



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΑ ΑΓΓΕΛΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

ΜΑΡΙΑ ΑΔΑΜ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Λαμία, Νοέμβριος 2018



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΑ ΑΓΓΕΛΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπουσα

ΜΑΡΙΑ ΑΔΑΜ

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Λαμία, Νοέμβριος 2018



UNIVERSITY OF THESSALY

SCHOOL OF SCIENCE

INFORMATICS AND COMPUTATIONAL BIOMEDICINE

**LOCATION OF THE EINGENVALUES OF NONNEGATIVE
MATRICES**

DIMITRA ANGELI

Master thesis

Supervisor

MARIA ADAM

Associate Professor

LAMIA, NOVEMBER 2018

«Υπεύθυνη Δήλωση μη λογοκλοπής και ανάληψης προσωπικής ευθύνης»

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, και γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα και ενυπογράφως ότι η παρούσα εργασία με τίτλο [«Εντοπισμός ιδιοτιμών μη αρνητικών πινάκων»] αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές από τις οποίες χρησιμοποίησα δεδομένα, ιδέες, φράσεις, προτάσεις ή λέξεις, είτε επακριβώς (όπως υπάρχουν στο πρωτότυπο ή μεταφρασμένες) είτε με παράφραση, έχουν δηλωθεί κατάλληλα και ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής.

Ο/Η ΔΗΛΩΝ/-ΟΥΣΑ

Ημερομηνία

Υπογραφή

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΔΗΜΗΤΡΑ ΑΓΓΕΛΗ

Τριμελής Επιτροπή:

Μαρία Αδάμ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας (επιβλέπουσα)

Βασίλειος Πλαγιανάκος, Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Κωνσταντίνος Δελημπασης, Επίκουρος Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Έχοντας ολοκληρώσει την παρούσα διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Την επιβλέπουσα καθηγήτρια κα. Μαρία Αδάμ, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για τη συνεχή παρακολούθηση και την αμέριστη υποστήριξη της καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Επιπλέον θα ήθελα να της εκφράσω την ευχαρίστησή μου για την ενθάρρυνση και την πολύτιμη καθοδήγησή της, καθώς οι κρίσιμες υποδείξεις που μου έδωσε αποτέλεσαν ιδιαίτερα ευεργετικές για την ανάπτυξη και τη συγγραφή της εργασίας μου.

Τους κ. Δελήμπαση και κ. Πλαγιανάκο Καθηγητές του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για την ενεργή συμμετοχή τους στη τριμελή εξεταστική επιτροπή, διαβεβαιώνοντάς τους ότι οι παρατηρήσεις τους και οι συμβουλές τους θα ληφθούν σοβαρά υπόψη.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αδιάκοπη υποστήριξη τους, ψυχολογική και υλική, σε όλη τη διάρκεια της ζωής μου.

Λαμία 4 Νοεμβρίου 2018

Δήμητρα Αγγελή

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας είναι ο εντοπισμός των ιδιοτιμών μη αρνητικών πινάκων. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι συχνά σε ποικίλες ερευνητικές περιοχές προκύπτουν προβλήματα, τα οποία αναπαρίστανται από μη αρνητικούς πίνακες μεγάλης διάστασης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο ακριβής υπολογισμός των ιδιοτιμών τους να καθίσταται ως ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία και να αναζητούνται νέες και ευκολότερες μέθοδοι για τον προσδιορισμό τους.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα αλλά και προτάσεις, τα οποία αφορούν τους μη αρνητικούς πίνακες και συντελούν στην ανάπτυξη αλγορίθμων σχετικά με τον εντοπισμό των ιδιοτιμών τους. Συγκεκριμένα διατυπώνονται θεωρήματα τα οποία βασίζονται στα στοιχεία του μη αρνητικού πίνακα, όπως για παράδειγμα στο ίχνος, στο μέγιστο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα κ.α. Επιπλέον αναπτύσσονται αλγόριθμοι, οι οποίοι σχεδιάζουν τις περιοχές του μιγαδικού επιπέδου, όπου περικλείονται οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα.

Παράλληλα παρουσιάζονται θεωρήματα, τα οποία συντελούν στην ανάπτυξη αλγορίθμων με στόχο την εύρεση διαστημάτων του πραγματικού άξονα, όπου εντοπίζεται η φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα. Μάλιστα τα άκρα των διαστημάτων υπολογίζονται από αλγόριθμους, οι οποίοι εξαρτώνται από τα στοιχεία του μη αρνητικού πίνακα και όχι από τη Θεωρία Πολυωνύμων. Επίσης προτείνεται ένας νέος αλγόριθμος για την προσέγγιση των διαστημάτων, όπου περικλείεται η φασματική ακτίνα. Δίνονται εφαρμογές των θεωρημάτων σε μη αρνητικούς πίνακες και σε πίνακες Fibonacci.

ABSTRACT

The aim of present thesis is the location of the eigenvalues of nonnegative matrices. It is worth to mention that nonnegative matrices with high dimension arise in the representation and modelling of problems, which are related to various scientific areas. As a result, the precise computation of their eigenvalues is considered a rather challenging process, thus more easily implemented methods are demanded.

In present thesis, the most important theorems and propositions are presented, which contribute to the creation of algorithms that will locate the eigenvalues of a nonnegative matrix. In particular, these theorems are based on entries of a nonnegative matrix like the trace, the largest diagonal element of matrix, etc. Furthermore, many algorithms are developed to derive inclusion regions for eigenvalues of the complex plane.

In addition, theorems that are conducive to the development of algorithms, whose goal is to locate sharp intervals of the real axis for the spectral radius, are also represented. Especially, the interval's ends are calculated by algorithms, which are depended on the entries of a nonnegative matrix and not on the Polynomial Theory. Finally, a new algorithm is proposed for the spectral radius' intervals. Applications of those theorems are provided on nonnegative matrices and Fibonacci matrices.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	11
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ.....	11
1.1 Βασικοί ορισμοί πινάκων	11
1.2 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.....	17
1.3 Σχέση φασματικής ακτίνας με τις νόρμες πινάκων.....	21
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	29
ΧΩΡΙΑ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ	29
2.1 Εντοπισμός ιδιοτιμών μέσω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας.....	30
2.2 Εντοπισμός ιδιοτιμών με τη χρήση των $Ri(A), Ri'(A), Rij''(A)$ και του ίχνους .	37
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	57
ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ	57
3.1 Φράγματα φασματικής ακτίνας συναρτήσεϊ $Ri(A), Ri'(A), Rij''(A)$	58
3.2 Φράγματα φασματικής ακτίνας συναρτήσεϊ του ίχνους	97
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	107
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	109
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	114

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Συχνά σε ποικίλους επιστημονικούς τομείς, όπως είναι η Πληροφορική, η Βιολογία, η Στατιστική, οι Οικονομικές και οι Κοινωνικές Επιστήμες, εμφανίζονται εφαρμογές των μη αρνητικών πινάκων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η μελέτη τους να καθίσταται αναμφισβήτητα σημαντική και απαραίτητη, καθώς αποτελούν ουσιώδες μαθηματικό υπόβαθρο για την επίλυση προβλημάτων που συνδέονται με τους παραπάνω τομείς. Η μελέτη αυτών των πινάκων αποτελεί έναν αναπτυσσόμενο τομέα της έρευνας, που είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τη Θεωρία Πινάκων και με τη Θεωρία της Φασματικής Ανάλυσης. Δύο σημαντικές έννοιες στη μελέτη ενός μη αρνητικού πίνακα είναι οι ιδιοτιμές του και ειδικότερα η φασματική του ακτίνα. Σε εφαρμογές, όπου παρουσιάζονται μη αρνητικοί πίνακες με μεγάλη διάσταση, η αναζήτηση και ο ακριβής υπολογισμός των ιδιοτιμών τους καθίστανται ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία. Γι' αυτό πολλοί ερευνητές επικεντρώθηκαν στη δημιουργία θεωρημάτων και αλγορίθμων που συντελούν στον εντοπισμό τόσο των ιδιοτιμών όσο και της φασματικής ακτίνας.

Βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο εντοπισμός των ιδιοτιμών μη αρνητικών πινάκων σε χωρία του μιγαδικού επιπέδου. Επιπλέον μελετάμε φράγματα εντοπισμού της φασματικής ακτίνας σε διαστήματα του πραγματικού άξονα. Αναλυτικότερα, για την ανάπτυξη της εν λόγω εργασίας χρησιμοποιούνται θεωρήματα και προτάσεις που απέδειξαν αρκετοί ερευνητές [1, 6, 10, 15, 18, 23], προκειμένου να αναπτυχθούν οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι προσδιορισμού των χωρίων του μιγαδικού επιπέδου στα οποία εντοπίζονται **όλες οι ιδιοτιμές** των μη αρνητικών πινάκων. Επιπλέον, από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα έως σήμερα ένα πλήθος ερευνητών μελετούν και αποδεικνύουν θεωρήματα [2, 7-9, 13-15, 17, 22, 24, 25], προκειμένου να αποδείξουν φράγματα σχετικά με τη **φασματική ακτίνα** μη αρνητικών πινάκων και να αναπτύξουν σχετικούς αλγορίθμους εντοπισμού της εντός αυτών των φραγμάτων. Τέλος, πραγματοποιείται σύγκριση ορισμένων αλγορίθμων με στόχο την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητά τους.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και περιλαμβάνει βασικές έννοιες της Θεωρίας Πινάκων. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται οι βασικοί συμβολισμοί και ορισμοί που αφορούν τους μη αρνητικούς πίνακες καθώς και τους πίνακες Fibonacci. Στη συνέχεια αναφέρονται τα σημαντικότερα στοιχεία της φασματικής θεωρίας των τετραγωνικών πινάκων όπως για παράδειγμα ορισμοί και βασικές ιδιότητες των χαρακτηριστικών ποσών. Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με έννοιες της νόρμας πίνακα και τη βασική ιδιότητά της να συσχετίζεται με τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας στην περίπτωση που ο πίνακας είναι μη αρνητικός.

Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται κυρίως στον προσδιορισμό ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα, χρησιμοποιώντας μόνο τα στοιχεία του πίνακα και όχι μεθόδους βασισμένες στη Θεωρία Πολυωνύμων. Ιδιαίτερα, σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται θεωρίες, οι οποίες αφορούν τον εντοπισμό των ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα και βασίζονται στα αθροίσματα $R_i(A)$, $R'_i(A)$, $R''_{ij}(A)$ αλλά και στο ίχνος του πίνακα. Επιπλέον παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι, οι οποίοι υλοποιούνται σε παραδείγματα μη αρνητικών πινάκων και σχεδιάζουν τις περιοχές του επιπέδου, όπου εντοπίζεται το φάσμα τους.

Αντίστοιχα το τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναφέρεται στον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα. Ανάλογα και σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται γνωστά και νέα θεωρήματα, τα οποία χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό φραγμάτων, τα οποία περικλείουν τη φασματική ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα. Κατά τον υπολογισμό των παραπάνω φραγμάτων αποφεύγεται η χρήση της Θεωρίας Πολυωνύμων, καθώς δημιουργούνται αλγόριθμοι που βασίζονται στο ίχνος και στα αθροίσματα $R_i(A)$, $R'_i(A)$, $R''_{ij}(A)$ του μη αρνητικού πίνακα. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό από την εφαρμογή των αλγορίθμων σε παραδείγματα μη αρνητικών πινάκων, παρατίθενται ορισμένοι πίνακες σύγκρισης των φραγμάτων που προέκυψαν για τη φασματική ακτίνα.

Στο τέλος της διπλωματικής εργασίας ακολουθεί η βιβλιογραφία με τα σχετικά συγγράμματα και το παράρτημα. Συγκεκριμένα στο πρώτο μέρος του παραρτήματος παρουσιάζονται οι κώδικες σε Matlab που αφορούν τους αλγορίθμους του Κεφαλαίου 2 και υλοποιούνται προκειμένου να σχεδιαστούν οι περιοχές του

μιαδικού επιπέδου, όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα. Επίσης στο δεύτερο μέρος του παραρτήματος περιλαμβάνονται οι ανάλογοι κώδικες σε Matlab, που αφορούν τα παραδείγματα του Κεφαλαίου 3 και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των φραγμάτων στα οποία περικλείεται η φασματική ακτίνα των πινάκων.

Επιπλέον, ο αναγνώστης θα πρέπει να λάβει υπόψη του ότι κάθε κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες αριθμούνται με δύο αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αντιπροσωπεύει το κεφάλαιο και ο δεύτερος την ενότητα. Συγκεκριμένα, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, τα παραδείγματα και τα σχόλια αριθμούνται με τρεις αριθμούς, από τους οποίους ο πρώτος αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος στη σειρά εμφάνισής τους. Επιπλέον τα σχήματα, οι μαθηματικές σχέσεις και οι πίνακες σύγκρισης αριθμούνται με δύο αριθμούς από τους οποίους ο πρώτος αναφέρεται στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στον αύξοντα αριθμό εμφάνισής τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικότερες έννοιες της Άλγεβρας Πινάκων, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τη θεμελίωση θεωριών σχετικά με τον εντοπισμό των ιδιοτιμών αλλά και της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα και είναι απαραίτητες για τα επόμενα δύο κεφάλαια.

1.1 Βασικοί ορισμοί πινάκων

Αρχικά για τον ορισμό των βασικών εννοιών ενός πίνακα A , κρίνεται αναγκαία η αναφορά στους παρακάτω συμβολισμούς:

- I. Οι αριθμοί a_{ij} παριστάνουν τα στοιχεία του πίνακα A που είναι τοποθετημένα σε i γραμμές και j στήλες.
- II. Το σύνολο F συμβολίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών, R , ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, C .
- III. Το σύνολο R^+ συμβολίζει το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.
- IV. Το σύνολο $M_{m \times n}(F)$ παριστάνει το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F και $M_n(F)$ είναι το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων.

Ένα από τα βασικότερα αντικείμενα μελέτης της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί μία θεμελιώδης κατηγορία πινάκων, οι μη αρνητικοί πίνακες. Συγκεκριμένα, αναδεικνύονται ως ένα σημαντικό μαθηματικό μοντέλο, καθώς χρησιμοποιούνται στην ανάπτυξη θεωρημάτων και προτάσεων που συνδέονται με τον εντοπισμό των ιδιοτιμών αλλά και της φασματικής ακτίνας ενός πίνακα.

Συνεπώς διατυπώνεται ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.1.1

Ένας πίνακας $A \in M_n(R)$ ονομάζεται **μη αρνητικός πίνακας**, όταν έχει όλα τα στοιχεία του μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός και στη συνέχεια θα σημειώνεται με $A \in M_n(R^+)$. Όταν δεν θα υπάρχει σύγχυση για το σύνολο των πινάκων στο οποίο ο πίνακας A ανήκει απλά θα σημειώνεται με $A \geq 0$.

Επιπλέον, για έναν $A \geq 0$ σημειώνονται οι παρακάτω μη αρνητικές ποσότητες, οι οποίες θα είναι χρήσιμες στη μελέτη μας.

Ορισμός 1.1.2

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(R^+)$. Τότε ορίζουμε τα ακόλουθα:

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, η ποσότητα $R_i(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των στοιχείων της i -γραμμής του πίνακα A , δηλαδή

$$R_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}. \quad (1.1)$$

Αντίστοιχα για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, η ποσότητα $C_j(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των στοιχείων της j -στήλης του πίνακα A , δηλαδή

$$C_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}. \quad (1.2)$$

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, η ποσότητα $R'_i(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των μη διαγωνίων στοιχείων της i -γραμμής του πίνακα A , δηλαδή

$$R'_i(A) = R_i(A) - a_{ii}. \quad (1.3)$$

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και $i \neq j$, η ποσότητα $R''_{ij}(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των μη διαγωνίων στοιχείων της i -γραμμής του πίνακα A εκτός του στοιχείου a_{ij} , δηλαδή

$$R''_{ij}(A) = R'_i(A) - a_{ij}. \quad (1.4)$$

Αν για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, $R_i(A) > 0$, η ποσότητα $m_i(A)$ συμβολίζει τον i -οστό μέσο όρο των 2-αθροισμάτων γραμμών του πίνακα A και υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\mathbf{m}_i(A) = \frac{\sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} \mathbf{R}_\kappa(A)}{\mathbf{R}_i(A)}. \quad (1.5)$$

Τέλος, αν για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, $\mathbf{m}_i(A) > 0$, ορίζεται η ποσότητα $\mathbf{w}_i(A)$, η οποία υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο

$$\mathbf{w}_i(A) = \frac{\sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} \mathbf{m}_\kappa(A)}{\mathbf{m}_i(A)}. \quad (1.6)$$

Μία σημαντική ιδιότητα των πινάκων, που σχετίζεται με τους μη αρνητικούς πίνακες και την εύρεση των ιδιοτιμών, περιγράφεται στον επόμενο ορισμό:

Ορισμός 1.1.3

Έστω πίνακας $A \in M_n(F)$. Ο πίνακας A ονομάζεται **αναγώγιμος** (reducible) αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in M_n(R)$ για τον οποίο ισχύει

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

όπου $A_1 \in M_r(F)$, $1 \leq r \leq n-1$, $A_4 \in M_{n-r}(F)$.

Σε διαφορετική περίπτωση ο πίνακας A ονομάζεται **μη-αναγώγιμος** (irreducible), δηλαδή μη-αναγώγιμος ονομάζεται ο πίνακας A όταν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in M_n(R)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \text{ με } A_i \neq 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, 3, 4.$$

Στη συνέχεια διατυπώνεται μία ικανή και αναγκαία συνθήκη, η οποία χρησιμοποιείται κατά τον έλεγχο της αναγωγιμότητας ή μη ενός τετραγωνικού πίνακα.

Πρόταση 1.1.4

Έστω πίνακας $A \in M_n(F)$. Ο πίνακας A είναι μη-αναγώγιμος αν και μόνο αν ισχύει

$$(I + |A|)^{n-1} > 0 \quad (1.7)$$

Σχόλιο 1.1.5

Η Πρόταση 1.1.4 αποτελεί μια ιδιαίτερα χρήσιμη πληροφορία για τον χαρακτηρισμό της αναγωγιμότητας ενός πίνακα, καθώς αποδεικνύεται πιο εύχρηστη σε σχέση με τον Ορισμό 1.1.3, ο οποίος απαιτεί την εύρεση κάποιου πίνακα μετάθεσης P . Για την πλήρη απόδειξή της ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο της Γραμμικής Άλγεβρας των R. Horn και C. Johnson [12, Theorem 6.2.23].

Επίσης στην κατηγορία των μη αρνητικών πινάκων ανήκουν οι πίνακες Fibonacci. Ειδικότερα, αποτελούν μια ειδική μορφή μη αρνητικών πινάκων και προκύπτουν από το πασίγνωστο μαθηματικό εύρημα, το οποίο είναι η αριθμητική ακολουθία Fibonacci.

Έτσι, ως ακολουθία **Fibonacci** (κλασικός ορισμός) ορίζεται η ακολουθία των αριθμών που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (1.8)$$

όπου $n \geq 3$ και $f_1 = f_2 = 1$, [2, 15].

Ωστόσο για την παραπάνω ακολουθία ορίζονται πολλές γενικεύσεις μία από αυτές είναι γνωστή ως **Generalized k, m -step Fibonacci ακολουθία** [4], η οποία διατυπώνεται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.1.6

Ο n -στός όρος f_n της γενικευμένης ακολουθίας **Fibonacci** με k όρους και με m βήμα, η οποία συμβολίζεται με $(f_n^{\{k,m\}}(c_1, c_2, \dots, c_k))_{n=1,2,\dots}$, δίνεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση και ισχύει για κάθε $n \geq k + m + 1$.

Δηλαδή

$$f_n = c_1 f_{n-m-1} + c_2 f_{n-m-2} + \dots + c_k f_{n-m-k} = \sum_{j=m+1}^{k+m} c_{j-m} f_{n-j} \quad (1.9)$$

όπου $f_1 = f_2 = \dots = f_{k+m} = 1$, $k = 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$, είναι ακέραιοι αριθμοί και οι συντελεστές c_1, c_2, \dots, c_k είναι πραγματικοί αριθμοί με $c_1 > 0$ και $c_2, \dots, c_k \geq 0$.

Σχόλιο 1.1.7

Έστω $m = 0$, $k = 2$, και $c_1 = c_2 = 1$, τότε ο τύπος της (1.9) δίνει τη γνωστή ακολουθία **Fibonacci**, όπως αυτή ορίστηκε στην (1.8).

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (1.9), αν θεωρήσουμε $k \geq 2$, $m \geq 1$, $c_1 > 0$, $c_2, \dots, c_k \geq 0$, παρατηρούμε ότι η γενικευμένη ακολουθία Fibonacci $(f_n^{\{k,m\}}(c_1, c_2, \dots, c_k))_{n=1,2,\dots}$ μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν $(k+m) \times (k+m)$ πίνακα¹, ο οποίος παρατίθεται στη συνέχεια:

$$R_{k,m}(c_1, c_2, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Από την (1.9) για $m = 0$ προκύπτει ο ορισμός της γενικευμένης ακολουθίας Fibonacci k όρων, ορισμός που διατυπώνεται στη συνέχεια καθώς καθίσταται απαραίτητος για τη μελέτη τη παρούσας εργασίας.

Ο n -στός όρος f_n της γενικευμένης ακολουθίας **Fibonacci** k όρων, η οποία συμβολίζεται με $(f_n^{\{k,0\}}(c_1, c_2, \dots, c_k))_{n=1,2,\dots}$ προκύπτει από την παρακάτω αναδρομική σχέση και ισχύει για κάθε $n \geq k+1$.

Δηλαδή,

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \dots + c_k f_{n-k} = \sum_{i=1}^k c_i f_{n-i} \quad (1.11)$$

όπου $f_1 = f_2 = \dots = f_k = 1$, $c_1 > 0$ και $c_2, \dots, c_k \geq 0$.

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας² την (1.11), αν θεωρήσουμε $k \geq 2$, $c_1 > 0$, $c_2, \dots, c_k \geq 0$ η γενικευμένη ακολουθία Fibonacci $(f_n^{\{k,0\}}(c_1, c_2, \dots, c_k))_{n=1,2,\dots}$

¹ Την απόδειξη για την αντιστοίχιση του πίνακα στην (1.10) με τον ορισμό της ακολουθίας στην (1.9), ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [4].

² Την απόδειξη για την αντιστοίχιση του πίνακα στην (1.12) με τον ορισμό της ακολουθίας στην (1.11), ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [3, 16].

μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν $k \times k$ πίνακα, ο οποίος στη συνέχεια σημειώνεται :

$$Q_k(c_1, c_2, \dots, c_k) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

1.2 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Συχνά σε πολλές εφαρμογές όπου προκύπτουν πίνακες καθίσταται η ανάγκη επίλυσης του παρακάτω μαθηματικού προβλήματος:

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(F)$ και ένα διάνυσμα $x \in M_{n \times 1}(F)$. Αναζητούνται οι τιμές του λ και τα αντίστοιχα x , τέτοια ώστε να επαληθεύεται η ισότητα

$$Ax = \lambda x, \text{ με } x \neq 0 \text{ και } \lambda \in F \quad (1.13)$$

Ωστόσο, για το μαθηματικό πρόβλημα της (1.13) δίνονται οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 1.2.1

Ιδιοτιμή ενός πίνακα A ονομάζεται ένας αριθμός, λ , για τον οποίο η διανυσματική εξίσωση στην (1.13) έχει μη μηδενική λύση, x .

Επίσης η μη μηδενική λύση x της εξίσωσης (1.13) ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα A και είναι αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ .

Τέλος, το σύνολο που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα A ονομάζεται **φάσμα** του πίνακα A και συμβολίζεται με $\sigma(A)$.

Ορισμός 1.2.2

Φασματική ακτίνα ενός πίνακα A ονομάζεται ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, ο οποίος ισούται με τη μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή του πίνακα και συμβολίζεται με $\rho(A)$, δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.14)$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα A .

Για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών ποσών ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Αρχικά χρειάζεται η μετατροπή της εξίσωσης (1.13), η οποία γράφεται ισοδύναμα:

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$$

Έτσι, αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή λ είναι εύκολο να υπολογιστεί το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα, επιλύοντας το ομογενές γραμμικό σύστημα, το οποίο προκύπτει από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)x = 0, \text{ για } x \neq 0 \quad (1.15)$$

Στη συνέχεια είναι γνωστό ότι το ομογενές σύστημα στην (1.15) έχει μη μηδενική λύση x αν και μόνο αν ισχύει

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1.16)$$

Από την επίλυση της εξίσωσης (1.16) προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.2.3

Χαρακτηριστική εξίσωση ενός τετραγωνικού πίνακα A ορίζεται να είναι η εξίσωση (1.16) και συντελεί στον υπολογισμό όλων των ιδιοτιμών $\lambda \in F$ του πίνακα A .

Επίσης **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A ονομάζεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας της χαρακτηριστικής εξίσωσης στην (1.16), το οποίο ορίζεται ως ένα πολυώνυμο n -στού βαθμού και γράφεται ως εξής:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 \quad (1.17)$$

όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου $b_j \in F$ και $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

Ένας άλλος τρόπος ανάλυσης του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αποτελεί η παραγοντοποίησή του σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο C , οπότε σημειώνεται με την παρακάτω μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ στο C και $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ είναι η πολλαπλότητα κάθε ρίζας του, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα**. Είναι φανερό ότι για έναν τετραγωνικό πίνακα A διάστασης n ισχύει $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = n$ και στη περίπτωση όπου για κάποιο k ισχύει $\nu_k = 1$, τότε η

ιδιοτιμή ονομάζεται **απλή**, διαφορετικά χαρακτηρίζεται **πολλαπλή** και διατυπώνεται και η πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής

Τέλος, από την αντικατάσταση κάθε διακεκριμένης ιδιοτιμής λ_i στο ομογενές γραμμικό σύστημα (1.15) προκύπτουν οι μη μηδενικές λύσεις x_i της εξίσωσης, οι οποίες είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

Ορισμός 1.2.4

Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A , σχηματίζουν ένα διανυσματικό χώρο, ο οποίος ονομάζεται **ιδιόχωρος** του πίνακα A και συμβολίζεται με $V(\lambda_i)$, όπου

$$V(\lambda_i) = \{x \in M_{n \times 1}(F) : (A - \lambda_i I)x = 0\}.$$

Κάθε ιδιόχωρος $V(\lambda_i)$ παράγεται από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i . Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i ορίζει τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$, γνωστή και ως **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και στη συνέχεια θα συμβολίζεται με $\dim V(\lambda_i)$.

Η σχέση που συνδέει τη γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i με το βαθμό του πίνακα $A - \lambda_i I$ δίνεται στην πρόταση που ακολουθεί, την απόδειξη της οποίας ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει [21, Theorem 5, Chapter 5].

Πρόταση 1.2.5

Έστω $A \in M_n(F)$ ένας τετραγωνικός πίνακας με διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - \text{rank}(A - \lambda_i I).$$

Μια σημαντική ιδιότητα που συνδέει την αλγεβρική με τη γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας και συγχρόνως είναι μικρότερη ή ίση από την αλγεβρική πολλαπλότητα. Συγκεκριμένα ισχύει:

$1 \leq \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} \leq \text{αλγεβρική πολλαπλότητα}$

Ίχνος ενός πίνακα $A \in M_n(F)$ ορίζεται να είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του, δηλαδή

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \quad (1.18)$$

όπου $\text{tr}(A)$ συμβολίζει το **ίχνος** του πίνακα A .

Μια ιδιότητα των χαρακτηριστικών ποσών που συνδέεται με το ίχνος ενός πίνακα $A \in M_n(F)$ είναι ότι το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του, δηλαδή ισχύει

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Για τους πίνακες Fibonacci που ορίστηκαν στις (1.10) και (1.12) αντίστοιχα προκύπτει ότι το ίχνος τους ισούται με:

$$\text{tr}(R_{k,m}(c_1, c_2, \dots, c_k)) = 0 \quad \text{και} \quad \text{tr}(Q_k(c_1, c_2, \dots, c_k)) = c_1$$

1.3 Σχέση φασματικής ακτίνας με τις νόρμες πινάκων

Οι πίνακες, όπως είναι γνωστό, αποτελούν μια μορφή διανυσμάτων. Ιδιαίτερα, το σύνολο όλων των τετραγωνικών πινάκων $M_n(F)$ αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n^2 . Όμως, συχνά σε πολλά μαθηματικά προβλήματα απαιτείται ο υπολογισμός του μέτρου ενός διανύσματος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργείται αντίστοιχα το ερώτημα αν υπάρχει τρόπος να υπολογιστεί το μέτρο ενός πίνακα. Γι' αυτόν τον λόγο ορίζεται η νόρμα ενός τετραγωνικού πίνακα, η οποία είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, [11, 12, 19].

Ορισμός 1.3.1

Νόρμα ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(F)$ ορίζεται να είναι μία πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: M_n(F) \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

- i. $\|A\| \geq 0$
- i. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- ii. $\|\mu A\| = |\mu| \|A\|$, για κάθε $\mu \in F$
- iii. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(F)$
- iv. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(F)$

Για έναν τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(F)$, οι πιο γνωστές νόρμες πινάκων είναι οι ακόλουθες:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{C_j\} \quad (\text{νόρμα στήλης}) \quad (1.19)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{R_i\} \quad (\text{νόρμα γραμμής}) \quad (1.20)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} \quad (\text{Frobenius ή Ευκλείδεια νόρμα}) \quad (1.21)$$

όπου $\text{tr}(A^*A)$ είναι το ίχνος του πίνακα A^*A .

Αρκετά μαθηματικά προβλήματα, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, περιλαμβάνουν μη αρνητικούς πίνακες με αποτέλεσμα να καθίσταται αναγκαίος ο υπολογισμός των ιδιοτιμών τους και ιδιαίτερα της φασματικής ακτίνας τους. Μάλιστα, σε περιπτώσεις

πινάκων με μεγάλη διάσταση η εύρεση των ιδιοτιμών αναδεικνύεται ένα δύσκολο εγχείρημα, εξαιτίας της μεγάλης πολυπλοκότητας που διαθέτει η επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης στην (1.16).

Ωστόσο, μία χρήσιμη ιδιότητα σχετικά με την εύρεση και τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα (Ορισμός 1.1.1) διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση, όπου η φασματική ακτίνα ταυτίζεται με κάποια από τις προαναφερόμενες νόρμες πινάκων. Για τη μελέτη της απόδειξής της ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία της Γραμμικής Άλγεβρας των A. Berman και R.J.Plemmons [5, Theorem 2.1] ή των R.Horn και C.Johnson [12, Lemma 8.1.21].

Πρόταση 1.3.2

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- I. Αν τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε $\rho(A) = \|A\|_\infty$.
- II. Αν τα στοιχεία κάθε στήλης αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε $\rho(A) = \|A\|_1$.

Παράδειγμα 1.3.3

Να επαληθευτούν τα αποτελέσματα της Πρότασης 1.3.2 για τους ακόλουθους μη αρνητικούς πίνακες :

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- i). Αρχικά παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα A αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στον αριθμό 3, οπότε αν υπολογίσουμε τη νόρμα $\|A\|_1$ από τον τύπο (1.19) έχουμε:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{C_j(A)\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{3, 3, 3\} = 3$$

Επίσης με τη χρήση του προγράμματος Matlab υπολογίζεται το φάσμα του πίνακα A , το οποίο είναι το σύνολο $\sigma(A) = \{\lambda_1 = -0.6180, \lambda_2 =$

$1.6180, \lambda_3 = 3\}$. Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό της φασματικής ακτίνας στην (1.14) για τον πίνακα A έχουμε $\rho(A) = 3$.

Προφανώς $\|A\|_1 = \rho(A) = 3$ το οποίο επιβεβαιώνει το (II) της Πρότασης 1.3.2.

- ii). Όμοια για τον πίνακα B προκύπτει ότι τα στοιχεία κάθε γραμμής του αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στον αριθμό 4, οπότε αν υπολογίσουμε τη νόρμα $\|A\|_\infty$ από τον τύπο (1.20) έχουμε:

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{R_i(A)\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{4, 4, 4\} = 4$$

Επιπλέον με τη χρήση του προγράμματος Matlab υπολογίζεται το φάσμα του πίνακα B , το οποίο είναι το σύνολο $\sigma(B) = \{\lambda_1 = -1.4142, \lambda_2 = 1.4142, \lambda_3 = 4\}$.

Συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό της φασματικής ακτίνας στην (1.14), η φασματική ακτίνα του πίνακα B είναι $\rho(B) = 4$.

Προφανώς $\rho(B) = \|B\|_\infty = 4$, το οποίο επαληθεύει το (I) της Πρότασης 1.3.2. □

Εκτός από τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας, δημιουργείται εύλογα το ερώτημα αν υπάρχει κάποια πληροφορία που να μας υποδεικνύει το μέτρο όλων των άλλων ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα σε σχέση με τη φασματική του ακτίνα. Συγκεκριμένα ένα κριτήριο που διασαφηνίζει αν οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού και μη-αναγώγιμου πίνακα (Ορισμός 1.1.3) έχουν μέτρο ίσο ή διαφορετικό από τη φασματική ακτίνα σχετίζεται με την ιδιότητα του «αρχικού» πίνακα, ιδιότητα που ορίζεται στη συνέχεια.

Ορισμός 1.3.4

Έστω $A \in M_n(R^+)$ ένας μη-αναγώγιμος πίνακας. **Αρχικός** (primitive) ονομάζεται ο πίνακας A που έχει μία μόνο ιδιοτιμή πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(A)$ και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές έχουν μικρότερο μέτρο από τη φασματική ακτίνα.

Στην περίπτωση, όπου περισσότερες από μία ιδιοτιμές ανήκουν πάνω στην περιφέρεια του προαναφερόμενου κυκλικού δίσκου, ο πίνακας A ονομάζεται **μη-αρχικός** (imprimitive).

Σχόλιο 1.3.5

Ο παραπάνω ορισμός μας υποδεικνύει δύο σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τον εντοπισμό αλλά και τον υπολογισμό των ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού και μη-αναγώγιμου πίνακα:

- πρώτον ότι η ιδιοτιμή/οι ιδιοτιμές που αντιστοιχεί/αντιστοιχούν στη φασματική ακτίνα του πίνακα θα βρίσκεται/βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα, και
- δεύτερον ότι όλες οι άλλες ιδιοτιμές του πίνακα θα βρίσκονται ή όχι στο εσωτερικό αυτού του κυκλικού δίσκου.

Ουσιαστικά η «primitive» ιδιότητα ενός πίνακα υποδηλώνει ότι η φασματική του ακτίνα θα εντοπίζεται σίγουρα πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του θα ανήκουν στο εσωτερικό του δίσκου, δηλαδή θα έχουν μέτρο μικρότερο από την ακτίνα του κυκλικού δίσκου, που ισούται με τη φασματική ακτίνα του πίνακα.

Στην επόμενη πρόταση παρουσιάζονται οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες που χρησιμοποιούνται για να ελεγχθεί αν ένας μη αρνητικός πίνακας είναι αρχικός. Η πλήρης απόδειξή της μπορεί να αναζητηθεί από τον αναγνώστη στο βιβλίο της Γραμμικής Άλγεβρας των R.Horn και C.Johnson [12, Theorem 8.5.2, Corollary 8.5.9].

Πρόταση 1.3.6

Έστω $A \in M_n(R^+)$ ένας μη-αναγώγιμος πίνακας. A είναι αρχικός αν και μόνο αν ισχύουν μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

- I. $A^k > 0$ για κάποιο $k \geq 1$ και
- II. $A^{n^2-2n+2} > 0$

Παράδειγμα 1.3.7

Να εξεταστεί αν οι παρακάτω πίνακες είναι αρχικοί.

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iii). } C = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i). Βασική προϋπόθεση για να εξετάσουμε αν ο μη αρνητικός πίνακας A είναι αρχικός είναι η μη-αναγωγιότητά του, την οποία εξετάζουμε πρώτα.

Σύμφωνα με την (1.7) έχουμε:

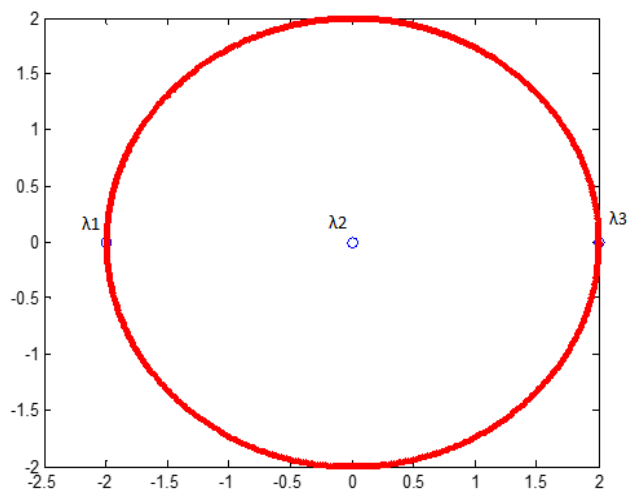
$$(I + A)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} > 0$$

Επομένως ο πίνακας A είναι μη-αναγωγίμος και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τη (II) συνθήκη της Πρότασης 1.3.6 προκειμένου να εξετάσουμε αν ο πίνακας A είναι αρχικός ή όχι.

Αναλυτικότερα για $n = 3$ έχουμε

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \\ 0 & 32 & 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Συνεπώς ο πίνακας A είναι μη αρχικός, από όπου καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα με μέτρο ίσο με αυτό της φασματικής ακτίνας. Αυτό επιβεβαιώνεται καθώς το φάσμα του πίνακα A είναι $\sigma(A) = \{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}$ και η φασματική του ακτίνα $\rho(A) = 2$.



Σχήμα 1.1: Κυκλικός δίσκος-ιδιοτιμές πίνακα A

Σχόλιο 1.3.8

Στο Σχήμα 1.1 σχεδιάζεται ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(A) = 2$ (με κόκκινη διαγράμμιση η περιφέρειά του) και σημειώνονται με «μπλε ο» οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A έχει δύο ιδιοτιμές, λ_1, λ_3 , που ανήκουν στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου.

ii). Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B .

Αρχικά ελέγχουμε αν είναι μη-αναγώγιμος. Εφαρμόζοντας τον τύπο στην (1.7) έχουμε:

$$(I + B)^3 = \begin{pmatrix} 22 & 34 & 34 & 34 \\ 34 & 52 & 53 & 53 \\ 34 & 53 & 52 & 53 \\ 34 & 53 & 53 & 52 \end{pmatrix} > 0$$

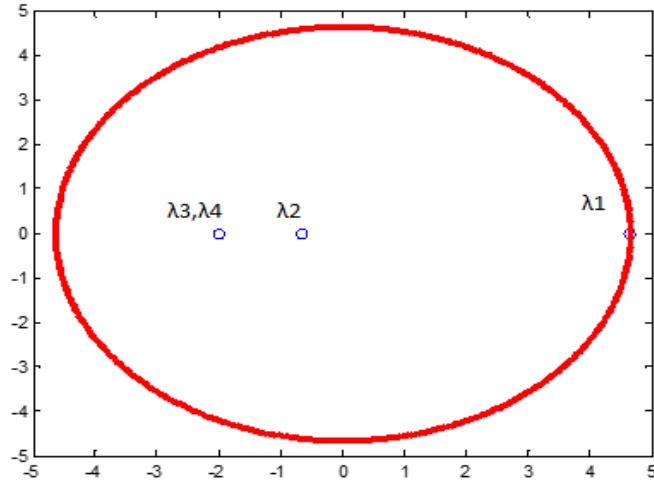
Επομένως ο πίνακας B είναι μη-αναγώγιμος και στη συνέχεια παρατηρούμε ότι είναι και αρχικός, καθώς ικανοποιείται η (II) συνθήκη της Πρότασης 1.3.6.

Συγκεκριμένα για $n = 4$ έχουμε:

$$B^{10} = \begin{pmatrix} 571539 & 885076 & 885076 & 885076 \\ 885076 & 1371297 & 1370273 & 1370273 \\ 885076 & 1370273 & 1371297 & 1370273 \\ 885076 & 1370273 & 1370273 & 1371297 \end{pmatrix} > 0$$

Συνεπώς ο πίνακας B είναι αρχικός με αποτέλεσμα να υπάρχει μόνο μία ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο, που βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα ίση με $\rho(B)$, και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές εντοπίζονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

Μάλιστα το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται και από τον υπολογισμό του φάσματος του B , που είναι $\sigma(B) = \{\lambda_1 = 4.6458, \lambda_2 = -0.6458, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2\}$. Τα μέτρα των ιδιοτιμών είναι $|\lambda_1| = 4.6458, |\lambda_2| = 0.6458, |\lambda_3| = |\lambda_4| = 2$, από όπου είναι φανερό ότι $\rho(B) = \lambda_1 = 4.6458$ και οι υπόλοιπες $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ιδιοτιμές έχουν μέτρο μικρότερο από την $\rho(B)$.



Σχήμα 1.2: Κυκλικός δίσκος-ιδιοτιμές πίνακα B

Σχόλιο 1.3.9

Στο Σχήμα 1.2 σχεδιάζεται ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(B) = \lambda_1 = 4.6458$ (με κόκκινη διαγράμμιση η περιφέρειά του) και σημειώνονται με «μπλε ο» οι ιδιοτιμές του πίνακα B .

Παρατηρούμε ότι μόνο μία ιδιοτιμή, λ_1 , ανήκει στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ανήκουν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

iii). Τέλος για τον πίνακα C πραγματοποιούμε την ίδια διαδικασία.

Για την αναγωγιμότητα έχουμε:

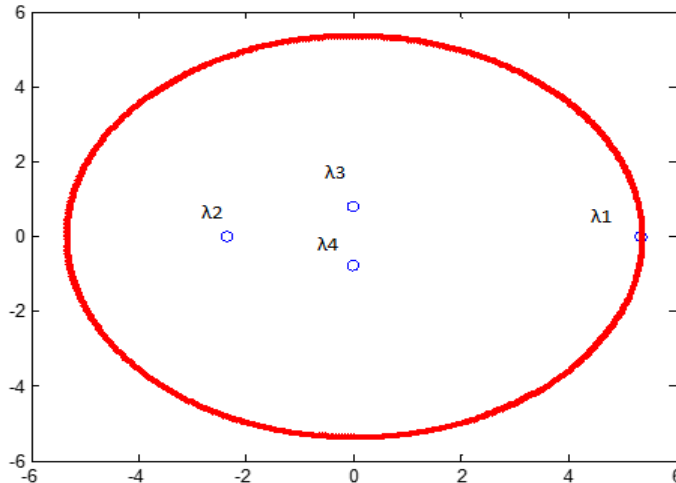
$$(I + C)^3 = \begin{pmatrix} 174 & 416 & 114 & 264 \\ 33 & 75 & 20 & 48 \\ 6 & 15 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

Επομένως ο πίνακας C είναι μη- αναγώγιμος και στη συνέχεια παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η (I) συνθήκη της Πρότασης 1.3.6, επειδή για $k = 4$ ισχύει:

$$C^4 = \begin{pmatrix} 569 & 1278 & 370 & 808 \\ 101 & 266 & 66 & 168 \\ 21 & 38 & 14 & 24 \\ 3 & 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} > 0$$

Συνεπώς, ο πίνακας C είναι αρχικός με αποτέλεσμα να υπάρχει μόνο μία ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο, που βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα ίση με $\rho(C)$, και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές εντοπίζονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται και από τον υπολογισμό του φάσματος του C , που είναι $\sigma(C) = \{\lambda_1 = 5.3603, \lambda_2 = -2.3529, \lambda_3 = -0.0037 + 0.7964i, \lambda_4 = -0.0037 - 0.7964i\}$. Τα μέτρα των ιδιοτιμών είναι $|\lambda_1| = 5.3603, |\lambda_2| = 2.3529, |\lambda_3| = |\lambda_4| = 0.7964$, από όπου είναι φανερό ότι $\rho(C) = \lambda_1 = 5.3603$ και οι υπόλοιπες $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ιδιοτιμές έχουν μέτρο μικρότερο από την $\rho(C)$.



Σχήμα 1.3: Κυκλικός δίσκος-ιδιοτιμές πίνακα C

Σχόλιο 1.3.10

Στο Σχήμα 1.3 σχεδιάζεται ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(C) = \lambda_1 = 5.3603$ και σημειώνονται με «μπλε ο» οι ιδιοτιμές του πίνακα C .

Παρατηρούμε ότι μόνο μία ιδιοτιμή, λ_1 , ανήκει στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου και οι υπόλοιπες ιδιοτιμές $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ανήκουν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΧΩΡΙΑ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σε ποικίλους επιστημονικούς τομείς, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, προκύπτουν συχνά προβλήματα που συσχετίζονται με την εμφάνιση μη αρνητικών πινάκων. Η επίλυση αυτών των προβλημάτων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ανάγκη εύρεσης των χαρακτηριστικών ποσών (π.χ. ιδιοτιμές), που μελετούν και δίνουν πληροφορίες για τους μη αρνητικούς πίνακες.

Συγκεκριμένα, η γνώση των ιδιοτιμών ενός πίνακα αποτελεί ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο, καθώς μέσα από τις ιδιοτιμές μπορούμε να συμπεράνουμε ιδιότητες των μη αρνητικών πινάκων. Γι' αυτόν τον λόγο αρκετοί ερευνητές επικέντρωσαν την έρευνά τους στην ανάπτυξη θεωριών, οι οποίες προσφέρουν τη δυνατότητα υπολογισμού των ιδιοτιμών αλλά και εντοπισμού τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Επιπλέον, σε περιπτώσεις όπου η διάσταση ενός πίνακα είναι ιδιαίτερα μεγάλη, ο υπολογισμός των ιδιοτιμών αποδεικνύεται ως μία περίπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναζητούνται νέες και ευκολότερες μέθοδοι, οι οποίες δεν ανταποκρίνονται στη θεωρία πολωνύμων αλλά βασίζονται κυρίως στη χρήση των στοιχείων του μη αρνητικού πίνακα, όπως για παράδειγμα στο μέγιστο ή στο ελάχιστο στοιχείο του πίνακα, στο ίχνος του κ.α.

Ειδικότερα, σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνονται τα σπουδαιότερα θεωρήματα που εφαρμόζονται σχετικά με τον εντοπισμό των ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα και παράλληλα σχεδιάζονται τα χωρία μέσα στα οποία αυτές περικλείονται [1, 6, 10, 15, 18, 23].

2.1 Εντοπισμός ιδιοτιμών μέσω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας

Σημαντικό πρόβλημα στην επιστήμη των Μαθηματικών, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, αποτελεί ο καθορισμός των ιδιοτιμών ενός πίνακα. Αρκετοί επιστήμονες έχουν επισημάνει ότι η εύρεση των ιδιοτιμών συχνά καθίσταται αλγεβρικά και υπολογιστικά δύσκολη εξαιτίας της μεγάλης διάστασης του πίνακα. Αυτό συμβαίνει κυρίως λόγω της τεράστιας πολυπλοκότητας των πράξεων που απαιτείται τόσο στον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου όσο και στην επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Συγκεκριμένα, η ενότητα αυτή αναφέρεται στον εντοπισμό των ιδιοτιμών μη αρνητικών πινάκων, παρακάμπτοντας τον περίπλοκο υπολογισμό τους. Μία μέθοδος για την εύρεση των ιδιοτιμών αποτελεί η χρήση των διαστημάτων μέσα στα οποία κυμαίνεται η φασματική ακτίνα.

Έτσι πριν δοθεί μια εκτίμηση για τον εντοπισμό των ιδιοτιμών, κρίνεται αναγκαίο να οριστούν τα διαστήματα που περικλείουν τη φασματική ακτίνα. Γι' αυτόν τον λόγο διατυπώνεται το επόμενο θεώρημα, του οποίου η απόδειξη δίνεται [12, Theorem 8.1.22].

Θεώρημα 2.1.1

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$I. \quad \min_{1 \leq i \leq n} \{R_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{R_i(A)\} \quad (2.1)$$

και

$$II. \quad \min_{1 \leq j \leq n} \{C_j(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{C_j(A)\} \quad (2.2)$$

Σχόλιο 2.1.2

Από τον Ορισμό 1.2.2 της φασματικής ακτίνας συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα εντοπίζονται στον κυκλικό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με τη φασματική του ακτίνα. Στην περίπτωση που η φασματική ακτίνα δεν είναι γνωστή, οι ανισότητες (2.1) και (2.2) του Θεωρήματος 2.1.1 υποδεικνύουν ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα εμπεριέχονται σε έναν ευρύτερο από τον προαναφερόμενο κυκλικό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με το μεγαλύτερο

άθροισμα γραμμών ή στηλών του πίνακα, ο οποίος περικλείει τον αρχικό κυκλικό δίσκο.

Θεώρημα 2.1.3

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Όλες οι ιδιοτιμές του εντοπίζονται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα ίση με το $\max_{1 \leq i \leq n} \{R_i(A)\}$ και αντίστοιχα στον κυκλικό δίσκο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα ίση με το $\max_{1 \leq j \leq n} \{C_j(A)\}$.

Παράδειγμα 2.1.4

Έστω οι ακόλουθοι μη αρνητικοί πίνακες

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα διαστήματα της φασματικής ακτίνας για τους πίνακες A, B και να σχεδιαστούν τα χωρία στα οποία εντοπίζεται το φάσμα τους.

- i). Για την εύρεση του πρώτου διαστήματος, όπου εντοπίζεται η τιμή της φασματικής ακτίνας του πίνακα A , χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\min_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(A)\}$ και $\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(A)\}$.

Έτσι έχουμε $R_1(A) = 3$, $R_2(A) = R_3(A) = R_4(A) = 5$ και συνεπώς καταλήγουμε ότι $\min_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(A)\} = 3$ και $\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(A)\} = 5$

Άρα σύμφωνα με τη (2.1) ισχύει $3 \leq \rho(A) \leq 5$.

Επίσης για τον εντοπισμό του δεύτερου διαστήματος εφαρμόζουμε στον ίδιο πίνακα τη (2.2) και υπολογίζουμε αντίστοιχα τις ποσότητες $\min_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(A)\}$ και $\max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(A)\}$.

Αφού ισχύουν $C_1(A) = 3$ και $C_2(A) = C_3(A) = C_4(A) = 5$ καταλήγουμε ότι $\min_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(A)\} = 3$ και $\max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(A)\} = 5$

Συνεπώς προκύπτει $3 \leq \rho(A) \leq 5$.

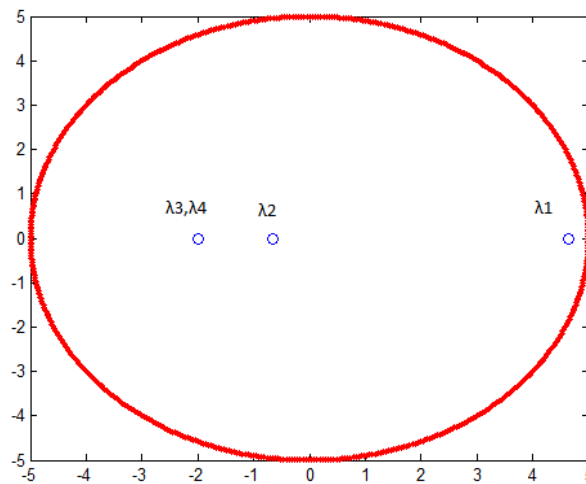
Στη συνέχεια, για το σχεδιασμό του χωρίου, όπου το φάσμα του πίνακα A περιέχεται, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1.3, δηλαδή σχεδιάζουμε τον κυκλικό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με

$$\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(A)\} = \max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(A)\} = 5.$$

Επιπλέον, αν υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A βρίσκουμε ότι είναι:

$$\lambda_1 = 4.6458, \quad \lambda_2 = -0.6458, \quad \lambda_3 = -2, \quad \lambda_4 = -2$$

Προφανώς το μέτρο όλων των ιδιοτιμών είναι μικρότερο από την ακτίνα του προαναφερόμενου κυκλικού δίσκου.



Σχήμα 2.1: Κυκλικός δίσκος-ιδιοτιμές πίνακα A

Σχόλιο 2.1.5

Στο Σχήμα 2.1 σχεδιάζεται ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με $\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(A)\} = 5$, όπου με «μπλε ο» σημειώνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A .

Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 2.1 επιβεβαιώνεται το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1.3, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ του πίνακα A εμπεριέχονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 5, καθώς ισχύει $|\lambda_2| < |\lambda_3| = |\lambda_4| < |\lambda_1| < 5$.

- ii). Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B . Για την εύρεση των διαστημάτων, όπου εντοπίζεται η τιμή της φασματικής ακτίνας του πίνακα B , υπολογίζονται οι ακόλουθες ποσότητες:

$$R_1(B) = 25 \text{ και } R_2(B) = R_3(B) = R_4(B) = 1, \text{ οπότε}$$

$$\min_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(B)\} = 1 \text{ και } \max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(B)\} = 25$$

$$\text{και } C_1(B) = 4, C_2(B) = 13, C_3(B) = 3 \text{ και } C_4(B) = 8, \text{ οπότε}$$

$$\min_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(B)\} = 3 \text{ και } \max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(B)\} = 13$$

Συνεπώς από τη (2.1) προκύπτει ότι η τιμή της φασματικής ακτίνας του πίνακα B είναι ένας μη αρνητικός αριθμός που ανήκει στο διάστημα $[1, 25]$, δηλαδή $1 \leq \rho(B) \leq 25$.

Αντίστοιχα από τη (2.2) προκύπτει ότι $3 \leq \rho(B) \leq 13$.

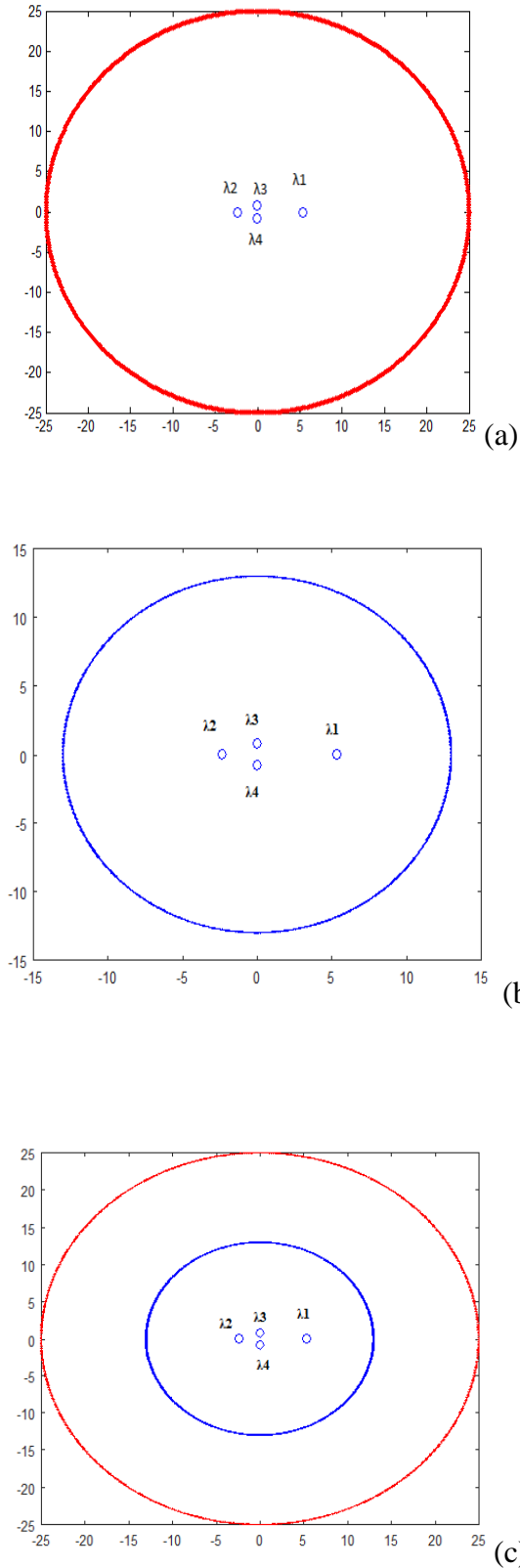
Στη συνέχεια, για το σχεδιασμό του χωρίου, όπου το φάσμα του πίνακα B περιέχεται, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.3, σχεδιάζουμε τον κυκλικό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με $\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(B)\} = 25$, (βλέπε, Σχήμα 2.2(a)) και τον κυκλικό δίσκο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με $\max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(B)\} = 13$, (βλέπε, Σχήμα 2.2(b)).

Επειδή οι κύκλοι είναι ομόκεντροι και η μία ακτίνα είναι μικρότερη από την άλλη, προφανώς ο ένας κύκλος εμπεριέχεται στον άλλον, (βλέπε, Σχήμα 2.2(c)), με αποτέλεσμα η περιοχή που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα B να είναι ο κυκλικός δίσκος με τη μικρότερη ακτίνα.

Επιπλέον αν υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές έχουμε : $\lambda_1 = 5.3603, \lambda_2 = -2.3529, \lambda_3 = -0.0037 + 0.7964i, \lambda_4 = -0.0037 - 0.7964i$, οι οποίες έχουν μέτρο:

$$|\lambda_1| = 5.3603, |\lambda_2| = 2.3529, |\lambda_3| = |\lambda_4| = 0.7964$$

Προφανώς το μέτρο όλων των ιδιοτιμών είναι μικρότερο από την ακτίνα του κυκλικού δίσκου με τη μικρότερη ακτίνα $\max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(B)\} = 13$.



Σχήμα 2.2:

(a) Κυκλικός δίσκος με ακτίνα $\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(B)\} = 25$ -ιδιοτιμές B

(b) Κυκλικός δίσκος με ακτίνα $\max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(B)\} = 13$ -ιδιοτιμές B

(c) Κυκλικοί δίσκοι με ακτίνες 13 (μπλε) και 25 (κόκκινη) σχεδίαση

Σχόλιο 2.1.6

Στο Σχήμα 2.2(a) σχεδιάζεται ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με $\max_{1 \leq i \leq 4} \{R_i(B)\} = 25$, όπου με «μπλε ο» σημειώνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα B και με κόκκινη σχεδίαση η περιφέρειά του.

Αντίστοιχα στο Σχήμα 2.2(b) σχεδιάζεται ο κυκλικός δίσκος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με $\max_{1 \leq j \leq 4} \{C_j(B)\} = 13$, όπου με «μπλε ο» σημειώνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα B και με μπλε σχεδίαση η περιφέρειά του.

Τέλος στο Σχήμα 2.2(c) σχεδιάζονται οι ομόκεντροι κυκλικοί δίσκοι των Σχημάτων 2.2(a) και 2.2(b), όπου με «μπλε ο» σημειώνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα B .

Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 2.2(c) επιβεβαιώνεται το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1.3, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ του πίνακα B εμπεριέχονται στο εσωτερικό του μικρότερου κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 13, καθώς ισχύει $|\lambda_3| = |\lambda_4| < |\lambda_2| < |\lambda_1| < 13$.

□

Σε περιπτώσεις όπου η φασματική ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα είναι γνωστή, δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.1.3 για τον εντοπισμό του χωρίου που εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα, αλλά εφαρμόζεται ο ορισμός της φασματικής ακτίνας και σχεδιάζεται μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου μέσω της (1.14), (βλέπε, Ορισμό 1.2.2), γεγονός που διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.7

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε όλες οι ιδιοτιμές του εντοπίζονται στον κυκλικό δίσκο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Σχόλιο 2.1.8

Ο συνδυασμός του Θεωρήματος 2.1.7 και του Ορισμού 1.2.2 της φασματικής ακτίνας μας εξασφαλίζει την πληροφορία ότι όλες οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα βρίσκονται με βεβαιότητα στον κυκλικό δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα τη φασματική του ακτίνα. Όμως δεν υπάρχει καμία πληροφορία

για ποιες από αυτές τις ιδιοτιμές, εκτός της φασματική ακτίνας, θα εντοπίζονται στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου και ποιες στο εσωτερικό του.

Ωστόσο, στην περίπτωση που ο πίνακας είναι αρχικός και μη-αναγωγίμος, τότε μπορούμε με ακρίβεια να γνωρίζουμε ότι η φασματική ακτίνα είναι η μοναδική ιδιοτιμή που βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $\rho(A)$ και όλες οι υπόλοιπες ανήκουν στο εσωτερικό του. Για την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1.7 στην περίπτωση ενός αρχικού και μη-αναγωγίμου πίνακα ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο Παράδειγμα 1.3.7 και ιδιαίτερα να παρατηρήσει και να επαληθεύσει τα παραπάνω στα Σχήματα 1.2 και 1.3.

2.2 Εντοπισμός ιδιοτιμών με τη χρήση των $R_i(A), R'_i(A), R''_{ij}(A)$ και του ίχνους

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, βασικός στόχος της παρούσας εργασίας είναι ο εντοπισμός των ιδιοτιμών ενός μη αρνητικού πίνακα. Ειδικότερα, σε περιπτώσεις όπου ο υπολογισμός των ιδιοτιμών καθίσταται αλγεβρικά και υπολογιστικά πολύπλοκος, κρίνεται απαραίτητη η αναζήτηση βέλτιστων μεθόδων εύρεσης ιδιοτιμών και προσδιορισμού τους στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι σε αυτήν την ενότητα αναπτύσσονται και διατυπώνονται επιμέρους θεωρήματα σχετικά με την εύρεση του χωρίου, όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές των μη αρνητικών πινάκων.

Για να δοθεί μια πρώτη εκτίμηση σχετικά με τον προσδιορισμό της περιοχής του επιπέδου, όπου οι ιδιοτιμές περικλείονται, χρειάζεται να οριστεί το ακόλουθο σύνολο:

$$G_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R'_i(A)\} \quad (2.3)$$

όπου $R'_i(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των μη διαγωνίων στοιχείων της i -γραμμής του πίνακα A , για $1 \leq i \leq n$, όπως στην (1.3).

Παρατηρούμε ότι τα σύνολα που περιγράφονται στη (2.3) είναι κυκλικοί δίσκοι με κέντρο το διαγώνιο στοιχείο του A , a_{ii} , και ακτίνα $R'_i(A)$.

Το ακόλουθο θεώρημα, γνωστό ως Θεώρημα **Gerschgorin**, χρησιμοποιώντας τους n -κυκλικούς δίσκους $G_i(A)$ της (2.3) σκιαγραφεί την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, όπου το φάσμα του πίνακα A περικλείεται. Για την πλήρη απόδειξή του ο αναγνώστης παραπέμπεται [10] ή σε βιβλία της Γραμμικής Άλγεβρας και της Ανάλυσης Πινάκων, που εμπεριέχονται στη βιβλιογραφία [12, Theorem 6.1.1].

Θεώρημα 2.2.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R}^+)$. Τότε οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται στην ένωση των n -κυκλικών δίσκων $G_i(A)$ για $1 \leq i \leq n$, όπως αυτοί ορίστηκαν στη (2.3), δηλαδή ανήκουν εντός της περιοχής του επιπέδου

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^n G_i(A) \quad (2.4)$$

Σχόλιο 2.2.2

Η περιοχή $G(A)$ είναι γνωστή ως **Gerschgorin περιοχή**, κάθε κυκλικός δίσκος $G_i(A)$ στη (2.3) ονομάζεται **Gerschgorin δίσκος** και το σύνολό του ονομάζεται **Gerschgorin κύκλος**.

Στη συνέχεια για την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.1 κατασκευάζεται ο ακόλουθος αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιείται για την εύρεση της Gerschgorin περιοχής μέσα στην οποία θα ανήκει και το φάσμα του πίνακα.

Αλγόριθμος 2.2.3

1. Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ υπολογίζουμε την ακτίνα $R'_i(A)$, όπως δόθηκε στην (1.3).
2. Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ με ακτίνα $R'_i(A)$ σχεδιάζεται ο αντίστοιχος κυκλικός δίσκος $G_i(A)$, που ορίστηκε στη (2.3).
3. Απεικονίζεται η $G(A)$ περιοχή του επιπέδου μέσα στην οποία ανήκει το φάσμα του πίνακα, που δημιουργείται από την ένωση των κυκλικών δίσκων του βήματος 2 και δίνεται από τη (2.4).

Παράδειγμα 2.2.4

Έστω οι ακόλουθοι μη αρνητικοί πίνακες:

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι Gerschgorin δίσκοι των πινάκων A, B και να σχεδιαστούν τα χωρία στα οποία εντοπίζεται το φάσμα τους.

- i). Για τον πίνακα A και υλοποιώντας το 1^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.3, οι ακτίνες των δίσκων υπολογίζονται ως εξής:

$$R'_1(A) = R_1(A) - a_{11} = 3 - 0 = 3 \text{ και}$$

$$R'_2(A) = R'_3(A) = R'_4(A) = 5$$

Έπειτα, εφαρμόζοντας το 2^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.3, υπολογίζουμε τους Gerschgorin δίσκους $G_i(A)$ για $1 \leq i \leq 4$. Έτσι έχουμε:

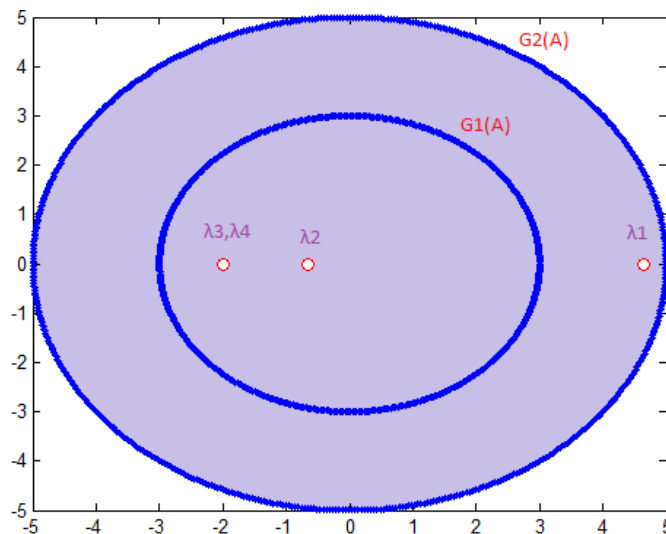
$$G_1(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{11}| \leq R'_1(A)\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\} \text{ και}$$

$$G_2(A) = G_3(A) = G_4(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\}$$

Έχοντας υπολογίσει τους Gerschgorin δίσκους $G_i(A)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , οι οποίες είναι $\lambda_1 = 4.6458, \lambda_2 = -0.6458, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2$ και βρίσκονται στην ένωση των προαναφερόμενων δίσκων και η Gerschgorin περιοχή είναι η

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^4 G_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 5\} = G_2(A)$$

Σύμφωνα με το 3^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.3, η Gerschgorin περιοχή σκιαγραφείται στο Σχήμα 2.3, όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα A σημειώνονται με "ο". Επίσης στο Παράρτημα Α παρατίθεται ο κώδικας Α.1, ο οποίος χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του Αλγορίθμου 2.2.3.



Σχήμα 2.3: Gerschgorin δίσκοι-ιδιοτιμές πίνακα A

Σχόλιο 2.2.5

Στο Σχήμα 2.3 παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές λ_2, λ_3 και λ_4 ανήκουν στον Gerschgorin δίσκο $G_1(A)$ και η ιδιοτιμή λ_1 ανήκει στον Gerschgorin δίσκο $G_2(A)$ ($G_2(A) = G_3(A) = G_4(A)$). Συνεπώς επιβεβαιώνεται και από το σχήμα ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A ανήκουν στην ένωση των δίσκων

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^4 G_i(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\} = G_2(A).$$

ii). Όμοια για τον πίνακα B , υλοποιούμε το 1^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.3 και προκύπτουν οι ακόλουθες ακτίνες δίσκων:

$$R'_1(B) = R_1(B) - a_{11} = 25 - 3 = 22 \quad \text{και}$$

$$R'_2(B) = R'_3(B) = R'_4(B) = 1$$

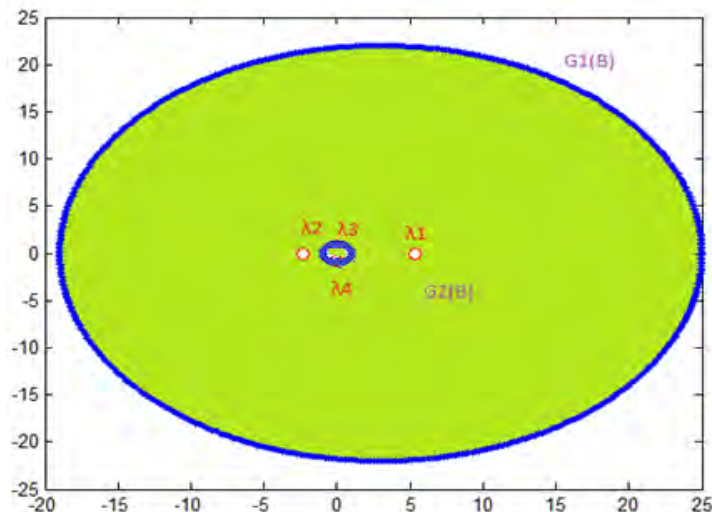
Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας ξανά το 2^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.3, υπολογίζουμε τους Gerschgorin δίσκους $G_i(B)$ για $1 \leq i \leq 4$. Έτσι έχουμε:

$$G_1(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{11}| \leq R'_1(B)\} = \{z \in \mathbb{C}: |z - 3| \leq 22\}$$

$$G_2(B) = G_3(B) = G_4(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$$

Έχοντας υπολογίσει τους Gerschgorin δίσκους $G_i(B)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B , οι οποίες είναι $\lambda_1 = 5.3603$, $\lambda_2 = -2.3529$, $\lambda_3 = -0.0037 + 0.7964i$, $\lambda_4 = -0.0037 - 0.7964i$, και βρίσκονται στην ένωση των προαναφερόμενων δίσκων και η Gerschgorin περιοχή είναι η

$$G(B) = \bigcup_{i=1}^4 G_i(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z - 3| \leq 22\} = G_1(B).$$



Σχήμα 2.4: Gerschgorin δίσκοι και Gerschgorin περιοχή πίνακα B

Επιπρόσθετα η Gerschgorin περιοχή του πίνακα B , σύμφωνα με το 3^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.3, απεικονίζεται στο Σχήμα 2.4 και υλοποιείται από

τον Κώδικα A.1 του Παραρτήματος Α. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B σημειώνονται με “ο”.

Σχόλιο 2.2.6

Στο Σχήμα 2.4 για τον πίνακα B επισημαίνεται ότι οι ιδιοτιμές του λ_1 και λ_2 ανήκουν στον Gerschgorin δίσκο $G_1(B)$ και οι ιδιοτιμές του λ_3, λ_4 ανήκουν στον Gerschgorin δίσκο $G_2(B)$ ($G_2(B) = G_3(B) = G_4(B)$). Επομένως διαπιστώνεται και από το σχήμα ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα B ανήκουν στην ένωση των δίσκων

$$G(B) = \bigcup_{i=1}^4 G_i(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 22\} = G_1(B).$$

□

Σημαντική συνεισφορά στον εντοπισμό των περιοχών, όπου ανήκουν οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα, είχε η μελέτη του Brauer, [6]. Μάλιστα ο τελευταίος παρουσίασε μία ανάλογη μελέτη με αυτήν του Gerschgorin (βλέπε, Θεώρημα 2.2.1), η οποία διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα.

Ιδιαίτερα, βασικό εργαλείο για τον προσδιορισμό της περιοχής του μιγαδικού επιπέδου μέσα στην οποία περικλείεται το φάσμα ενός μη αρνητικού πίνακα, αποτελεί το ακόλουθο σύνολο και ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{B}_{ij}^R(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| |z - a_{jj}| \leq R'_i(A) R'_j(A)\}, \quad i \neq j \quad (2.5)$$

όπου $R'_i(A)$ και $R'_j(A)$ συμβολίζουν τα αθροίσματα των μη διαγωνίων στοιχείων της i -γραμμής και j -γραμμής αντίστοιχα του πίνακα A , για $1 \leq i, j \leq n$, όπως στην (1.3).

Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως Θεώρημα **Brauer**, χρησιμοποιώντας τα σύνολα $\mathbf{B}_{ij}^R(A)$ της (2.5) απεικονίζει την περιοχή του επιπέδου, όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Για την πλήρη απόδειξή του ο αναγνώστης παραπέμπεται [6].

Θεώρημα 2.2.7

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται στην ένωση των $\binom{n}{2}$ συνόλων $B_{ij}^R(A)$ για $1 \leq i, j \leq n$, όπως αυτά ορίστηκαν στη (2.5), δηλαδή ανήκουν εντός της περιοχής του επιπέδου

$$B^R(A) = \bigcup_{i < j} B_{ij}^R(A) \quad (2.6)$$

Σχόλιο 2.2.8

Το σύνολο $B^R(A)$ στη (2.6) είναι γνωστό ως **Brauer περιοχή**. Κάθε σύνολο της (2.5) περιγράφει μία φραγμένη περιοχή του επιπέδου που συμβολίζεται $B_{ij}^R(A)$, για $i, j = 1, 2, \dots, n$ και $i \neq j$. Επίσης το σύνορο κάθε περιοχής $B_{ij}^R(A)$ απεικονίζεται από μια καμπύλη, την οποία στη συνέχεια την ονομάζουμε **καμπύλη Brauer** και στην αρθρογραφία είναι γνωστή και ως **oval** του **Cassini** και ορίζεται να είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου, των οποίων το γινόμενο των αποστάσεων από δύο διαγώνια στοιχεία του πίνακα (που είναι σταθερά σημεία για τη καμπύλη) παραμένει σταθερό.

Η περιοχή που περιγράφεται από το Θεώρημα 2.2.7 (Θεώρημα Brauer) αποτελεί μια βελτίωση της περιοχής του Θεωρήματος 2.2.1 (Θεώρημα Gerschgorin). Ειδικότερα η Brauer περιοχή $B^R(A)$ εμπεριέχεται στη Gerschgorin περιοχή, καθώς προσεγγίζει πλησιέστερα το φάσμα του μη αρνητικού πίνακα.

Στη συνέχεια, για την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.7, παρατίθεται κατάλληλος αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιείται για την εύρεση της Brauer περιοχής μέσα στην οποία θα εμπεριέχονται και οι ιδιοτιμές του πίνακα.

Αλγόριθμος 2.2.9

1. Για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$ υπολογίζουμε τις ακτίνες $R'_i(A)$ και $R'_j(A)$, όπως ορίζονται στην (1.3).
2. Για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i \neq j$ και με ακτίνα $R'_i(A)R'_j(A)$ σχεδιάζεται η αντίστοιχη καμπύλη $B_{ij}^R(A)$, όπως αυτή ορίστηκε στη (2.5).

3. Απεικονίζεται η $B^R(A)$ περιοχή του επιπέδου, (βλέπε, (2.6)), μέσα στην οποία εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα, που δημιουργείται ως ένωση των καμπυλών Brauer του 2^{ου} βήματος.

Παράδειγμα 2.2.10

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 2.2.4. Να βρεθούν οι καμπύλες Brauer των πινάκων A, B και να σχεδιαστούν αντίστοιχα τα χωρία στα οποία εντοπίζεται το φάσμα τους.

- i). Για τον πίνακα A και υλοποιώντας το 1^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.9, οι ποσότητες $R'_i(A)$ και $R'_j(A)$ υπολογίζονται ως εξής:

Έτσι για $i, j = 1, \dots, 4$ έχουμε:

$$R'_1(A) = R_1(A) - a_{11} = 3 - 0 = 3 \text{ και}$$

$$R'_2(A) = R'_3(A) = R'_4(A) = 5$$

Ακολούθως για την εφαρμογή του 2^{ου} βήματος του Αλγορίθμου 2.2.9, υπολογίζουμε τις καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(A)$ για $1 \leq i, j \leq 4$ ως εξής:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, \quad B_{12}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z - a_{11}| |z - a_{22}| \leq R'_1(A)R'_2(A) = \\ = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \sqrt{15}\}$$

$$j = 3, \quad B_{13}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \sqrt{15}\}$$

$$j = 4, \quad B_{14}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \sqrt{15}\}$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, \quad B_{21}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \sqrt{15}\}$$

$$j = 3, \quad B_{23}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$$

$$j = 4, \quad B_{24}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, \quad B_{31}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \sqrt{15}\}$$

$$j = 2, \quad B_{32}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$$

$$j = 4, \quad B_{34}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, B_{41}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq \sqrt{15}\}$$

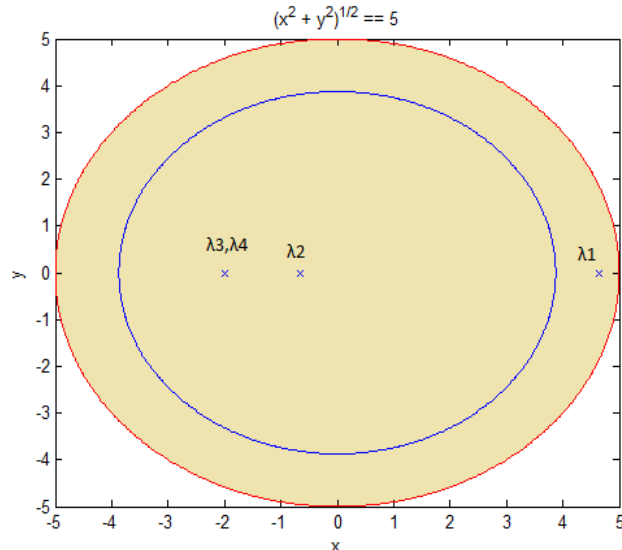
$$j = 2, B_{42}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$$

$$j = 3, B_{43}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$$

Ωστόσο, έχοντας υπολογίσει τις καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(A)$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , οι οποίες είναι $\lambda_1 = 4.6458, \lambda_2 = -0.6458, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2$ εντοπίζονται στην ένωση που σχηματίζουν οι καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(A)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η Brauer περιοχή να είναι η

$$B^R(A) = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 B_{ij}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}.$$

Σύμφωνα με το 3^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.9, η περιοχή Brauer σκιαγραφείται στο Σχήμα 2.5, όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα A σημειώνονται με "x". Επίσης στο Παράρτημα Α παρατίθεται ο κώδικας A.2, ο οποίος χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του Αλγορίθμου 2.2.9.



Σχήμα 2.5: Καμπύλες Brauer - Brauer περιοχή του πίνακα A

Σχόλιο 2.2.11

Στο Σχήμα 2.5 για τον πίνακα A παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του εμπεριέχονται στην περιοχή Brauer $B^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 5\}$, η οποία

σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.7 είναι η ένωση όλων των καμπυλών Brauer $B_{ij}^R(A)$ για $i, j = 1, \dots, 4$.

ii). Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B , όπου σύμφωνα με το 1^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.9, οι ποσότητες $R'_i(B)$ και $R'_j(B)$ υπολογίζονται ως εξής:

Έτσι για $i, j = 1, \dots, 4$ έχουμε:

$$R'_1(B) = R_1(B) - a_{11} = 25 - 3 = 22 \text{ και}$$

$$R'_2(B) = R'_3(B) = R'_4(B) = 1$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το 2^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.9 και για $i, j = 1, \dots, 4$ προκύπτουν οι ακόλουθες καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(B)$:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, \quad B_{12}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{11}| |z - a_{22}| \leq R'_1(B) R'_2(B) = \\ = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| |z| \leq 22\}$$

$$j = 3, \quad B_{13}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| |z| \leq 22\}$$

$$j = 4, \quad B_{14}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| |z| \leq 22\}$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, \quad B_{21}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| |z - 3| \leq 22\}$$

$$j = 3, \quad B_{23}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$$j = 4, \quad B_{24}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, \quad B_{31}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| |z - 3| \leq 22\}$$

$$j = 2, \quad B_{32}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

$$j = 4, \quad B_{34}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, \quad B_{41}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| |z - 3| \leq 22\}$$

$$j = 2, \quad B_{42}^R(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

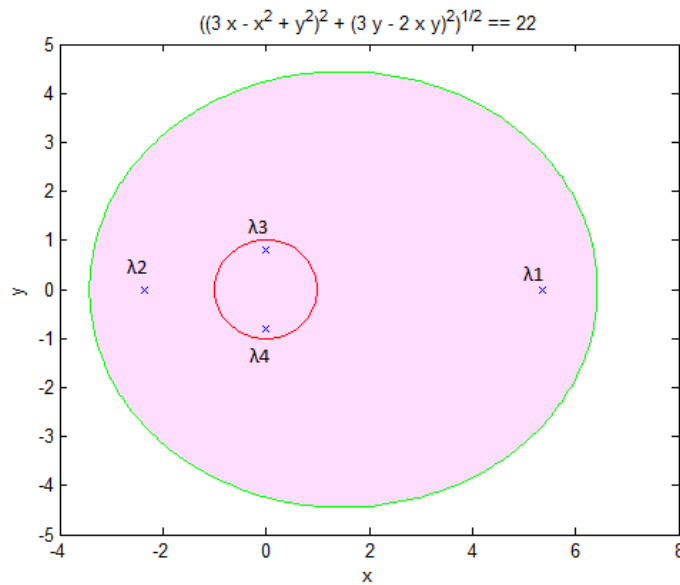
$$j = 3, B_{43}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$$

Αφού προσδιορίσαμε και για τον πίνακα B τις καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(B)$, αναμένεται από το Θεώρημα 2.2.7 ότι οι ιδιοτιμές του, οι οποίες είναι $\lambda_1 = 5.3603, \lambda_2 = -2.3529, \lambda_3 = -0.0037 + 0.7964i, \lambda_4 = -0.0037 - 0.7964i$, βρίσκονται στην ένωση που σχηματίζουν οι καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(B)$.

Συνεπώς η Brauer περιοχή $B^R(B)$ είναι η ακόλουθη:

$$B^R(B) = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^4 B_{ij}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z - 3||z| \leq 22\}$$

Επιπλέον, σύμφωνα με το 3^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.9, η περιοχή Brauer $B^R(B)$ παριστάνεται στο Σχήμα 2.6 και υλοποιείται από τον Κώδικα A.2 του Παραρτήματος Α. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B σημειώνονται με “x”.



Σχήμα 2.6: Καμπύλες Brauer - Brauer περιοχή του πίνακα B

Σχόλιο 2.2.12

Από το Σχήμα 2.6 επιβεβαιώνεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα B περικλείονται από την περιοχή Brauer $B^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z - 3||z| \leq 22\}$, η οποία είναι η ένωση όλων των καμπυλών Brauer $B_{ij}^R(B)$ για $i, j = 1, \dots, 4$.

□

Επιπρόσθετα μία ανάλογη προσέγγιση με αυτή των Gerschgorin και Brauer για την εύρεση του φάσματος ενός μη αρνητικού πίνακα αλλά και για τον εντοπισμό την περιοχής του επιπέδου στην οποία αυτό ανήκει, αποτελεί το Θεώρημα του Melman. Συγκεκριμένα η μελέτη του Melman αποτελεί τη γενίκευση του Θεωρήματος Gerschgorin (βλέπε, Θεώρημα 2.1.1) και παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

Για την παρουσίαση της θεωρίας του Melman απαιτείται να οριστεί το επόμενο σύνολο:

$$\Omega_{ij}^R(A) = \left\{ \begin{array}{l} z \in \mathbb{C}: |(z - a_{ii})(z - a_{jj}) - a_{ij}a_{ji}| \leq \\ \leq |z - a_{jj}|R_{ij}''(A) + a_{ij}R_{ji}''(A) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

όπου $R_{ij}''(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των μη διαγωνίων στοιχείων της i - γραμμής του πίνακα A εκτός του στοιχείου a_{ij} , για $1 \leq i, j \leq n$, όπως στην (1.4).

Αντίστοιχα το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως **Θεώρημα Melman** ή **Γενίκευση των Gerschgorin δίσκων** μας δίνει τη δυνατότητα με τη χρήση των συνόλων $\Omega_{ij}^R(A)$ της (2.7) να σκιαγραφήσουμε την περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, στην οποία εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Για τη μελέτη της απόδειξης του σχετικού θεωρήματος ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει [18, Theorem 2.1].

Θεώρημα 2.2.13

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα A βρίσκονται στην ένωση των n συνόλων $\Omega_{ij}^R(A)$ για $1 \leq i, j \leq n$, όπως αυτά ορίστηκαν στη (2.7), δηλαδή ανήκουν εντός της περιοχής του επιπέδου

$$\Omega^R(A) = \bigcup_{i=1}^n \{ \bigcap_{j \in S_i} \Omega_{ij}^R(A) \} \quad (2.8)$$

όπου S_i είναι ένα μη κενό υποσύνολο του J_i με $J_i = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$.

Σχόλιο 2.2.14

Το σύνολο $\Omega^R(A)$ στη (2.8) είναι γνωστό ως **περιοχή Melman** ή αλλιώς **Γενικευμένη Gerschgorin περιοχή**. Κάθε σύνολο της (2.7) περιγράφει μία

φραγμένη περιοχή του επιπέδου, που συμβολίζεται $\Omega_{ij}^R(A)$, για $i, j = 1, 2, \dots, n$ με $i \neq j$. Επίσης το σύνορο κάθε περιοχής $\Omega_{ij}^R(A)$ απεικονίζεται με μια καμπύλη όγδοου βαθμού και μοιάζει με την καμπύλη Brauer.

Οι καμπύλες που παράγονται από το Θεώρημα 2.2.12 (Θεώρημα Melman) έχει αποδειχτεί ότι πλαισιώνουν πιο κοντά τις ιδιοτιμές ενός πίνακα σε σχέση με τα Θεωρήματα 2.2.1 και 2.2.7 (Θεώρημα Gerschgorin και αντίστοιχα Θεώρημα Brauer).

Αν και οι καμπύλες Melman $\Omega_{ij}^R(A)$ είναι πιο περίπλοκες σε σχέση με τις καμπύλες Brauer $B_{ij}^R(A)$ και τους κυκλικούς δίσκους Gerschgorin $G_i(A)$ χρησιμοποιούνται κυρίως για ειδικές περιπτώσεις πινάκων, όπως είναι οι αραιοί πίνακες, καθώς και στον εντοπισμό των ριζών των πολυωνύμων [18].

Στη συνέχεια, για την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.13, παρατίθεται κατάλληλος αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιείται για την εύρεση του φάσματος ενός πίνακα και συγχρόνως για τον προσδιορισμό της περιοχής του επιπέδου που το περικλείει.

Αλγόριθμος 2.2.15

1. Για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$ υπολογίζουμε τις ποσότητες $R_{ij}''(A)$ και $R_{ji}''(A)$, όπως δόθηκαν στην (1.4).
2. Για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ σχεδιάζονται οι καμπύλες $\Omega_{ij}^R(A)$, όπως αυτές ορίστηκαν στην (2.7).
3. Απεικονίζεται η $\Omega^R(A)$ περιοχή του επιπέδου (βλέπε, (2.8)), μέσα στην οποία ανήκει το φάσμα του πίνακα, που δημιουργείται από την ένωση των τομών που σχηματίζουν οι καμπύλες $\Omega_{ij}^R(A)$ του βήματος 2.

Παράδειγμα 2.2.16

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 2.2.4. Να βρεθούν οι καμπύλες Melman των πινάκων A, B και να σχεδιαστούν τα χωρία στα οποία εντοπίζονται οι ιδιοτιμές τους.

i). Για τον πίνακα A εκτελούμε το 1^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.15, όπου οι ποσότητες $R''_{ij}(A)$ και $R''_{ji}(A)$ υπολογίζονται ως εξής:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, R''_{12}(A) = R'_1(A) - \alpha_{12} = 3 - 1 = 2$$

$$j = 3, R''_{13}(A) = 2$$

$$j = 4, R''_{14}(A) = 2$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{21}(A) = 4$$

$$j = 3, R''_{23}(A) = 3$$

$$j = 4, R''_{24}(A) = 3$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{31}(A) = 4$$

$$j = 2, R''_{32}(A) = 3$$

$$j = 3, R''_{34}(A) = 3$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{41}(A) = 4$$

$$j = 2, R''_{42}(A) = 3$$

$$j = 3, R''_{43}(A) = 3$$

Επιπλέον για να εφαρμόσουμε το 2^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.15, υπολογίζουμε τις καμπύλες Melman $\Omega_{ij}^R(A)$ για $i, j = 1, \dots, 4$, ως εξής:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} j = 2, \Omega_{12}^R(A) &= \{z \in \mathbb{C}: (z - a_{11})(z - a_{22}) - a_{12}a_{21} \leq \\ &\leq |z - a_{22}|R''_{12} + \alpha_{12}R''_{21}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 1| \leq 2|z| + 4\} \end{aligned}$$

$$j = 3, \Omega_{13}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 1| \leq 2|z| + 4\}$$

$$j = 4, \Omega_{14}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 1| \leq 2|z| + 4\}$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, \Omega_{21}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 1| \leq 4|z| + 2\}$$

$$j = 3, \Omega_{23}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 4| \leq 3|z| + 6\}$$

$$j = 4, \Omega_{24}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 4| \leq 3|z| + 6\}$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, \Omega_{31}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 1| \leq 4|z| + 2\}$$

$$j = 2, \Omega_{32}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 4| \leq 3|z| + 6\}$$

$$j = 4, \Omega_{34}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 4| \leq 3|z| + 6\}$$

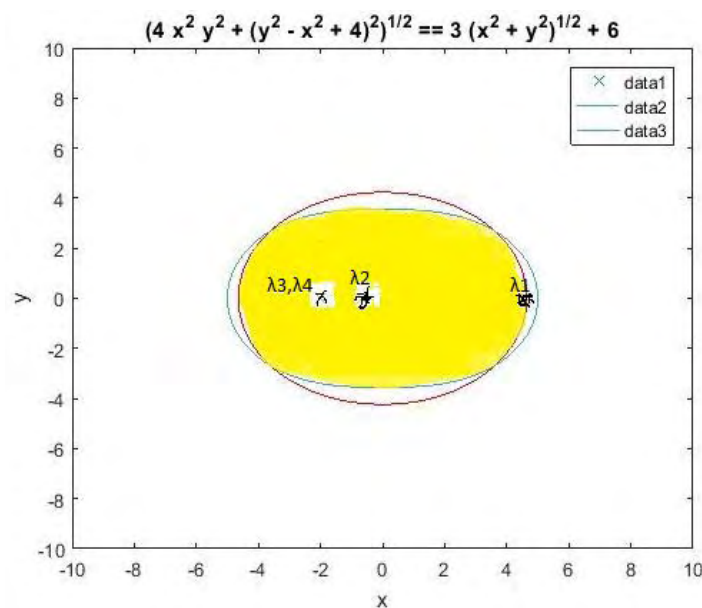
Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, \Omega_{41}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 1| \leq 4|z| + 2\}$$

$$j = 2, \Omega_{42}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 4| \leq 3|z| + 6\}$$

$$j = 3, \Omega_{43}^R(A) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 4| \leq 3|z| + 6\}$$

Αφού προσδιορίσαμε τις καμπύλες Melman $\Omega_{ij}^R(A)$ αναμένεται από το Θεώρημα 2.2.13 ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , οι οποίες είναι $\lambda_1 = 4.6458, \lambda_2 = -0.6458, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -2$, εντοπίζονται στην ένωση που σχηματίζεται από τις τομές των καμπυλών Melman $\Omega_{ij}^R(A)$.



Σχήμα 2.7: Καμπύλες Melman - Melman περιοχή του πίνακα A

Έτσι η περιοχή Melman του πίνακα A , όπως αυτή ορίστηκε στη (2.8) απεικονίζεται στο Σχήμα 2.7, όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα A σημειώνονται με “x”. Επίσης στο Παράρτημα Α παρατίθεται το Script A.3 για το σχεδιασμό της περιοχής Melman του πίνακα A .

Σχόλιο 2.2.17

Από το Σχήμα 2.7 είναι φανερό ότι η περιοχή Melman του πίνακα A είναι η περιοχή του επιπέδου που είναι χρωματισμένη με κίτρινο χρώμα. Επίσης από το παραπάνω σχήμα επιβεβαιώνεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A εντοπίζονται στην περιοχή $\Omega^R(A)$, η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.13 αποτελεί την ένωση από τις τομές των καμπυλών Melman $\Omega_{ij}^R(A)$.

- ii). Όμοια εφαρμόζουμε το 1^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.15 και για τον πίνακα B , όπου οι ποσότητες $R''_{ij}(B)$ και $R''_{ji}(B)$ είναι οι ακόλουθες:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, R''_{12}(B) = R'_1(B) - \alpha_{12} = 22 - 12 = 10$$

$$j = 3, R''_{13}(B) = 20$$

$$j = 4, R''_{14}(B) = 14$$

Για $i = 2$ έχουμε

$$j = 1, R''_{21}(B) = 0$$

$$j = 3, R''_{23}(B) = 1$$

$$j = 4, R''_{24}(B) = 1$$

Για $i = 3$ έχουμε

$$j = 1, R''_{31}(B) = 1$$

$$j = 2, R''_{32}(B) = 0$$

$$j = 4, R''_{34}(B) = 1$$

Για $i = 4$ έχουμε

$$j = 1, R''_{41}(B) = 1$$

$$j = 2, R''_{42}(B) = 1$$

$$j = 3, R''_{43}(B) = 0$$

Ανάλογα για τον πίνακα B πραγματοποιούμε το 2^ο βήμα του Αλγορίθμου 2.2.15 και οι καμπύλες Melman $\Omega_{ij}^R(B)$ για $i, j = 1, \dots, 4$ υπολογίζονται ως εξής:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2,$$

$$\begin{aligned} \Omega_{12}^R(B) &= \{z \in \mathbb{C}: |(z - a_{11})(z - a_{22}) - a_{12}a_{21}| \leq |z - a_{22}|R''_{12} + a_{12}R''_{21}\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 3z - 12| \leq 10|z|\} \end{aligned}$$

$$j = 3, \Omega_{13}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 3z| \leq 20|z| + 2\}$$

$$j = 4, \Omega_{14}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 3z| \leq 14|z| + 8\}$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, \Omega_{21}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 3z - 12| \leq 10\}$$

$$j = 3, \Omega_{23}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2| \leq |z|\}$$

$$j = 4, \Omega_{24}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2| \leq |z|\}$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, \Omega_{31}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 3z| \leq |z - 3|\}$$

$$j = 2, \Omega_{32}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2| \leq 1\}$$

$$j = 4, \Omega_{34}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2| \leq |z|\}$$

Για $i = 4$ έχουμε:

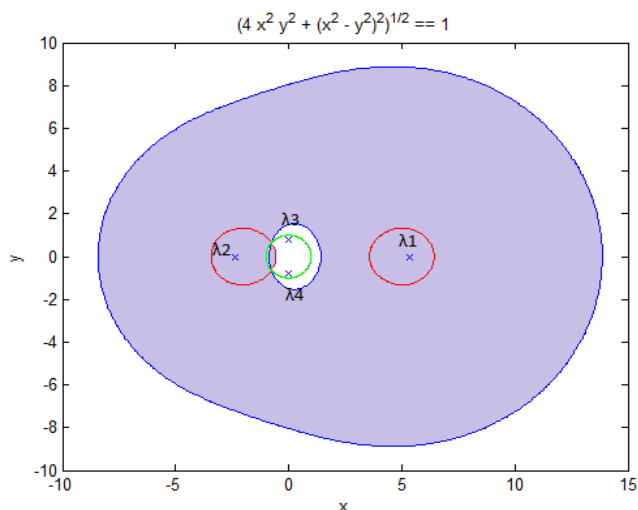
$$j = 1, \Omega_{41}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2 - 3z| \leq |z - 3|\}$$

$$j = 2, \Omega_{42}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2| \leq |z|\}$$

$$j = 3, \Omega_{43}^R(B) = \{z \in \mathbb{C}: |z^2| \leq 1\}$$

Έχοντας υπολογίσει τις καμπύλες Melman $\Omega_{ij}^R(B)$ αναμένεται από το Θεώρημα 2.2.13 ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B , οι οποίες είναι $\lambda_1 = 5.3603, \lambda_2 = -2.3529, \lambda_3 = -0.0037 + 0.7964i, \lambda_4 = -0.0037 - 0.7964i$, εντοπίζονται στην ένωση που σχηματίζεται από τις τομές των καμπυλών Melman $\Omega_{ij}^R(B)$.

Έτσι η περιοχή Melman του πίνακα B , όπως αυτή ορίστηκε στη (2.8) απεικονίζεται στο Σχήμα 2.8. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B σημειώνονται με “x”.



Σχήμα 2.8: Καμπύλες Melman - Melman περιοχή του πίνακα B

Σχόλιο 2.2.18

Από το Σχήμα 2.8 παρατηρούμε ότι η περιοχή Melman του πίνακα B είναι η περιοχή του επιπέδου που είναι χρωματισμένη με μωβ χρώμα. Επίσης από το παραπάνω σχήμα επιβεβαιώνεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα B εντοπίζονται στην περιοχή $\Omega^R(B)$, η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.13 αποτελεί την ένωση από τις τομές των καμπυλών Melman $\Omega_{ij}^R(B)$.

□

Μια τελευταία αλλά εξίσου σημαντική μέθοδο, σχετικά με τον προσδιορισμό της περιοχής όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές ενός μη αρνητικού πίνακα, αποτελεί η προσέγγιση των Huang Ting-Zhu και Wang Lin, οι οποίοι βασιζόμενοι σε ανισώσεις για το πραγματικό και φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών ενός τυχαίου πίνακα των O . Rojo, et al. [23], απέδειξαν νέες βελτιωμένες ανισώσεις για τις ιδιοτιμές ενός τυχαίου πίνακα. Η θεωρία των Huang- Wang διαφοροποιείται σε σχέση με τις προηγούμενες θεωρίες Gerschgorin, Brauer, Melman, καθώς για τον εντοπισμό της περιοχής του επιπέδου στην οποία αυτές εμπεριέχονται, χρησιμοποιείται κυρίως το ίχνος και τα στοιχεία του πίνακα.

Συνεπώς διατυπώνεται το επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι γνωστό ως **Θεώρημα Huang-Wang**, για την απόδειξή του ο αναγνώστης παραπέμπεται [15, Theorem 2.8].

Θεώρημα 2.2.19

Έστω $A \in M_n(R^+)$ με λ_j να είναι οι ιδιοτιμές του και m να είναι ένας ακέραιος αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση $rank(A) \leq m \leq n$, όπου $rank(A)$ είναι ο βαθμός του πίνακα. Αν το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι πραγματικό, τότε οι ιδιοτιμές του λ_j $j = 1, \dots, m$ περικλείονται μέσα σε μια ελλειπτική τροχιά και ισχύει:

$$\frac{(x - \frac{tr(A)}{m})^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} \leq 1 \quad (2.9)$$

όπου

$$r_x = \left(\frac{m-1}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} (c(A) + tr(A^2) - \frac{2tr^2 A}{m})^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

$$r_y = \left(\frac{m-1}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} (c(A) - tr(A^2))^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

$$c(A) = ((\|A\|_F^2 - \frac{tr^2(A)}{n})^2 - \frac{1}{2} \|A^*A - AA^*\|_F^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{tr^2(A)}{n} \quad (2.12)$$

και $tr(A)$ συμβολίζει το ίχνος του πίνακα A , όπως αυτό ορίστηκε στην (1.18).

Σχόλιο 2.2.20

Στο παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι οι τύποι που συντελούν στο σχηματισμό της ελλειπτικής τροχιάς είναι κυρίως συναρτήσεις του ίχνους του πίνακα A και όχι συναρτήσεις των αθροισμάτων $R_i(A)$, $R'_i(A)$, $R'_{ij}(A)$, όπως αυτό συνέβαινε στις προαναφερόμενες μελέτες των αντίστοιχων ερευνητών.

Παράδειγμα 2.2.21

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 2.2.4. Να βρεθούν οι ελλειπτικές περιοχές των πινάκων A, B και να σχεδιαστούν τα χωρία όπου περικλείονται οι ιδιοτιμές τους.

Ωστόσο για την κατασκευή των ελλειπτικών περιοχών καθώς και για τον υπολογισμό των ποσοτήτων r_x, r_y και $c(A)$ χρησιμοποιήσαμε το μαθηματικό

προγραμματιστικό πακέτο Matlab και τον Κώδικα A.4 του Παραρτήματος A, από όπου έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

- i). Για τον πίνακα A και για $m = 4$ ($rank(A) = m = n = 4$) οι (1.18), (2.10), (2.11) και (2.12) δίνουν αντίστοιχα τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$tr(A) = 0$$

$$tr(A^2) = 30$$

$$r_x = 4.7434$$

$$r_y = 0$$

$$c(A) = 30$$

Επειδή $r_y = 0$ διαπιστώνουμε ότι δεν εφικτό να δημιουργηθεί ελλειπτική τροχιά για τον πίνακα A , καθώς αυτή εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα $[-r_x, r_x] = [-4.7434, 4.7434]$.

- ii). Όμοια για τον πίνακα B και για $m = 4$, ($rank(B) = m = n = 4$) από τις (1.18) για το ίχνος και τις (2.10),(2.11),(2.12) αντίστοιχα προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$tr(B) = 3$$

$$tr(B^2) = 33$$

$$r_x = 5.6310$$

$$r_y = 2.9404$$

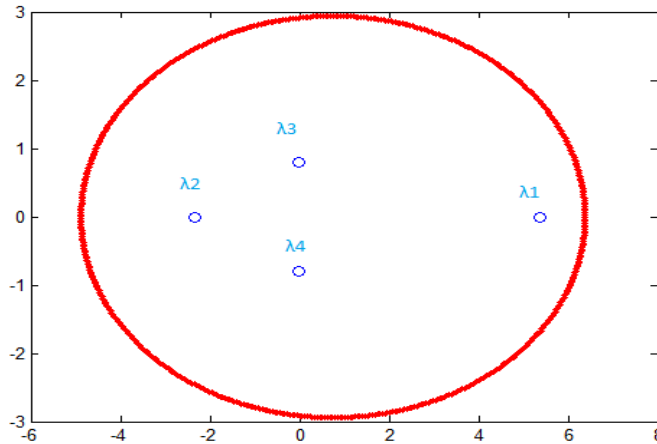
$$c(B) = 56.0558$$

Στη συνέχεια έχοντας υπολογίσει τις ποσότητες r_x, r_y και $c(B)$ από την (2.9) μπορούμε να σχηματίσουμε την ελλειπτική περιοχή του πίνακα B , η οποία είναι η εξής:

$$\frac{(x - 0.75)^2}{(5.6310)^2} + \frac{y^2}{(2.9404)^2} \leq 1$$

Επιπλέον η παραπάνω ελλειπτική περιοχή αναπαρίσταται στο επόμενο διάγραμμα, όπου και αναμένεται σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.18 να περικλείονται οι ιδιοτιμές του πίνακα B :

Υλοποιώντας τον Κώδικα A.4 του Παραρτήματος A σχεδιάζεται η ελλειπτική περιοχή του Σχήματος 2.9, όπου οι ιδιοτιμές του πίνακα B σημειώνονται με “ο”.



Σχήμα 2.9: Ελλειπτική τροχιά και ιδιοτιμές πίνακα B

Σχόλιο 2.2.22

Στο Σχήμα 2.9 διακρίνουμε ότι πράγματι οι ιδιοτιμές του πίνακα B , οι οποίες είναι

$$\lambda_1 = 5.3603, \quad \lambda_2 = -2.3529, \quad \lambda_{3,4} = -0.0037 \pm 0.7964i,$$

εντοπίζονται μέσα στην ελλειπτική περιοχή

$$\frac{(x-0.75)^2}{(5.6310)^2} + \frac{y^2}{(2.9404)^2} \leq 1,$$

της οποίας ο οριζόντιος άξονάς της κυμαίνεται στο διάστημα $[-4.8810, 6.3810]$ και ο κάθετος άξονάς της στο διάστημα $[-2.9404, 2.9404]$, αντίστοιχα.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Σε αρκετές εφαρμογές, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, χρησιμοποιούνται μη αρνητικοί πίνακες για την αναπαράσταση και μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλες ερευνητικές περιοχές. Γι' αυτό το λόγο η μελέτη τους καθίσταται άκρως απαραίτητη και συνδέεται άμεσα με τη θεωρία της Φασματικής Ανάλυσης.

Ειδικότερα, η εύρεση της φασματικής ακτίνας αποτελεί μία σπουδαία και χρήσιμη πληροφορία για την επεξεργασία και την ανάλυση των μη αρνητικών πινάκων. Αξιοσημείωτο αποτελεί και το γεγονός ότι πολλοί επιστήμονες επικεντρώθηκαν στη δημιουργία καινοτόμων μεθόδων, οι οποίες συμβάλλουν στον εντοπισμό αλλά και στον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας, [2, 7-9, 13-15, 17, 20, 22, 24, 25].

Βασικό χαρακτηριστικό και αυτών των μεθόδων είναι η εκτίμηση προσεγγιστικών φραγμάτων φασματικής ακτίνας με τη χρήση κυρίως των στοιχείων του πίνακα, όπως είναι το ίχνος του, τα αθροίσματα γραμμών $R_i(A)$ κλπ. και όχι η θεωρία των πολωνύμων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, σε ειδικές περιπτώσεις μεγάλης διάστασης του πίνακα, η φασματική ακτίνα να εντοπίζεται ευκολότερα και έτσι να αποφεύγεται η δύσκολη αλγεβρική επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι σημαντικότερες θεωρίες που συντελούν στον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας και εφαρμόζονται σε παραδείγματα μη αρνητικών πινάκων και πινάκων Fibonacci.

3.1 Φράγματα φασματικής ακτίνας συναρτήσεων $R_i(A), R'_i(A), R''_{ij}(A)$

Ένα θεμελιώδες πρόβλημα που υπάρχει στη Θεωρία της Φασματικής Ανάλυσης είναι ο ακριβής υπολογισμός της φασματικής ακτίνας ενός πίνακα. Μάλιστα σε περιπτώσεις πινάκων μεγάλης διάστασης, όπως είναι ήδη γνωστό, απαιτείται ένα τεράστιο πλήθος πράξεων για την εύρεση της πραγματικής τιμής της. Μια μέθοδος για την επίλυση αυτού του προβλήματος αποτελεί ο εντοπισμός της φασματικής ακτίνας χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του πίνακα και κυρίως τα άθροισμα $R_i(A), R'_i(A), R''_{ij}(A)$.

Για έναν μη αρνητικό πίνακα A οι δύο ανισοτικές σχέσεις (2.1) και (2.2) που διατυπώθηκαν στο Θεώρημα 2.1.1 είναι οι ακόλουθες:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{R_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{R_i(A)\} \quad (3.1)$$

$$\min_{1 \leq j \leq n} \{C_j(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{C_j(A)\} \quad (3.2)$$

όπου $R_i(A), C_j(A)$ είναι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα A (βλέπε, (1.1)) και το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα (βλέπε, (1.2)), αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι τόσο η (3.1) όσο και η (3.2) εμπεριέχει φράγματα (άνω και κάτω) για τη φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα, και κάθε φράγμα εξαρτάται από τα στοιχεία του πίνακα, μιας και τα φράγματα στην (3.1) συνδέονται με το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα (βλέπε, (1.1)) και τα φράγματα στην (3.2) συνδέονται με το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα (βλέπε, (1.2)).

Επειδή αυτά τα φράγματα εξαρτώνται από τα στοιχεία του πίνακα αναρωτιόμαστε αν ένας μη αρνητικός πίνακας πρέπει να έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή (ως προς το πλήθος των μηδέν ή ως προς τη θέση τους στον πίνακα) ώστε το κάτω φράγμα των ανισοτήτων (3.1)-(3.2) να είναι θετικός αριθμός. Ή μήπως το κάτω φράγμα των (3.1)-(3.2) εξαρτάται μόνο από το φάσμα του πίνακα και δεν μπορεί να αντλείται η σχετική πληροφορία από τη μορφή του πίνακα; Γιατί είναι φανερό ότι, όπως παρουσιάζεται και στο επόμενο παράδειγμα, αν οι πίνακες δεν έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή η φασματική ακτίνα τους είναι διάφορη του μηδενός, στην περίπτωση όπου οι πίνακες έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή παρατηρούμε ότι ορισμένοι έχουν φασματική ακτίνα διάφορη του μηδενός και ορισμένοι όχι.

Παράδειγμα 3.1.1

Να βρεθεί η φασματική ακτίνα των ακόλουθων πινάκων:

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iii). } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i). Για την εύρεση της φασματικής ακτίνας και των ιδιοτιμών του μη αρνητικού πίνακα A , επιλύουμε την εξίσωση $\det(A - \lambda I) = 0$ ως εξής:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0 \text{ και } \lambda_3 = 2.$$

Για τον μη αρνητικό πίνακα A παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A) \equiv \lambda_3 = 2$, δηλαδή αυτή είναι πραγματικός θετικός αριθμός.

Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι ο πίνακας A είναι μη-αναγώγιμος, όπως αποδείχθηκε στο (i) του Παραδείγματος 1.3.7.

- ii). Όμοια για τον πίνακα B επιλύουμε την εξίσωση $\det(B - \lambda I) = 0$ ως εξής:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -\sqrt{3}, \lambda_2 = 0 \text{ και } \lambda_3 = \sqrt{3}.$$

Για τον μη αρνητικό πίνακα B παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A) \equiv \lambda_3 = \sqrt{3}$, δηλαδή αυτή είναι πραγματικός θετικός αριθμός.

Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι ο πίνακας B είναι μη-αναγώγιμος, η απόδειξη βασίζεται στην Πρόταση 1.1.4.

- iii). Όμοια για τον πίνακα C επιλύουμε την εξίσωση $\det(C - \lambda I) = 0$ ως εξής:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Για τον μη αρνητικό πίνακα C παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) \equiv \lambda_3 = 0$.

Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι ο πίνακας C είναι αναγωγίμος, η απόδειξη βασίζεται στην Πρόταση 1.1.4. \square

Σχόλιο 3.1.2

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη μελέτη του φάσματος των πινάκων του Παραδείγματος 3.1.1, φαίνεται ότι όλοι οι πίνακες είχαν το 0 τόσο ως στοιχείο του πίνακα όσο και στο φάσμα τους. Ωστόσο μόνο στην (iii) περίπτωση για τον πίνακα C ισχύει $\rho(C) = 0$, δηλαδή το ερώτημα «για ποιους πίνακες ισχύει $\rho(A) \neq 0$ » φαίνεται ότι δεν σχετίζεται με το φάσμα του πίνακα αλλά με τα στοιχεία του και μάλιστα από το άθροισμα των γραμμών του πίνακα. Επιπλέον, από τα παραδείγματα υποψιαζόμαστε ότι το προαναφερθέν ερώτημα δεν σχετίζεται με την αναγωγιμότητα των πινάκων.

Συγκεκριμένα,

- για τον πίνακα A , το άθροισμα κάθε γραμμής ισούται με ένα θετικό αριθμό, επειδή ισχύει: $R_1(A) = 1$, $R_2(A) = 3$ και $R_3(A) = 2$, και έχει ως φασματική ακτίνα το θετικό αριθμό 2.
- για τον πίνακα B , το άθροισμα κάθε γραμμής ισούται με ένα θετικό αριθμό, επειδή ισχύει: $R_1(B) = 2$, $R_2(B) = 2$ και $R_3(B) = 1$, και έχει ως φασματική ακτίνα το θετικό αριθμό $\sqrt{3}$.
- για τον πίνακα C , το άθροισμα κάθε γραμμής ισούται με ένα θετικό αριθμό, επειδή ισχύει: $R_1(C) = 0$, $R_2(C) = 1$ και $R_3(C) = 1$, και έχει ως φασματική ακτίνα το 0.

Συνεπώς στις δύο περιπτώσεις πινάκων του Παραδείγματος 3.1.1 η φασματική ακτίνα είναι θετική, γεγονός που σχετίζεται με το άθροισμα των γραμμών των αντίστοιχων πινάκων, συνθήκη που διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση, δίνοντάς μας μια πρώτη εκτίμηση σχετικά με την τιμή της φασματικής ακτίνας του πίνακα. Τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 3.1.1 και τα παραπάνω Σχόλια 3.1.2 επιβεβαιώνει η πρόταση που ακολουθεί, την απόδειξη της οποίας ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει [12, Corollary 8.1.25].

Πρόταση 3.1.3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R}^+)$ και $R_i(A) > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε $\rho(A) > 0$.

Στη συνέχεια διατυπώνεται το θεμελιώδες θεώρημα το οποίο είναι γνωστό ως **Γενικευμένο Θεώρημα των Perron-Frobenius** και η πλήρης απόδειξή του δίνεται [22], [12, Theorem 8.4.4], το οποίο μας δίνει πληροφορία για τη φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού και μη-αναγωγίμου πίνακα.

Θεώρημα 3.1.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R}^+)$ να είναι ένας μη-αναγωγίμος πίνακας. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- I. $\rho(A) > 0$
- II. $\rho(A) > 0$ είναι η ιδιοτιμή του πίνακα A με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 1, δηλαδή $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A
- III. Υπάρχει διάνυσμα με θετικά στοιχεία ως συντεταγμένες ($x > 0$) τέτοιο ώστε να ισχύει $Ax = \rho(A)x$

Σχόλιο 3.1.5

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή που είναι ένας πραγματικός θετικός αριθμός και μάλιστα έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 1, δηλαδή είναι απλή ιδιοτιμή.

Παράδειγμα 3.1.6

Να εξεταστεί αν ισχύει το Θεώρημα 3.1.4 στους ακόλουθους μη αρνητικούς πίνακες:

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{iii). } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- i). Για την επαλήθευση του Θεωρήματος 3.1.4 απαιτείται να ελέγξουμε αν ο πίνακας A είναι μη-αναγωγίμος.

Τον έλεγχο της αναγωγιμότητας τον κάνουμε εφαρμόζοντας την Πρόταση 1.1.4, από όπου έχουμε:

$$(I + A)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} > 0$$

Συνεπώς, ο μη αρνητικός πίνακας A είναι μη-αναγωγίμος, άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.1.4, από όπου καταλαβαίνουμε ότι η ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο μέτρο είναι θετικός πραγματικός αριθμός και είναι και απλή ιδιοτιμή, συνεπώς αυτή η ιδιοτιμή ταυτίζεται με τη φασματική ακτίνα του πίνακα A . Επιπλέον, $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή.

Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα, θα διαπιστώσουμε ότι όλες είναι διακεκριμένες, καθώς ισχύει $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = 2$, και ακόμη ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) \equiv \lambda_3 = 2$, προφανώς απλή ιδιοτιμή.

- ii). Ομοια, για τον πίνακα B ελέγχουμε την αναγωγιμότητα. Έτσι έχουμε:

$$(I + B)^3 = \begin{pmatrix} 18 & 144 & 17 & 32 \\ 2 & 28 & 3 & 12 \\ 18 & 64 & 9 & 16 \\ 8 & 124 & 14 & 28 \end{pmatrix} > 0$$

Συνεπώς, ο μη αρνητικός πίνακας B είναι μη-αναγωγίμος, άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.1.4, από όπου καταλαβαίνουμε ότι η ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο μέτρο είναι θετικός πραγματικός αριθμός και είναι και απλή ιδιοτιμή, συνεπώς αυτή η ιδιοτιμή ταυτίζεται με τη φασματική ακτίνα του πίνακα B . Επιπλέον, $\rho(B)$ είναι απλή ιδιοτιμή.

Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα, θα διαπιστώσουμε ότι όλες είναι διακεκριμένες, καθώς ισχύει $\lambda_1 = -3.2217$, $\lambda_2 = -0.1824$, $\lambda_3 = 1$ και $\lambda_4 = 3.4040$, και ακόμη ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(B) \equiv \lambda_4 = 3.4040$, η οποία είναι απλή ιδιοτιμή.

- iii). Ανάλογα ενεργούμε και για τον πίνακα C , όπου αρχικά ελέγχουμε την αναγωγιμότητα και έχουμε:

$$(I + C)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \geq 0$$

Επομένως παρατηρούμε ότι ο πίνακας C είναι αναγώγιμος, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.1.4, το οποίο σημαίνει ότι ένα ή περισσότερα από τα αποτελέσματα του θεωρήματος δεν ισχύουν.

Πράγματι, αν θελήσουμε να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα, θα διαπιστώσουμε ότι αυτές είναι : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 1$. Από εδώ καταλαβαίνουμε ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(C) \equiv \lambda_2 = \lambda_3 = 1 > 0$, και προφανώς η $\rho(C)$ δεν είναι απλή ιδιοτιμή, επειδή η πολλαπλότητα της φασματικής ακτίνας του C είναι ίση με 2. \square

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε σε ένα πρώτο κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα, το οποίο σχετίζεται με τα διαγώνια στοιχεία ενός πίνακα και διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση και οφείλεται στον Frobenius [9]. Η πλήρης απόδειξη της πρότασης μπορεί να αναζητηθεί [12, Corollary 8.1.20].

Θεώρημα 3.1.7

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Αν a_{ii} είναι το διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A και $\rho(A)$ η φασματική του ακτίνα, τότε ισχύει:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \{a_{ii}\} \leq \rho(A)$$

Παράδειγμα 3.1.8

Να βρεθεί ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα των ακόλουθων μη αρνητικών πινάκων³ εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.7:

$$i). A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ii). B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- i). Ο μη αρνητικός πίνακας A αναφέρεται [25] και οι ιδιοτιμές του είναι οι ακόλουθες:

³ Οι μη αρνητικοί πίνακες A, B του Παραδείγματος 3.1.8 θα χρησιμοποιηθούν σε όλα τα παραδείγματα της Ενότητας 3.1, προκειμένου στο τέλος αυτής να γίνει η σύγκριση των φραγμάτων της φασματικής ακτίνας που υπολογίζονται από κάθε θεώρημα, (βλέπε, Πίνακα 3.1 και Σχόλιο 3.1.30).

$$\lambda_1 = 4.6458, \quad \lambda_2 = -0.6458 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -2$$

Προφανώς $\rho(A) = 4.6458$.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι $\max_{1 \leq i \leq 4} \{a_{ii}\} = 0$.

Επομένως επαληθεύεται το Θεώρημα 3.1.7, επειδή ισχύει

$$0 < \rho(A) = 4.6458.$$

- ii). Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας B αντιστοιχεί σε έναν μη αρνητικό γενικευμένο πίνακα Fibonacci με τις ακόλουθες ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 5.3603, \quad \lambda_2 = -2.3529, \quad \lambda_{3,4} = -0.0037 \pm 0.7964i$$

Το μέτρο των ιδιοτιμών είναι :

$$|\lambda_1| = 5.3603, \quad |\lambda_2| = 2.3529, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = 0.7964$$

Προφανώς $\rho(B) = 5.3603$.

Ακόμη διαπιστώνουμε ότι $\max_{1 \leq i \leq 4} \{b_{ii}\} = 3$.

Συνεπώς το Θεώρημα 3.1.7 επαληθεύεται, επειδή ισχύει

$$3 < \rho(B) = 5.3603. \quad \square$$

Πρόταση 3.1.9

Έστω $A \in M_n(R^+)$ να είναι ένας μη-αναγωγίμος πίνακας. Τότε για τη φασματική ακτίνα ισχύει

$$\rho(A) > 0.$$

Απόδειξη:

Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας A είναι μη-αναγωγίμος, σύμφωνα με τον Ορισμό 1.1.3 πρέπει όλοι οι block υποπίνακες της διαμέρισης του μη-αναγωγίμου πίνακα να είναι μη μηδενικοί πίνακες και επιπλέον $A \geq 0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, ισχύει $R_i(A) > 0$, οπότε $\rho(A) > 0$, (βλέπε, Πρόταση 3.1.3).

□

Παράδειγμα 3.1.10

Να εξεταστεί αν ισχύει η Πρόταση 3.1.9 για τους μη αρνητικούς πίνακες A, B, C του Παραδείγματος 3.1.6.

Αρχικά παρατηρούμε ότι οι πίνακες A, B είναι μη-αναγωγίμοι (βλέπε, την απόδειξη στο (i)-(ii) του Παραδείγματος 3.1.6), ενώ ο πίνακας C είναι αναγωγίμος (βλέπε, την

απόδειξη στο (iii) του Παραδείγματος 3.1.6), οπότε η Πρόταση 3.1.9 δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Επειδή

$$\rho(A) \equiv \lambda_3 = 2 > 0, \quad \text{και} \quad \rho(B) \equiv \lambda_4 = 3.4040 > 0,$$

για τους πίνακες A, B το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.1.9 επαληθεύεται. \square

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2, το Θεώρημα 2.1.1 δίνει τη δυνατότητα να έχουμε μια πρώτη πληροφορία σχετικά με το διάστημα στο οποίο εντοπίζεται η φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα. Επίσης αξίζει να σημειώσουμε ότι η (3.1)-(3.2) αποτέλεσαν το έναυσμα σε αρκετούς ερευνητές για τη αναζήτηση βέλτιστων τεχνικών που αφορούν την εύρεση ακριβέστερων φραγμάτων φασματικής ακτίνας. Στην ομάδα των μεθόδων που εντοπίζουν φράγματα για τη φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα εντάσσεται και η προσέγγιση του **Brauer**, η οποία διατυπώνεται στο παρακάτω θεώρημα. Μάλιστα το συγκεκριμένο θεώρημα είναι γνωστό στην επιστημονική κοινότητα ως **Θεώρημα Brauer** και για την πλήρη απόδειξή του ο αναγνώστης παραπέμπεται [7, Theorem 1, Theorem 2].

Θεώρημα 3.1.11

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\text{I.} \quad \rho(A) \leq \frac{1}{2} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ j \neq i}} \mathbf{B}_{ij}(A) \quad (3.3)$$

$$\text{II.} \quad \rho(A) \geq \frac{1}{2} \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ j \neq i}} \mathbf{B}_{ij}(A) \quad (3.4)$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{B}_{ij}(A) = \mathbf{a}_{ii} + \mathbf{a}_{jj} + \sqrt{(\mathbf{a}_{ii} - \mathbf{a}_{jj})^2 + 4\mathbf{R}'_i(A)\mathbf{R}'_j(A)} \quad (3.5)$$

και $\mathbf{R}'_i(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των μη διαγωνίων στοιχείων της i -γραμμής του πίνακα A , για $1 \leq i \leq n$, όπως αυτό ορίζεται στην (1.3).

Παράδειγμα 3.1.12

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.11 (Brauer) να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

- i). Για να εντοπίσουμε τα όρια μέσα στα οποία περικλείεται η φασματική ακτίνα του πίνακα A θα πρέπει αρχικά να εκτιμήσουμε τις επόμενες ποσότητες $R_i(A)$ και $R'_i(A)$, όπως αυτές ορίστηκαν στις (1.1) και (1.3), οι οποίες είναι:

$$R_1(A) = 3 \text{ και } R_2(A) = R_3(A) = R_4(A) = 5$$

Τα αθροίσματα γραμμών εκτός των διαγωνίων στοιχείων $R'_i(A)$ σύμφωνα με την (1.3) είναι:

$$R'_1(A) = R_1(A) - \alpha_{11} = 3 - 0 = 3$$

και

$$R'_2(A) = R'_3(A) = R'_4(A) = 5$$

Επιπλέον για κάθε $1 \leq i, j \leq 4$ με $j \neq i$ υπολογίζουμε τις ποσότητες $B_{ij}(A)$, όπως αυτή ορίζεται στην (3.5).

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, B_{12}(A) = \alpha_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4R'_1(A)R'_2(A)} = 7.7460$$

$$j = 3, B_{13}(A) = 7.7460$$

$$j = 4, B_{14} = 7.7460$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, B_{21} = 7.7460$$

$$j = 3, B_{23} = 10$$

$$j = 4, B_{24} = 10$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, B_{31} = 7.7460$$

$$j = 2, B_{32} = 10$$

$$j = 4, B_{34} = 10$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, B_{41} = 7.7460$$

$$j = 2, B_{42} = 10$$

$$j = 3, B_{43} = 10$$

Επομένως από τις (3.3) και (3.4) προκύπτουν τα αντίστοιχα άνω και κάτω φράγματα για τη φασματική ακτίνα:

$$\frac{1}{2} \min_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ j \neq i}} B_{ij}(A) \leq \rho(A) \leq \frac{1}{2} \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ j \neq i}} B_{ij}(A)$$

$$3.8730 \leq \rho(A) \leq 5$$

Τέλος υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A είναι $\rho(A) = 4.6458$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.8 (i)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.11, δηλαδή, ότι $\rho(A) \in [3.8730, 5]$.

- ii). Παρόμοια διαδικασία εφαρμόζουμε και για τον πίνακα B . Έτσι για τα αθροίσματα γραμμών $R_i(B)$ του πίνακα B έχουμε:

$$R_1(B) = 25 \text{ και } R_2(B) = R_3(B) = R_4(B) = 1$$

Τα αθροίσματα γραμμών εκτός των διαγωνίων στοιχείων $R'_i(B)$ σύμφωνα με την (1.3) είναι:

$$R'_1(B) = R_1(B) - \alpha_{11} = 25 - 3 = 22$$

και

$$R'_2(B) = R'_3(B) = R'_4(B) = 1$$

Επίσης για κάθε $1 \leq i, j \leq 4$ με $j \neq i$ η ποσότητα $B_{ij}(B)$ παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, B_{12} = 12.8489$$

$$j = 3, B_{13} = 12.8489$$

$$j = 4, B_{14} = 12.8489$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, B_{21} = 12.8489$$

$$j = 3, B_{23} = 2$$

$$j = 4, B_{24} = 2$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, B_{31} = 12.8489$$

$$j = 2, B_{32} = 2$$

$$j = 4, B_{34} = 2$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, B_{41} = 12.8489$$

$$j = 2, B_{42} = 2$$

$$j = 3, B_{43} = 2$$

Συνεπώς για τον πίνακα B από τις (3.3) και (3.4) προκύπτουν τα προκύπτουν τα αντίστοιχα άνω και κάτω φράγματα για τη φασματική ακτίνα:

$$1 \leq \rho(B) \leq 6.4244$$

Τέλος υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B είναι $\rho(B) = 5.3603$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.8 (ii)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.11, δηλαδή, ότι $\rho(B) \in [1, 6.4244]$.

Στο Παράρτημα Β δίνεται ο Κώδικας Β.1, ο οποίος υλοποιείται προκειμένου να υπολογιστούν τα άνω και κάτω φράγματα για τη φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα, τα οποία προσδιορίζονται σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.11 (Brauer). Ο συγκεκριμένος κώδικας υλοποιήθηκε και υπολογίστηκαν οι τιμές των πινάκων A και B . □

Μία εξίσου ενδιαφέρουσα προσέγγιση, που διαδέχεται εκείνη του Brauer και ίσως βελτιώνει τα φράγματα της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα, αποτελεί η προσέγγιση του **Melman**. Συγκεκριμένα η μελέτη του είναι ανάλογη με αυτή του Brauer και παρουσιάζεται στο παρακάτω θεώρημα, το οποίο θεωρείται γνωστό ως **Θεώρημα Melman**. Η απόδειξή του δίνεται [18, Theorem 2.1].

Θεώρημα 3.1.13

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$I. \quad \rho(A) \geq \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{ M_{ij}(A) \} \right\} \quad (3.6)$$

$$II. \quad \rho(A) \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{ M_{ij}(A) \} \right\} \quad (3.7)$$

όπου

$$M_{ij}(A) = a_{ii} + a_{jj} + R_{ij}''(A) + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj} + R_{ij}''(A))^2 + 4a_{ij}R_j'(A)} \quad (3.8)$$

και $R_{ij}''(A)$ συμβολίζει το άθροισμα των μη διαγωνίων στοιχείων της i - γραμμής του πίνακα A εκτός του στοιχείου a_{ij} , για $1 \leq i, j \leq n$, όπως στην (1.4).

Παράδειγμα 3.1.14

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.13 (Melman) να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

Για την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.13 (Melman) αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες $R_i(A)$ και $R'_i(A)$. Επιπλέον, για κάθε $1 \leq i, j \leq 4$ με $j \neq i$ υπολογίζουμε τις ποσότητες $R''_{ij}(A)$ και $M_{ij}(A)$ από τις (1.4) και (3.8), αντίστοιχα.

Τέλος για να καταλήξουμε στην εύρεση των φραγμάτων που δίνονται στις (3.6) και (3.7) χρειάζεται για κάθε $i = 1, 2, \dots, 4$ να βρούμε τις ποσότητες $\max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(A)\}$ και $\min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(A)\}$.

Επίσης για τον υπολογισμό των παραπάνω ποσοτήτων καθώς και των φραγμάτων που δίνονται στις (3.6) και (3.7) μπορεί να υλοποιηθεί ο Κώδικας B.2 του Παραρτήματος B, ο οποίος δημιουργήθηκε για την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.13 (Melman) για οποιονδήποτε μη αρνητικό πίνακα.

- i). Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο Παράδειγμα 3.1.12, για τον πίνακα A ισχύουν τα ακόλουθα αθροίσματα :

$$R_1(A) = 3, R_2(A) = R_3(A) = R_4(A) = 5$$

$$R'_1(A) = 3, R'_2(A) = R'_3(A) = R'_4(A) = 5$$

Επίσης για τις ποσότητες $R''_{ij}(A)$ και $M_{ij}(A)$, όπως αυτές ορίζονται αντίστοιχα στις (1.4) και (3.8), προκύπτουν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, R''_{12}(A) = R'_1 - a_{12} = 3 - 1 = 2,$$

$$M_{12}(A) = a_{11} + a_{22} + R''_{12}(A) + \sqrt{(a_{11} - a_{22} + R''_{12}(A))^2 + 4a_{12}R'_2(A)} = 6.8990$$

$$j = 3, R''_{13}(A) = 2, M_{13}(A) = 6.8990$$

$$j = 4, R''_{14}(A) = 2, M_{14}(A) = 6.8990$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{21}(A) = 4, M_{21}(A) = 9.2915$$

$$j = 3, R''_{23}(A) = 3, M_{23}(A) = 10$$

$$j = 4, R''_{24}(A) = 3, M_{24}(A) = 10$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{31}(A) = 4, M_{31}(A) = 9.2915$$

$$j = 2, R''_{32}(A) = 3, M_{32}(A) = 10$$

$$j = 4, R''_{34}(A) = 3, M_{34}(A) = 10$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{41}(A) = 4, M_{41}(A) = 9.2915$$

$$j = 2, R''_{42}(A) = 3, M_{42}(A) = 10$$

$$j = 3, R''_{43}(A) = 3, M_{43}(A) = 10$$

Επιπρόσθετα ισχύουν:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$\min_{2 \leq j \leq 4} \{M_{ij}(A)\} = 6.8990 \quad \text{και} \quad \max_{2 \leq j \leq 4} \{M_{ij}(A)\} = 6.8990$$

Για $i = 2, 3, 4$ έχουμε:

$$\min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(A)\} = 9.2915 \quad \text{και} \quad \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(A)\} = 10$$

Επομένως από τις (3.6) και (3.7) προκύπτουν τα αντίστοιχα άνω και κάτω φράγματα για τη φασματική ακτίνα του πίνακα A :

$$\frac{1}{2} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(A)\} \leq \rho(A) \leq \frac{1}{2} \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(A)\}$$

$$3.4495 \leq \rho(A) \leq 4.6458$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A είναι $\rho(A) = 4.6458$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.8 (i)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.13, δηλαδή, ότι $\rho(A) \in [3.4495, 4.6458]$.

- ii). Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B . Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο Παράδειγμα 3.1.12, για τον πίνακα B προκύπτουν τα ακόλουθα αθροίσματα:

$$R_1(B) = 25 \quad \text{και} \quad R_2(B) = R_3(B) = R_4(B) = 1,$$

και

$$R'_1(B) = 22, \quad R'_2(B) = R'_3(B) = R'_4(B) = 1.$$

Όμοια οι ποσότητες $R''_{ij}(B)$ και $M_{ij}(B)$ από τις (1.4) και (3.8), υπολογίζονται ως εξής:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$j = 2, R''_{12}(B) = 10, M_{12}(B) = 27.7309$$

$$j = 3, R''_{13}(B) = 20, M_{13}(B) = 46.1733$$

$$j = 4, R''_{14}(B) = 14, M_{14}(B) = 34.9165$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{21}(B) = 0, M_{21}(B) = 12.8489$$

$$j = 3, R''_{23}(B) = 1, M_{23}(B) = 2$$

$$j = 4, R''_{24}(B) = 1, M_{24}(B) = 2$$

Για $i = 3$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{31}(B) = 1, M_{31}(B) = 6$$

$$j = 2, R''_{32}(B) = 0, M_{32}(B) = 2$$

$$j = 4, R''_{34}(B) = 1, M_{34}(B) = 2$$

Για $i = 4$ έχουμε:

$$j = 1, R''_{41}(B) = 1, M_{41}(B) = 6$$

$$j = 2, R''_{42}(B) = 1, M_{42}(B) = 2$$

$$j = 3, R''_{43}(B) = 0, M_{43}(B) = 2$$

Επιπρόσθετα ισχύουν:

Για $i = 1$ έχουμε:

$$\min_{2 \leq j \leq 4} \{M_{ij}(B)\} = 27.7309 \quad \text{και} \quad \max_{2 \leq j \leq 4} \{M_{ij}(B)\} = 46.1733$$

Για $i = 2$ έχουμε:

$$\min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(B)\} = 2 \quad \text{και} \quad \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(B)\} = 12.8489$$

Για $i = 3, 4$ έχουμε:

$$\min_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(B)\} = 2 \quad \text{και} \quad \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \{M_{ij}(B)\} = 6$$

Επομένως από τις παραπάνω τιμές και τις (3.6) και (3.7) συμπεραίνουμε ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B περικλείεται από τα ακόλουθα φράγματα:

$$3 \leq \rho(B) \leq 13.8655$$

Τέλος παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B βρίσκεται μέσα στο διάστημα $[3, 13.8655]$, καθώς ισχύει $\rho(B) = 5.3603$. \square

Μία επίσης σημαντική συνεισφορά στον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας αποτελεί η προσέγγιση των ερευνητών **Xing Duan** και **Bo Zhou** και παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα, γνωστό ως **Θεώρημα Duan-Zhou**. Συγκεκριμένα, η μελέτη τους αναφέρεται στην αναζήτηση πλησιέστερων φραγμάτων (άνω και κάτω) στην τιμή της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα και βασίζεται κυρίως στη χρήση των αθροισμάτων των γραμμών R_i του μη αρνητικού πίνακα. Ο αναγνώστης την πλήρη απόδειξη του θεωρήματος τη μελετά [8, Theorem 2.1, Theorem 2.2].

Θεώρημα 3.1.15

Έστω $A \in M_n(R^+)$ με $R_1(A) \geq R_2(A) \dots \geq R_n(A)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) Έστω M να είναι το μεγαλύτερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A και N το μεγαλύτερο μη διαγώνιο στοιχείο του για το οποίο ισχύει $N > 0$.

Τότε

$$\rho(A) \leq \min_{1 \leq l \leq n} \{\Phi_l(A)\} \quad (3.9)$$

όπου για $l = 1$ είναι

$$\Phi_1(A) = R_1(A) \quad (3.10)$$

και για $2 \leq l \leq n$ είναι

$$\Phi_l(A) = \frac{R_l(A) + M - N + \sqrt{(R_l(A) - M + N)^2 + 4N \sum_{i=1}^{l-1} (R_i(A) - R_l(A))}}{2} \quad (3.11)$$

- 2) Έστω S το μικρότερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A και T το μικρότερο μη διαγώνιο στοιχείο του.

Τότε

$$\rho(A) \geq \Psi_n(A) \quad (3.12)$$

όπου

$$\Psi_n(A) = \frac{R_n(A) + S - T + \sqrt{(R_n(A) - S + T)^2 + 4T \sum_{i=1}^{n-1} (R_i(A) - R_n(A))}}{2} \quad (3.13)$$

Παράδειγμα 3.1.16

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.15 (Duan-Zhou) να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

Επίσης ο αναγνώστης για την εύρεση των φραγμάτων της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B του Παραδείγματος 3.1.16 μπορεί να χρησιμοποιήσει τον Κώδικα B.3 του Παραρτήματος Β.

Επίσης για τον υπολογισμό των ποσοτήτων $\Phi_l(A)$, $\Psi_n(A)$ καθώς και των φραγμάτων που δίνονται στις (3.9) και (3.12) μπορεί να υλοποιηθεί ο Κώδικας B.3 του Παραρτήματος Β, ο οποίος δημιουργήθηκε για την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.15 για οποιονδήποτε μη αρνητικό πίνακα.

- i). Πριν εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα για τον πίνακα A θα πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει η προϋπόθεση για τα αθροίσματα των γραμμών $R_i(A)$, δηλαδή αν ισχύει $R_1(A) \geq R_2(A) \geq R_3(A) \geq R_4(A)$. Επειδή $R_1(A) = 3$ και $R_2(A) = R_3(A) = R_4(A) = 5$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.14 (i)), προφανώς δεν ισχύει η ζητούμενη διάταξη. Χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάθεσης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

προκύπτει ο ακόλουθος όμοιος πίνακας του A ,

$$A_P = PAP^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή τα αθροίσματα γραμμών του A_P είναι:

$$R_1(A_P) = R_2(A_P) = R_3(A_P) = 5 \text{ και } R_4(A_P) = 3$$

προφανώς ισχύει $R_1(A_P) \geq R_2(A_P) \geq R_3(A_P) \geq R_4(A_P)$, συνεπώς το Θεώρημα 3.1.15 μπορεί να εφαρμοστεί για τον πίνακα A_P .

Επίσης χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Θεωρήματος Duan-Zhou στον πίνακα A_P έχουμε: $M = 0$, $N = 2$, $S = 0$ και $T = 1$.

Ακολουθώντας για τον πίνακα A ο οποίος είναι όμοιος με τον πίνακα A_P , υπολογίζουμε από τις (3.10) και (3.11) τις ποσότητες $\Phi_l(A_P)$ για $1 \leq l \leq 4$ και από την (3.13) την $\Psi_n(A_P)$.

Για $l = 1$ από την (3.10) έχουμε

$$\Phi_1(A_P) = R_1(A_P) = 5.$$

Από την (3.11) και για $l = 2, 3, 4$ έχουμε αντίστοιχα:

$$l = 2, \quad \Phi_2(A_P) = \frac{R_2(A_P) + M - N + \sqrt{(R_2(A_P) - M + N)^2 + 4N(R_1(A_P) - R_2(A_P))}}{2} = 5$$

$$l = 3, \quad \Phi_3(A_P) = 5$$

$$l = 4, \quad \Phi_4(A_P) = 4.7720$$

Συνεπώς, από τις παραπάνω τιμές και την (3.9) καταλήγουμε ότι

$$\rho(A_P) \leq 4.7720$$

Επίσης από την (3.13) έχουμε $\Psi_4(A_P) = 4.1623$ και άρα από την (3.12) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(A_P) \geq 4.1623.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.15 η φασματική ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα A_P κυμαίνεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$4.1623 \leq \rho(A_P) \leq 4.7720$$

Επειδή οι πίνακες A και A_P είναι όμοιοι ισχύει $\rho(A) = \rho(A_P)$, συνεπώς τα παραπάνω φράγματα είναι και φράγματα του πίνακα A , δηλαδή

$$4.1623 \leq \rho(A) \leq 4.7720.$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A είναι $\rho(A) = 4.6458$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.8 (i)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.15, δηλαδή, ότι $\rho(A) \in [4.1623, 4.7720]$.

ii). Για τον πίνακα B ενεργούμε ανάλογα προκειμένου να προσδιοριστούν τα όρια μέσα στα οποία κυμαίνεται η φασματική ακτίνα του.

Αρχικά διακρίνουμε ότι ικανοποιείται η διάταξη

$$R_1(B) \geq R_2(B) \geq R_3(B) \geq R_4(B),$$

επειδή τα αθροίσματα γραμμών $R_i(B)$ είναι:

$$R_1(B) = 25 \quad \text{και} \quad R_2(B) = R_3(B) = R_4(B) = 1$$

Συνεπώς μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.1.15 χρησιμοποιώντας τις ποσότητες :

$$M = 3, N = 12, S = 0 \text{ και } T = 0.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και για τον πίνακα B τις ποσότητες $\Phi_l(B)$ για $1 \leq l \leq 4$ και $\Psi_n(B)$, όπως αυτές ορίζονται στις (3.10), (3.11) και (3.13) αντίστοιχα.

Για $l = 1$ από την (3.10) έχουμε:

$$\Phi_1(B) = R_1(B) = 25$$

Από την (3.11) και για $l = 2, 3, 4$ έχουμε αντίστοιχα:

$$l = 2, \quad \Phi_2(B) = \frac{R_2(B) + M - N + \sqrt{(R_2(B) - M + N)^2 + 4N(R_1(B) - R_2(B))}}{2} = 13.6918$$

$$l = 3, 4, \quad \Phi_3(B) = \Phi_4(B) = 13.6918$$

Επομένως από την (3.9) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(B) \leq 13.6918.$$

Επίσης από την (3.13) προκύπτει ότι

$$\Psi_4(B) = 1$$

με αποτέλεσμα από την (3.12) να συμπεραίνουμε

$$\rho(B) \geq 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.15 η φασματική ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα B κυμαίνεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$1 \leq \rho(B) \leq 13.6918$$

Τέλος, για τον πίνακα B επαληθεύεται το Θεώρημα 3.1.15, καθώς ισχύει $\rho(B) = 5.3603$, η οποία ανήκει στο διάστημα $[1, 13.6918]$.

□

Σχόλιο 3.1.17

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.1.16 το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας του πίνακα B ισούται με 1, δηλαδή $\Psi_4(B) = 1$. Όπως θα σχολιάσουμε και στη συνέχεια, αυτό συμβαίνει επειδή είναι πίνακας Fibonacci, στον οποίο το μικρότερο διαγώνιο και το μικρότερο μη διαγώνιο στοιχείο του ισούται πάντα με 0, οπότε $S = T = 0$. Τότε, ο τύπος (3.13), που υπολογίζει το κάτω φράγμα του πίνακα ισούται με το άθροισμα της n -γραμμής, $R_n = 1$,

$$\Psi_n = \frac{R_n + S - T + \sqrt{(R_n - S + T)^2 + 4T \sum_{i=1}^{n-1} (R_i - R_n)}}{2} = \frac{R_n + |R_n|}{2} = R_n = 1.$$

Μία μικρή διαφοροποίηση της προσέγγισης των Duan-Zhou αποτελεί αυτή που ανέπτυξαν οι ερευνητές **Danping Huang** και **Lihua You**, η οποία διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα και είναι γνωστό ως **Θεώρημα Huang-You**. Ο αναγνώστης την πλήρη απόδειξη του θεωρήματος τη μελετά [14, Theorem 2, Theorem 4].

Θεώρημα 3.1.18

Έστω $A \in M_n(R^+)$ με $R_1(A) \geq R_2(A) \dots \geq R_n(A)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) Έστω M να είναι το μεγαλύτερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A και N το μεγαλύτερο μη διαγώνιο στοιχείο του.

Τότε

$$\rho(A) \leq \min_{1 \leq l \leq n} \{\Phi'_l(A)\} \quad (3.14)$$

όπου για $l = 1$ είναι

$$\Phi'_1(A) = R_1(A) \quad (3.15)$$

και για $2 \leq l \leq n$ είναι

$$\Phi'_l(A) = \frac{R_l(A) + M - N + \sqrt{(R_l(A) - M + N)^2 + 4N(l-1)(R_1(A) - R_l(A))}}{2} \quad (3.16)$$

- 2) Έστω S να είναι το μικρότερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A και T να είναι το μικρότερο μη διαγώνιο στοιχείο του.

Τότε

$$\rho(A) \geq \max_{1 \leq l \leq n} \{\Psi'_l(A)\} \quad (3.17)$$

όπου για $l = 1$ είναι

$$\Psi'_1(A) = R_n(A) \quad (3.18)$$

και για $2 \leq l \leq n$ είναι

$$\Psi'_l(A) = \frac{R_n(A) + M - N + \sqrt{(R_n(A) - M + N)^2 + 4T(l-1)(R_1(A) - R_n(A))}}{2} \quad (3.19)$$

Επίσης για τον υπολογισμό των ποσοτήτων $\Phi'_l(A)$, $\Psi'_l(A)$, που δίνονται από τις (3.15)-(3.16) και (3.18)-(3.19) καθώς και των φραγμάτων που δίνονται στις (3.14) και (3.17), μπορεί να υλοποιηθεί ο Κώδικας B.4 του Παραρτήματος Β, ο οποίος

δημιουργήθηκε για την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.18 για οποιονδήποτε μη αρνητικό πίνακα.

Παράδειγμα 3.1.19

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα του πίνακα A εφαρμόζοντας

- 1) το Θεώρημα 3.1.18 (Huang-You)
- 2) το Θεώρημα 3.1.15 (Duan-Zhou)

- 1) Για να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.1.18 (Huang-You) για τον πίνακα A , θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε αν ισχύει η προϋπόθεση της διάταξης των αθροισμάτων γραμμών $R_i(A)$, δηλαδή αν ισχύει

$$R_1(A) \geq R_2(A) \geq R_3(A) \geq R_4(A).$$

Επειδή

$$R_1(A) = 8, R_2(A) = R_3(A) = 5 \text{ και } R_4(A) = 3$$

ικανοποιείται η διάταξη των αθροισμάτων γραμμών, δηλαδή

$$R_1(A) > R_2(A) = R_3(A) > R_4(A).$$

Επίσης από τον πίνακα A έχουμε:

$$M = 3, N = 2, S = 0 \text{ και } T = 1.$$

Για $1 \leq l \leq 4$, από (3.15)-(3.16) υπολογίζουμε τις ποσότητες $\Phi'_l(A)$ και από (3.18)-(3.19) υπολογίζουμε τις ποσότητες $\Psi'_l(A)$, προκειμένου να εντοπιστεί ένα άνω και ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα.

Για το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας του πίνακα A προκύπτουν τα ακόλουθα:

Για $l = 1$ από την (3.15) είναι $\Phi'_1(A) = R_1(A) = 8$

Επίσης από την (3.16) για $2 \leq l \leq 4$ έχουμε:

$$l = 2, \Phi'_2(A) = \frac{R_2(A) + M - N + \sqrt{(R_2(A) - M + N)^2 + 4N(2-1)(R_1(A) - R_2(A))}}{2} = 6.1623$$

$$l = 3, \Phi'_3(A) = 7$$

$$l = 4, \Phi'_4(A) = 7.5678$$

Επομένως από την (3.14) προκύπτει ότι

$$\rho(A) \leq 6.1623.$$

Αντίστοιχα για το κάτω φράγμα ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{Για } l = 1 \text{ από την (3.18) είναι } \Psi'_1(A) = R_4(A) = 3$$

Επιπλέον από την (3.19) για $2 \leq l \leq 4$ έχουμε:

$$l = 2, \Psi'_2(A) = \frac{R_4(A)+M-N+\sqrt{(R_4(A)-M+N)^2+4T(2-1)(R_1(A)-R_4(A))}}{2} = 4$$

$$l = 3, \Psi'_3(A) = 3.8284$$

$$l = 4, \Psi'_4(A) = 4.1623$$

Άρα από την (3.17) προκύπτει ότι

$$\rho(A) \geq 4.1623.$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.18 (Huang-You) για τον πίνακα A καταλήγουμε ότι η φασματική του ακτίνα κυμαίνεται μεταξύ των παρακάτω φραγμάτων:

$$4.1623 \leq \rho(A) \leq 6.1623$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι:

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -0.8541, \lambda_3 = 0, \rho(A) \equiv \lambda_4 = 5.8541$$

επιβεβαιώνεται ότι η $\rho(A)$ ανήκει στο διάστημα $[4.1623, 6.1623]$.

- 2) Για να εφαρμοστεί στον ίδιο πίνακα το Θεώρημα 3.1.15 (Duan-Zhou), χρειάζεται να ελεγχθεί αν ισχύει η προϋπόθεση της διάταξης των αθροισμάτων γραμμών $R_i(A)$. Όπως ήδη έχουμε αναφέρει από την εφαρμογή του Θεωρήματος Huang-You, προκύπτει ότι η διάταξη ικανοποιείται και ακόμη για τον πίνακα ισχύουν:

$$M = 3, N = 2, S = 0 \text{ και } T = 1.$$

Στη συνέχεια από τις (3.10)-(3.11) του Θεωρήματος Duan-Zhou υπολογίζουμε αντίστοιχα τις ποσότητες $\Phi_l(A)$ για $1 \leq l \leq 4$ και από την (3.13) την $\Psi_n(A)$.

$$\text{Για } l = 1, \Phi_1(A) = R_1(A) = 8,$$

$$\text{Για } l = 2, \Phi_2(A) = \frac{R_2(A)+M-N+\sqrt{(R_2(A)-M+N)^2+4N(R_1(A)-R_2(A))}}{2} = 6.1623$$

$$\text{Για } l = 3, \Phi_3(A) = 6.1623$$

$$\text{Για } l = 4, \Phi_4(A) = 6.3589$$

Από την (3.9) συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\rho(A) \leq 6.1623$$

Από την (3.13) έχουμε $\Psi_4(A) = 4.6056$, άρα από την (3.12) προκύπτει:

$$\rho(A) \geq 4.6056.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.15 (Duan-Zhou) η φασματική ακτίνα του πίνακα A κυμαίνεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$4.6056 \leq \rho(A) \leq 6.1623$$

Προφανώς επαληθεύεται ότι η $\rho(A)$ ανήκει στο διάστημα $[4.6056, 6.1623]$, επειδή $\rho(A) = 5.8541$.

Στο (1) και (2) για την εύρεση των φραγμάτων της φασματικής ακτίνας του πίνακα A υλοποιήθηκαν οι Κώδικες B.4 και B.3 του Παραρτήματος Β, αντίστοιχα. □

Σχόλιο 3.1.20

Από την εφαρμογή και των Θεωρημάτων 3.1.15 και 3.1.18 στον πίνακα A του Παραδείγματος 3.1.19 παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται ελάχιστα στη μεθοδολογία που χρησιμοποιούν για τον εντοπισμό των άνω και κάτω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας.

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι για $l = 1, 2$ οι τύποι (3.10), (3.15), (3.11) και (3.16) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα για τα άνω φράγματα, επειδή

$$\Phi_1(A) = \Phi'_1(A) = R_1(A)$$

και για $l = 2$ από τις (3.11) και (3.16) προκύπτει ότι

$$\Phi_2(A) = \Phi'_2(A) = \frac{R_2(A)+M-N+\sqrt{(R_2(A)-M+N)^2+4N(R_1(A)-R_2(A))}}{2}$$

Η διαφορά στα αποτελέσματα για τα άνω φράγματα της φασματικής ακτίνας του πίνακα παρατηρείται όταν $l \geq 3$, καθώς οι τύποι (3.11) και (3.16) διαφέρουν στην υπόρριζη ποσότητα. Συγκεκριμένα, για $l \geq 3$ οι τύποι (3.11) και (3.16) διαφέρουν στο άθροισμα της υπόρριζης ποσότητας, καθώς ισχύει η παρακάτω διάταξη:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{R}_i(A) - \mathbf{R}_l(A) &= \\ &= (\mathbf{R}_1(A) + \dots + \mathbf{R}_{l-1}(A)) - (l-1)\mathbf{R}_l(A) < (l-1)(\mathbf{R}_1(A) - \mathbf{R}_l(A)) \end{aligned}$$

Για το κάτω φράγμα δεν μπορούμε να αποφανθούμε, αν υπάρχει ανάλογη διάταξη ανάμεσα στους τύπους (3.13), (3.18) και (3.19).

Παρ' όλα αυτά, παρατηρείται ότι το κάτω φράγμα που προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.15 (Duan-Zhou) συγκλίνει πλησιέστερα στην πραγματική τιμή της φασματικής ακτίνας του πίνακα A του Παραδείγματος 3.1.19 σε σχέση με το Θεώρημα 3.1.18 (Huang-You).

Συνεπώς η εκτίμηση των Duan-Zhou για την εύρεση φραγμάτων φασματικής ακτίνας αποδεικνύεται ακριβέστερη σε σχέση με την εκτίμηση των Huang-You και γι' αυτό η τελευταία δεν θα μας απασχολήσει περισσότερο στη συνέχεια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Επιπλέον μια προσέγγιση των φραγμάτων (άνω και κάτω) της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A που σχετίζονται με τους μέσους όρους των 2-αθροισμάτων γραμμών του πίνακα παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση [25, Lemma 2.2]. Την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να την αναζητήσει [20, Theorem 1.2].

Πρόταση 3.1.21

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε ισχύει:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{\mathbf{m}_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\mathbf{m}_i(A)\} \quad (3.20)$$

όπου $\mathbf{m}_i(A)$ ο i -οστός μέσος όρος των 2-αθροισμάτων γραμμών του πίνακα A , όπως ορίστηκε στην (1.5).

Παράδειγμα 3.1.22

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.21.

- i). Για την εφαρμογή της Πρότασης 3.1.21 χρειάζεται να υπολογιστούν οι ποσότητες $m_i(A)$, για $1 \leq i \leq 4$.

Εφόσον τα αθροίσματα των γραμμών $R_i(A)$ είναι

$$R_1(A) = 3 \quad \text{και} \quad R_2(A) = R_3(A) = R_4(A) = 5,$$

από την (1.5) οι ποσότητες $m_i(A)$ για $1 \leq i \leq 4$ είναι:

$$m_1(A) = \frac{\alpha_{11}R_1(A) + \alpha_{12}R_2(A) + \alpha_{13}R_3(A) + \alpha_{14}R_4(A)}{R_1(A)} = 5$$

και

$$m_2(A) = m_3(A) = m_4(A) = 4.6$$

Συνεπώς από την (3.20) προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A θα κυμαίνεται μεταξύ των παρακάτω φραγμάτων:

$$4.6 \leq \rho(A) \leq 5$$

Επειδή $\rho(A) = 4.6458$, επαληθεύεται ότι $\rho(A) \in [4.6, 5]$.

- ii). Όμοια για τον πίνακα B υπολογίζουμε τις ποσότητες $m_i(B)$ για $1 \leq i \leq 4$.

Από τα αθροίσματα των γραμμών $R_i(B)$ για τα οποία ισχύει

$$R_1(B) = 25 \quad \text{και} \quad R_2(B) = R_3(B) = R_4(B) = 1,$$

οι ποσότητες $m_i(B)$ είναι:

$$m_1(B) = \frac{\alpha_{11}R_1(B) + \alpha_{12}R_2(B) + \alpha_{13}R_3(B) + \alpha_{14}R_4(B)}{R_1(B)} = \frac{97}{25} = 3.88$$

$$m_2(B) = 25 \quad \text{και}$$

$$m_3(B) = m_4(B) = 1$$

Επομένως από την (3.20) συμπεραίνουμε ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B περικλείεται μεταξύ των παρακάτω φραγμάτων:

$$1 \leq \rho(B) \leq 25$$

Επειδή $\rho(B) = 5.3603$, επαληθεύεται ότι $\rho(B) \in [1, 25]$. □

Μία ανάλογη προσέγγιση με αυτήν των Duan-Zhou σχετικά με τα φράγματα της φασματικής ακτίνας αποτελεί το επόμενο θεώρημα, το οποίο ανέπτυξαν οι ερευνητές **Rundan Xing** και **Bo Zhou** και είναι γνωστό ως **Θεώρημα Xing-Zhou**. Για τη μελέτη της πλήρους απόδειξης ο αναγνώστης παραπέμπεται [25, Theorem 2.1, Theorem 2.3].

Θεώρημα 3.1.23

Έστω $A \in M_n(R^+)$ με $m_1(A) \geq m_2(A) \geq \dots \geq m_n(A) > 0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) Έστω M να είναι το μεγαλύτερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A , N να είναι το μεγαλύτερο μη διαγώνιο στοιχείο του για το οποίο ισχύει $N > 0$ και

$$\mathbf{b} = \max\left\{\frac{R_j(A)}{R_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \text{ και } R_i(A) > 0\right\}$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \min_{1 \leq l \leq n} \{\widetilde{\Phi}_l(A)\} \quad (3.21)$$

όπου για $l = 1$ είναι

$$\widetilde{\Phi}_1(A) = m_1(A) \quad (3.22)$$

και για $2 \leq l \leq n$ είναι

$$\widetilde{\Phi}_l(A) = \frac{m_l(A) + M - Nb + \sqrt{(m_l(A) - M + Nb)^2 + 4Nb \sum_{i=1}^{l-1} (m_i(A) - m_l(A))}}{2} \quad (3.23)$$

- 2) Έστω S να είναι το μικρότερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A , T να είναι το μικρότερο μη διαγώνιο στοιχείο του και

$$\mathbf{c} = \min\left\{\frac{R_j(A)}{R_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ και } R_i(A) > 0\right\}$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \widetilde{\Psi}_n(A) \quad (3.24)$$

όπου

$$\widetilde{\Psi}_n(A) = \frac{m_n(A) + S - Tc + \sqrt{(m_n(A) - S + Tc)^2 + 4Tc \sum_{i=1}^{n-1} (m_i(A) - m_n(A))}}{2} \quad (3.25)$$

Επίσης για τον υπολογισμό των ποσοτήτων $\widetilde{\Phi}_l(A)$, $\widetilde{\Psi}_n(A)$, που δίνονται από τις (3.22)-(3.23) και (3.25) καθώς και των φραγμάτων που δίνονται στις (3.21) και (3.24), μπορεί να υλοποιηθεί ο Κώδικας B.5 του Παραρτήματος Β, ο οποίος δημιουργήθηκε για την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.23 για οποιονδήποτε μη αρνητικό πίνακα.

Παράδειγμα 3.1.24

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.23 (Xing-Zhou) να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

- i). Για την εφαρμογή του Θεωρήματος Xing-Zhou για τον πίνακα A , χρειάζεται πρώτα να ελέγξουμε αν ισχύει η προϋπόθεση της διάταξης των $m_i(A)$, δηλαδή αν ισχύει $m_1(A) \geq m_2(A) \geq m_3(A) \geq m_4(A)$.

Όπως ήδη έχουμε υπολογίσει στο Παράδειγμα 3.1.22, ο πίνακας A έχει :

$$m_1(A) = 5 \text{ και } m_2(A) = m_3(A) = m_4(A) = 4.6.$$

Επομένως παρατηρούμε ότι ισχύει η διάταξη των $m_i(A)$, συνεπώς εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.1.23 (Xing-Zhou).

Επίσης από τον πίνακα A έχουμε:

$$M = 0, N = 2, S = 0, T = 1 \text{ και } b = \frac{5}{3} = 1.6667, c = \frac{3}{5} = 0.6$$

Στη συνέχεια από τις (3.22)-(3.23) του Θεωρήματος Xing-Zhou υπολογίζουμε αντίστοιχα τις ποσότητες $\widetilde{\Phi}_l(A)$ για $1 \leq l \leq 4$ και από την (3.25) την $\widetilde{\Psi}_n(A)$.

$$\text{Για } l = 1, \quad \widetilde{\Phi}_1(A) = m_1(A) = 5$$

$$\text{Για } l = 2, \quad \widetilde{\Phi}_2(A) = 4.7647$$

$$\text{Για } l = 3, 4, \quad \widetilde{\Phi}_3(A) = \widetilde{\Phi}_4(A) = 4.7647$$

Από την (3.21) συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\rho(A) \leq 4.7647.$$

Από την (3.25) προκύπτει $\widetilde{\Psi}_4(A) = 4.6458$.

Επομένως από την (3.24) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(A) \geq 4.6458.$$

Άρα για τον πίνακα A η φασματική του ακτίνα περικλείεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$4.6458 \leq \rho(A) \leq 4.7647$$

Προφανώς $\rho(A) \in [4.6458, 4.7647]$, επειδή $\rho(A) = 4.6458$, το οποίο επαληθεύει το Θεώρημα 3.1.23 (Xing-Zhou).

ii). Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B προκειμένου να καθοριστεί το άνω και κάτω φράγμα για τη φασματική του ακτίνα.

Αρχικά ελέγχουμε αν ικανοποιείται η διάταξη $m_1(B) \geq m_2(B) \geq m_3(B) \geq m_4(B)$ του Θεωρήματος 3.1.23 (Xing-Zhou).

Όπως ήδη έχουμε υπολογίσει στο Παράδειγμα 3.1.22, οι ποσότητες $m_i(B)$ για $1 \leq i \leq 4$ είναι:

$$m_1(B) = \frac{97}{25} = 3.88, \quad m_2(B) = 25 \quad \text{και} \quad m_3(B) = m_4(B) = 1$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται η διάταξη των $m_i(B)$, δηλαδή ισχύει $m_1(B) < m_2(B)$, με αποτέλεσμα να μην εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.1.21 (Xing-Zhou). Χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο πίνακα μετάθεσης

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

προκύπτει ο ακόλουθος όμοιος πίνακας του B ,

$$B_{P_1} = P_1 B P_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή τα αθροίσματα γραμμών του B_{P_1} είναι:

$$R_1(B_{P_1}) = 1, \quad R_2(B_{P_1}) = 25 \quad \text{και} \quad R_3(B_{P_1}) = R_4(B_{P_1}) = 1.$$

και οι ποσότητες $m_i(B_{P_1})$ είναι:

$$m_1(B_{P_1}) = 25, \quad m_2(B_{P_1}) = 3.88 \quad \text{και} \quad m_3(B_{P_1}) = m_4(B_{P_1}) = 1$$

προφανώς ισχύει η ζητούμενη διάταξη

$$m_1(B_{P_1}) > m_1(B_{P_1}) > m_3(B_{P_1}) = m_4(B_{P_1})$$

συνεπώς το Θεώρημα 3.1.23 μπορεί να εφαρμοστεί για τον πίνακα B_{P_1} .

Επίσης χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Θεωρήματος Xing-Zhou στον πίνακα B_{P_1} έχουμε:

$$M = 3, \quad N = 12, \quad b = 25, \quad S = 0, \quad T = 0 \quad \text{και} \quad c = \frac{1}{25} = 0.04.$$

Ακολουθώντας για τον πίνακα B_{P_1} , υπολογίζουμε από τις (3.22) και (3.23) τις ποσότητες $\widetilde{\Phi}_l(B_{P_1})$ για $1 \leq l \leq 4$ και από την (3.25) την $\widetilde{\Psi}_4(B_{P_1})$.

Για $l = 1$ από την (3.22) έχουμε

$$\widetilde{\Phi}_1(B_{P_1}) = m_1(B_{P_1}) = 25.$$

Από την (3.23) και για $l = 2, 3, 4$ έχουμε αντίστοιχα:

$$l = 2, \quad \widetilde{\Phi}_2(B_{P_1}) = 23.6405$$

$$l = 3, 4 \quad \text{είναι} \quad \widetilde{\Phi}_3(B_{P_1}) = \widetilde{\Phi}_4(B_{P_1}) = 25.9684$$

Συνεπώς από την (3.21) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(B_{P_1}) \leq 23.6405.$$

Επίσης από την (3.25) έχουμε $\widetilde{\Psi}_4(B_{P_1}) = 1$, συνεπώς από την (3.24) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(B_{P_1}) \geq 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.23 η φασματική ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα B_{P_1} κυμαίνεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$1 \leq \rho(B_{P_1}) \leq 23.6405$$

Επειδή οι πίνακες B και B_{P_1} είναι όμοιοι ισχύει $\rho(B) = \rho(B_{P_1})$, συνεπώς τα παραπάνω φράγματα είναι και φράγματα της φασματικής ακτίνας του πίνακα B , δηλαδή

$$1 \leq \rho(B) \leq 23.6405.$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B είναι $\rho(B) = 5.3603$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.16 (ii)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.23, δηλαδή, ότι $\rho(B) \in [1, 23.6405]$.

Για την εύρεση των φραγμάτων (άνω και κάτω) της φασματικής ακτίνας των πινάκων A, B υλοποιήθηκε ο Κώδικας B.5 του Παραρτήματος B. \square

Σχόλιο 3.1.25

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και από το (ii) του Παραδείγματος 3.1.24 για τον πίνακα B δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.23 (Xing-Zhou) σχετικά με τη διάταξη των μέσων όρων των 2-αθροισμάτων γραμμών του πίνακα.

Αυτό συμβαίνει επειδή ο αρχικός πίνακας B είναι πίνακας Fibonacci της μορφής (1.12) και σε αυτήν την κατηγορία πινάκων δεν ισχύει η διάταξη των $m_i(B)$ του Θεωρήματος 3.1.23 και απαιτείται πάντα να εφαρμόζεται η ακόλουθη διαδικασία.

Για το σκοπό αυτό επιλέγεται ένας πίνακας μετάθεσης P_1 μεγέθους ίσου με τον πίνακα B και τέτοιος ώστε να προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα με εναλλαγή της $1^{\text{ης}}$ με τη $2^{\text{η}}$ γραμμή του. Με τον πίνακα μετάθεσης γίνεται ο υπολογισμός του B_{P_1} όμοιου πίνακα με τον αρχικό, δηλαδή του $B_{P_1} = P_1 B P_1^T$ και στη συνέχεια υπολογίζονται οι μέσοι όροι των 2-αθροισμάτων γραμμών του πίνακα B_{P_1} , που είναι

$$m_1(B_{P_1}) \geq m_2(B_{P_1}) \geq m_3(B_{P_1}) = m_4(B_{P_1}) = \dots = m_n(B_{P_1}) = 1.$$

Η παραπάνω διάταξη συμβαίνει επειδή ο αρχικός πίνακας B είναι πίνακας Fibonacci και η αντιμετάθεση που έγινε μέσω του P_1 έφερε στη δεύτερη γραμμή τα βάρη του αρχικού πίνακα και οι υπόλοιπες γραμμές του B_{P_1} έχουν στοιχεία 0,1. Επιπλέον στον B_{P_1} ισχύει πάντα ότι το μικρότερο διαγώνιο και το μικρότερο μη διαγώνιο στοιχείο του ισούται με 0, δηλαδή $S = T = 0$, [1]. Οπότε το κάτω φράγμα του B_{P_1} , $\tilde{\Psi}_4(B_{P_1})$, υπολογίζεται από την (3.25) του Θεωρήματος Xing-Zhou ισούται με 1, επειδή

$$\tilde{\Psi}_4(B_{P_1}) = \frac{m_n + S - Tc + \sqrt{(m_n - S + Tc)^2 + 4Tc \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_n)}}{2} = m_n(B_{P_1}) = 1$$

Προφανώς από την (3.24) και την προαναφερθείσα ομοιότητα των πινάκων B, B_{P_1} ισχύει

$$1 \leq \rho(B_{P_1}) = \rho(B).$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.23 (Xing-Zhou) το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας ενός πίνακα Fibonacci της μορφής (1.12) είναι η μονάδα, [1]. \square

Επίσης νέα φράγματα (άνω και κάτω) για τη φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα A παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Επιπλέον μια προσέγγιση των φραγμάτων (άνω και κάτω) της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A που σχετίζονται με τις ποσότητες $w_i(A)$ του πίνακα $A \geq 0$ παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση [2, Proposition 3], η οποία αποτελεί γενίκευση της Πρότασης 3.1.21.

Πρόταση 3.1.26

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε ισχύει:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{w_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{w_i(A)\} \quad (3.26)$$

όπου $w_i(A)$ ορίζεται όπως στην (1.6).

Απόδειξη:

Θεωρούμε ότι για τους μέσους όρους των 2-αθροισμάτων γραμμών του πίνακα A ισχύει $m_i(A) > 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, με $m_i(A)$ να ορίζεται όπως στην (1.5). Επιλέγουμε το θετικό διάνυσμα m με συντεταγμένες $m_i(A)$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα (8.1.27) [12, Theorem 8.1.26], από όπου έχουμε:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{m_i(A)} \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j(A) \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{m_i(A)} \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j(A)$$

Συνεπώς από την (1.6) του Ορισμού 1.1.2 έχουμε:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{w_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{w_i(A)\} \quad \square$$

Παράδειγμα 3.1.27

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.1.26 να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

- i). Για την εφαρμογή της Πρότασης 3.1.26 χρειάζεται να υπολογιστούν οι ποσότητες $w_i(A)$. Ωστόσο, για τον υπολογισμό τους απαιτείται πρώτα ο

υπολογισμός των αθροισμάτων γραμμών $R_i(A)$ και των ποσοτήτων $m_i(A)$, ποσότητες που υπολογίστηκαν στο Παράδειγμα 3.1.24 και είναι οι ακόλουθες:

$$R_1(A) = 3 \quad \text{και} \quad R_2(A) = R_3(A) = R_4(A) = 5$$

και

$$m_1(A) = 5 \quad \text{και} \quad m_2(A) = m_3(A) = m_4(A) = 4.6$$

Από την (1.6) οι ποσότητες $w_i(A)$ για $1 \leq i \leq 4$ είναι:

$$w_1(A) = \frac{\alpha_{11}m_1(A) + \alpha_{12}m_2(A) + \alpha_{13}m_3(A) + \alpha_{14}m_4(A)}{m_1(A)} = \frac{69}{25} = 2.76$$

και

$$w_2(A) = w_3(A) = w_4(A) = \frac{117}{23} = 5.087$$

Συνεπώς από την (3.26) προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A θα κυμαίνεται μεταξύ των παρακάτω φραγμάτων:

$$2.76 \leq \rho(A) \leq 5.087$$

Επειδή $\rho(A) = 4.6458$ επαληθεύεται ότι $\rho(A) \in [2.76, 5.087]$.

- ii). Όμοια για τον πίνακα B υπολογίζουμε τις ποσότητες $w_i(B)$ για $1 \leq i \leq 4$. Αναλυτικότερα, από το Παράδειγμα 3.1.24 έχουμε ότι τα αθροίσματα των γραμμών $R_i(B)$ είναι:

$$R_1(B) = 25 \quad \text{και} \quad R_2(B) = R_3(B) = R_4(B) = 1,$$

και οι ποσότητες $m_i(B)$ είναι:

$$m_1(B) = \frac{97}{25} = 3.88, \quad m_2(B) = 25 \quad \text{και} \quad m_3(B) = m_4(B) = 1$$

Από την (1.6) οι ποσότητες $w_i(B)$ για $1 \leq i \leq 4$ είναι:

$$\begin{aligned} w_1(B) &= \frac{\alpha_{11}m_1(B) + \alpha_{12}m_2(B) + \alpha_{13}m_3(B) + \alpha_{14}m_4(B)}{m_1(B)} \\ &= \frac{8041}{97} = 82.8969 \end{aligned}$$

και

$$w_2(B) = \frac{95}{625} = 0.1552, \quad w_3(B) = 25, \quad w_4(B) = 1.$$

Επομένως από την (3.26) συμπεραίνουμε ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B περικλείεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$0.1552 \leq \rho(B) \leq 82.8969$$

Επειδή $\rho(B) = 5.3603$, επαληθεύεται ότι

$$\rho(B) \in [0.1552, 82.8969]. \quad \square$$

Επιπρόσθετα νέα φράγματα (άνω και κάτω) για τη φασματική ακτίνα ενός μη αρνητικού πίνακα A πέρα από αυτά που αποδείχθηκαν στην Πρόταση 3.1.26 παρουσιάζονται στη συνέχεια. Τα αποτελέσματα προκύπτουν κάνοντας μία ανάλογη προσέγγιση με αυτήν των **Duan-Zhou** και των **Xing-Zhou**, όπου τα δε φράγματα δίνονται ως συνάρτηση των ποσοτήτων $w_i(A)$ του $A \geq 0$, των μεγαλύτερων και των μικρότερων διαγώνιων στοιχείων του πίνακα καθώς και των μεγαλύτερων και μικρότερων μη διαγώνιων στοιχείων του.

Θεώρημα 3.1.28

Έστω $A \in M_n(R)$ ένας μη αρνητικός πίνακας με $w_i(A) > 0$ και $w_1(A) \geq w_2(A) \dots \geq w_n(A)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) Έστω M το μεγαλύτερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A , N το μεγαλύτερο μη διαγώνιο στοιχείο του για το οποίο ισχύει $N > 0$ και

$$b' = \max\left\{\frac{m_j(A)}{m_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ και } m_i(A) > 0\right\}$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \min_{1 \leq l \leq n} \{\hat{\Phi}_l(A)\} \quad (3.27)$$

όπου για $l = 1$ είναι

$$\hat{\Phi}_1(A) = w_1(A) \quad (3.28)$$

και για $2 \leq l \leq n$ είναι

$$\hat{\Phi}_l(A) = \frac{w_l(A) + M - Nb' + \sqrt{(w_l(A) - M + Nb')^2 + 4Nb' \sum_{i=1}^{l-1} (w_i(A) - w_l(A))}}{2} \quad (3.29)$$

- 2) Έστω S το μικρότερο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα A , T το μικρότερο μη διαγώνιο στοιχείο του και

$$c' = \min\left\{\frac{m_j(A)}{m_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ και } m_i(A) > 0\right\}$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \hat{\Psi}_n(A) \quad (3.30)$$

όπου

$$\widehat{\Psi}_n(A) = \frac{w_n(A) + S - T c' + \sqrt{(w_n(A) - S + T c')^2 + 4T c' \sum_{i=1}^{n-1} (w_i(A) - w_n(A))}}{2} \quad (3.31)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη για το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας δίνεται [2, Theorem 4] και για το κάτω φράγμα [2, Theorem 8]. \square

Παράδειγμα 3.1.29

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.1.8. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.28 να βρεθούν φράγματα (άνω και κάτω) για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων $\widehat{\Phi}_l(A)$, $\widehat{\Psi}_n(A)$ καθώς και των φραγμάτων που δίνονται στις (3.27) και (3.30) μπορεί να υλοποιηθεί ο Κώδικας B.6 του Παραρτήματος B, ο οποίος δημιουργήθηκε για την εφαρμογή των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 3.1.28 για οποιονδήποτε μη αρνητικό πίνακα.

- i). Αρχικά ελέγχουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη $w_1(A) \geq w_2(A) \geq w_3(A) \geq w_4(A)$ του Θεωρήματος 3.1.28.

Όπως ήδη έχουμε υπολογίσει στο (i) του Παραδείγματος 3.1.27, οι ποσότητες $w_i(A)$ για $1 \leq i \leq 4$ είναι:

$$w_1(A) = 2.76 \quad \text{και} \quad w_2(A) = w_3(A) = w_4(A) = 5.087$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται η διάταξη των $w_i(A)$ με αποτέλεσμα να μην εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.1.28. Όπως αναφέρθηκε και στο Παράδειγμα 3.1.16, χρησιμοποιώντας τον πίνακα μετάθεσης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

προκύπτει ο ακόλουθος όμοιος πίνακας του A ,

$$A_P = PAP^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή τα αθροίσματα γραμμών του A_P είναι:

$$R_1(A_P) = R_2(A_P) = R_3(A_P) = 5 \text{ και } R_4(A_P) = 3,$$

$$m_1(A_P) = m_2(A_P) = m_3(A_P) = 4.6 \text{ και } m_4(A_P) = 5$$

καθώς και οι ποσότητες $w_i(A_P)$ είναι:

$$w_1(A_P) = w_2(A_P) = w_3(A_P) = 5.087 \text{ και } w_4(A_P) = 2.76$$

παρατηρούμε ότι στον πίνακα A_P ισχύει η διάταξη του Θεωρήματος 3.1.28.

Επιπλέον για τον πίνακα A_P προκύπτουν ότι:

$$M = 0, N = 2 \text{ και } b' = \frac{25}{23} = 1.087, \quad S = 0, T = 1 \text{ και } c' = \frac{23}{25} = 0.92.$$

Στη συνέχεια για την εύρεση του άνω φράγματος της φασματικής ακτίνας του πίνακα A , ο οποίος είναι όμοιος με τον πίνακα A_P , υπολογίζουμε από τις (3.28) και (3.29) τις ποσότητες $\hat{\Phi}_l(A)$ για $1 \leq l \leq 4$, και από την (3.31) την $\hat{\Psi}_n(A)$.

Για $l = 1$ από την (3.28) έχουμε

$$\hat{\Phi}_1(A_P) = w_1(A_P) = 5.087.$$

Από την (3.28) και για $l = 2, 3, 4$ έχουμε αντίστοιχα:

$$l = 2, \quad \hat{\Phi}_2(A_P) = 5.087$$

$$l = 3, \quad \hat{\Phi}_3(A_P) = 5.087$$

$$l = 4, \quad \hat{\Phi}_4(A_P) = 4.9041$$

Συνεπώς, από τις παραπάνω τιμές και την (3.27) καταλήγουμε ότι

$$\rho(A_P) \leq 4.9041$$

Επίσης από την (3.31) έχουμε $\hat{\Psi}_n(A_P) = 4.0518$ και άρα από την (3.30) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(A_P) \geq 4.0518.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.28 η φασματική του ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα A_P εντοπίζεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων

$$4.0518 \leq \rho(A_P) \leq 4.9041$$

Επειδή οι πίνακες A και A_P είναι όμοιοι ισχύει $\rho(A) = \rho(A_P)$, συνεπώς τα παραπάνω φράγματα είναι και φράγματα του πίνακα A , δηλαδή

$$4.0518 \leq \rho(A) \leq 4.9041.$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A είναι $\rho(A) = 4.6458$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.8 (i)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.28, δηλαδή, $\rho(A) \in [4.0518, 4.9041]$.

ii). Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B προκειμένου να καθοριστεί το άνω και κάτω φράγμα για τη φασματική του ακτίνα του B . Αρχικά ελέγχουμε αν ικανοποιείται η συνθήκη $w_1(B) \geq w_2(B) \geq w_3(B) \geq w_4(B)$ του Θεωρήματος 3.1.28.

Όπως ήδη έχουμε υπολογίσει στο (ii) του Παραδείγματος 3.1.27, οι ποσότητες $w_i(B)$ για $1 \leq i \leq 4$ είναι:

$$w_1(B) = 82.8969, w_2(B) = 0.1552, w_3(B) = 25 \text{ και } w_4(B) = 1$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται η διάταξη των $w_i(B)$ με αποτέλεσμα να μην εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.1.28. Χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο πίνακα μετάθεσης

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

προκύπτει ο ακόλουθος όμοιος πίνακας του B ,

$$B_{P_2} = P_2 B P_2^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή τα αθροίσματα γραμμών του B_{P_2} είναι:

$$R_1(B_{P_2}) = 25 \text{ και } R_2(B_{P_2}) = R_3(B_{P_2}) = R_4(B_{P_2}) = 1,$$

οι ποσότητες $m_i(B_{P_2})$ είναι:

$$m_1(B_{P_2}) = 3.88, \quad m_2(B_{P_2}) = m_3(B_{P_2}) = 1 \text{ και } m_4(B_{P_2}) = 25$$

και οι ποσότητες $w_i(B_{P_2})$ είναι:

$$w_1(B_{P_2}) = 82.8969, \quad w_2(B_{P_2}) = 25, \quad w_3(B_{P_2}) = 1, \quad w_4(B_{P_2}) = 0.1552$$

προφανώς ισχύει η ζητούμενη διάταξη

$$w_1(B_{P_2}) > w_2(B_{P_2}) > w_3(B_{P_2}) > w_4(B_{P_2})$$

συνεπώς το Θεώρημα 3.1.28 μπορεί να εφαρμοστεί για τον πίνακα B_{P_2} .

Επίσης χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Θεωρήματος 3.1.28 στον πίνακα B_{P_2} έχουμε:

$$M = 3, \quad N = 12, \quad b = 25, \quad S = 0, \quad T = 0 \quad \text{και} \quad c = \frac{1}{25} = 0.04.$$

Ακολούθως για τον πίνακα B_{P_2} , υπολογίζουμε από τις (3.28) και (3.29) τις ποσότητες $\hat{\Phi}_l(B_{P_2})$ για $1 \leq l \leq 4$, και από την (3.31) την $\hat{\Psi}_4(B_{P_2})$.

Για $l = 1$ από την (3.28) έχουμε

$$\hat{\Phi}_1(B_{P_2}) = w_1(B_{P_2}) = 82.8969.$$

Από την (3.29) και για $l = 2, 3, 4$ έχουμε αντίστοιχα:

$$l = 2, \quad \hat{\Phi}_2(B_{P_2}) = 72.0627$$

$$l = 3, \quad \hat{\Phi}_3(B_{P_2}) = 84.3146$$

$$l = 4, \quad \hat{\Phi}_4(B_{P_2}) = 85.2541$$

Συνεπώς από την (3.27) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(B_{P_2}) \leq 72.0627.$$

Επίσης από την (3.31) έχουμε $\hat{\Psi}_4(B_{P_2}) = 0.1552$, συνεπώς από την (3.30) συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(B_{P_2}) \geq 0.1552.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.28 η φασματική ακτίνα του μη αρνητικού πίνακα B_{P_2} κυμαίνεται μεταξύ των ακόλουθων φραγμάτων:

$$0.1552 \leq \rho(B_{P_2}) \leq 72.0627$$

Επειδή οι πίνακες B και B_{P_2} είναι όμοιοι ισχύει $\rho(B) = \rho(B_{P_2})$, συνεπώς τα παραπάνω φράγματα είναι και φράγματα της φασματικής ακτίνας του πίνακα B , δηλαδή

$$0.1552 \leq \rho(B) \leq 72.0627.$$

Τέλος, υπενθυμίζεται ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα B είναι $\rho(B) = 5.3603$, (βλέπε, Παράδειγμα 3.1.24 (ii)), το οποίο επαληθεύει το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1.28, δηλαδή, ότι $\rho(B) \in [0.1552, 72.0627]$.

Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε, τα φράγματα της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B του Παραδείγματος 3.1.29 μπορούν να υπολογιστούν

εύκολα από τον Κώδικα Β.6 του Παραρτήματος Β, ο οποίος υλοποιείται σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.28. □

Έπειτα από την παράθεση και την ανάλυση όλων των τεχνικών, που χρησιμοποιούνται για την εύρεση του άνω και κάτω φράγματος της φασματικής ακτίνας των μη αρνητικών πινάκων A και B του Παραδείγματος 3.1.8 κρίνεται απαραίτητο να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά τους. Για την καλύτερη αξιολόγηση των αποτελεσμάτων παρατίθεται ο επόμενος πίνακας που συνοψίζει τα θεωρήματα εντοπισμού φραγμάτων και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή τους στους προαναφερθέντες πίνακες A και B .

Αναλυτικότερα έχουμε:

Πίνακας 3.1: Φράγματα φασματικής ακτίνας των πινάκων του Παραδείγματος 3.1.8

Θεωρήματα	Φράγματα φασματικής ακτίνας	
	Πίνακας A $\rho(A)=4.6458$	Πίνακας B $\rho(B)=5.3603$
Θεώρημα 2.1.1 Σχέση (3.1)	$3 \leq \rho(A) \leq 5$	$1 \leq \rho(B) \leq 25$
Θεώρημα 2.1.1 Σχέση (3.2)	$3 \leq \rho(A) \leq 5$	$3 \leq \rho(B) \leq 13$
Θεώρημα 3.1.11 (Brauer)	$3.8730 \leq \rho(A) \leq 5$	$1 \leq \rho(B) \leq 6.4244$
Θεώρημα 3.1.13 (Melman)	$3.4495 \leq \rho(A) \leq 4.6458$	$3 \leq \rho(B) \leq 13.8655$
Θεώρημα 3.1.15 (Duan-Zhou)	$4.1623 \leq \rho(A) \leq 4.7720$	$1 \leq \rho(B) \leq 13.6918$
Πρόταση 3.1.21	$4.6 \leq \rho(A) \leq 5$	$1 \leq \rho(B) \leq 25$
Θεώρημα 3.1.23 (Xing-Zhou)	$4.6458 \leq \rho(A) \leq 4.7647$	$1 \leq \rho(B) \leq 23.6405$
Πρόταση 3.1.26	$2.76 \leq \rho(A) \leq 5.087$	$0.1552 \leq \rho(B) \leq 82.8969$
Θεώρημα 3.1.28	$4.0518 \leq \rho(A) \leq 4.9041$	$0.1552 \leq \rho(B) \leq 72.0627$

Σχόλιο 3.1.30

Από τον παραπάνω πίνακα διακρίνουμε ότι για τον πίνακα A η πλησιέστερη προσέγγιση στην πραγματική τιμή της φασματικής ακτίνας είναι τα φράγματα που υπολογίζονται από τα Θεωρήματα 3.1.13 και 3.1.23 των Melman και Xing-Zhou, αντίστοιχα. Ειδικότερα, διαπιστώνουμε ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα A ταυτίζεται με την προσεγγιστική τιμή που προκύπτει ως το άνω φράγμα της εφαρμογής του Θεωρήματος 3.1.13 του Melman, και ταυτίζεται με το κάτω φράγμα που προκύπτει από την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.23 των Xing-Zhou.

Ανάλογα για τον πίνακα B παρατηρούμε ότι η πλησιέστερη προσέγγιση είναι τα φράγματα που προκύπτουν από την εφαρμογή των Θεωρημάτων 2.1.1, 3.1.11 και 3.1.13 των στηλών, του Brauer και του Melman, αντίστοιχα. Ειδικότερα, διαπιστώνουμε ότι εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.11 (Brauer) η πραγματική τιμή της φασματικής ακτίνας του πίνακα B είναι πλησιέστερη στο άνω φράγμα της προσέγγισης Brauer.

3.2. Φράγματα φασματικής ακτίνας συναρτήσει του ίχνους

Σε αρκετές περιπτώσεις μη αρνητικών πινάκων ο υπολογισμός της ακριβούς τιμής της φασματικής ακτίνας αναδεικνύεται ως ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία. Βέβαια αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αναζητηθούν ευκολότεροι αλγόριθμοι για την εύρεση ακριβέστερων φραγμάτων της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα. Αντίστοιχη διαδικασία με αυτήν της Ενότητας 3.1 ακολουθείται στην παρούσα ενότητα προκειμένου να παρουσιαστούν φράγματα για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας, τα οποία εξαρτώνται από το ίχνος του πίνακα και/ή των δυνάμεών του.

Εφαρμόζοντας σε μη αρνητικούς πίνακες το αποτέλεσμα των Wolkowicz and Styan [24, Theorem 3.1, σχέση (3.12)], που αναφέρεται σε πίνακες με μιγαδικά στοιχεία, μπορούμε να αποκτήσουμε ένα άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας τους. Το αποτέλεσμα της έρευνάς τους διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι πίνακες είναι μη αρνητικοί, συνεπώς η φασματική τους ακτίνα είναι μη αρνητικός αριθμός (βλέπε, Θεώρημα 2.1.1), $tr(A) \geq 0$ και $\|A\|_F^2 = tr(A^*A)$, σύμφωνα με τον ορισμό της Frobenius (Ευκλείδειας) νόρμας στην (1.21). Η πλήρης απόδειξη μπορεί να αναζητηθεί [24, Theorem 3.1].

Θεώρημα 3.2.1

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε για το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας του A ισχύει:

$$\rho(A) \leq \frac{tr(A)}{n} + \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\|A\|_F^2 - \frac{tr^2(A)}{n}} \quad (3.32)$$

όπου $tr(A)$ σημειώνει το ίχνος του πίνακα A , όπως ορίστηκε στην (1.18), και $\|A\|_F$ σημειώνει την Frobenius νόρμα του πίνακα A , όπως ορίστηκε στην (1.21).

Μία βελτίωση του Θεωρήματος 3.2.1 αποτελεί το επόμενο θεώρημα και χρησιμοποιείται για την εύρεση ακριβέστερου άνω φράγματος της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα. Ο αναγνώστης για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 παραπέμπεται [15, Corollary 2.1] και χρειάζεται να ληφθεί υπόψη ότι το θεώρημα εφαρμόζεται σε μη αρνητικούς πίνακες, οπότε $tr(A) \geq 0$.

Θεώρημα 3.2.2

Έστω $A \in M_n(R^+)$ και m ένας ακέραιος ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{rank}(A) \leq m \leq n,$$

όπου $\text{rank}(A)$ είναι ο βαθμός του πίνακα A . Τότε για το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας ισχύει:

$$\rho(A) \leq \frac{\text{tr}(A)}{m} + \left(\frac{m-1}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c(A) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m} + \left|\text{tr}(A^2) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m}\right|\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.33)$$

όπου $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(A^2)$ είναι τα ίχνη των πινάκων A , A^2 , αντίστοιχα, και $c(A)$ είναι η ποσότητα στη (2.12), δηλαδή

$$c(A) = \left(\|A\|_F^2 - \frac{\text{tr}^2(A)}{n}\right)^2 - \frac{1}{2} \|A^*A - AA^*\|_F^2 + \frac{\text{tr}^2(A)}{n}.$$

Μία ανάλογη προσέγγιση του άνω φράγματος της φασματικής ακτίνας παρουσιάζεται στο ακόλουθο θεώρημα και αποτελεί αντίστοιχα μία βελτίωση του Θεωρήματος 3.2.1. Επίσης επειδή εφαρμόζεται σε μη αρνητικούς πίνακες ισχύει και για αυτό το θεώρημα ότι η φασματική ακτίνα είναι μη αρνητικός αριθμός (βλέπε, Θεώρημα 2.1.1) και $\text{tr}(A) \geq 0$.

Θεώρημα 3.2.3

Έστω $A \in M_n(R^+)$ να είναι full rank, $\text{rank}(A) = n$. Τότε για το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας ισχύει:

$$\rho(A) \leq \frac{\text{tr}(A)}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c(A) - \frac{\text{tr}^2(A)}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

όπου $\text{tr}(A)$ και $c(A)$ είναι οι ποσότητες του Θεωρήματος 3.2.2.

Απόδειξη:

Επειδή ο A είναι μη αρνητικός πίνακας, $\text{tr}(A) \geq 0$. Επιπλέον σύμφωνα με την ανισότητα που δίνεται από τους Huang-Wang [15, ανισότητα στην (16)] έχουμε:

$$\left| \text{tr}(A^2) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m} \right| \leq c(A) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m} \quad (3.35)$$

Τώρα, η (3.33) του Θεωρήματος 3.2.2 μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} \rho(A) &\leq \frac{\text{tr}(A)}{m} + \left(\frac{m-1}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c(A) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m} + \left| \text{tr}(A^2) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m} \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\text{tr}(A)}{m} + \left(\frac{m-1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c(A) - \frac{\text{tr}^2(A)}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Τέλος επειδή ο πίνακας είναι full rank, ισχύει $\text{rank}(A) = n = m$, συνεπώς η (3.36) δίνει τη ζητούμενη ανίσωση, δηλαδή

$$\rho(A) \leq \frac{\text{tr}(A)}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c(A) - \frac{\text{tr}^2(A)}{n} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Παράδειγμα 3.2.4

Έστω οι ακόλουθοι μη αρνητικοί πίνακες:

$$\text{i). } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii). } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 3.2.1, 3.2.2 και 3.2.3, να βρεθεί ένα άνω φράγμα για τον εντοπισμό της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

- i). Για τον πίνακα A παρατηρούμε ότι είναι ένας μη αρνητικός 4×4 πίνακας ο οποίος έχει $\text{rank}(A) = 3$. Οι Επίσης χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = 3.9430, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.0285 + 1.3321i, \lambda_4 = 0.0285 - 1.3321i,$$

και η φασματική του ακτίνα είναι

$$\rho(A) \equiv \lambda_1 = 3.9430.$$

Ωστόσο, εφαρμόζοντας τα παραπάνω θεωρήματα στον πίνακα A και χρησιμοποιώντας τον Κώδικα B.7 του Παραρτήματος Β προκύπτουν τα ακόλουθα άνω φράγματα για τη φασματική του ακτίνα.

Από την (3.32) του Θεωρήματος 3.2.1 έχουμε:

$$\rho(A) \leq 6.4083$$

Αντίστοιχα από την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.2 και την (3.33) επιλέγοντας

$$3 \leq m \leq 4,$$

ώστε να ισχύει η προϋπόθεση του Θεωρήματος $rank(A) \leq m \leq n$, έχουμε:

- όταν $m = 3$, τότε $\rho(A) \leq 4.5992$
- όταν $m = 4$, τότε $\rho(A) \leq 4.6054$

Τέλος επειδή ο πίνακας A δεν είναι full rank, δηλαδή $rank(A) = 3 \neq 4$ δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.2.3.

- ii). Ανάλογη διαδικασία ακολουθούμε και για τον πίνακα B , ο οποίος είναι ένας μη αρνητικός 4×4 πίνακας και έχει $rank(B) = 4$. Συνεπώς ο πίνακας B είναι full rank. Επιπλέον, οι ιδιοτιμές του είναι

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 1,$$

και η φασματική ακτίνα του B είναι:

$$\rho(B) \equiv \lambda_1 = 3.$$

Ωστόσο, εφαρμόζοντας τα παραπάνω θεωρήματα στον πίνακα B , και χρησιμοποιώντας τον Κώδικα Β.7 του Παραρτήματος Β προκύπτουν τα ακόλουθα άνω φράγματα για τη φασματική του ακτίνα.

Από την (3.32) του Θεωρήματος 3.2.1 έχουμε:

$$\rho(B) \leq 4.2913$$

Για την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.2 χρειάζεται να ικανοποιείται η συνθήκη $rank(B) \leq m \leq n$, δηλαδή $4 \leq m \leq 4$, συνεπώς το Θεώρημα εφαρμόζεται μόνο για $m = n = 4$ και από την (3.33) έχουμε:

$$\rho(B) \leq 3.7229$$

Τέλος, επειδή ο πίνακας B είναι full rank εφαρμόζεται η ανισότητα στην (3.34) του Θεωρήματος 3.2.3, από όπου έχουμε

$$\rho(B) \leq 4.1064. \quad \square$$

Επίσης για τους πίνακες A , B του Παραδείγματος 3.2.4 παρουσιάζεται ο επόμενος πίνακας, ο οποίος περιέχει συνοπτικά όλα τα άνω φράγματα της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B , αντίστοιχα.

Πίνακας 3.2: Άνω φράγματα φασματικής ακτίνας των πινάκων του Παραδείγματος 3.2.4

Θεωρήματα	m	Άνω φράγματα	
		Πίνακας A	Πίνακας B
		rank(A)=3, $\rho(A)=3.9430$	rank(B)=4, $\rho(B)=3$
Θεώρημα 3.2.1		$\rho(A)\leq 6.4083$	$\rho(B)\leq 4.2913$
Θεώρημα 3.2.2	m=3	$\rho(A)\leq 4.5992$	
	m=4	$\rho(A)\leq 4.6054$	$\rho(B)\leq 3.7229$
Θεώρημα 3.2.3		A δεν είναι full rank Δεν εφαρμόζεται	m=n, $\rho(B)\leq 4.1064$

Σχόλιο 3.2.5

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα στον Πίνακα 3.2 διακρίνουμε ότι για τον πίνακα A η πλησιέστερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής της φασματικής του ακτίνας δίνεται από τα άνω φράγματα που υπολογίζονται από το Θεώρημα 3.2.2, ιδιαίτερα αυτό που υπολογίστηκε για $m = 3$.

Όμοια για τον πίνακα B συμπεραίνουμε ότι η πλησιέστερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής της φασματικής του ακτίνας δίνεται από το άνω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.2. Επίσης για τον Πίνακα B παρατηρείται ότι η προσέγγιση σχετικά με το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας του Θεωρήματος 3.2.3 είναι πλησιέστερη στην πραγματική τιμή συγκριτικά με αυτήν του Θεωρήματος 3.2.1.

Συνεπώς καταλήγουμε ότι και για τους δύο πίνακες του Παραδείγματος 3.2.4 η πλησιέστερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής της φασματικής τους ακτίνας δίνεται από το άνω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.2.

Αντίστοιχα κάποιες προσεγγίσεις για την εύρεση κάτω φραγμάτων φασματικής ακτίνας διατυπώνονται στο επόμενο θεώρημα και μπορούν να εφαρμοστούν σε μη αρνητικό πίνακα αλλά και σε οποιονδήποτε τετραγωνικό πίνακα, για την απόδειξή τους ο αναγνώστης παραπέμπεται [15, Theorem 3.1, Theorem 3.3].

Θεώρημα 3.2.6

Έστω $A \in M_n(R^+)$ και m ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $\text{rank}(A) \leq m \leq n$, όπου $\text{rank}(A)$ είναι ο βαθμός του πίνακα. Τότε για το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας ισχύουν:

$$\rho(A) \geq \left(\frac{|\text{tr}^2(A) - \text{tr}(A^2)|}{m(m-1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{για } m \geq 2 \quad (3.37)$$

$$\rho(A) \geq \left(\frac{|\text{tr}(A) \cdot \text{tr}(A^2) - \text{tr}(A^3)|}{m(m-1)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{για } m \geq 2 \quad (3.38)$$

$$\rho(A) \geq \left(\frac{|2\text{tr}(A^3) - 3\text{tr}(A^2) \cdot \text{tr}(A) + \text{tr}^3(A)|}{m(m-1)(m-2)} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{για } m \geq 3 \quad (3.39)$$

όπου $\text{tr}(A)$ συμβολίζει το ίχνος του πίνακα A .

Εφαρμόζοντας σε μη αρνητικούς πίνακες το αποτέλεσμα των Wolkowicz and Styan [24, Theorem 3.1, σχέση (3.12)], που αναφέρεται σε πίνακες με μιγαδικά στοιχεία, μπορούμε να αποκτήσουμε ένα κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας τους, αποτέλεσμα που διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα. Για την πλήρη απόδειξή του ο αναγνώστης παραπέμπεται [24, Theorem 3.1], λαμβάνοντας υπόψη ότι οι πίνακες είναι μη αρνητικοί, συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι μη αρνητικός αριθμός (βλέπε, Θεώρημα 2.1.1) και $\text{tr}(A) \geq 0$.

Θεώρημα 3.2.7

Έστω $A \in M_n(R^+)$. Τότε για το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας ισχύει:

$$\rho(A) \geq \frac{\text{tr}(A)}{n} \quad (3.40)$$

Παράδειγμα 3.2.8

Έστω οι μη αρνητικοί πίνακες $A, B \in M_4(R^+)$ του Παραδείγματος 3.2.4. Να βρεθούν τα κάτω φράγματα της φασματικής ακτίνας των πινάκων A και B εφαρμόζοντας τα Θεωρήματα 3.2.6 και 3.2.7, αντίστοιχα.

- i). Για τη εφαρμογή του Θεωρήματος 3.2.6 χρειάζεται να επιλέξουμε κατάλληλους ακεραίους m ώστε να ισχύει η προϋπόθεση $\text{rank}(A) \leq m \leq n$. Ο πίνακας A , όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο Παράδειγμα 3.2.4 έχει $\text{rank}(A) = 3$, οπότε θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα κάτω φράγματα φασματικής ακτίνας για $m = 3$ και για $m = 4$.

Από την (3.37) έχουμε:

- όταν $m = 3$, τότε $\rho(A) \geq 0.8165$
- όταν $m = 4$, τότε $\rho(A) \geq 0.5774$

Όμοια από την (3.38) έχουμε:

- όταν $m = 3$, τότε $\rho(A) \geq 1.2940$
- όταν $m = 4$, τότε $\rho(A) \geq 1.0270$

Τέλος, από την (3.39) έχουμε:

- όταν $m = 3$, τότε $\rho(A) \geq 1.9129$
- όταν $m = 4$, τότε $\rho(A) \geq 1.2051$

Επιπλέον εφαρμόζοντας την (3.40) του Θεωρήματος 3.2.7 προκύπτει ότι το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας του πίνακα A είναι:

$$\rho(A) \geq 1$$

- ii). Αντίστοιχα εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.6 για τον πίνακα B , ο οποίος είναι full rank, οπότε ισχύει $m = n = 4$. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις (3.37), (3.38) και (3.39) παίρνουμε:

$$\text{από την (3.37), } \rho(B) \geq 1.9579$$

$$\text{από την (3.38), } \rho(B) \geq 2.0274$$

$$\text{από την (3.39), } \rho(B) \geq 1.9129$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας την (3.40) του Θεωρήματος 3.2.7 προκύπτει ότι το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας του πίνακα B είναι:

$$\rho(B) \geq 2$$

Για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα ο αναγνώστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τον Κώδικα B.7 του Παραρτήματος Β, ο οποίος υλοποιεί τα Θεωρήματα 3.2.6 και 3.2.7, κώδικας που υλοποιήθηκε και για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων των πινάκων A, B του Παραδείγματος 3.2.8. □

Ο ακόλουθος πίνακας είναι συγκεντρωτικός με όλα τα αποτελέσματα για τα άνω και κάτω φράγματα της φασματικής ακτίνας των πινάκων που μελετήθηκαν στα Παραδείγματα 3.2.4 και 3.2.8.

Πίνακας 3.3: Φράγματα φασματικής ακτίνας των πινάκων του Παραδείγματος 3.2.4

Θεωρήματα- Σχέσεις	m	Φράγματα φασματικής ακτίνας	
		Πίνακας A	Πίνακας B
		rank(A)=3, $\rho(A)=3.9430$	rank(B)=4, $\rho(B)=3$
Θεώρημα 3.2.1 (3.32) Θεώρημα 3.2.6 (3.37)	m=3	$0.8165 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	
	m=4	$0.5774 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	$1.9579 \leq \rho(B) \leq 4.2913$
Θεώρημα 3.2.1 (3.32) Θεώρημα 3.2.6 (3.38)	m=3	$1.2940 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	
	m=4	$1.0270 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	$2.0274 \leq \rho(B) \leq 4.2913$
Θεώρημα 3.2.1 (3.32) Θεώρημα 3.2.6 (3.39)	m=3	$1.9129 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	
	m=4	$1.2051 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	$1.9129 \leq \rho(B) \leq 4.2913$
Θεώρημα 3.2.1 (3.32) Θεώρημα 3.2.7 (3.40)		$1 \leq \rho(A) \leq 6.4083$	$2 \leq \rho(B) \leq 4.2913$
Θεώρημα 3.2.2 (3.33) Θεώρημα 3.2.6 (3.37)	m=3	$0.8165 \leq \rho(A) \leq 4.5992$	
	m=4	$0.5774 \leq \rho(A) \leq 4.6054$	$1.9579 \leq \rho(B) \leq 3.7229$
Θεώρημα 3.2.2 (3.33) Θεώρημα 3.2.6 (3.38)	m=3	$1.2940 \leq \rho(A) \leq 4.5992$	
	m=4	$1.0270 \leq \rho(A) \leq 4.6054$	$2.0274 \leq \rho(B) \leq 3.7229$
Θεώρημα 3.2.2 (3.33) Θεώρημα 3.2.6 (3.39)	m=3	$1.9129 \leq \rho(A) \leq 4.5992$	
	m=4	$1.2051 \leq \rho(A) \leq 4.6054$	$1.9129 \leq \rho(B) \leq 3.7229$
Θεώρημα 3.2.2 (3.33) Θεώρημα 3.2.7 (3.40)	m=3	$1 \leq \rho(A) \leq 4.5992$	
	m=4	$1 \leq \rho(A) \leq 4.6054$	$2 \leq \rho(B) \leq 3.7229$

Θεώρημα 3.2.3 (3.34) Θεώρημα 3.2.6 (3.37)			$1.9579 \leq \rho(B) \leq 4.1064$
Θεώρημα 3.2.3 (3.34) Θεώρημα 3.2.6 (3.38)			$2.0274 \leq \rho(B) \leq 4.1064$
Θεώρημα 3.2.3 (3.34) Θεώρημα 3.2.6 (3.39)			$1.9129 \leq \rho(B) \leq 4.1064$
Θεώρημα 3.2.3 (3.34) Θεώρημα 3.2.7 (3.40)			$2 \leq \rho(B) \leq 4.1064$

Σχόλιο 3.2.9

Από τον Πίνακα 3.3 παρατηρούμε ότι για τον πίνακα A η πλησιέστερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής της φασματικής του ακτίνας δίνεται από το κάτω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.6, το οποίο υπολογίζεται από την (3.39) για $m = 3$ και από το άνω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.2, το οποίο υπολογίζεται από την (3.33) επίσης για $m = 3$.

Επιπλέον για τον πίνακα B διαπιστώνουμε ότι η πλησιέστερη προσέγγιση της πραγματικής τιμής της φασματικής του ακτίνας δίνεται από το κάτω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.6, το οποίο υπολογίζεται από την (3.38) και από το άνω φράγμα του Θεωρήματος 3.2.2, το οποίο υπολογίζεται από την (3.33) για $m = 4$, καθώς ο πίνακας B είναι full rank.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] M. Adam and Aik. Aretaki, Sharp bounds for eigenvalues of the generalized k, m -step Fibonacci matrices, Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications, NASCA 2018, Kalamata, Greece, (July, 2-6, 2018).
- [2] M. Adam, D. Aggeli and Aik. Aretaki, Some new bounds on the spectral radius of nonnegative matrices, submitted.
- [3] M. Adam and N. Assimakis, k -step Fibonacci sequences and Fibonacci matrices, Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, vol.20, (2017), pp. 1183-1206.
- [4] M. Adam, N. Assimakis and G. Tziallas, Generalized k, m -step Fibonacci sequences and matrices, Proceedings of the 12th International Conference of AHA-Algebraic Hyperstructures and its Applications, (2014), Int. J. of Algebraic Hyperstructures and Its Applications, vol. 2, is. 1, (2015), 125-134.
- [5] A. Berman and R.J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, 1st edition Academic Press, 1979, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [6] A. Brauer, Limits for the characteristic roots of a matrix II, Duke Math. Journal, vol.14, (1947), pp. 21-26.
- [7] A. Brauer and I.C Gentry, Bounds for the greatest characteristic root of an irreducible Nonnegative matrix, Linear Algebra and Applics, vol. 8, (1974),pp. 105-107.
- [8] X. Duan and B. Zhou, Sharp bounds on the spectral radius of a nonnegative matrix, Linear Algebra and Applics, vol. 439, (2013), pp. 2961-2970.
- [9] G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen, Sitzungsber, Kön. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, (1912), 465—477.
- [10] S. Gerschgorin, Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser.Fiz-Mat, vol.6, (1931), pp.749-754.
- [11] G. Golub and C.F. Van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 3rd edition 1996.

- [12] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.
- [13] Bill G. Horne, Lower bounds for the spectral radius of a matrix, *Linear Algebra and Applica*, vol. 263, (1997), pp.261–273.
- [14] D. Huang and L. You, Bounds on the spectral radius of a nonnegative matrix and its application, *Journal of Applied Mathematics*, (2016), article ID 3812736, 7 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2016/3812736>
- [15] T.Z. Huang and L. Wang, Improving bounds for eigenvalues of complex matrices using Traces, *Linear Algebra and Applica*, vol. 426, (2007), pp. 841-854.
- [16] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [17] A. Melman, Upper and lower bounds for the Perron root of a nonnegative matrix, *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 61,(2013), pp. 171-181.
- [18] A. Melman, Generalizations of Gershgorin disks and polynomial zeros, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 138,(2010), pp.2349-2364.
- [19] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM 2000.
- [20] H. Minc, *Nonnegative Matrices*, John and Sons Inc., New York, 1988.
- [21] W.K. Nicholson, *Linear Algebra with Applications*, PWS Publishing Company, ITP, Boston, 3rd edition, 1995.
- [22] D. Noutsos, Perron-Frobenius theory and some extensions, Como, Italy, (2008), the presentation available at <http://www.math.uoi.gr/dnoutsos/Papers-pdf-files/slide-perron.pdf>
- [23] Oscar Rojo, Ricardo L. Soto, T. Avila and Hector Rojo, Localization of eigenvalues in elliptic regions, *Comput. Math. Appl.* vol. 29, (1995), pp. 3–11.
- [24] H. Wolkowicz and G. Styan, Bounds for eigenvalues using traces, *Linear Algebra Appl.*, vol. 29, (1980), pp.471-506.
- [25] R. Xing and B. Zhou, Sharp bounds for the spectral radius of nonnegative matrices, *Linear Algebra and its applications*, vol.449, (2014), pp. 194-209.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Ο ακόλουθος Κώδικας Α.1 δημιουργήθηκε για τον Αλγόριθμο 2.2.3 προκειμένου να υπολογίζονται οι ακτίνες των κύκλων Gerschgorin και να σχεδιάζεται η Gerschgorin περιοχή.

Κώδικας Α.1

```
function [r,e] = gerschgorin(A)
[n,n]=size(A);
    e=eig(A);
    plot(real(e), imag(e), 'ro')
hold on
for i=1:1:n
    r=sum(A,2);
end
for i=1:1:n
    R(i)=r(i)-A(i,i);
    for theta=0:0.01:2*pi
        x=A(i,i)+R(i)*cos(theta);
        y=R(i)*sin(theta);
        plot(x,y,'.b')
        hold on
    end
end
end
end
```

Ο ακόλουθος Κώδικας A.2 δημιουργήθηκε για τον Αλγόριθμο 2.2.9 προκειμένου να υπολογίζονται οι καμπύλες Brauer και συνεπώς να σχεδιάζεται η Brauer περιοχή.

Κώδικας A.2

```
function [e]=curvbrauer(A)
[n,n]=size(A);
e=eig(A);
plot(real(e), imag(e), 'bo')
hold on
for i=1:1:n
    r=sum(A,2);
end
for i=1:1:n
    R(i)=r(i)-A(i,i);
    for j=1:1:n
        if j~=i
            R(j)=r(j)-A(j,j);
            for x=-5:0.1:5
                a1=(x-A(i,i))^2;
                a2=(x-A(j,j))^2;
                b=a1+a2;
                f=R(i)^2;
                g=R(j)^2;
                delta=b^2-4*(a1*a2-f*g);
                delta1=sqrt(delta);
                c1=(-b+delta1)/2;
                y1=sqrt(c1);
                y2=-sqrt(c1);
                plot(x,y1,'r',x,y2,'k');
            end
        end
    end
end
end
```

Το ακόλουθο script A.3 δημιουργήθηκε για να σχεδιάζει την περιοχή Melman (ή αλλιώς Γενικευμένη Gerschgorin περιοχή) του πίνακα A του Παραδείγματος 2.2.16.

Script A.3

```
[m,n]=size(A);
e=eig(A);
plot(real(e), imag(e), 'x')
hold on

syms x y
f1 =(4*x^2*y^2 + (x^2 - y^2 - 1)^2)^(1/2) ==
      2*(x^2 + y^2)^(1/2) + 4
ez1=ezplot(f1, [-10 10])
set(ez1,'color',[0 0 1])

f2 =(4*x^2*y^2 + (x^2 - y^2 - 1)^2)^(1/2) ==
      4*(x^2 + y^2)^(1/2) + 2
ez2=ezplot(f2, [-10 10])
set(ez2,'color',[1 0 0])
hold on

f3 =(4*x^2*y^2 + (x^2 - y^2 - 4)^2)^(1/2) ==
      3*(x^2 + y^2)^(1/2) + 6
ez3=ezplot(f3, [-10 10])
set(ez3,'color',[0 1 0])
```

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.19 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας A.4 για να σχεδιάζει την ελλειπτική περιοχή του επιπέδου, όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα, χρησιμοποιώντας το ίχνος και τα στοιχεία του.

Κώδικας A.4

```
function [r,e] = ellipseH(A)

r=rank(A);

[n,n]=size(A);

    e=eig(A);

    plot(real(e), imag(e), 'bo')

hold on

for m=r:1:n

    t=trace(A);

    af=norm(A, 'fro');

    tab2=(abs(t))^2/n;

    c1=(af^2-tab2)^2;

    Ano=A'*A-A*A';

    na=norm(Ano, 'fro')^2;

    c2=c1-(1/2)*na;

    cA=sqrt(c2)+tab2;

    t2=trace(A^2);

    cx=cA+t2-2*(t^2/m);

    r1=(m-1)/(2*m);

    cxr1=r1*cx;

    rx=sqrt(cxr1);

    cy=cA-t2;
```

```
cyr2=r1*cy;
ry=sqrt(cyr2);
x0=t/m;
y0=0;
    for theta=0:0.01:2*pi
        x=x0+rx*cos(theta);
        y=y0+ry*sin(theta);
        hold on
        plot(x,y, '.r')
    end
end
end
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.11 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.1, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των φραγμάτων εντοπισμού της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B.1

```
function [lbBr,upbBr]=uplowbBrauer(A)
e=eig(A);
rhoA=max(e);
[n,n]=size(A);
for i=1:1:n
    r=sum(A,2);
end
for i=1:1:n
    R(i)=r(i)-A(i,i);
    for j=1:1:n
        if j~=i
            R(j)=r(j)-A(j,j);
        end
    end
end
end
for i=1:1:n
    for j=1:1:n
        if i~=j
            F1=A(i,i)+A(j,j);
```

```

        F2=A(i,i)-A(j,j);
        F3=F2^2+4*R(i)*R(j);
        F4=sqrt(F3);
        Br(i,j)=F1+F4;
    end
end
end
t=0;
for i=1:1:(n-1)
    for j=(i+1):1:n
        t=t+1;
        Bra(t)= Br(i,j);
    end
end
lbBr=(1/2)*min(Bra);
upbBr=(1/2)*max(Bra);
end

```

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.13 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.2, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των φραγμάτων εντοπισμού της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B.2

```
function [lbme1,ubme1] = uplowbMelman(A)

e=eig(A);
rhoA=max(e);
[n,n]=size(A);

for i=1:1:n
    r=sum(A,2);
end

for i=1:1:n
    R(i)=r(i)-A(i,i);

    for j=1:1:n
        Rm(i,j)=R(i)-A(i,j);
    end
end

i=1;
for j=(i+1):1:n
    d1m=(A(i,i)-A(j,j)+Rm(i,j))^2;
    dm=d1m+4*A(i,j)*R(j);
    lb(j)=A(i,i)+A(j,j)+Rm(i,j)+sqrt(dm);
    M(i,j)=lb(j);
end
M(1,1)=max(M(i,j),[],2);
for i=2:1:n
    for j=1:1:(i-1)
        d1m=(A(i,i)-A(j,j)+Rm(i,j))^2;
        dm=d1m+4*A(i,j)*R(j);
        lb(j)=A(i,i)+A(j,j)+Rm(i,j)+sqrt(dm);
        M(i,j)=lb(j);
    end
end
```



```

end

for j=(i+1):1:n
    d1m=(A(i,i)-A(j,j)+Rm(i,j))^2;
    dm=d1m+4*A(i,j)*R(j);
    lb(j)=A(i,i)+A(j,j)+Rm(i,j)+sqrt(dm);
    M(i,j)=lb(j);
    M(i,i)=max(lb(j), [], 2);
end

end

M(n,n)=M(n,n-1);
melmax1=max(M, [], 2);
lbmel=(1/2)*min(melmax1);
melmin2=min(M, [], 2);
ubmel=(1/2)*max(melmin2);
end

```

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.15 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.3, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των φραγμάτων εντοπισμού της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B.3

```
function [rhoA,r,lbr,ubr] = uplowbDZ(A)
e=eig(A);
rhoA=max(e);
[n,n]=size(A);
for i=1:1:n
    r=sum(A,2);
end
for i=1:1:(n-1)
    if r(i)< r(i+1)
        disp('theorems 2.1 and 2.2 are not applied')
    else
        disp('theorems 2.1 and 2.2 are applied')
    end
end
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);
end
Mm=max(d);
Ao=A-diag(d);
Nm=max(max(Ao));
%Duan-Zhou->Theorem 2.1 upper bound
for l=2:1:n
    b2r=(r(l)-Mm+Nm)^2;
    srd=0;
    for k=1:1:(l-1)
        srd=r(k)-r(l)+srd ;
    end
end
```

```

end
b3r=4*Nm*srd;
deltar=b2r+b3r;
des=sqrt(deltar);
psilr(1)=(r(1)+Mm-Nm+des)/2;
end
psilr(1)=r(1);
psilr
ubr=min(psilr)
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);
end
Sm=min(d);
A1=A;
for i=1:1:n
    A1(i,i)=max(A1(i,:));
end
x=n^2;
new=zeros(1,x);
for i=1:1:n
    j=1+(i-1)*n;
    k=i*n;
    new(j:k)=A1(i,:);
end
Tm=min(new);
%%Duan-Zhou->Theorem 2.2-LAA
b2tr=(r(n)-Sm+Tm)^2;
srd=0;
for k=1:1:(n-1)
    srd=r(k)-r(n)+srd ;
end
b3tr=4*Tm*srd;

```

```
deltar=b2tr+b3tr;  
des=sqrt(deltar);  
lbr=(r(n)+Sm-Tm+des)/2  
end
```

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.18 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.4, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των φραγμάτων εντοπισμού της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B4

```
function [lbrhy, ubrhy] = uplowbHY(A)
e=eig(A);
rhoA=max(e);
[n,n]=size(A);
for i=1:1:n
    r=sum(A,2);
end
for i=1:1:(n-1)
    if r(i)< r(i+1)
        disp('theorems 2.1 and 2.2 are not applied')
    else
        disp('theorems 2.1 and 2.2 are applied')
    end
end
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);
end
Mm=max(d);
Ao=A-diag(d);
Nm=max(max(Ao));

for l=2:1:n
    b2r=(r(l)-Mm+Nm)^2;
    b3r=4*(l-1)*Nm*(r(l)-r(l));
    deltar=b2r+b3r;
    des=sqrt(deltar);
```

```

        philr(1)=(r(1)+Mm-Nm+des)/2;
end
philr(1)=r(1);
ubrhy=min(philr);
    for i=1:1:n
        d(i)=A(i,i);
    end
Sm=min(d);
A1=A;
    for i=1:1:n
        A1(i,i)=max(A1(i,:));
    end
x=n^2;
new=zeros(1,x);
    for i=1:1:n
        j=1+(i-1)*n;
        k=i*n;
        new(j:k)=A1(i,:);
    end
Tm=min(new);
    for l=2:1:n
        b2tr=(r(n)-Sm+Tm)^2;
        b3tr=4*(l-1)*Tm*(r(l-1)-r(n));
        deltar=b2tr+b3tr;
        des=sqrt(deltar);
        psilr(1)=(r(n)+Sm-Tm+des)/2;
    end
psilr(1)=r(n);
lbrhy=max(psilr);
end

```

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.23 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.5, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των φραγμάτων εντοπισμού της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B5

```
function [ubm, lbm] = uplowbXZm(A)
e=eig(A);
rhoA =max(e);
[n,n]=size(A);
    for i=1:1:n
        r=sum(A,2);
    end
    for i=1:1:n
        K=0;
        for j=1:1:n
            K=A(i,j)*r(j)+K;
        end
        M(i)=K;
        m(i)=M(i)/r(i);
    end
for i=1:1:(n-1)
    if m(i) < m(i+1)
        disp('theorems 2.1 and 2.3 are not applied')
    else
        disp('theorems 2.1 and 2.3 are applied')
    end
end
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);
end
Mm=max(d);
```

```

Ao=A-diag(d);
Nm=max(max(Ao));
for i=1:1:n
    for j=1:1:n
        rat(i,j)=r(i)/r(j);
    end
end
b=max(max(rat));
c=min(min(rat));
for l=2:1:n
    b2m=(m(l)-Mm+Nm*b)^2;
    smd=0;
    for k=1:1:(l-1)
        smd=m(k)-m(l)+smd;
    end
    b3m=4*Nm*b*smd;
    deltam=b2m+b3m;
    des=sqrt(deltam);
    philm(l)=(m(l)+Mm-Nm*b+des)/2;
end
philm(1)=m(1);
ubm=min(philm);
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);
end
Sm=min(d);
A1=A;
for i=1:1:n
    A1(i,i)=max(A1(i,:));
end
x=n^2;
new=zeros(1,x);

```



```

    for i=1:1:n
        j=1+(i-1)*n;
        k=i*n;
        new(j:k)=A1(i,:);
    end
Tm=min(new);
b2tm=(m(n)-Sm+Tm*c)^2;
smd=0;
    for k=1:1:(n-1)
        smd=m(k)-m(n)+smd ;
    end
    b3tm=4*Tm*c*smd;
    deltam=b2tm+b3tm;
    des=sqrt(deltam);
    lbm=(m(n)+Sm-Tm*c+des)/2;
end

```

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.28 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.6, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των φραγμάτων εντοπισμού της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B.6

```
function [ubw, lbw] = uplowbw(A)

e=eig(A);
rhoA =max(e);
[n,n]=size(A);
    for i=1:1:n
        r=sum(A,2);
    end
    for i=1:1:n
        K=0;
        for j=1:1:n
            K=A(i,j)*r(j)+K;
        end
        M(i)=K;
        m(i)=M(i)/r(i);
    end
    for i=1:1:n
        L=0;
        for j=1:1:n
            L=A(i,j)*m(j)+L;
        end
        W(i)=L;
        w(i)=W(i)/m(i);
    end
    for i=1:1:(n-1)
        if w(i) < w(i+1)
            disp('theorems 2.1 and 2.3 are not applied')
```

```

        else
            disp('theorems 2.1 and 2.3 are applied')
        end
    end
end
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);
end
Mw=max(d);
Ao=A-diag(d);
Nw=max(max(Ao));
for i=1:1:n
    for j=1:1:n
        rat(i,j)=m(i)/m(j);
    end
end
end
b=max(max(rat));
c=min(min(rat));
for l=2:1:n
    b2w=(w(l)-Mw+Nw*b)^2;
    swd=0;
    for k=1:1:(l-1)
        swd=w(k)-w(l)+swd ;
    end
    b3w=4*Nw*b*swd;
    deltaw=b2w+b3w;
    des=sqrt(deltaw);
    philw(l)=(w(l)+Mw-Nw*b+des)/2;
end
philw(1)=w(1);
ubw=min(philw);
for i=1:1:n
    d(i)=A(i,i);

```

```

        end
Sw=min(d);
A1=A;
for i=1:1:n
    A1(i,i)=max(A1(i,:));
end
x=n^2;
new=zeros(1,x);
    for i=1:1:n
        j=1+(i-1)*n;
        k=i*n;
        new(j:k)=A1(i,:);
    end
Tw=min(new);
b2tw=(w(n)-Sw+Tw*c)^2;
swd=0;
    for k=1:1:(n-1)
        swd=w(k)-w(n)+swd ;
    end
b3tw=4*Tw*c*swd;
deltaw=b2tw+b3tw;
des=sqrt(deltaw);
lbw=(w(n)+Sw-Tw*c+des)/2;
end

```

Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 3.2.1, 3.2.2 και 3.2.3 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.7, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των άνω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B.7

```
function[r,e,rhoA,upbtr15,upbtr17,upbtr15new]=ubtrace(A)

%sxeseis (3.32), (3,33), (3.34)

r=rank(A);
[n,n]=size(A);
e=eig(A);
rhoA=max(e);

    for m=r:1:n
        t=trace(A);
        af=norm(A,'fro');
        tab2=((abs(t))^2)/n;
        c1=(af^2-tab2)^2;
        Ano=A'*A-A*A';
        na=norm(Ano,'fro')^2;
        c2=c1-(1/2)*na;
        cA=sqrt(c2)+tab2;
        t12=t^2;
        t2=trace(A^2);
        t3=((abs(t))^2)/m;
        t4=abs(t2-(t12/m));
        cx=cA-t3+t4;
        r1=(m-1)/(2*m);
        cxr1=r1*cx;
        rx=sqrt(cxr1);
        upbtr15(m)=((abs(t))/m)+rx;
    end

rn=(n-1)/n;
```

```
t5=(abs(t))/n;  
t6=af^2-tab2;  
t7=sqrt(rn*t6);  
upbtr17=t5+t7;  
  
rn=(n-1)/n;  
t8=cA-tab2;  
t9=sqrt(rn*t8);  
upbtr15new=t5+t9;  
end
```

Σύμφωνα με τα Θεωρήματα 3.2.6 και 3.2.7 δημιουργήθηκε ο ακόλουθος Κώδικας B.8, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα A .

Κώδικας B.8

```
function [r,rhoA,lb31,lb35,lb32,lb1] = impc31(A)
%sxeseis (3.37), (3.38), (3.39), (3.40)

r=rank(A);
[n,n]=size(A);
e=eig(A);
rhoA=max(e);
t=trace(A);
t2=trace(A^2);
t3=trace(A^3);

for m=r:1:n
    p131= abs(t^2-t2);
    p2=m*(m-1);
    lb31(m)= sqrt(p131/p2);
    p1334=t*t2-t3;
    p135=abs(p1334);
    lb35(m)=(p135/p2)^(1/3);
    p1333=2*t3-3*t2*t+(t^3);
    p132=abs(p1333);
    p3=p2*(m-2);
    lb32(m)=(p132/p3)^(1/3);
end

lb=t/n;
end
```