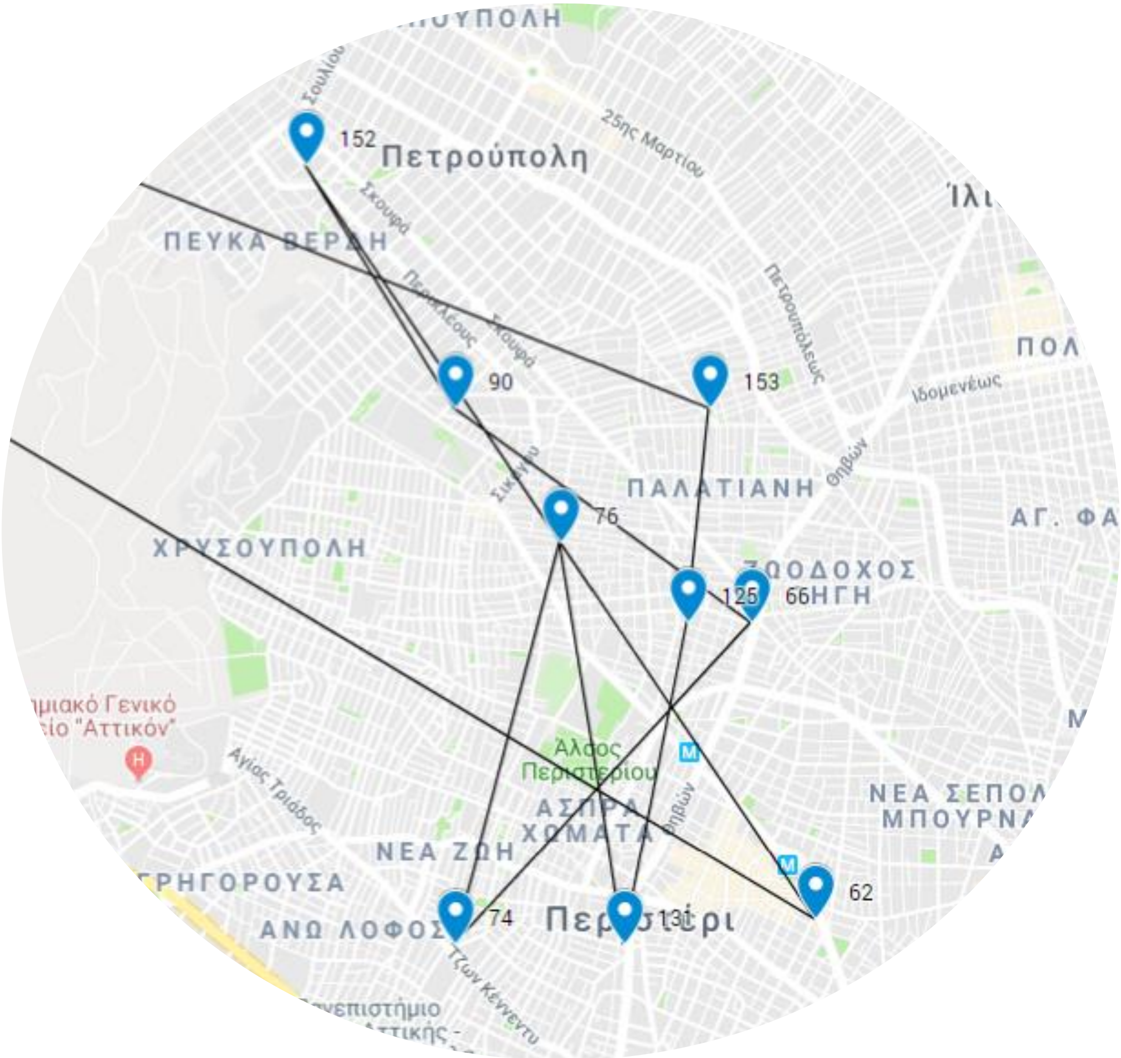
Κενό φορτίο σε βάρος = 4.799 μονάδες βάρους

Κενό φορτίο σε όγκο = 379 μονάδες όγκου

Εκπομπές ρύπων = 1.853 gr_{CO2}/km

Τονοχιλιόμετρα = 127.485 μονάδες βάρους*km

Διαδρομή : 0 > 62 > 152 > 90 > 66 > 74 > 76 > 131 > 125 > 153 > 0



Εικόνα 3-6: Ελαχιστοποίηση συντελεστών προτίμησης φορτηγών (Cluster 14).

3.5.4α Ελαχιστοποίηση κενού φορτίου σε βάρος

(Αντικειμενική συνάρτηση 4α)

Κενό φορτίο σε βάρος = 99 μονάδες βάρους

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 63,6 km

Φορτηγά = 1 φορτηγό (k =0, ID =43)

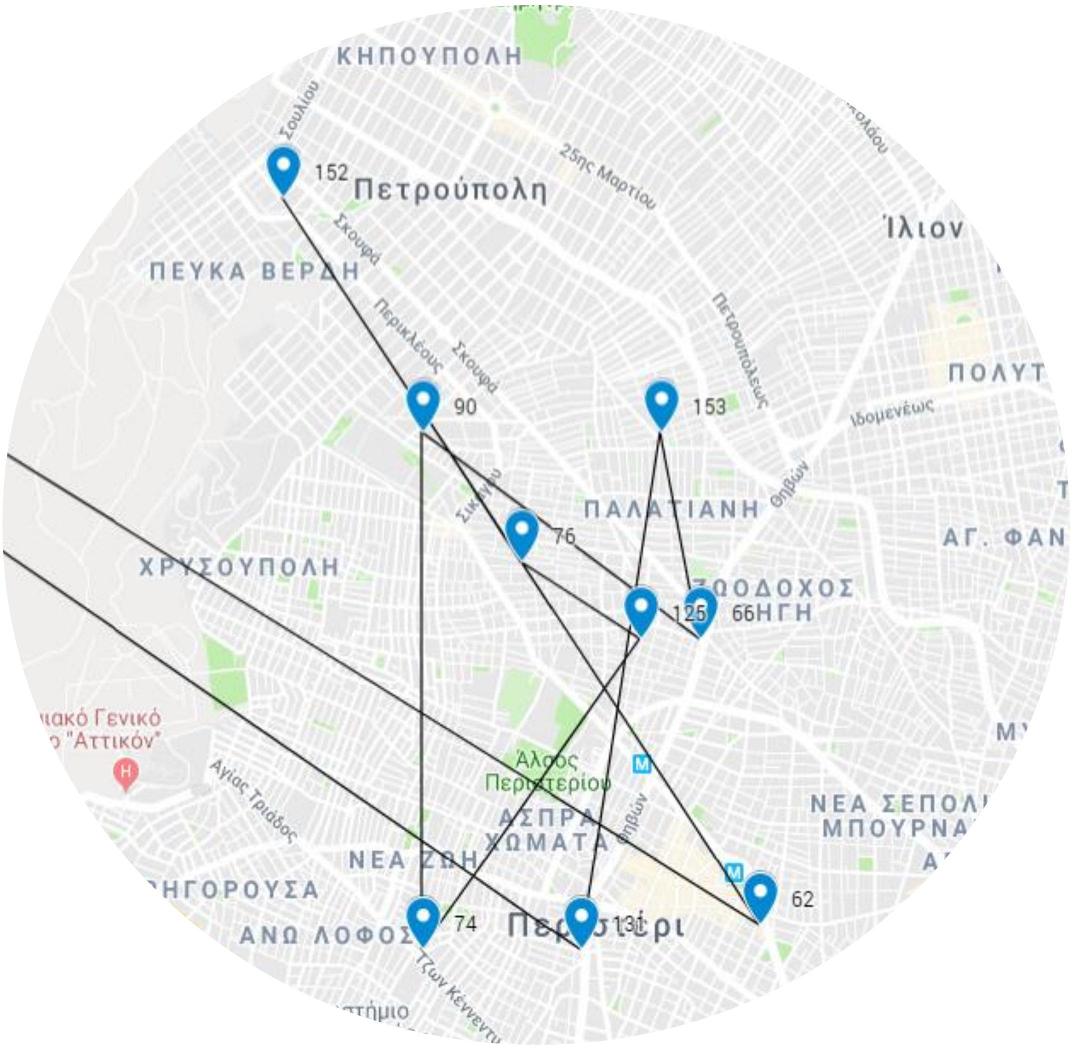
Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 4

Κενό φορτίο σε όγκο = 79 μονάδες όγκου

Εκπομπές ρύπων = 1.863 gr_{CO2}/km

Τονοχιλιόμετρα = 97.997 μονάδες βάρους*km

Διαδρομή : 0 > 131 > 153 > 66 > 90 > 74 > 125 > 76 > 152 > 62 > 0



Εικόνα 3-7: Ελαχιστοποίηση κενού φορτίου σε βάρος (Cluster 14).

3.5.4β Ελαχιστοποίηση κενού φορτίου σε όγκο

(Αντικειμενική συνάρτηση 4β)

Κενό φορτίο σε όγκο = 79 μονάδες όγκου

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 64,2 km

Φορτηγά = 1 φορτηγό (k =1, ID =65)

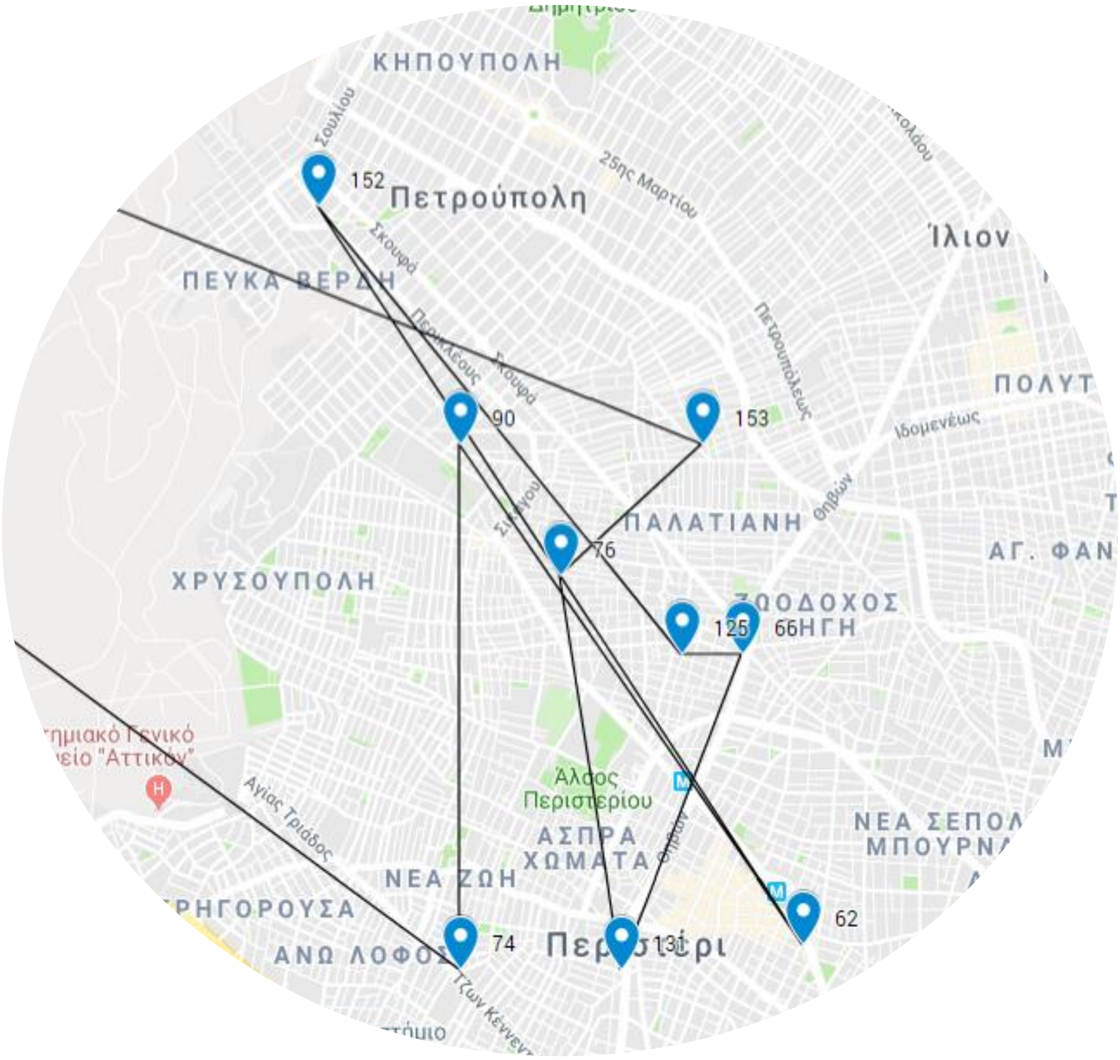
Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 3

Κενό φορτίο σε βάρος =219 μονάδες βάρους

Εκπομπές ρύπων =1.855 gr_{CO2}/km

Τονοχιλιόμετρα = 96.539 μονάδες βάρους*km

Διαδρομή : 0 > 153 > 76 > 131 > 66 > 125 > 152 > 62 > 90 > 74 > 0



Εικόνα 3-8: Ελαχιστοποίηση κενού φορτίου σε όγκο (Cluster 14).

3.5.5 Ελαχιστοποίηση εκπομπής ρύπων

(Αντικειμενική συνάρτηση 5)

Εκπομπές ρύπων =1.830 gr$_{CO2}$/km

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 64,2 km

Φορτηγά = 1 φορτηγό (k =0, ID =43)

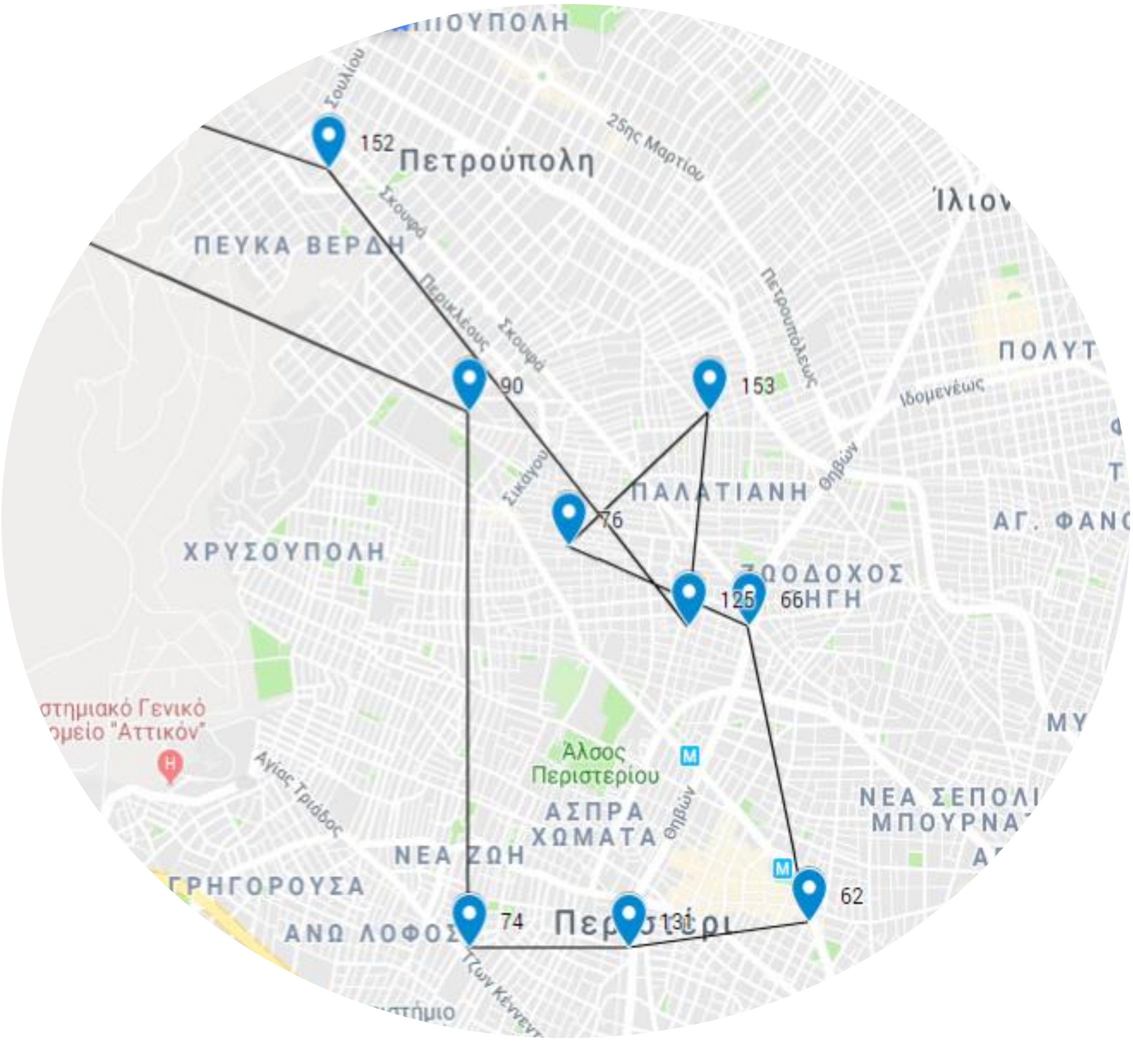
Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 4

Κενό φορτίο σε βάρος =99 μονάδες βάρους

Κενό φορτίο σε όγκο = 79 μονάδες όγκου

Τονοχιλιόμετρα = 79.306 μονάδες βάρους*km

Διαδρομή : 0 > 90 > 74 > 131 > 62 > 66 > 76 > 153 > 125 > 152 > 0



Εικόνα 3-9: Ελαχιστοποίηση εκπομπής ρύπων (Cluster 14).

3.5.6 Ελαχιστοποίηση τονοχιλιομέτρων

(Αντικειμενική συνάρτηση 6)

Τονοχιλιόμετρα = 60.719 μονάδες βάρους*km

Συνολική διανυθείσα απόσταση = 64,2 km

Φορτηγά = 2 φορτηγά (k =0, 1 ,ID =43, 65)

Άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών = 7

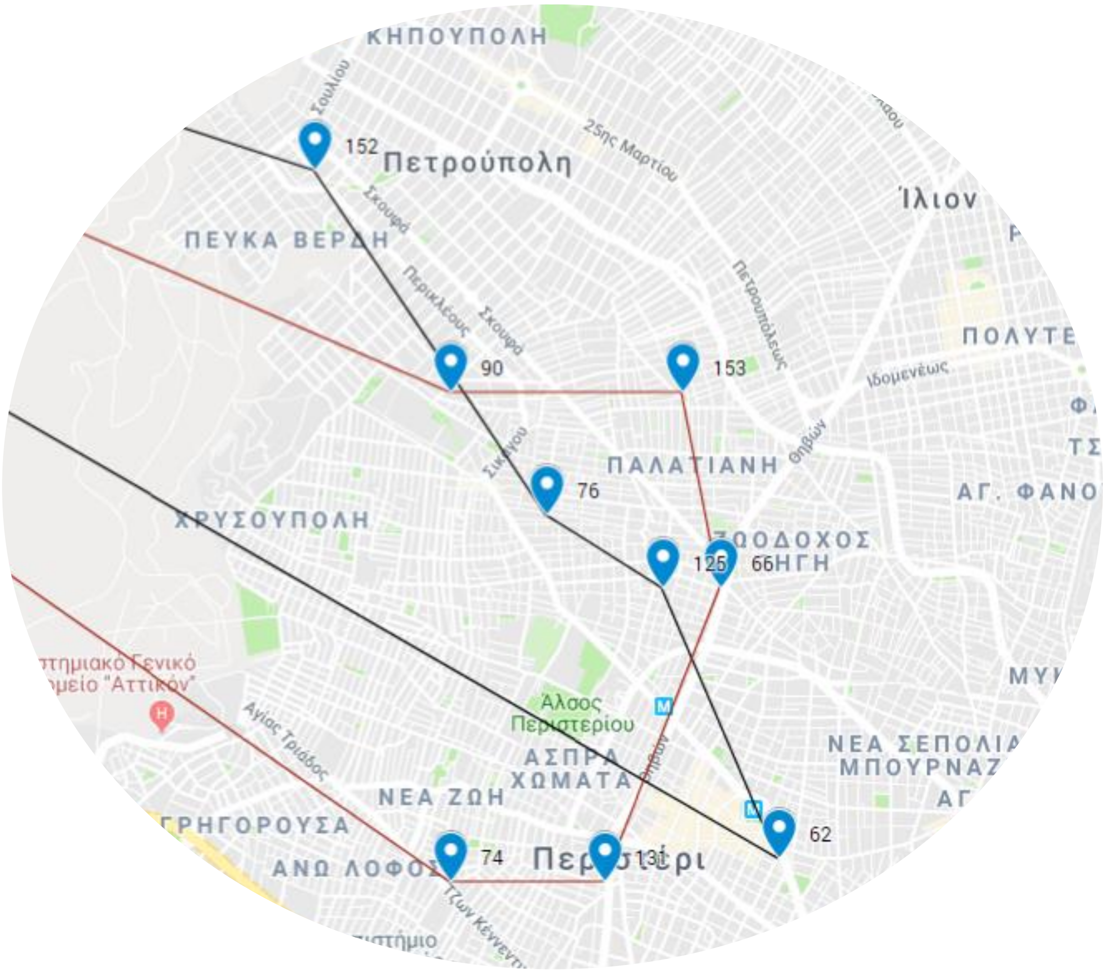
Κενό φορτίο σε βάρος =3.859 μονάδες βάρους

Κενό φορτίο σε όγκο = 379 μονάδες όγκου

Εκπομπές ρύπων =2.056 gr_{CO2}/km

Διαδρομή φορτηγού 43 : 0 > 152 > 76 > 125 > 62 > 0

Διαδρομή φορτηγού 65 : 0 > 90 > 153 > 66 > 131 > 74 > 0



Εικόνα 3-10: Ελαχιστοποίηση τονοχιλιομέτρων (Cluster 14)

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 3-4) συγκεντρώνονται οι παραπάνω τιμές. Οι τιμές δηλαδή που λαμβάνουν οι παράμετροι συνολική διανυθείσα απόσταση (km), αριθμός χρησιμοποιούμενων φορτηγών, άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών, κενό φορτίο εκκίνησης εκφρασμένο σε βάρος (μ.β.), κενό φορτίο εκκίνησης εκφρασμένο σε όγκο (μ.ό.), εκπομπές ρύπων (gr_{CO2}/km) και συνολικά τονοχιλιόμετρα (μ.β.*km) για κάθε μία αντικειμενική συνάρτηση.

Τιμές / **Min**	Διανειθ. Απόστ.	Αριθ. Φορτηγών	Άθροισμ. συντελ. Προτίμ.	Κενό φορτίο (βάρος)	Κενό φορτίο (όγκος)	Εκπομπές ρύπων	Τονο-χιλιόμετρ.
Διανειθύσα Απόσταση	**40,3**	1	3	10.159	479	1.833	81.119
Αριθ. φορτηγών	53,6	**1**	3	219	79	1.852	109.282
Αθρ.συντελ. προτίμησης	54,3	1	**1**	4.799	379	1.853	127.485
Κενό φορτίο (βάρος)	63,6	1	4	**99**	79	1.863	97.998
Κενό φορτίο (Ογκος)	64,2	1	3	219	**79**	1.855	96.539
Εκπομπές ρύπων	43,3	1	4	99	79	**1.830**	79.306
Τονο-χιλιόμετρα	85,6	2	7	3.859	379	2.056	**60.719**

Πίνακας 3-4: Τιμές παραμέτρων για κάθε αντικειμενική συνάρτηση (Cluster 14).

Αποτελέσματα συνολικού προβλήματος

Αθροίζοντας τις βέλτιστες λύσεις των 16 clusters παίρνουμε τη λύση του συνολικού προβλήματος για κάθε αντικειμενική συνάρτηση. Το συνολικό πρόβλημα αντιστοιχεί στην εξυπηρέτηση όλων των πελατών. Η λύσεις αυτές όπως έχει αναφερθεί δεν είναι βέλτιστες καθώς ο αλγόριθμος επίλυσης που οδήγησε σε αυτές είναι ευρετικός. Στον Πίνακα 3-5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν το συνολικό πρόβλημα για κάθε αντικειμενική συνάρτηση.

Ελάχιστη διανυθείσα απόσταση (km) (Αντικειμενική 1)	**1.394,3**
Ελάχιστος αριθμός χρησιμοποιούμενων φορτηγών (Αντικειμενική 2)	**20**
Ελάχιστο άθροισμα συντελεστών προτίμησης φορτηγών (Αντικειμενική 3)	**32**
Ελάχιστο κενό φορτίο σε βάρος (μονάδες βάρους) (Αντικειμενική 4α)	**79.277**
Ελάχιστο κενό φορτίο σε όγκο (μονάδες όγκου) (Αντικειμενική 4β)	**1.575**
Ελάχιστοι εκπεμπόμενοι ρύποι ανά μονάδα απόστασης (gr_{CO2}/km) (Αντικειμενική 5)	**31.816**
Ελάχιστα τονοχιλιόμετρα (μ.β.*km) (Αντικειμενική 6)	**2.050.054**

Πίνακας 3-5:Αποτελέσματα συνολικού προβλήματος για κάθε αντικειμενική.

Έχει ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς την τιμή που λαμβάνει η συνολική απόσταση όταν στόχος είναι η ελαχιστοποίηση των εκπεμπόμενων ρύπων με την ελάχιστη συνολική απόσταση. Και αντίστοιχα την τιμή που λαμβάνουν οι εκπεμπόμενοι ρύποι όταν στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της απόστασης με την τιμή των ελάχιστων εκπεμπόμενων ρύπων. Το ίδιο και για τις τιμές του κενού φορτίου σε βάρος σε σχέση με αυτές του κενού φορτίου σε όγκο όταν κάποιο από τα δύο βρίσκεται στην αντικειμενική συνάρτηση. Οι τιμές αυτές βρίσκονται στους Πίνακες 3-6 και 3-7.

Min \ Τιμές	Συνολική απόσταση	Εκπομπές ρύπων
Συνολική απόσταση	**1.394.3**	32.200
Εκπομπές ρύπων	1.640,5	**31.816**

Πίνακας 3-6: Απόσταση (km) - Εκπομπή ρύπων (gr_{CO2}/km)

Min \ Τιμές	Κενό φορτίο (βάρος)	Κενό φορτίο (όγκος)
Κενό φορτίο (βάρος)	**79.277**	2.551
Κενό φορτίο (Ογκος)	106.005	**1.575**

Πίνακας 3-7: Κενό φορτίο σε βάρος (μ.β.) – Κενό φορτίο σε όγκο (μ.ό.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Συμπεράσματα και Μελλοντικά Βήματα

Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων στην ενότητα 3.5 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα και παρατηρήσεις:

- Ο αλγόριθμος και κατ'επέκταση το μαθηματικό μοντέλο δουλεύουν σωστά, καθώς τα αποτελέσματα επαληθεύονται από τα δεδομένα και υπακούουν σε όλους τους περιορισμούς. Ακόμα η λύση για κάθε αντικειμενική συνάρτηση όντως δίνει την ελάχιστη τιμή της παραμέτρου που έχει σκοπό να ελαχιστοποιήσει. (Πίνακας 3-4)

- Από τα αποτελέσματα όλων των clusters παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση που έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της απόστασης (Αντικειμενική 1) ελαχιστοποιεί παράλληλα και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων φορτηγών (Αντικειμενική 2). Επομένως, δεδομένου ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε μία αποθήκη και τα οχήματα πρέπει να εκκινούν και να τερματίζουν σε αυτή, η αντικειμενική συνάρτηση 2 δεν προσφέρει κάποια επιπλέον πληροφορία σχετικά με την αντικειμενική 1. Επιπλέον, επειδή δεν λαμβάνει υπόψη την ελαχιστοποίηση της απόστασης παρατηρούμε ότι οι διαδρομές που προκύπτουν έχουν επιλεχθεί από τον αλγόριθμο τυχαία και δεν είναι λογικό να χρησιμοποιηθούν στην πράξη. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αντικειμενική συνάρτηση 2 καλύπτεται από την 1 στην περίπτωση της μίας αποθήκης. Μία περίπτωση όπου θα μπορούσε να έχει νόημα η ύπαρξη και των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων που αναφέρονται παραπάνω είναι όταν σε κάποιο πρόβλημα υπάρχουν δύο ή περισσότερες αποθήκες.

- Όπως θα περιμέναμε, παρατηρούμε ότι οι διαδρομές που προκύπτουν από την αντικειμενική η οποία ελαχιστοποιεί την απόσταση (Αντικειμενική 1) δεν είναι ίδιες με αυτές οι οποίες προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση των εκπομπών ρύπων (Αντικειμενική 5), καθώς οι ρύποι που εκπέμπονται δεν είναι ανάλογοι μόνο της απόστασης, αλλά της ταχύτητας του οχήματος. Από τον Πίνακα 3-6 υπολογίζεται ότι όταν ελαχιστοποιείται η απόσταση οι εκπεμπόμενοι ρύποι ανά χιλιόμετρο αυξάνονται κατά 1,21% σε σχέση με τους ελάχιστους εκπεμπόμενους ρύπους ανά χιλιόμετρο. Ακόμα υπολογίζεται ότι όταν ελαχιστοποιούνται οι εκπεμπόμενοι ρύποι ανά χιλιόμετρο η συνολική απόσταση αυξάνεται κατα 17,66%. Επίσης πολλαπλασιάζοντας για κάθε περίπτωση τους εκπεμπόμενους ρύπους ανά χιλιόμετρο με τα αντίστοιχα χιλιόμετρα που προκύπτουν από τη λύση της αντικειμενικής συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης των εκπεμπόμενων ρύπων ανά χιλιόμετρο οι συνολικοί εκπεμπόμενοι ρύποι (gr_{CO2}) αυξάνονται κατά 16,25% σε σχέση με τους ρύπους που εκπέμπονται ακολουθόντας την λύση της ελαχιστοποίησης της απόστασης. Επομένως θα πρέπει να υπολογίζονται οι εκπεμπόμενοι ρύποι (gr_{CO2}) που προκύπτουν από τις δύο αντικειμενικές ώστε να βρεθεί η λιγότερο επιβλαβής για το περιβάλλον λύση.

- Συγκρίνοντας τις τιμές του Πίνακα 3-7 υπολογίζουμε ότι στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης του κενού φορτίου σε βάρος (Αντικειμενική 4α) το κενό φορτίο σε όγκο αυξάνεται κατά 61,97% σε σχέση με το ελάχιστο κενό φορτίο σε όγκο. Αντίστοιχα, όταν ελαχιστοποιείται το κενό φορτίο σε όγκο (Αντικειμενική 4β) το κενό φορτίο σε βάρος αυξάνεται κατα 33,71% σε σχέση με το ελάχιστο κενό φορτίο σε βάρος.

Σύνοψη

Στην παρούσα διπλωματική μελετήθηκε η περίπτωση ενός προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων με περιορισμένη χωρητικότητα και ετερογενή στόλο με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης διαδρομής ανάλογα με το στόχο που τίθεται κάθε φορά προς ελαχιστοποίηση. Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε ευρετικός αλγόριθμος ο οποίος υλοποιήθηκε με τη γλώσσα προγραμματισμού C++ και το λογισμικό CPLEX.

Όσο αφορά το θεωρητικό κομμάτι, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάστηκε μέσα από μία βιβλιογραφική ανασκόπηση ο ρόλος και η σημασία της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας και η σύνδεσή της με τις μεταφορές και το πρόβλημα δρομολόγησης οχημάτων. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύχθηκε ο ορισμός του προβλήματος δρομολόγησης οχημάτων, η υπολογιστική του πολυπλοκότητα καθώς και οι τύποι των αλγορίθμων επίλυσης που χρησιμοποιούνται.

Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στο υπολογιστικό κομμάτι της εργασίας. Περιγράφεται το πραγματικό πρόβλημα που μελετήθηκε και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την επίλυσή του. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται τα δεδομένα, η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος, ο τρόπος επίλυσης που επιλέχθηκε και τα αποτελέσματα.

Μελλοντικά Βήματα

Το παραπάνω αποτελεί πρόβλημα μεγάλης υπολογιστικής πολυπλοκότητας και για να επιλυθεί χρησιμοποιούνται ευρετικοί αλγόριθμοι ενώ η βέλτιστη λύση είναι αδύνατο να επιτευχθεί εντός λογικού υπολογιστικού χρόνου. Σε μελλοντική μελέτη θα μπορούσαν να εξεταστούν διαφορετικοί ευρετικοί αλγόριθμοι με σκοπό την σύγκριση των λύσεων, θα μπορούσαν να συνδυαστούν αντικειμενικές συναρτήσεις μεταξύ τους όπως επίσης και να συμπεριληφθούν περισσότεροι περιορισμοί ή ελευθερίες.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

- Georgios K.D. Saharidis, Michel Minoux, Yves Dallery (2009). *Scheduling of loading and unloading of crude oil in a refinery using event-based discrete time formulation.* Computer and Chemical Engineering: 1413-1426.
- Paolo Toth & Daniele Vigo (1987). *The Vehicle Routing Problem.* U.S.: Society for Industrial & Applied Mathematics.
- Douglas M. Lambert, James R. Stock, Lisa M. Ellram (1998). *Fundamentals of Logistics Management.* Irwin/McGraw-Hill.
- James R. Stock & Douglas M. Lambert (2001). *Strategic Logistics Management.* New York: McGraw-Hill.
- Donald Waters (2003). *Logistics: An Introduction to Supply Chain Management.* New York: Palgrave Macmillan.
- Alan McKinnon, Michael Browne, Sharon Cullinane, Anthony Whiteing (2010). *Green Logistics: Improving the Environmental Sustainability of Logistics.* Kogan Page.
- Yung-yu Tseng, Wen Long Yue, Michael A P Taylor (2005). *The role of transportation in logistics chain*. Proceedings of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, Vol. 5, pp. 1657-1672, 2005
- Juan R. Jaramillo (2011). The Green Vehicle Routing Problem. Department of Business Administration, Albany State University
- T. Sawik (2016). *A note on the Miller-Tucker-Zemlin model for the asymmetric traveling salesman problem.* AGH University of Science and Technology, Department of Operations Research and Information Technology.
- Miguel Figliozzi (2010). *Vehicle Routing Problem for Emissions Minimization.*
- Javier Faulin, Angel Juan, Fernando Lera, Scott Grasman (2011). *Solving the Capacitated Vehicle Routing Problem with Environmental Criteria Based on Real Estimations in Road. Transportation: A Case*
- Delaney, RV 1999. *Wall Street's View of Logistics*. CLM Annual Conference Proceedings, Oct. 1999: 145-150.
- Thibaut Vidal. *Heuristics for Vehicle Routing Problems: Structural Problem decompositions and Unified Search.* Departamento de Informatica Ponti_cia Universidade Catolica do Rio de Janeir.
- T. Sawik (2016). *A note on the Miller-Tucker-Zemlin model for the asymmetric traveling salesman problem.* AGH University of Science and Technology, Department of Operations Research and Information Technology, Poland.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- Χρήστος Δ. Ταραντίλης (2002). *Αλγόριθμοι αναπαράστασης και επίλυσης σύνθετων και μεγάλης κλίμακας προβλημάτων βελτιστοποίησης. Εφαρμογή στο πρόβλημα δρομολόγησης στόλου οχημάτων και στην αναπτυξη συστημάτων εφοδιαστικής αλυσίδας. Διδακτορική διατριβή.*

- Δαμιανού Φωτεινή (2006) . *Η συμβολή του διαδικτύου στο πρόβλημα της βελτιστοποίησης. Μεταπτυχιακή εργασία.*

Ιστοσελίδες

- https://cscmp.org/CSCMP/Educate/SCM_Definitions_and_Glossary_of_Terms/CSCMP/Educate/SCM_Definitions_and_Glossary_of_Terms.aspx?hkey=60879588-f65f-4ab5-8c4b-6878815ef921

- https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

- https://en.wikipedia.org/wiki/Vehicle_routing_problem.

- https://myengineeringworld.net/2012/05/optimal-speed-for-minimum-fuel.html

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α Κώδικας C++ (K-MEANS)

```
#include <ilcplex/ilocplex.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <string>
#include <vector>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <algorithm>
using namespace std;

class Point{
private:
	int id_point, id_cluster;
	vector<double> values;
	int total_values;
	string name;

public:
	Point(int id_point, vector<double>& values, string name = "") {
		this->id_point = id_point;
		total_values = values.size();
		for (int i = 0; i < total_values; i++)
			this->values.push_back(values[i]);

		this->name = name;
		id_cluster = -1;
	}

	int getID()	{
		return id_point;
	}

	void setCluster(int id_cluster){
		this->id_cluster = id_cluster;
	}

	int getCluster()		{
		return id_cluster;
	}

	double getValue(int index)	{
		return values[index];
	}

	int getTotalValues()	{
		return total_values;
	}
```

```
	void addValue(double value) {
		values.push_back(value);
	}

	string getName()	{
		return name;
	}
};

class Cluster{
private:
	int id_cluster;
	vector<double> central_values;
	vector<Point> points;

public:
	Cluster(int id_cluster, Point point)	{
		this->id_cluster = id_cluster;
		int total_values = point.getTotalValues();
		for (int i = 0; i < total_values; i++)
			central_values.push_back(point.getValue(i));

		points.push_back(point);
	}

	void addPoint(Point point)	{
		points.push_back(point);
	}

	bool removePoint(int id_point)	{
		int total_points = points.size();
		for (int i = 0; i < total_points; i++)	{
			if (points[i].getID() == id_point)	{
				points.erase(points.begin() + i);
				return true;
			}
		}
		return false;
	}

	double getCentralValue(int index)	{
		return central_values[index];
	}

	void setCentralValue(int index, double value)	{
		central_values[index] = value;
	}

	Point getPoint(int index)	{
```

```
        return points[index];
    }

    int getTotalPoints()    {
        return points.size();
    }

    int getID()     {
        return id_cluster;
    }
};

class KMeans{
private:
    int K; // number of clusters
    int total_values, total_points, max_iterations;
    vector<Cluster> clusters;

    // return ID of nearest center (uses euclidean distance)
    int getIDNearestCenter(Point point)  {
        double sum = 0.0, min_dist;
        int id_cluster_center = 0;

        for (int i = 0; i < total_values; i++)          {
            sum += pow(clusters[0].getCentralValue(i) -
                point.getValue(i), 2.0);
        }
        min_dist = sqrt(sum);
        for (int i = 1; i < K; i++)       {
            double dist;
            sum = 0.0;
            for (int j = 0; j < total_values; j++)    {
                sum += pow(clusters[i].getCentralValue(j) -
                    point.getValue(j), 2.0);
            }
            dist = sqrt(sum);
            if (dist < min_dist) {
                min_dist = dist;
                id_cluster_center = i;
            }
        }
        return id_cluster_center;
    }
public:
    KMeans(int K, int total_points, int total_values, int max_iterations){
        this->K = K;
        this->total_points = total_points;
        this->total_values = total_values;
        this->max_iterations = max_iterations;
    }
```

```
void run(vector<Point> & points) {
	if (K > total_points)
		return;

	vector<int> prohibited_indexes;

	// choose K distinct values for the centers of the clusters
	for (int i = 0; i < K; i++)			{
		while (true)	{
			int index_point = rand() % total_points;

			if (find(prohibited_indexes.begin(), prohibited_indexes.end(),
				index_point) == prohibited_indexes.end())
			{
				prohibited_indexes.push_back(index_point);
				points[index_point].setCluster(i);
				Cluster cluster(i, points[index_point]);
				clusters.push_back(cluster);
				break;
			}
		}
	}
	int iter = 1;
	while (true)	{
		bool done = true;

		// associates each point to the nearest center
		for (int i = 0; i < total_points; i++)	{
			int id_old_cluster = points[i].getCluster();
			int id_nearest_center = getIDNearestCenter(points[i]);

			if (id_old_cluster != id_nearest_center)		{
				if (id_old_cluster != -1)

clusters[id_old_cluster].removePoint(points[i].getID());

				points[i].setCluster(id_nearest_center);
				clusters[id_nearest_center].addPoint(points[i]);
				done = false;
			}
		}

		// recalculating the center of each cluster
		for (int i = 0; i < K; i++)		{
			for (int j = 0; j < total_values; j++)	{
				int total_points_cluster = clusters[i].getTotalPoints();
				double sum = 0.0;
				if (total_points_cluster > 0)	{
					for (int p = 0; p < total_points_cluster; p++)
```

```
                                                sum += 
clusters[i].getPoint(p).getValue(j);
                                        clusters[i].setCentralValue(j, sum / 
total_points_cluster);
                                }
                        }
                }
                if (done == true || iter >= max_iterations)     {
                        cout << "Break in iteration " << iter << "\n\n";
                        break;
                }
                iter++;
        }

        // shows elements of clusters
        for (int i = 0; i < K; i++)     {
                int total_points_cluster = clusters[i].getTotalPoints();
                cout << "Cluster " << clusters[i].getID() + 1 << endl;
                for (int j = 0; j < total_points_cluster; j++)  {
                        cout << "Point " << clusters[i].getPoint(j).getID() + 1 << ": ";
                        for (int p = 0; p < total_values; p++)
                                cout << clusters[i].getPoint(j).getValue(p) << " ";

                        string point_name = clusters[i].getPoint(j).getName();
                        if (point_name != "")
                                cout << " " << point_name;

                        cout << endl;
                }
                cout << "Cluster values: ";
                for (int j = 0; j < total_values; j++)
                        cout << clusters[i].getCentralValue(j) << " ";

                cout << "\n\n";
        }
    }
};

int main(int argc, char *argv[]){
    srand(time(NULL));
    int total_points, total_values, K, max_iterations, has_name;

    ifstream inFile;
    inFile.open("CO.txt");
    if (inFile.fail()) {
        cout << "input file could not be opened" << endl;
        exit(1);
    }
    inFile >> total_points >> total_values >> K >> max_iterations;
```

```
	cout << total_points << "     " << total_values << "     " << K << "     " <<
max_iterations << endl;
	vector<Point> points;
	string point_name;
	for (int i = 0; i < total_points; i++) {
		vector<double> values;
		for (int j = 0; j < total_values; j++) {
			double value;
			inFile >> value;
			values.push_back(value);
		}
		Point p(i, values);
		points.push_back(p);
	}
	KMeans kmeans(K, total_points, total_values, max_iterations);
	kmeans.run(points);
	inFile.close();
	system("pause");
	return 0;
}
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β Κώδικας C++ (ILOG CPLEX)

```
#include <ilcplex/ilocplex.h>
ILOSTLBEGIN
int main() {
	int i, j, k, h;
	const int imax = 172;
	const int jmax = imax;
	const int hmax = imax;
	const int kmax = 105;
	const int M = 10000;
	float D[imax][jmax];
	float FC[imax][jmax];
	int	T[imax][jmax];
	int	DM[jmax];
	int DV[jmax];
	int CM[kmax];
	int CV[kmax];
	int PR[kmax];
	int TD[jmax];
	int XijkValue[imax][jmax][kmax];
	int YijkValue[imax][jmax][kmax];
	//Dedomena
	//Apostaseis metaksu pelatwn
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			D[i][j] = 0;
		}
	}
	ifstream inD;
	inD.open("D.txt");
```

```
if (!inD) {
	cout << "Error!" << endl;
	return -1;
}
else {
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			inD >> D[i][j];
		}
	}
	inD.close();
}
//Xronos metavashs metaksu pelatwn
for (i = 0; i < imax; i++) {
	for (j = 0; j < jmax; j++) {
		T[i][j] = 0;
	}
}
ifstream inT;
inT.open("T.txt");
if (!inT) {
	cout << "Error!" << endl;
	return -1;
}
else {
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			inT >> T[i][j];
		}
	}
```

```
		inT.close();
	}
	//Katanalwsh kausimou metaksu pelatwn
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			FC[i][j] = 0;
		}
	}
	ifstream inFC;
	inFC.open("FC.txt");
	if (!inFC) {
		cout << "Error!" << endl;
		return -1;
	}
	else {
		for (i = 0; i < imax; i++) {
			for (j = 0; j < jmax; j++) {
				inFC >> FC[i][j];
			}
		}
		inFC.close();
	}
	//Xwrhtikothta fortigwn se maza
	for (k = 0; k < kmax; k++) {
		CM[k] = 0;
	}
	ifstream inCM;
	inCM.open("CM.txt");
	if (!inCM) {
		cout << "Error!" << endl;
```

```
		return -1;
	}
	else {
		for (k = 0; k < kmax; k++) {
			inCM >> CM[k];
		}
		inCM.close();
	}
	//Xwritikothta fortigwn se ogko
	for (k = 0; k < kmax; k++) {
		CV[k] = 0;
	}
	ifstream inCV;
	inCV.open("CV.txt");
	if (!inCV) {
		cout << "Error!" << endl;
		return -1;
	}
	else {
		for (k = 0; k < kmax; k++) {
			inCV >> CV[k];
		}
		inCV.close();
	}
	//Protaireothta Fortigwn
	for (k = 0; k < kmax; k++) {
		PR[k] = 0;
	}
	ifstream inPR;
	inPR.open("PR.txt");
```

```
if (!inPR) {
	cout << "Error!" << endl;
	return -1;
}
else {
	for (k = 0; k < kmax; k++) {
		inPR >> PR[k];
	}
	inPR.close();
}
//Zhthsh kathe pelath se maza
for (j = 0; j < jmax; j++) {
	DM[j] = 0;
}
ifstream inDM;
inDM.open("DM.txt");
if (!inDM) {
	cout << "Error!" << endl;
	return -1;
}
else {
	for (j = 0; j < jmax; j++) {
		inDM >> DM[j];
	}
	inDM.close();
}
//Zhthsh kathe pelath se ogko
for (j = 0; j < jmax; j++) {
	DV[j] = 0;
}
```

```
ifstream inDV;
inDV.open("DV.txt");
if (!inDV) {
	cout << "Error!" << endl;
	return -1;
}
else {
	for (j = 0; j < jmax; j++) {
		inDV >> DV[j];
	}
	inDV.close();
}
//Xronos ekfortwshs gia kathe pelath
for (j = 0; j < jmax; j++) {
	TD[j] = 0;
}
ifstream inTD;
inTD.open("TD.txt");
if (!inTD) {
	cout << "Error!" << endl;
	return -1;
}
else {
	for (j = 0; j < jmax; j++) {
		inTD >> TD[j];
	}
	inTD.close();
}
IloEnv env;
try {
```

```
//Dimiourgia Modelou
IloModel model(env);
typedef IloArray<IloNumArray> IloNumMatrix2x2;
typedef IloArray<IloNumMatrix2x2> IloNumMatrix3x3;
typedef IloArray<IloNumMatrix3x3> IloNumMatrix4x4;

typedef IloArray<IloNumVarArray> IloNumVarMatrix2x2;
typedef IloArray<IloNumVarMatrix2x2> IloNumVarMatrix3x3;
typedef IloArray<IloNumVarMatrix3x3> IloNumVarMatrix4x4;

typedef IloArray<IloRangeArray> IloRangeMatrix2x2;
typedef IloArray<IloRangeMatrix2x2> IloRangeMatrix3x3;
typedef IloArray<IloRangeMatrix3x3> IloRangeMatrix4x4;

IloCplex cplex(env);
//Dimiourgia Metavlitwn apofasis
IloNumVarMatrix3x3 Xijk(env, 0);
for (i = 0; i < imax; i++) {
    IloNumVarMatrix2x2 Xjk(env, 0);
    for (j = 0; j < jmax; j++) {
        IloNumVarArray Xk(env, 0);
        for (k = 0; k < kmax; k++) {
            char ch1[70];
            sprintf(ch1, "Xijk(i%d,j%d,k%d)", i, j, k);
            IloNumVar X(env, 0, 1, ILOINT, ch1);
            Xk.add(X);
        }
        Xjk.add(Xk);
    }
    Xijk.add(Xjk);
```

```
}

IloNumVarMatrix3x3 Yijk(env, 0);
for (i = 0; i < imax; i++) {
	IloNumVarMatrix2x2 Yjk(env, 0);
	for (j = 0; j < jmax; j++) {
		IloNumVarArray Yk(env, 0);
		for (k = 0; k < kmax; k++) {
			char ch2[70];
			sprintf(ch2, "Yijk(i%d,j%d,k%d)", i, j, k);
			IloNumVar Y(env, 0, IloInfinity, ILOINT, ch2);
			Yk.add(Y);
		}
		Yjk.add(Yk);
	}
	Yijk.add(Yjk);
}

IloNumVarArray Ui(env, 0);
for (i = 0; i < imax; i++) {
	char ch3[70];
	sprintf(ch3, "Ui(i%d)", i);
	IloNumVar U(env, 1, imax, ILOINT, ch3);//u>=1?
	Ui.add(U);
}
//Periorismoi
//1.
IloRangeArray SumXki(env, 0);
for (k = 0; k < kmax; k++) {
	IloExpr expr(env);
```

```
		for (i = 0; i < imax; i++) {
			expr += Xijk[i][i][k];
		}
		char chr1[60];
		sprintf(chr1, "SumXki(k=%d)", k);
		IloRange SumXi(env, 0, expr, 0, chr1);
		model.add(SumXi);
		SumXki.add(SumXi);
		expr.end();
	}
	//2.
	IloRangeArray Sum_Xjk(env, 0);
	for (i = 1; i < imax; i++) {
		IloExpr expr(env);
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			for (k = 0; k < kmax; k++) {
				expr += Xijk[i][j][k];
			}
		}
		char chr2b[60];
		sprintf(chr2b, "Sum_Xjk(i=%d)", i);
		IloRange Sum_Xi(env, 1, expr, 1, chr2b);
		model.add(Sum_Xi);
		Sum_Xjk.add(Sum_Xi);
		expr.end();
	}
	//3.
	IloRangeArray St_3k(env, 0);
	for (k = 0; k < kmax; k++) {
		IloExpr expr(env);
```

```
        for (j = 1; j < jmax; j++) {      //j=1 gia ligoteres prakseis
            expr += Xijk[0][j][k];
        }
        char chr3[60];
        sprintf(chr3, "St_3k(k=%d)", k);
        IloRange St_3(env, -IloInfinity, expr, 1, chr3);
        model.add(St_3);
        St_3k.add(St_3);
        expr.end();
    }
    //4.
    IloRangeMatrix2x2 Xkh(env, 0);
    for (k = 0; k < kmax; k++) {
        IloRangeArray Xh(env, 0);
        for (h = 1; h < hmax; h++) {
            IloExpr expr(env);
            for (i = 0; i < imax; i++) {
                expr += Xijk[i][h][k];
            }
            for (j = 0; j < jmax; j++) {
                expr -= Xijk[h][j][k];
            }
            char chr4[60];
            sprintf(chr4, "Xkh(k=%d,h=%d)", k, h);
            IloRange X(env, 0, expr, 0, chr4);
            model.add(X);
            Xh.add(X);
            expr.end();
        }
        Xkh.add(Xh);
```

```
}
//5a.
IloRangeArray DM_CMk(env, 0);
for (k = 0; k < kmax; k++) {
	IloExpr expr(env);
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 1; j < jmax; j++) {	//j=1 gia ligoteres prakseis
			expr += Xijk[i][j][k] * DM[j];
		}
	}
	char chr5a[60];
	sprintf(chr5a, "DM_CMk(k=%d", k);
	float UB = CM[k];
	IloRange DM_CM(env, 0, expr, UB, chr5a);
	model.add(DM_CM);
	DM_CMk.add(DM_CM);
	expr.end();
}

//5b.
IloRangeArray DV_CVk(env, 0);
for (k = 0; k < kmax; k++) {
	IloExpr expr(env);
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 1; j < jmax; j++) { //j=1 gia ligoteres prakseis
			expr += Xijk[i][j][k] * DV[j];
		}
	}
	char chr5b[60];
	sprintf(chr5b, "DV_CVk(k=%d", k);
```

```
        float UB = CV[k];
        IloRange DV_CV(env, 0, expr, UB, chr5b);
        model.add(DV_CV);
        DV_CVk.add(DV_CV);
        expr.end();
}
//6.
IloRangeArray TD_Tk(env, 0);
for (k = 0; k < kmax; k++) {
        IloExpr expr(env);
        for (i = 0; i < imax; i++) {
                for (j = 0; j < jmax; j++) {
                        expr += Xijk[i][j][k] * (T[i][j] + TD[j]);
                }
        }
        char chr6[60];
        sprintf(chr6, "TD_Tk(k=%d)", k);
        int UB = 480;
        IloRange TD_T(env, 0, expr, UB, chr6);
        model.add(TD_T);
        TD_Tk.add(TD_T);
        expr.end();
}
//7.
IloRangeArray Begin_Xk(env, 0);
for (k = 0; k < kmax; k++) {
        IloExpr expr(env);
        for (i = 1; i < imax; i++) {
                for (j = 0; j < jmax; j++) {
                        expr += Xijk[i][j][k];
```

```
			}
		}
		for (h = 1; h < hmax; h++) {
			expr -= M * Xijk[0][h][k];
		}
		char chr7[60];
		sprintf(chr7, "Begin_Xk(k%d)", k);
		IloRange Begin_k(env, -IloInfinity, expr, 0, chr7);
		model.add(Begin_k);
		Begin_Xk.add(Begin_k);
		expr.end();
	}
	//8.
	IloRangeMatrix3x3 SumUijk(env, 0);
	for (i = 1; i < imax; i++) {
		IloRangeMatrix2x2 SumUjk(env, 0);
		for (j = 1; j < jmax; j++) {
			IloRangeArray SumUk(env, 0);
			for (k = 0; k < kmax; k++) {
				IloExpr expr(env);
				expr = Ui[i] - Ui[j] + (imax - 1) * Xijk[i][j][k] - (imax
2);
				char chr8[60];
				sprintf(chr8, "SumUijk(i=%d,j=%d,k=%d)", i, j, k);
				IloRange Sum_U(env, -IloInfinity, expr, 0, chr8);
				model.add(Sum_U);
				SumUk.add(Sum_U);
				expr.end();
			}
			SumUjk.add(SumUk);
		}
```

```
        SumUijk.add(SumUjk);
}
///Minimize ton-km
//9.
IloRangeArray Y0k(env, 0);
for (k = 0; k < kmax; k++) {
        IloExpr expr(env);
        for (i = 0; i < imax; i++) {
                expr += Yijk[i][0][k];
        }
        char chr9[60];
        sprintf(chr9, "Y0k(k=%d)", k);
        IloRange Y_0(env, 0, expr, 0, chr9);
        model.add(Y_0);
        Y0k.add(Y_0);
        expr.end();
}
//10.
IloRangeMatrix3x3 CM_Yijk(env, 0);
for (i = 0; i < imax; i++) {
        IloRangeMatrix2x2 CM_Yjk(env, 0);
        for (j = 1; j < jmax; j++) {
                IloRangeArray CM_Yk(env, 0);
                for (k = 0; k < kmax; k++) {
                        IloExpr expr(env);
                        expr = Yijk[i][j][k] - CM[k] * Xijk[i][j][k];
                        char chr10[60];
                        sprintf(chr10, "Yijk(i=%d,j=%d,k=%d)", i, j, k);
                        IloRange CM_Y(env, -IloInfinity, expr, 0, chr10);
                        model.add(CM_Y);
```

```
                    CM_Yk.add(CM_Y);
                    expr.end();
                }
                CM_Yjk.add(CM_Yk);
            }
            CM_Yijk.add(CM_Yjk);
        }
    //11.
        IloRangeArray Y_DXk(env, 0);
        for (k = 0; k < kmax; k++) {
            IloExpr expr(env);
            for (j = 1; j < jmax; j++) {   // otan paei sto j=0 DM=0
                expr += Yijk[0][j][k];
                for (i = 0; i < imax; i++) {
                    expr += -Xijk[i][j][k] * DM[j];
                }
            }
            char chr11[60];
            sprintf(chr11, "Y_DXk(k=%d)", k);
            IloRange Y_DX(env, 0, expr, 0, chr11);
            model.add(Y_DX);
            Y_DXk.add(Y_DX);
            expr.end();
        }
        //12.
        IloRangeArray Dtrs_Yj(env, 0);
        for (j = 1; j < jmax; j++) {
            IloExpr expr(env);
            expr += -DM[j];
            for (k = 0; k < kmax; k++) {
```

```
			for (i = 0; i < imax; i++) {
				expr += Yijk[i][j][k] - Yijk[j][i][k];
			}
		}
		char chr12[60];
		sprintf(chr12, "Dtrs_Yj( j=%d)", j);
		IloRange Dtrs(env, 0, expr, 0, chr12);
		model.add(Dtrs);
		Dtrs_Yj.add(Dtrs);
		expr.end();
	}
	//Antikeimenikes synarthseis
	//1.
	IloExpr expr1(env);
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			for (k = 0; k < kmax; k++) {
				expr1 += Xijk[i][j][k] * D[i][j];
			}
		}
	}
	//2.
	//IloExpr expr1(env);
	//for (j = 0; j < jmax; j++) {
	//	for (k = 0; k < kmax; k++) {
	//		expr1 += Xijk[0][j][k];
	//	}
	//}

	//3.
```

```
//IloExpr expr1(env);
//for (j = 0; j < jmax; j++) {
//	for (k = 0; k < kmax; k++) {
//	expr1 += PR[k]*Xijk[0][j][k];
//	}
//}
//4a.
//IloExpr expr1(env);
//for (j = 1; j < jmax; j++) {
//	for (k = 0; k < kmax; k++) {
//	expr1 += Xijk[0][j][k] * CM[k];
//	}
//}
//4b.
//IloExpr expr1(env);
//for (j = 1; j < jmax; j++) {
//	for (k = 0; k < kmax; k++) {
//		expr1 += Xijk[0][j][k] * CV[k];
//	}
//}

//5.
//IloExpr expr1(env);
//for (i = 0; i < imax; i++) {
//	for (j = 0; j < jmax; j++) {
//		for (k = 0; k < kmax; k++) {
//			expr1 += Xijk[i][j][k] * FC[i][j];
//		}
//	}
//}
```

```
//6.
//IloExpr expr1(env);
//for (i = 0; i < imax; i++) {
//	for (j = 0; j < jmax; j++) {
//		for (k = 0; k < kmax; k++) {
//			expr1 += Yijk[i][j][k] * D[i][j];
//		}
//	}
//}
//ektelesh modelou
model.add(IloMinimize(env, expr1));
expr1.end();
cplex.extract(model);
cplex.exportModel("modelo.lp");
cplex.solve();
if (!cplex.solve()) {
	env.error() << "Failed to optimize problem." << endl;
	throw(-1);
}
env.out() << "Solution status = " << cplex.getStatus() << endl;
env.out() << "Solution value = " << cplex.getObjValue() << endl;
for (k = 0; k < kmax; k++) {
	for (i = 0; i < imax; i++) {
		for (j = 0; j < jmax; j++) {
			XijkValue[i][j][k] = cplex.getValue(Xijk[i][j][k]);
			if (XijkValue[i][j][k] != 0)
				cout << "Xijk" << "(" << i << "," << j << "," <<
k << ")" << "=" << XijkValue[i][j][k] << endl;
		}
	}
}
```

```
			double objective = 0;
			for (j = 0; j < jmax; j++) {
				for (k = 0; k < kmax; k++) {
					objective += XijkValue[0][j][k];
				}
			}
			cout << "Objective(#X)=" << objective << endl;
			for (k = 0; k < kmax; k++) {
				for (i = 0; i < imax; i++) {
					for (j = 0; j < jmax; j++) {

						YijkValue[i][j][k] = cplex.getValue(Yijk[i][j][k]);
						if (YijkValue[i][j][k] != 0)
							cout << "Yijk" << "(" << i << "," << j << "," <<
k << ")" << "=" << YijkValue[i][j][k] << endl;
					}
				}
			}

		}
		catch (IloException&e) {
			cerr << "concert exception caught:" << e << endl;
		}
		catch (...) {
			cerr << "Unknown exception caught" << endl;
		}
		env.end();
		system("pause");
		return 0;
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ Clusters

ΟΜΑΔΕΣ ΠΕΛΑΤΩΝ								
Cluster / i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	12	11	23	49	1	22	39	2
2	44	13	29	50	15	27	40	3
3	55	41	31	51	16	98	42	5
4	68	81	32	65	28	158	67	6
5	122	109	33	100	54		75	7
6	148	130	35	101	59		86	8
7	151	142	36	107	69		87	17
8	156	145	37	138	70		88	18
9	157	150	38		72		89	43
10			73		94		127	52
11			110		108		137	113
12			128		112		143	118
13					114		147	136
14					115			
15					133			
16					139			
17					144			
Cluster / i	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	4	9	10	91	14	62	56	45
2	19	48	53	96	24	66	57	46
3	20	77	61	97	25	74	64	78
4	21	79	71	102	26	76	162	82
5	30	80	105	103	34	90	163	84
6	63	83	119	111	47	125	164	93
7	92	104	120	160	58	131	165	121
8	116	106	129	161	60	152	166	155
9	117	134	135		85	153	167	168
10	123	149	141		95			169
11	124	154	146		99			170
12	126	159			132			171
13					140			

ΟΜΑΔΕΣ ΟΧΗΜΑΤΩΝ								
Cluster / k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0	2	32	51	20	7	3	8	48
1	6	37	101	30	28	15	13	21
2	17	59	91	35	33	56	19	68
3	52	53	27	60	36	61	26	90
4	29	12	1	84	45	66	34	97
5	95	105	14	98	50	77	47	78
6	46	44		11		18		
Cluster / k	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
0	102	39	96	72	24	43	4	89
1	80	49	64	40	70	65	79	5
2	25	55	69	104	76	58	100	71
3	74	67	62	75	9	99	31	22
4	41	88	16	81	94	10	42	82
5	63	57	38	83	87	85	54	23
6	86		93	103		73	92	

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ Αποτελέσματα

CLUSTER 1			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 32,914 Xijk(0,4,6)=1 Xijk(1,0,6)=1 Xijk(2,7,6)=1 Xijk(3,6,6)=1 Xijk(4,5,6)=1 Xijk(5,3,6)=1 Xijk(6,9,6)=1 Xijk(7,1,6)=1 Xijk(8,2,6)=1 Xijk(9,8,6)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,5,5)=1 Xijk(1,3,5)=1 Xijk(2,9,5)=1 Xijk(3,4,5)=1 Xijk(4,8,5)=1 Xijk(5,2,5)=1 Xijk(6,7,5)=1 Xijk(7,1,5)=1 Xijk(8,0,5)=1 Xijk(9,6,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,4,2)=1 Xijk(1,9,2)=1 Xijk(2,5,2)=1 Xijk(3,7,2)=1 Xijk(4,6,2)=1 Xijk(5,1,2)=1 Xijk(6,2,2)=1 Xijk(7,8,2)=1 Xijk(8,0,2)=1 Xijk(9,3,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.877 Xijk(0,5,1)=1 Xijk(1,7,1)=1 Xijk(2,9,1)=1 Xijk(3,8,1)=1 Xijk(4,6,1)=1 Xijk(5,4,1)=1 Xijk(6,3,1)=1 Xijk(7,2,1)=1 Xijk(8,1,1)=1 Xijk(9,0,1)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 161 Xijk(0,5,1)=1 Xijk(1,7,1)=1 Xijk(2,9,1)=1 Xijk(3,8,1)=1 Xijk(4,6,1)=1 Xijk(5,4,1)=1 Xijk(6,3,1)=1 Xijk(7,2,1)=1 Xijk(8,1,1)=1 Xijk(9,0,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.664,89 Xijk(0,4,3)=1 Xijk(1,5,3)=1 Xijk(2,7,3)=1 Xijk(3,0,3)=1 Xijk(4,1,3)=1 Xijk(5,6,3)=1 Xijk(6,8,3)=1 Xijk(7,3,3)=1 Xijk(8,9,3)=1 Xijk(9,2,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 24.663,5 Xijk(0,5,0)=1 Xijk(5,8,0)=1 Xijk(8,9,0)=1 Xijk(9,0,0)=1 Xijk(0,4,1)=1 Xijk(3,6,1)=1 Xijk(4,3,1)=1 Xijk(6,0,1)=1 Xijk(0,2,2)=1 Xijk(2,0,2)=1 Xijk(0,7,3)=1 Xijk(7,0,3)=1 Xijk(0,1,6)=1 Xijk(1,0,6)=1	Yijk(0,5,0)=887 Yijk(5,8,0)=776 Yijk(8,9,0)=212 Yijk(0,4,1)=650 Yijk(3,6,1)=225 Yijk(4,3,1)=488 Yijk(0,2,2)=93 Yijk(0,7,3)=149 Yijk(0,1,6)=104

<table>
<tr><th colspan="4">CLUSTER 2</th></tr>
<tr><th>Αντικειμενική 1</th><th>Αντικειμενική 2</th><th>Αντικειμενική 3</th><th>Αντικειμενική 4α</th></tr>
<tr><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 44,264
Xijk(0,3,2)=1
Xijk(1,2,2)=1
Xijk(2,0,2)=1
Xijk(3,6,2)=1
Xijk(4,1,2)=1
Xijk(5,9,2)=1
Xijk(6,7,2)=1
Xijk(7,5,2)=1
Xijk(8,4,2)=1
Xijk(9,8,2)=1</td><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 1
Xijk(0,3,0)=1
Xijk(1,2,0)=1
Xijk(2,4,0)=1
Xijk(3,5,0)=1
Xijk(4,6,0)=1
Xijk(5,7,0)=1
Xijk(6,9,0)=1
Xijk(7,8,0)=1
Xijk(8,1,0)=1
Xijk(9,0,0)=1</td><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 1
Xijk(0,4,0)=1
Xijk(1,5,0)=1
Xijk(2,7,0)=1
Xijk(3,2,0)=1
Xijk(4,6,0)=1
Xijk(5,3,0)=1
Xijk(6,1,0)=1
Xijk(7,9,0)=1
Xijk(8,0,0)=1
Xijk(9,8,0)=1</td><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 408
Xijk(0,5,4)=1
Xijk(1,2,4)=1
Xijk(2,0,4)=1
Xijk(3,8,4)=1
Xijk(4,3,4)=1
Xijk(5,7,4)=1
Xijk(6,4,4)=1
Xijk(7,6,4)=1
Xijk(8,9,4)=1
Xijk(9,1,4)=1</td></tr>
<tr><th>Αντικειμενική 4β</th><th>Αντικειμενική 5</th><th colspan="2">Αντικειμενική 6</th></tr>
<tr><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 32
Xijk(0,6,4)=1
Xijk(1,3,4)=1
Xijk(2,1,4)=1
Xijk(3,7,4)=1
Xijk(4,2,4)=1
Xijk(5,0,4)=1
Xijk(6,9,4)=1
Xijk(7,8,4)=1
Xijk(8,5,4)=1
Xijk(9,4,4)=1</td><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 1.856,3
Xijk(0,2,0)=1
Xijk(1,8,0)=1
Xijk(2,9,0)=1
Xijk(3,5,0)=1
Xijk(4,1,0)=1
Xijk(5,6,0)=1
Xijk(6,4,0)=1
Xijk(7,3,0)=1
Xijk(8,0,0)=1
Xijk(9,7,0)=1</td><td>Solution Status= Optimal
Solution Value= 68.829
Xijk(0,2,0)=1
Xijk(1,0,0)=1
Xijk(2,1,0)=1
Xijk(0,4,1)=1
Xijk(4,8,1)=1
Xijk(8,0,1)=1
Xijk(0,7,2)=1
Xijk(5,0,2)=1
Xijk(7,5,2)=1
Xijk(0,3,3)=1
Xijk(3,0,3)=1
Xijk(0,9,4)=1
Xijk(9,0,4)=1
Xijk(0,6,5)=1
Xijk(6,0,5)=1</td><td>Yijk(0,2,0)=3280
Yijk(2,1,0)=159
Yijk(0,4,1)=302
Yijk(4,8,1)=164
Yijk(0,7,2)=355
Yijk(7,5,2)=147
Yijk(0,3,3)=646
Yijk(0,9,4)=170
Yijk(0,6,5)=169</td></tr>
</table>

CLUSTER 3			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 65,494 Xijk(0,4,1)=1 Xijk(1,10,1)=1 Xijk(2,3,1)=1 Xijk(3,12,1)=1 Xijk(4,5,1)=1 Xijk(5,11,1)=1 Xijk(6,7,1)=1 Xijk(7,8,1)=1 Xijk(8,9,1)=1 Xijk(9,0,1)=1 Xijk(10,2,1)=1 Xijk(11,1,1)=1 Xijk(12,6,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,7,0)=1 Xijk(1,0,0)=1 Xijk(2,10,0)=1 Xijk(3,2,0)=1 Xijk(4,11,0)=1 Xijk(5,4,0)=1 Xijk(6,3,0)=1 Xijk(7,5,0)=1 Xijk(8,12,0)=1 Xijk(9,8,0)=1 Xijk(10,1,0)=1 Xijk(11,9,0)=1 Xijk(12,6,0)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,1,5)=1 Xijk(1,7,5)=1 Xijk(2,0,5)=1 Xijk(3,12,5)=1 Xijk(4,10,5)=1 Xijk(5,6,5)=1 Xijk(6,8,5)=1 Xijk(7,9,5)=1 Xijk(8,4,5)=1 Xijk(9,5,5)=1 Xijk(10,3,5)=1 Xijk(11,2,5)=1 Xijk(12,11,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.636 Xijk(0,2,3)=1 Xijk(2,11,3)=1 Xijk(4,10,3)=1 Xijk(5,12,3)=1 Xijk(6,0,3)=1 Xijk(8,6,3)=1 Xijk(10,8,3)=1 Xijk(11,5,3)=1 Xijk(12,4,3)=1 Xijk(0,3,4)=1 Xijk(1,9,4)=1 Xijk(3,7,4)=1 Xijk(7,1,4)=1 Xijk(9,0,4)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 144 Xijk(0,8,3)=1 Xijk(1,3,3)=1 Xijk(2,6,3)=1 Xijk(3,10,3)=1 Xijk(4,12,3)=1 Xijk(6,0,3)=1 Xijk(7,4,3)=1 Xijk(8,1,3)=1 Xijk(10,7,3)=1 Xijk(12,2,3)=1 Xijk(0,11,4)=1 Xijk(5,9,4)=1 Xijk(9,0,4)=1 Xijk(11,5,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.042,9 Xijk(0,5,5)=1 Xijk(1,7,5)=1 Xijk(2,9,5)=1 Xijk(3,6,5)=1 Xijk(4,0,5)=1 Xijk(5,3,5)=1 Xijk(6,12,5)=1 Xijk(7,10,5)=1 Xijk(8,4,5)=1 Xijk(9,8,5)=1 Xijk(10,2,5)=1 Xijk(11,1,5)=1 Xijk(12,11,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 158.088 Xijk(0,4,0)=1 Xijk(1,2,0)=1 Xijk(2,10,0)=1 Xijk(4,11,0)=1 Xijk(10,0,0)=1 Xijk(11,1,0)=1 Xijk(0,7,2)=1 Xijk(7,8,2)=1 Xijk(8,9,2)=1 Xijk(9,0,2)=1 Xijk(0,5,5)=1 Xijk(3,6,5)=1 Xijk(5,12,5)=1 Xijk(6,0,5)=1 Xijk(12,3,5)=1	Yijk(0,4,0)=1191 Yijk(1,2,0)=422 Yijk(2,10,0)=252 Yijk(4,11,0)=911 Yijk(11,1,0)=696 Yijk(0,7,2)=2445 Yijk(7,8,2)=1559 Yijk(8,9,2)=586 Yijk(0,5,5)=1883 Yijk(3,6,5)=62 Xijk(5,12,5)=638 Xijk(12,3,5)=457

CLUSTER 4			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 78,641 Xijk(0,8,6)=1 Xijk(1,2,6)=1 Xijk(2,0,6)=1 Xijk(3,6,6)=1 Xijk(4,5,6)=1 Xijk(5,3,6)=1 Xijk(6,7,6)=1 Xijk(7,1,6)=1 Xijk(8,4,6)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,4,5)=1 Xijk(1,3,5)=1 Xijk(2,5,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(4,6,5)=1 Xijk(5,1,5)=1 Xijk(6,2,5)=1 Xijk(7,8,5)=1 Xijk(8,0,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,8,0)=1 Xijk(1,7,0)=1 Xijk(2,3,0)=1 Xijk(3,1,0)=1 Xijk(4,6,0)=1 Xijk(5,4,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(7,5,0)=1 Xijk(8,2,0)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.125 Xijk(0,6,3)=1 Xijk(1,7,3)=1 Xijk(2,1,3)=1 Xijk(3,5,3)=1 Xijk(4,3,3)=1 Xijk(5,2,3)=1 Xijk(6,4,3)=1 Xijk(7,8,3)=1 Xijk(8,0,3)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 70 Xijk(0,6,3)=1 Xijk(1,8,3)=1 Xijk(2,1,3)=1 Xijk(3,4,3)=1 Xijk(4,7,3)=1 Xijk(5,2,3)=1 Xijk(6,3,3)=1 Xijk(7,5,3)=1 Xijk(8,0,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.679,78 Xijk(0,6,4)=1 Xijk(1,2,4)=1 Xijk(2,4,4)=1 Xijk(3,5,4)=1 Xijk(4,7,4)=1 Xijk(5,8,4)=1 Xijk(6,3,4)=1 Xijk(7,0,4)=1 Xijk(8,1,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 87.854 Xijk(0,1,0)=1 Xijk(1,6,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(0,8,1)=1 Xijk(8,0,1)=1 Xijk(0,7,2)=1 Xijk(7,0,2)=1 Xijk(0,3,3)=1 Xijk(3,0,3)=1 Xijk(0,2,4)=1 Xijk(2,0,4)=1 Xijk(0,4,5)=1 Xijk(4,0,5)=1 Xijk(0,5,6)=1 Xijk(5,0,6)=1	Yijk(0,1,0)=435 Yijk(1,6,0)=128 Yijk(0,8,1)=251 Yijk(0,7,2)=185 Yijk(0,3,3)=86 Yijk(0,2,4)=1193 Yijk(0,4,5)=279 Yijk(0,5,6)=101

CLUSTER 5			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 55,059 Xijk(0,12,5)=1 Xijk(1,15,5)=1 Xijk(2,8,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(4,16,5)=1 Xijk(5,17,5)=1 Xijk(6,1,5)=1 Xijk(7,14,5)=1 Xijk(8,0,5)=1 Xijk(9,10,5)=1 Xijk(10,13,5)=1 Xijk(11,6,5)=1 Xijk(12,3,5)=1 Xijk(13,11,5)=1 Xijk(14,9,5)=1 Xijk(15,4,5)=1 Xijk(16,5,5)=1 Xijk(17,2,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,12,5)=1 Xijk(1,6,5)=1 Xijk(2,17,5)=1 Xijk(3,9,5)=1 Xijk(4,15,5)=1 Xijk(5,0,5)=1 Xijk(6,13,5)=1 Xijk(7,14,5)=1 Xijk(8,2,5)=1 Xijk(9,11,5)=1 Xijk(10,4,5)=1 Xijk(11,1,5)=1 Xijk(12,3,5)=1 Xijk(13,10,5)=1 Xijk(14,8,5)=1 Xijk(15,7,5)=1 Xijk(16,5,5)=1 Xijk(17,16,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,12,5)=1 Xijk(1,10,5)=1 Xijk(2,0,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(4,16,5)=1 Xijk(5,17,5)=1 Xijk(6,1,5)=1 Xijk(7,14,5)=1 Xijk(8,2,5)=1 Xijk(9,15,5)=1 Xijk(10,3,5)=1 Xijk(11,13,5)=1 Xijk(12,11,5)=1 Xijk(13,6,5)=1 Xijk(14,9,5)=1 Xijk(15,4,5)=1 Xijk(16,5,5)=1 Xijk(17,8,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 441 Xijk(0,16,0)=1 Xijk(2,13,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(8,2,0)=1 Xijk(11,12,0)=1 Xijk(12,6,0)=1 Xijk(13,17,0)=1 Xijk(14,15,0)=1 Xijk(15,8,0)=1 Xijk(16,14,0)=1 Xijk(17,11,0)=1 Xijk(0,5,1)=1 Xijk(1,9,1)=1 Xijk(3,10,1)=1 Xijk(4,1,1)=1 Xijk(5,4,1)=1 Xijk(7,0,1)=1 Xijk(9,3,1)=1 Xijk(10,7,1)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 37 Xijk(0,4,1)=1 Xijk(1,0,1)=1 Xijk(2,13,1)=1 Xijk(4,2,1)=1 Xijk(6,1,1)=1 Xijk(13,6,1)=1 Xijk(0,14,4)=1 Xijk(3,10,4)=1 Xijk(5,9,4)=1 Xijk(7,0,4)=1 Xijk(8,3,4)=1 Xijk(9,15,4)=1 Xijk(10,16,4)=1 Xijk(11,7,4)=1 Xijk(12,5,4)=1 Xijk(14,12,4)=1 Xijk(15,8,4)=1 Xijk(16,17,4)=1 Xijk(17,11,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.934,09 Xijk(0,12,5)=1 Xijk(1,6,5)=1 Xijk(2,8,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(4,15,5)=1 Xijk(5,0,5)=1 Xijk(6,13,5)=1 Xijk(7,14,5)=1 Xijk(8,5,5)=1 Xijk(9,10,5)=1 Xijk(10,1,5)=1 Xijk(11,4,5)=1 Xijk(12,3,5)=1 Xijk(13,11,5)=1 Xijk(14,9,5)=1 Xijk(15,16,5)=1 Xijk(16,17,5)=1 Xijk(17,2,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 134.201 Xijk(0,12,0)=1 Xijk(1,6,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(11,1,0)=1 Xijk(12,13,0)=1 Xijk(13,11,0)=1 Xijk(0,14,1)=1 Xijk(9,10,1)=1 Xijk(10,0,1)=1 Xijk(14,9,1)=1 Xijk(0,15,2)=1 Xijk(4,0,2)=1 Xijk(15,4,2)=1 Xijk(0,8,3)=1 Xijk(3,0,3)=1 Xijk(8,3,3)=1 Xijk(0,5,4)=1 Xijk(5,16,4)=1	Yijk(0,12,0)=2763 Yijk(1,6,0)=266 Yijk(11,1,0)=2364 Yijk(12,13,0)=2647 Yijk(13,11,0)=2519 Yijk(0,14,1)=539 Yijk(9,10,1)=189 Yijk(14,9,1)=352 Yijk(0,15,2)=625 Yijk(15,4,2)=247 Yijk(0,8,3)=512 Yijk(8,3,3)=418 Yijk(0,5,4)=860 Yijk(5,16,4)=174 Yijk(0,17,5)=2040 Yijk(2,7,5)=273 Yijk(17,2,5)=1538

		Xijk(16,0,4)=1 Xijk(0,17,5)=1 Xijk(2,7,5)=1 Xijk(7,0,5)=1 Xijk(17,2,5)=1	

CLUSTER 6			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 107,556 Xijk(0,4,2)=1 Xijk(1,3,2)=1 Xijk(2,0,2)=1 Xijk(3,2,2)=1 Xijk(4,1,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value=1 Xijk(0,3,2)=1 Xijk(1,0,2)=1 Xijk(2,1,2)=1 Xijk(3,4,2)=1 Xijk(4,2,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value=1 Xijk(0,1,1)=1 Xijk(1,3,1)=1 Xijk(2,4,1)=1 Xijk(3,2,1)=1 Xijk(4,0,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 232 Xijk(0,3,0)=1 Xijk(1,4,0)=1 Xijk(2,0,0)=1 Xijk(3,1,0)=1 Xijk(4,2,0)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 84 Xijk(0,1,2)=1 Xijk(1,3,2)=1 Xijk(2,4,2)=1 Xijk(3,2,2)=1 Xijk(4,0,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 943,372 Xijk(0,3,4)=1 Xijk(1,0,4)=1 Xijk(2,4,4)=1 Xijk(3,2,4)=1 Xijk(4,1,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 146.090 Xijk(0,3,0)=1 Xijk(3,0,0)=1 Xijk(0,2,2)=1 Xijk(2,0,2)=1 Xijk(0,4,4)=1 Xijk(4,0,4)=1 Xijk(0,1,5)=1 Xijk(1,0,5)=1	Yijk(0,3,0)=325 Yijk(0,2,2)=176 Yijk(0,4,4)=428 Yijk(0,1,5)=2129

CLUSTER 7			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 69,02 Xijk(0,2,4)=1 Xijk(1,11,4)=1 Xijk(2,1,4)=1 Xijk(3,6,4)=1 Xijk(4,10,4)=1 Xijk(5,0,4)=1 Xijk(6,9,4)=1 Xijk(7,5,4)=1 Xijk(8,7,4)=1 Xijk(9,8,4)=1 Xijk(10,12,4)=1 Xijk(11,13,4)=1 Xijk(12,3,4)=1 Xijk(13,4,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,2,2)=1 Xijk(1,5,2)=1 Xijk(2,1,2)=1 Xijk(3,6,2)=1 Xijk(4,9,2)=1 Xijk(5,10,2)=1 Xijk(6,4,2)=1 Xijk(7,11,2)=1 Xijk(8,7,2)=1 Xijk(9,8,2)=1 Xijk(10,12,2)=1 Xijk(11,13,2)=1 Xijk(12,3,2)=1 Xijk(13,0,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,1,2)=1 Xijk(1,7,2)=1 Xijk(2,13,2)=1 Xijk(3,8,2)=1 Xijk(4,10,2)=1 Xijk(5,11,2)=1 Xijk(6,3,2)=1 Xijk(7,2,2)=1 Xijk(8,9,2)=1 Xijk(9,5,2)=1 Xijk(10,12,2)=1 Xijk(11,0,2)=1 Xijk(12,6,2)=1 Xijk(13,4,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 523 Xijk(0,1,0)=1 Xijk(1,6,0)=1 Xijk(5,9,0)=1 Xijk(6,5,0)=1 Xijk(7,0,0)=1 Xijk(9,12,0)=1 Xijk(12,7,0)=1 Xijk(0,13,1)=1 Xijk(2,4,1)=1 Xijk(3,2,1)=1 Xijk(4,0,1)=1 Xijk(8,3,1)=1 Xijk(10,11,1)=1 Xijk(11,8,1)=1 Xijk(13,10,1)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 17 Xijk(0,13,0)=1 Xijk(1,11,0)=1 Xijk(4,9,0)=1 Xijk(5,4,0)=1 Xijk(8,1,0)=1 Xijk(9,0,0)=1 Xijk(10,5,0)=1 Xijk(11,10,0)=1 Xijk(13,8,0)=1 Xijk(0,6,5)=1 Xijk(2,0,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(6,12,5)=1 Xijk(7,2,5)=1 Xijk(12,3,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.413,11 Xijk(0,6,4)=1 Xijk(1,11,4)=1 Xijk(2,1,4)=1 Xijk(3,10,4)=1 Xijk(4,13,4)=1 Xijk(5,0,4)=1 Xijk(6,4,4)=1 Xijk(7,12,4)=1 Xijk(8,7,4)=1 Xijk(9,5,4)=1 Xijk(10,9,4)=1 Xijk(11,8,4)=1 Xijk(12,3,4)=1 Xijk(13,2,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 204.390 Xijk(0,5,0)=1 Xijk(5,9,0)=1 Xijk(9,10,0)=1 Xijk(10,0,0)=1 Xijk(0,7,1)=1 Xijk(4,0,1)=1 Xijk(7,4,1)=1 Xijk(0,8,2)=1 Xijk(8,0,2)=1 Xijk(0,11,3)=1 Xijk(11,13,3)=1 Xijk(13,0,3)=1 Xijk(0,2,4)=1 Xijk(1,0,4)=1 Xijk(2,1,4)=1 Xijk(0,12,5)=1 Xijk(3,6,5)=1 Xijk(6,0,5)=1 Xijk(12,3,5)=1	Yijk(0,5,0)=431 Yijk(5,9,0)=238 Yijk(9,10,0)=186 Yijk(0,7,1)=592 Yijk(7,4,1)=235 Yijk(0,8,2)=391 Yijk(0,11,3)=451 Yijk(11,13,3)=239 Yijk(0,2,4)=4188 Yijk(2,1,4)=1519 Yijk(0,12,5)=1208 Yijk(3,6,5)=353 Yijk(12,3,5)=443

CLUSTER 8			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 58,606 Xijk(0,1,4)=1 Xijk(1,2,4)=1 Xijk(2,4,4)=1 Xijk(3,5,4)=1 Xijk(4,13,4)=1 Xijk(5,6,4)=1 Xijk(6,9,4)=1 Xijk(7,8,4)=1 Xijk(8,3,4)=1 Xijk(9,0,4)=1 Xijk(10,12,4)=1 Xijk(11,7,4)=1 Xijk(12,11,4)=1 Xijk(13,10,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,13,3)=1 Xijk(1,2,3)=1 Xijk(2,8,3)=1 Xijk(3,9,3)=1 Xijk(4,0,3)=1 Xijk(5,7,3)=1 Xijk(6,1,3)=1 Xijk(7,12,3)=1 Xijk(8,5,3)=1 Xijk(9,6,3)=1 Xijk(10,3,3)=1 Xijk(11,4,3)=1 Xijk(12,11,3)=1 Xijk(13,10,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 3 Xijk(0,7,0)=1 Xijk(3,11,0)=1 Xijk(5,6,0)=1 Xijk(6,8,0)=1 Xijk(7,3,0)=1 Xijk(8,0,0)=1 Xijk(11,5,0)=1 Xijk(0,10,1)=1 Xijk(1,13,1)=1 Xijk(2,9,1)=1 Xijk(4,1,1)=1 Xijk(9,12,1)=1 Xijk(10,4,1)=1 Xijk(12,0,1)=1 Xijk(13,2,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 5.176 Xijk(0,10,0)=1 Xijk(4,0,0)=1 Xijk(5,11,0)=1 Xijk(6,9,0)=1 Xijk(7,6,0)=1 Xijk(9,5,0)=1 Xijk(10,7,0)=1 Xijk(11,4,0)=1 Xijk(0,12,2)=1 Xijk(1,2,2)=1 Xijk(2,3,2)=1 Xijk(3,8,2)=1 Xijk(8,0,2)=1 Xijk(12,13,2)=1 Xijk(13,1,2)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 80 Xijk(0,13,0)=1 Xijk(2,0,0)=1 Xijk(4,2,0)=1 Xijk(7,10,0)=1 Xijk(8,4,0)=1 Xijk(10,8,0)=1 Xijk(13,7,0)=1 Xijk(0,9,1)=1 Xijk(1,12,1)=1 Xijk(3,0,1)=1 Xijk(5,11,1)=1 Xijk(6,3,1)=1 Xijk(9,5,1)=1 Xijk(11,1,1)=1 Xijk(12,6,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.379,78 Xijk(0,1,4)=1 Xijk(1,13,4)=1 Xijk(2,10,4)=1 Xijk(3,5,4)=1 Xijk(4,3,4)=1 Xijk(5,6,4)=1 Xijk(6,11,4)=1 Xijk(7,9,4)=1 Xijk(8,7,4)=1 Xijk(9,2,4)=1 Xijk(10,0,4)=1 Xijk(11,12,4)=1 Xijk(12,8,4)=1 Xijk(13,4,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 163.583 Xijk(0,1,0)=1 Xijk(1,10,0)=1 Xijk(7,8,0)=1 Xijk(8,11,0)=1 Xijk(10,7,0)=1 Xijk(11,0,0)=1 Xijk(0,9,1)=1 Xijk(9,0,1)=1 Xijk(0,2,2)=1 Xijk(2,4,2)=1 Xijk(4,12,2)=1 Xijk(12,0,2)=1 Xijk(0,13,3)=1 Xijk(13,0,3)=1 Xijk(0,5,4)=1 Xijk(5,0,4)=1 Xijk(0,6,5)=1 Xijk(3,0,5)=1 Xijk(6,3,5)=1	Yijk(0,1,0)=3142 Yijk(1,10,0)=2624 Yijk(7,8,0)=1154 Yijk(8,11,0)=145 Yijk(10,7,0)=1314 Yijk(0,9,1)=1186 Yijk(0,2,2)=759 Yijk(2,4,2)=309 Yijk(4,12,2)=191 Yijk(0,13,3)=146 Yijk(0,5,4)=297 Yijk(0,6,5)=1274 Yijk(0,3,5)=219

CLUSTER 9			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 66,145 Xijk(0,9,0)=1 Xijk(1,5,0)=1 Xijk(2,8,0)=1 Xijk(3,4,0)=1 Xijk(4,0,0)=1 Xijk(5,10,0)=1 Xijk(6,7,0)=1 Xijk(7,3,0)=1 Xijk(8,6,0)=1 Xijk(9,1,0)=1 Xijk(10,12,0)=1 Xijk(11,2,0)=1 Xijk(12,11,0)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,7,0)=1 Xijk(1,2,0)=1 Xijk(2,11,0)=1 Xijk(3,4,0)=1 Xijk(4,5,0)=1 Xijk(5,9,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(7,3,0)=1 Xijk(8,6,0)=1 Xijk(9,10,0)=1 Xijk(10,12,0)=1 Xijk(11,8,0)=1 Xijk(12,1,0)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,3,3)=1 Xijk(1,5,3)=1 Xijk(2,10,3)=1 Xijk(3,9,3)=1 Xijk(4,11,3)=1 Xijk(5,2,3)=1 Xijk(6,1,3)=1 Xijk(7,6,3)=1 Xijk(8,4,3)=1 Xijk(9,7,3)=1 Xijk(10,8,3)=1 Xijk(11,12,3)=1 Xijk(12,0,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.581 Xijk(0,6,3)=1 Xijk(1,11,3)=1 Xijk(2,4,3)=1 Xijk(3,5,3)=1 Xijk(4,8,3)=1 Xijk(5,2,3)=1 Xijk(6,1,3)=1 Xijk(7,10,3)=1 Xijk(8,7,3)=1 Xijk(9,3,3)=1 Xijk(10,12,3)=1 Xijk(11,9,3)=1 Xijk(12,0,3)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 261 Xijk(0,11,1)=1 Xijk(1,3,1)=1 Xijk(2,8,1)=1 Xijk(3,2,1)=1 Xijk(4,12,1)=1 Xijk(6,0,1)=1 Xijk(8,6,1)=1 Xijk(10,4,1)=1 Xijk(11,10,1)=1 Xijk(12,1,1)=1 Xijk(0,9,5)=1 Xijk(5,7,5)=1 Xijk(7,0,5)=1 Xijk(9,5,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.207,42 Xijk(0,9,2)=1 Xijk(1,0,2)=1 Xijk(2,5,2)=1 Xijk(3,4,2)=1 Xijk(4,7,2)=1 Xijk(5,8,2)=1 Xijk(6,11,2)=1 Xijk(7,6,2)=1 Xijk(8,10,2)=1 Xijk(9,3,2)=1 Xijk(10,12,2)=1 Xijk(11,2,2)=1 Xijk(12,1,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 134.991 Xijk(0,9,0)=1 Xijk(1,5,0)=1 Xijk(2,6,0)=1 Xijk(3,2,0)=1 Xijk(4,3,0)=1 Xijk(5,0,0)=1 Xijk(6,1,0)=1 Xijk(7,4,0)=1 Xijk(9,7,0)=1 Xijk(0,10,1)=1 Xijk(10,0,1)=1 Xijk(0,8,3)=1 Xijk(8,0,3)=1 Xijk(0,11,5)=1 Xijk(11,0,5)=1 Xijk(0,12,6)=1 Xijk(12,0,6)=1	Yijk(0,9,0)=3680 Yijk(1,5,0)=185 Yijk(2,6,0)=565 Yijk(3,2,0)=1323 Yijk(4,3,0)=2611 Yijk(6,1,0)=326 Yijk(7,4,0)=3333 Yijk(9,7,0)=3459 Yijk(0,10,1)=312 Yijk(0,8,3)=87 Yijk(0,11,5)=247 Yijk(0,12,6)=143

CLUSTER 10			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 129,82 Xijk(0,1,0)=1 Xijk(1,9,0)=1 Xijk(9,0,0)=1 Xijk(0,3,5)=1 Xijk(2,7,5)=1 Xijk(3,5,5)=1 Xijk(4,10,5)=1 Xijk(5,12,5)=1 Xijk(6,4,5)=1 Xijk(7,11,5)=1 Xijk(8,0,5)=1 Xijk(10,8,5)=1 Xijk(11,6,5)=1 Xijk(12,2,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2 Xijk(0,1,1)=1 Xijk(1,6,1)=1 Xijk(3,5,1)=1 Xijk(5,9,1)=1 Xijk(6,3,1)=1 Xijk(9,0,1)=1 Xijk(0,8,4)=1 Xijk(2,12,4)=1 Xijk(4,2,4)=1 Xijk(7,0,4)=1 Xijk(8,10,4)=1 Xijk(10,4,4)=1 Xijk(11,7,4)=1 Xijk(12,11,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 3 Xijk(0,1,0)=1 Xijk(1,9,0)=1 Xijk(3,0,0)=1 Xijk(4,12,0)=1 Xijk(5,4,0)=1 Xijk(6,8,0)=1 Xijk(7,6,0)=1 Xijk(8,5,0)=1 Xijk(9,7,0)=1 Xijk(12,3,0)=1 Xijk(0,11,1)=1 Xijk(2,0,1)=1 Xijk(10,2,1)=1 Xijk(11,10,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.458 Xijk(0,11,1)=1 Xijk(4,5,1)=1 Xijk(5,6,1)=1 Xijk(6,10,1)=1 Xijk(8,4,1)=1 Xijk(10,0,1)=1 Xijk(11,8,1)=1 Xijk(0,9,3)=1 Xijk(1,7,3)=1 Xijk(2,3,3)=1 Xijk(3,1,3)=1 Xijk(7,12,3)=1 Xijk(9,2,3)=1 Xijk(12,0,3)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 284 Xijk(0,12,2)=1 Xijk(3,0,2)=1 Xijk(12,3,2)=1 Xijk(0,8,5)=1 Xijk(1,5,5)=1 Xijk(2,4,5)=1 Xijk(4,6,5)=1 Xijk(5,0,5)=1 Xijk(6,7,5)=1 Xijk(7,11,5)=1 Xijk(8,2,5)=1 Xijk(9,1,5)=1 Xijk(10,9,5)=1 Xijk(11,10,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.626,3 Xijk(0,1,1)=1 Xijk(1,0,1)=1 Xijk(0,9,5)=1 Xijk(2,3,5)=1 Xijk(3,0,5)=1 Xijk(4,6,5)=1 Xijk(5,8,5)=1 Xijk(6,11,5)=1 Xijk(7,12,5)=1 Xijk(8,10,5)=1 Xijk(9,5,5)=1 Xijk(10,4,5)=1 Xijk(11,7,5)=1 Xijk(12,2,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 240.276 Xijk(0,8,0)=1 Xijk(8,10,0)=1 Xijk(10,0,0)=1 Xijk(0,4,1)=1 Xijk(4,0,1)=1 Xijk(0,12,2)=1 Xijk(2,7,2)=1 Xijk(7,0,2)=1 Xijk(12,2,2)=1 Xijk(0,1,3)=1 Xijk(1,9,3)=1 Xijk(9,0,3)=1 Xijk(0,6,4)=1 Xijk(6,11,4)=1 Xijk(11,0,4)=1 Xijk(0,3,5)=1 Xijk(3,5,5)=1 Xijk(5,0,5)=1	Yijk(0,8,0)=627 Yijk(8,10,0)=226 Yijk(0,4,1)=377 Yijk(0,12,2)=781 Yijk(2,7,2)=105 Yijk(12,2,2)=498 Yijk(0,1,3)=1354 Yijk(1,9,3)=126 Yijk(0,6,4)=4450 Yijk(6,11,4)=4102 Yijk(0,3,5)=363 Yijk(3,5,5)=174

CLUSTER 11			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 60,898 Xijk(0,2,3)=1 Xijk(1,9,3)=1 Xijk(2,3,3)=1 Xijk(3,1,3)=1 Xijk(4,11,3)=1 Xijk(5,6,3)=1 Xijk(6,10,3)=1 Xijk(7,0,3)=1 Xijk(8,7,3)=1 Xijk(9,5,3)=1 Xijk(10,4,3)=1 Xijk(11,8,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,1,5)=1 Xijk(1,5,5)=1 Xijk(2,11,5)=1 Xijk(3,4,5)=1 Xijk(4,0,5)=1 Xijk(5,2,5)=1 Xijk(6,10,5)=1 Xijk(7,8,5)=1 Xijk(8,6,5)=1 Xijk(9,3,5)=1 Xijk(10,9,5)=1 Xijk(11,7,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,1,4)=1 Xijk(1,2,4)=1 Xijk(2,7,4)=1 Xijk(3,10,4)=1 Xijk(4,3,4)=1 Xijk(5,8,4)=1 Xijk(6,0,4)=1 Xijk(7,11,4)=1 Xijk(8,9,4)=1 Xijk(9,4,4)=1 Xijk(10,6,4)=1 Xijk(11,5,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 354 Xijk(0,9,3)=1 Xijk(1,2,3)=1 Xijk(2,7,3)=1 Xijk(3,11,3)=1 Xijk(4,8,3)=1 Xijk(5,3,3)=1 Xijk(6,5,3)=1 Xijk(7,6,3)=1 Xijk(8,10,3)=1 Xijk(9,1,3)=1 Xijk(10,0,3)=1 Xijk(11,4,3)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 26 Xijk(0,2,1)=1 Xijk(1,8,1)=1 Xijk(2,3,1)=1 Xijk(3,1,1)=1 Xijk(4,11,1)=1 Xijk(5,7,1)=1 Xijk(6,5,1)=1 Xijk(7,4,1)=1 Xijk(8,10,1)=1 Xijk(9,6,1)=1 Xijk(10,9,1)=1 Xijk(11,0,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.222,16 Xijk(0,9,3)=1 Xijk(1,0,3)=1 Xijk(2,5,3)=1 Xijk(3,7,3)=1 Xijk(4,1,3)=1 Xijk(5,6,3)=1 Xijk(6,4,3)=1 Xijk(7,8,3)=1 Xijk(8,2,3)=1 Xijk(9,11,3)=1 Xijk(10,3,3)=1 Xijk(11,10,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 63.075,7 Xijk(0,11,0)=1 Xijk(11,0,0)=1 Xijk(0,2,1)=1 Xijk(2,5,1)=1 Xijk(5,0,1)=1 Xijk(0,8,2)=1 Xijk(7,0,2)=1 Xijk(8,7,2)=1 Xijk(0,3,3)=1 Xijk(3,4,3)=1 Xijk(4,6,3)=1 Xijk(6,0,3)=1 Xijk(0,9,4)=1 Xijk(9,0,4)=1 Xijk(0,10,5)=1 Xijk(10,0,5)=1 Xijk(0,1,6)=1 Xijk(1,0,6)=1	Yijk(0,11,0)=271 Yijk(0,2,1)=542 Yijk(2,5,1)=256 Yijk(0,8,2)=253 Yijk(8,7,2)=123 Yijk(0,3,3)=787 Yijk(3,4,3)=613 Yijk(4,6,3)=413 Yijk(0,9,4)=251 Yijk(0,10,5)=299 Yijk(0,1,6)=533

CLUSTER 12			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 87,057 Xijk(0,8,2)=1 Xijk(1,3,2)=1 Xijk(2,6,2)=1 Xijk(3,5,2)=1 Xijk(4,2,2)=1 Xijk(5,7,2)=1 Xijk(6,1,2)=1 Xijk(7,0,2)=1 Xijk(8,4,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,3,2)=1 Xijk(1,2,2)=1 Xijk(2,8,2)=1 Xijk(3,7,2)=1 Xijk(4,1,2)=1 Xijk(5,4,2)=1 Xijk(6,5,2)=1 Xijk(7,6,2)=1 Xijk(8,0,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,3,3)=1 Xijk(1,5,3)=1 Xijk(2,6,3)=1 Xijk(3,4,3)=1 Xijk(4,8,3)=1 Xijk(5,2,3)=1 Xijk(6,0,3)=1 Xijk(7,1,3)=1 Xijk(8,7,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.012 Xijk(0,7,1)=1 Xijk(1,2,1)=1 Xijk(2,6,1)=1 Xijk(3,1,1)=1 Xijk(4,3,1)=1 Xijk(5,4,1)=1 Xijk(6,0,1)=1 Xijk(7,8,1)=1 Xijk(8,5,1)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 124 Xijk(0,7,4)=1 Xijk(1,2,4)=1 Xijk(2,3,4)=1 Xijk(3,6,4)=1 Xijk(4,0,4)=1 Xijk(5,1,4)=1 Xijk(6,8,4)=1 Xijk(7,5,4)=1 Xijk(8,4,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1.676,52 Xijk(0,4,3)=1 Xijk(1,7,3)=1 Xijk(2,6,3)=1 Xijk(3,8,3)=1 Xijk(4,2,3)=1 Xijk(5,3,3)=1 Xijk(6,1,3)=1 Xijk(7,5,3)=1 Xijk(8,0,3)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 32.556,9 Xijk(0,8,0)=1 Xijk(2,0,0)=1 Xijk(8,2,0)=1 Xijk(0,3,1)=1 Xijk(3,0,1)=1 Xijk(0,7,2)=1 Xijk(7,0,2)=1 Xijk(0,5,4)=1 Xijk(5,0,4)=1 Xijk(0,4,6)=1 Xijk(1,6,6)=1 Xijk(4,1,6)=1 Xijk(6,0,6)=1	Yijk(0,8,0)=1112 Yijk(8,2,0)=143 Yijk(0,3,1)=143 Yijk(0,7,2)=577 Yijk(0,5,4)=95 Yijk(0,4,6)=821 Yijk(1,6,6)=107 Yijk(4,1,6)=733

CLUSTER 13			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 102,806 Xijk(0,13,2)=1 Xijk(6,0,2)=1 Xijk(12,6,2)=1 Xijk(13,12,2)=1 Xijk(0,7,5)=1 Xijk(1,8,5)=1 Xijk(2,10,5)=1 Xijk(3,2,5)=1 Xijk(4,3,5)=1 Xijk(5,4,5)=1 Xijk(7,11,5)=1 Xijk(8,9,5)=1 Xijk(9,0,5)=1 Xijk(10,1,5)=1 Xijk(11,5,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2 Xijk(0,7,4)=1 Xijk(1,0,4)=1 Xijk(5,13,4)=1 Xijk(7,5,4)=1 Xijk(13,1,4)=1 Xijk(0,9,5)=1 Xijk(2,0,5)=1 Xijk(3,12,5)=1 Xijk(4,3,5)=1 Xijk(6,4,5)=1 Xijk(8,11,5)=1 Xijk(9,8,5)=1 Xijk(10,6,5)=1 Xijk(11,10,5)=1 Xijk(12,2,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 4 Xijk(0,11,0)=1 Xijk(1,12,0)=1 Xijk(3,5,0)=1 Xijk(5,6,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(7,9,0)=1 Xijk(9,1,0)=1 Xijk(11,7,0)=1 Xijk(12,3,0)=1 Xijk(0,10,2)=1 Xijk(2,4,2)=1 Xijk(4,0,2)=1 Xijk(8,2,2)=1 Xijk(10,13,2)=1 Xijk(13,8,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 14.951 Xijk(0,2,0)=1 Xijk(2,13,0)=1 Xijk(10,11,0)=1 Xijk(11,0,0)=1 Xijk(13,10,0)=1 Xijk(0,12,2)=1 Xijk(1,3,2)=1 Xijk(3,4,2)=1 Xijk(4,5,2)=1 Xijk(5,8,2)=1 Xijk(6,0,2)=1 Xijk(7,9,2)=1 Xijk(8,7,2)=1 Xijk(9,6,2)=1 Xijk(12,1,2)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 167 Xijk(0,5,0)=1 Xijk(5,13,0)=1 Xijk(13,0,0)=1 Xijk(0,2,2)=1 Xijk(1,3,2)=1 Xijk(2,9,2)=1 Xijk(3,7,2)=1 Xijk(4,12,2)=1 Xijk(6,0,2)=1 Xijk(7,10,2)=1 Xijk(8,6,2)=1 Xijk(9,1,2)=1 Xijk(10,4,2)=1 Xijk(11,8,2)=1 Xijk(12,11,2)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.280,31 Xijk(0,5,3)=1 Xijk(5,9,3)=1 Xijk(8,0,3)=1 Xijk(9,8,3)=1 Xijk(0,1,5)=1 Xijk(1,10,5)=1 Xijk(2,7,5)=1 Xijk(3,4,5)=1 Xijk(4,2,5)=1 Xijk(6,0,5)=1 Xijk(7,13,5)=1 Xijk(10,3,5)=1 Xijk(11,6,5)=1 Xijk(12,11,5)=1 Xijk(13,12,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 298.333 Xijk(0,6,0)=1 Xijk(6,12,0)=1 Xijk(11,0,0)=1 Xijk(12,11,0)=1 Xijk(0,7,1)=1 Xijk(5,0,1)=1 Xijk(7,5,1)=1 Xijk(0,3,2)=1 Xijk(2,0,2)=1 Xijk(3,4,2)=1 Xijk(4,2,2)=1 Xijk(0,9,3)=1 Xijk(9,0,3)=1 Xijk(0,13,4)=1 Xijk(8,0,4)=1 Xijk(13,8,4)=1 Xijk(0,10,5)=1 Xijk(1,0,5)=1 Xijk(10,1,5)=1	Yijk(0,6,0)=928 Yijk(6,12,0)=681 Yijk(12,11,0)=149 Yijk(0,7,1)=2181 Yijk(7,5,1)=1859 Yijk(0,3,2)=5156 Yijk(3,4,2)=1170 Yijk(4,2,2)=1067 Yijk(0,9,3)=864 Yijk(0,13,4)=2811 Yijk(13,8,4)=191 Yijk(0,10,5)=1109 Yijk(10,1,5)=1017

CLUSTER 15			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 75,277 Xijk(0,3,1)=1 Xijk(1,2,1)=1 Xijk(2,0,1)=1 Xijk(3,4,1)=1 Xijk(4,5,1)=1 Xijk(5,6,1)=1 Xijk(6,9,1)=1 Xijk(7,8,1)=1 Xijk(8,1,1)=1 Xijk(9,7,1)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 1 Xijk(0,2,6)=1 Xijk(1,4,6)=1 Xijk(2,5,6)=1 Xijk(3,7,6)=1 Xijk(4,9,6)=1 Xijk(5,8,6)=1 Xijk(6,1,6)=1 Xijk(7,6,6)=1 Xijk(8,3,6)=1 Xijk(9,0,6)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 3 Xijk(0,5,5)=1 Xijk(1,3,5)=1 Xijk(2,4,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(4,0,5)=1 Xijk(5,9,5)=1 Xijk(6,8,5)=1 Xijk(7,6,5)=1 Xijk(8,2,5)=1 Xijk(9,1,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 10.917 Xijk(0,9,3)=1 Xijk(5,8,3)=1 Xijk(8,0,3)=1 Xijk(9,5,3)=1 Xijk(0,1,4)=1 Xijk(1,7,4)=1 Xijk(2,4,4)=1 Xijk(3,2,4)=1 Xijk(4,0,4)=1 Xijk(6,3,4)=1 Xijk(7,6,4)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 5 Xijk(0,4,5)=1 Xijk(1,3,5)=1 Xijk(2,0,5)=1 Xijk(3,7,5)=1 Xijk(4,5,5)=1 Xijk(5,9,5)=1 Xijk(6,8,5)=1 Xijk(7,6,5)=1 Xijk(8,2,5)=1 Xijk(9,1,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 594,446 Xijk(0,5,6)=1 Xijk(1,2,6)=1 Xijk(2,0,6)=1 Xijk(3,1,6)=1 Xijk(4,6,6)=1 Xijk(5,7,6)=1 Xijk(6,3,6)=1 Xijk(7,8,6)=1 Xijk(8,9,6)=1 Xijk(9,4,6)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 22.063,6 Xijk(0,7,0)=1 Xijk(7,0,0)=1 Xijk(0,5,1)=1 Xijk(5,6,1)=1 Xijk(6,0,1)=1 Xijk(0,3,2)=1 Xijk(3,0,2)=1 Xijk(0,1,3)=1 Xijk(1,0,3)=1 Xijk(0,2,4)=1 Xijk(2,0,4)=1 Xijk(0,9,5)=1 Xijk(9,0,5)=1 Xijk(0,8,6)=1 Xijk(4,0,6)=1 Xijk(8,4,6)=1	Yijk(0,7,0)=8 Yijk(0,5,1)=16 Yijk(5,6,1)=14 Yijk(0,3,2)=140 Yijk(0,1,3)=113 Yijk(0,2,4)=378 Yijk(0,9,5)=20 Yijk(0,8,6)=68 Yijk(8,4,6)=36

CLUSTER 16			
Αντικειμενική 1	**Αντικειμενική 2**	**Αντικειμενική 3**	**Αντικειμενική 4α**
Solution Status= Optimal Solution Value= 320,482 Xijk(0,11,0)=1 Xijk(3,0,0)=1 Xijk(5,3,0)=1 Xijk(7,5,0)=1 Xijk(10,7,0)=1 Xijk(11,12,0)=1 Xijk(12,10,0)=1 Xijk(0,9,4)=1 Xijk(9,0,4)=1 Xijk(0,8,5)=1 Xijk(1,0,5)=1 Xijk(2,1,5)=1 Xijk(4,6,5)=1 Xijk(6,2,5)=1 Xijk(8,4,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 3 Xijk(0,11,0)=1 Xijk(1,0,0)=1 Xijk(6,10,0)=1 Xijk(7,1,0)=1 Xijk(10,7,0)=1 Xijk(11,6,0)=1 Xijk(0,12,4)=1 Xijk(2,3,4)=1 Xijk(3,5,4)=1 Xijk(5,0,4)=1 Xijk(8,2,4)=1 Xijk(12,8,4)=1 Xijk(0,4,5)=1 Xijk(4,9,5)=1 Xijk(9,0,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 8 Xijk(0,3,0)=1 Xijk(1,6,0)=1 Xijk(2,5,0)=1 Xijk(3,11,0)=1 Xijk(5,10,0)=1 Xijk(6,2,0)=1 Xijk(10,12,0)=1 Xijk(11,1,0)=1 Xijk(12,0,0)=1 Xijk(0,8,1)=1 Xijk(7,0,1)=1 Xijk(8,7,1)=1 Xijk(0,9,5)=1 Xijk(4,0,5)=1 Xijk(9,4,5)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 35.487 Xijk(0,12,0)=1 Xijk(2,6,0)=1 Xijk(5,10,0)=1 Xijk(6,5,0)=1 Xijk(7,0,0)=1 Xijk(10,11,0)=1 Xijk(11,7,0)=1 Xijk(12,2,0)=1 Xijk(0,8,1)=1 Xijk(1,0,1)=1 Xijk(3,1,1)=1 Xijk(8,3,1)=1 Xijk(0,9,4)=1 Xijk(4,0,4)=1 Xijk(9,4,4)=1
Αντικειμενική 4β	**Αντικειμενική 5**	**Αντικειμενική 6**	
Solution Status= Optimal Solution Value= 4 Xijk(0,1,0)=1 Xijk(1,11,0)=1 Xijk(2,5,0)=1 Xijk(3,6,0)=1 Xijk(5,10,0)=1 Xijk(6,2,0)=1 Xijk(10,12,0)=1 Xijk(11,3,0)=1 Xijk(12,0,0)=1 Xijk(0,8,3)=1 Xijk(7,0,3)=1 Xijk(8,7,3)=1 Xijk(0,9,4)=1 Xijk(4,0,4)=1 Xijk(9,4,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 2.465,13 Xijk(0,5,0)=1 Xijk(5,7,0)=1 Xijk(6,0,0)=1 Xijk(7,12,0)=1 Xijk(10,6,0)=1 Xijk(11,10,0)=1 Xijk(12,11,0)=1 Xijk(0,1,2)=1 Xijk(1,3,2)=1 Xijk(2,0,2)=1 Xijk(3,8,2)=1 Xijk(8,2,2)=1 Xijk(0,9,4)=1 Xijk(4,0,4)=1 Xijk(9,4,4)=1	Solution Status= Optimal Solution Value= 210.340 Xijk(0,10,0)=1 Xijk(7,0,0)=1 Xijk(10,12,0)=1 Xijk(11,7,0)=1 Xijk(12,11,0)=1 Xijk(0,4,1)=1 Xijk(4,0,1)=1 Xijk(0,1,2)=1 Xijk(1,2,2)=1 Xijk(2,6,2)=1 Xijk(6,0,2)=1 Xijk(0,3,3)=1 Xijk(3,5,3)=1 Xijk(5,0,3)=1 Xijk(0,8,4)=1 Xijk(8,0,4)=1 Xijk(0,9,5)=1 Xijk(9,0,5)=1	Yijk(0,10,0)=293 Yijk(10,12,0)=262 Yijk(11,7,0)=221 Yijk(12,11,0)=250 Yijk(0,4,1)=121 Yijk(0,1,2)=375 Yijk(1,2,2)=291 Yijk(2,6,2)=139 Yijk(0,3,3)=554 Yijk(3,5,3)=399 Yijk(0,8,4)=3158 Yijk(0,9,5)=52