ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΓΙΑ ΤΗ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ ΝΑ ΚΡΙΝΟΥΝ ΒΑΣΕΙ ΠΙΘΑΝΟΚΡΑΤΟΥΜΕΝΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ

Της

Δήμητρας Σαλαβασίλη

Επιβλέποντες καθηγητές:

Κωνσταντίνος Χατζηκυριάκου

Τριαντάφυλλος Τριανταφυλλίδης

Βασίλειος Κόλλιας

Βόλος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Σύγχρονα Περιβάλλοντα Μάθησης και Παραγωγή Διδακτικού Υλικού» με κατεύθυνση τις Φυσικές Επιστήμες του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς όλους τους διδάσκοντες και επισκέπτες καθηγητές του εν λόγω Μεταπτυχιακού Προγράμματος που με τις γνώσεις και την καθοδηγητική τους υποστήριξη άνοιξαν τον δρόμο της γνώσης και της έρευνας μπροστά μου. Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να αποδώσω στον κύριο επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας κύριο Κωνσταντίνο Χατζηκυριάκου, καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας με ειδικότητα τη Μαθηματική Λογική και τη Μαθηματική εκπαίδευση, ο οποίος με την συνεχή βοήθειά του και την πολυδιάστατη σκέψη του με κατεύθυνε αποτελεσματικά σε όλη τη διάρκεια της έρευνας, όπως και τους συν-επιβλέποντες Τριαντάφυλλο Τριανταφυλλίδη, αναπληρωτή καθηγητή με ειδικότητα τη Διδακτική των Μαθηματικών και τον Βασίλειο Κόλλια, επίκουρο καθηγητή με ειδικότητα τη Φυσική και τα Συνεργατικά Περιβάλλοντα Μάθησης υποστηριζόμενα από ΤΠΕ. Χωρίς την καθοδήγηση και την υποστήριξή τους η διπλωματική εργασία θα ήταν αδύνατη.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συμμετέχοντες οι οποίοι με προθυμία συνέβαλαν καταλυτικά στην εκπόνηση της έρευνας.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αφορά την ανάπτυξη διδακτικού υλικού που αποσκοπεί στη βελτίωση της κρίσης των ενηλίκων σχετικά με πιθανοκρατούμενες πληροφορίες. Ακόμη, επιχειρεί να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα του διδακτικού υλικού που χρησιμοποιήσαμε στην εκπαίδευση ενηλίκων.

Η εργασία αποτελεί μία ερευνητική μελέτη, η οποία διαπίστωσε πως οι ενήλικες βελτίωσαν σημαντικά την κρίση τους σε καταστάσεις πιθανοκρατούμενων πληροφοριών του καθημερινού συγκείμενου όταν ανέλυσαν τις πληροφορίες με την βοήθεια απλοϊκής συνολοθεωρίας και με τη χρήση συχνοτήτων αντί μαθηματικών τύπων. Το διδακτικό υλικό υστέρησε σε καταστάσεις όπου οι εσωτερικές προκαταλήψεις σχετικά με τις πιθανότητες και την τυχαιότητα ήταν σθεναρά εδραιωμένες, όπως το πείραμα της ρίψης ζαριών, ενώ φάνηκε ιδιαίτερα αποτελεσματικό σε καταστάσεις όπου επικρατεί η τυποκρατική αντίληψη των μαθηματικών, όπως η επιμέρους ανάλυση μίας ιατρικής εξέτασης και του ποσοστού σφάλματός της.

Συνδέοντας τις ανωτέρω πληροφορίες φαίνεται πως η επεξεργασία πιθανοκρατούμενων πληροφοριών με την βοήθεια απλοϊκής συνολοθεωρίας και με τη χρήση συχνοτήτων αντί με μαθηματικών τύπων μπορεί να είναι αποτελεσματική στην διδασκαλία ενηλίκων. Αυτός ο εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης της γνώσης άπτεται αποτελεσματικά του καθημερινού συγκείμενου και φέρνει στατιστικά σημαντικά αποτελέσματα όσον αφορά την βελτίωση της κρίσης των ενηλίκων, όταν διαχειρίζονται τις αντίστοιχες πληροφορίες.

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

Στην τεχνολογική κοινωνία που βασίζεται στις πληροφορίες, η ανάγκη κατανόησης και εφαρμογής της στατιστικής παιδείας είναι πρωταρχικής σημασίας σε όλα τα κοινωνικά στρώματα (Gal, 2004; Galesic & Garcia-Retamero, 2010; Giovannini, 2008; Schield, 2010; Watson, 2014). Ερευνητικά αποτελέσματα όπως τα παραπάνω δημοσιεύονται τακτικά και σύμφωνα με αυτά στη λήψη αποφάσεων που βασίζονται σε στατιστικά στοιχεία εμπλέκονται με λανθασμένο τρόπο συναισθήματα και πεποιθήσεις (Frost, 2013; Ingram, 2015; Tishkovskaya & Lancaster, 2012). Για παράδειγμα, οι πολίτες πρέπει να κατανοήσουν ότι ερευνητικά αποτελέσματα, όπως τα παραπάνω, προσδιορίστηκαν από ένα δείγμα του υπό μελέτη πληθυσμού και τα συμπεράσματα μπορεί να υπόκεινται σε μεταβλητές που δημιουργούν σύγχυση και σφάλματα δειγματοληψίας. Πράγματι, οι πολίτες χωρίς στατιστική παιδεία δεν μπορούν να διακρίνουν μεταξύ αξιόπιστων και μη αξιόπιστων πληροφοριών και θα έχουν δυσκολίες στην ερμηνεία, την κριτική αξιολόγηση και την επικοινωνία των αντιδράσεων σε τέτοια μηνύματα (English & Watson, 2016b; Gal, 2004, Galesic & Garcia-Retamero , 2010).

Η σημασία της στατιστικής και της έννοιας της πιθανότητας στην καθημερινή ζωή και τον χώρο εργασίας έχει οδηγήσει σε εκκλήσεις για μεγαλύτερη προσοχή στον στατιστικό αλφαβητισμό ή διαφορετική στατιστική παιδεία στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών. Οι επαγγελματικές οργανώσεις όπως το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (2000) στις Ηνωμένες Πολιτείες προωθούν μια ιδιαίτερη προοπτική στις στατιστικές τεχνικές και γενικότερο στον κλάδο της στατιστικής. Οι Franklin et al. (2007, σ. 1) γράφουν, ότι στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με τις αυξανόμενες απαιτήσεις της απασχόλησης, πρέπει να υπάρχει σαφής ενίσχυση των γνώσεων των μαθητών στον τομέα της στατιστικής και της κατανόησης των πιθανοτήτων. Επιπρόσθετα, ζητείται από τα σχολεία να προετοιμάσουν τους μαθητές για να είναι ευέλικτοι στοχαστές, να είναι μαθητές δια βίου και να διαχειριστούν τις πολυπλοκότητες ενός ασαφούς κόσμου (Watson, 2006). Η καλή κατανόηση των βασικών εννοιών κοινωνικής στατιστικής μπορεί να βοηθήσει τους πολίτες να ασχοληθούν με ένα περίπλοκο φάσμα θεμάτων, να συμμετάσχουν ενεργά στις δημόσιες συζητήσεις και να διεκδικήσουν τα δικαιώματά τους (English & Watson, 2016b). Ο στατιστικός αλφαβητισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός σε μια ψηφιακή εποχή όπου παρουσιάζονται διαρκώς στατιστικά στοιχεία από διάφορες ανταγωνιστικές πηγές (Frost, 2013).

Οι κορυφαίοι εκπαιδευτές στον τομέα αυτό όπως οι Garfield και Ben-Zvi (2009) υποστηρίζουν ότι παρά την ευρεία έμφαση στη μεταρρύθμιση στη μάθηση και τη διδασκαλία στατιστικών εννοιών, η στατιστική εκπαίδευση εξακολουθεί να θεωρείται ως αναδυόμενος τομέας σε σύγκριση με άλλους τομείς μάθησης. Οι Tishkovskaya και Lancaster (2010) υποστηρίζουν ότι οι διδασκαλίας στατιστικών εννοιών είναι πρόκληση επειδή εξυπηρετούν φοιτητές/μαθητές με διαφορετικό υπόβαθρο και ικανότητες, μερικοί από τους οποίους μπορεί να είχαν αρνητικές εμπειρίες με τα στατιστικά στοιχεία στο παρελθόν. Ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι ότι η στατιστική εκπαίδευση στα σχολεία επικεντρώνεται στις διαδικαστικές και υπολογιστικές πτυχές των στατιστικών και όχι στην ανάπτυξη εννοιολογικής κατανόησης (Shaughnessy, 2007). Η παραδοσιακή έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων έχει οδηγήσει πολλά άτομα να μην είναι σε θέση να σκεφτούν ή να αιτιολογήσουν στατιστικά οδηγώντας τον τομέα της στατιστικής εκπαίδευσης να επικεντρωθεί στη στατιστική σκέψη και γραφή (Moore, 1997). Επιπλέον, δεν υπάρχει σαφής ορισμός του στατιστικού αλφαβητισμού. Οι εκπαιδευτικοί, οι στατιστικολόγοι και οι ερευνητές σε όλο τον κόσμο δεν έχουν φτάσει σε συναίνεση (English, 2013; Kaplan & Thorpe, 2010; Ridgway, Nicholson, & McCusker, 2011; Schield, 2010).

Στη βιβλιογραφία σχετικά με την εκπαίδευση και τη διδασκαλία της έννοιας της πιθανότητας, έχουν καταγραφεί διάφορα προβλήματα δυσκολίας και έχουν αντιμετωπιστεί μάλλον ανεξάρτητα από ερευνητές τριών διαφορετικών κλάδων: καθηγητές της στατιστικής επιστήμης, ειδικούς στην προ-πανεπιστημιακή μαθηματική εκπαίδευση και ψυχολόγους. Μια αρκετά πλήρης βιβλιογραφία των τριών κατηγοριών εμφανίζεται στους Garfield & Ahlgren (1988).

Η βιβλιογραφία που έχει παραχθεί από καθηγητές στατιστικής σε επίπεδο κολλεγίου υποστηρίζει κυρίως ότι οι σπουδαστές στα εισαγωγικά μαθήματα δεν μαθαίνουν ότι πρέπει να μάθουν και δεν μπορούν να εφαρμόσουν ό,τι μαθαίνουν σε πραγματικά προβλήματα. Έχουν συζητηθεί νέες προσεγγίσεις για τη διδασκαλία των στατιστικών εννοιών, όπως η επίλυση προβλημάτων, αλλά δεν υπάρχει επαρκής εμπειρική έρευνα για να εξακριβωθεί η βελτιωμένη μάθηση των μαθητών που επιτυγχάνεται με τις προτεινόμενες προσεγγίσεις.

Στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, η βιβλιογραφία περιέχει ένα μείγμα από τα παρακάτω (Garfield & Ahlgren, 1988):

1. Δηλώσεις σχετικά με την ανάγκη κατάρτισης σε στατιστικές έννοιες.
2. Περιγραφές του ρόλου που μπορεί να διαδραματίσει η στατιστική στα σχολικά προγράμματα σπουδών.
3. Προτάσεις για τη διδασκαλία των στατιστικών εννοιών.
4. Περιγραφές των δυσκολιών που έχουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών της πιθανότητας και των στατιστικών εννοιών.
5. Περιγραφές των διαισθητικών ιδεών που έχουν ήδη οι μαθητές.

Οι διαισθητικές ιδέες ονομάζονται "παρερμηνείες" και συχνά αναγνωρίζονται ότι είναι ένας διαδεδομένος τρόπος σκέψης του ανθρώπου. Σύμφωνα με αυτές τις ιδέες οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών κατανοούν τις δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σε τομείς σχετικούς με πιθανότητες και στατιστικές, τις δεξιότητες, την αναλογική λογική και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

Το μεγαλύτερο μέρος της πραγματικής έρευνας σχετικά με τις δυσκολίες στην κατανόηση της πιθανότητας εμφανίζεται στο έργο των ψυχολόγων, οι οποίοι αρχικά φαίνεται να έχουν δει το καθήκον τους ως εντοπισμό κοινών λαθών στην πιθανοτική συλλογιστική. Μερικοί από αυτούς τους ερευνητές διδάσκουν επίσης μαθήματα στατιστικής σε επίπεδο κολλεγίων για τους σπουδαστές στην εκπαίδευση και την ψυχολογία και βιώνουν από πρώτο χέρι τις συνέπειες της κακής σκέψης των μαθητών. Πιο πρόσφατα, ενδιαφέρονταν λιγότερο για την πτυχή του σφάλματος και περισσότερο για τη μελέτη της φύση των διαδεδομένων διαισθητικών προκαταλήψεων και παρερμηνειών (Garfield & Ahlgren, 1988).

Η κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας μπορεί να είναι μια πρόκληση. Οι καθημερινές εμπειρίες και οι διαισθήσεις των ατόμων σχετικά με την πιθανότητα συχνά δημιουργούν εμπόδια στην ανάπτυξη μιας σωστής κατανόησης των πιθανοτικών εννοιών (Fischbein 1975; Shaughnessy 1992). Ο Godino και ο Batanero (2004) δηλώνουν ότι η πιθανότητα μπορεί να είναι ένα δύσκολο θέμα για διδασκαλία ακόμη και για μαθητές γυμνασίου και κολλεγίου εν μέρει επειδή οι διαισθήσεις των μαθητών δεν είναι πάντοτε σε συγχρονισμό με τα μαθηματικά της πιθανότητας.

Ας πάρουμε το παράδειγμα του δίκαιου παιχνιδιού. Στα μαθηματικά, η δικαιοσύνη ενός παιχνιδιού σχετίζεται με το να έχουν οι παίκτες ίσες πιθανότητες να κερδίσουν. Ωστόσο, μια καθημερινή έννοια της δικαιοσύνης μπορεί να αποκλίνει από το μαθηματικό νόημα. Για πολλά άτομα όταν παίζουν παιχνίδια ή συμμετέχουν σε διαδικασίες, η δικαιοσύνη δεν αναφέρεται στο αν το παιχνίδι είναι μαθηματικά δίκαιο, αλλά μάλλον στη συμπεριφορά των παικτών κατά την διενέργεια του παιχνιδιού. Ως εκ τούτου, ένα άτομο μπορεί να πιστεύει ότι εάν όλοι οι παίκτες παίζουν σύμφωνα με τους κανόνες και δεν εξαπατούν, ο καθένας έχει εξίσου πιθανή πιθανότητα να κερδίσει. Ο γενικός πληθυσμός μπορεί να μη συσχετίζει τη δικαιοσύνη ενός παιχνιδιού με την πιθανότητα νίκης κι αυτό έχει συνέπειες στην ορθή κατανόηση της έννοιας του δίκαιου παιχνιδιού και τελικά της πιθανότητας (Godino & Batanero, 2004).

1.1. Αναγκαιότητα της έρευνας

Η διόρθωση των παρερμηνειών σχετικά με την πιθανότητα αναγνωρίστηκε ευρέως ως ένας σημαντικός εκπαιδευτικός στόχος για τη στοχαστική διδασκαλία. Ο Shaughnessy, ένας σπουδαίος μελετητής στον τομέα της πιθανοτικής και της στατιστικής εκπαίδευσης, δήλωσε ότι ένας από τους κύριους στόχους της στοχαστικής διδασκαλίας πρέπει να είναι το να παρέχει στους εν δυνάμει μαθητές/φοιτητές στοιχεία για το πώς οι παρανοήσεις της πιθανότητας μπορούν να οδηγήσουν σε εσφαλμένες αποφάσεις (Shaughnessy 1992, σ. 482).

Οι Khazanov & Gourgey (2009) εξέτασαν ένα δείγμα από καθηγητές στατιστικής και διαπίστωσαν ότι η πλειονότητα των ερωτηθέντων συμφώνησαν ότι οι λανθασμένες έννοιες των μαθητών τους και οι πεποιθήσεις σχετικά με τις πιθανότητες πρέπει να αντιμετωπιστούν σε ένα εισαγωγικό μάθημα στατιστικών εννοιών στα κολέγια. Σε μια άλλη μελέτη, ο Khazanov (2008) διαπίστωσε ότι ο αριθμός των εσφαλμένων αντιλήψεων που είχαν οι φοιτητές συσχετίστηκε σημαντικά με την πρόβλεψη της επίτευξής και της απόδοσης τους σε προβλήματα πιθανοτήτων.

Ο Shaughnessy (2007) ανέφερε παραδείγματα από πολλές μελέτες στις οποίες οι μαθητές έχουν παρερμηνείες σχετικά με την πιθανότητα και οι οποίες παρεμποδίζουν την ανάπτυξη σωστών αντιλήψεων ορισμένων σημαντικών στατιστικών εννοιών. Η διδασκαλία της πιθανότητας για εννοιολογική κατανόηση συνεπάγεται μια σημαντική μετατόπιση της έμφασης από την απλή παροχή τύπων, κανόνων και διαδικασιών για υπολογισμούς στην αντιμετώπιση των εσφαλμένων διαισθήσεών και προκαταλήψεων των μαθητών (Garfield, 1995; Konold, 1995; Sharma, 2006; Khazanov & Gourgey, 2009). Ο Khazanov (2005) επεσήμανε ότι ενώ οι παρερμηνείες σχετικά με την πιθανότητα έχουν μελετηθεί εκτενώς σε διαφορετικά επίπεδα και για διαφορετικές ηλικιακές ομάδες (βλέπε π.χ. Fiscbein & Schnarch, 1997) μόνο μερικές μελέτες ανέφεραν προσπάθειες να διορθωθούν παρανοήσεις σχετικά με την πιθανότητα σε μαθήματα κολλεγίων και ακόμη λιγότερα σε εισαγωγικά μαθήματα στατιστικής. Η παρούσα μελέτη σχεδιάστηκε για να αντιμετωπίσει την παραπάνω ανεπάρκεια σε σπουδαστές ΙΕΚ.

1.2. Ερευνητικοί στόχοι και ερευνητικά ερωτήματα

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση των αποτελεσμάτων μιας διαφορετικής διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία στατιστικής και πιθανοτήτων σε ενήλικες. Η μελέτη των αποτελεσμάτων αυτής της έρευνας, θα συμβάλει στην οικοδόμηση χρήσιμης εμπειρίας στο εκπαιδευτικό πλαίσιο της χώρας μας, σχετικά με το αν αυτή η διδακτική πρόταση παρέχει αυξημένες ευκαιρίες μάθησης, ειδικά σε ενήλικες εκπαιδευόμενους, αφού μέχρι τώρα οι έρευνες που έχουν γίνει στη χώρα μας είναι ελάχιστες και οι περισσότερες αναφέρονται σε μαθητές της τυπικής εκπαίδευσης. Παράλληλα η έρευνα αυτή είναι χρήσιμη και στους εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά και συγκεκριμένα το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων σε μαθητές της τυπικής εκπαίδευσης. Τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας είναι:

1. Ποια είναι τα επίπεδα βασικών γνώσεων των ενήλικων αναφορικά με την έννοια της πιθανότητας και την επίλυση προβλημάτων;
2. Σε ποια είδη προβλημάτων πιθανοτήτων αντιμετωπίζουν περισσότερα προβλήματα οι ενήλικες;
3. Είναι αποδοτικό ένα πρόγραμμα παρέμβασης σε ενήλικο πληθυσμό για τη διδασκαλία των πιθανοτήτων με τη χρήση της απλοϊκής συνολοθεωρίας και τη χρήση φυσικών συχνοτήτων αντί μαθηματικών τύπων;

Κεφάλαιο 2. Εκπαίδευση ενηλίκων

2.1 Βασικές αρχές εκπαίδευσης ενηλίκων

Η εκπαίδευση των ενηλίκων (ε.ε.) αποσκοπεί στην καλλιέργεια γνώσεων, δεξιοτήτων και στάσεων, οι οποίες είναι απαραίτητες στο σύγχρονο εργαζόμενο πολίτη ώστε να είναι ικανός να ανταποκριθεί στις ολοένα αυξανόμενες απαιτήσεις της σημερινής προσωπικής και εργασιακής ζωής. Ο Eheazu (1998) υποστηρίζει ότι η ε.ε. δεν εστιάζει στην προετοιμασία των ενηλίκων για τη «ζωή», αλλά στο να τους βοηθήσει να ζήσουν πιο επιτυχημένα ως χρήσιμα και αποδεκτά μέλη της κοινωνίας, συνεισφέροντας στην ανάπτυξή της. Η αντιμετώπιση των προκλήσεων του 21^{ου} αιώνα χρειάζεται υπεύθυνους δραστήριους παγκόσμιους πολίτες, οι οποίοι απαιτείται να διαθέτουν δεξιότητες και αξίες, όπως η κριτική δημιουργική σκέψη, η ενσυναίσθηση και η διαπολιτισμική κατανόηση.

Σύμφωνα με τον Κόκκο (2005) η ε.ε. είναι μια ευρεία έννοια στην οποία μπορούν να αποδοθούν όλες οι μαθησιακές δραστηριότητες που μπορούν να μετέχουν οι ενήλικες. Η UNESCO (1976) ορίζει την ε.ε. *«ως κάθε εκπαιδευτική διεργασία, κάθε περιεχομένου, επιπέδου ή μεθόδου ... όπου άτομα που θεωρούνται ενήλικα από την κοινωνία στη οποία ανήκουν αναπτύσσουν τις ικανότητες τους, εμπλουτίζουν τις γνώσεις τους, βελτιώνουν τα τεχνικά και επαγγελματικά τους προσόντα ή τα προσανατολίζουν σε άλλη κατεύθυνση και επιφέρουν αλλαγές στις στάσεις ή στη συμπεριφορά τους με τη διπλή προοπτική της πλήρους προσωπικής ανάπτυξης και της συμμετοχής σε μια εναρμονισμένη και αυτοδύναμη κοινωνική, οικονομική και πολιτισμική ανάπτυξη»* (UNESCO, 1976 στο Rogers, 1999).

Σημαντικό ρόλο στην ε.ε. διαδραματίζει η στοχαστική μάθηση και γενικότερα ο αναστοχασμός των ερμηνειών που δημιουργεί ο ενήλικας στη προσπάθειά του να απαντήσει στα ερωτήματα που τον απασχολούν. Για το λόγο αυτό θα γίνει αναφορά στην συναισθηματική νοημοσύνη και την σχέση της με τη μετασχηματίζουσα μάθηση.

2.2 Το πεδίο της μάθησης

Υπάρχουν πολλές και διαφορετικές θεωρίες που αποσκοπούν στη διερεύνηση της φύσης της μάθησης. Ο Rogers (1999) υποστηρίζει ότι η μάθηση συντελείται σε ένα αριθμό διαφορετικών πεδίων και χρησιμοποιούνται διαφορετικές στρατηγικές για να υποστηρίξουν τα διάφορα είδη μάθησης. Κάθε θεωρία που αφορά τη μάθηση συμβάλει στην επεξεργασία των παραγόντων που θα συντείνουν στην αποτελεσματική εκπαίδευση των ενηλίκων. Σύμφωνα με τον Κόκκο (2005), σημαντικοί μελετητές αλλά και αρκετοί θεμελιωτές της ε.ε., Dewey, Freire, Kolb, Mezirow, Jarvis, υποστηρίζουν ότι η μάθηση δεν τελειώνει με ένα αποτέλεσμα. Είναι μια συνεχής διεργασία η οποία έχει ως βασικό σημείο αναφοράς την επεξεργασία των εμπειριών και εμπεριέχει την αλληλεπίδραση του ατόμου με το κοινωνικό περίγυρο. Η παραδοσιακή θεωρητική προσέγγιση κατά την οποία εστιάζονται μετρήσιμες συμπεριφορές υποστηρίζει ότι η μάθηση είναι μια σταθερή επαφή, η οποία προκαλείται από εξωτερικά ερεθίσματα, τα οποία επιδρούν στο σύστημα γνώσεων, δεξιοτήτων, στάσεων και συμπεριφορών του ανθρώπου (Tight, 2002).

Ένας ενήλικας μαθαίνει μέσα από ένα ευρύτατο φάσμα δραστηριοτήτων. Παρακάτω παρατίθενται ορισμοί της έννοιας της μάθησης σύμφωνα με τους τρείς σημαντικότερους θεωρητικούς της εκπαίδευσης ενηλίκων. «Η μάθηση είναι μια διεργασία, όπου η γνώση δημιουργείται μέσα σε έναν αέναο κύκλο, όπου το άτομο δρώντας αποκτά συνεχώς νέες εμπειρίες, τις οποίες στη συνέχεια επεξεργάζεται, τις διασυνδέει με τις υπάρχουσες γνώσεις και αντλεί συμπεράσματα με βάσει τα οποία σχεδιάζει νέες δράσεις» (Kolb, 1984). «Η μάθηση είναι μια διεργασία συνεχούς επανερμηνείας των εμπειριών, η οποία επιτρέπει στον άνθρωπο να κατανοεί πληρέστερα τα φαινόμενα, με αποτέλεσμα να συμμετέχει ενεργητικά στο κοινωνικό γίγνεσθαι» (Mezirow, 1990). Μάθηση είναι η διεργασία του μετασχηματισμού της εμπειρίας σε γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις, αξίες, συναισθήματα» (Jarvis, 2004)

Παρά τη διαφορετικότητα των παραπάνω προσεγγίσεων υπάρχει η κοινή πεποίθηση ότι η μάθηση αποτελεί βασικό συστατικό της ανθρώπινης υπόστασης μέσω της οποίας τα άτομα κατανοούν τον εαυτό τους, αντιλαμβάνονται τι συμβαίνει στο κοινωνικό τους περίγυρο και έτσι προσανατολίζονται μέσα στη διαρκώς μεταβαλλόμενη πραγματικότητα.

2.3 Η έννοια της εκπαίδευσης

Σύμφωνα με την UNESCO «Η εκπαίδευση είναι μια επένδυση στο μέλλον των πολιτών και κοινωνιών. Στην αρχή του 21ου αιώνα το δικαίωμα στην εκπαίδευση δεν είναι τίποτε άλλο παρά το δικαίωμα της συμμετοχής στη ζωή του σύγχρονου κόσμου».

Ένας ενήλικας μαθαίνει με πολλούς τρόπους. Μαθαίνει μέσα από την καθημερινή εμπειρία, την παρατήρηση μιας δραστηριότητας ή την αλληλεπίδρασή του με άλλους ανθρώπους. Όταν όμως ένας ενήλικας ξεκινά συνειδητά την μάθηση, έχει συγκεκριμένους στόχους και επιλέγει να παρακολουθήσει ένα συγκροτημένο και σχεδιασμένο πρόγραμμα από κάποιο φορέα παροχής μάθησης, τότε η μορφή της μάθησης παίρνει τον χαρακτήρα της εκπαίδευσης (Κόκκος, 2005).

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι στο επίκεντρο της ε.ε. είναι ο ενήλικας. Στη σημερινή εποχή ορίζουμε ένα άτομο ως «ενήλικο» όταν έχει συμπληρώσει το 18^{ο} έτος της ηλικίας του. Σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία (Brookfield, 2000; Jarvis, 2004; Knowles 1998; Rogers 2002) η έννοια της ενηλικιότητας δεν ορίζεται με βάση την ηλικία ενηλικίωσης ενός ατόμου, αλλά σύμφωνα με την κατάσταση κατά την οποία το άτομο αναγνωρίζει στον εαυτό του στοιχεία ωριμότητας και αυτοπροσδιορισμού και ταυτόχρονα τα ίδια στοιχεία αναγνωρίζονται στο πρόσωπό του και από άλλους ανθρώπους. Η ωριμότητα ως έννοια, περιέχει την ιδέα της πλήρους ανάπτυξης, της προσωπικής ωρίμανσης αλλά και της επέκτασης και αξιοποίησης όλων των ικανοτήτων του ατόμου. Ένα ενήλικο άτομο έχει συσσωρευμένες εμπειρίες, τις οποίες αν αξιοποιήσει θα μπορέσει να επιτύχει μια ισορροπημένη ένταξη στη ζωή και στην κοινωνία, θεωρώντας ως κύριο χαρακτηριστικό της ενηλικιότητας την υπευθυνότητα απέναντι στον εαυτό του και στον περίγυρο του, αλλά και την αυτονομία στη λήψη αποφάσεων (Rogers, 1996).

Συμπερασματικά, οι ενήλικες έχουν ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα οποία θα πρέπει να εξετάζονται και να αναλύονται διεξοδικά πριν το σχεδιασμό ενός εκπαιδευτικού προγράμματος. Για τον Rogers (1999) ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα που έχει ως στόχο την ενίσχυση και προώθηση της ενηλικότητας των εκπαιδευομένων θα πρέπει να επιδιώκει:

- Την προώθηση της προσωπικής ανάπτυξης και την πλήρη αξιοποίηση των ικανοτήτων του ανθρώπου.
- Την ενθάρρυνση της ανάπτυξης της αίσθησης της προοπτικής.
- Την καλλιέργεια της αυτοπεποίθησης, τη δύναμη της επιλογής και δράσης, όπως επίσης

την αύξηση και όχι την άρνηση της ενηλικιότητας.

2.4 Η έννοια της αντίληψης ως δυνατότητα κατανόησης της μάθησης στην ενηλικιότητα

Η αντίληψη είναι μια σύνθετη ψυχολογική διαδικασία κατά την οποία ένα άτομο αναλύει τα χαρακτηριστικά ενός ερεθίσματος, τα συνθέτει και τα συσχετίζει με τις προηγούμενες εμπειρίες του, ώστε να ερμηνεύει τα μηνύματα του εξωτερικού κόσμου. Είναι μια γνωστική λειτουργία και επηρεάζεται τόσο από εσωτερικούς όσο και από εξωτερικούς παράγοντες. Ο άνθρωπος δέχεται ένα σύνολο ερεθισμάτων και από αυτά επιλέγει και αντιλαμβάνεται ό,τι θέλει, ό,τι επιθυμεί και ό,τι νομίζει ότι δίνει απάντηση στα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες του (Καλούρη, 2001).

Σύμφωνα με τον Γεωργογιάννη (2008) η αντίληψη επηρεάζεται από συναισθηματικούς παράγοντες που απορρέουν από την προσωπικότητα του κάθε ανθρώπου. Κάθε άτομο αναπτύσσει συγκεκριμένα συναισθήματα, σύμφωνα με τον τρόπο που αντιλαμβάνεται μια κατάσταση. Τα συναισθήματα που δημιουργούνται σε ένα άτομο έχουν άμεση εξάρτηση από τον τρόπο αντίληψης, δηλαδή το κατά πόσο και με ποιόν τρόπο το άτομο κατανοεί την αιτία που τα προκάλεσε. Τα συναισθήματα μπορεί να είναι θετικά: χαρά, ελπίδα πληρότητα, ενθάρρυνση, μπορεί όμως να είναι και αρνητικά: δυσαρέσκεια, απογοήτευση, απόρριψη ή επίκριση. Σε κάθε περίπτωση είναι σημαντικό το άτομο να μπορεί να αντιλαμβάνεται και να αξιολογεί τα ερεθίσματα που δέχεται και να διατηρεί αυτά που το ενδιαφέρουν, ώστε να αντιλαμβάνεται σύμφωνα με τα ενδιαφέροντά του το δικό του κόσμο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, με τον όρο αντίληψη εννοούμε τη «νοητική λειτουργία με την οποία τα δεδομένα των αισθήσεων οργανώνονται σε ενότητες με νόημα και ερμηνεύονται με βάση τις προηγούμενες εμπειρίες του ατόμου» (Χουντουμάδη, Πατεράκη, 1997). Με αυτό τον τρόπο το άτομο διαμορφώνει αντιλήψεις οι οποίες ως νοητικές δομές περιλαμβάνουν γνώσεις, πεποιθήσεις, κατανοήσεις, προτιμήσεις και απόψεις, στις οποίες βασίζεται και σύμφωνα με αυτές υιοθετεί μια συγκεκριμένη στάση απέναντι σε πρόσωπα και καταστάσεις στην καθημερινή του ζωή (Patterson & Norwood, 2004).

2.5 Τα χαρακτηριστικά των ενήλικων εκπαιδευόμενων

Κάθε ενήλικας εκπαιδευόμενος έχει διαμορφώσει τη ταυτότητα του σχετικά με το ποιος είναι και ποια είναι η θέση του μέσα στην κοινωνία. Κάποιοι μπορεί να επιδιώκουν την υπευθυνότητα και την αυτοδυναμία και να εμπλέκονται ενεργά στη πορεία της μάθησης, κάποιοι άλλοι μπορεί να παραμένουν προσκολλημένοι στην παθητική εκπαίδευση. Η προσωπική ταυτότητα του κάθε ενήλικα εκπαιδευόμενου επηρεάζει την προσαρμογή του στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα, την σύνδεση του με τον εκπαιδευτή ενηλίκων, κατά συνέπια και τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνει. Σύμφωνα με τον Κόκκο (2005) τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που έχουν οι ενήλικες εκπαιδευόμενοι μπορούν να καταταχθούν στα εξής:

- Έρχονται στην εκπαίδευση με συγκριμένους στόχους.
- Έχουν ευρύ φάσμα επαγγελματικών και κοινωνικών εμπειριών.
- Έχουν αποκρυσταλλώσει τους τρόπους με τους οποίους προτιμούν να μαθαίνουν.
- Τείνουν προς τον αυτοκαθορισμό, συνεπώς συχνά επιδιώκουν την ενεργητική συμμετοχή

τους στην πορεία της μάθησης.

- Διαθέτουν πλήθος γνώσεων.

Κεφάλαιο 3. Η έννοια της πιθανότητας

3.1 Τυχαιότητα και πιθανότητα

Η έρευνα σε κάθε τομέα της εκπαίδευσης των μαθηματικών θα πρέπει να υποστηρίζεται από μια επιστημολογική ανάλυση σχετικά με τα αντικείμενα που ερευνώνται. Αυτός ο προβληματισμός είναι ιδιαίτερα σημαντικός όταν εστιάζουμε στην πιθανότητα, όπου συζητούνται ακόμα στην επιστημονική κοινότητα διαφορετικές προσεγγίσεις στην έννοια που επηρεάζουν τόσο την πρακτική της στοχαστικής όσο και τη σχολική διδακτέα ύλη.

Σύμφωνα με τον Hacking (1975), η έννοια της πιθανότητας διαμορφώθηκε από δύο κύριες, αν και διαφορετικές, προοπτικές από την εμφάνισή της. Μια στατιστική πλευρά της πιθανότητας σχετίζεται με την ανάγκη να βρεθούν οι αντικειμενικοί μαθηματικοί κανόνες που διέπουν τις τυχαίες διαδικασίες. Οι πιθανότητες αποδίδονται μέσω δεδομένων που συλλέγονται από έρευνες και πειράματα. Η δεύτερη προοπτική βλέπει την πιθανότητα ως το προσωπικό βαθμό πίστης, ο οποίος εξαρτάται από πληροφορίες που είναι διαθέσιμες στο άτομο που αποδίδει μια πιθανότητα. Οι δύο πλευρές την πιθανότητας αναλύονται σε επιμέρους οπτικές, όπως στην αναστοχαστική οπτική που χρησιμοποιεί την υπάρχουσα μαθηματική θεωρία, την εμπειρική οπτική που τονίζει το ρόλο του πειραματισμού και την αναλυτική οπτική που επιχειρεί να αναλύσει την δομή της πιθανότητας (Batanero 2015). Κάθε μία από αυτές τις απόψεις συνεπάγεται ορισμένα φιλοσοφικά ζητήματα και είναι πιο κατάλληλη για να μοντελοποιήσει συγκεκριμένα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου ή να ληφθεί υπόψη στα προγράμματα σπουδών για συγκεκριμένους μαθητές. Στα επόμενα τμήματα συνοψίζουμε εν συντομία τα κύρια χαρακτηριστικά των προαναφερθέντων απόψεων των πιθανοτήτων, μέρος των οποίων έχουν εισαχθεί στα σχολικά προγράμματα σπουδών.

3.1.1. Διαισθητική οπτική

Η θεωρία της πιθανότητας είναι, κατ' ουσίαν, μια τυπική ενθυλάκωση των διαισθητικών απόψεων της τύχης που οδηγούν στη θεμελιώδη ιδέα της αριθμητικής ποσοτικοποίησης αβέβαιων γεγονότων. Οι διαισθητικές ιδέες για την τύχη εμφανίστηκαν πολύ νωρίς στην ιστορία σε πολλούς διαφορετικούς πολιτισμούς και συνδέθηκαν με προβλήματα που σχετίζονται με τον καθορισμό δίκαιου στοιχήματος σε τυχερά παιχνίδια (Batanero & Díaz 2007; Bennet 1999). Σύμφωνα με τον David (1962), τα κυβικά ζάρια ήταν διαδεδομένα σε πρωτόγονους πολιτισμούς (π.χ. αιγυπτιακούς, κινέζους, ελληνικούς και ρωμαϊκούς πολιτισμούς), οι οποίοι χρησιμοποίησαν τυχερά παιχνίδια προσπαθώντας να προβλέψουν ή να ελέγξουν τη μοίρα στις λήψεις αποφάσεων ή θρησκευτικές τελετές. Είναι ενδιαφέρον ότι η ανάπτυξη της θεωρίας της πιθανότητας είναι πολύ πιο πρόσφατη, σύμφωνα με τον David (1962), με σαφείς λόγους για να εξηγηθεί αυτή η καθυστέρηση.

Οι διαισθητικές ιδέες σχετικά με την τύχη και την πιθανότητα εμφανίζονται επίσης σε μικρά παιδιά που χρησιμοποιούν ποιοτικές εκφράσεις (όπως λέξεις "πιθανές" ή "απίθανες") για να εκφράσουν τον βαθμό πίστης τους στην εμφάνιση τυχαίων γεγονότων. Αυτές οι διαισθητικές ιδέες μπορεί να χρησιμοποιηθούν από έναν δάσκαλο για να βοηθήσουν τα παιδιά να αναπτύξουν καλύτερη κατανόηση και να χρησιμοποιήσουν την πιθανότητα ως εργαλείο για να συγκρίνουν την πιθανότητα διαφορετικών γεγονότων σε έναν κόσμο γεμάτο αβεβαιότητα.

3.1.2. Κλασσική έννοια

Η προηγούμενη θεωρητική πρόοδος στη θεωρία των πιθανοτήτων συνδέθηκε με τα τυχερά παιχνίδια, όπως η ρίψη ζαριών. Για παράδειγμα, στην αλληλογραφία του με τον Fermat, ο Pascal (1654/1963) επιλύει το πρόβλημα της εκτίμησης του δίκαιου ποσού που πρέπει να δοθεί σε κάθε παίκτη αν διακόψει το παιχνίδι λόγω "ανωτέρας βίας", μοιράζοντας αναλογικά τα πονταρίσματα στις πιθανότητες κάθε παίκτη. Σε ένα άλλο παράδειγμα, ο Cardano (1663/1961) συνέστησε στους παίκτες να εξετάσουν τον αριθμό των συνολικών δυνατοτήτων και τον αριθμό των τρόπων που μπορούν να προκύψουν τα ευνοϊκά αποτελέσματα και να συγκρίνουν τους δύο αριθμούς προκειμένου να κάνουν ένα δίκαιο στοίχημα.

Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η αρχική επισημοποίηση αυτής της έννοιας βασίστηκε στην υπόθεση ότι όλα τα πιθανά στοιχειώδη γεγονότα ήταν ισοδύναμα, δεδομένου ότι αυτή η υπόθεση είναι λογική σε πολλά τυχερά παιχνίδια. Στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, που δόθηκε από τον Abraham de Moivre το 1718 στο *Doctrine of Chances* και αργότερα αναδιαμορφώθηκε από τον Laplace το 1814 στο *Philosophical Essay on Probability*, η πιθανότητα είναι απλά το κλάσμα του αριθμού ευνοϊκών περιπτώσεων για ένα συγκεκριμένο συμβάν προς τον αριθμό όλων των πιθανών περιπτώσεων. Αυτός ο ορισμός έχει επικριθεί ευρέως από τη δημοσίευσή του, δεδομένου ότι η υπόθεση της ισοδυναμίας των αποτελεσμάτων είναι υποκειμενική και παρεμποδίζει την εφαρμογή της πιθανότητας σε μια ευρεία ποικιλία φυσικών φαινομένων, όπου η υπόθεση αυτή μπορεί να μην είναι έγκυρη.

3.1.3 Έννοια της συχνότητας

Η σύγκλιση των σχετικών συχνοτήτων για το ίδιο γεγονός σε μια σταθερή τιμή μετά από έναν μεγάλο αριθμό ανεξάρτητων όμοιων δοκιμών ενός τυχαίου πειράματος έχει παρατηρηθεί από πολλούς συγγραφείς. Προσπαθώντας να επεκτείνει το εύρος της πιθανότητας στο προσδόκιμο ζωής και τα ασφαλιστικά προβλήματα, ο Bernoulli (1713/1987) απέδειξε μια πρώτη έκδοση του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών (*Law of Large Numbers*.). Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, η σχετική συχνότητα h_n για ένα δεδομένο συμβάν σε ένα μεγάλο αριθμό δοκιμών θα πρέπει να είναι κοντά στη θεωρητική πιθανότητα p αυτού του γεγονότος. Δεδομένου ότι παρατηρούνται σταθεροποιημένες συχνότητες, αυτό το θεώρημα θεωρήθηκε επίσης ως απόδειξη του αντικειμενικού χαρακτήρα της πιθανότητας (Fine 1971).

Σε αυτή τη συχνή προσέγγιση, που υποστηρίχθηκε αργότερα από τους von Mises (1928/1952) και Renyi (1966/1992), η πιθανότητα ορίζεται ως ο υποθετικός αριθμός προς τον οποίο η σχετική συχνότητα τείνει όταν ένα τυχαίο πείραμα επαναλαμβάνεται άπειρα πολλές φορές.

Δεδομένου ότι μια τέτοια εμπειρική τάση είναι ορατή σε πολλά φυσικά φαινόμενα, αυτός ο συγκεκριμένος ορισμός της πιθανότητας επέκτεινε εκτενώς το εύρος των εφαρμογών. Ένα πρακτικό μειονέκτημα αυτής της συχνότερης άποψης είναι ότι έχουμε μόνο μια εκτίμηση της πιθανότητας που ποικίλλει από μια σειρά επαναλήψεων πειραμάτων (αποκαλούμενων δειγμάτων) σε μια άλλη. Επιπλέον, αυτή η προσέγγιση δεν είναι κατάλληλη όταν δεν είναι δυνατόν να επαναληφθεί ένα πείραμα υπό ακριβώς τις ίδιες συνθήκες (Batanero et al., 2005a, b). Συνεπώς, είναι σημαντικό να καταστήσουμε σαφές στους μαθητές τη διαφορά μεταξύ ενός θεωρητικού μοντέλου πιθανότητας και των δεδομένων συχνότητας από την πραγματικότητα που χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία ενός μοντέλου πιθανότητας. Μερικές φορές αυτή η διαφορά δεν γίνεται ρητά στην τάξη και μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές που πρέπει να χρησιμοποιήσουν αφηρημένες γνώσεις σχετικά με την πιθανότητα επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων από την πραγματική ζωή.

3.1.4. Έννοια της τάσης

Ο Popper (1959) εισήγαγε την ιδέα της τάσης (propensity) ως μέτρο της τάσης ενός τυχαίου συστήματος να συμπεριφέρεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο και ως μια φυσική διάθεση να παράγει ένα αποτέλεσμα κάποιου είδους. Οι σκέψεις του Popper επί του θέματος προκάλεσαν το ενδιαφέρον, καθώς εκείνος μελέτησε όχι μόνο τη φύση της τάσης, αλλά και την λειτουργίας της. Η οντολογική ερμηνεία που δόθηκε φάνηκε πολλά υποσχόμενη ως εναλλακτική οπτική σε σχέση με την ερμηνεία των συχνοτήτων, που ήταν ήδη διαδεδομένη στην μελέτη των πιθανοτήτων (Sapire, 1992).

Η ερμηνεία της πιθανότητας σε σχέση με την τάση είναι αμφιλεγόμενη. Στη μακροπρόθεσμη ερμηνεία, η τάση δεν εκφράζεται με όρους άλλων εμπειρικά επαληθεύσιμων ποσοτήτων και τότε δεν έχουμε καμία μέθοδο εμπειρικής εύρεσης της αξίας μιας τάσης. Όσον αφορά την ερμηνεία μιας ενιαίας περίπτωσης, είναι δύσκολο να προσδιοριστεί μια αντικειμενική πιθανότητα για μεμονωμένα γεγονότα (Gillies 2000). Επίσης, είναι ασαφές αν οι θεωρίες τάσεων μιας τάξης μιλούν για τον υπολογισμό πιθανότητας ή όχι.

3.1.5. Έννοια της λογικής

Οι ερευνητές όπως ο Keynes (1921) και ο Carnap (1950) ανέπτυξαν τις λογικές θεωρίες της πιθανότητας, οι οποίες διατηρούν την κλασική ιδέα ότι οι πιθανότητες μπορούν να καθοριστούν a priori με την εξέταση του χώρου των πιθανοτήτων. Ωστόσο, στις πιθανότητες μπορεί να αποδοθούν άνισα βάρη. Από αυτή την άποψη, η πιθανότητα είναι ένας βαθμός επιρροής που μετρά την υποστήριξη που παρέχεται από κάποια στοιχεία Ε σε μια δεδομένη υπόθεση Η. Μεταξύ της βεβαιότητας (1) και της αδυναμίας (0), είναι δυνατοί όλοι οι άλλοι βαθμοί πιθανότητας. Αυτή η άποψη ενισχύει την επαγωγική λογική, αφού η βεβαιότητα και η ασυμβατότητα μπορούν να θεωρηθούν ως ακραίες περιπτώσεις πιθανότητας.

Ο Carnap (1950) δημιούργησε μια αξιωματική γλώσσα και όρισε μια πιθανότητα ως ένα λογικό βαθμό επιβεβαίωσης. Ο βαθμός επιβεβαίωσης μιας υποθέσεως Η, δεδομένης κάποιας απόδειξης Ε, είναι μια υπό όρους πιθανότητα και εξαρτάται εξ ολοκλήρου από τις λογικές και σημασιολογικές ιδιότητες του Η, του Ε και τις σχέσεις μεταξύ τους. Επομένως, η πιθανότητα ορίζεται μόνο για τη συγκεκριμένη αξιωματική γλώσσα στην οποία οι σχέσεις αυτές γίνονται σαφείς.

Ένα άλλο πρόβλημα στην προσέγγιση αυτή είναι ότι υπάρχουν πολλές πιθανές συναρτήσεις επιβεβαίωσης, ανάλογα με τις πιθανές επιλογές των αρχικών μέτρων και τη γλώσσα στην οποία αναφέρεται η υπόθεση. Ένα άλλο πρόβλημα είναι η επιλογή των κατάλληλων αποδεικτικών στοιχείων Ε με αντικειμενικό τρόπο, δεδομένου ότι το ποσό των αποδεικτικών στοιχείων μπορεί να διαφέρει από άτομο σε άτομο (Batanero & Díaz, 2007).

3.1.6. Υποκειμενική σημασία

Στις προηγούμενες προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν, η πιθανότητα είναι μια "αντικειμενική" τιμή που δίνουμε σε κάθε συμβάν. Ωστόσο, το θεώρημα του Bayes, που δημοσιεύθηκε το 1763, απέδειξε ότι η πιθανότητα για ένα γεγονός μπορεί να αναθεωρηθεί υπό το πρίσμα των νέων διαθέσιμων δεδομένων. Μια απλή εκδοχή αυτού του θεωρήματος δηλώνει ότι όταν οι «a priori» πιθανότητες P (A_i) και η υπό συνθήκη πιθανότητα P ($B|A_i$) για την εμφάνιση του B για κάθε A_i είναι γνωστές για μια σειρά ασυμβίβαστων γεγονότων A_i τέτοια ώστε $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ θα ισχύει:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes, μια αρχική (προγενέστερη) πιθανότητα μπορεί να μετατραπεί σε υπό συνθήκη πιθανότητα χρησιμοποιώντας νέα δεδομένα και η πιθανότητα χάνει τον αντικειμενικό της χαρακτήρα. Μιλώντας για υπό συνθήκη πιθανότητα εννοούμε την αναθεωρημένη ή επικαιροποιημένη πιθανότητα ενός συμβάντος που λαμβάνει χώρα, αφού ληφθούν υπόψη νέες πληροφορίες. Η υπό συνθήκη πιθανότητα υπολογίζεται με την ενημέρωση της προηγούμενης πιθανότητας χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes. Μετά από αυτή την ερμηνεία, ορισμένοι μαθηματικοί (π.χ. Keynes, Ramsey και de Finetti) θεωρούσαν την πιθανότητα ως έναν προσωπικό βαθμό πίστης που εξαρτάται από τη γνώση ή την εμπειρία ενός ατόμου. Ωστόσο, το καθεστώς της προηγούμενης κατανομής σε αυτήν την προσέγγιση επικρίθηκε ως υποκειμενικό, ακόμα και αν ο αντίκτυπος των προηγούμενων μειώσεων από αντικειμενικά δεδομένα, και de Finetti πρότεινε ένα σύστημα αξιωμάτων για να δικαιολογήσει αυτή την άποψη το 1937.

Σε αυτήν την οπτική, η επανάληψη της ίδιας κατάστασης δεν είναι πλέον απαραίτητη για να δώσει μια αίσθηση στην πιθανότητα και για τον λόγο αυτό οι εφαρμογές της πιθανότητας εισέρχονται σε νέους τομείς όπως η πολιτική και η οικονομία, όπου είναι δύσκολο να εξασφαλιστεί η αναπαραγωγή των πειραμάτων. Σήμερα η προσέγγιση του Bayes, η οποία βασίζεται σε αυτή την προσέγγιση, εφαρμόζεται σε πολλούς τομείς.

3.1.7. Αξιωματική θεωρία

Παρά την έντονη φιλοσοφική συζήτηση για τα θεμέλια, οι εφαρμογές της πιθανότητας σε όλες τις επιστήμες και τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας επεκτάθηκαν πολύ γρήγορα. Κατά τη διάρκεια του 20ου αιώνα, διάφοροι μαθηματικοί προσπάθησαν να αξιωματικοποιήσουν τη μαθηματική θεωρία της πιθανότητας. Μετά το έργο του Borel σχετικά με τη θεωρία των μετρήσεων, ο Kolmogorov (1933/1950), ο οποίος επιβεβαίωσε την οπτική των συχνοτήτων (frequentist view), δημιούργησε μια αξιωματική θεωρία.

Η απλότητα του συστήματος αξιωμάτων του Kolmogorov είναι χαρακτηριστική. Ορίζεται ως E μια συλλογή στοιχείων {ε1, ε2, ...}, που ονομάζονται στοιχειώδη γεγονότα και αποτελούν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ως F ένα σύνολο ορισμένων υποσυνόλων του E, που ονομάζονται τυχαία γεγονότα. Τα πέντε αξιώματα για ένα πεπερασμένο σύνολο E είναι (Benton, 1966a,1966b; Feller, 1968; Montgomery & Runger, 2003; Walpole, Myers, Myers & Ye, 2002):

1. Το F είναι ένα σύνολο υποσυνόλων.
2. Το F περιέχει το σύνολο E και το κενό σύνολο.
3. Ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός P(A), που ονομάζεται πιθανότητα A, αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο του A στο F. Έχουμε πάντα $0 \leq P(A) \leq 1$.

4. Η P(F), που ονομάζεται πιθανότητα του F, ισούται με 1 και η πιθανότητα του κενού συνόλου είναι το 0.
5. Αν τα A και B είναι σύνολα του F και δεν έχουν κοινά στοιχεία, ο αριθμός που αποδίδει την ένωσή τους είναι $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$, ενώ αν έχουν κοινά στοιχεία ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

Αυτή η θεωρία θεωρήθηκε αποδεκτή από τις διάφορες σχολές πιθανοτήτων επειδή, με κάποιο συμβιβασμό, τα μαθηματικά της πιθανότητας μπορούν να κωδικοποιηθούν από τη θεωρία του Kolmogorov. Ωστόσο, η ερμηνεία της πιθανότητας θα διαφέρει ανάλογα με την προοπτική που τηρεί κανείς. Η συζήτηση σχετικά με τις έννοιες της πιθανότητας εξακολουθεί να είναι πολύ ζωντανή σε διαφορετικές προσεγγίσεις στα στατιστικά στοιχεία. Αυτή η σχέση μεταξύ πιθανότητας και φιλοσοφίας μπορεί επίσης να εξηγήσει τις διαισθήσεις των ανθρώπων που συχνά έρχονται σε σύγκρουση με τους μαθηματικούς κανόνες της πιθανότητας (Borovcnik et al., 1991).

3.1.8. Σύνοψη διαφορετικών προσεγγίσεων

Η έκθεσή μας υποδηλώνει ότι οι διαφορετικές απόψεις των περιγραφόμενων πιθανοτήτων περιλαμβάνουν συγκεκριμένες διαφορές, όχι μόνο στον ορισμό της ίδιας της πιθανότητας, αλλά και στις σχετικές έννοιες, ιδιότητες και διαδικασίες που έχουν προκύψει για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων που σχετίζονται με κάθε άποψη. Συνοψίζουμε ορισμένες από αυτές τις διαφορές στον Πίνακα 1, μερικώς προσαρμοσμένες από τους Batanero και Díaz (2007).

Πίνακας 1. Στοιχεία που χαρακτηρίζουν τις διαφορετικές απόψεις της πιθανότητας (προσαρμοσμένες από τους Batanero και Díaz 2007, σελ. 117)

Οπτική	Διαδικασία	Ιδιότητες	Μερικά συναφή ζητήματα
Κλασσική	○ Συνδυασμοί ○ Αναλογίες ○ A priori ανάλυση της πειραματικής δομής	○ Ποσοστό ευνοϊκών για όλες τις πιθανές περιπτώσεις ○ Ίση πιθανότητα στοιχειωδών συμβάντων	○ Προσδοκία ○ Δικαιοσύνη
Συχνοτική	○ A posteriori συλλογή στατιστικών στοιχείων ○ Στατιστική ανάλυση δεδομένων ○ Προσαρμογή καμπύλης	○ "Περιορισμός" σχετικών συχνοτήτων μακροπρόθεσμα ○ Στόχος με βάση εμπειρικά δεδομένα ○ Επαναλαμβανόμενο πείραμα	○ Σχετική συχνότητα ○ Κατανομή δεδομένων ○ Σύγκλιση ○ Ανεξαρτησία των δοκιμών
Τασική	○ A priori ανάλυση του πειραματικού συστήματος	○ Φυσική διάθεση ή τάση ○ Εφαρμόζεται σε μεμονωμένες περιπτώσεις	○ Τάση-Ροπή ○ Πιθανότητα πρόκλησης αιτιότητας

		○ Εξαρτάται από τις πειραματικές συνθήκες	
Λογική	○ A priori ανάλυση του χώρου των πιθανοτήτων ○ Επαγωγική λογική	○ Αντικειμενικός βαθμός πεποίθησης ○ Αναθεώρηση με την εμπειρία ○ Γενικεύει τις επιπτώσεις	○ Απόδειξη ○ Υπόθεση ○ Βαθμός εμπλοκής
Υποκειμενική	○ Θεώρημα Bayes ○ Δεσμευμένη πιθανότητα	○ Υποκειμενικός χαρακτήρας ○ Αναθεώρηση με την εμπειρία	○ Πιθανότητα ○ A priori πιθανότητα ○ A posteriori πιθανότητα
Αξιωματική	○ Θεωρία συνόλων ○ Θεωρία άλγεβρας	○ Μετρήσιμη συνάρτηση	○ Δειγματοχώρος ○ Ορισμένα συμβάντα ○ Άλγεβρα συμβάντων

3.1.9. Διαφορετικές απόψεις των πιθανοτήτων στα σχολικά προγράμματα σπουδών και την διδασκαλία

Οι παραπάνω συζητήσεις ήταν πολυποίκιλες και αντικατοπτρίζονται στα σχολικά προγράμματα σπουδών, αν και όλες οι προσεγγίσεις της πιθανότητας δεν προξένησαν το ίδιο ενδιαφέρον. Πριν από το 1970, η κλασσική άποψη της πιθανότητας που βασίζεται στον συνδυαστικό λογισμό κυριάρχησε στο αναλυτικό πρόγραμμα δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε χώρες όπως η Γαλλία (Henry 2010). Δεδομένου ότι η άποψη αυτή βασίζεται έντονα στη συνδυαστική συλλογιστική, η μελέτη της πιθανότητας, πέρα από τα πολύ απλά προβλήματα, ήταν δύσκολη για τους μαθητές.

Η αξιωματική προσέγγιση είναι επίσης κυρίαρχη στη σύγχρονη εποχή των μαθηματικών, επειδή η πιθανότητα χρησιμοποιήθηκε ως ένα σχετικό παράδειγμα της δύναμης της θεωρίας συνόλων. Ωστόσο, τόσο στις κλασσικές όσο και στις αξιωματικές προσεγγίσεις, οι πολλαπλές εφαρμογές πιθανότητας σε διαφορετικές επιστήμες αποκρύπτονταν στους μαθητές. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα θεωρήθηκε από πολλούς δασκάλους ως δευτερεύον μέρος των μαθηματικών, που ασχολούνταν μόνο με τυχερά παιχνίδια και υπήρξε μια τάση να «μειωθεί» η διδασκαλία της πιθανότητας (Batanero 2015).

Σήμερα, με το αυξανόμενο ενδιαφέρον για στατιστικές και τεχνολογικές εξελίξεις, η προσέγγιση της συχνότητας έχει γίνει δημοφιλής. Μια πειραματική εισαγωγή της πιθανότητας ως όριο σχετικών συχνοτήτων προτείνεται σε πολλές προτάσεις σχετικά με τα προγράμματα σπουδών και τα πρότυπα (π.χ. τα κοινά πρότυπα για τα μαθηματικά [CCSSI] 2010, και το εθνικό Council of Teachers of Mathematics [NCTM] 2000) και η πιθανότητα παρουσιάζεται ως ένα θεωρητικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των προβλημάτων που προκύπτουν από τις στατιστικές εμπειρίες. Στο επίπεδο του δημοτικού σχολείου, προτιμάται επίσης μια διαισθητική άποψη, όπου τα παιδιά ξεκινούν από τις διαισθητικές ιδέες τους που σχετίζονται με την πιθανότητα. Η αξιωματική προσέγγιση δεν χρησιμοποιείται στο σχολικό επίπεδο, είναι πολύ τυπική και επαρκής μόνο για εκείνους που παρακολουθούν μελέτες καθαρών μαθηματικών στο μεταδευτεροβάθμιο επίπεδο.

3.2 Γνώση πιθανότητας και λογική

Η πρόσφατη έμφαση στην οπτική των συχνοτήτων και στις ανεπίσημες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των συμπερασμάτων μπορεί να οδηγήσει σε έναν πειρασμό να μειωθεί η διδασκαλία της πιθανότητας και να αυξηθεί η διδασκαλία των προσομοιώσεων - με λίγη αντανάκλαση των κανόνων πιθανοτήτων. Ωστόσο, όπως περιγράφεται από τον Gal (2005), απαιτείται η γνώση και η συλλογιστική πιθανοτήτων σε καθημερινές και επαγγελματικές συνθήκες για όλους τους πολίτες σε περιπτώσεις λήψης αποφάσεων (π.χ. χρηματιστήριο, ιατρική διάγνωση, ψηφοφορία και πολλά άλλα), καθώς και να κατανοήσουμε τη δειγματοληψία και τα συμπεράσματα, ακόμη και σε άτυπες προσεγγίσεις. Επιπλέον, όταν εξετάζεται η κατάρτιση επιστημόνων ή επαγγελματιών (π.χ. μηχανικών, καθηγητών) σε πανεπιστημιακό επίπεδο, απαιτείται μια πιο περίπλοκη γνώση της πιθανότητας. Κατά συνέπεια, ο σχεδιασμός εκπαιδευτικών προγραμμάτων που βοηθούν στην ανάπτυξη πιθανών γνώσεων και συλλογισμών για διάφορους μαθητές απαιτεί την περιγραφή των διαφόρων συνιστωσών του.

Ενώ υπάρχει έντονη συζήτηση σχετικά με τη φύση της στατιστικής σκέψης και τον τρόπο με τον οποίο διαφέρει από τη στατιστική συλλογιστική και τη στατιστική παιδεία (π.χ. Ben-Zvi & Garfield 2004), η συζήτηση των βασικών συνιστωσών της πιθανοτικής συλλογιστικής παραμένει ζήτημα έρευνας. Παρακάτω περιγράφουμε ορισμένα σημεία για να προωθήσουμε τη μελλοντική έρευνα σε αυτό το θέμα.

3.2.1 Ποια είναι η πιθανοτική λογική;

Η πιθανότητα αποτελεί μια ξεχωριστή προσέγγιση στη σκέψη και τη συλλογιστική σχετικά με τα φαινόμενα της πραγματικής ζωής. Ο πιθανολογικός συλλογισμός είναι ένας τρόπος συλλογιστικής που αναφέρεται στις κρίσεις και τη λήψη αποφάσεων υπό αβεβαιότητα και είναι συναφής με την πραγματική ζωή, για παράδειγμα, κατά την αξιολόγηση των κινδύνων (Falk & Konold 1992). Σκέφτεται σε σενάρια που επιτρέπουν την εξερεύνηση και την αξιολόγηση των διαφόρων πιθανών αποτελεσμάτων σε καταστάσεις αβεβαιότητας. Έτσι, η πιθανοτική συλλογιστική περιλαμβάνει την ικανότητα:

- Προσδιορισμού τυχαίων γεγονότων στη φύση, την τεχνολογία και την κοινωνία.
- Ανάλυσης των συνθηκών τέτοιων συμβάντων και απόκτηση κατάλληλης μοντελοποίησης και ορισμό υποθέσεων.
- Κατασκευή μαθηματικών μοντέλων για στοχαστικές καταστάσεις και εξερεύνηση διάφορων σεναρίων και αποτελεσμάτων από αυτά τα μοντέλα.
- Εφαρμογή μαθηματικών μεθόδων και διαδικασιών πιθανοτήτων και στατιστικών.

Ένα σημαντικό βήμα σε οποιαδήποτε εφαρμογή της πιθανότητας σε φαινόμενα πραγματικού κόσμου είναι η μοντελοποίηση τυχαίων καταστάσεων (Chaput et al., 2011). Τα μοντέλα πιθανοτήτων, όπως η διωνυμική ή κανονική κατανομή, μας παρέχουν τα μέσα για τη δομή της πραγματικότητας: αποτελούν σημαντικά εργαλεία για την αναγνώριση και την επίλυση προβλημάτων. Οι γνώσεις σχετικές με την πιθανότητα που σχετίζονται με την κατανόηση καταστάσεων πραγματικής ζωής περιλαμβάνουν έννοιες όπως πιθανότητες υπό όρους, αναλογική λογική, τυχαίες μεταβλητές και προσδοκίες. Είναι επίσης σημαντικό να είναι σε θέση να αξιολογήσει κριτικά την εφαρμογή πιθανοτικών μοντέλων πραγματικών φαινομένων. Από σήμερα, ένας αυξανόμενος αριθμός περιστατικών περιγράφεται με όρους κινδύνου, οι βασικές έννοιες και η συλλογιστική πρέπει να διδαχθούν στο σχολείο ή στο πανεπιστήμιο και πρέπει επίσης να διερευνηθεί η κατανόηση του κινδύνου από τα παιδιά και τους φοιτητές (Martignon 2014; Pange & Talbot 2003).

Κεφάλαιο 4. Στατιστική παιδεία, κατανόηση πιθανοτήτων και διδασκαλία τους

4.1 Ορισμός στατιστικής παιδείας

Αν και η σημασία του στατιστικού αλφαβητισμού διαδίδεται από πολλούς εκπαιδευτικούς, ερευνητές και προγράμματα σπουδών σε διεθνές επίπεδο, οι θεωρήσεις ποικίλλουν τόσο πολύ όσο τα δεδομένα (Batanero, 2002; Gal, 2004; Shaughnessy, 2007). Οι Ben-Zvi και Garfield (2004) υπενθυμίζουν ότι, δεδομένης της σημασίας του στατιστικού γραμματισμού, της σκέψης και της συλλογιστικής, είναι σημαντικό οι άνθρωποι που εργάζονται στον τομέα αυτό να χρησιμοποιούν την ίδια γλώσσα και ορισμούς όταν συζητούν αυτούς τους όρους.

Σύμφωνα με τον Wallman (1993, σ. 1), η στατιστική παιδεία είναι η ικανότητα κατανόησης και κριτικής αξιολόγησης των στατιστικών αποτελεσμάτων που διαπερνούν την καθημερινότητά μας - σε συνδυασμό με την ικανότητα να εκτιμούμε τις συνεισφορές που μπορεί να κάνει η στατιστική σκέψη σε δημόσιο και ιδιωτικό, επαγγελματικές και προσωπικές αποφάσεις . Βλέπουμε στον ορισμό του Wallman (1993) τόσο την προσωπική όσο και την κοινωνική ανάγκη των ατόμων να αναπτύξουν δεξιότητες σε αυτόν τον τομέα. Ο Callingham (2007) υποστηρίζει ότι ένας τέτοιος ορισμός απαιτεί ότι οι σπουδαστές πρέπει να αναπτύξουν όχι μόνο τις μαθηματικές δεξιότητες που απαιτούνται για την κατανόηση των στατιστικών πληροφοριών, αλλά και την εκτίμηση του κοινωνικού πλαισίου μέσα στο οποίο καθορίζονται τα δεδομένα. Οι Chick, Pfannkuch και Watson (2005) συσχετίζουν τη στατιστική παιδεία με την ετοιμότητα των σπουδαστών να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές παραστάσεις δεδομένων για να κατανοήσουν τον κόσμο γύρω τους χρησιμοποιώντας και έννοιες πιθανότητας και αβεβαιότητας.

Σύμφωνα με τους Garfield, delMas και Zieffler (2010), ο στατιστικός αλφαβητισμός περιλαμβάνει την κατανόηση και τη χρήση της βασικής γλώσσας και εργαλείων των στατιστικών: γνώση των βασικών στατιστικών όρων, κατανόηση της χρήσης απλών στατιστικών συμβόλων και αναγνώριση και δυνατότητα ερμηνεύουν διαφορετικές αναπαραστάσεις δεδομένων. Διακρίνονται η στατιστική ικανότητα, η στατιστική συλλογιστική και η στατιστική σκέψη, εξετάζοντας τους τύπους λέξεων που είναι χρήσιμοι στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων για αυτούς τους όρους. Χρησιμοποιούν λέξεις όπως η κριτική, η αξιολόγηση και η γενίκευση της στατιστικής σκέψης (τα υψηλότερα επίπεδα της ταξινόμησης του Bloom) και οι όροι όπως η περιγραφή, η ερμηνεία και η ανάγνωση του στατιστικού αλφαβητισμού.

Ο Gal (2004, σ. 49) ορίζει το στατιστικό αλφαβητισμό ως την ικανότητα των ανθρώπων να ερμηνεύουν και να αξιολογούν με κριτικό πνεύμα στατιστικές πληροφορίες, επιχειρήματα σχετικά με τα δεδομένα ... να συζητούν ή να επικοινωνούν τις αντιδράσεις τους με στατιστικές πληροφορίες, όπως την κατανόηση της σημασίας των πληροφοριών, τις απόψεις τους σχετικά με τις συνέπειες αυτών των πληροφοριών , ή τις ανησυχίες τους σχετικά με την αποδοχή των συγκεκριμένων συμπερασμάτων.

Στην τάξη, οι σπουδαστές θα πρέπει να είναι σε θέση να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα των μελετών και των εκθέσεων των μέσων ενημέρωσης, να είναι σε θέση να θέτουν κρίσιμα και αναστοχαστικά ερωτήματα σχετικά με αυτές τις εκθέσεις και να επικοινωνούν με τις αντιδράσεις όπου απαιτείται. Ακόμη και αν οι σπουδαστές δεν πραγματοποιήσουν μια μελέτη, η κατανόηση των στατιστικών μπορεί να τους βοηθήσει να αξιολογήσουν την ποιότητα των άλλων μελετών και την εγκυρότητα των ευρημάτων τους. Ο Watson (2006) θεωρεί το στατιστικό αλφαβητισμό ως το σημείο συνάντησης του περιγράμματος ευκαιριών και δεδομένων και του καθημερινού κόσμου, όπου οι συναντήσεις περιλαμβάνουν απροσδιόριστα περιβάλλοντα και άμεση λήψη αποφάσεων που βασίζονται στην ικανότητα εφαρμογής στατιστικών εργαλείων, γενικών γνώσεων συμφραζομένων και κρίσιμες δεξιότητες γραμματισμού (σελ. 11). Για τους Watson (2006) και Gal (2004), η αμφισβήτηση ισχυρισμών σε κοινωνικά πλαίσια όπως οι εκθέσεις των μέσων μαζικής ενημέρωσης είναι θεμελιώδους σημασίας για τη στατιστική παιδεία.

Είναι προφανές ότι ο τύπος στατιστικής παιδείας που αναγνωρίζουν οι Gal (2004) και Watson (2006) είναι διαφορετικός από το να είναι σε θέση να διαβάζει και να αξιολογεί δεδομένα και γραφήματα. Από τους ορισμούς του γραπτού γραμματισμού που παρέχονται από τον Gal και τον Watson, πολλές πτυχές συσπειρώνονται για να δημιουργήσουν μια σύνθετη δομή. Η έμφαση στις γνωστικές δεξιότητες, στην συμφραζόμενη κατανόηση, στη διάθεση και στην κριτική σκέψη μπορεί να αποτελέσει πρόκληση για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση. Πρέπει να προσδιοριστεί ένα πλαίσιο για την παροχή πληροφοριών σχετικά με την ανάπτυξη γνωστικών δεξιοτήτων, συμπεριλαμβανομένης της κριτικής σκέψης και της διάθεσης.

4.2 Κατανόηση πιθανοτήτων

Η ανάπτυξη των θεωριών της πιθανότητας και των στατιστικών συμπερασμάτων έχει γεμίσει με αντιπαραθέσεις. Για παράδειγμα, η έννοια της πιθανότητας χρησιμοποιείται συχνά για να αναφερθεί σε δύο είδη γνώσεων: η πιθανότητα τύπου συχνότητας "που αφορά τον εαυτό της με τους στοχαστικούς νόμους τυχαίων διαδικασιών" και την πιθανότητα τύπου πεποιθήσεων "αφιερωμένη στην εκτίμηση εύλογων βαθμών πεποίθησης σε προτάσεις που είναι αυθαίρετες του στατιστικού ιστορικού" (Hacking, 1975; Hacking 2001;). Από το 1654 υπήρξε μια έκρηξη αντιλήψεων στη μαθηματική κοινότητα που ήταν συμβατές με αυτή τη διπλή έννοια της πιθανότητας, παραδείγματος χάριν συχνότερη πιθανότητα, υποκειμενική πιθανότητα, αξιωματική πιθανότητα και πιθανότητα ως τάση (βλ. Von Plato 1994, βλ. Gillies 2000). Ωστόσο, μέχρι σήμερα, οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες συνεχίζουν να συζητούν και να διαπραγματεύονται τις έννοιες της πιθανότητας τόσο για τη θεωρητική της επίδραση όσο και για την εφαρμογή της στην επιστημονική έρευνα. Υπάρχουν υποκειμενιστές, π.χ. de Finetti, οι οποίοι δήλωσαν ότι η συχνότερη ή αντικειμενική πιθανότητα μπορεί να γίνει αισθητή μόνο μέσω προσωπικών πιθανοτήτων. Υπάρχουν συχνότεροι, π.χ. von Mises, οι οποίοι υποστηρίζουν ότι οι συχνότερες έννοιες είναι οι μόνες που είναι βιώσιμες. Σύμφωνα με τον Hacking (1975), αν και οι περισσότεροι άνθρωποι που χρησιμοποιούν την πιθανότητα δεν δίνουν προσοχή σε τέτοιες διακρίσεις, οι εξτρεμιστές αυτών των σχολικών θεωριών "υποστηρίζουν σθεναρά ότι η διάκριση είναι μια απάτη, γιατί υπάρχει μόνο ένα είδος πιθανότητας" (ibid p 15).

Όπως σημειώνεται από τον Nilsson (2003), η διαμάχη γύρω από τις θεωρίες της πιθανότητας και του στατιστικού συμπερασμού θέτει μία κρίσιμη ερώτηση για τους εκπαιδευτικούς: Τι διδάσκουμε; Οι πρακτικές διδασκαλίας και η έρευνα που παρακάμπτουν αυτή την ερώτηση θα οδηγήσουν πιθανώς σε βραχυπρόθεσμο σχεδιασμό, ο οποίος δεν λαμβάνει υπόψη τις συνέπειες των μαθητών που μαθαίνουν μακροπρόθεσμα. Επίσης, καθιστά το γεγονός ότι οι ερευνητές σε ψυχολογικές και διδακτικές μελέτες σχετικά με την πιθανότητα και τις στατιστικές τείνουν να διαφέρουν ως προς τη χρήση της ορολογίας. Αυτό καθιστά προβληματική τόσο την επικοινωνία των αποτελεσμάτων της έρευνας (Shaughnessy, 1992), όσο και την εφαρμογή των αποτελεσμάτων της έρευνας στην τάξη (Hawkins & Kapadia 1984). Στο πλαίσιο αυτό, θα δώσω πρώτα μια σύντομη επισκόπηση των θεωριών της πιθανότητας και του στατιστικού συμπερασμού. Θα επισημανθούν οι εννοιολογικές πολυπλοκότητες της πιθανότητας και του στατιστικού συμπερασμού, οι οποίες ελπίζω ότι θα με βοηθήσουν στις λεπτότητες της κατανόησης των εκπαιδευτικών και στην πρόβλεψη των δυσκολιών τους να κατανοήσουν αυτές τις ιδέες με διαφορετικούς τρόπους.

4.3. Διδασκαλία πιθανοτήτων

Ένας αριθμός ερευνητών χρησιμοποίησε μοντέλα υπολογιστών για να διδάξει θέματα σχετικά με την πιθανότητα και να αντιμετωπίσει εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών. Ο Krishnamachari (1988) διερεύνησε πώς η χρήση προσομοιώσεων υπολογιστών διευκόλυνε την κατανόηση των βασικών εννοιών της πιθανότητας από τους μαθητές. Χρησιμοποίησε βιβλία εργασίας με προβλήματα που βασίζονται σε προσομοιώσεις υπολογιστών. Η αξιολόγηση έδειξε ότι οι σπουδαστές κατανοούσαν τις έννοιες της πιθανότητας που διερευνήθηκαν στη μελέτη. Ο Konold (1989) χρησιμοποίησε μια παρέμβαση προσομοίωσης ηλεκτρονικών υπολογιστών σε μια προσπάθεια να επηρεάσει τις παρερμηνείες των μαθητών. Τα αποτελέσματα ήταν μικτά. Ορισμένοι φοιτητές άλλαξαν την ερμηνεία τους ενώ άλλοι επέμεναν στις λανθασμένες έννοιές τους. Οι Garfield και delMas (1989) που χρησιμοποίησαν ένα πρόγραμμα υπολογιστή έλαβαν επίσης μικτά αποτελέσματα. Ενώ ορισμένοι μαθητές άλλαξαν τις ιδέες τους σχετικά με την έννοια της πιθανότητας έπειτα από τη χρήση του προγράμματος, άλλοι συνέχισαν τις παρανοήσεις τους σχετικά με το μέγεθος και την μεταβλητότητα του δείγματος. Σύμφωνα με τον Snee (1993), οι υπολογιστικές προσομοιώσεις μπορεί να μην είναι χρήσιμες για την αλλαγή των παρερμηνειών σχετικά με την πιθανότητα σε ορισμένους μαθητές. Παρόλα αυτά, άλλοι ερευνητές διαπίστωσαν ότι η διδασκαλία με ηλεκτρονικούς υπολογιστές μπορεί να διευκολύνει την εννοιολογική κατανόηση της πιθανότητας, επιτρέποντας στους μαθητές να διερευνήσουν και να εκπροσωπήσουν στοχαστικά μοντέλα, να χειριστούν τις παραμέτρους, να διαφοροποιήσουν τις υποθέσεις και να αναλύσουν τα δεδομένα (Jones et al, 2007).

Οι Keeler και Steinhorst (2001) χρησιμοποίησαν μια προσέγγιση στην οποία οι αριθμητικές πληροφορίες παρουσιάστηκαν με τη μορφή συχνοτήτων παρά με κλάσματα, δεκαδικά ψηφία ή ποσοστά. Επικεντρώθηκαν στην έρευνα από τους Cosmides και Tooby (1996), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι μαθητές έχουν καλύτερη σχέση με την καταμέτρηση των πραγμάτων. Οι Keeler και Steinhorst υπογραμμίζουν τη χρήση συχνοτήτων στο πλαίσιο του κονστρουκτιβιστικού πλαισίου για την ανάπτυξη της κατανόησης από τους μαθητές των εννοιών, όπως η ανεξαρτησία και η τυχαιότητα. Χρησιμοποίησαν επίσης απλές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για να επιτρέψουν στους μαθητές να επικεντρωθούν στη μάθηση σχετικά με τις πιθανότητες που σχετίζονται με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές χωρίς να μπλοκάρουν στη μηχανική των πρότυπων κανονικών πινάκων και των z-score πινάκων (πινάκων τυπικής απόκλισης). Οι Keeler και Seinhorst δεν αναφέρθηκαν σε καμία μελέτη που μέτρησε την αποτελεσματικότητα της παραπάνω προσέγγισης. Ενθάρρυναν άλλους ερευνητές να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται την πιθανότητα να αλλάξουν ως αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης.

Ο DelMas και ο Bart (1989) χρησιμοποίησαν μια εκπαιδευτική δραστηριότητα που απαιτούσε μια ομάδα μαθητών να αξιολογήσουν τις προβλέψεις με βάση την διαισθητική κατανόησή τους, ενώ η άλλη ομάδα δεν ήταν υποχρεωμένη να εκτελέσει αυτήν την αξιολόγηση. Διαπίστωσαν ότι η ομάδα που απαιτείται για την αξιολόγηση των προβλέψεων ήταν σημαντικά καλύτερη σε μια δοκιμασία από την άλλη ομάδα. Ο Garfield and Chance (1999) κατέδειξαν σημαντικές αλλαγές στην απόδοση των σπουδαστών σε αντικείμενα που έχουν σχεδιαστεί για να εκτιμήσουν την κατανόηση του πώς το μέγεθος του δείγματος σχετίζεται με το σχήμα και τη μεταβλητότητα της κατανομής δειγματοληψίας. Η δραστηριότητα ζήτησε από τους μαθητές να επιλέξουν μεταξύ ενός συνόλου γραφικών αυτό που πιθανότατα αντιπροσωπεύει μια κατανομή δειγματοληψίας από έναν πληθυσμό, δεδομένου ενός συγκεκριμένου μεγέθους δείγματος. Μετά από μια πρόβλεψη, οι μαθητές χρησιμοποίησαν λογισμικό υπολογιστή για να προσομοιώσουν τη κατανομή δειγματοληψίας και να συγκρίνουν τα αποτελέσματα με τις προβλέψεις τους. Ενώ ένας σημαντικός αριθμός μαθητών βρέθηκε να ξεπερνά τις παρανοήσεις τους, οι μετέπειτα μελέτες αποκάλυψαν ότι για μερικούς από αυτούς τα κέρδη ήταν βραχυπρόθεσμα (delMas, Garfield, & Chance, 2002).

Οι Hirsh & O'Donnell (2001) χρησιμοποίησαν το μέσο που ανέπτυξαν για τον προσδιορισμό της απόκλισης της αντιπροσωπευτικότητας για να προσδιορίσουν την αποτελεσματικότητα ορισμένων προσεγγίσεων που αποσκοπούν στη διόρθωση αυτής της παρερμηνείας. Στην εκπαιδευτική παρέμβαση που πραγματοποίησαν, χρησιμοποιήθηκαν τρεις μέθοδοι ενεργοποίησης και επίλυσης γνωστικών συγκρούσεων: άμεση διδασκαλία, ατομικές δραστηριότητες και δραστηριότητες μικρών ομάδων. Η αποτελεσματικότητα των τριών μοντέλων παρέμβασης συγκρίθηκε με μια ομάδα ελέγχου που δεν σχεδιάστηκε ειδικά για να προκαλέσει γνωστικές συγκρούσεις. Αν και οι ερευνητές κατέγραψαν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα σε τμήματα, χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση της γνωσιακής σύγκρουσης, η βελτίωση δεν έφθασε στο επίπεδο της στατιστικής σημαντικότητας.

Ο Fast (2001) χρησιμοποίησε επιτυχώς αναλογίες και συχνότητα για να διευκολύνει την εννοιολογική ανακατασκευή κοινών παρερμηνειών σχετικά με την πιθανότητα στους μαθητές γυμνασίου. Διαπίστωσε ότι η μέθοδος του οδήγησε σε σταθερά αποτελέσματα. Οι μαθητές που δοκιμάστηκαν μισό χρόνο μετά τη παρέμβαση διατηρούσαν τις σωστές έννοιες και ένα σημαντικό ποσοστό από αυτούς δεν εμφάνιζε ενδείξεις παρερμηνειών

4.3.1 Θεμελιώδεις Πιθανοτικές Ιδέες

Ένα βασικό σημείο στην διδασκαλίας της έννοιας της πιθανότητας είναι να προβληματιστούν οι εμπλεκόμενοι για το κύριο περιεχόμενο που πρέπει να συμπεριληφθεί σε διαφορετικά εκπαιδευτικά επίπεδα. Ο Heitele (1975) πρότεινε έναν κατάλογο θεμελιωδών πιθανοτικών εννοιών που διαδραμάτισαν βασικό ρόλο στην ιστορία της πιθανότητας και αποτελούν τη βάση της σύγχρονης θεωρίας της πιθανότητας. Ταυτόχρονα, οι άνθρωποι συχνά έχουν εσφαλμένες διαισθήσεις σχετικά με το νόημα ή την εφαρμογή τους, ελλείψει διδασκαλίας. Αυτός ο κατάλογος περιλαμβάνει τις ιδέες του τυχαίου πειράματος και του δειγματοχώρου, τον κανόνα προσθήκης και πολλαπλασιασμού, την ανεξαρτησία και την πιθανότητα υπό συνθήκη, τις τυχαίες μεταβλητές και την κατανομή, τους συνδυασμούς και τις μεταθέσεις, τη σύγκλιση, τη δειγματοληψία και την προσομοίωση. Παρακάτω παραθέτουμε εν συντομία κάποιες από αυτές τις ιδέες, οι οποίες αναλύθηκαν από τον Batanero et al. (2005α, β):

- Τυχαιότητα: Αν και η τυχαιότητα είναι μια θεμελιώδης έννοια στην πιθανότητα, είναι μια "ασαφής" έννοια, που δεν ορίζεται πάντοτε στα εγχειρίδια. Η έρευνα δείχνει τη συνύπαρξη διαφορετικών ερμηνειών καθώς και παρανοήσεων που έχουν οι φοιτητές και προτείνει την ανάγκη να ενισχυθεί η κατανόηση της τυχαιότητας στους μαθητές (Batanero 2015).
- Γεγονότα και δειγματοχώρος: Ορισμένα άτομα επικεντρώνονται μόνο σε ένα γεγονός, αφού η σκέψη τους είναι κυρίως ντετερμινιστική (Langrall & Mooney 2005). Στη συνέχεια, είναι σημαντικό αυτά τα άτομα να κατανοήσουν την ανάγκη να ληφθούν υπόψη όλα τα διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα σε ένα πείραμα για να υπολογιστεί η πιθανότητά του.
- Συνδυαστική απαρίθμηση και μέτρηση: Η συνδυαστική χρησιμοποιείται για την καταγραφή όλων των συμβάντων σε ένα χώρο δείγματος ή για την καταμέτρηση (χωρίς

καταχώρηση) όλων των στοιχείων του. Αν και στη συχνότερη προσέγγιση δεν χρειαζόμαστε συνδυαστικά για να υπολογίσουμε την αξία της πιθανότητας, χρειάζεται συνδυαστική συλλογιστική σε άλλες καταστάσεις, για παράδειγμα, για να κατανοήσουμε πώς διαμορφώνονται τα γεγονότα σε ένα σύνθετο πείραμα ή να κατανοήσουμε πώς μπορούν να γίνουν διαφορετικά δείγματα του ίδιου μεγέθους να επιλέγονται από έναν πληθυσμό. Ο συνδυαστικός συλλογισμός είναι δύσκολος. Ωστόσο, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν εργαλεία όπως διαγράμματα δέντρων για να βοηθήσουν τους μαθητές να ενισχύσουν αυτό το συγκεκριμένο είδος συλλογισμού.

- Ανεξαρτησία και υπό συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότητα: Η έννοια της ανεξαρτησίας είναι σημαντική για την κατανόηση των προσομοιώσεων και των εμπειρικών εκτιμήσεων της πιθανότητας μέσω της συχνότητας, καθώς όταν επαναλαμβάνουμε τα πειράματα απαιτούμε την ανεξαρτησία των δοκιμών. Οι πιθανότητες υπολογισμού σε σύνθετα πειράματα απαιτούν κάποιον να αναλύσει εάν τα πειράματα εξαρτώνται ή όχι. Τέλος, η ιδέα της υπό όρους πιθανότητας, είναι απαραίτητη για να κατανοήσουμε πολλές έννοιες στην πιθανότητα και στις στατιστικές, όπως τα διαστήματα εμπιστοσύνης ή οι δοκιμές υποθέσεων.
- Κατανομή πιθανότητας και προσδοκία: Παρόλο που υπάρχει σχετική έρευνα αναφορικά με τις κατανομές, το μεγαλύτερο μέρος αυτής της έρευνας επικεντρώνεται στην κατανομή δεδομένων ή στη κατανομή δειγμάτων. Ένας άλλος τύπος κατανομής συνδέεται με την τυχαία μεταβλητή, μια ισχυρή ιδέα στην πιθανότητα, καθώς και τη σχετική ιδέα της προσδοκίας. Ορισμένα μοντέλα κατανομής πιθανότητας σε ευρεία χρήση είναι οι δυωνυμικές, ομοιόμορφες και κανονικές κατανομές.

- Σύγκλιση και νόμοι μεγάλων αριθμών: Η προοδευτική σταθεροποίηση της σχετικής συχνότητας ενός δεδομένου αποτελέσματος σε μεγάλο αριθμό δοκιμών έχει παρατηρηθεί εδώ και αιώνες. Ο Bernoulli απέδειξε την πρώτη έκδοση του νόμου μεγάλου αριθμού που δικαιολόγησε τον συχνότερο ορισμό της πιθανότητας. Σήμερα η συχνότερη προσέγγιση, όπου η πιθανότητα είναι μια εκτίμηση της σχετικής συχνότητας ενός αποτελέσματος σε μια μακρά σειρά δοκιμών, προωθείται στη διδασκαλία. Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν ότι κάθε αποτέλεσμα είναι απρόβλεπτο και ότι η κανονικότητα επιτυγχάνεται μόνο μακροπρόθεσμα. Ταυτόχρονα, οι ηλικιωμένοι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να κάνουν διάκριση μεταξύ μιας εκτίμησης συχνότητας (μια τιμή που ποικίλλει) και μιας πιθανότητας (που είναι πάντα μια θεωρητική τιμή) (Chaput et al., 2011).
- Δειγματοληψία και κατανομή δειγματοληψίας: Δεδομένου ότι σπάνια μπορούμε να μελετήσουμε τους πλήρεις πληθυσμούς, οι γνώσεις μας για έναν πληθυσμό βασίζονται σε δείγματα. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις ιδέες της αντιπροσωπευτικότητας του δείγματος και της μεταβλητότητας δειγματοληψίας. Οι κατανομές δειγματοληψίας περιγράφουν την παραλλαγή ενός συνοπτικού μέτρου (π.χ. μέσου δειγμάτων) κατά μήκος διαφορετικών δειγμάτων από τον ίδιο πληθυσμό. Αντί να χρησιμοποιεί την ακριβή κατανομή δειγματοληψίας (π.χ. μια κανονική καμπύλη), η διδασκαλία ευνοεί σήμερα τη χρήση προσομοίωσης ή επαναδειγματοληψίας για να βρει μια εμπειρική κατανομή δειγματοληψίας. Αυτή είναι μια κατάλληλη στρατηγική διδασκαλίας, αλλά οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν ότι, όπως και κάθε εκτίμηση, η κατανομή της εμπειρικής δειγματοληψίας προσεγγίζει μόνο τη θεωρητική κατανομή δειγματοληψίας.

4.3.2 Στοχεύοντας τη διδασκαλία και εκμάθηση της πιθανότητας

Οι μαθητές βιώνουν την πιθανότητα στις καθημερινές τους δραστηριότητες χωρίς να κατανοούν τις πραγματικές μαθηματικές έννοιες στις οποίες βασίζονται αυτές οι δραστηριότητες. Προς στήριξη αυτού του ισχυρισμού, οι Kazima και Adler (2006b) υπογραμμίζουν ότι η καθημερινή εμπειρία των μαθητών να πετάξουν ένα νόμισμα δεν περιλαμβάνει αναγκαστικά την κατανόηση της πραγματικής μαθηματικής ανεξαρτησίας. Η επίπτωση είναι ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να έχουν βαθιά εννοιολογική κατανόηση της πιθανότητας να παρέχουν ευκαιρίες για τους εκπαιδευόμενους να αναπτύξουν εννοιολογική κατανόηση. Ενόψει αυτού, ο Gal (2009) τονίζει την ιδέα των Kazima και του Adler (2006b), υποδεικνύοντας ότι οι εκπαιδευτικοί δεν πρέπει να υποθέτουν ότι οι δραστηριότητες που δεν έχουν ουσία δεν θα επιτρέψουν στους εκπαιδευόμενους να ερμηνεύσουν, να προβληματιστούν και να σκεφτούν κριτικά τις διάφορες πιθανότητες που αντιμετωπίζουν στην πραγματική ζωή. Ο Gal (2009) δείχνει περαιτέρω ότι η εκμάθηση της έννοιας της πιθανότητας δεν είναι η ρίψη ενός ζαριού (κλασικές καταστάσεις πιθανότητας), αλλά είναι για τους μαθητές να ερμηνεύουν τις καταστάσεις και να κάνουν κάποιες προβλέψεις σε πραγματικό περιβάλλον.

Με βάση αυτά τα επιχειρήματα, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν ευκαιρίες να περιγράψουν την σκέψη και την κατανόησή τους μέσω της χρήσης της σωστής γλώσσας πιθανοτήτων. Από την παραπάνω συζήτηση, είναι προφανές ότι η εστίαση είναι στην κατανόηση των εννοιών της πιθανότητας μέσω της βιωματικής μάθησης. Σημαίνει ότι οι σχετικές έννοιες θα πρέπει να εξηγούνται καλύτερα με τη βιωματική μάθηση κάνοντας πρώτα δραστηριότητες που θα βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια. Μια άλλη σημαντική πτυχή που πρέπει να εξεταστεί είναι ότι ο σκοπός της εκμάθησης μιας συγκεκριμένης πτυχής πρέπει να αποσαφηνιστεί για τους εκπαιδευόμενους να επικεντρώσουν την προσοχή τους στη μάθηση.

Επιπλέον, οι Kandermir και Gür (2009) συμφωνούν με τους Kazima και Adler (2006b) ότι η πιθανότητα θα μπορούσε να γίνει κατανοητή με τη χρήση μιας μεθόδου επίλυσης προβλημάτων. Αυτή η προσέγγιση εξηγείται ως μια διαδικασία στην οποία χρησιμοποιούνται αμφισβητήσιμες ερωτήσεις ανοικτού τύπου, οι οποίες απαιτούν επίσης αποκλίνουσες σκέψεις. Έχουν επίσης δείξει ότι είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να κατανοήσουν τις πολιτιστικές πρακτικές και τις σχετικές διαισθήσεις που έχουν οι μαθητές σχετικά με τα ζάρια, τα οποία αντλούνται από τις καθημερινές εμπειρίες τους. Σε αυτό το πλαίσιο, υπογραμμίζεται ότι η στρατηγική επίλυσης προβλημάτων είναι απαραίτητη για να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες και τη χρησιμοποιούμενη γλώσσα, καθώς και την αντιμετώπιση των αντιφάσεων που εντοπίζονται στις πολιτισμικές γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών (Kazima & Adler, 2006b).

4.3.3 Οι ενέργειες των μαθητών για την αποτελεσματική εκμάθηση της πιθανότητας

Οι Grinstein και Lipsey (2001) επεκτείνουν τις ιδέες των Adler et al. (2008) υποδεικνύοντας ότι, στην προσπάθειά τους να λύσουν προβλήματα τυχαίας, οι μαθητές πρέπει να ενθαρρυνθούν να προβλέψουν τις πιθανότητες που θα προκύψουν, να διεξάγουν πειράματα για τον προσδιορισμό πειραματικών πιθανοτήτων, να αναλύσουν και να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα. και να συγκρίνουν τις πειραματικές πιθανότητες με τις αρχικές προβλέψεις. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να ερμηνεύουν καταστάσεις και να κάνουν κάποιες προβλέψεις σε πραγματικές καταστάσεις.

Κεφάλαιο 5. Μεθοδολογία έρευνας

5.1 Ζητήματα ηθικής και δεοντολογίας

Είναι πολύ σημαντικά τα πάντα επίκαιρα θέματα της δεοντολογίας που προκύπτουν κατά τη διάρκεια μιας έρευνας. Τόσο σε αρχικό στάδιο, στη βιβλιογραφική επισκόπηση, όσο και στη συνέχεια κατά τη διεξαγωγή της έρευνας αλλά και στο τέλος με την ανάλυση των ευρημάτων, ο ερευνητής πρέπει να αποσκοπεί με θεμιτά μέσα στην αναζήτηση και κατανόηση της αλήθειας. Κατόπιν, ο σεβασμός στα δικαιώματα και τις αξίες των συμμετεχόντων, λαμβάνοντας υπόψη την συνειδητή συναίνεση τους (Cohen & Manion, 1997) και η ηθική στάση του ερευνητή απέναντι σε πιθανά δεοντολογικά ζητήματα οφείλει να είναι δεδομένη και ακέραιη αντίστοιχα.

Συμφώνα με τους Resnick & Schwartz (1973) η κατά γράμμα ενημέρωση των συμμετεχόντων για τους σκοπούς της έρευνας είναι δυνατόν να αλλοιώσει τα αποτελέσματα της. Για το λόγο αυτό, οι συμμετέχοντες είναι προτιμότερο να γνωρίζουν σε γενικές γραμμές, και όχι εις βάθος τι ερευνάται κάθε φορά, χωρίς όμως παραπλανήσεις, έκτος και αν υπάρχει συγκεκριμένος λόγος που στη πορεία θα τους αποκαλυφθεί (Ρούσσος & Τσαούσης, 2011). Στην επικείμενη έρευνα επισημάνθηκε γραπτώς, κατά την έναρξη της παρέμβασης και η οποία αναφέρει πως η συμμετοχή στην έρευνα οριστικοποιεί τη συγκατάθεσή τους στην αξιοποίηση και δημοσιοποίηση των απαντήσεών τους αποκλειστικά για τον ερευνητικό σκοπό που συλλέγονται. Αναφορικά με το καυτό ζήτημα της ανωνυμίας, αυτό επιτυγχάνεται πλήρως, καθώς δεν απαιτείται πουθενά η δήλωση της ταυτότητάς τους (ονοματεπώνυμο), ενώ παράλληλα, στα δεδομένα των αξιολογήσεων πρόσβαση είχε μόνο η ερευνήτρια.

5.2 Ερευνητικός σχεδιασμός

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση των αποτελεσμάτων μιας διαφορετικής διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία πιθανοτήτων σε ενήλικες. Ο σχεδιασμός βασίστηκε στην ιδέα του pre test προκειμένου να διαλευκανθεί το επίπεδο των συμμετεχόντων, παρέμβαση σχετική με τη θεματολογία και το post test, ώστε να φανεί η αποτελεσματικότητα του διδακτικού υλικού. Αναλυτικότερα, η ερευνήτρια υιοθέτησε την πειραματική μέθοδο για τη μελέτη αυτή. Η πειραματική έρευνα είναι η περιγραφή και ανάλυση του τι θα γίνει ή τι θα συμβεί υπό προσεκτικά ελεγχόμενες συνθήκες.

Η πειραματική μέθοδος περιλαμβάνει δύο δοκιμές, συγκεκριμένα, πριν και μετά την παρέμβαση (pre και post test). Αφού ολοκληρωθεί η περίοδος παρέμβασης, τα αποτελέσματα εξετάσεων συγκρίνονται και αντιπαραβάλλονται με τις βαθμολογίες πριν από την παρέμβαση για να διαπιστωθεί εάν υπάρχει κάποια αλλαγή ή βελτίωση στην πειραματική ομάδα. Εάν υπάρχει κάποια αλλαγή που προσδιορίζεται στην πειραματική ομάδα, θεωρείται ότι οφείλεται μόνο στο πείραμα ή στη θεραπεία.

Από όλες τις μεθοδολογίες έρευνας, η πειραματική έρευνα είναι μοναδική σε δύο πολύ σημαντικές πτυχές. Αποτελεί τον μόνο τύπο έρευνας που επιχειρεί άμεσα να επηρεάσει μια συγκεκριμένη μεταβλητή και είναι ο μόνος τύπος που μπορεί πραγματικά να δοκιμάσει υποθέσεις σχετικά με τις σχέσεις αιτίας-αποτελέσματος.

5.3. Δείγμα και πειραματική παρέμβαση

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 15 σπουδαστές ΙΕΚ. Πραγματοποιήθηκε ένα μονόωρο pre-test, μία διδακτική παρέμβαση 3 ωρών που στην ουσία έλυνε τα pre test και διαλεύκανε τις επιμέρους μαθηματικές έννοιες, περισσότερο ως τρόπο σκέψης και λιγότερο ως μάθηση μαθηματικών τύπων και ένα μονόωρο post test. Η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε με Power point. Διαμεσολάβησε μία εβδομάδα ανάμεσα σε κάθε φάση. Σκοπός είναι να ερευνηθεί πως οι ενήλικες μαθηματικοποιούν ή πως αντιλαμβάνονται τις πιθανότητες σε καταστάσεις καθημερινής ζωής. Οι ενήλικες ως προαπαιτούμενες γνώσεις χρειαζόταν μόνο να ξέρουν απλούς υπολογισμούς με ποσοστά.

Η διδακτική παρέμβαση στηρίχθηκε στη θεωρία των πιθανοτήτων του βιβλίου *Μαθηματικά για τη δασκάλα και το δάσκαλο: αριθμοί, σύνολα, σχήματα* (Χατζηκυριάκου, 2008). Στόχος της ήταν να λύσει με τη γλώσσα της συνολοθεωρίας το pre test που είχαν επιχειρήσει να λύσουν πρωτύτερα οι συμμετέχοντες και πραγματοποιήθηκε μέσω παρουσίασης Power Point. Η παρέμβαση προωθούσε τον διάλογο, την πληθώρα απόψεων, επιχειρημάτων και την διερεύνηση των ερωτημάτων.

Ξεκινώντας από το δεύτερο ερώτημα του pre test, που αφορούσε τη ρίψη δύο ζαριών, στον πίνακα προβλήθηκε η εκφώνηση του προβλήματος, καθώς είχε παρέλθει μία εβδομάδα από την επίλυσή του. Τα ερωτήματα ήταν τα εξής:

- Πόσες διαφορετικές "ζαριές" μπορείς να φέρεις;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;
- Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;
- Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8;
- Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;
- Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;
- Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

Η πρώτη ερώτηση σχετικά με την πληθώρα των πιθανών ζαριών έφερε στην επιφάνεια πολλές διαφορετικές απόψεις. Ορισμένοι συμμετέχοντες πίστευαν πως οι ζαριές είναι είτε 6 είτε 12 είτε 36. Πολλοί από αυτούς θεωρούσαν ως ένα ενδεχόμενο την ζαριά (5,6) και την (6,5). Ο παραγωγικός διάλογος οδήγησε στην επόμενη διαφάνεια, η οποία παρουσίαζε τον δειγματικό χώρο του πειράματος της ρίψης δύο ζαριών, που απεικονίζεται στον ακόλουθο πίνακα διπλής εισόδου. Οι συμμετέχοντες με τη βοήθεια του πίνακα κατάφεραν να απαντήσουν με σχετική ευκολία όλα τα υπόλοιπα ερωτήματα, εφόσον κρατούσαν προσωπικές σημειώσεις και επέλεγαν κάθε φορά τα αντίστοιχα ενδεχόμενα από τον δειγματικό χώρο. Κατά την παρέμβαση δόθηκε έμφαση στη φράση «το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2», καθώς διαπιστώθηκε δυσκολία, η οποία αντιμετωπίστηκε με τον εντοπισμό των ενδεχομένων που να ανήκουν στο εν λόγω σύνολο.

$1^η$ / $2^η$ ρίψη	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε η σχετική θεωρία βασικών εννοιών των πιθανοτήτων όπως:

- Πείραμα τύχης: διαδικασία που είναι δυνατόν να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες, το αποτέλεσμα της οποίας δεν μπορεί να προβλεφθεί.

  Παράδειγμα:

  1) η ρίψη ενός ζαριού

  2) η ρίψη ενός νομίσματος

- Δειγματικός χώρος (Ω): Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

  Οπότε: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

  Παράδειγμα:

  1) η ρίψη ενός νομίσματος: Ω={Α, Σ} Α=αριθμός, Σ=Σχήμα

  2) η ρίψη ενός ζαριού: Ω={1,2,3,4,5,6} (Χατζηκυριάκου, 2008).

- Ενδεχόμενο (Α): κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου. Σε αυτά συμπεριλαμβάνεται ο ίδιος ο δειγματικός χώρος και το κενό σύνολο.
- Στοιχειώδες ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που περιλαμβάνει ένα μόνο αποτέλεσμα .
- Βέβαιο ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση ενός πειράματος, δηλαδή ο ίδιος δειγματικός χώρος Ω.
- Αδύνατο ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος.

Στη συνέχεια της παρέμβασης ακολούθησε η επίλυση του πρώτου ερωτήματος του pre test, το οποίο ήταν το εξής:

Η Ελένη είναι είκοσι οκτώ χρονών, ανύπαντρη. Έχει σπουδάσει πολιτικές επιστήμες. Στα φοιτητικά της χρόνια συμμετείχε ενεργά στο χορευτικό σύλλογο Ποντίων και πήρε μέρος σε πολλές παραστάσεις. Μπορείτε να βάλετε τα παρακάτω στη σειρά, αρχίζοντας από αυτό που θεωρείται πιθανότερο και καταλήγοντας σε αυτό που θεωρείται λιγότερο πιθανό; (Μπορείτε να χαρακτηρίσετε και κάποια από αυτά ισοπίθανα, αν έτσι νομίζετε).

a) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος.

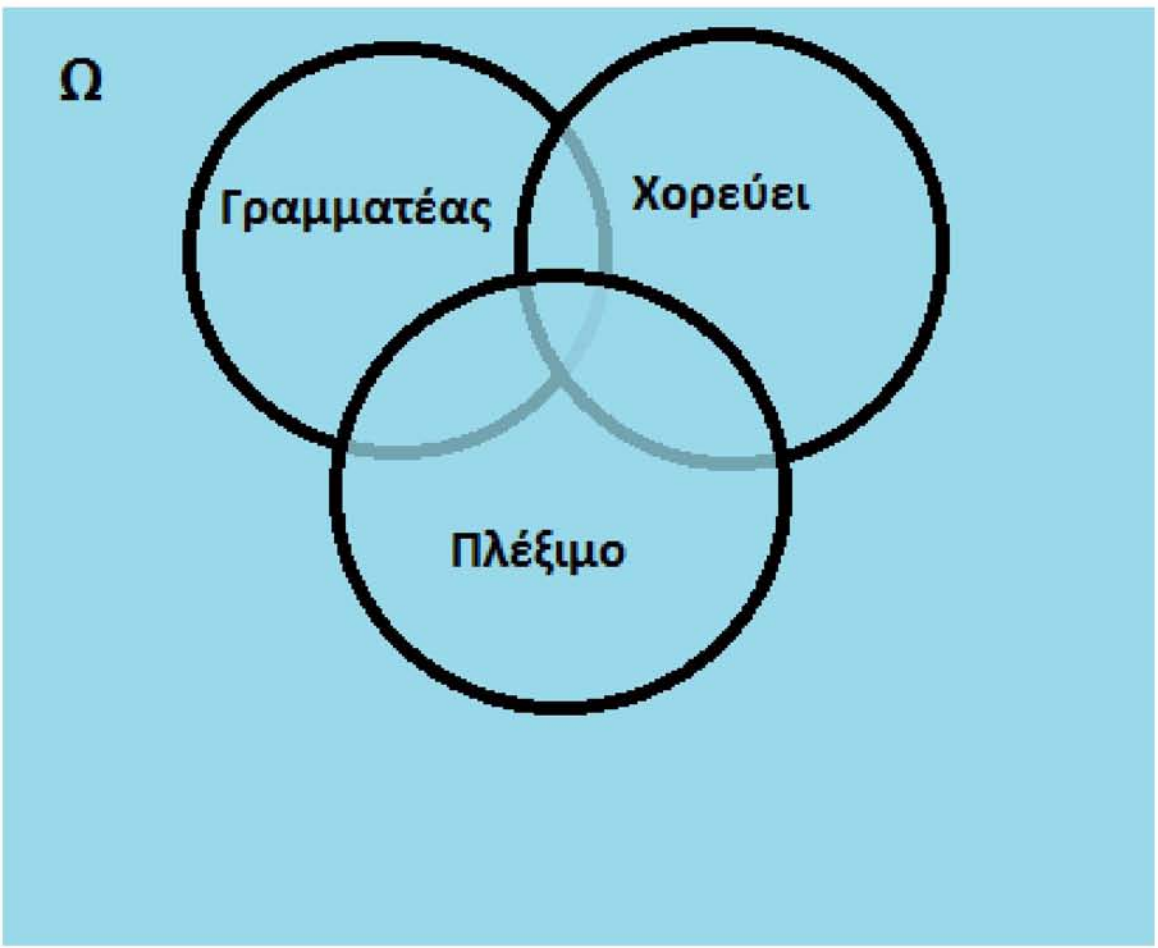
b) Η Ελένη είναι ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.

c) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος και ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.

d) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος ή ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.

e) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος, ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου και ασχολείται με το πλέξιμο.

Σε αυτό το σημείο ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες να αναπαραστήσουν τα ενδεχόμενα ως κύκλους, προκειμένου να φανεί ο μεγαλύτερος ή ο μικρότερος, συνεπώς ο πιθανότερος ή λιγότερο πιθανός. Οι συμμετέχοντες ανέπτυξαν έναν ενδιαφέροντα διάλογο σχετικά με το μέγεθος του κύκλου σε κάθε περίπτωση και αντάλλαξαν απόψεις σχετικά με το που βρίσκονται τα ενδεχόμενα του ερωτήματος πάνω στο σχήμα που δημιούργησαν. Φάνηκε σημαντικό να τοποθετούν κάθε φορά μία τελεία πάνω στο σχήμα και να ρωτούν «εδώ συμβαίνει το ενδεχόμενο που ψάχνω;». Στη συνέχεια παρουσιάστηκε στον πίνακα το ακόλουθο διάγραμμα, το οποίο και βοήθησε στη διαπίστωση των συνόλων της τομής και της ένωσης, που είχαν δυσκολέψει στο pre test τους συμμετέχοντες. Εδώ υπήρχε η ευκαιρία σκιαγράφησης των ενδεχομένων και επομένως η οπτικοποίησή τους, που δήλωνε το περισσότερο ή λιγότερο πιθανό.



Έπειτα παρουσιάστηκε η σχετική θεωρία βασικών εννοιών των πιθανοτήτων που συνδέεται με το pre test, όπως:

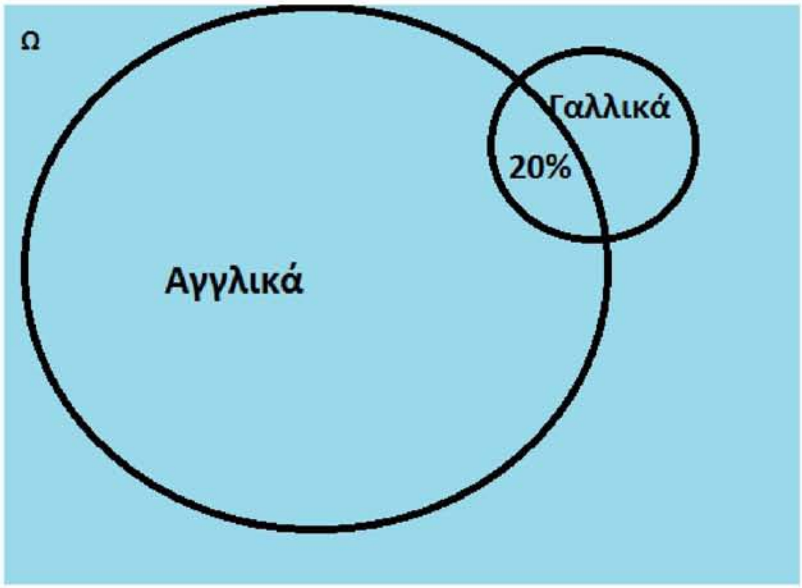
- Ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού κι επομένως το ποσοστό μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα. Ποσοστό στα 100 είναι κάθε κλάσμα με παρονομαστή το 100.
- Στην άσκηση 2 μπορώ να μιλήσω με τη γλώσσα των ποσοστών λέγοντας π.χ. ότι το ποσοστό των ζαριών με άθροισμα 5 είναι 4 στα 36, δηλαδή $\frac{4}{36} = \mathbf{11{,}1\%}$ ή
- Στη γλώσσα των πιθανοτήτων λέγοντας η πιθανότητα να φέρω άθροισμα 5 είναι $\frac{4}{36}$=0,11, ορίζοντας την πιθανότητα κλασικά P(A)=$\frac{\pi\lambda\eta\theta\iota\kappa ό\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu ό\varsigma\ \tau o\upsilon\ A}{\pi\lambda\eta\theta\iota\kappa ό\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu ό\varsigma\ \tau o\upsilon\ \Omega}$ (Χατζηκυριάκου, 2008).

Η παρέμβαση συνεχίστηκε με το ερώτημα 3 που ήταν το εξής:

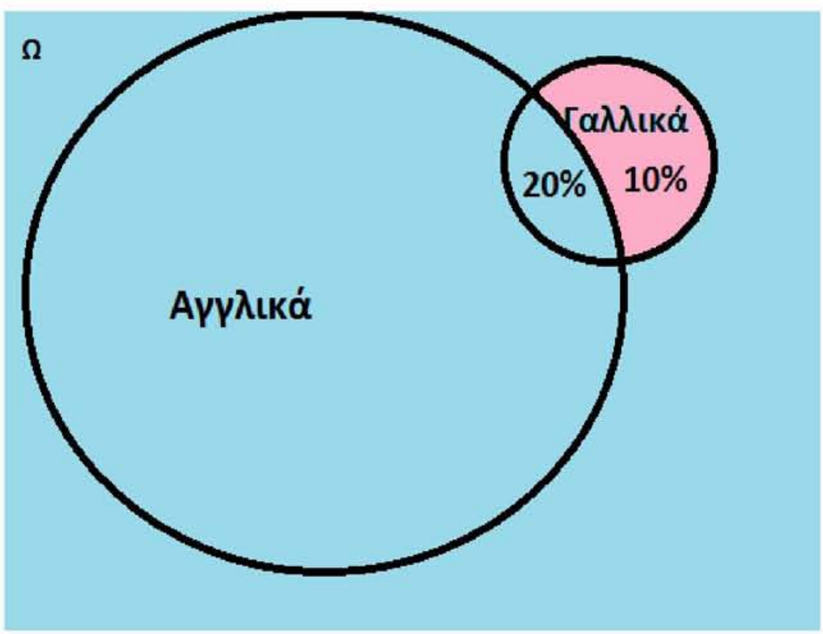
Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες.

- Πόσοι μαθητές μαθαίνουν αγγλικά ;
- Πόσοι μαθητές μαθαίνουν γαλλικά ;
- Πόσοι μαθητές μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες ;
- Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;
- Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;
- Βρες το ποσοστό των μαθητών που δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες.
- Σε τι ποσοστό τα παιδιά που κάνουν γαλλικά μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες;

Οι συμμετέχοντες σημειώνοντας παράλληλα συμμετείχαν στην οπτικοποιημένη κατασκευή του δειγματικού χώρου, δηλαδή του σχετικού διαγράμματος που ακολουθεί.

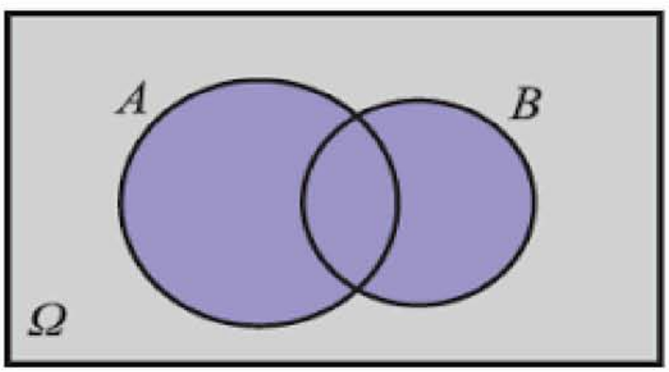


Σε αυτό το σημείο τους ζητήθηκε να τοποθετήσουν τα ποσοστά στα αντίστοιχα χωρία. Αυτό ήταν ένα στάδιο που δεν φάνηκε να του δυσκολεύει ιδιαίτερα, λόγω της οπτικής απεικόνισης. Τα διαγράμματα που προέκυψαν ήταν τα εξής:



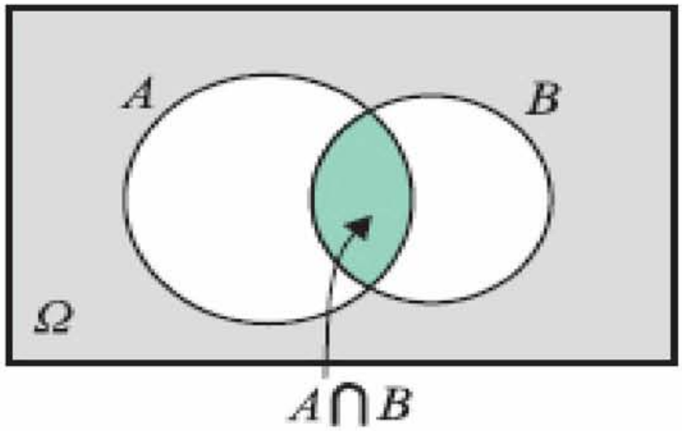
Με τη βοήθεια των διαγραμμάτων κι ενώ η άσκηση λύθηκε από τους συμμετέχοντες, έγινε η παρουσίαση της σχετικής θεωρίας βασικών εννοιών των πιθανοτήτων, όπως:

- Τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα δειγματικού χώρου. Σε αυτά μεταφέρονται έννοιες και πράξεις που έχουν οριστεί για σύνολα.
- Ενδεχόμενο: «Α ένωση Β» ή «Α ή Β», πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β. Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή.

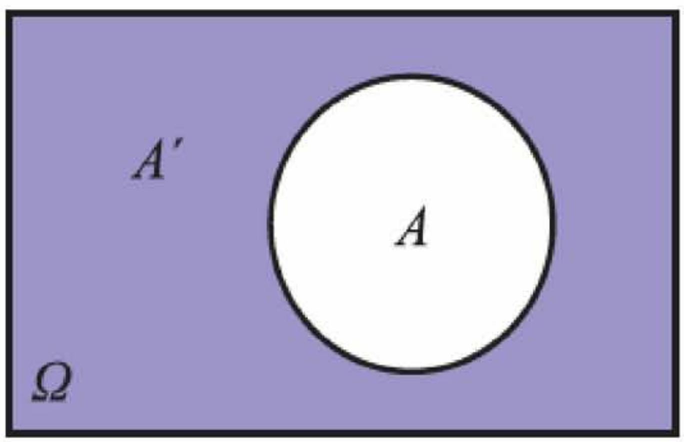


$A \bigcup B$

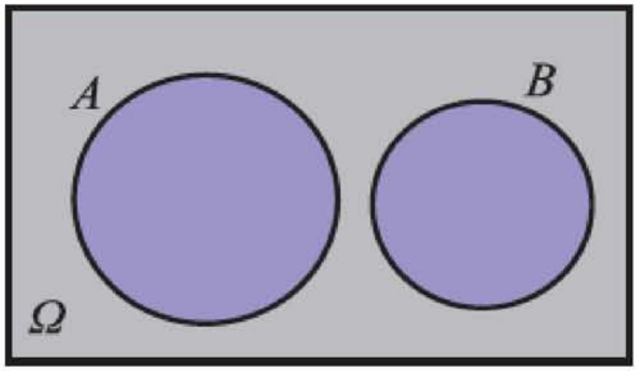
- Ενδεχόμενο: «A τομή B» ή «A και B», πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B. Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή.



- Ενδεχόμενο A΄: «όχι A» ή «αντίθετο του A», πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A. Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή.



- Ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα (A, B): λέγονται τα ενδεχόμενα που δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο δηλαδή $A \cap B = \emptyset$. Οι παραπάνω έννοιες επεκτείνονται σε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Σχηματικά παρουσιάζονται δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.



$$A \cap B = \varnothing$$

- Σχετική συχνότητα: Αν σε n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης εμφανιστεί το ενδεχόμενο (A) r φορές, τότε συμβολίζουμε ως σχετική συχνότητα του ενδεχομένου A το πηλίκο $f_A = \frac{r}{n}$.
- Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ο δειγματικός χώρος και $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ ένα ενδεχόμενο, τότε ισχύει ότι
  1. Η f_ω μπορεί να πάρει τιμές από 0 έως 1. $[0 \leq f_\omega \leq 1]$
  2. $f_{\omega_1} + f_{\omega_2} + \cdots + f_{\omega_n} = 1$
  3. $f_A = f_{\alpha_1} + f_{\alpha_2} + \cdots + f_{\alpha_r}$
- Οι ιδιότητες είναι οι εξής:
  1. |A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|. Επομένως

     P(A∪B)= P(A)+P(B)-P(A∩B) και αν A,B ξένα μεταξύ τους, τότε

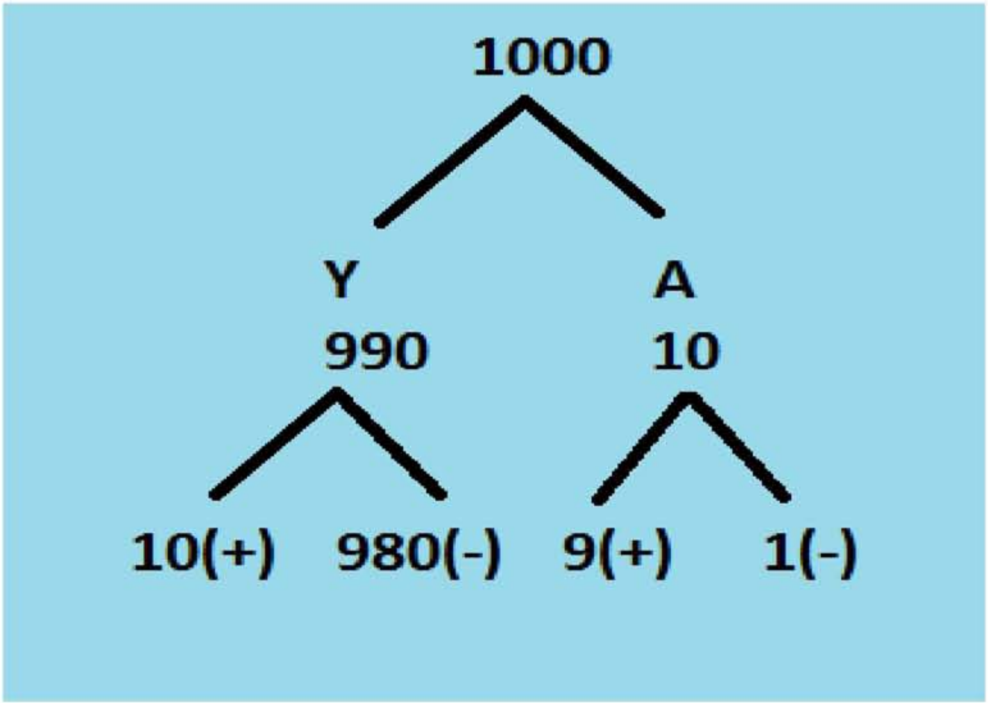
     P(A∪B)= P(A)+P(B)
  2. Αφού A∪A΄=Ω και A∩A=∅, ισχύει

     P(A΄)=1-P(A), P(Ω)=1 και P(∅)=0

Η παρέμβαση συνεχίστηκε με την επίλυση του τέταρτου ερωτήματος του pre test που φορούσε την δεσμευμένη πιθανότητα ή πιθανότητα υπό συνθήκη. Το ερώτημα ήταν παραλλαγή της εφαρμογής του θεωρήματος Bayes του βιβλίου *Μαθηματικά για τη δασκάλα και το δάσκαλο: Αριθμοί, σύνολα, σχήματα* (Χατζηκυριάκου, 2008). Παρουσιάζεται ακολούθως:

> Το διαγνωστικό τεστ για την ασθένεια Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Αν κάποιος άνθρωπος έχει την ασθένεια Α, τότε η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0,9. Αν δεν την έχει, η πιθανότητα να βγει θετικό είναι 0,01. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την ασθένεια είναι 0,01. Ο Γ. έκανε το τεστ και βγήκε θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει όντως την ασθένεια;

Το ερώτημα είχε προκαλέσει σύγχυση στους συμμετέχοντες, καθώς δεν ήξεραν πώς να διαχειριστούν μία πιθανότητα υπό συνθήκη. Σε αυτή την παρέμβαση προτάθηκε η επίλυση του προβλήματος μέσω σχετικών συχνοτήτων, διότι όπως παρουσιάστηκε παραπάνω και βιβλιογραφικά αυτές φαίνεται να δίνουν μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας. Αρχικά, δόθηκε ως δείγμα του ερωτήματος ο αριθμός 1.000, ως ένα παράδειγμα των ανθρώπων που έλαβαν το διαγνωστικό τεστ. Με αυτή την αφετηρία και με τον καταιγισμό ιδεών οι συμμετέχοντες προσπάθησαν να διερευνήσουν τον αριθμό των ανθρώπων που έχουν την ασθένεια, που είναι υγιείς, κ.ο.κ. Η απεικόνιση του διαγράμματος που δημιουργούνταν ταυτόχρονα στις σημειώσεις των συμμετεχόντων και στον πίνακα ήταν η εξής (Υ=υγιείς, Α=ασθενείς, + = θετικό τεστ, - = αρνητικό τεστ):



Σε αυτό το σημείο οι συμμετέχοντες έπρεπε να επιλέξουν τους ανθρώπους με θετικό τεστ (10+9=19 άνθρωποι) και αυτούς να εντοπίσουν μόνο αυτούς που ανήκαν στην κατηγορία των ασθενών (9 άνθρωποι). Τελικά:

Έστω Φ το ενδεχόμενο να έχει βγει θετικό το τεστ και το άτομο να έχει όντως την ασθένεια.

P(Φ)=9/19=0,47=47%.

Ακολούθησε η σχετική θεωρία των εννοιών των πιθανοτήτων:

4. Η πιθανότητα του ενδεχομένου A δεδομένου του B συμβολίζεται με P(A|B).Γράφουμε P(A|B)= P(A∩B)/P(B).

Με αυτό τον τρόπο λύθηκε ένα πρόβλημα με πιθανότητα υπό συνθήκη μέσω φυσικών συχνοτήτων, μεταβαίνοντας από τη θεωρία των συνόλων στο θεώρημα του Bayes, που απευθύνεται στη δεσμευμένη πιθανότητα.

Κεφάλαιο 6: Αποτελέσματα έρευνας

Στον έκτο κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας παρουσιάζονται τα αποτελέσματα αναφορικά με τα αποτελέσματα της αξιολόγησης των συμμετεχόντων στα θέματα πιθανοτήτων που τους τέθηκαν πριν και μετά την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα δίνονται ανά είδος άσκησης ενώ στην τελευταία ενότητα δίνονται οι συγκρίσεις μεταξύ των αποτελεσμάτων πριν και μετά την παρέμβαση στα θέματα που θεωρούνται κοινά μεταξύ των δύο αξιολογήσεων.

6.1 Αποτελέσματα αξιολόγησης πριν την παρέμβαση

6.1.1 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 1

Το πρώτο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω:

Η Ελένη είναι είκοσι οκτώ χρονών, ανύπαντρη. Έχει σπουδάσει πολιτικές επιστήμες. Στα φοιτητικά της χρόνια συμμετείχε ενεργά στο χορευτικό σύλλογο Ποντίων και πήρε μέρος σε πολλές παραστάσεις. Μπορείτε να βάλετε τα παρακάτω στη σειρά, αρχίζοντας από αυτό που θεωρείται πιθανότερο και καταλήγοντας σε αυτό που θεωρείται λιγότερο πιθανό; (Μπορείτε να χαρακτηρίσετε και κάποια από αυτά ισοπίθανα, αν έτσι νομίζετε).

a. *Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος.*
b. *Η Ελένη είναι ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.*
c. *Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος και ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.*

d. *Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος ή ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.*

e. *Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος, ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου και ασχολείται με το πλέξιμο.*

Σκοπός του θέματος ήταν να διερευνηθεί κατά πόσο οι συμμετέχοντες είχαν γνώσεις σχετικά με τα σύνολα της θεωρίας πιθανοτήτων όπως η τομή και η ένωση. Αν θεωρήσουμε τα σύνολα:

- Α={Είναι γραμματειακή υπάλληλος}
- Β={Είναι ενεργό μέλος χορευτικού συλλόγου}
- Γ={Ασχολείται με το πλέξιμο}

Τότε έχουμε:

- P(Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος)=P(Α)
- P(Η Ελένη είναι ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου)=P(Β)
- P(Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος και ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου)=P(Β∩Α)
- P(Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος ή ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου)=P(Β∪Α)
- P(Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος, ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου και ασχολείται με το πλέξιμο)=P(Β∩Α∩Γ)

Εφόσον δεν ξέρουμε τίποτα για τα σύνολα Α και Β τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτά είναι ισοπίθανα. Οπότε η σωστή κατάταξη από αυτό που είναι πιθανότερο και καταλήγοντας σε αυτό που ήταν λιγότερο πιθανό ήταν:

$$\mathrm{P(B \cup A) \geq P(B) = P(A) \geq P(B} \cap A) \geq P(B \cap A \cap \Gamma)$$

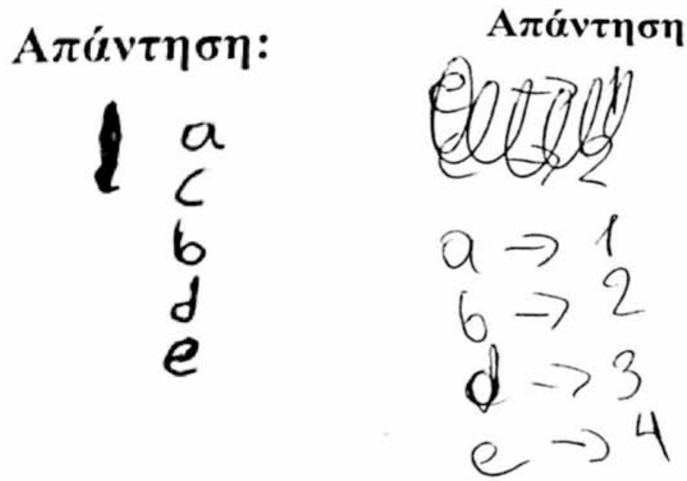
Από τις απαντήσεις των 15 συμμετεχόντων προέκυψε ότι κανείς δεν είχε δώσει τελείως σωστή απάντηση. Επιπρόσθετα, διερευνήθηκε κατά πόσο οι συμμετέχοντες αξιολόγησαν σωστά τα επιμέρους σύνολο (για παράδειγμα αν αναγνώρισαν ότι η πιθανότητα P(B∩A∩Γ) είναι η μικρότερη). Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 1. Από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι το 66.7% (ν=10) των συμμετεχόντων αναγνώρισαν σωστά ότι τη μικρότερη πιθανότητα την έχει το ενδεχόμενο B∩A∩Γ. Αντίθετα, κανένας συμμετέχοντας δεν αναγνώρισε ότι η αμέσως επόμενη πιθανότητα αφορά το ενδεχόμενο B∩A. Τέλος, η συντριπτική πλειοψηφία αναγνώρισε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου A ή του ενδεχομένου B είναι μικρότερη από την πιθανότητα της τομής B∩A ή μεγαλύτερη από την πιθανότητα της ένωσης B∪A.

Πίνακας 2. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το πρώτο θέμα αξιολόγησης

	Λάθος		Σωστή	
	ν	%	ν	%
A	13	86.7%	2	13.3%
B	13	86.7%	2	13.3%
B∩A	15	100.0%	0	0.0%
B∪A	13	86.7%	2	13.3%
B∩A∩Γ	5	33.3%	10	66.7%

Απάντηση: c d a b e (ισοπίθανα (a,b))

Απάντηση:
a, b, c, d, e



Εικόνα 1: Δείγματα από το 66,7% των απαντήσεων που φανερώνουν τον εντοπισμό του ενδεχομένου Β∩Α∩Γ ως το λιγότερο πιθανό να συμβεί (επιλογή «e»).

6.1.2 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 2

Το δεύτερο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω:

Ρίξε δύο ζάρια.

a. *Πόσες διαφορετικές "ζαριές" μπορείς να φέρεις;*
b. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10;*
c. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;*
d. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;*

e. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;*

f. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5;*

g. *Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;*

h. *Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;*

i. *Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8;*

j. *Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;*

k. *Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;*

l. *Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;*

Στον Πίνακα 2 δίνονται τα αποτελέσματα για την αξιολόγηση σε καθεμία από τις ερωτήσεις του θέματος. Από την ανάλυση προέκυψε ότι το 80% (ν=12) των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στην ερώτηση C και D και αναγνώρισε σωστά ότι δεν υπάρχει κανένας τρόπος το άθροισμα των δύο αριθμών του ζαριού να πάρει τιμή 1 ή 13. Η επόμενη ερώτηση που είχε σχετικά υψηλό ποσοστό σωστών απαντήσεων ήταν η G (ν=9, 60%) η οποία αφορούσε το πόσο διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να έχουμε άθροισμα 6. Οι 9 από τους 15 συμμετέχοντες αναγνώρισαν σωστά ότι υπάρχουν 5 διαφορετικοί τρόποι αθροίσματος. Στις υπόλοιπες ερωτήσεις παρατηρήθηκε ότι πλειοψηφία των συμμετεχόντων είχε δώσει λάθος απάντηση. Η ερώτηση με το υψηλότερο ποσοστό λάθος απαντήσεων ήταν η ερώτηση Ε με ποσοστό λάθους απαντήσεων 93.3% (ν=14) που αφορούσε τον υπολογισμό των τρόπων με τους οποίους το άθροισμα των ζαριών είναι τουλάχιστον 2. Επιπρόσθετα, πολύ υψηλό ποσοστό λάθος απαντήσεων είχαν οι ερωτήσεις F και I με ποσοστό λάθος απαντήσεων 80% (ν=12) και 73.3% (ν=11) αντίστοιχα.

Πίνακας 3. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το δεύτερο θέμα αξιολόγησης

	Λάθος		Σωστή	
	ν	%	ν	%
Pre_2A	11	73.3%	4	26.7%
Pre_2B	11	73.3%	4	26.7%
Pre_2C	3	20.0%	12	80.0%
Pre_2D	3	20.0%	12	80.0%
Pre_2E	14	93.3%	1	6.7%
Pre_2F	12	80.0%	3	20.0%
Pre_2G	6	40.0%	9	60.0%
Pre_2H	9	60.0%	6	40.0%
Pre_2I	11	73.3%	4	26.7%
Pre_2J	8	53.3%	7	46.7%
Pre_2K	8	53.3%	7	46.7%
Pre_2L	10	66.7%	5	33.3%

c. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;
Με κανέναν

d. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13; Με κανέναν

c. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;
0

d. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;
0

Εικόνα 2: Δείγματα από το 80% των συμμετεχόντων, που έδωσαν σωστή απάντηση σχετικά με την πληθώρα των δυνατών τρόπων, που το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1 ή 13 (αδύνατο ενδεχόμενο).

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; Εναν

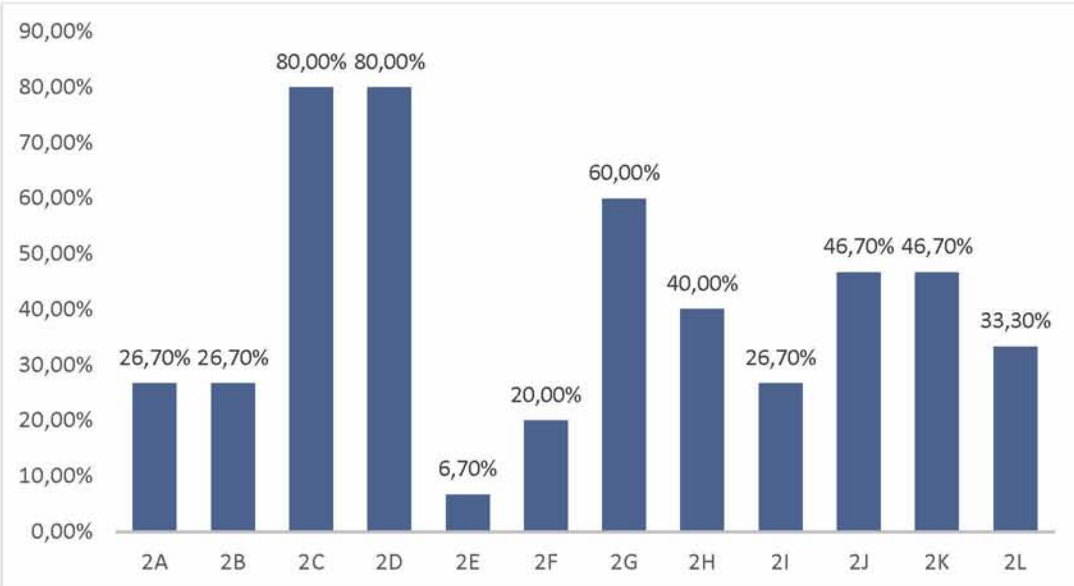
e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; 10

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; 1

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; 2

Εικόνα 3: Δείγματα από το 93,3% των συμμετεχόντων που δεν έδωσαν σωστή απάντηση σχετικά με την πληθώρα των δυνατών τρόπων, που το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2.

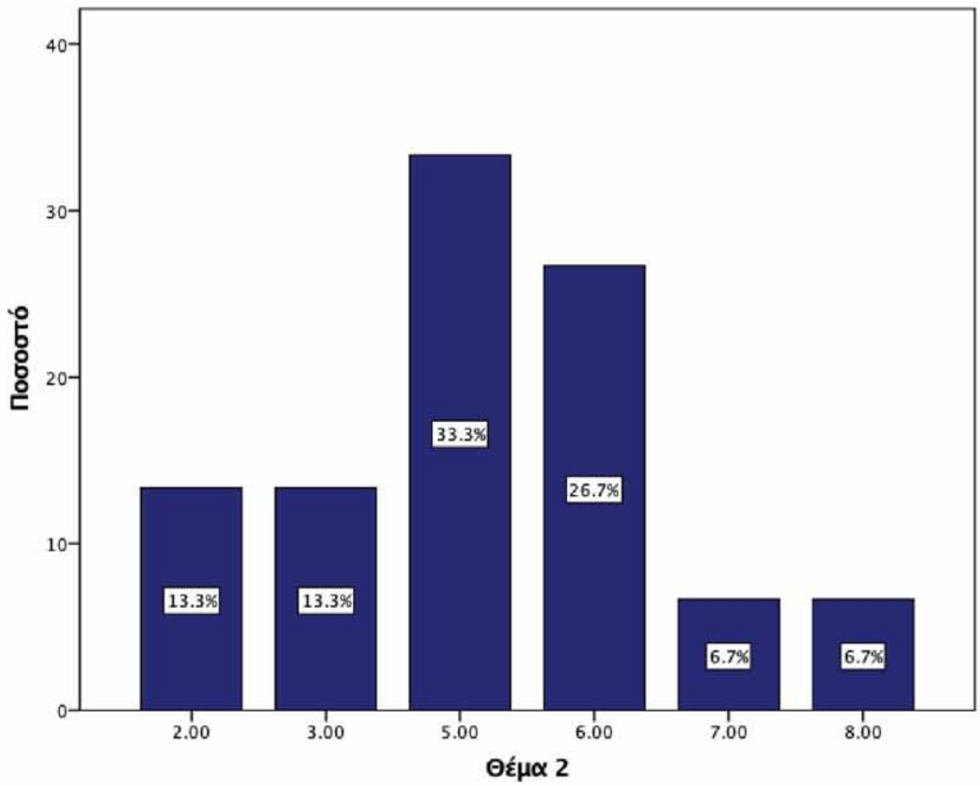
Διαγραμματικά η κατανομή των σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση δίνετε στο Γράφημα 1.



Γράφημα 1. Κατανομή σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση

Στην συνέχεια υπολογίσθηκε ο συνολικός αριθμός σωστών απαντήσεων στις 12 ερωτήσεις του θέματος. Η κατανομή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων δίνετε στο Γράφημα 2. Από το Γράφημα 2 προκύπτει ότι 5 (33.3%) συμμετέχοντες είχαν δώσει σωστή απάντηση στις 5 από τις 12 απαντήσεις και 4 (26.7%) συμμετέχοντες είχαν δώσει σωστή απάντηση στις 6 από τις 12 απαντήσεις. Η μέση τιμή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων ήταν ίση με 4.93[1] (ΤΑ=1.75) δείχνοντας ότι οι συμμετέχοντες πριν την παρέμβαση είχαν κατά μέσο όρο περίπου 5 σωστές απαντήσεις από τις 12.

[1] ΤΑ=Τυπική Απόκλιση



Γράφημα 2. Κατανομή συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων

6.1.3 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 3

Το τρίτο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω:

Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες.

a. *Πόσοι μαθητές μαθαίνουν αγγλικά ;*

b. *Πόσοι μαθητές μαθαίνουν γαλλικά ;*

c. *Πόσοι μαθητές μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες ;*

d. *Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;*

e. *Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;*

f. Βρες το ποσοστό των μαθητών που δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες

g. Σε τι ποσοστό τα παιδιά που κάνουν γαλλικά μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες;

Στον Πίνακα 3 δίνονται τα αποτελέσματα για την αξιολόγηση σε καθεμία από τις ερωτήσεις του θέματος. Από την ανάλυση προέκυψε ότι το 53.3% (ν=8) των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στην ερώτηση A, B και C και μπόρεσε σωστά να υπολογίσει τον αριθμό των μαθητών που κάνουν αγγλικά, γαλλικά ή και τις δύο γλώσσες. Η ερώτηση με το υψηλότερο ποσοστό λάθος απαντήσεων ήταν η ερώτηση D με ποσοστό λάθος απαντήσεων 86.7% (ν=13) που αφορούσε τον υπολογισμό του αριθμού μαθητών που μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες δηλαδή την αναγνώριση του ενδεχομένου της ένωσης. Επιπρόσθετα, πολύ υψηλό ποσοστό λάθος απαντήσεων είχαν οι ερωτήσεις E, F και G με ποσοστό λάθος απαντήσεων 80% (ν=12) αντίστοιχα.

Πίνακας 4. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το τρίτο θέμα αξιολόγησης

	Λάθος		Σωστή	
	ν	%	ν	%
Pre_3A	7	46.7%	8	53.3%
Pre_3B	7	46.7%	8	53.3%
Pre_3C	7	46.7%	8	53.3%
Pre_3D	13	86.7%	2	13.3%
Pre_3E	12	80.0%	3	20.0%
Pre_3F	12	80.0%	3	20.0%
Pre_3G	12	80.0%	3	20.0%

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

360

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

310

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

400 - 80 = 320 [illegible]

320 + 40 = 360 [illegible]

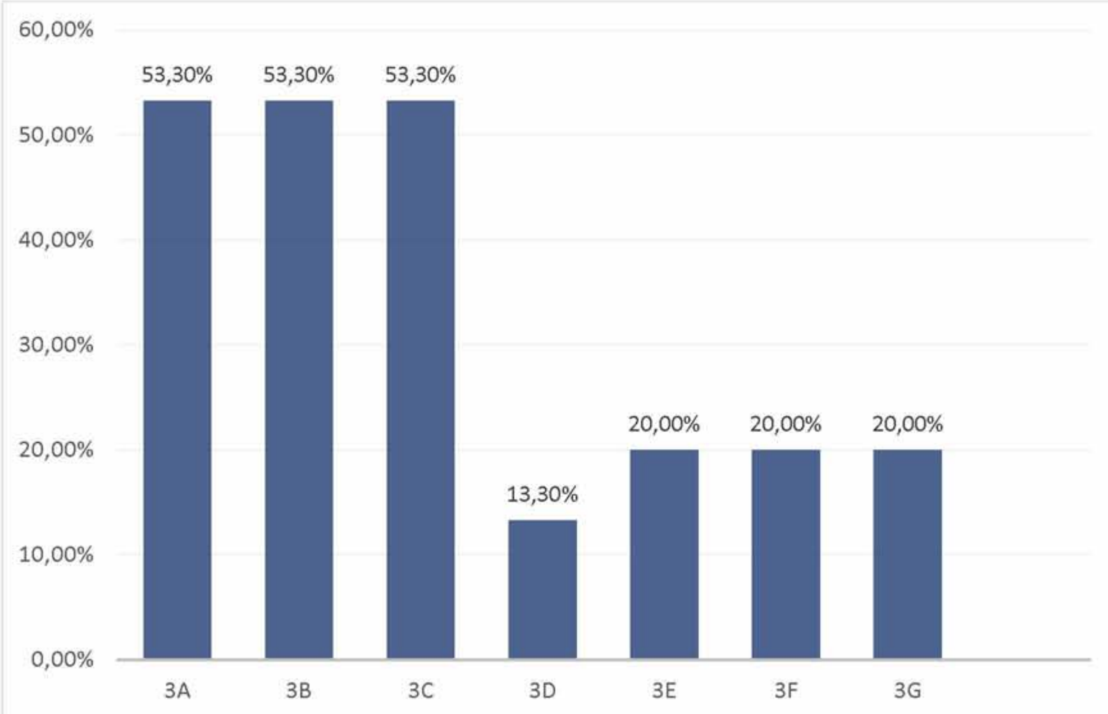
-80 [illegible]

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσε...

$\frac{80}{400} = \frac{20}{100} = 20\%$

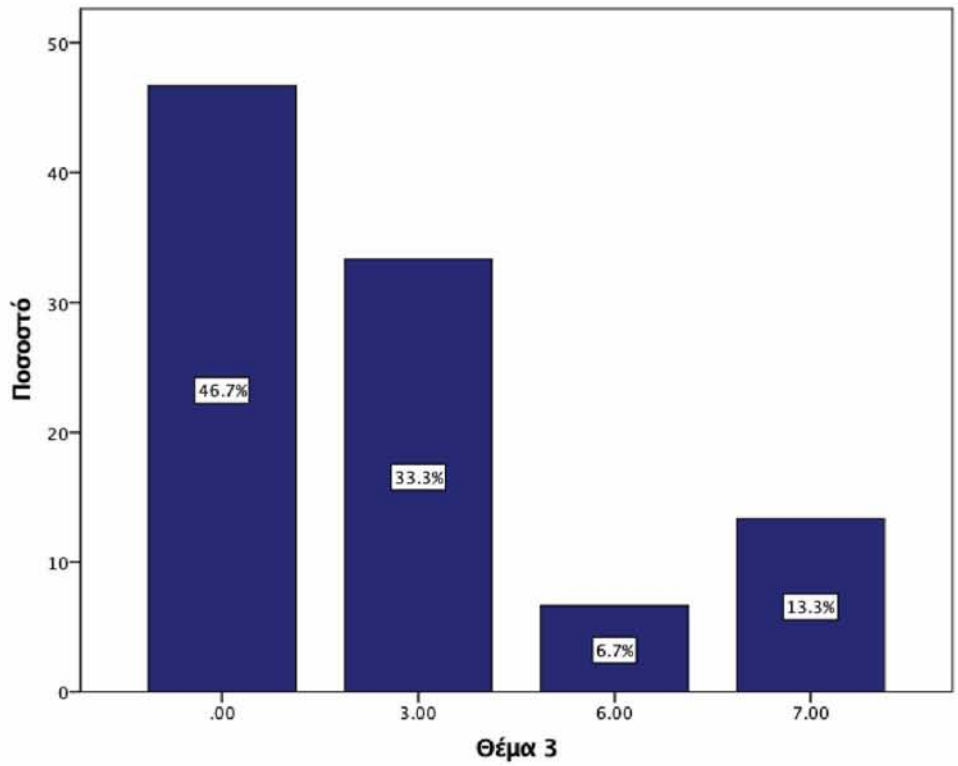
Εικόνα 4: Δείγματα από το 86,7% των συμμετεχόντων που δεν έδωσαν σωστή απάντηση σχετικά με την πληθώρα των μαθητών που μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες (ένωση ενδεχομένων).

Διαγραμματικά η κατανομή των σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση δίνετε στο Γράφημα 3.



Γράφημα 3. Κατανομή σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση

Στην συνέχεια υπολογίσθηκε ο συνολικός αριθμός σωστών απαντήσεων στις 7 ερωτήσεις του θέματος. Η κατανομή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων δίνεται στο Γράφημα 4. Από το Γράφημα 2 προκύπτει ότι 7 (46.7%) συμμετέχοντες δεν είχαν δώσει καμία σωστή απάντηση στις 7 απαντήσεις τους και 5 (33.3%) συμμετέχοντες είχαν δώσει μόλις μια σωστή απάντηση στις 7 απαντήσεις. Επιπρόσθετα, 2 (ν=13.3%) συμμετέχοντες είχαν δώσει 7 στις 7 σωστές απαντήσεις. Η μέση τιμή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων ήταν ίση με 2.33 (ΤΑ=2.63) δείχνοντας ότι οι συμμετέχοντες πριν την παρέμβαση είχαν κατά μέσο όρο περίπου 2.33 σωστές απαντήσεις από τις 7.



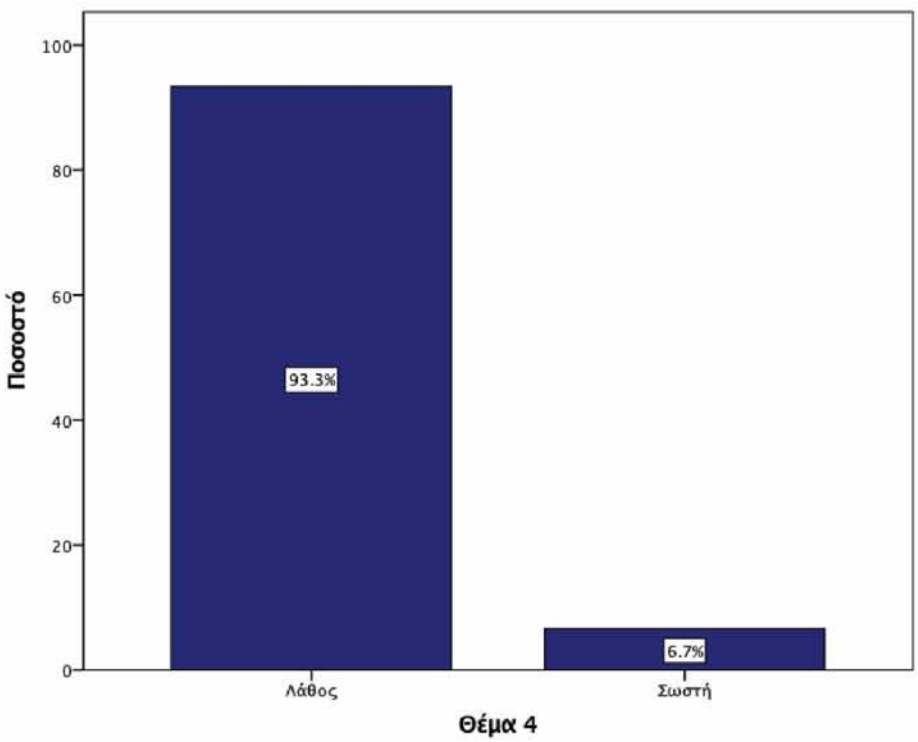
Γράφημα 4. Κατανομή συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων

6.1.4 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 4

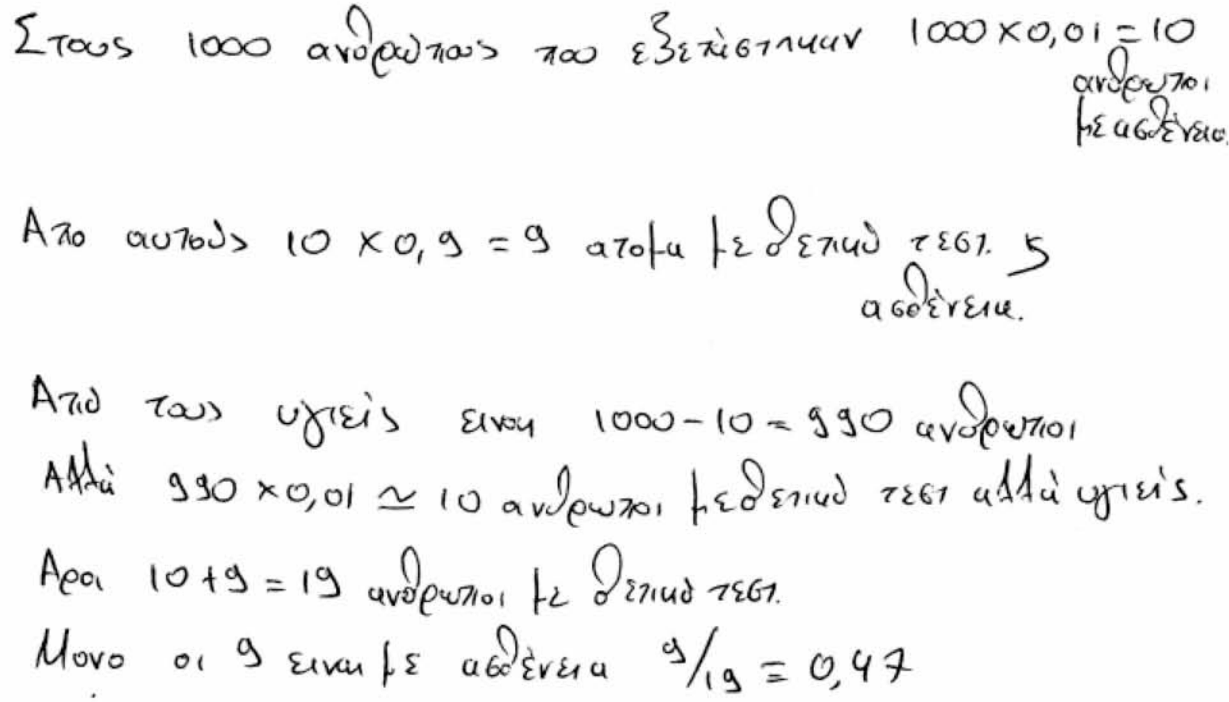
Το τέταρτο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω και αφορούσε το υπολογισμό μιας πιθανότητας με χρήση των κριτηρίων Bayes (δεσμευμένη πιθανότητα):

Το διαγνωστικό τεστ για την ασθένεια Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Αν κάποιος άνθρωπος έχει την ασθένεια Α τότε η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0.9. Αν δεν την έχει, η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0.01. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την ασθένεια είναι 0.01.Ο Γ έκανε το τεστ ποια και βγήκε θετικό. Ποια η πιθανότητα να έχει όντως την ασθένεια ;

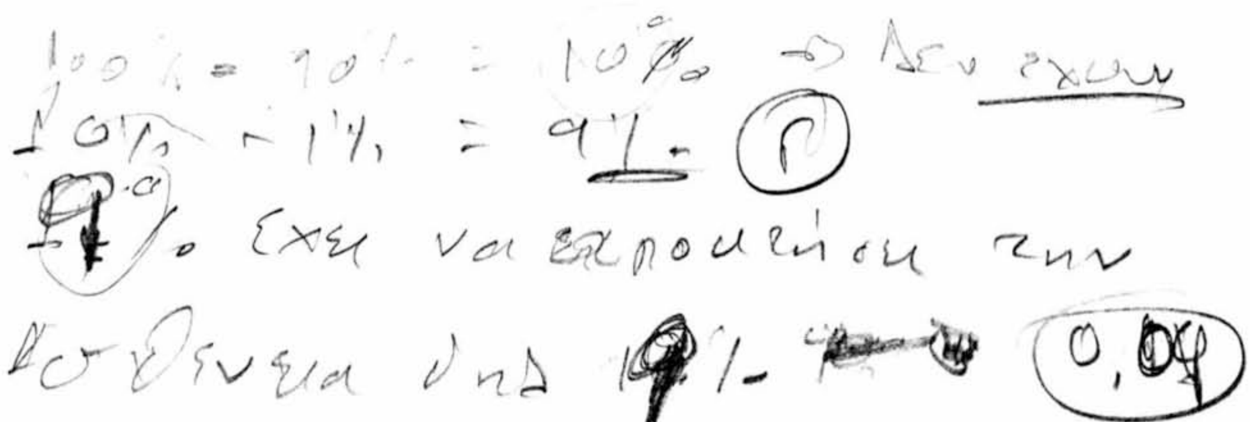
Από το Γράφημα 5 προκύπτει ότι μόλις 1 από τους 15 (6.7%) υπολόγισε σωστά την δεσμευμένη πιθανότητα P (να έχει την ασθένεια | το τεστ βγήκε +) = 0.47. Ακόμη 3 στους 15 συμμετέχοντες έδωσαν λανθασμένα την απάντηση 0.09 που ισούται με την πιθανότητα P (το τεστ βγήκε +) όπως αναφέρεται στη διατύπωση του προβλήματος, ενώ άλλοι 3 στους 15 δεν έδωσαν καμία απάντηση στο ερώτημα.



Γράφημα 5. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το Θέμα 4



Εικόνα 5: Δείγμα από τον 1 στους 15 συμμετέχοντες που έδωσε σωστή απάντηση της δεσμευμένης πιθανότητας κάποιος με θετικό τεστ να είναι ασθενής.



Εικόνα 6: Δείγμα από το 20% των συμμετεχόντων που έδωσαν τη λανθασμένη απάντηση 0,09 της δεσμευμένης πιθανότητας κάποιος με θετικό τεστ να είναι ασθενής.

6.2 Αποτελέσματα αξιολόγησης μετά την παρέμβαση

6.2.1 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 1

Το πρώτο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω:

1. Ρίξε δύο ζάρια.

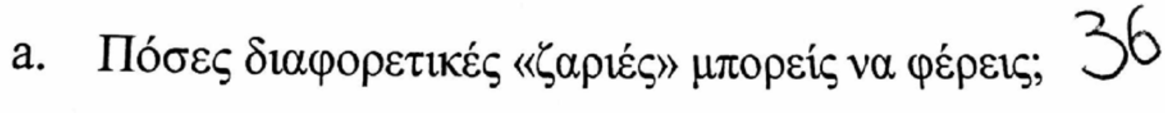
    a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις;
    b. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 9;
    c. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;
    d. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;
    e. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;
    f. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;
    g. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 7;
    h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;
    i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 7 ή 8;
    j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή7;
    k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;
    l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;

Στον Πίνακα 4 δίνονται τα αποτελέσματα για την αξιολόγηση σε καθεμία από τις ερωτήσεις του θέματος. Από την ανάλυση προέκυψε ότι όλοι οι συμμετέχοντες (ν=15, 100%) απάντησαν σωστά στην ερώτηση A, το 93.3% (ν=14) των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στις ερωτήσεις F και G, το 86.7% (ν=13) των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στις ερωτήσεις B, H και J, το 80% (ν=12) απάντησε σωστά στην ερώτηση C και το 73.3% (ν=11) απάντησε σωστά στις ερωτήσεις D και K. Η μόνο ερώτηση που δυσκόλεψες την πλειοψηφία των συμμετεχόντων (ν=8, 53.3%) ήταν η ερώτηση L. Τα αποτελέσματα αυτά είναι μια πρώτη ένδειξη ότι το πρόγραμμα παρέμβασης είχε σημαντικό αντίκτυπο στις γνώσεις των συμμετεχόντων.

Πίνακας 5. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το πρώτο θέμα αξιολόγησης

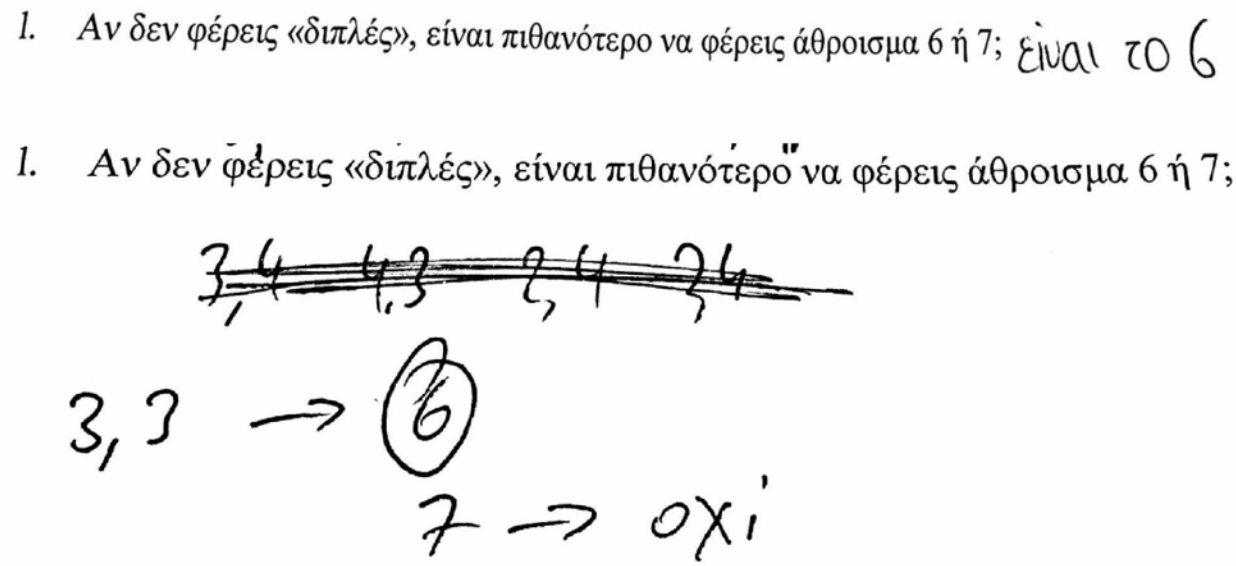
	Λάθος		Σωστή	
	ν	%	ν	%
Post_1A	0	0.0%	15	100.0%
Post_1B	2	13.3%	13	86.7%
Post_1C	3	20.0%	12	80.0%
Post_1D	4	26.7%	11	73.3%
Post_1E	5	33.3%	10	66.7%
Post_1F	1	6.7%	14	93.3%
Post_1G	1	6.7%	14	93.3%
Post_1H	2	13.3%	13	86.7%
Post_1I	5	33.3%	10	66.7%
Post_1J	2	13.3%	13	86.7%

Post_1K	4	26.7%	11	73.3%
Post_1L	8	53.3%	7	46.7%



a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις; 36

Εικόνα 7: Δείγμα από το 100% των συμμετεχόντων που έδωσαν τη σωστή απάντηση της πληθώρας των διαφορετικών ζαριών που μπορεί να φέρει κάποιος ρίχνοντας δύο ζάρια.



1. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; είναι το 6

1. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;

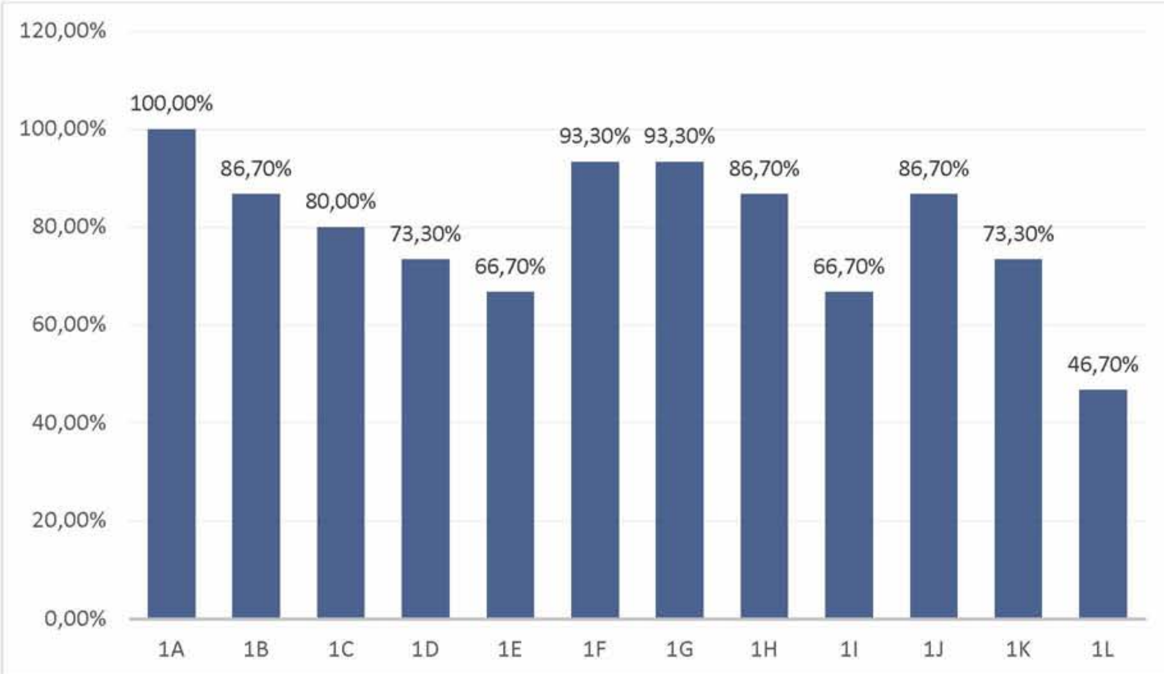
~~3,4 4,3 2,4 2,4~~

3,3 → 6

7 → όχι

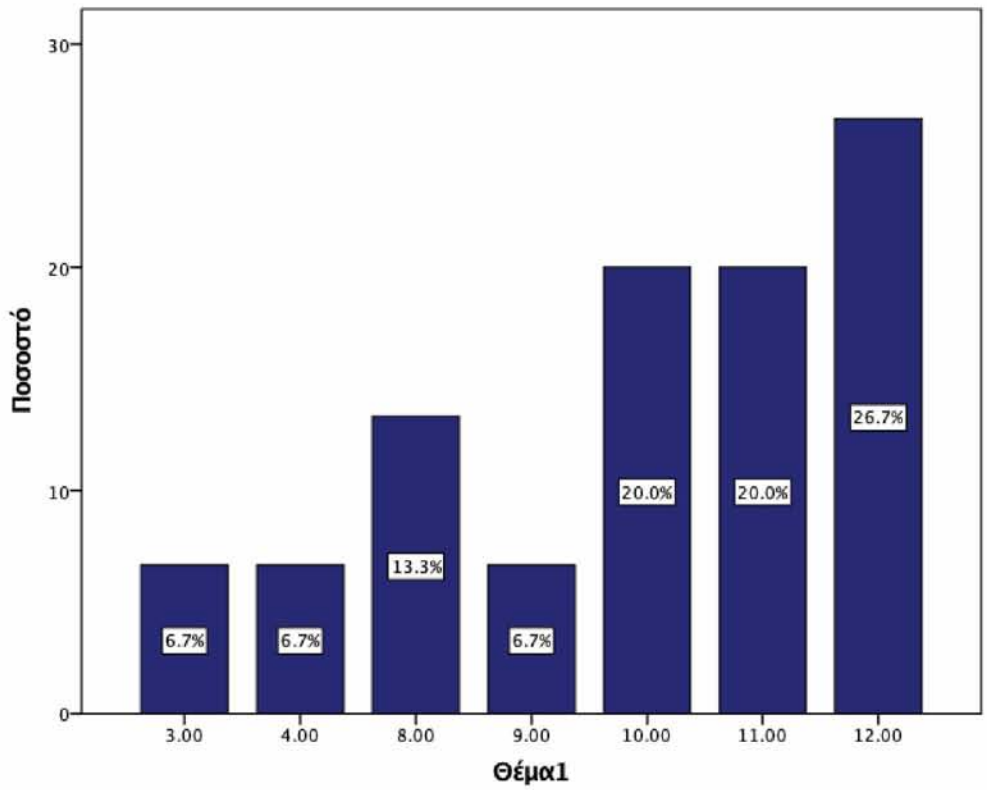
Εικόνα 8: Δείγματα από το 46,7% των συμμετεχόντων που έδωσαν τη λανθασμένη απάντηση «6» στο ερώτημα αν είναι πιθανότερο να φέρουν άθροισμα 6 ή 7, όταν ρίξουν δύο ζάρια και δεν φέρουν «διπλές».

Διαγραμματικά η κατανομή των σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση δίνετε στο Γράφημα 6.



Γράφημα 6. Κατανομή σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση

Στην συνέχεια υπολογίσθηκε ο συνολικός αριθμός σωστών απαντήσεων στις 12 ερωτήσεις του θέματος. Η κατανομή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων δίνεται στο Γράφημα 7. Από το Γράφημα 7 προκύπτει ότι 4 (26.7%) συμμετέχοντες είχαν δώσει σωστή απάντηση στις 12 από τις 12 απαντήσεις, 3 (20%) συμμετέχοντες είχαν δώσει σωστή απάντηση στις 11 από τις 12 απαντήσεις και 3 (20%) συμμετέχοντες είχαν δώσει σωστή απάντηση στις 10 από τις 12 απαντήσεις. Η μέση τιμή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων ήταν ίση με 9.53 (ΤΑ=2.50) δείχνοντας ότι οι συμμετέχοντες μετά την παρέμβαση είχαν σαφή βελτίωση αφού κατά μέσο όρο απάντησαν σωστά περίπου 10 από τις 12 ερωτήσεις.



Γράφημα 7. Κατανομή συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων

6.2.2 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 2

Το δεύτερο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω:

Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου οι 300 μαθαίνουν αγγλικά, οι 80 μαθαίνουν γαλλικά και οι 30 μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες. Συναντώ έναν μαθητή του σχολείου

a. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ;*

b. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ;*

c. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ;*

d. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;*

e. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες;*

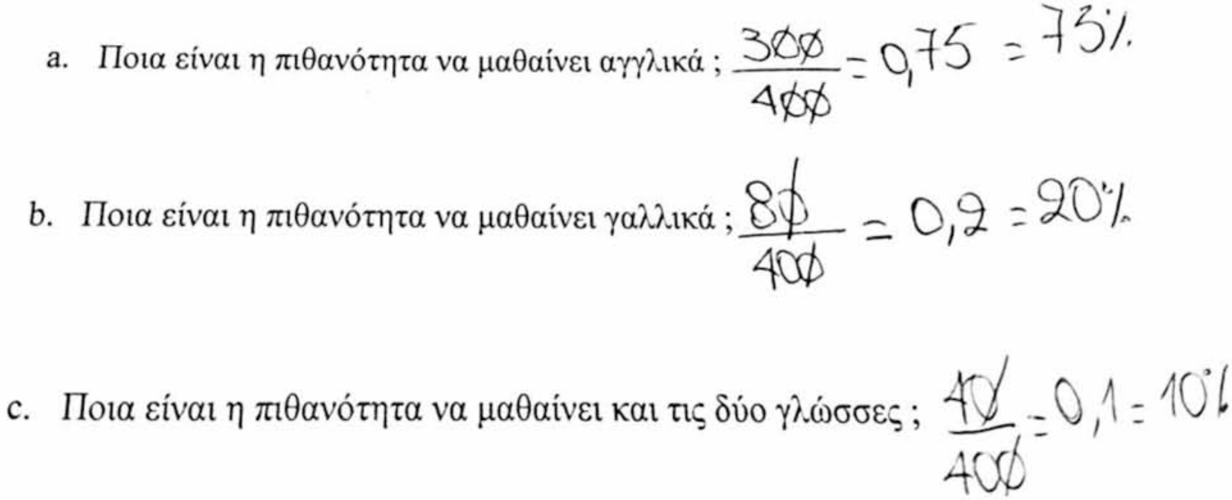
f. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά ;*

g. *Ποια η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά αν και μόνο αν μαθαίνει γαλλικά ;*

Στον Πίνακα 5 δίνονται τα αποτελέσματα για την αξιολόγηση σε καθεμία από τις ερωτήσεις του θέματος. Από την ανάλυση προέκυψε ότι το 93.3% (ν=14) των συμμετεχόντων απάντησε σωστά στην ερώτηση A, B και C και μπόρεσε σωστά να υπολογίσει την πιθανότητα ένας μαθητής να μαθαίνει αγγλικά, γαλλικά ή και τις δύο γλώσσες. Η ερώτηση με το υψηλότερο ποσοστό λάθους απαντήσεων ήταν η ερώτηση G με ποσοστό λάθος απαντήσεων 66.7% (ν=10) που αφορούσε τον υπολογισμό της πιθανότητας ένας μαθητής να μαθαίνει αγγλικά αν και μόνο αν μαθαίνει γαλλικά. Επιπρόσθετα, πολύ υψηλό ποσοστό λάθος απαντήσεων είχε η ερώτηση F με ποσοστό λάθος απαντήσεων 60% (ν=9).

Πίνακας 6. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το δεύτερο θέμα αξιολόγησης

	Λάθος		Σωστή	
	ν	%	ν	%
Post_2A	1	6.7%	14	93.3%
Post _2B	1	6.7%	14	93.3%
Post _2C	1	6.7%	14	93.3%
Post _2D	2	13.3%	13	86.7%
Post _2E	4	26.7%	11	73.3%
Post _2F	9	60.0%	6	40.0%
Post _2G	10	66.7%	5	33.3%

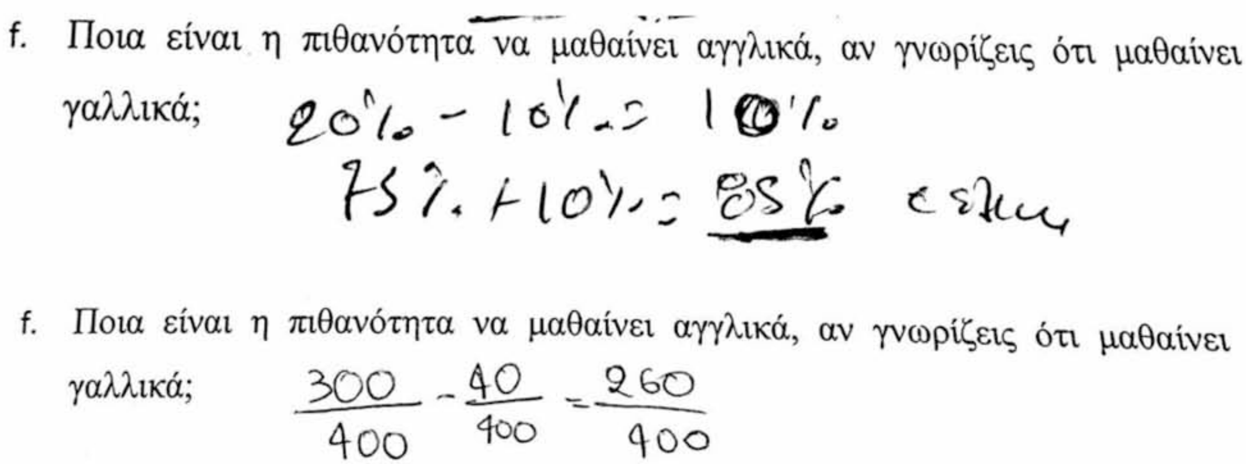


a. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ; $\frac{300}{400} = 0,75 = 75\%$

b. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ; $\frac{80}{400} = 0,2 = 20\%$

c. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ; $\frac{40}{400} = 0,1 = 10\%$

Εικόνα 9: Δείγμα από το 93,3% των συμμετεχόντων που έδωσαν τη σωστή απάντηση στα ερωτήματα A, B και C υπολογίζοντας την πιθανότητα ένας μαθητής να μαθαίνει αγγλικά, γαλλικά ή και τις δύο γλώσσες.



f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά;

$20\% - 10\% = 10\%$

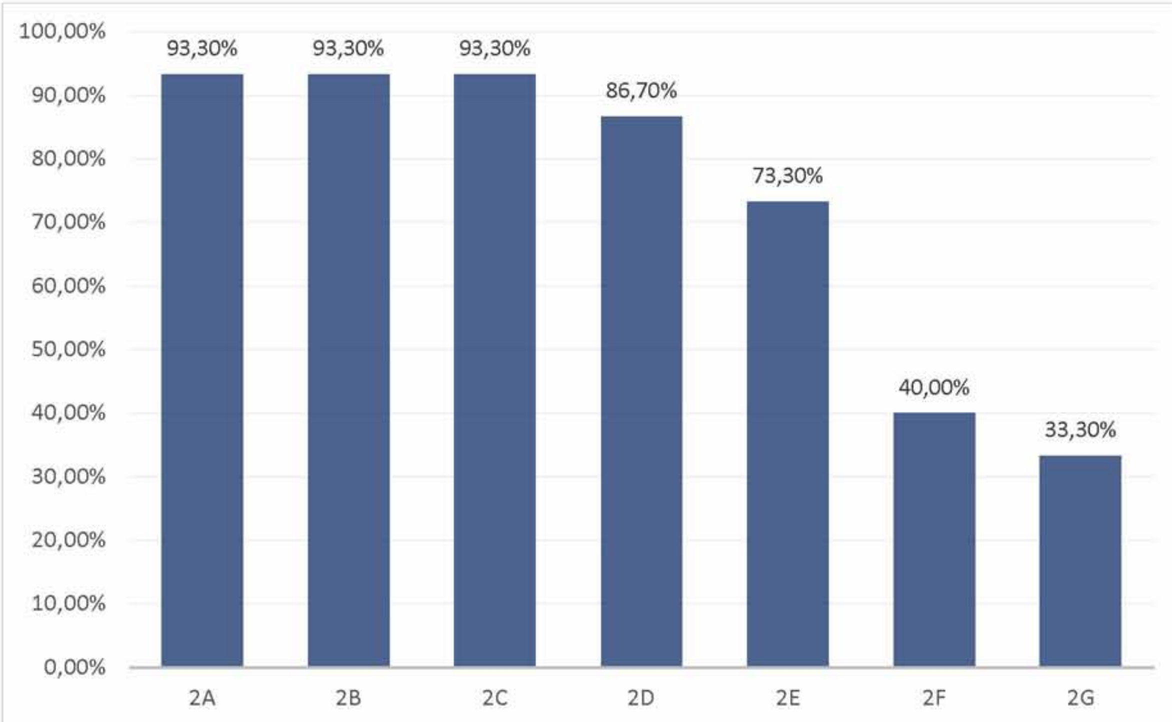
$75\% + 10\% = 85\%$ [illegible]

f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά;

$\frac{300}{400} - \frac{40}{400} = \frac{260}{400}$

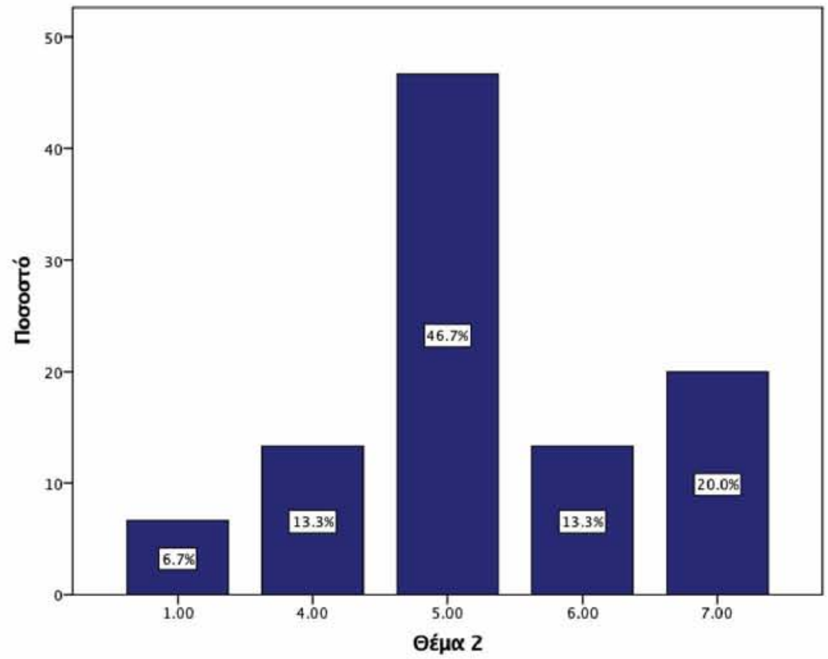
Εικόνα 10: Δείγμα από το 60% των συμμετεχόντων που έδωσαν λανθασμένη απάντηση στο ερωτήμα F σχετικά με τον υπολογισμό της πιθανότητας ένας μαθητής να μαθαίνει αγγλικά αν είναι γνωστό πως μαθαίνει γαλλικά.

Διαγραμματικά η κατανομή των σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση δίνετε στο Γράφημα 8.



Γράφημα 8. Κατανομή σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση

Στην συνέχεια υπολογίσθηκε ο συνολικός αριθμός σωστών απαντήσεων στις 7 ερωτήσεις του θέματος. Η κατανομή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων δίνεται στο Γράφημα 9. Από το Γράφημα 9 προκύπτει ότι 7 (46.7%) συμμετέχοντες έδωσαν σωστή απάντηση στις 5 από τις 7 απαντήσεις τους και 3 (20%) συμμετέχοντες είχαν δώσει σωστή απάντηση στις 7 από τις 7 απαντήσεις. Επιπρόσθετα, 2 (ν=13.3%) συμμετέχοντες είχαν δώσει 6 στις 7 σωστές απαντήσεις. Η μέση τιμή του συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων ήταν ίση με 5.13 (ΤΑ=1.51) δείχνοντας ότι οι συμμετέχοντες πριν την παρέμβαση είχαν κατά μέσο όρο περίπου 5 σωστές απαντήσεις από τις 7.



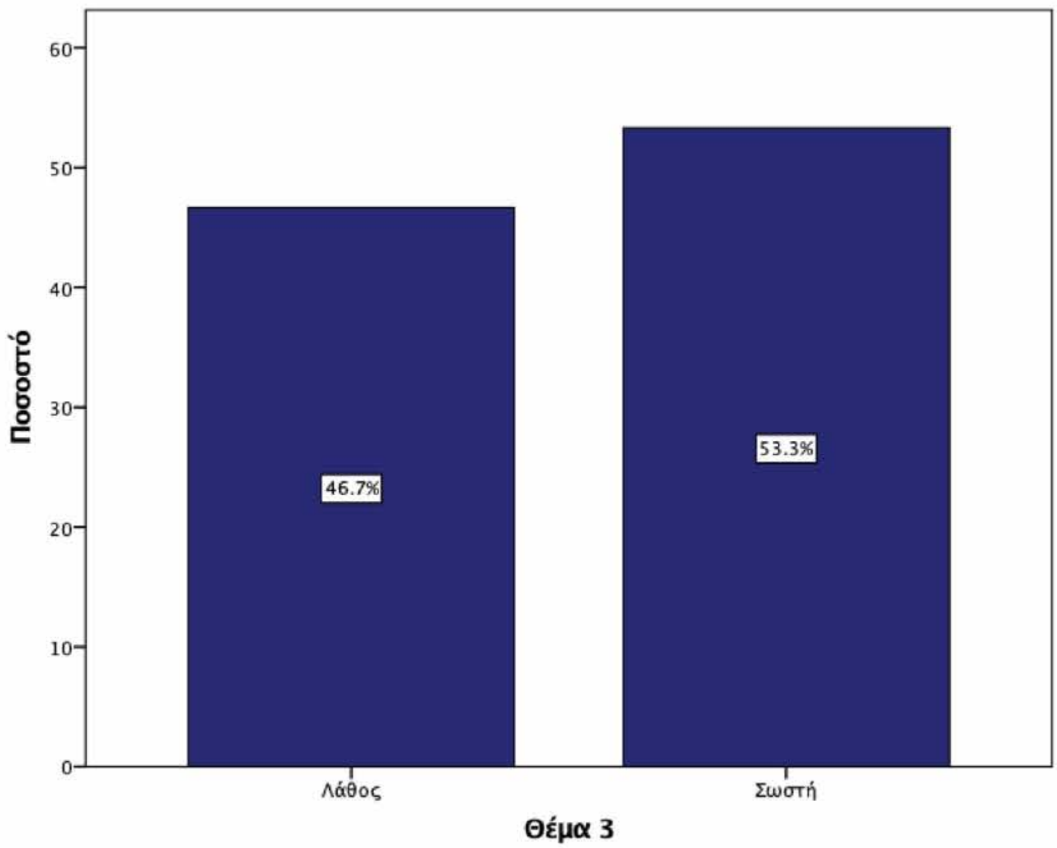
Γράφημα 9. Κατανομή συνολικού αριθμού σωστών απαντήσεων

6.2.3 Αποτελέσματα άσκησης αξιολόγησης 3

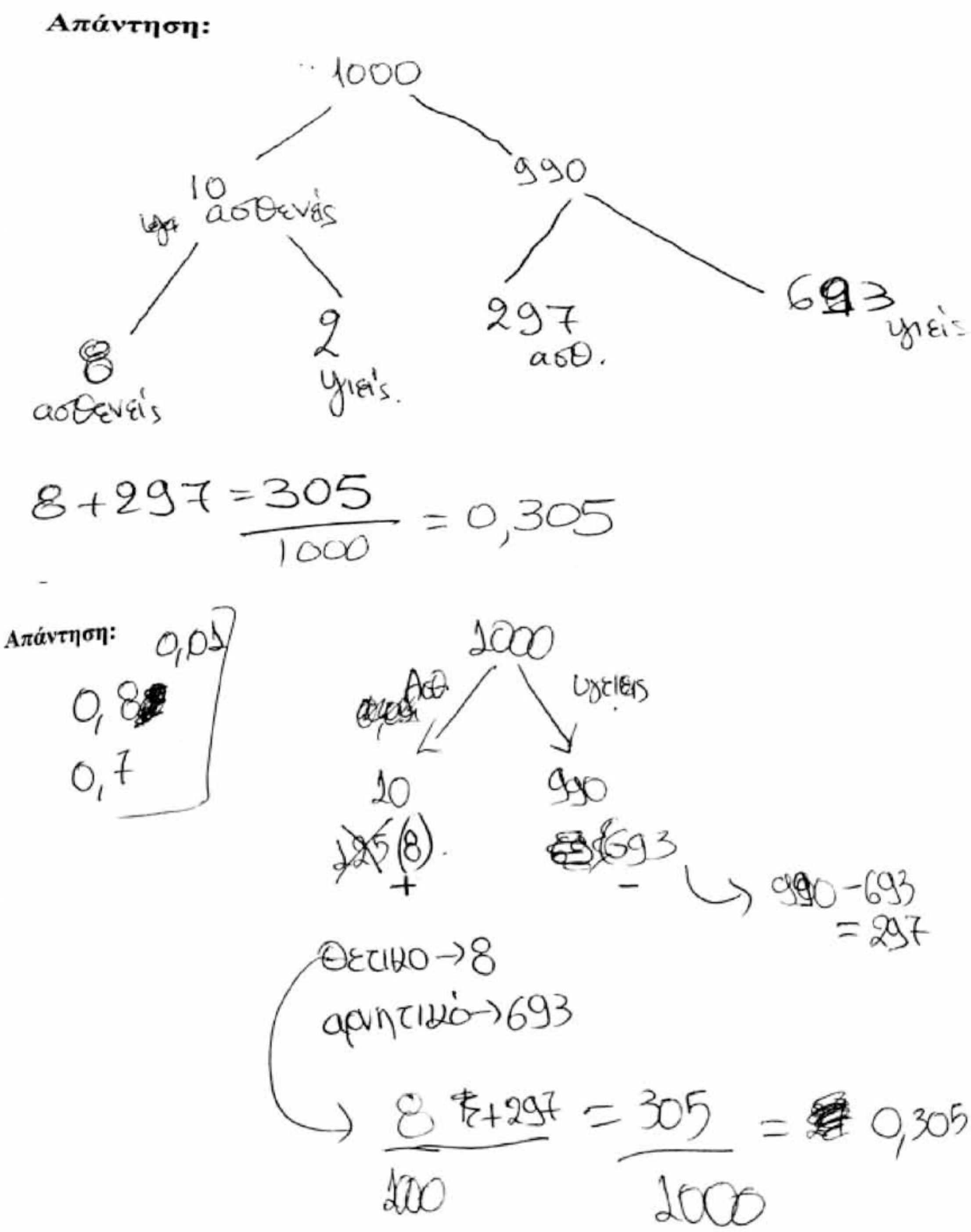
Το τέταρτο θέμα που τέθηκε στους συμμετέχοντες πριν την εφαρμογή της παρέμβασης ήταν το παρακάτω και αφορούσε το υπολογισμό μιας πιθανότητας με χρήση των κριτηρίων Bayes (δεσμευμένη πιθανότητα):

Η πιθανότητα να μολυνθεί κάποιος με HIV είναι 0.01. Αν κάποιος έχει τον ιό τότε υπάρχει πιθανότητα 0.8 το τεστ διάγνωσης να βγει θετικό. Αν κάποιος δεν είναι μολυσμένος τότε υπάρχει πιθανότητα 0.7 το τεστ να βγει αρνητικό. Πόσο πιθανό είναι κάποιος με θετικό τεστ να έχει όντως τον ιό;

Από το Γράφημα 10 προκύπτει ότι 8 από τους 15 (53.3%), δηλαδή περισσότεροι από τους μισούς, υπολόγισαν σωστά την δεσμευμένη πιθανότητα P(να έχει τον ιό | το τεστ βγήκε +). Μόλις οι 3 στους 15 συμμετέχοντες προσπάθησαν να απαντήσουν στο ερώτημα χωρίς χρήση φυσικών συχνοτήτων, δίνοντας λανθασμένη απάντηση. Οι υπόλοιποι 4 επιχείρησαν να λύσουν το πρόβλημα με χρησιμοποιώντας φυσικές συχνότητες, ωστόσο δεν έδωσαν σωστή τελική απάντηση.



Γράφημα 10. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το Θέμα 3



Εικόνα 11: Δείγματα από το 53,3% των συμμετεχόντων που έδωσαν τη σωστή απάντηση στο ερωτήμα 3 σχετικά με τον υπολογισμό της πιθανότητας υπό συνθήκη.

6.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων πριν και μετά την παρέμβαση

Για να διερευνηθεί η επίδραση του προγράμματος παρέμβασης στους 15 συμμετέχοντες ελέγχθηκε η σημαντικότητα της παρατηρούμενης διαφοράς στις παρόμοιες ερωτήσεις. Τα όμοια θέματα ήταν τα θέματα 2, 3 και 4 της πρώτης φάσης (pro-test) και 2, 1 και 3 της δεύτερης φάσης (post-test) αντίστοιχα. Ο έλεγχος που χρησιμοποιήθηκε για την διερεύνηση της ύπαρξη στατιστικά σημαντικών διαφορών είναι ο έλεγχος McNemar (έλεγχος για τη διαφορά ποσοστών από ζευγαρωτές παρατηρήσεις). Επιλέχθηκαν ένας στατιστικός έλεγχος για εξαρτημένα δείγματα καθώς έχουμε συγκρίσεις εντός των ομάδων (within-sample comparison).

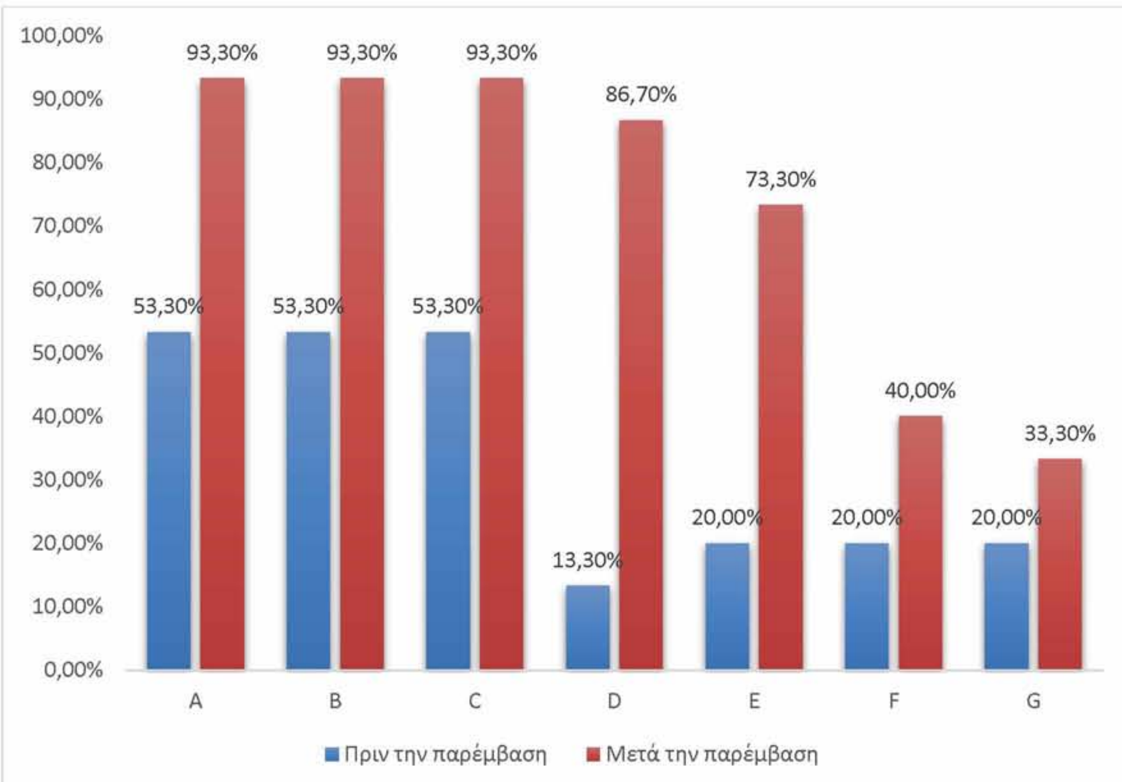
Στον Πίνακα 6 δίνονται τα αποτελέσματα του ελέγχου McNemar για το θέμα με τον υπολογισμό πιθανοτήτων (πρόβλημα με γλώσσες). Από την ανάλυση προέκυψε ότι υπήρχε σημαντική βελτίωση στα αποτελέσματα των ερωτήσεων A, B, C, D και E ($p<0.05$) ενώ δεν παρατηρήθηκε σημαντική βελτίωση στις ερωτήσεις F και G ($p>0.05$).

Πίνακας 7. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το θέμα αξιολόγησης σχετικά με τον υπολογισμό πιθανοτήτων

	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση		p
A	8	53.3%	14	93.3%	0.016
B	8	53.3%	14	93.3%	0.031
C	8	53.3%	14	93.3%	0.031
D	2	13.3%	13	86.7%	0.003

E	3	20.0%	11	73.3%	0.021
F	3	20.0%	6	40.0%	0.275
G	3	20.0%	5	33.3%	0.688

Διαγραμματικά οι συγκρίσεις των ποσοστών σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση δίνεται στο Γράφημα 10.



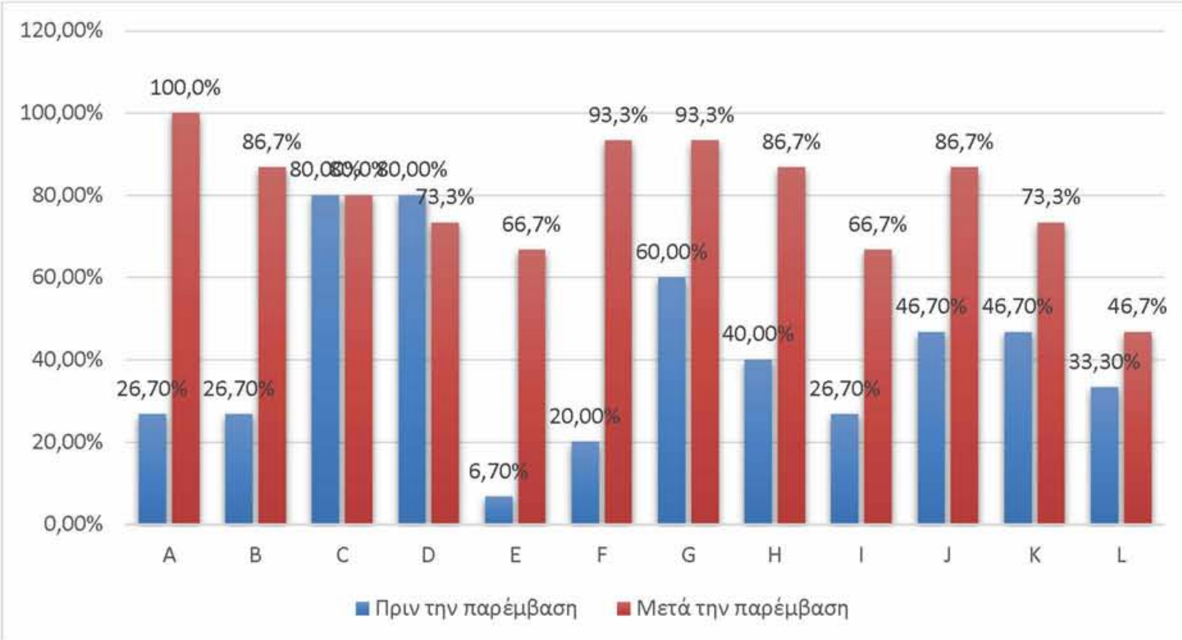
Γράφημα 11. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων πριν και μετά την παρέμβαση

Στον Πίνακα 6 δίνονται τα αποτελέσματα του ελέγχου McNemar για το θέμα με το ζάρι (αναγνώριση δειγματικού χώρου και ενδεχομένων). Από την ανάλυση προέκυψε ότι υπήρχε σημαντική βελτίωση στα αποτελέσματα των ερωτήσεων A, B, E, F, H και I ($p<0.05$) ενώ δεν παρατηρήθηκε σημαντική βελτίωση στις ερωτήσεις C, D, G, J, K και L ($p>0.05$).

Πίνακας 8. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων για το θέμα αξιολόγησης σχετικά με πρόβλημα με το ζάρι

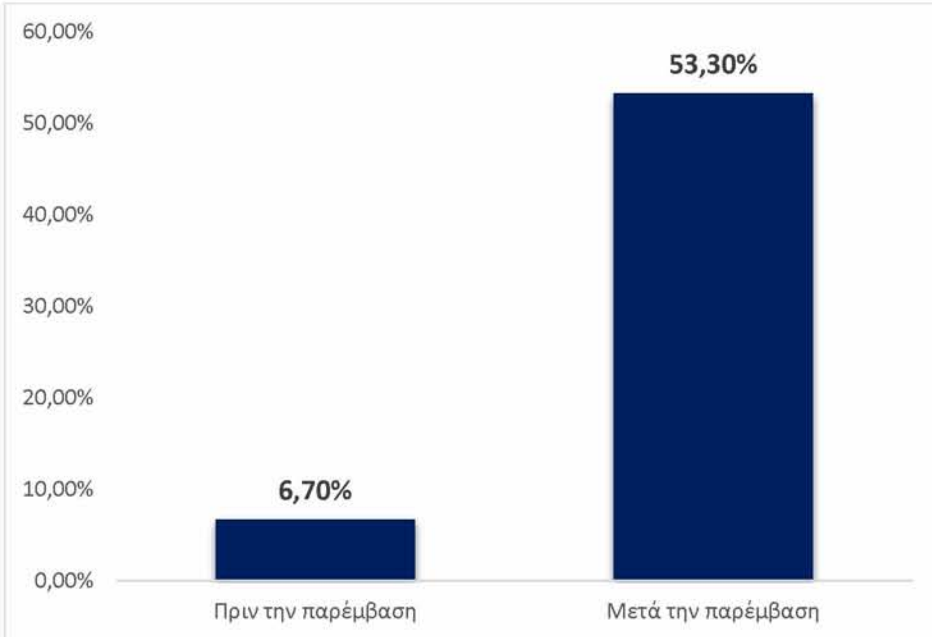
	Πριν την παρέμβαση		Μετά την παρέμβαση		p
A	4	26.7%	15	100.0%	0.001
B	4	26.7%	13	86.7%	0.022
C	12	80.0%	12	80.0%	0.999
D	12	80.0%	11	73.3%	0.999
E	1	6.7%	10	66.7%	0.004
F	3	20.0%	14	93.3%	0.001
G	9	60.0%	14	93.3%	0.063
H	6	40.0%	13	86.7%	0.016
I	4	26.7%	10	66.7%	0.031
J	7	46.7%	13	86.7%	0.109
K	7	46.7%	11	73.3%	0.219
L	5	33.3%	7	46.7%	0.727

Διαγραμματικά οι συγκρίσεις των ποσοστών σωστών απαντήσεων ανά ερώτηση δίνεται στο Γράφημα 11.



Γράφημα 12. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων πριν και μετά την παρέμβαση

Στο Γράφημα 6 δίνονται τα αποτελέσματα του ελέγχου McNemar για το θέμα με τη δεσμευμένη πιθανότητα (τεστ διάγνωσης). Από την ανάλυση προέκυψε ότι υπήρχε σημαντική βελτίωση στα αποτελέσματα ($p<0.05$) καθώς το ποσοστό των συμμετεχόντων που υπολόγισε σωστά τη ζητούμενη πιθανότητα αυξήθηκε από 6.7% σε 53.3%.



Γράφημα 13. Αποτελέσματα σωστών απαντήσεων πριν και μετά την παρέμβαση για το θέμα δεσμευμένης πιθανότητας

Συζήτηση- Συμπεράσματα

Σκοπός της έρευνας αποτέλεσε η ανάπτυξη και η αξιολόγηση ενός εκπαιδευτικού υλικού που αναφέρεται σε ενήλικες, ώστε να κρίνουν βάσει πιθανοκρατούμενων πληροφοριών. Η ερευνήτρια διερεύνησε την αποτελεσματικότητα του διδακτικού υλικού που παράχθηκε, προκειμένου αυτό να εφαρμοστεί στο ευρύτερο πλαίσιο της εκπαίδευσης ενηλίκων σχετικά με τα πιθανοκρατούμενα γεγονότα.

Στην έρευνα συμμετείχαν 15 ενήλικες σπουδαστές προερχόμενοι από διαφορετικά επαγγελματικά πεδία διαφορετικών επιστημονικών κλάδων. Αποτελούνταν από τρία στάδια και διήρκησε 3 εβδομάδες. Στο πρώτο στάδιο η ολομέλεια των συμμετεχόντων συμπλήρωσε ένα pre test σε διάρκεια μία ώρας, ώστε να διαμορφωθεί η εικόνα των προϋπαρχουσών γνώσεων και αντιλήψεων σχετικά με την παρουσία των πιθανοτήτων στο καθημερινό συγκείμενο. Στο δεύτερο στάδιο πραγματοποιήθηκε η διδακτική παρέμβαση, η οποία αποπειράθηκε να διδάξει χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της συνολοθεωρίας και φυσικές συχνότητες αντί για μαθηματικούς τύπους για τη δεσμευμένη πιθανότητα. Στο τελικό και τρίτο στάδιο οι συμμετέχοντας κλήθηκαν να συμπληρώσουν το post test, ώστε να μπορέσουν να διεξαχθούν συμπεράσματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα της διδακτικής παρέμβασης. Κάθε στάδιο απείχε χρονικά από το άλλο διάστημα μία εβδομάδας.

Από το pre test είναι έκδηλη η παρουσία χαμηλών ποσοστών των σωστών απαντήσεων, η οποία προδίδει χαμηλό επίπεδο βασικών γνώσεων αναφορικά με την έννοια της πιθανότητας και της επίλυσης προβλημάτων μέσα στο καθημερινό συγκείμενο. Στη σύγκριση των δύο test διαπιστώθηκε σημαντικά στατιστική διαφορά όσον αφορά την βελτίωση των απαντήσεων των συμμετεχόντων. Φαίνεται πως κατόρθωσαν να αντιληφθούν αποτελεσματικά την ένωση και την τομή δύο συνόλων, ενώ η εν λόγω βελτίωση υστερεί μόνο στην έννοια του συμπληρώματος ενός συνόλου και απόδοση της δεσμευμένης πιθανότητας. Στο πείραμα της ρίψης ζαριών οι συμμετέχοντες φάνηκε πως μπόρεσαν να εφαρμόσουν με ορθότητα τις έννοιες του δειγματικού χώρου, του βέβαιου ενδεχόμενου, της πιθανότητας ενός τυχαίου γεγονότος, της δεσμευμένης πιθανότητας, ενώ δεν παρουσίασαν βελτίωση αναφορικά με το αδύνατο ενδεχόμενο, καθώς οι επιδόσεις τους ήταν ήδη καλές. Σε αντίθεση με την ρίψη ζαριών που αναδεικνύει τις εσωτερικές στερεοτυπικές απόψεις σχετικά με την τυχαιότητα, στην δραστηριότητα της διερεύνησης της ιατρικής φύσης της υπό συνθήκης πιθανότητας οι συμμετέχοντες φαίνεται να έχουν στατιστικά σημαντική βελτίωση και πως αντιλήφθηκαν την επεξεργασία αυτής μέσω της χρήσης της γλώσσας της συνολοθεωρίας και των φυσικών συχνοτήτων.

Με βάση τα παραπάνω συμπεράσματα οδηγούμαστε στον χαρακτηρισμό του εκπαιδευτικού εργαλείου ως αποτελεσματικό στην γενική επισκόπησή του. Σε κάποια μελλοντική έρευνα προτείνεται να αποκλειστούν τα στοιχεία που ήταν λιγότερο αποδοτικά και να αντικατασταθούν με νέα. Ο περιορισμός της έρευνας έγκειται στην περιορισμένη διάρκειά της και στον περιορισμένο αριθμό συμμετεχόντων. Σε μελλοντική έρευνα προτείνεται η εκτενέστερη σε διάρκεια εφαρμογή του διδακτικού υλικού με περισσότερους συμμετέχοντες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Batanero, C. (2015). Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Plenary lecture. *Ninth European Conference of Mathematics Education.* Prague, Czech Republic.
2. Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of prob- ability. In J. P Van Bendegen & K. François (Eds), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107–127). New York: Springer.
3. Batanero, C., Biehler, R., Maxara, C., Engel, J., & Vogel, M. (2005a). Using simulation to bridge teachers' content and pedagogical knowledge in probability. *Paper presented at the fifteenth ICMI Study Conference: The professional education and development of teachers of math- ematics.* Aguas de Lindoia, Brazil: International Commission for Mathematical Instruction.
4. Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005b). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). New York: Springer.
5. Ben-Zvi, D., & Garfield, J. B. (Eds.). (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
6. Bennett, D. J. (1999). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
7. Bernoulli, J. (1987). *Ars conjectandi,* Rouen: IREM. (Original work published in 1713).
8. Borovcnik, M., Bentz, H. J., & Kapadia, R. (1991). Empirical research in understanding prob- ability. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73–105). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

9. Brookfield, S. (2000), Adult cognition as a dimension of lifelong learning, στο Field, J. και Leicester, M. (επιμ.), *Lifelong Learning: Education Across the Lifespan*, Routledge, London
10. Callingham, R. (2007). Assessing Statistical literacy: A question of interpretation. ICOTS 7
11. Cardano, G. (1961). *The book on games of chances.* New York: Holt, Rinehart & Winston (Original work published in 1663).
12. Carnap, R. (1950). *Logical foundations of probability*. Chicago: University of Chicago Press.
13. Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 85–95). New York: Springer.
14. Chernoff, E. J., & Russell, G. L. (2012). The fallacy of composition: Prospective mathematics teachers' use of logical fallacies. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 12*(3), 259–271.
15. Chick, H., Pfannkuch, M., & Watson, J. (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. Curriculum Matters, 1, 86–107.
16. Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
17. Cosmides, L. & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from literature on judgment under uncertainty. Cognition, 58, 1-73.
18. David, F. N. (1962). *Games, gods and gambling*. London: Griffin.

19. delMas, Garfield & Chance (1999). A model of classroom research in action: developing simulation activities to improve students' statistical reasoning. Journal of Statistics Education, v.7,n.3.

20. delMas, Garfield & Chance (2002). Assessment as a mean of instruction. Paper presented at the Joint Mathematics Meetings, San Diego, CA, January 6-9, 2002.

21. delMas, R., & Bart, W. (1989). The role of an evaluation exercise in the resolution of misconceptions of probability. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(3), 39–53.

22. Eheazu, B.A. (1998). The right to Learn: Relevance of adult education, *Inaugural Lecture Series No. 20*, University of Port Harcourt.

23. English, L. D., & Watson, J. M. (2016b). Development of probabilistic understanding in fourth grade. Journal for Research in Mathematics Education, 47(1), 28–62.

24. English, L., & Watson, J. (2016a). Making decisions with data: Are we environmentally friendly? Australian Primary Mathematics Curriculum, 21(2), 3–7.

25. Falk, R., & Konold, C. (1992). The psychology of learning probability. In F. S. Gordon & S. P. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (pp. 151–164). Washington: Mathematical Association of America.

26. Fast, G. (2001). The Stability of analogically reconstructed knowledge in secondary mathematics students. Canadian Journal of Science, Mathematics, & Technology Education, Volume 1, Number 2,April 2001.

27. Fine, T. L. (1971). *Theories of probability. An examination of foundations*. London: Academic Press.

28. Fiscbein, E. & Schnarch, D. (1997). The Evolution With age of probabilistic, intuitively based misconceptions. Journal for Research in Mathematics Education, 28, 96-105.

29. Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, The Netherlands, Reidel.

30. Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Schaeffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education. (GAISE) Report: A pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.

31. Frost, J. (2013). Why statistics is important. The World of Statistics. Retrieved from http://www. worldofstatistics.org/2013/03/04/why-statistics-is-important/

32. Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. In J. B. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 47–78). Dordrecht: Kluwer.

33. Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 39–63). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

34. Galesic, M., & Garcia-Retamero, R. (2010). Statistical numeracy for health: A cross-culturalcomparison with probabilistic national samples. Archives of Internal Medicine, 170(5), 462

35. Garfeild, J. (1998). The statistical reasoning assesment: development and validation of aresearch tool. Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistic, Ed. Pereira Mendoza, Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, 781-786.

36. Garfield, J. (1995). How students learn statistics. International Statistics Review, 63, 25–34.

37. Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a stat- istical reasoning learning environment. Teaching Statistics, 31(30), 72–77.

38. Garfield, J., & delMas, R. (1989). Reasoning about chance events: assessing and changing students' conception of probability. In C. Maher, G. Goldin, and B. Davis (Eds.), The Proceedings of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume II, 189-1965, Rutgers University Press.

39. Garfield, J., delMas, R., & Zieffler, A. (2010). Assessing statistical thinking. In P. Bidgood, N. Hunt, & F. Jolliffe (Eds.), Assessment methods in statistical education: An international perspective (pp. 175–186). Milton: John Wiley & Sons. Chapter 11.

40. Gillies, D. (2000). Varieties of propensities. *British Journal of Philosophy of Science, 51*, 807–835.

41. Giovannini, E. (2008). Statistics and politics in a 'knowledge society'. Social Indicators Research, 86(2), 177–200.

42. Grinstein, L. & Lipsey, S. (2001). Introduction to the history of Mathematics. Encyclopaedia of Mathematics Education. USA: Routledge Falmer.

43. Hacking, I. (1975). The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference. London; New York, Cambridge University Press.

44. Hacking, I. (2001). An introduction to probability and inductive logic, Cambridge University press.

45. Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6*, 187–205.

46. Henry, M. (2010). Evolution de l’enseignement secondaire français en statistique et probabilities [Evolution of French secondary teaching in statistics and probability]. *Statistique et Enseignement, 1*(1), 35–45.

47. Hirsch, L. S., & O’Donnell, A. M. (2001). Representativeness in statistical reasoning: Identifying and assessing misconceptions. Journal of Statistics Education, 9(2).

48. Ingram, N. (2015). Students’ relationships with mathematics: Affect and identity. In M. Marshman, V. Geiger, & A. Bennison (Eds.), Mathematics education in the margins.Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, (pp. 301–308). Sunshine Coast: MERGA.

49. Jaoude A. (2016). The paradigm of complex probability and Chebyshev’s inequality, *Systems Science & Control Engi*neering, 4(1), 99-137.

50. Jarvis P. (2004) *Συνεχιζόμενη εκπαίδευση και κατάρτιση: Θεωρία και Πράξη*. Εκδόσεις Μεταίχμιο, Αθήνα.

51. Kandermir, M.A, & Gür, H. (2009). The use of creative problem-solving scenarios in Mathematics education: Views of some prospective teachers. Procedia Social and Behavioural Sciences, 1(1), 1628-1635. January 4.

52. Kaplan, J. J., & Thorpe, J. (2010). Post secondary and adult statistical literacy: Assessing beyond the class- room. Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the eighth international conference on teaching statistics. Voorburg: International Statistical Institute.

53. Kazima, M., & Adler, J. (2006b). Mathematical knowledge for teaching: Adding to the description through a study of probability in practice. Pythagoras, (63), 46–59.

54. Keeler, C., & Steinhorst, K. (2001). A new approach to teaching probability in the first statistics course. Journal of Statistics Education [Online], 9(3).

55. Keynes, J. M. (1921). *A treatise on probability*. New York: MacMillan

56. Khazanov, L. (2008). Addressing students' misconceptions about probability during the first years of college. Mathematics and Computer Education, 42(3), 180-192

57. Khazanov, L. & Gourgey, A. (2009). Instructors' perspectives on students' mistaken beliefs about probability in an elementary college statistics course. In K. Safford-Ramus (Ed.), Proceedings of the Adults Learning Mathematics, a Research Forum (ALM) 15th Annual International Conference. 249-264.

58. Kolmogorov, A. (1950). *Foundations of probability's calculation.* New York: Chelsea Publishing Company (Original work, published in 1933).

59. Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. Cognition and Instruction, 6, 59–98.

60. Konold, C. (1995). Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics. Journal of Statistics Education [Online], 3(1).

61. Krishnamachari, S. (1988). The use of computer simulations in teaching probability. Unpublished doctoral dissertation Teachers College, Columbia University, New York.

62. Langrall, C. W., & Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' prob- abilistic reasoning. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95–119). New York: Springer.

63. Martignon, L. (2014). Fostering children's probabilistic reasoning and first elements of risk eval- uation In E. J. Chernoff, B. & Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking, presenting plural per- spectives* (pp. 149–160). Dordrecht: The Netherlands: Springer.

64. Mellor, D. H. (1971). *The matter of chance*. Cambridge: Cambridge University Press.

65. Mezirow J. (2007). Μαθαίνοντας να σκεφτόμαστε όπως ένας ενήλικος. Κεντρικές έννοιες της θεωρίας του μετασχηματισμού στο Mezirow J. και Συνεργάτες *Η μετασχηματίζουσα μάθηση*, μτφ.: Καλαουζίδης Γ. Αθήνα: Μεταίχμιο

66. Moore, D. S. (2010). *The basic practice of statistics.* New York: Freeman (5th edition).

67. National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

68. Nilsson, P. (2003). Expeimentation as a tool for discovering mathematical concepts of probability. Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

69. Pange, J., & Talbot, M. (2003). Literature survey and children's perception on risk. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 35*(4), 182–186.

70. Pascal, B. (1963). Correspondance avec Fermat [Correspondence with Fermat]. In B. Pascal, *Oeuvres Complètes* (pp. 43–49). París: Seuil (Original letter written in 1654).

71. Patterson, D. N., Norwood, S. K. (2004). A case study of teacher beliefs on student' beliefs about multiple representations, *International Journal of Science and Mathematics Education 2*: 5-23, National Science Council, Taiwan, p. 8

72. Popper, K. R. (1959). The propensity interpretation of probability. *British Journal of the Philosophy of Science, 10*, 25–42.

73. Renyi, A. (1992). *Calcul des probabilités* [Probability calculus]. Paris: Jacques Gabay (Original work published 1966).

74. Ridgway, J., Nicholson, J., & McCusker, S. (2011). Developing statistical literacy in students and teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), Teaching statistics in school

mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study (pp. 311–322). Dordrecht: Springer.

75. Rogers, A. (1999), *Η Εκπαίδευση Ενηλίκων*, μτφ.: Μ. Παπαδοπούλου, Μ. Τόμπρου, Αθήνα: Μεταίχμιο

76. David Sapire, D. (1992), General causal propensities, Classical and Quantum probabilities, *Philosophical Papers*, 21(3), 243-258.

77. Savage, R. (1994). The paradox of nontransitive dice. *American Mathematical Monthly, 101*(5), 429–436.

78. Schield, M. (2010). Assessing statistical literacy: Take care. In P. Bidgood, N. Hunt, & F. Jolliffe (Eds.), Assessment methods in statistical education: An international perspective (pp. 133–152). Milton: John Wiley & Sons. Chapter 11.

79. Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. Handbook for research on mathematics teaching and learning. D. Grouws. New York, Macmillan: 465–494.

80. Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. (2012). Statistical education in the 21st century: A review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. Journal of Statistics Education, 20(2), 1–24.

81. von Mises, R. (1952). *Probability, statistics and truth*. London: William Hodge. (Original work published in 1928).

82. Von Plato, J. (1994). Creating modern probability: its mathematics, physics, and philosophy in historical perspective. Cambridge [England]; New York, Cambridge University Press.

83. Wallman, K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 1-8.

84. Watson, J. (1997). Assessing statistical thinking using the media. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), The assessment challenge in statistics education (pp. 107–121). Amsterdam: IOS Press and The International Statistical Institute.

85. Watson, J. M. (2006). Statistical literacy at school: Growth and goals. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

86. Γεωργογιάννης, Π. (2008), *Διαπολιτισμική Εκπαίδευση, Επιστημονική σειρά: Βηματισμοί για μια αλλαγή στην εκπαίδευση* - Τόμος 7ος, Πάτρα, σ.253

87. Καλούρη - Αντωνοπούλου, Ρ., 2001, *Γενική Ψυχολογία, Παιδαγωγική Ψυχολογία.* Αθήνα: Ελλην.

88. Κόκκος, Α. (2005), *Εκπαίδευση Ενηλίκων: Ανιχνεύοντας το πεδίο*, Αθήνα: Μεταίχμιο.

89. Χατζηκυριάκου Κ. (2008). *Μαθηματικά για τη δασκάλα και το δάσκαλο: αριθμοί, σύνολα, σχήματα*. Θεσσαλονίκη: σοφία Α.Ε.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ PRE TEST

Κωδικός αριθμός:

Επαγγελματική ειδικότητα:

Ηλικία:

1. Ρίξε δύο ζάρια.

a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις;

b. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10;

c. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;

d. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;

f. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5;

g. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;

h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8;

j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

2. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου οι 300 μαθαίνουν αγγλικά, οι 80 γαλλικά και οι 40 και τις δύο γλώσσες. Συναντώ έναν μαθητή του σχολείου.

a. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ;

b. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ;

c. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ;

d. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

e. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες;

f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά;

g. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν και μόνον αν μαθαίνει γαλλικά;

3. Η πιθανότητα να μολυνθεί κάποιος με HIV είναι 0,01. Αν κάποιος έχει το ιό υπάρχει 0,8 πιθανότητα το τεστ διάγνωσης να βγει θετικό. Αν κάποιος δεν είναι μολυσμένος, υπάρχει 0,7 πιθανότητα το τεστ να βγει αρνητικό. Πόσο πιθανό είναι κάποιος με θετικό τεστ να έχει όντως τον ιό;

Απάντηση:

ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ PRE TEST

Ερώτημα 1ο:

Απάντηση: c, e, a, d, b

Απάντηση:

a, b, c, d, e

Απάντηση: e, c, d, a ≡ b ισοπίθανα.

Απάντηση:

c
d
a
b
e

Ερώτημα 2°:

2. Ρίξε δύο ζάρια.

a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις; 6

b. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10; 5+5, 4+6, , 2 τροπους.

c. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;
Με κανεναν

d. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13; Με κανεναν

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; εναν

f. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5;
Με εναν

g. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;
Με 3 τρόπους

h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6; Τίποτα από τα δύο, από τύχη.

i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8; 6

j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6; ~~ε~~ Καμία

k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6; Καμια

l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6; 5

2. Ρίξε δύο ζάρια.

a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις; 42

b. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10; 2

c. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1; 0

d. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13; 0

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; 1

f. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5; 4

g. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6; 5

h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6; 6 -> 5 φορές 5 -> 4 φορές

i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8;

j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

6 -> 5 φορές
5 -> 4 φορές

k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6; 6 -> 3 φορές 5 -> 2 φορές

l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6?

6 -> 2 φορές
5 -> 1 φορά

2. Ρίξε δύο ζάρια.

a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις;

2

b. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10;

5+5 6+4 4+6

c. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;

Μόνο 1 φορά

d. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;

5+5+3 8+2+3

e. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;

Με 2.

f. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5;

Μόνο μία φορά

g. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;

Με δύο

h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

Ναι είναι.

i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8;

Ναι

j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

Μόνο 5

k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

5

l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

ΝΑΙ

Ερώτημα 3ο :

3. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες.

10
250 150 30

a. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν αγγλικά ;

60

210

b. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν γαλλικά ;

150

c. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες ;

360

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

60

e. Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;

όλοι μαθαίνουν γλώσσες

f. Βρες το ποσοστό των μαθητών που δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες

30

g. Σε τι ποσοστό τα παιδιά που κάνουν γαλλικά μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες;

25%

3. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες.

a. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν αγγλικά ;

320

b. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν γαλλικά ;

120

c. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες ;

80

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

360

e. Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;

40

f. Βρες το ποσοστό των μαθητών που δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες

10%

g. Σε τι ποσοστό τα παιδιά που κάνουν γαλλικά μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες;

66.6%

3. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες.

a. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν αγγλικά ;

320

b. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν γαλλικά ;

120

c. Πόσοι μαθητές μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες ;

80

d. Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

360

e. Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;

40

f. Βρες το ποσοστό των μαθητών που δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες

10%

g. Σε τι ποσοστό τα παιδιά που κάνουν γαλλικά μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες;

$2/3 \simeq 66,7\%$

120 — 100%

80 — x

Ερώτημα 4^{o} :

4. Το διαγνωστικό τεστ για την ασθένεια Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Αν κάποιος άνθρωπος έχει την ασθένεια Α, τότε η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0,9. Αν δεν την έχει, η πιθανότητα να βγει θετικό είναι 0,01. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την ασθένεια είναι 0,01. Ο Γ. έκανε το τεστ και βγήκε θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει όντως την ασθένεια;

Απάντηση: Η πιθανότητα είναι 0,01.

4. Το διαγνωστικό τεστ για την ασθένεια Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Αν κάποιος άνθρωπος έχει την ασθένεια Α, τότε η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0,9. Αν δεν την έχει, η πιθανότητα να βγει θετικό είναι 0,01. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την ασθένεια είναι 0,01. Ο Γ. έκανε το τεστ και βγήκε θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει όντως την ασθένεια;

Απάντηση: 0,09

4. Το διαγνωστικό τεστ για την ασθένεια Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Αν κάποιος άνθρωπος έχει την ασθένεια Α, τότε η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0,9. Αν δεν την έχει, η πιθανότητα να βγει θετικό είναι 0,01. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την ασθένεια είναι 0,01. Ο Γ. έκανε το τεστ και βγήκε θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει όντως την ασθένεια; → 1%

ΝΑΙ αρνητικό

Απάντηση:

100% − 90% = 10% → Δεν έχουν

10% − 1% = 9% Γ

9% έχει να παρουσιάσει την ασθένεια όπως 9% → 0,0

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Άσκηση 2 ερωτηματολογίου: Ρίξε δύο ζάρια.

- Πόσες διαφορετικές “ζαριές” μπορείς να φέρεις;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 10;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;
- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 5;

Βασικές έννοιες - Δειγματικός χώρος

Ρίχνω ένα ζάρι δύο φορές. Ο δειγματικός χώρος βρίσκεται από το πινακάκι διπλής εισόδου.

1η/2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Άρα ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,6)\}$

(Συνέχεια)

- Με πόσους διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;
- Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;
- Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 8;
- Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;
- Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;
- Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 5 ή 6;

Βασικές έννοιες - Πείραμα τύχης

Πείραμα τύχης: διαδικασία που είναι δυνατόν να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες, το αποτέλεσμα της οποίας δεν μπορεί να προβλεφθεί.

Παράδειγμα:

1) η ρίψη ενός ζαριού

2) η ρίψη ενός νομίσματος

Βασικές έννοιες - Δειγματικός χώρος

Δειγματικός χώρος (Ω):
Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$
Οπότε:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Παράδειγμα:
1) η ρίψη ενός νομίσματος:
Ω={Α, Σ} Α=αριθμός, Σ=Σχήμα
2) η ρίψη ενός ζαριού:
Ω={1,2,3,4,5,6}

Βασικές έννοιες - Ενδεχόμενα

Ενδεχόμενο (Α): κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου. Σε αυτά συμπεριλαμβάνεται ο ίδιος ο δειγματικός χώρος και το κενό σύνολο.

Στοιχειώδες ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που περιλαμβάνει ένα μόνο αποτέλεσμα $A = \{\omega_1\}$

Βέβαιο ενδεχόμενο: ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε κάθε εκτέλεση ενός πειράματος, δηλαδή ο ίδιος δειγματικός χώρος Ω.

Αδύνατο ενδεχόμενο $(\varnothing)$: ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση ενός πειράματος.

Παράδειγμα...

Αν ρίξουμε ένα κέρμα μια φορά τότε τα ενδεχόμενα είναι Α για Αριθμό και Σ για Σχήμα. Αυτά τα δύο είναι και τα ενδεχόμενα του πειράματος.

Άσκηση 1 ερωτηματολογίου

Η Ελένη είναι είκοσι οκτώ χρονών, ανύπαντρη. Έχει σπουδάσει πολιτικές επιστήμες. Στα φοιτητικά της χρόνια συμμετείχε ενεργά στο χορευτικό σύλλογο Ποντίων και πήρε μέρος σε πολλές παραστάσεις. Μπορείτε να βάλετε τα παρακάτω στη σειρά, αρχίζοντας από αυτό που θεωρείται πιθανότερο και καταλήγοντας σε αυτό που θεωρείται λιγότερο πιθανό; (Μπορείτε να χαρακτηρίσετε και κάποια από αυτά ισοπίθανα, αν έτσι νομίζετε).

a) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος.

b) Η Ελένη είναι ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.

c) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος και ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.

d) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος ή ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου.

e) Η Ελένη είναι γραμματειακή υπάλληλος, ενεργό μέλος ενός χορευτικού συλλόγου και ασχολείται με το πλέξιμο.

Ποσοστό

- Ποσοστό ενός ποσού είναι ένα μέρος του ποσού αυτού κι επομένως το ποσοστό μπορεί να εκφραστεί σαν κλάσμα.
- Ποσοστό στα 100 είναι κάθε κλάσμα με παρονομαστή 100.
- Παράδειγμα: Η έκπτωση
- Έκπτωση 10% σε ένα ζευγάρι αθλητικά παπούτσια των 150 ευρώ είναι 15 ευρώ. Η νέα του τιμή είναι 150 − 15 = 135 ευρώ. Πόσο στα εκατό πρέπει να αυξήσουμε τη νέα τιμή για να ξαναπουλάμε το ζευγάρι 150 ευρώ;

Γλώσσα ποσοστών-Γλώσσα πιθανοτήτων

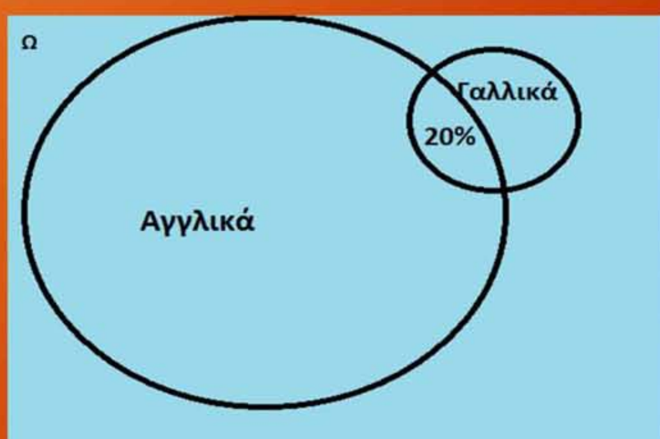
- Στην άσκηση 2 μπορώ να μιλήσω με τη γλώσσα των ποσοστών λέγοντας π.χ. ότι το ποσοστό των «ζαριών» με άθροισμα 5 είναι 4 στα 36, δηλαδή $\frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 11{,}1\ldots\,\% = 11{,}\overline{1}\,\%$ Ή
- Στη γλώσσα των πιθανοτήτων λέγοντας η πιθανότητα να φέρω άθροισμα 5 είναι $\frac{1}{9} = 0{,}11\ldots = 0{,}\overline{1}$ ορίζοντας την πιθανότητα κλασικά

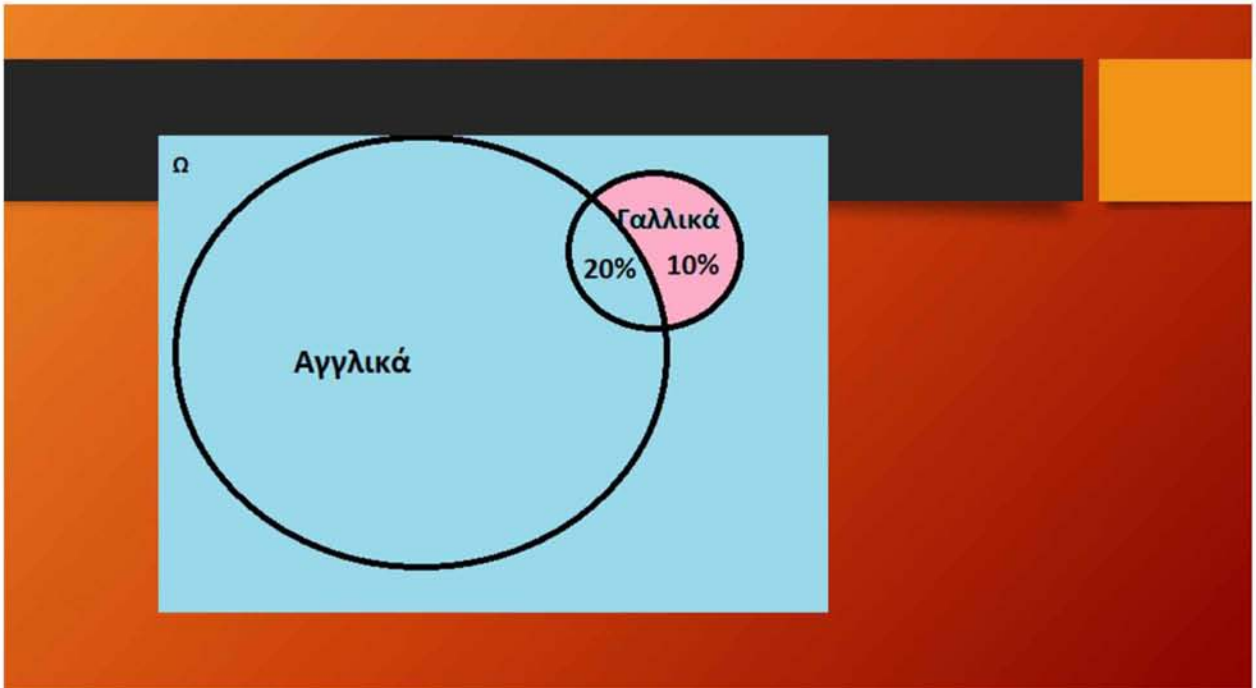
$$P(A) = \frac{\pi\lambda\eta\theta\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \tau o\upsilon\ A}{\pi\lambda\eta\theta\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \tau o\upsilon\ \Omega}$$

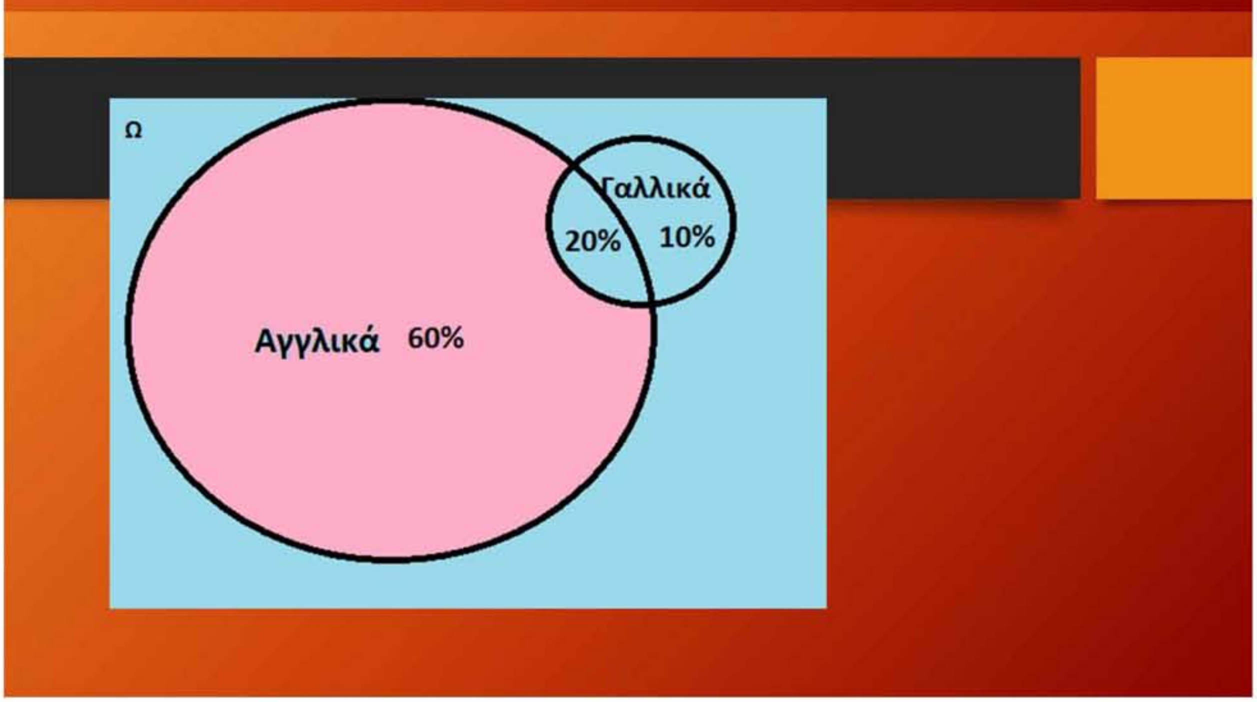
Παράδειγμα- άσκηση 3

Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δύο γλώσσες.

- Πόσοι μαθητές μαθαίνουν αγγλικά ;
- Πόσοι μαθητές μαθαίνουν γαλλικά ;
- Πόσοι μαθητές μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες ;
- Πόσοι από τους μαθητές μαθαίνουν τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;
- Πόσοι μαθητές δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες;
- Βρες το ποσοστό των μαθητών που δεν μαθαίνουν καμία από τις δύο γλώσσες
- Σε τι ποσοστό τα παιδιά που κάνουν γαλλικά μαθαίνουν και τις δύο γλώσσες;




Ω
Γαλλικά
20%
10%
Αγγλικά

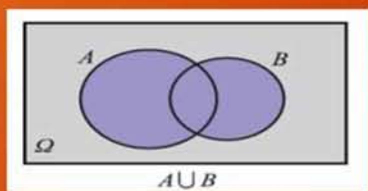

Ω
Γαλλικά
20%
10%
Αγγλικά
60%

Πράξεις ενδεχομένων

Τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα δειγματικού χώρου. Σε αυτά μεταφέρονται έννοιες και πράξεις που έχουν οριστεί για σύνολα.

Ενδεχόμενο $(A \cup B)$: «Α ένωση Β» ή «Α ή Β», πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α και Β.

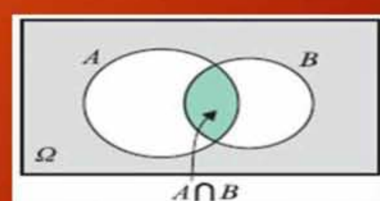
Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή.



Πράξεις ενδεχομένων

Ενδεχόμενο $(A \cap B)$: «Α τομή Β» ή «Α και Β», πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β.

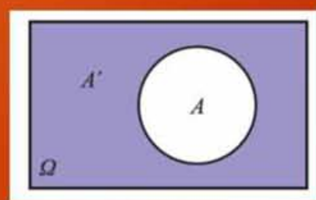
Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή.



Πράξεις ενδεχομένων

Ενδεχόμενο A' : «όχι A» ή «αντίθετο του A», πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A.

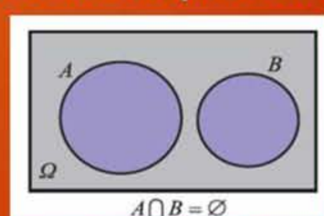
Σχηματικά αντιστοιχεί στη σκιασμένη περιοχή.



Πράξεις ενδεχομένων

Ασυμβίβαστα ή ξένα ενδεχόμενα (A, B): λέγονται τα ενδεχόμενα που δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο δηλαδή $A \cap B = \varnothing$

Σχηματικά παρουσιάζονται δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.



Οι παραπάνω έννοιες επεκτείνονται σε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα.

Σχετική συχνότητα

Αν σε n επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης εμφανιστεί το ενδεχόμενο (Α) r φορές, τότε συμβολίζουμε ως σχετική συχνότητα του ενδεχομένου Α το πηλίκο $f_A = \frac{r}{n}$

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ δειγματικός χώρος και $A = \{a_1, a_2, ... a_r\}$ ένα ενδεχόμενο τότε ισχύει:

- $0 \leq f_{\omega_i} \leq 1 \qquad i=1,2,...,r$
- $f_{\omega_1} + f_{\omega_2} + ... + f_{\omega_n} = 1$
- $f_A = f_{a_1} + f_{a_2} + ... + f_{a_r}$

Ιδιότητες

- |AUB| = |A| + |B| – |A∩B|
- Επομένως

P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

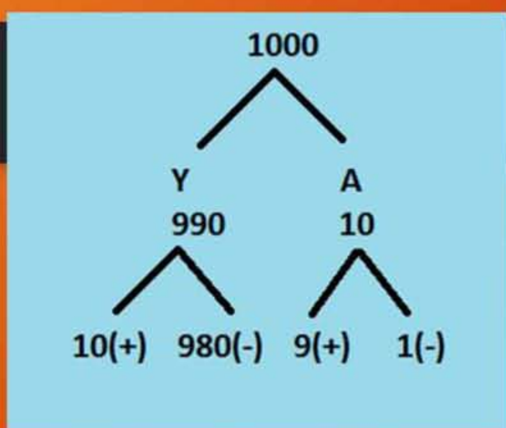
Και αν Α, Β ξένα τότε

P(AUB) = P(A) + P(B)

- Αφού AUA΄= Ω και A∩A΄= ∅, ισχύει
- P(A΄) = 1 – P(A).
- P(Ω) = 1
- P(∅) = 0

Παράδειγμα- άσκηση 4

Το διαγνωστικό τεστ για την ασθένεια Α έχει τα εξής χαρακτηριστικά. Αν κάποιος άνθρωπος έχει την ασθένεια Α, τότε η πιθανότητα να είναι θετικό το τεστ είναι 0,9. Αν δεν την έχει, η πιθανότητα να βγει θετικό είναι 0,01. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να έχει κάποιος την ασθένεια είναι 0,01. Ο Γ. έκανε το τεστ και βγήκε θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει όντως την ασθένεια;



Έστω Φ το ενδεχόμενο να έχει βγει θετικό το τεστ και το άτομο να έχει όντως την ασθένεια.
P(Φ)=9/19=0,47=47%

Δεσμευμένη πιθανότητα-Πιθανότητα υπό συνθήκη

- Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α δεδομένου του Β συμβολίζεται με P(A I B).
- Γράφουμε $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ POST TEST

Κωδικός αριθμός:

1. Ρίξε δύο ζάρια.

a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις;

b. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 9;

c. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1;

d. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13;

e. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2;

f. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6;

g. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 7;

h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;

i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 7 ή 8;

j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή7;

k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;

l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7;

2. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου οι 300 μαθαίνουν αγγλικά, οι 80 γαλλικά και οι 40 και τις δύο γλώσσες. Συναντώ έναν μαθητή του σχολείου.

a. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ;

b. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ;

c. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ;

d. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

e. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες;

f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά;

g. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν και μόνον αν μαθαίνει γαλλικά;

3. Η πιθανότητα να μολυνθεί κάποιος με HIV είναι 0,01. Αν κάποιος έχει το ιό υπάρχει 0,8 πιθανότητα το τεστ διάγνωσης να βγει θετικό. Αν κάποιος δεν είναι μολυσμένος, υπάρχει 0,7 πιθανότητα το τεστ να βγει αρνητικό. Πόσο πιθανό είναι κάποιος με θετικό τεστ να έχει όντως τον ιό;

Απάντηση:

ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ POST TEST

Ερώτημα 1ο :

1. Ρίξε δύο ζάρια.

   a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις; 36

   b. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 9; $\frac{4}{36}$

   c. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1; $\frac{0}{36}$

   d. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13; $\frac{0}{36}$

   e. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; $\frac{36}{36}$

   f. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6; $\frac{5}{36}$

   g. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 7; $\frac{6}{36}$

   h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; 7

   i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 7 ή 8; 7

   j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; 7

   k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; 7

   l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; 7

1. Ρίξε δύο ζάρια.

   a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις; → 36

   b. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 9; → $\frac{4}{36}$

      5 – 4
      4 – 5
      6 – 3
      3 – 6

   c. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1; → $\frac{0}{36}$

   d. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13; → δεν υπάρχει

   e. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; → $\frac{36}{36}$

   f. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6; → $\frac{5}{36}$

   g. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 7; → $\frac{6}{36}$

   h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; → το 7

   i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 7 ή 8; → το 7

   j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; 7

   k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; είναι 7

   l. Αν δεν φέρεις «διπλές», είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; είναι το 6

1. Ρίξε δύο ζάρια.

   a. Πόσες διαφορετικές «ζαριές» μπορείς να φέρεις; 36

   6 – 3
   3 – 6
   5 – 4
   4 – 5

   b. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 9; $\frac{4}{36}$

   c. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 1; $\frac{0}{36} = 0$, καμία

   d. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 13; καμία

   e. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι τουλάχιστον 2; $\frac{36}{36}$

   1 – 5
   5 – 1
   4 – 2
   2 – 4
   3 – 3

   f. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 6; 3 $\frac{5}{36}$

   g. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των δύο αριθμών της ζαριάς είναι 7; $\frac{6}{36}$

   6 – 1
   1 – 6
   5 – 2
   2 – 5
   4 – 3
   3 – 4

   h. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; το 7

   i. Είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 7 ή 8; το 7

   j. Αν ένα από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; το 7

   k. Αν ένα μόνον από τα ζάρια είναι περιττός (μονός) αριθμός, είναι πιθανότερο να φέρεις άθροισμα 6 ή 7; το 7

Ερώτημα 2^o :

2. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου οι 300 μαθαίνουν αγγλικά, οι 80 γαλλικά και οι 40 και τις δύο γλώσσες. Συναντώ έναν μαθητή του σχολείου.

a. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ; $\frac{300}{400} = 0{,}75 = 75\%$

b. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ; $\frac{80}{400} = 0{,}2 = 20\%$

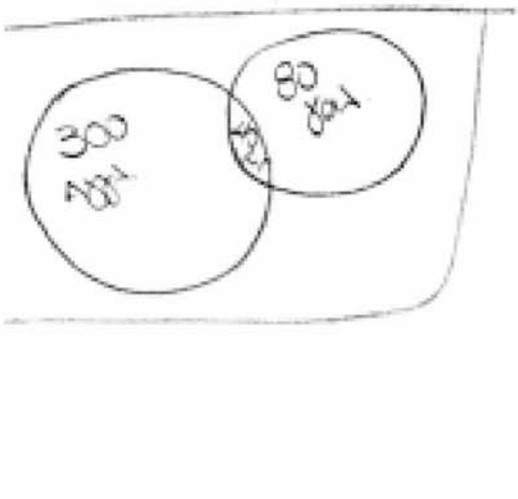
c. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ; $\frac{40}{400} = 0{,}1 = 10\%$

d. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;
$\frac{340}{400} = 0{,}85 = 85\%$.

e. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες;
$00 - 340 = 60 \Rightarrow \frac{60}{400} = 0{,}15 = 15\%$.

f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά; $\frac{40}{80} = 0{,}5 = 50\%$

g. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν και μόνον αν μαθαίνει γαλλικά;
καμία.



2. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου οι 300 μαθαίνουν αγγλικά, οι 80 γαλλικά και οι 40 και τις δύο γλώσσες. Συναντώ έναν μαθητή του σχολείου.

a. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ; → $\frac{300}{400} = 0,75$, 75%.

b. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ; → $\frac{80}{400} = 0,2 \to 20\%$

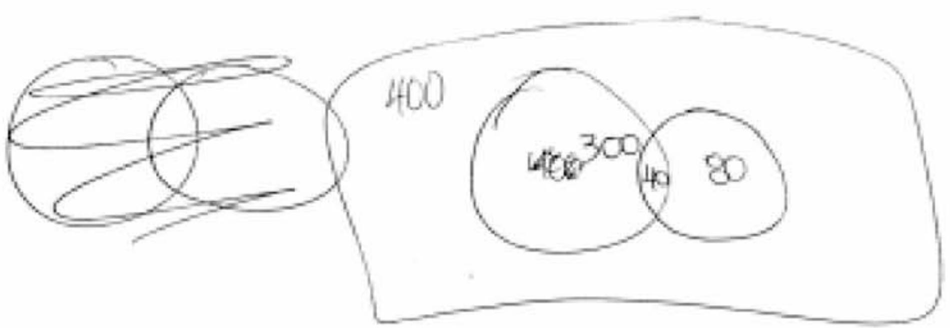
c. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ; → $\frac{40}{400} = 0,1 \to 10\%$

d. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες; → $\frac{380-40}{400}$ = 340

e. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες; → $400-340 = \frac{60}{400} = 0,15$

f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά; → $\frac{40}{80} = 0,5 = 50\%$

g. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν και μόνον αν μαθαίνει γαλλικά; → Καμία



2. Από τους 400 μαθητές ενός σχολείου οι 300 μαθαίνουν αγγλικά, οι 80 γαλλικά και οι 40 και τις δύο γλώσσες. Συναντώ έναν μαθητή του σχολείου.

a. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά ; $\frac{300}{400} = 0,75$, 75%

b. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει γαλλικά ; $\frac{80}{400} = 0,2$, 20%

c. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει και τις δύο γλώσσες ; $\frac{40}{400} = \frac{1}{10} = 0,1$, 10%

d. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες;

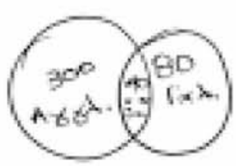
$300 + 80 - 40 = 340$

$\frac{340}{400} = 0,85$, 85%

e. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει καμία από τις δύο γλώσσες; 100% − 85% = 15

f. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν γνωρίζεις ότι μαθαίνει γαλλικά; $\frac{40}{80} = 0,5$, 50%

g. Ποια είναι η πιθανότητα να μαθαίνει αγγλικά, αν και μόνον αν μαθαίνει γαλλικά; καμία



Ερώτημα 3^o :

3. Η πιθανότητα να μολυνθεί κάποιος με HIV είναι 0,01. Αν κάποιος έχει το ιό υπάρχει [redacted] πιθανότητα το τεστ διάγνωσης να βγει θετικό. Αν κάποιος δεν είναι μολυσμένος, υπάρχει [redacted] πιθανότητα το τεστ να βγει αρνητικό. Πόσο πιθανό είναι κάποιος με θετικό τεστ να έχει όντως τον ιό;

Απάντηση:

1.000

A: 10 → 8(Θ), 2(Α)

Y: 990 → 693(Α), 297(Θ)

297+8=305

Άρα $\frac{305}{1000} = 0,305$

3. Η πιθανότητα να μολυνθεί κάποιος με HIV είναι 0,01. Αν κάποιος έχει το ιό υπάρχει [redacted] 0,8 πιθανότητα το τεστ διάγνωσης να βγει θετικό. Αν κάποιος δεν είναι μολυσμένος, υπάρχει [redacted] 0,7 πιθανότητα το τεστ να βγει αρνητικό. Πόσο πιθανό είναι κάποιος με θετικό τεστ να έχει όντως τον ιό;

Απάντηση:

0,01
0,8
0,7

1000
έχει ιό → 10 → 8 (+)
υγιείς → 990 → 693 (−) → 990 − 693 = 297

θετικό → 8
αρνητικό → 693

$\frac{8+297}{1000} = \frac{305}{1000} = 0,305$

3. Η πιθανότητα να μολυνθεί κάποιος με HIV είναι 0,01. Αν κάποιος έχει το ιό υπάρχει [redacted] 0,8 πιθανότητα το τεστ διάγνωσης να βγει θετικό. Αν κάποιος δεν είναι μολυσμένος, υπάρχει [redacted] 0,7 πιθανότητα το τεστ να βγει αρνητικό. Πόσο πιθανό είναι κάποιος με θετικό τεστ να έχει όντως τον ιό;

Απάντηση:

Στα 1000 άτομα έχουμε 1000 × 0,01 = 10 μολυσμένους

Στα 1000 άτομα με 10 έχουμε 800 με θετικό τεστ

Άρα στους 800 με θετικό τεστ οι 10 είναι μολυσμένοι

Ποσοστό 1,25 %