ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη αξιοπιστίας συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες

Ρούνη Παναγιώτα

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων

Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου

Επ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Λαμία, 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη αξιοπιστίας συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες

Ρούνη Παναγιώτα

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Επιβλέπων

Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου

Επ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Λαμία, 2018

Μελέτη αξιοπιστίας συστημάτων που αποτελούνται από ανταλλάξιμες μονάδες

Ρούνη Παναγιώτα

Τριμελής Επιτροπή:

Ιωάννης Τριανταφύλλου, Επ. Καθηγητής (επιβλέπων)

Χαρίλαος Σανδαλίδης, Επ. Καθηγητής

Κωνσταντίνος Δελήμπασης, Επ. Καθηγητής

Περιεχόμενα

Λίστα Πινάκων

Λίστα Σχημάτων

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη των μονότονων συστημάτων αξιοπιστίας και η ανάπτυξη αλγορίθμου για τον υπολογισμό των συντεταγμένων του διανύσματος της υπογραφής που αφορούν μονότονες δομές αξιοπιστίας.

Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε τα συστήματα (n, f, k) και r-μεταξύ-συνεχόμενων-k-από-τα-n με ανεξάρτητες και ισόνομες μονάδες και κατασκευάζουμε για κάθε ένα αυτά κατάλληλα τροποποιημένος αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του διανύσματος της υπογραφής τους. Η υλοποίηση των προτεινόμενων αλγορίθμων πραγματοποιείται με χρήση τεχνικών Προσομοίωσης Monte Carlo μέσω κατάλληλου λογισμικού (Matlab). Στο πλαίσιο της εργασίας, παρουσιάζεται πλήθος αριθμητικών αποτελεσμάτων που καλύπτουν ποικίλες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού των υπό μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας τόσο για την αριθμητική επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων αλλά και για την εξαγωγή νέων που έχουν μελετηθεί στη βιβλιογραφία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες συστημάτων αξιοπιστίας

1.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

1.1.1 Συστήματα αξιοπιστίας

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε θεμελιώδεις έννοιες για τη μελέτη συστημάτων Αξιοπιστίας. Για τη συγγραφή της παραγράφου αυτής σημαντικές πηγές αποτέλεσαν οι Esary&Proschan (1963), Κούτρας (2003), Esary&Marshall (1964) και Barlow&Proschan (1975).

Για την περιγραφή της κατάστασης της i-μονάδας (i=1,2,...,n) ενός συστήματος αξιοπιστίας χρησιμοποιείται συνήθως μια δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{αν η } i-\text{μονάδα λειτουργεί} \\ 0, \text{αν η } i-\text{μονάδα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Ομοίως το σύστημα, ανάλογα με το ποιες μονάδες του λειτουργούν και ποιες όχι, δύναται και αυτό να βρεθεί σε δύο καταστάσεις: λειτουργία ή μη λειτουργία. Για την περιγραφή της κατάστασης του συστήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια αντίστοιχη δείκτρια συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$\varphi = \begin{cases} 1, \text{αν το σύστημα λειτουργεί} \\ 0, \text{αν το σύστημα δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Η κατάσταση του συστήματος καθορίζεται πλήρως από τις καταστάσεις των μονάδων που το αποτελούν, δηλαδή

$$\varphi=\varphi(\mathbf{x})=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

όπου **x** είναι το διάνυσμα κατάστασης των *n* μονάδων του συστήματος.

Ορισμός 1. *Η συνάρτηση* $\varphi:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *η οποία σε κάθε διάνυσμα κατάστασης* **x** *των μονάδων του συστήματος απεικονίζει την κατάσταση* $\varphi(\mathbf{x})$ *του συστήματος, λέγεται συνάρτηση δομής* (*structurefunction*) *του συστήματος.*

Ένα φυσικό σύστημα θα ήταν κάπως ασυνήθιστο (ή πιθανόν φτωχά σχεδιασμένο) αν η βελτίωση της απόδοσης μιας μονάδας του (αυτό θα μπορούσε να γίνει με αντικατάσταση μιας μονάδας που απέτυχε με μια μονάδα που λειτουργεί) θα προκαλούσε χειροτέρευση του συστήματος (αυτό θα σήμαινε μετάβαση του συστήματος από κατάσταση λειτουργίας σε κατάσταση αποτυχίας). Για το λόγο αυτό περιορίζουμε το ενδιαφέρον μας σε συναρτήσεις δομής που είναι αύξουσες ως προς κάθε μονάδα, με την έννοια ότι η βελτίωση μιας μονάδας του συστήματος συνεπάγεται και την παράλληλη βελτίωση (ή τουλάχιστον τη μη χειροτέρευση) του συστήματος. Επίσης για να αποφύγουμε μελέτη συστημάτων με ελάχιστη αξία και σημασία, δεν θα μελετήσουμε συστήματα, η κατάσταση των οποίων δεν εξαρτάται από την κατάσταση των μονάδων τους.

1.1.2 Μονότονα Συστήματα

Στην παρούσα παράγραφο, θα αναφερθούμε στην έννοια του μονότονου συστήματος και τις βασικές ιδιότητες του που θα φανούν χρήσιμες για τη μελέτη των βασικών διατάξεων αξιοπιστίας.

Ορισμός 2.*Ένα σύστημα ονομάζεται μονότονο ή μονότονης δομής* (*coherentstructure*) *αν ισχύουν τα εξής*

α. *Η συνάρτηση δομής του* $\varphi(\mathbf{x})$ *είναι αύξουσα, δηλαδή*

$$x_i \le y_i,\ i=1,2,\ldots,n \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le \varphi(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \varphi(\mathbf{y})$$

β. *Κάθε μονάδα του επηρεάζει το σύστημα, δηλαδή η φ δεν είναι σταθερή ως προς κάποια συντεταγμένη.*

Όταν για τα διανύσματα $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\{0,1\}^n$ ισχύει $x_i \le y_i$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$ θα γράφουμε

$\mathbf{x}\le\mathbf{y}$ συνεπώς η συνθήκη (*α*) παίρνει τη μορφή *:* $\mathbf{x}\le\mathbf{y} \Rightarrow \varphi(\mathbf{x})\le\varphi(\mathbf{y})$.

Συναρτήσεις δομής που είναι αύξουσες (με την έννοια που δίνεται στη συνθήκη (α) του Ορισμού 2) ονομάζονται ημι-μονότονες (*semi-coherent*). Τα μόνα ημι-μονότονα συστήματα που δεν είναι μονότονα είναι οι δύο περιπτώσεις $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 1$ και $\varphi(\mathbf{x}) \equiv 0$, δηλαδή ένα σύστημα που δουλεύει πάντα ή ένα σύστημα που δεν δουλεύει ποτέ. Στις περιπτώσεις αυτές οι μονάδες δεν επηρεάζουν προφανώς την κατάσταση του συστήματος και συνεπώς για τέτοια συστήματα δεν ισχύει η συνθήκη (β) του παραπάνω ορισμού (Ramamurthy (1990)).

Η ιδιότητα της συνάρτησης δομής των μονότονων συστημάτων να είναι αύξουσες φαίνεται να περιγράφει πολλά πραγματικά συστήματα: Εάν επαρκείς μονάδες λειτουργούν για να προκαλούν τη λειτουργία του συστήματος, τότε η λειτουργία επιπλέον μονάδων θα μπορούσε να βελτιώσει μόνο τα πράγματα, ενώ αντίθετα εάν επαρκείς μονάδες έχουν αποτύχει στο να προκαλέσουν την αποτυχία του συστήματος, τότε η αποτυχία και επιπλέον μονάδων θα μπορούσε μόνο να κάνει τα πράγματα χειρότερα.

Η συνθήκη (α) είναι ισοδύναμη με το ότι η φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, δηλαδή ότι για όλα τα $i=1,2,\ldots,n$ ισχύει

$$\varphi(0_i, \mathbf{x}) \le \varphi(1_i, \mathbf{x}) \text{ για κάθε } \mathbf{x}.$$

Πράγματι αν η φ είναι αύξουσα κατά συντεταγμένες, τότε για κάθε $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ έχουμε

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \le \varphi(y_1, x_2, x_3, ..., x_n) \le \varphi(y_1, y_2, x_3, ..., x_n) \le ... \le \varphi(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Για κάθε μονότονο σύστημα ισχύει

$$\varphi(\mathbf{0})=0, \quad \varphi(\mathbf{1})=1.$$

Πράγματι αν $\varphi(\mathbf{0})=1$, τότε λόγω της μονοτονίας της φ θα ισχύει

$$1=\varphi(\mathbf{0}) \le \varphi(\mathbf{x}) \le 1 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x})=1 \text{ για κάθε } \mathbf{x},$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της συνθήκης (β) (αφού τότε οι μονάδες δεν θα επηρεάζουν το σύστημα, μιας και αυτό θα λειτουργεί πάντα).

Αντίστοιχα αν $\varphi(\mathbf{1})=0$, τότε λόγω της μονοτονίας της φ θα ισχύει ότι

$$0=\varphi(\mathbf{1}) \ge \varphi(\mathbf{x}) \ge 0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{x})=0 \text{ για κάθε } \mathbf{x},$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της συνθήκης (β) (αφού τότε οι μονάδες δεν θα επηρεάζουν το σύστημα, μιας και αυτό δεν θα λειτουργεί ποτέ).

Οι δύο ισότητες, που μόλις αποδείξαμε παραπάνω, δηλώνουν ότι ένα μονότονο σύστημα σίγουρα λειτουργεί αν όλες οι μονάδες του λειτουργούν, ενώ σίγουρα δεν λειτουργεί αν όλες οι μονάδες του δεν λειτουργούν. Στη συνέχεια ακολουθεί μια πρόταση, που αναφέρεται στη συνάρτηση δομής τάξης n, δηλαδή στη συνάρτηση δομής ενός συστήματος με n μονάδες.

1.1.3 Σύνολα λειτουργίας και σύνολα διακοπής

Στην παρούσα παράγραφο θα αναφερθούμε στην έννοια των συνόλων λειτουργίας και διακοπής ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας και θα επικεντρωθούμε στο πως τα παραπάνω σύνολα μπορεί να φανούν χρήσιμα ως προς τη μελέτη μίας διάταξης αξιοπιστίας.

Πρόταση 1. *α. Ένα μονότονο σύστημα λειτουργεί* ($\varphi(\mathbf{x})=1$) *αν και μόνο αν όλες οι μονάδες κάποιου ελάχιστου συνόλου λειτουργίας λειτουργούν* (*δηλαδή* $\exists P : x_i = 1, \forall i \in P$).

β. *Ένα μονότονο σύστημα δεν λειτουργεί* ($\varphi(\mathbf{x})=0$) *αν και μόνο αν όλες οι μονάδες κάποιου ελάχιστου συνόλου διακοπής δεν λειτουργούν.* ($\exists C : x_i = 0, \forall i \in C$)

Η τελευταία πρόταση ισχύει μόνο για μονότονα συστήματα. Σε αντίθετη περίπτωση δεν είναι βέβαιο ότι ισχύουν τα παραπάνω συμπεράσματα. Το παράδειγμα δομής συστήματος που ακολουθεί επιβεβαιώνει τα παραπάνω.

x_1	x_2	x_3	$\varphi(\mathbf{x})$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1

1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Πίνακας 1. Συνάρτηση δομής ενός συστήματος με 3 μονάδες

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα η συνάρτηση δομής του συστήματος δεν είναι μονότονη. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το διάνυσμα {0,0,1} είναι ε.δ.λ. και το σύνολο P={3} είναι ε.σ.λ. και συνεπώς θα έπρεπε για κάθε **x**> {0,0,1} να ισχύει φ(**x**)=1, όμως για το διάνυσμα **x**={0,1,1} το σύστημα δεν λειτουργεί αφού $\varphi(0,1,1)=0$ και συνεπώς δεν ισχύει η πρόταση.

1.1.4 Ελάχιστα σύνολα λειτουργίας και ελάχιστα σύνολα διακοπής

Στην παρούσα παράγραφο θα αναφερθούμε στην έννοια των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας και διακοπής ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας και θα επικεντρωθούμε στο πως τα παραπάνω σύνολα μπορεί να φανούν χρήσιμα ως προς τη μελέτη μίας διάταξης αξιοπιστίας.

Πρόταση 2. (Gertsbakh(1989)) *Αν* ***P***= $\{P_1, P_2, ..., P_M\}$ *είναι η οικογένεια των ελαχίστων συνόλων λειτουργίας* (*ε.σ.λ.*) *μιας μονότονης δομής, τότε η συνάρτηση δομής δίνεται από τον τύπο*

$$\varphi(x) = \max_{j\in\{1,2,...,M\}} \prod_{i\in P_j} x_i = \coprod_{j=1}^{M} \prod_{i\in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{M} (1 - \prod_{i\in P_j} x_i) .$$

Απόδειξη. Έστω φ(**x**)=1. Τότε το **x**=$(x_1, x_2, ..., x_n)$ είναι διάνυσμα λειτουργίας και το $P_x = \{i : x_i = 1\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ θα είναι ένα σύνολο λειτουργίας. Επομένως θα υπάρχει κάποιο ελάχιστο σύνολο λειτουργίας. Τότε υπάρχει ένα ελάχιστο σύνολο λειτουργίας P_{j_0}, τέτοιο ώστε να ισχύει $P_q \subseteq P_x$. Τότε θα έχουμε

$$\prod_{i\in P_{j0}} x_i = 1$$

και είναι φανερό ότι ισχύει

$$\max_{j\in\{1,2,...M\}} \prod_{i\in P_j} x_i = 1 .$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει

$$\max_{j\in\{1,2,..M\}} \prod_{i\in P_j} x_i = 1 .$$

Τότε θα υπάρχει j_0, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\prod_{i\in P_{j_0}} x_i = 1 ,$$

δηλαδή

$$x_i = 1, \ \forall i \in P_{j_0} .$$

Αν τώρα ορίσουμε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{y}$ με τον τύπο

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } i \in P_{j_0} \\ 0, & \text{αν } i \notin P_{j_0} \end{cases}$$

θα έχουμε $\mathbf{y} \le \mathbf{x}$, οπότε

$$1 \le \varphi(\mathbf{y}) \le \varphi(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}) = 1.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει η ισότητα

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j\in\{1,2,..M\}} \prod_{i\in P_j} x_i .$$

Αν ορίσουμε τις δίτιμες συναρτήσεις

$$\gamma_j(\mathbf{x}) = \prod_{i\in P_j} x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν όλες οι μονάδες του } P_j \text{ λειτουργούν} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η συνάρτηση δομής του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max_{j\in\{1,2,..M\}} \gamma_j(\mathbf{x}) = \coprod_{j=1}^{M} \gamma_j(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{M} [1-\gamma_j(\mathbf{x})] = 1 - \prod_{j=1}^{M} [1 - \prod_{j\in P_j} x_i] .$$ ■

Πρόταση 3. (Gertsbakh(1989))*Αν* $\boldsymbol{C}$= $\{C_1, C_2, ..., C_N\}$ *είναι η οικογένεια των ελαχίστων συνόλων διακοπής (ε.σ.δ.) μιας μονότονης δομής, τότε η συνάρτηση δομής δίνεται ως ακολούθως*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j\in\{1,2,\ldots,N\}}(1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i)) = \prod_{j=1}^{N}(1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i)) = \prod_{j=1}^{N}\coprod_{i\in C_j} x_i \ .$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη με την απόδειξη της Πρότασης 2. Αν ορίσουμε τις δίτιμες συναρτήσεις

$$\delta_j(\mathbf{x}) = 1-\prod_{i\in C_j}(1-x_i) = \begin{cases} 0, & \text{αν όλες οι μονάδες του } C_j \text{ έχουν χαλάσει} \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε η συνάρτηση δομής του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min_{j\in\{1,2,\ldots N\}}\delta_j(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{N}\delta_j(\mathbf{x}).$$

Αν φ είναι συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$, είναι εύκολο να δειχθεί ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$\varphi_D(\mathbf{x})=1-\varphi_D(\mathbf{1}\text{-}\mathbf{x})$$

είναι επίσης συνάρτηση δομής ενός μονότονου συστήματος με το ίδιο σύνολο μονάδων I_n .

Το τελευταίο σύστημα λέγεται δυϊκό(*dual*)σύστημα του αρχικού, το οποίο θα ονομάζουμε πρωτεύον σύστημα.

1.2 Ιδιότητες της συνάρτησης δομής

Στην παρούσα παράγραφο θα αναφερθούμε στις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης δομής.

Πρόταση 4. *Μια συνάρτηση δομής φ τάξης $n+1$ είναι ημι-μονότονη (semi-coherent) αν και μόνο αν μπορεί να παρουσιασθεί σαν γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων λ, μ τάξης n όπως φαίνεται στην ακόλουθη σχέση*

$$\varphi(\mathbf{x},x_{n+1})=x_{n+1}\lambda(\mathbf{x})+(1-x_{n+1})\mu(\mathbf{x})$$

με τις συναρτήσεις λ,μ να είναι ημι-μονότονες και να ισχύει $\lambda(\mathbf{x})\geq\mu(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x}$.

Επιπλέον η συνάρτηση δομής φ είναι μονότονη αν και μόνο αν ισχύουν τα παραπάνω και επιπρόσθετα έχουμε ή ότι $\lambda(\mathbf{x})=\mu(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x}$ και λ να είναι μονότονη ή ότι $\lambda(\mathbf{x}) > \mu(\mathbf{x})$ για κάποια $\mathbf{x}$. (Για την απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στους Birnbaum, Esary&Saunders (1961)).

Για την επόμενη πρόταση θα χρειαστούμε τις ακόλουθες έννοιες.

- Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας (*minimalpathvector*) αν

$\varphi(\mathbf{x})=1$ και $\varphi(\mathbf{y})=0$, για κάθε $\mathbf{y}<\mathbf{x}$.

- Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ είναι ελάχιστο διάνυσμα λειτουργίας (ε.δ.λ) τότε το$P_x=\{i{:}x_i=1\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ καλείται ελάχιστο σύνολο λειτουργίας (ε.σ.λ).

- Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ καλείται ελάχιστο διάνυσμα διακοπής (*minimalcutvector*) αν $\varphi(\mathbf{x})=0$ και $\varphi(\mathbf{y})=1$, για κάθε $\mathbf{y}>\mathbf{x}$.

- Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ είναι ελάχιστο διάνυσμα διακοπής (ε.δ.δ) τότε το $C_x=\{i{:}x_i= 0\} \subseteq \{1,2,...,n\}$ καλείται ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ).

1.3 Συνάρτηση αξιοπιστίας

Μία βασική συνάρτηση για τη μελέτη ενός μονότονου συστήματος αξιοπιστίας αποτελεί η λεγόμενη συνάρτηση αξιοπιστίας.

Πρόταση 5. *Έστω R η αξιοπιστία ενός μονότονου συστήματος με n ανεξάρτητες μονάδες. Τότε η συνάρτηση R είναι αύξουσα ως προς το διάνυσμα* $\mathbf{p}=(p_1, p_2,..., p_n)$, *όπου* p_i *η αξιοπιστία της i-μονάδας.*

Απόδειξη. (Gertsbakh(1989)) Για τη συνάρτηση αξιοπιστίας του συστήματος έχουμε

$$R(\mathbf{p}) = E[\varphi(\boldsymbol{X})] = P(\varphi(\boldsymbol{X})=1) = p_iP(\varphi(\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=1) + (1-p_i)P(\varphi(\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=0) =$$

$$p_i\, P(\varphi(1_i;\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=1) + (1-p_i)\, P(\varphi(0_i;\boldsymbol{X})=1 \,/\, X_i=0) =$$

$$p_i\, P(\varphi(1_i;\boldsymbol{X})=1) + (1-p_i)\, P(\varphi(0_i;\boldsymbol{X})=1) =$$

$$p_i\, E[\varphi(1_i;\boldsymbol{X})-\varphi(0_i;\boldsymbol{X})]+E[\varphi(0_i;\boldsymbol{X}].$$

Ο συντελεστής του p_i είναι μη αρνητικός επειδή η συνάρτηση φ είναι μια μονότονη συνάρτηση. Συνεπώς από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $R(\mathbf{p})$ είναι αύξουσα ως προς κάθε p_i . ■

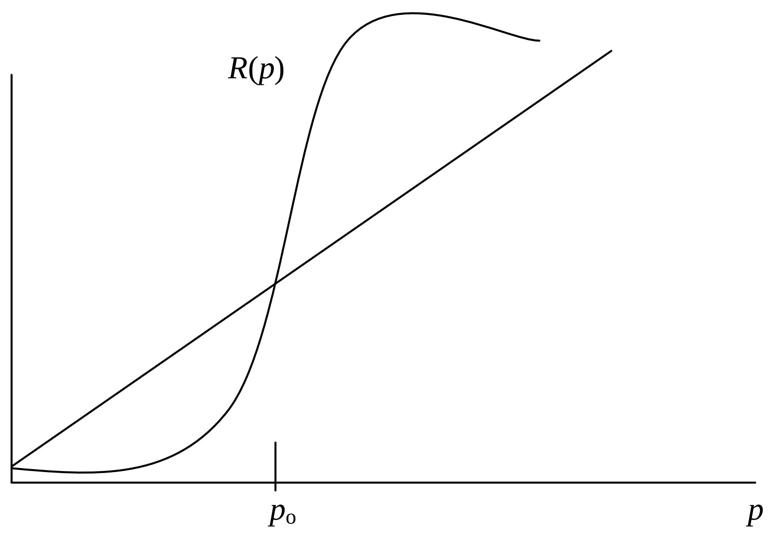
Πρόταση 6. *Η αξιοπιστία R ενός μονότονου i.i.d συστήματος, το οποίο δεν έχει σύνολα λειτουργίας ή διακοπής μεγέθους* 1*, είναι μια συνάρτηση S-μορφής ως προς την αξιοπιστία p των μονάδων του. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια τιμή* p_o *με* $0<p_o<1$ *τέτοια ώστε*

- $R(p_o)=p_o$
- $R(p)<p$ για $0<p<p_o$
- $R(p)>p$ για $p_o<p<1$.

Ηαπόδειξηπαραλείπεται (BarlowandProschan (1975)).

Η ονομασία της συνάρτησης με *S*-μορφή οφείλεται στη γραφική της παράσταση, η οποία θυμίζει το λατινικό γράμμα *S* (Σχήμα 1). Οι Birnbaum, Esary και Saunders (1961) υπολόγισαν την τιμή p_oγια διάφορα συστήματα, λύνοντας την εξίσωση

$$R(p)=p\text{, για } p\in(0,1).$$



Σχήμα 1. Συνάρτηση αξιοπιστίας με *S*-μορφή

1.4 Η έννοια της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος

1.4.1 Ορισμός της υπογραφής ενός συστήματος αξιοπιστίας

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την έννοια της υπογραφής ενός μονότονου συστήματος αποτελούμενο από nμονάδες.Θεωρούμε ένα μονότονο σύστημα με n ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες (i.i.d. system), οι χρόνοι ζωής X_1, X_2,…, X_n των οποίων προέρχονται από μια συνεχή κατανομή F. Αν T είναι ο χρόνος ζωής του συστήματος, τότε η αποτυχία του συστήματος θα συμπίπτει πάντα με το χρόνο ζωής της i-οστής μονάδας για κάποιο $i \in \{1,2,...,n\}$. Συγκεκριμένα αν $X_{(i)}$ δηλώνει τονi-οστό μικρότερο χρόνο ζωής μονάδας, για i=1,2,...,n, τότε έχουμε ότι ο χρόνος ζωής του συστήματος $T \in \{X_{(1)}, X_{(2)},..., X_{(n)}\}$ με πιθανότητα 1.

Ορισμός 3. *Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας* **s**, *όπου* $\mathbf{s}^t = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ *με*

$$s_i = P(T = X_{(i)}), \quad i=1,2,\dots,n$$

όπου $\{X_{(1)}, X_{(2)},..., X_{(n)}\}$ *είναι το διατεταγμένο τυχαίο δείγμα από τη συνεχή κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων του συστήματος.*

Η ιδέα της υπογραφής ενός συστήματος αναπτύχθηκε φυσιολογικά από μια συγκεκριμένη ιδιότητα των μονότονων συστημάτων, στα οποία οι μονάδες είναι όμοιες και ανεξάρτητες. Για τέτοια συστήματα, η πιθανότητα ότι το σύστημα αποτυγχάνει στην i-οστή αποτυχία μονάδας δεν εξαρτάται από την κατανομή F των χρόνων ζωής των μονάδων. Αντίθετα η πιθανότητα αυτή είναι συνάρτηση μόνο του σχεδιασμού του συστήματος.

Το γεγονός ότι η υπογραφή **s** εξαρτάται μόνο από το σύστημα, και όχι από την κατανομή F, είναι συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε μία από τις $n!$ διατάξεις των χρόνων ζωής X_1, X_2,..., X_n των μονάδων του συστήματος είναι το ίδιο πιθανόν να συμβεί υπό την i.i.d. υπόθεση. Συνεπώς η πιθανότητα ότι η αποτυχία της i-οστής μονάδας είναι μοιραία για το σύστημα εξαρτάται αποκλειστικά από την πιθανότητα ότι η τελευταία μονάδα που λειτουργεί σε ένα ελάχιστο σύνολο διακοπής (ε.σ.δ.) είναι ταυτόχρονα η i-οστή μονάδα που αποτυγχάνει γενικά στο σύστημα. Με άλλα λόγια για να υπολογισθεί η υπογραφή **s** ενός συστήματος αρκεί να εξετασθούν τα ελάχιστα σύνολα διακοπής και να μετρηθούν πόσοι συνδυασμοί ανάμεσα στις ισοπίθανες μεταθέσεις των X_1, X_2,..., X_n συμπίπτουν ακριβώς με την αποτυχία κάποιου ελαχίστου συνόλου διακοπής κατά το συμβάν $X_{(i)}$.

Επομένως εναλλακτικά η υπογραφή **s** ενός μονότονου συστήματος με n μονάδες μπορεί να δοθεί αναφορικά με τις διατάξεις των χρόνων ζωής X_1, X_2,…, X_n των μονάδων του συστήματος ως εξής.

Ορισμός 4. *Υπογραφή (signature) ενός μονότονου i.i.d συστήματος με n μονάδες ονομάζεται το διάνυσμα πιθανότητας* **s**, *όπου* $\mathbf{s}^t = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ *με*

$$s_i = \frac{A}{n!}$$

όπου A είναι το πλήθος των μεταθέσεων για τις οποίες η $i-$οστή αποτυχία προκαλεί αποτυχία του συστήματος.

1.4.2. Υπολογισμός της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός συστήματος μέσω της υπογραφής

Η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος μπορεί να βοηθήσει στον υπολογισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας του (Boland, Samaniego&Verstup (2001)). Αρχικά θεωρούμε τις συντεταγμένες s_iτης υπογραφής του συστήματος. Τότε, για ένα σύστημα που αποτελείται από n όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες με αξιοπιστία p, ορίζουμε το διάνυσμα **d,** οι συντεταγμένες του οποίου δίνονται συναρτήσει των s_iαπό τον ακόλουθο τύπο

$$d_r = \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{i=n-j+1}^{n} s_i \right\} \binom{n}{j} \binom{n-j}{r-j} (-1)^{r-j}, \quad \gamma\iota\alpha \quad r = 1,2,\ldots,n.$$

Οι συντεταγμένες d_r ονομάζονται *dominations* και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$d_0 = 0, \quad \sum_{r=1}^{n} d_r = 1.$$

Προσδιορίζοντας τις συντεταγμένες d_r από τον παραπάνω τύπο, στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την αξιοπιστία $R(p)$ του συστήματος ως εξής

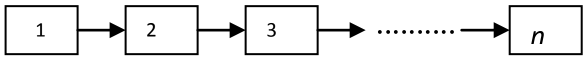
$$R(p) = \sum_{r=1}^{n} d_r p^r \ .$$

1.4.3.Η υπογραφή γνωστών συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υπολογισμού της υπογραφής αρκετών γνωστών συστημάτων, όπως του σειριακού, του παράλληλου, της γέφυρας και άλλων. Για την περάτωση της συγκεκριμένης παραγράφου ιδιαίτερα χρήσιμο υπήρξε το σύγγραμμα των Soyer, Mazzuchi&Singpurwalla (2004).

- **Σειριακό σύστημα (SS, *SerialSystem*)**

Το σειριακό σύστημα αποτυγχάνει όταν τουλάχιστον μία μονάδα του αποτύχει ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες του λειτουργούν. Η διάταξη του σειριακού συστήματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 2. Σειριακό σύστημα με *n* μονάδες

Το μοναδικό ελάχιστο σύνολο λειτουργίας του σειριακού συστήματος είναι το $\{1,2,...,n\}$, ενώ ελάχιστα σύνολα διακοπής είναι όλα τα μονοσύνολα $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$, δηλαδή έχουμε**P** = $\{\{1,2,...,n\}\}$ και**C** = $\{\{1\}, \{2\},..., \{n\}\}$.

Η συνάρτηση δομής του σειριακού συστήματος δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{1}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1 x_2 ... x_n) = x_1 x_2 ... x_n \ .$$

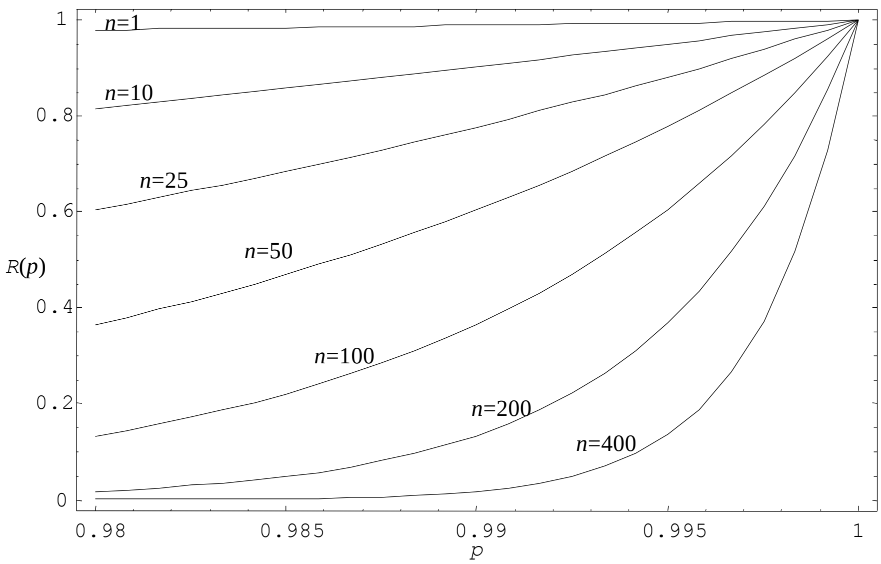
Η αξιοπιστία του σειριακού συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i) = p_1 p_2 ... p_n = R_{SS} \ .$$

Στην ειδική περίπτωση ενός i.i.d. σειριακού συστήματος με *n* μονάδες (οπότε θα ισχύει $p_i = p, \quad i = 1,2,...,n$) η συνάρτηση αξιοπιστίας παίρνει τη μορφή

$$R(p) = R_{SS} = p^n \ .$$

Η αξιοπιστία ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να πάρει υψηλές τιμές μόνο στην περίπτωση όπου οι μονάδες από τις οποίες αποτελείται έχουν πολύ υψηλή αξιοπιστία, ιδιαίτερα αν το πλήθος των μονάδων του είναι μεγάλο. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται και γραφικά από το ακόλουθο διάγραμμα, όπου παριστάνεται γραφικά η αξιοπιστία ενός σειριακού συστήματος με *n* μονάδες ως προς την αξιοπιστία *p* της κάθε μονάδας του.



Σχήμα 3. Αξιοπιστία σειριακού συστήματος *n* μονάδων

Επιπλέον να επισημάνουμε ότι σε περίπτωση που έχουμε ένα σειριακό σύστημα *n* μονάδων με συσχετισμένους χρόνους ζωής, τότε ο υπολογισμός της αξιοπιστίας του συστήματος θα πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη τη *n*-διάστατη κατανομή τους. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι αν η συσχέτιση ανάμεσα στις *n* μονάδες είναι θετική, τότε η αξιοπιστία του συστήματος είναι μεγαλύτερη από αυτή του i.i.d σειριακού συστήματος, δηλαδή στην πραγματικότητα υπερβαίνει την αξιοπιστία που προβλέπει το μοντέλο, το οποίο έχει υποθέσει ανεξάρτητες και όμοιες μονάδες (Meeker&Escobar (1998)).

Η υπογραφή **s** του ενός i.i.d. σειριακού συστήματος με *n* μονάδες δίνεται από τον τύπο

$$s_{SS}^{t} = (1,0,0,\ldots,0)\,.$$

Πράγματι η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του i.i.d σειριακού συστήματος ταυτίζεται με την πρώτη αποτυχία μονάδας του συστήματος είναι ίση με 1 ($P(T = X_{(1)}) = 1)$, ενώ η πιθανότητα για το σύστημα να λειτουργεί και μετά από την αποτυχία μιας μονάδας του είναι ίση με 0, συνεπώς και η πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτιστεί με τον *i*-οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας είναι ίση με μηδέν για όλα τα $i \geq 2$.

Επίσηςθα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την υπογραφή του συστήματος με χρήση των ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής. Το σειριακό σύστημα με

$n=5$ μονάδες δεν έχει ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής μεγέθους 5,4,3 ή 2. Τα μόνα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι τα μονοσύνολα $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ και $\{5\}$. Συνεπώς έχουμε

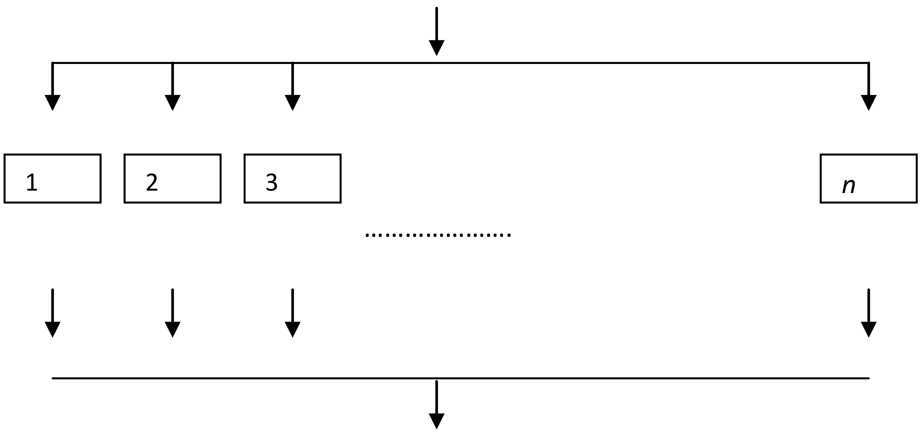
$$s_1=\frac{5}{\frac{5!}{(5-1)!}}=\frac{5}{\frac{120}{24}}=\frac{5}{5}=1,\; s_2=\frac{0}{\frac{5!}{(5-2)!}}=0,\; s_3=\frac{0}{\frac{5!}{(5-3)!}}=0,\; s_4=\frac{0}{\frac{5!}{(5-4)!}}=0,\; s_5=\frac{0}{\frac{5!}{(5-5)!}}=0$$

οπότε το διάνυσμα της υπογραφής είναι το ακόλουθο

$$s_{SS}^t=(1,0,0,0,0).$$

- **Παράλληλο σύστημα (PS, *ParallelSystem*)**

Το παράλληλο σύστημα αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες του αποτύχουν ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν τουλάχιστον μία μονάδα του λειτουργεί. Η διάταξη του παράλληλου συστήματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 4. Παράλληλο σύστημα με *n*μονάδες

Τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας είναι όλα τα μονοσύνολα $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$, ενώ το μοναδικό ελάχιστο σύνολο διακοπής του παράλληλου συστήματος είναι το $\{1,2,...,n\}$, δηλαδή έχουμε**P**= $\{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\}$ και **C**=$\{\{1,2,...,n\}\}$.

Η συνάρτηση δομής του παράλληλου συστήματος δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = \prod_{j=1}^{1}(1 - \prod_{i \in C_j}(1 - x_i)) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2)...(1 - x_n) .$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\phi_{PS}(\boldsymbol{x}) = 1 - \phi_{SS}(1 - \boldsymbol{x}),$$

συνεπώς το σειριακό είναι το δυϊκό του παράλληλου συστήματος και αντίστροφα.

Η αξιοπιστία του παράλληλου συστήματος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

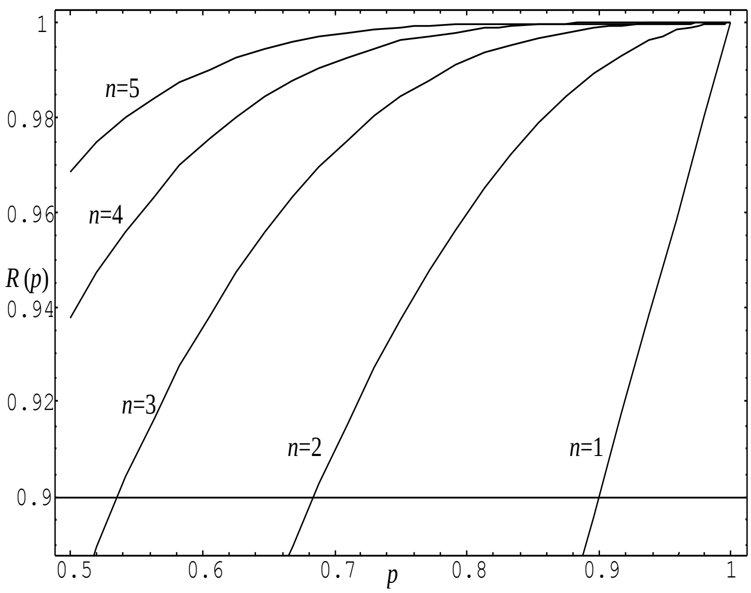
$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = E[1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)] = 1 - E[\prod_{i=1}^{n}(1 - X_i)] = 1 - \prod_{i=1}^{n} E(1 - X_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - E(X_i)] =$$

$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)...(1 - p_n) = R_{PS} .$$

Στην ειδική περίπτωση ενός i.i.d. παράλληλου συστήματος με *n* μονάδες (οπότε θα ισχύει $p_i = p, \quad i = 1,2,...,n$) η συνάρτηση αξιοπιστίας θα είναι η εξής

$$R(p) = R_{PS} = 1 - (1 - p)^n .$$

Στο ακόλουθο σχήμα, δίνεται γραφικά η αξιοπιστία ενός παράλληλου συστήματος με *n* μονάδες, ως προς την αξιοπιστία *p* της κάθε μονάδας του. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το πλήθος των μονάδων του συστήματος, τόσο αυξάνεται και η αξιοπιστία του.



Σχήμα 5. Αξιοπιστία παράλληλου συστήματος *n* μονάδων

Το παράλληλο σύστημα έχει σημαντικά πλεονεκτήματα ως προς την κατασκευή του και την αξιοπιστία του, ωστόσο σε περίπτωση όπου υπάρχει θετική συσχέτιση ανάμεσα στις μονάδες του τα πλεονεκτήματα αυτά υποβαθμίζονται σε μεγάλο βαθμό. Η υπογραφή **s** του ενός i.i.d. παράλληλου συστήματος με *n* μονάδες δίνεται από τον τύπο

$$s_{PS}^{t} = (0,0,0,...,1).$$

Πράγματι η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του i.i.d παράλληλου συστήματος ταυτίζεται με κάποιον χρόνο ζωής X_i μιας μονάδας για όλα τα i: $1 \le i \le n-1$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $P(T = X_{(i)}) = 0,$ όταν $1 \le i \le n-1,$ ενώ γνωρίζουμε ότι το σύστημα παύει να λειτουργεί όταν αποτύχει και η τελευταία μονάδα του, συνεπώς η πιθανότητα ότι ο χρόνος ζωής του i.i.d παράλληλου συστήματος ταυτίζεται με τον τελευταίο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας είναι ίση με 1, δηλαδή $P(T = X_{(n)}) = 1$. Επίσης, παρατηρώντας ότι το παράλληλο σύστημα είναι δυϊκό του σειριακού συστήματος, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες s_i της υπογραφής του παράλληλου συστήματος

$$s_1^{PS} = s_{n-1+1}^{SS} = 0,\ s_2^{PS} = s_{n-2+1}^{SS} = 0, \ldots,\ s_{n-1}^{PS} = s_{n-n+1+1}^{SS} = 0, s_n^{PS} = s_1^{SS} = 1,$$

οπότε το διάνυσμα της υπογραφής του παράλληλου συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

$$s_{PS}^{t} = (0,0,0,...,1).$$

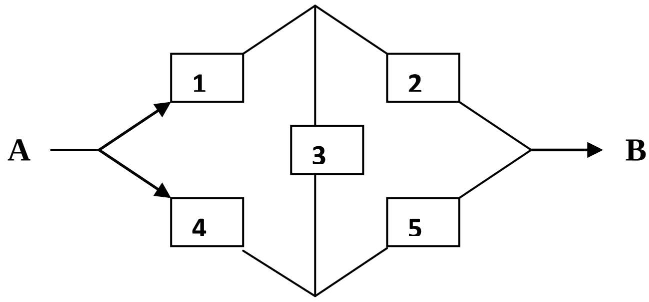
Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την υπογραφή του συστήματος με χρήση των ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής. Το παράλληλο σύστημα με $n = 5$ μονάδες δεν έχει ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής μεγέθους 4,3,2 ή 1. Τα μόνα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι το σύνολο $\{1,2,3,4,5\}$ και όλες οι δυνατές μεταθέσεις των στοιχείων του, δηλαδή το πλήθος τους είναι 5!. Συνεπώς έχουμε

$$s_1 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-1)!}} = 0, s_2 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-2)!}} = 0, s_3 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-3)!}} = 0, s_4 = \frac{0}{\frac{5!}{(5-4)!}} = 0, s_5 = \frac{5!}{\frac{5!}{(5-5)!}} = 1,$$

οπότε το διάνυσμα της υπογραφής είναι $s_{PS}^{t} = (0,0,0,0,1)$.

- **Γέφυρα (BS, *Bridgestructure*)**

Αποτελείται από n=5 μονάδες και λειτουργεί όταν είναι δυνατή η μετάβαση από τη θέση Α στη θέση Β μέσω μονάδων που λειτουργούν. Η διάταξη της γέφυρας φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα6. Γέφυρα με 5 μονάδες

Η γέφυρα είναι μια χρήσιμη δομή προκειμένου να αυξήσουμε την αξιοπιστία των συστημάτων. Η συγκεκριμένη δομή εφαρμόζεται συχνά σε δίκτυα υπολογιστών.Τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας είναι τα σύνολα {1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {4,3,2}, ενώ τα ελάχιστα σύνολα διακοπής της γέφυρας είναι τα {1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {4,3,2}, δηλαδή έχουμε**P**= {{1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {4,3,2}} και **C** = {{1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {4,3,2}}.Η συνάρτηση δομής της γέφυρας δίνεται με τη βοήθεια της Πρότασης 3 από τον ακόλουθο τύπο

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{4}(1 - \prod_{i \in P_j} x_i) = 1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_4x_5)(1 - x_1x_3x_5)(1 - x_4x_3x_2) = \ldots =$$

$$= x_1x_2 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 - x_1x_2x_3x_5 + x_4x_5 - x_1x_2x_4x_5 - x_1x_3x_4x_5$$

$$- x_2x_3x_4x_5 + 2x_1x_2x_3x_4x_5 .$$

Η αξιοπιστία της γέφυρας δίνεται από τον ακόλουθο τύπο

$$R = E(\phi(\mathbf{X})) = p_1p_2 + p_2p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4 + p_1p_3p_5 - p_1p_2p_3p_5 + p_4p_5 - p_1p_2p_4p_5$$

$$- p_1p_3p_4p_5 - p_2p_3p_4p_5 + 2p_1p_2p_3p_4p_5 .$$

Στην ειδική περίπτωση μιας i.i.d. γέφυρας με 5 μονάδες (οπότε θα ισχύει $p_i = p, \quad i = 1,2,\ldots,5$) η συνάρτηση αξιοπιστίας θα είναι η εξής

$$R(p) = R_{BS} = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 .$$

Για τον υπολογισμό της υπογραφής **s** της γέφυρας εργαζόμαστε ως εξής. Έχοντας ήδη παραπάνω προσδιορίσει τα ελάχιστα σύνολα διακοπής παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κανένα ελάχιστα σύνολα διακοπής με μία μόνο μονάδα, δηλαδή είναι ξεκάθαρο ότι η αποτυχία μίας μόνο μονάδας δεν μπορεί να προκαλέσει την αποτυχία του συστήματος, συνεπώς η πρώτη συντεταγμένη του διανύσματος της υπογραφής θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $s_1 = 0$.

Για να υπολογίσουμε τη δεύτερη συντεταγμένη s_2 θα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτιστεί με τον δεύτερο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας, δηλαδή την πιθανότητα η γέφυρα να αποτύχει ταυτόχρονα με την δεύτερη αποτυχία μονάδας (s_2= $P(T = X_{(2)})$). Τα σύνολα διακοπής με δύο μονάδες είναι τα εξής: $\{1,4\},\{2,5\}$, σε κάθε ένα από τα οποία έχουμε 2! δυνατές μεταθέσεις των δύο πρώτων αποτυχιών και η κάθε μία μετάθεση (από τις 4) ακολουθείται από 3! πιθανές μεταθέσεις των 3 μονάδων που απομένουν. Συνεπώς το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το ενδεχόμενο η γέφυρα να αποτύχει μαζί με τη δεύτερη μονάδα που αποτυγχάνει είναι $2!\cdot 3! + 2!\cdot 3! = 12 + 12 = 24$. (Διαφορετικά $2!\cdot 3! + 2!\cdot 3! = 2\cdot 2\cdot 3! = 4! = 24$).

Δεδομένου ότι το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων για τη σειρά αποτυχίας των 5 μονάδων της γέφυρας είναι το πλήθος των μεταθέσεων των 5 μονάδων, δηλαδή ίσο με $5!$, τελικά παίρνουμε για τη ζητούμενη πιθανότητα

$$s_2 = P(T = X_{(2)}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} = 0{,}2 .$$

Για να υπολογίσουμε την τρίτη συντεταγμένη s_3 θα πρέπει να βρούμε την πιθανότητα ο χρόνος ζωής του συστήματος να ταυτιστεί με τον τρίτο διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας, δηλαδή την πιθανότητα η γέφυρα να αποτύχει ταυτόχρονα με την τρίτη αποτυχία μονάδας (s_3= $P(T = X_{(3)})$). Για να συμβεί το ενδεχόμενο αυτό θα πρέπει οι 3 πρώτες αποτυχίες να συμπίπτουν με μία μετάθεση μιας εκ των τριάδων $\{1,3,5\},\{4,3,2\}$ οι οποίες αποτελούν (όπως έχουμε δει παραπάνω) τα μόνα ελάχιστα σύνολα διακοπής με 3 μονάδες, ή να συμπίπτουν με μία εκ των παρακάτω τριάδων $\{1,X,2\},\{2,X,1\},\{X,1,2\},\{X,2,1\},\{4,\Psi,5\},\{5,\Psi,4\},\{\Psi,4,5\},\{\Psi,5,4\}$ όπου X είναι μία από τις μονάδες 3,4,5 , και Ψ μία από τις μονάδες 1,2,3. Οι τελευταίες 8 τριάδες προκαλούν αποτυχία του συστήματος κατά την αποτυχία της τρίτης μονάδας, ενώ όπως βλέπουμε οι τριάδες αυτές περιέχουν τα ζεύγη 1,2 ή 4,5(οι δυάδες αυτές είναι ελάχιστα σύνολα διακοπής της γέφυρας) με τέτοιο τρόπο ώστε η αποτυχία του συστήματος να μην προκαλείται κατά την αποτυχία της δεύτερης κατά σειρά μονάδας, αλλά κατά την αποτυχία της τρίτης κατά σειρά μονάδας. Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων για το ενδεχόμενο που ζητάμε είναι ίσο με

$$3!\cdot 2! + 3!\cdot 2! + 4\cdot 3\cdot 2! + 4\cdot 3\cdot 2! = 12+12+48 = 72,$$

όπου οι δύο πρώτοι όροι του αθροίσματος αναφέρονται στα δύο ελάχιστα σύνολα διακοπής ενώ οι δύο τελευταίοι όροι στις 8 τριάδες που δόθηκαν προηγουμένως. Πιο αναλυτικά έχουμε

$$3!\cdot 2! = (\text{πλήθος μεταθέσεων των} 1,3,5)\ (\text{πλήθος των εναπομεινάντων } 2,4)$$

$$3!\cdot 2! = (\#\ \text{μεταθέσεων των } 4,3,2)\ (\#\ \text{μεταθέσεων των εναπομεινάντων } 1,5)$$

$4\cdot 3\cdot 2! =$ (# τριάδων που έχουν τη μονάδα X)(# επιλογών για τη X)(# μεταθέσεων των 1,2)

$4\cdot 3\cdot 2! =$ (# τριάδων που έχουν τη μονάδα Ψ)(# επιλογών για τη Ψ)(# μεταθέσεων των 4,5)

Δεδομένου ότι το συνολικό πλήθος όλων των δυνατών περιπτώσεων για τη σειρά αποτυχίας των 5 μονάδων της γέφυρας είναι το πλήθος των μεταθέσεων των 5 μονάδων, δηλαδή ίσο με $5!$, τελικά παίρνουμε για τη ζητούμενη πιθανότητα

$$s_3 = P(T = X_{(3)}) = \frac{3!\cdot 2! + 3!\cdot 2! + 4\cdot 3\cdot 2! + 4\cdot 3\cdot 2!}{5!} = \frac{72}{120} = \frac{3}{5} = 0{,}6 .$$

Οι τελευταίες δύο πιθανότητες s_4, s_5 μπορούν να υπολογισθούν ευκολότερα, μιας και η γέφυρα δεν μπορεί να λειτουργήσει με μόνο μία μονάδα σε ισχύ, ενώ το σύστημα αποτυγχάνει κατά την αποτυχία της τέταρτης κατά σειρά μονάδας αν και μόνο αν οι τελευταίες δύο μονάδες που αποτυγχάνουν είναι οι 1,2 ή οι 4,5, και υπάρχουν 4! μεταθέσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη αυτή. Συνεπώς από τα παραπάνω παίρνουμε για τις ζητούμενες πιθανότητες

$$s_4 = P(T = X_{(4)}) = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$s_5 = P(T = X_{(5)}) = 0$$

(Άλλωστε $s_5 = 1 - s_1 - s_2 - s_3 - s_4 = 1 - 0 - 0{,}2 - 0{,}6 - 0{,}2 = 0$).

Συνοψίζοντας, η υπογραφή της γέφυρας με 5 μονάδες είναι το ακόλουθο διάνυσμα

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{BS}}^{\boldsymbol{t}} = (0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 0)\,.$$

1.5 Υπολογισμός της αξιοπιστίας με χρήση της υπογραφής

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης αξιοπιστίας ενός μονότονου συστήματος που αποτελείται από *n* μονάδες λειτουργίας με τη βοήθεια του διανύσματος της υπογραφής. Για την περάτωση της συγκεκριμένης παραγράφου ιδιαίτερα χρήσιμο υπήρξε η εργασία των Kochar, Mukerjee&Samaniego (1999) καθώς και το πόνημα του κ. Κούτρα (2008).

Ορισμός 5. *Έστω ένα μονότονο σύστημα με n μονάδες και* $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ *το σύνολο που δηλώνει τις μονάδες αυτές. Ένα υποσύνολο* $K^*=\{c_{\pi(1)},c_{\pi(2)},\ldots,c_{\pi(\kappa)}\}$*(όπου π είναι κάποια μετάθεση των* $1,2,\ldots,n$ *με* $k \le n$ *) του συνόλου C ορίζεται ως διατεταγμένο σύνολο διακοπής αν οι σχέσεις* $X_{(1)}=X_{\pi(1)},\ldots,X_{(\kappa)}=X_{\pi(\kappa)}$ *υποδηλώνουν για το χρόνο ζωής του συστήματος T ότι ισχύει*

$$T \le X_{\pi(k)}\,.$$

Επιπλέον το σύνολο K^* *είναι ελάχιστο διατεταγμένο σύνολο διακοπής αν είναι διατεταγμένο σύνολο διακοπής αλλά το σύνολο* $\{c_{\pi(1)},c_{\pi(2)},\ldots,c_{\pi(\kappa-1)}\}$ *δεν είναι.*

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος στον Ορισμό 2 της υπογραφής που δόθηκε παραπάνω με την ποσότητα $(n\text{-}i)!$, προκύπτει ένας ισοδύναμος ορισμός της υπογραφής που χρησιμοποιεί τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής του συστήματος, όπως φαίνεται στον ακόλουθο τύπο

$$s_i = \frac{\#\ \textit{ελαχίστων διατεταγμένων συνόλων διακοπής μεγέθους } i}{(n)_i}$$

όπου $(n)_i = \dfrac{n!}{(n-i)!}$.

Στην εναλλακτική αυτή έκφραση για τις συντεταγμένες s_i της υπογραφής ενός συστήματος λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μεταθέσεις των *i* από τις *n* μονάδες.

Συνεπώς μπορούμε να βλέπουμε την i-οστή συντεταγμένη της υπογραφής ενός συστήματος σαν την αναλογία των διατεταγμένων υποσυνόλων μεγέθους i του $\{1,2,...,n\}$, που είναι ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής. Με άλλα λόγια για να υπολογίσουμε την υπογραφή ενός συστήματος πρέπει πρώτα να βρούμε τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής και στη συνέχεια με βάση τον τελευταίο τύπο να προσδιορίσουμε όλες τις συντεταγμένες s_i. Τα ελάχιστα διατεταγμένα σύνολα διακοπής είναι σύνολα που περιέχουν k μονάδες, ώστε ο χρόνος ζωής του συστήματος να μην υπερβαίνει τον k-οστό διατεταγμένο χρόνο ζωής μονάδας του συγκεκριμένου συνόλου και ταυτόχρονα αφαιρώντας τη μονάδα με τον k-οστό διατεταγμένο χρόνο, το σύνολο να παύει να είναι διατεταγμένο σύνολο διακοπής.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μια θεμελιώδη ιδιότητα της υπογραφής **s** ενός συστήματος που δηλώνει ότι αν έχουμε όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες από μια κατανομή F, τότε η κατανομή του χρόνου ζωής T του συστήματος μπορεί να εκφρασθεί ως μια συνάρτηση της υπογραφής **s** και της κατανομής F.

Πρόταση 7. (Kochar, Mukerjee&Samaniego (1999)) *Έστω $X_1, X_2,...,X_n$ οι χρόνοι ζωής των n όμοιων και ανεξάρτητων μονάδων ενός μονότονου συστήματος και έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση*

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j}$$

όπου $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$.

Απόδειξη. Έστω π μία μετάθεση των θετικών ακεραίων $\{1,2,...,n\}$ και A_i το σύνολο των μεταθέσεων για τις οποίες $T=X_{(i)}$, δηλαδή για τις οποίες $T= X_{\pi_i}$, όπου $X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}$. Έχουμε τα εξής

$$P(T > t) = \sum_{i=1}^{n} P(T > t, \pi \in A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in A_i} P(T > t, X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in A_i} P(X_{\pi_i} > t, X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in A_i} P(X_{(i)} > t, X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < ... < X_{\pi_n}).$$

Όμως τα ενδεχόμενα $\{X_{(i)}>t\}$ και $\{X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \ldots < X_{\pi_n}\}$ που υπάρχουν στην τελευταία ισότητα είναι ανεξάρτητα (Randles&Wolfe (1991)), οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$P(T>t) = \sum_{i=1}^{n} P(X_{(i)}>t) \sum_{\pi \in A_i} P(X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \ldots < X_{\pi_n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X_{(i)}>t) \cdot P(\pi \in A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \cdot P(X_{(i)}>t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} \; . \qquad \blacksquare$$

Επειδή το πλήθος των μονότονων συστημάτων με n μονάδες είναι αρκετά μεγάλο (αυξάνεται εκθετικά με το n), αποτελέσματα που αποδεικνύουν σχέσεις ανάμεσα σε συγκεκριμένα συστήματα προσφέρουν σημαντικά για τη μείωση του υπολογιστικού βάρους των υπογραφών όλων των συστημάτων. Η ακόλουθη πρόταση μειώνει το βάρος αυτό στο μισό, δίνοντας μια σχέση που συνδέει την υπογραφή ενός συστήματος με την υπογραφή του αντίστοιχου δυϊκού του.

Πρόταση 8. (Kochar, Mukerjee&Samaniego (1999))*Έστω* **s** *η υπογραφή ενός συστήματος με n όμοιες και ανεξάρτητες μονάδες και συνάρτηση δομής φ και έστω το δυϊκό του σύστημα με υπογραφή* $\mathbf{s}^D$ *και συνάρτηση δομής* φ^D. *Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση*

$$s_i = s_{n-i+1}^D, \quad \text{για} \, i=1,2,\ldots,n.$$

Απόδειξη. Έστω $X_1, X_2,..., X_n$ οι χρόνοι ζωής των μονάδων του συστήματος και T, T^D οι χρόνοι ζωής του πρωτεύοντος και του δυϊκού συστήματος αντίστοιχα. Για να αποδείξουμε την πρόταση αρκεί να δείξουμε την ακόλουθη ισοδυναμία

$$T=X_{(i)} \text{ αν και μόνο αν } T^D=X_{(n-i+1)}.$$

Έστω π μία μετάθεση των θετικών ακεραίων $\{1,2,...,n\}$ και A_i το σύνολο των μεταθέσεων για τις οποίες $T = X_{\pi_i}$, όπου $X_{\pi_1} < X_{\pi_2} < \ldots < X_{\pi_n}$. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\pi \in A_i \Leftrightarrow T = X_{(i)} \, .$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο A_i δεν είναι κενό. Για $\pi \in A_i$, θεωρούμε το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{x}_\pi \in \{0,1\}^n$ των μονάδων του συστήματος τη χρονική στιγμή της αποτυχίας του, δηλαδή το $\mathbf{x}_\pi$ ορίζεται ως εξής

$$x_{\pi_j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } j > i \\ 0, & \text{αν } j \le i. \end{cases}$$

Συνεπώς το $\mathbf{x}_\pi$ έχει ακριβώς i το πλήθος μηδενικά και $(n\text{-}i)$ το πλήθος άσσους. Επιπροσθέτως

$$\varphi(\mathbf{x}_\pi)=0 \quad \text{και} \quad \varphi(\mathbf{y})=\begin{cases} 1 & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} > \boldsymbol{x}_\pi \\ 0 & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x}_\pi \end{cases}$$

Το διάνυσμα $(\mathbf{1}\text{-}\mathbf{x}_\pi)$έχει, από τον ορισμό του, $(n\text{-}i)$ το πλήθος μηδενικά και i το πλήθος άσσους. Επιπροσθέτως

$$\varphi^D(1-x_\pi) = 1-\varphi(x_\pi) = 1$$

και

$$\varphi^D(\mathbf{y})=\begin{cases} \mathbf{1} & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} \ge \mathbf{1}-\boldsymbol{x}_\pi \\ \mathbf{0} & ,\alpha\nu \quad \boldsymbol{y} < \mathbf{1}-\boldsymbol{x}_\pi \end{cases}$$

Από την τελευταία σχέση για τη συνάρτηση δομής φ^D του δυϊκού συστήματος, συμπεραίνουμε ότι η $(n\text{-}i\text{+}1)$-οστή αποτυχία μονάδας θα προκαλέσει και την αποτυχία του δυϊκού συστήματος ($T^D = X_{\pi_{n-i+1}}$). Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\pi \in A_i$, θα έχουμε $T^D = X_{(n-i+1)}$. Αυτό σημαίνει ότι αν $s_i = P(T = X_{(i)})$ και $s_i^D = P(T^D = X_{(i)})$ τότε

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (s_n^D, s_{n-1}^D, \ldots, s_1^D),$$

δηλαδή

$$s_i = s_{n-i+1}^D \quad \text{για } i=1,2,\ldots,n. \qquad \blacksquare$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια πρόταση, η οποία τεκμηριώνει τη σχέση που έχει η υπογραφή ενός συστήματος με τα σύνολα λειτουργίας του. Για ένα μονότονο σύστημα με χρόνο ζωής T ορίζουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{A}_T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ όπου

$$a_i = \frac{\#\ \text{συνόλων λειτουργίας μεγέθους } i}{\binom{n}{i}}$$

Με άλλα λόγια το α_i εκφράζει την αναλογία (ποσοστό) των υποσυνόλων μεγέθους i, τα οποία είναι σύνολα λειτουργίας για το σύστημα.

Πρόταση 9. (Boland (2001)) *Έστω ένα μονότονο i.i.d. σύστημα με n μονάδες και υπογραφή* $\mathbf{s}^t=(s_1, ... s_n)$. *Τότε οι συντεταγμένες του διανύσματος* **s** *συνδέονται με τις αντίστοιχες του διανύσματος* $\boldsymbol{A}_T=(\alpha_1,...,\alpha_n)$*με την ακόλουθη σχέση*

$$a_i = \sum_{j=n-i+1}^{n} s_j, \quad i = 1,2,...,n$$

Αντίστροφα, οι ποσότητεςs_j *εκφράζονται μέσω των*a_j *από τη σχέση*

$$s_{n-j} = a_{j+1} - a_j \quad , j = 0,1,...,n-1 .$$

1.6 Στοχαστική διάταξη χρόνων ζωής με χρήση της υπογραφής

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει αναφορά στην έννοια της στοχαστικής διάταξης μεταξύ χρόνων ζωής μονότονων συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε γνωστά αποτελέσματα στη διεθνή βιβλιογραφία που επιτρέπουν τη στοχαστική σύγκριση μεταξύ μοτόνονων διατάξεων αξιοπιστίας με τη βοήθεια των αντίστοιχων διανυσμάτων υπογραφής.

Ορισμός 7. *Αν T_1, T_2 είναι δύο τυχαίοι χρόνοι ζωής (ή πιο γενικά δύο τυχαίες μεταβλητές), τότε λέμε ότι ο χρόνος T_2 είναι μεγαλύτερος από τον T_1 στη συνήθη στοχαστική διάταξη (συμβολικά $T_1 \leq_{st} T_2$) αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}_{T_1}(t) \leq \overline{F}_{T_2}(t) \text{ για όλα τα } t.$$

Πιο απλά η συγκεκριμένη διάταξη σημαίνει ότι, για κάθε t, ο χρόνος T_2 είναι πιο πιθανόν να υπερβεί την τιμή t από τον T_1.

Ορισμός 8. *Αν T_1, T_2 είναι δύο τυχαίοι χρόνοι ζωής (ή πιο γενικά δύο τυχαίες μεταβλητές), τότε λέμε ότι ο χρόνος T_2 είναι μεγαλύτερος από τον T_1 στη διάταξη βαθμίδας αποτυχίας (συμβολικά $T_1 \leq_{hr} T_2$) αν ισχύει η σχέση*

$$\overline{F}_{T_2}(t)/\overline{F}_{T_1}(t) \uparrow t \text{ για όλα τα } t.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση $\overline{F}_{T_2}(t)/\overline{F}_{T_1}(t)$ είναι αύξουσα ως προς *t*.)

Ο ορισμός της διάταξης αυτής είναι ισοδύναμος με την ακόλουθη ανίσωση

$$P\{T_2 - x > t \mid T_2 > x\} \geq P\{T_1 - x > t \mid T_2 > x\}, \quad \forall t, x \geq 0.$$

Συνεπώς βλέπουμε πως η διάταξη βαθμίδααποτυχίας σημαίνει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής του T_2 είναι στοχαστικά μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο υπολειπόμενο χρόνο ζωής του T_1, δεδομένου ότι έχουν και οι δύο επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή *t* (Boland&El-Neweihi (1995)).

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι η στοχαστική διάταξη αναφέρεται σε δύο καινούριες μονάδες με χρόνους ζωής T_1 και T_2, ενώ η διάταξη βαθμίδας αποτυχίας σε χρόνους ζωής μονάδων με οποιαδήποτε ηλικία.

Ορισμός 9. *Αν T_1, T_2 είναι δύο τυχαίοι χρόνοι ζωής (ή πιο γενικά δύο τυχαίες μεταβλητές), τότε λέμε ότι ο χρόνος T_2 είναι μεγαλύτερος από τον T_1 στη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας(συμβολικά $T_1 \leq_{lr} T_2$) αν ισχύει η σχέση*

$$f_{T_2}(t)/f_{T_1}(t) \uparrow t \text{ για όλα τα } t.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση $f_{T_2}(t)/f_{T_1}(t)$ είναι αύξουσα ως προς *t*).

Από τον ορισμό αυτό έχουμε ότι αν $T_1 \leq_{lr} T_2$,τότε η πιθανότητα

$$P(t \leq T_2 \leq t + \Delta t),$$

η οποία είναι ανάλογη ως προς τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{T_2}(t)$, αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό έναντι της πιθανότητας

$$P(t \leq T_1 \leq t + \Delta t),$$

η οποία είναι ανάλογη ως προς τη συνάρτηση πυκνότητας $f_{T_1}(t)$, για το ίδιο πλάτος Δt. Για τους τρεις παραπάνω τύπους διάταξης ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές

$$T_1 \leq_{st} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{lr} T_2.$$

Επειδή λοιπόν η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος $\mathbf{s}^{\mathbf{t}}=(s_1,\ldots s_n)$ είναι ένα διάνυσμα πιθανότητας, το οποίο είναι συνάρτηση του σχεδιασμού του συστήματος, μπορούμε να εισάγουμε στοχαστικές διατάξεις για δύο υπογραφές. Οι ακόλουθοι ορισμοί που αναφέρονται σε διάταξη υπογραφών δίνονται σε αντιστοιχία με τους παραπάνω τρεις ορισμούς για διάταξη τυχαίων χρόνων ζωής.

Ορισμός 10. *Αν* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\boldsymbol{s}_1$ *στη συνήθη στοχαστική διάταξη* (*συμβολικά* $\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$\sum_{j=i}^{n} s_{1j} \leq \sum_{j=i}^{n} s_{2j} \text{ για όλα τα } i=1,2,\ldots n.$$

Ορισμός 11. *Αν* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ *στη διάταξη βαθμίδας αποτυχίας* (*συμβολικά* $s_1 \leq_{hr} s_2$) *αν ισχύει η σχέση*

$$\sum_{j=i}^{n} s_{2j} / \sum_{j=i}^{n} s_{1j} \uparrow i \text{ για όλα τα } i=1,2,\ldots n.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση $\sum_{j=i}^{n} s_{2j} / \sum_{j=i}^{n} s_{1j}$ είναι αύξουσα ως προς i)

Ορισμός 12. *Αν* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *είναι οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες , τότε λέμε ότι η υπογραφή* $\mathbf{s}_2$ *είναι μεγαλύτερη από τη* $\mathbf{s}_1$ *στη διάταξη του λόγου πιθανοφάνειας (συμβολικά* $s_1 \leq_{lr} s_2$*) αν ισχύει η σχέση*

$$s_{2i} / s_{1i} \uparrow i \text{ για όλα τα } i=1,2,\ldots n.$$

(δηλαδή αν η συνάρτηση s_{2i} / s_{1i} είναι αύξουσα ως προς i)

Η σχέση ανάμεσα σε δύο στοχαστικά διατεταγμένες υπογραφές συστημάτων και τους αντίστοιχους χρόνους ζωής τους, τεκμηριώνεται με τα ακόλουθα θεωρήματα.

Πρόταση 10. (Kochar, Mukerjee&Samaniego (1999)) *Έστω* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε*

$$\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$$

Πρόταση 11. (Kochar, Mukerjee&Samaniego (1999)) *Έστω* $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ *οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε*

$$\boldsymbol{s}_1 \leq_{\boldsymbol{hr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2 .$$

Πρόταση 12. (Kochar, Mukerjee&Samaniego (1999)) *Έστω* **s**$_1$, **s**$_2$ *οι υπογραφές δύο συστημάτων με n μονάδες και* T_1, T_2 *οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής τους. Τότε*

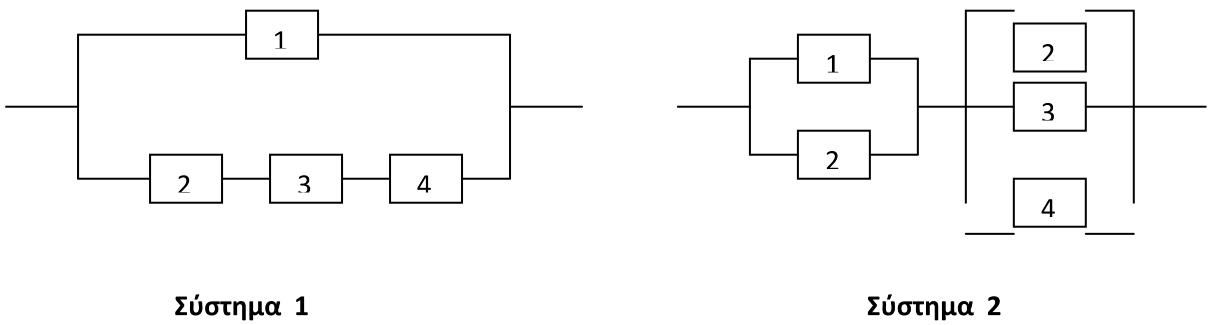
$$\boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{lr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow T_1 \le_{lr} T_2$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος έχει άμεση επίδραση στο χρόνο ζωής του. Για τους τρεις τύπους διάταξης δύο υπογραφών ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές (Shaked&Shanthikumar (1994)).

$$\boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{lr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow \boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{hr}} \boldsymbol{s}_2 \Rightarrow \boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2 .$$

Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα συστημάτων, οι υπογραφές των οποίων ικανοποιούν κάποιες αλλά όχι όλες τις παραπάνω σχέσεις διάταξης.

- Θεωρούμε δύο συστήματα, ο σχεδιασμός των οποίων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 7. Υπογραφή 2 Συστημάτων

Για τις υπογραφές των παραπάνω συστημάτων έχουμε

$$\boldsymbol{s}_1^{\boldsymbol{t}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \qquad \boldsymbol{s}_2^{\boldsymbol{t}} = (0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\boldsymbol{s}_1 \le_{\boldsymbol{st}} \boldsymbol{s}_2 .$$

Ωστόσο για τη διάταξη κατά βαθμίδα αποτυχίας ισχύουν τα ακόλουθα

$$\textit{για} \ \ i = 1 \quad \textit{έχουμε} \ \ \frac{\sum_{j=1}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=1}^{4} s_{1j}} = 1,$$

$$\gamma\iota\alpha \;\; i=2 \quad \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \;\; \frac{\sum_{j=2}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=2}^{4} s_{1j}} = 1,$$

$$\text{για } i=3 \quad \text{έχουμε } \frac{\sum_{j=3}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=3}^{4} s_{1j}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{10}{12}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{για } i=4 \quad \text{έχουμε } \frac{\sum_{j=4}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=4}^{4} s_{1j}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

συνεπώς η συνάρτηση $\frac{\sum_{j=i}^{4} s_{2j}}{\sum_{j=i}^{4} s_{1j}}$ δεν είναι αύξουσα ως προς i και από τον Ορισμό 2′ συμπεραίνουμε ότι

$$s_1 \not\leq_{hr} s_2.$$

Επιπλέον για τη διάταξη λόγου πιθανοφάνειας ισχύουν τα παρακάτω

$$\text{για } i=2 \quad \text{έχουμε } \frac{s_{22}}{s_{12}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = 3,$$

$$\text{για } i=3 \quad \text{έχουμε } \frac{s_{23}}{s_{13}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7},$$

$$\text{για } i=4 \quad \text{έχουμε } \frac{s_{24}}{s_{14}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $\frac{s_{2i}}{s_{1i}}$ δεν είναι αύξουσα ως προς i και από τον Ορισμό 3′ συμπεραίνουμε

$$s_1 \not\leq_{lr} s_2 .$$

1.7 Μέσος χρόνος και υπολειπόμενος μέσος χρόνος ζωής ενός συστήματος

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στη μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας σε διάφορες χρονικές στιγμές, δίνοντας έτσι στα μοντέλα που έχουμε μια πιο ρεαλιστική δομή. Για την περιγραφή του χρόνου μέχρι την αποτυχία (χρόνο ζωής) μίας μονάδας ή ενός συστήματος θα χρησιμοποιούμε **μη αρνητικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές** T. Η πιθανότητα να επιζήσει η μονάδα ή το σύστημα μέχρι τη χρονική στιγμή t (να μην καταστραφεί εντός του χρονικού διαστήματος $[0, t]$) είναι τότε ίση με

$$R(t) = P[T > t],\ t^{3}0$$

και θα ονομάζεται **αξιοπιστία** (της μονάδας ή του συστήματος) **σε χρόνο *t***.

Είναι φανερό ότι **η αναξιοπιστία**

$$F(t) = 1\text{-}\ R(t) = 1\text{-}\ P(T > t) = P[T \leq t]\ ,\ t \geq 0$$

συμπίπτει με τη συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T. Για το λόγο αυτό η αξιοπιστία $R(t)$ = 1-$F(t)$ συμβολίζεται μερικές φορές με $\overline{F}(t)$.

Ο μέσος χρόνος ζωής $E(T)$ (της μονάδας ή του συστήματος) θα λέγεται **μέσος χρόνος μέχρι την αποτυχία** και θα συμβολίζεται και με **MTTF** (Mean Time To Failure ή Mean Time To Fail). Για το μέσο χρόνο ζωής ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$E(T) = MTTF = \int_0^{\infty} R_T(t)dt\,,$$

όπου R_T εκφράζει την αντίστοιχη αξιοπιστία.

Ας θεωρήσουμε μία μονάδα (ή ένα σύστημα) ηλικίας $t > 0$ της οποίας ο χρόνος ζωής περιγράφεται από τη μη αρνητική συνεχή τυχαία μεταβλητή T. Ο χρόνος που απομένει μέχρι να καταστραφεί η μονάδα δίνεται προφανώς από την τυχαία μεταβλητή T-t. Με τον όρο **υπολειπόμενος χρόνος ζωής** μιας μονάδας με ηλικία t θα αναφερόμαστε στη (δεσμευμένη) τυχαία μεταβλητή $T - t \mid T > t$. Η συνάρτηση κατανομής και η αξιοπιστία μιας μονάδας ηλικίας t θα συμβολίζονται με $F(\bullet \mid t)$ και $R(\bullet \mid t)$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$F(x|t) = P(T - t \leq x | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + x)}{P(T > t)} = \frac{R(t) - R(t + x)}{R(t)},\ t \geq 0$$

$$R(x|t) = \overline{F}(x|t) = P(T - t > x | T > t) = \frac{P(T > t + x)}{P(T > t)} = \frac{R(t + x)}{R(t)},\ t \geq 0\,.$$

Ο μέσος υπολειπόμενος χρόνος ζωής μιας μονάδας ηλικίας t είναι ίσος με

$$\mu_t = E(T-t \mid T>t) = \int_0^\infty R(x \mid t)dx = \int_0^\infty \frac{R(t+x)}{R(t)}dx = \frac{1}{R(t)}\int_x^\infty R(s)ds \; .$$

Πρόσθετα, για τη διακύμανση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής ισχύουν τα ακόλουθα

$$V(T-t \mid T>t) = E((T-t)^2 \mid T<t) - \mu_t^2 \; ,$$

Όπου

$$E((T-t)^2 \mid T>t) = 2\int_0^\infty xR(x \mid t)dx = 2\int_0^\infty x\frac{R(t+x)}{R(t)}dx = \frac{2}{R(t)}\int_t^\infty (s-t)R(s)ds \; .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανάπτυξη αλγορίθμου για τη μελέτη της οικογένειας των συστημάτων συνεχόμενων *k-από-τα-n*: *F*

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τον κώδικα που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας πτυχιακής εργασίας για τη πιθανοθεωρητική μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας.Ο κώδικας θα εφαρμοσθεί σε ειδικές περιπτώσεις γνωστών διατάξεων αξιοπιστίας προκειμένου να επαληθευτεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων που παράγει. Πιο συγεκριμένα, θα εξειδικεύσουμε τον κώδικα προκειμένου να υπολογισθούν βασικά χαρακτηριστικά γνωστών συστημάτων αξιοπιστίας, όπως για παράδειγμα του σειριακού συστήματος, του παράλληλου συστήματος και του συστήματος συνεχόμενων *k*-από-τα-*n:F*(consecutive-*k*-out-of-*n*:*F*, συμβολικά *C*:*k/n*)).

2.1 Περιγραφή Κώδικα

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε αναλυτικά τον νέο κώδικα πουαναπτύξαμε καθώς και τις διαφοροποιήσεις του ανάλογα με το σύστημα που μελετάμε την εκάστοτε στιγμή και στο οποίο αναμένεται να εφαρμοσθεί. Δεδομένου ότι είναι το σειριακό και το παράλληλο σύστημα με *n* μονάδες αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του συστήματος συνεχόμενων *k*-από-τα-*n:F* για $k = 1$ και $k=n$ αντίστοιχα, η περιγραφή του κώδικα θα δοθεί για τη γενική περίπτωση ενός συστήματος συνεχόμενων *k*-από-τα-*n:F*.Να σημειωθεί ότι όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα που θα παρουσιασθούν στο πλαίσιο του παρόντος κεφαλαίου, έχουν παραχθεί με την κατάλληλη εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου προσομοίωσης. Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο MATLAB.

- **Συνάρτηση myfun.m**

Περιγραφή λειτουργίας: Προσομοιώνουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από *n* μονάδες οι οποίες βγαίνουν εκτός λειτουργίας σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Το σύστημα θα χαλάσει αν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες βγουν εκτός λειτουργίας.

Παράμετροι εισόδου: Η παράμετρος ***k*** εκφράζει το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που πρέπει να βγουν εκτός λειτουργίας ώστε να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος, ενώ η παράμετρος ***n*** εκφράζει το πλήθος των μονάδων από το οποίο αποτελείται το σύστημα.

Παράμετροι εξόδου:Η παράμετρος ***m*** εκφράζει τη μονάδα (τον αύξοντα αριθμό της μονάδας) η οποία έθεσε εκτός λειτουργίας το σύστημα (ήταν μοιραία για τη λειτουργία του συστήματος), ***index*** αποτελεί τον πίνακαπου περιλαμβάνει τις μονάδες που χάλασαν και ο οποίος είναι ταξινομημένος ως προς τη χρονική στιγμή που η *i*-οστή μονάδα βγήκε εκτός λειτουργίας, ενώ ***t*** είναι οι χρονικές στιγμές στις οποίες παρατηρήθηκεη διακοπή λειτουργίας των μονάδων. Να σημειωθεί ότι οι χρονικές στιγμές *t* εκφράζονται ως αύξοντες αριθμοί των μονάδων που διακόπτουν τη λειτουργία τους.

- **Συνάρτηση myfun2.m**

Περιγραφή λειτουργία: Προσομοιώνουμε *N* συστήματα της *myfun* και υπολογίζουμε για κάθε μία από τις μονάδες την πιθανότητα να χαλάσει το σύστημα όταν η συγκεκριμένη μονάδα τέθηκε εκτός λειτουργίας.

Παράμετροι εισόδου:Η παράμετρος ***k*** εκφράζει το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που πρέπει να βγουν εκτός λειτουργίας ώστε να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος, η παράμετρος ***n*** εκφράζει το πλήθος των μονάδων από το οποίο αποτελείται το σύστημα., ενώ η παράμετρος *N* συμβολίζει το πλήθος των συστημάτων που προσομοιώνουμε.

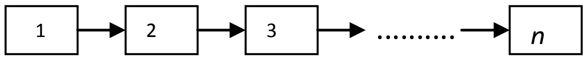
Παράμετροι εξόδου:*P* είναι πίνακας *n* στοιχείων που περιέχει τις πιθανότητες για κάθε μονάδα να θέσει το σύστημα εκτός λειτουργίας.

Στη συνέχεια, ο κώδικας εφαρμόζεται για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων εισόδου που περιγράφηκαν παραπάνω. Τα αρχεία που σχηματίζονται βάσει των εφαρμογών του κώδικα, παρουσιάζονται στις αντίστοιχες εφαρμογές που ακολουθούν. Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας με την υπογραφή του συστήματος.

2.2 Εφαρμογή του νέου αλγορίθμου για τη μελέτη του σειριακού συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο λειτουργίας του σειριακού συστήματος και θα γίνει επαλήθευση, μέσω της εφαρμογής του προτεινόμενου αλγορίθμου προσομοίωσης, γνωστών αποτελεσμάτων που αναφέρονται σε βασικά χαρακτηριστικά του, όπως για παράδειγμα για το διάνυσματης υπογραφής του.

Το σειριακό σύστημα αποτελείται από n γραμμικά διατεταγμένες μονάδες όπως φαίνεται στο Σχήμα 8. Το σύστημα αυτό τίθεται εκτός λειτουργίας όταν τουλάχιστον μία μονάδα του αποτύχει ή ισοδύναμα το σύστημα λειτουργεί όταν όλες οι μονάδες του λειτουργούν.



Σχήμα 8. Σειριακό Σύστημα

Το μοναδικό ελάχιστο σύνολο λειτουργίας του σειριακού συστήματος είναι το $\{1,2,...,n\}$, ενώ ελάχιστα σύνολα λειτουργίας είναι όλα τα μονοσύνολα $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$, δηλαδή έχουμε**P** = $\{\{1,2,...,n\}\}$ και**C** = $\{\{1\}, \{2\},..., \{n\}\}$.

Η υπογραφή ενός σειριακού συστήματος n συνιστωσών δίνεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{\Sigma}}$= (1,0,0,…,0) καθώς η πιθανότητα αποτυχίας του συστήματος ταυτίζεται με τον πρώτο διατεταγμένο χρόνο ζωής των συνιστωσών και ισούται με 1. Αντίθετα η πιθανότητα το σύστημα να λειτουργήσει αφού έχει αποτύχει μία συνιστώσα του ισούται με 0.

Προκειμένου να παρουσιάσουμε την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου για τη μελέτη του σειριακού συστήματος, επιλέγουμε την παράμετρο εισόδου n=8, που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα που μελετάται αποτελείται από 8 μονάδες,ενώ προσδιορίζεται η παράμετρος k=1,που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα διακόπτει τη λειτουργία του αν χαλάσει τουλάχιστον μία μονάδα του. Με άλλα λόγια, βάσει των παραμέτρων εισόδου που καθορίσθηκαν, το σύστημα που προσομοιώνεται είναι ένα σειριακό σύστημα με 8 μονάδες (συμβολικά: C: 1/8). Όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου, το διάνυσμα της υπογραφής του σειριακού συστήματος δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Σύστημα C:k/n	**Υπογραφή**							
C:1/8	1	0	0	0	0	0	0	0

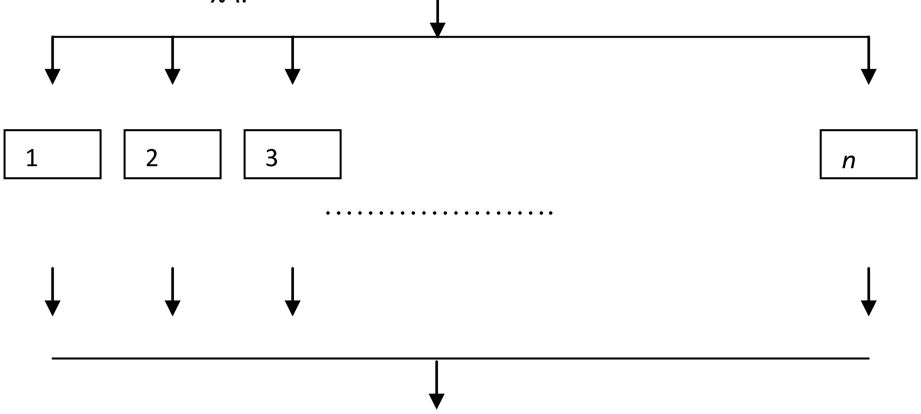
Πίνακας 2.Υπογραφή σειριακού συστήματος C:1/8

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση του σειριακού συστήματος, ο νέος αλγόριθμος προσομοίωσης επιβεβαιώνει αριθμητικά τα αποτελέσματα που είναι γνωστά στη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με την υπογραφή του υπό μελέτη συστήματος αξιοπιστίας.

2.3 Εφαρμογή του νέου αλγορίθμου για τη μελέτη του παράλληλου συστήματος

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο λειτουργίας του παράλληλου συστήματος και θα γίνει επαλήθευση, μέσω της εφαρμογής του προτεινόμενου αλγορίθμου προσομοίωσης, γνωστών αποτελεσμάτων που αναφέρονται σε βασικά χαρακτηριστικά του, όπως για παράδειγμα για το διάνυσμα της υπογραφής του.

Το παράλληλο σύστημα αποτελείται από nμονάδες οι οποίες είναι συνδεδεμένες η κάθε μία και στην είσοδο και στην έξοδο του συστήματος, συνεπώς το σύστημα αποτυγχάνει όταν όλες οι μονάδες του αποτύχουν ή ισοδύναμα λειτουργεί όταν τουλάχιστον μία μονάδα του λειτουργεί. Η διάταξη του παράλληλου συστήματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 9. Παράλληλο Σύστημα

Τα ελάχιστα σύνολα λειτουργίας είναι όλα τα μονοσύνολα $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{n\}$, ενώ το μοναδικό ελάχιστα σύνολα διακοπής του παράλληλου συστήματος είναι το $\{1,2,...,n\}$, δηλαδή έχουμε$\mathbf{P}= \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\}$ και $\mathbf{C}=\{\{1,2,...,n\}\}$.

Η υπογραφή ενός παράλληλου συστήματος όπως δείξαμε και νωρίτερα δίνεται από το διάνυσμα (0,0,…,0,1). Είναι γνωστό ότι ένα παράλληλο σύστημα είναι το δυϊκό ενός σειριακού συστήματος.

Προκειμένου να παρουσιάσουμε την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου για τη μελέτη του παράλληλου συστήματος, επιλέγουμε την παράμετρο εισόδου n=8, που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα που μελετάται αποτελείται από 8 μονάδες, ενώ προσδιορίζεται η παράμετρος k=8,που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα διακόπτει τη λειτουργία του αν χαλάσει τουλάχιστον 8 μονάδες του. Με άλλα λόγια, βάσει των παραμέτρων εισόδου που καθορίσθηκαν, το σύστημα που προσομοιώνεται είναι ένα παράλληλο σύστημα με 8 μονάδες (συμβολικά: C: 8/8). Όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου, το διάνυσμα της υπογραφής του παράλληλου συστήματος δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Σύστημα *C*:*k*/*n*	**Υπογραφή**							
C:8/8	0	0	0	0	0	0	0	1

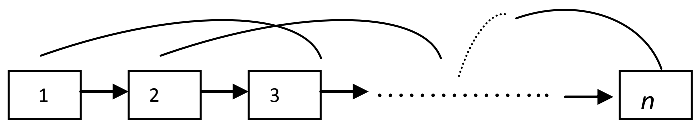
Πίνακας 3. Υπογραφή παράλληλου συστήματος *C: k/n*

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση του παράλληλου συστήματος, ο νέος αλγόριθμος προσομοίωσης επιβεβαιώνει αριθμητικά τα αποτελέσματα που είναι γνωστά στη διεθνή βιβλιογραφία σχετικά με την υπογραφή του υπό μελέτη συστήματος αξιοπιστίας.

2.4 Εφαρμογή του νέου αλγορίθμου για τη μελέτη του συστήματος συνεχόμενων*k*-από-τα-*n*:*F*

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο λειτουργίας του συστήματος συνεχόμενων *k*-από-τα-*n:F* (*C: k/n*) και θα γίνει επαλήθευση, μέσω της εφαρμογής του προτεινόμενου αλγορίθμου προσομοίωσης, γνωστών αποτελεσμάτων που αναφέρονται σε βασικά χαρακτηριστικά του, όπως για παράδειγμα για το διάνυσμα της υπογραφής του (βλ. Τριανταφύλλου & Κούτρας (2005)).

Το συνεχόμενο συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F* σύστημα αποτυγχάνει όταν αποτύχουν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες από τις *n*. Η διάταξη του συστήματος αυτού φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 10. Σύστημα συνεχόμενων*k*-από-τα-*n*

Οι δομές αυτές, οι οποίες αρχικά είχαν εισαχθεί από τους Chiang&Niu (1981), εφαρμόζονται συχνά σε συστήματα τηλεπικοινωνιών, σε δίκτυα μεταφοράς υγρών, καθώς και στο σχεδιασμό ολοκληρωμένων κυκλωμάτων.Τα συστήματα συνεχόμενων*k*-από-τα-*n*: *F*έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης ερευνητών σχεδόν από το 1980. Οι Chiang και Niu (1981) αναφέρουν δύο παραδείγματα για την χρήση των συστημάτων αυτών. Στο πρώτο παράδειγμα έχουμε ένα σύστημα τηλεπικοινωνιών με n σταθμούς αναμετάδοσης, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι σε ίσες αποστάσεις και κανένας δεν μπορεί να μεταφέρει σήμα σε απόσταση που περιλαμβάνει k σταθμούς αναμετάδοσης. Προφανώς το σύστημα αυτό αποτυγχάνει εάν τουλάχιστον k συνεχόμενοι σταθμοί αναμετάδοσης παύσουν να λειτουργούν.

Το δεύτερο παράδειγμα συσχετίζεται με ένα δίκτυο μεταφοράς πετρελαίου αποτελούμενο από σωλήνες και n σταθμούς τροφοδότησης. Εάν ένας σταθμός τροφοδότησης χαλάσει, η ροή πετρελαίου δεν θα διακοπεί, επειδή οι υπόλοιποι $k-1$ σωλήνες θα συνεχίσουν την μεταφορά. Όμως, αν χαλάσουν τουλάχιστον k συνεχόμενοι σωλήνες η ροή του πετρελαίου θα σταματήσει και το σύστημα αποτυγχάνει.

Τα ελάχιστα σύνολα διακοπής είναι τα σύνολα $\{1,2,...,k\}$, $\{2,3,...,k+1\},\ldots,\{n-k+1,n-k+2,\ldots n\}$, δηλαδή όλα τα υποσύνολα του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ με k διαδοχικά στοιχεία. Για την οικογένεια των ελάχιστα σύνολα διακοπής γράφουμε: $\mathbf{C}=\{\{j,j+1,...,j+k-1\}, j=1,2,\ldots,n-k+1\}$.

Οι Τριανταφύλλου & Κούτρας (2005) μελέτησαν, μεταξύ άλλων, την υπογραφή του συστήματος συνεχόμενων2-από-τα-n:F. Συγκεκριμένα απέδειξαν ότι η υπογραφή ενός συστήματος δίνεται από το διάνυσμα:

$$s'=(0,\frac{2}{n},\frac{4n-10}{n(n-1)},...,\frac{12}{(5-n)!n!}-\frac{2}{n!(3-n)!},\frac{2}{n!(3-n)!})$$

Σύστημα C: $2\vert n$	**Υπογραφής**
C : 2/2	(0,1)
C : 2/3	$(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3})$
C : 2/4	$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$
C : 2/5	$(0,\frac{4}{10},\frac{5}{10},\frac{1}{10},0)$
C : 2/6	$(0,\frac{5}{15},\frac{7}{15},\frac{3}{15},0,0)$
C : 2/7	$(0,\frac{10}{35},\frac{15}{35},\frac{9}{35},\frac{1}{35},0,0)$
C : 2/8	$(0,\frac{7}{28},\frac{11}{28},\frac{8}{28},\frac{2}{28},0,0,0)$

Πίνακας 4. Υπογραφή συστήματος s

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου για τη μελέτη του συστήματος συνεχόμενων 2-από-τα-*n:F*, προκειμένου να οδηγηθούμε στην πειραματική επαλήθευση του διανύσματος των Τριανταφύλλου & Κούτρα (2005). Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε την παράμετρο εισόδου *n*=2,3,...,8, που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα που μελετάται αποτελείται από 2,3,...,8 μονάδες, ενώ προσδιορίζεται η παράμετρος *k*=2,που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα διακόπτει τη λειτουργία του αν χαλάσει τουλάχιστον 2 μονάδες του. Με άλλα λόγια, βάσει των παραμέτρων εισόδου που καθορίσθηκαν, το σύστημα που προσομοιώνεται είναι ένα σύστημα συνεχόμενων 2-από-τα-*n:F* (συμβολικά: *C*: 2/*n*). Όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου, το διάνυσμα της υπογραφής του συστήματος δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Σύστημα *C*:2/*n*	**Υπογραφή**							
C:2/2	0	1	0	0	0	0	0	0
C:2/3	0	0,6607	0,3393	0	0	0	0	0
C:2/4	0	0,5019	0,4981	0	0	0	0	0
C:2/5	0	0,3958	0,4993	0,1049	0	0	0	0
C:2/6	0	0,3282	0,4707	0,2011	0	0	0	0
C:2/7	0	0,2896	0,4251	0,2559	0,0294	0	0	0
C:2/8	0	0,2432	0,3913	0,2923	0,0732	0	0	0

Πίνακας 5.Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος συνεχόμενων 2-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Βάσει των Πινάκων 4 και 5, φαίνεται ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου επαληθεύονται βάσει των γνωστών αποτελεσμάτων που υπάρχουν για το σύστημα συνεχόμενων 2-από-τα-*n:F*.

Το αρχείο που παρήχθη κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου για την διαμόρφωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων του Πίνακα 5, παρουσιάζεται ακολούθως.

- **Αρχείο scriptsystem1.m**

Προσομοιώνουμε σύστημα με χρήση της *myfun2* αποτελούμενο από 8 μονάδες στο οποίο χαλάει αν υπάρξουν 2 συνεχόμενες μονάδες που βγουν εκτός λειτουργίας. Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας με την υπογραφή του συστήματος.

Επεκτείνοντας τη μελέτη των συστημάτων συνεχόμενων *k*-από-τα-*n* τροποποιήσαμε τις παραμέτρους εισόδου του κώδικα που αναπτύξαμε στην παρούσα πτυχιακή εργασία για να υπολογίσουμε το διάνυσμα υπογραφής για συστήματα με μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων *k*,*n*. Συγκεκριμένα προσδιορίσαμε την παράμετρο εισόδου *n* να λαμβάνει τιμές από 6 μέχρι και 10 και την παράμετρο *k* από 6 μέχρι και *n*-1. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.

Σύστημα *C:k/n*		**Υπογραφή**									
k	**n**										
2	**6**	0	0,3204	0,4764	0,2032	0	0	0	0	0	0
3	**6**	0	0	0,204	0,3969	0,3991	0	0	0	0	0
4	**6**	0	0	0	0,1978	0,4695	0,3327	0	0	0	0
5	**6**	0	0	0	0	0,3279	0,6721	0	0	0	0
2	**7**	0	0,2827	0,4307	0,2553	0,0313	0	0	0	0	0
3	**7**	0	0	0,1409	0,3134	0,4001	0,1456	0	0	0	0
4	**7**	0	0	0	0,1104	0,3123	0,4304	0,1469	0	0	0
5	**7**	0	0	0	0	0,1403	0,4368	0,4229	0	0	0
6	**7**	0	0	0	0	0	0,2815	0,7185	0	0	0
2	**8**	0	0,2455	0,3911	0,2904	0,073	0	0	0	0	0
3	**8**	0	0	0,1063	0,2465	0,3489	0,2641	0,0342	0	0	0
4	**8**	0	0	0	0,071	0,2117	0,3665	0,3508	0	0	0
5	**8**	0	0	0	0	0,0724	0,2521	0,4267	0,2488	0	0
6	**8**	0	0	0	0	0	0,1115	0,3947	0,4938	0	0
7	**8**	0	0	0	0	0	0	0,2497	0,7503	0	0
2	**9**	0	0,2212	0,367	0,2908	0,1124	0,0086	0	0	0	0
3	**9**	0	0	0,0865	0,199	0,3145	0,2813	0,1187	0	0	0
4	**9**	0	0	0	0,0473	0,1467	0,2802	0,358	0,1678	0	0
5	**9**	0	0	0	0	0,0414	0,1497	0,3114	0,3793	0,1182	0
6	**9**	0	0	0	0	0	0,0475	0,2009	0,4232	0,3284	0
7	**9**	0	0	0	0	0	0	0,087	0,354	0,559	0
8	**9**	0	0	0	0	0	0	0	0,2236	0,7764	0
2	**10**	0	0,2016	0,3241	0,3061	0,1425	0,0257	0	0	0	0
3	**10**	0	0	0,064	0,1639	0,267	0,2844	0,1861	0,0346	0	0
4	**10**	0	0	0	0,0322	0,105	0,2168	0,3149	0,2648	0,0663	0
5	**10**	0	0	0	0	0,0221	0,0975	0,2166	0,3328	0,331	0
6	**10**	0	0	0	0	0	0,0236	0,1099	0,2628	0,4076	0,1961
7	**10**	0	0	0	0	0	0	0,0328	0,1659	0,4028	0,3985
8	**10**	0	0	0	0	0	0	0	0,0662	0,3307	0,6031

9	**10**	0	0	0	0	0	0	0	0	0,2011	0,7989

Πίνακας 6. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος συνεχόμενων *k*-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Το αρχείο που παρήχθη κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου για την διαμόρφωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων του Πίνακα 6, παρουσιάζεται ακολούθως.

- **Αρχείο scriptsystem2.m**

Προσομοιώνουμε 15 συστήματα με χρήση της *myfun2* τα οποία αποτελούνται από *n* μονάδες, όπου η παράμετρος *n*λαμβάνει τις ακόλουθες τιμές:

n=[6 6 6 7 7 7 8 8 8 9 9 9 10 10 10]

Τα συγκεκριμένα συστήματα διακόπτουν τη λειτουργία τους αν χαλάσουν *k* συνεχόμενες μονάδες τους, όπου η παράμετρος *k* λαμβάνει αντίστοιχα τις ακόλουθες τιμές:

k=[3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4 5 3 4 5]

Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας δύο διαστάσεων με την υπογραφή του κάθε συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανάπτυξη αλγορίθμου για τη μελέτη της οικογένειας των (*n, f, k*) συστημάτων και των συστημάτων *r*-μεταξύ-συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F*

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτύξουμε κατάλληλο κώδικα για την πιθανοθεωρητική μελέτη συστημάτων αξιοπιστίας που αποτελούν γενίκευση των συστημάτων συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F* που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 2. Ο κώδικας θα εφαρμοσθεί σε ειδικές περιπτώσεις γνωστών διατάξεων αξιοπιστίας προκειμένου να επαληθευτεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων που παράγει. Πιο συγκεκριμένα, θα εξειδικεύσουμε τον κώδικα προκειμένου να υπολογισθούν βασικά χαρακτηριστικά γνωστών συστημάτων αξιοπιστίας, όπως για παράδειγματων (*n, f, k*) συστημάτων και των συστημάτων *r*-μεταξύ-συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F*. Πέραν της επαλήθευσης ήδη γνωστών αποτελεσμάτων σχετικών με τα προαναφερθέντα συστήματα αξιοπιστίας, ο προτεινόμενος αλγόριθμος θα εφαρμοσθεί ώστε να παραχθούν αριθμητικά αποτελέσματα για τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού των συστημάτων, οι οποίες δεν έχουν καλυφθεί από αντίστοιχα θεωρητικά αποτελέσματα. Με άλλα λόγια, στο πλαίσιο του παρόντος κεφαλαίου, θα παρουσιάσουμε πρωτότυπα αποτελέσματα που αναφέρονται σε βασικά χαρακτηριστικά των (*n, f, k*) συστημάτων και των συστημάτων *r*-μεταξύ-συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F*. Για παράδειγμα, όπως θα αναφερθεί αναλυτικά παρακάτω, για το σύστημα (*n, f, k*) υπάρχει αναδρομικός τύπος υπολογισμού της υπογραφής του μόνο για την ειδική περίπτωση k=2. Για μεγαλύτερες τιμές της συγκεκριμένης παραμέτρου, δεν υπάρχει στη διεθνή βιβλιογραφία κλειστός ή αναδρομικός τύπος υπολογισμού για την υπογραφή του συστήματος. Συνεπώς, τα αποτελέσματα που θα δοθούν στο πλαίσιο της παρούσας πτυχιακής εργασίας, σχετικά με το σύστημα (*n, f, k*) για τιμές της παραμέτρου k> 2, αποκτούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς εμφανίζονται για πρώτη φορά στη διεθνή βιβλιογραφία. Πρόσθετα, για τη μελέτη του συστήματος *r*-μεταξύ-συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F*, έχει αποδειχθεί τύπος υπολογισμού της υπογραφής του μόνο για την ειδική περίπτωση $r = 2$. Συνεπώς, τα αποτελέσματα που θα δοθούν στο πλαίσιο της παρούσας πτυχιακής εργασίας, σχετικά με το σύστημα *r*-μεταξύ-συνεχόμενων *k*-από-τα-*n*: *F* για τιμές της παραμέτρου r> 2, αποκτούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς εμφανίζονται για πρώτη φορά στη διεθνή βιβλιογραφία.Να σημειωθεί ότι όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα που θα παρουσιασθούν στο πλαίσιο του παρόντος κεφαλαίου, έχουν παραχθεί με την κατάλληλη εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου προσομοίωσης. Για την υλοποίηση του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο MATLAB.

3.1 Εφαρμογή του νέου αλγορίθμου για τη μελέτη του συστήματος (*n*,*f*, *k*)

Στην παρούσα ενότητα μελετάται το σύστημα (*n*,*f*,*k*) και παρουσιάζεται ο τροποποιημένος κώδικας που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας πτυχιακής εργασία για τον προσδιορισμό του διανύσματος της υπογραφής του για διάφορες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού του.

Το σύστημα (*n*,*f*,*k*) αποτελείται από *n* γραμμικά διατεταγμένες μονάδες και αποτυγχάνει αν συμβεί ένα από τα ακόλουθα ενδεχόμενα: τουλάχιστον *k*συνεχόμενες μονάδες του αποτύγχουνή τουλάχιστον *f* (όχι απαραίτητα διαδοχικές) μονάδες του συστήματος τεθούν εκτός λειτουργίας. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα χαρακτηριστικά του συστήματος (*n*,*f*,*k*), ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Chang, Cui & Hwang (1999), Zuo, Lin & Wu (2000), Cui, Kuo, Li, &Xie (2006) ή Triantafyllou & Koutras (2014).

Αρχικά, θα περιγράψουμε αναλυτικά τον σχετικό κώδικα που αναπτύξαμε για να μελετήσουμε την οικογένεια των (*n*,*f*, *k*) συστημάτων.

- **Συνάρτηση myfunf.m**

Περιγραφή λειτουργίας: Προσομοιώνουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από *n* μονάδες οι οποίες βγαίνουν εκτός λειτουργίας σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Το σύστημα θα χαλάσει είτε αν τουλάχιστον *k* συνεχόμενες μονάδες βγουν εκτός λειτουργίας είτε αν οποιεσδήποτε *f* στο πλήθος μονάδες του βγουν εκτός λειτουργίας.

Παράμετροι εισόδου: Η παράμετρος ***k*** εκφράζει το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που πρέπει να βγουν εκτός λειτουργίας ώστε να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος, η παράμετρος *f* συμβολίζειτο πλήθος των μονάδων που βγάζει εκτός λειτουργίας το σύστημα (ασχέτως αν πρόκειται για συνεχόμενες ή όχι), ενώ η παράμετρος ***n*** εκφράζει το πλήθος των μονάδων από το οποίο αποτελείται το σύστημα. Προκειμένου να διατηρούνται ενεργά και τα δύο κριτήρια διακοπής λειτουργίας του συστήματος, πρέπει να ισχύει η συνθήκη $f>k$.

Παράμετροι εξόδου:Η παράμετρος ***m*** εκφράζει τη μονάδα (τον αύξοντα αριθμό της μονάδας) η οποία έθεσε εκτός λειτουργίας το σύστημα (ήταν μοιραία για τη λειτουργία του συστήματος), ***index*** αποτελεί τον πίνακαπου περιλαμβάνει τις μονάδες που χάλασαν και ο οποίος είναι ταξινομημένος ως προς τη χρονική στιγμή που η *i*-οστή μονάδα βγήκε εκτός λειτουργίας, ενώ ***t*** είναι οι χρονικές στιγμές στις οποίες παρατηρήθηκεη διακοπή λειτουργίας των μονάδων. Να σημειωθεί ότι οι χρονικές στιγμές *t* εκφράζονται ως αύξοντες αριθμοί των μονάδων που διακόπτουν τη λειτουργία τους.

- **Συνάρτηση myfun2f.m**

Περιγραφή λειτουργίας: Προσομοιώνουμε *N* συστήματα της *myfunf* και υπολογίζουμε για κάθε μία από τις μονάδες την πιθανότητα να χαλάσει το σύστημα όταν η συγκεκριμένη μονάδα τέθηκε εκτός λειτουργίας.

Παράμετροι εισόδου:Η παράμετρος ***k*** εκφράζει το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που πρέπει να βγουν εκτός λειτουργίας ώστε να διακοπεί η λειτουργία του συστήματος, η παράμετρος ***f*** συμβολίζειτο πλήθος των μονάδων που βγάζει εκτός λειτουργίας το σύστημα (ασχέτως αν πρόκειται για συνεχόμενες ή όχι), η παράμετρος ***n*** εκφράζει το πλήθος των μονάδων από το οποίο αποτελείται το σύστημα., ενώ η παράμετρος ***N*** συμβολίζει το πλήθος των συστημάτων που προσομοιώνουμε.

Παράμετροι εξόδου: *P* είναι πίνακας *n* στοιχείων που περιέχει τις πιθανότητες για κάθε μονάδα να θέσει το σύστημα εκτός λειτουργίας.

Στη συνέχεια, ο κώδικας εφαρμόζεται για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων εισόδου που περιγράφηκαν παραπάνω. Τα αρχεία που σχηματίζονται βάσει των εφαρμογών του κώδικα, παρουσιάζονται στις αντίστοιχες εφαρμογές που ακολουθούν. Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας με την υπογραφή του συστήματος.

Τα (n, f, k) συστήματα εκτός από τις εφαρμογές τους στην αξιοπιστία συστημάτων, είναι φυσικά συνδεδεμένα με συγκεκριμένα προβλήματα, πολύ γνωστά στο πεδίο της Στατιστικής και της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Για παράδειγμα, ο Sobel (1974) περιγράφει μία ενδιαφέρουσα περίπτωση μοντέλων Θεωρίας Ουρών Αναμονής όπου τα κριτήρια που συσχετίζονται με τον τερματισμό του συστήματος λαμβάνουν υπόψιν τους είτε μεγάλες σε μήκος διαδοχικές εμφανίσεις (επιτυχιών ή αποτυχιών) ή συνολικές εμφανίσεις (επιτυχιών ή αποτυχιών) που παρατηρούνται σε ένα πείραμα με εξόδους που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή.

Οι Triantafyllou & Koutras (2014) απέδειξαν ότι η υπογραφή ενός συστήματος (n, f, 2) δίνεται από τη σχέση:

$$s = (p_1(n), p_2(n), ..., p_{f-1}(n), \sum_{i=f}^{n} p_i(n), 0, 0, ..., 0)$$

όπου

$$i\binom{n}{i} p_i(n) = (n-i+1)\binom{n-i+2}{i-1} - i\binom{n-i+1}{i}.$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου για τη μελέτη του συστήματος (n, f, 2), προκειμένου να οδηγηθούμε στην πειραματική επαλήθευση του διανύσματος των Triantafyllou & Koutras (2014). Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε την παράμετρο εισόδου n=3,4,...,10, που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα που μελετάται αποτελείται από 3,4,...,10 μονάδες, ενώ προσδιορίζονται οι παράμετροι k=2, f = 3,4 που πρακτικά σημαίνει ότι το σύστημα διακόπτει τη λειτουργία του είτε αν χαλάσουν τουλάχιστον 2 συνεχόμενες μονάδες του είτε αν χαλάσουν συνολικά 3 ή 4 μονάδες του. Με άλλα λόγια, βάσει των παραμέτρων εισόδου που καθορίσθηκαν, το σύστημα που προσομοιώνεται είναι ένα σύστημα (n, f, 2). Όπως προκύπτει από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου, το διάνυσμα της υπογραφής του συστήματος δίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Σύστημα (*n*, *f*, 2)		**Υπογραφή**								
f	***n***									
3	**3**	0	0,6601	0,3399	0	0	0	0	0	0
3	**4**	0	0,5013	0,4987	0	0	0	0	0	0
3	**5**	0	0,4117	0,5883	0	0	0	0	0	0
3	**6**	0	0,3346	0,6654	0	0	0	0	0	0
3	**7**	0	0,2831	0,7169	0	0	0	0	0	0
3	**8**	0	0,2444	0,7556	0	0	0	0	0	0

3	**9**	0	0,2194	0,7806	0	0	0	0	0	0
3	**10**	0	0,2017	0,7983	0	0	0	0	0	0
4	**3**	0	0,6639	0,3361	0	0	0	0	0	0
4	**4**	0	0,5014	0,4986	0	0	0	0	0	0
4	**5**	0	0,3903	0,5099	0,0998	0	0	0	0	0
4	**6**	0	0,3337	0,465	0,2013	0	0	0	0	0
4	**7**	0	0,2876	0,4336	0,2788	0	0	0	0	0
4	**8**	0	0,2552	0,3874	0,3574	0	0	0	0	0
4	**9**	0	0,2214	0,3592	0,4194	0	0	0	0	0
4	**10**	0	0,2028	0,3277	0,4695	0	0	0	0	0

Πίνακας 7. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (*n*, *f*, 2) (μέσω προσομοίωσης)

Βάσει του Πίνακα 7, φαίνεται ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή του προτεινόμενου αλγορίθμου επαληθεύονται βάσει των γνωστών αποτελεσμάτων που υπάρχουν για το σύστημα (*n*, *f*, 2).

Επεκτείνοντας τη μελέτη των συστημάτων (*n*,*f*,*k*) τροποποιήσαμε τις παραμέτρους εισόδου του κώδικα που αναπτύξαμε στην παρούσα πτυχιακή εργασία για να υπολογίσουμε το διάνυσμα υπογραφής για συστήματα με μεγαλύτερες τιμές των παραμέτρων *k*,*f*,*n*. Συγκεκριμένα προσδιορίσαμε την παράμετρο εισόδου *n* να λαμβάνει τιμές από 5 μέχρι και 10, την παράμετρο *f* από 6 μέχρι και 10 και την παράμετρο *k* από 3 εως 8. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 8.

***k*=3**

f	***n***	**Υπογραφή**									
5	**4**	0	0	0,4928	0,5072	0	0	0	0	0	0
5	**5**	0	0	0,2918	0,5087	0,1995	0	0	0	0	0
5	**6**	0	0	0,2014	0,3974	0,4012	0	0	0	0	0
5	**7**	0	0	0,1454	0,3125	0,5421	0	0	0	0	0
5	**8**	0	0	0,108	0,2612	0,6308	0	0	0	0	0
5	**9**	0	0	0,0804	0,205	0,7146	0	0	0	0	0
5	**10**	0	0	0,0645	0,1733	0,7622	0	0	0	0	0
6	**4**	0	0	0,4973	0,5027	0	0	0	0	0	0
6	**5**	0	0	0,3043	0,4997	0,196	0	0	0	0	0
6	**6**	0	0	0,2072	0,402	0,3908	0	0	0	0	0
6	**7**	0	0	0,1403	0,3179	0,4039	0,1379	0	0	0	0
6	**8**	0	0	0,1044	0,2474	0,3616	0,2866	0	0	0	0
6	**9**	0	0	0,0863	0,1982	0,3176	0,3979	0	0	0	0
6	**10**	0	0	0,064	0,1715	0,2638	0,5007	0	0	0	0

7	**4**	0	0	0,4926	0,5074	0	0	0	0	0	0
7	**5**	0	0	0,3009	0,495	0,2041	0	0	0	0	0
7	**6**	0	0	0,1977	0,404	0,3983	0	0	0	0	0
7	**7**	0	0	0,1421	0,3196	0,3951	0,1432	0	0	0	0
7	**8**	0	0	0,0989	0,2521	0,3558	0,2564	0,0368	0	0	0
7	**9**	0	0	0,081	0,2038	0,3036	0,2903	0,1213	0	0	0
7	**10**	0	0	0,0695	0,1595	0,2661	0,2879	0,217	0	0	0
8	**4**	0	0	0,4892	0,5108	0	0	0	0	0	0
8	**5**	0	0	0,3058	0,5018	0,1924	0	0	0	0	0
8	**6**	0	0	0,2023	0,3918	0,4059	0	0	0	0	0
8	**7**	0	0	0,1449	0,3111	0,3999	0,1441	0	0	0	0
8	**8**	0	0	0,1042	0,2507	0,3578	0,2548	0,0325	0	0	0
8	**9**	0	0	0,084	0,1966	0,3058	0,2925	0,1211	0	0	0
8	**10**	0	0	0,0695	0,1688	0,2605	0,2881	0,1812	0,0319	0	0
9	**4**	0	0	0,4926	0,5074	0	0	0	0	0	0
9	**5**	0	0	0,3024	0,5027	0,1949	0	0	0	0	0
9	**6**	0	0	0,1981	0,3989	0,403	0	0	0	0	0
9	**7**	0	0	0,144	0,3147	0,394	0,1473	0	0	0	0
9	**8**	0	0	0,1061	0,2499	0,363	0,2487	0,0323	0	0	0
9	**9**	0	0	0,0883	0,2039	0,2985	0,2912	0,1181	0	0	0
9	**10**	0	0	0,0633	0,1657	0,2723	0,2884	0,1766	0,0337	0	0
10	**4**	0	0	0,5127	0,4873	0	0	0	0	0	0
10	**5**	0	0	0,302	0,5049	0,1931	0	0	0	0	0
10	**6**	0	0	0,2038	0,3992	0,397	0	0	0	0	0
10	**7**	0	0	0,1404	0,3175	0,3947	0,1474	0	0	0	0
10	**8**	0	0	0,1085	0,2466	0,3585	0,2536	0,0328	0	0	0
10	**9**	0	0	0,0801	0,2016	0,3057	0,29	0,1226	0	0	0
10	**10**	0	0	0,0651	0,1682	0,2717	0,2795	0,1792	0,0363	0	0

Πίνακας 8. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (*n*, *f*,3)
(μέσω προσομοίωσης)

***k*=4**

f	***n***	Υπογραφή									
6	**5**	0	0	0	0,396	0,604	0	0	0	0	0
6	**6**	0	0	0	0,203	0,4664	0,3306	0	0	0	0
6	**7**	0	0	0	0,1144	0,3078	0,5778	0	0	0	0
6	**8**	0	0	0	0,0745	0,2086	0,7169	0	0	0	0
6	**9**	0	0	0	0,0482	0,1443	0,8075	0	0	0	0
6	**10**	0	0	0	0,0347	0,1069	0,8584	0	0	0	0
7	**5**	0	0	0	0,4073	0,5927	0	0	0	0	0
7	**6**	0	0	0	0,1976	0,4675	0,3349	0	0	0	0
7	**7**	0	0	0	0,1117	0,3171	0,4302	0,141	0	0	0
7	**8**	0	0	0	0,0694	0,2171	0,3593	0,3542	0	0	0

7	**9**	0	0	0	0,0471	0,147	0,2732	0,5327	0	0	0
7	**10**	0	0	0	0,031	0,1055	0,219	0,6445	0	0	0
8	**5**	0	0	0	0,4052	0,5948	0	0	0	0	0
8	**6**	0	0	0	0,1925	0,4667	0,3408	0	0	0	0
8	**7**	0	0	0	0,1185	0,3148	0,4239	0,1428	0	0	0
8	**8**	0	0	0	0,0733	0,2085	0,3551	0,3631	0	0	0
8	**9**	0	0	0	0,049	0,1512	0,2761	0,3597	0,164	0	0
8	**10**	0	0	0	0,0355	0,1093	0,2145	0,3082	0,3325	0	0
9	**5**	0	0	0	0,3984	0,6016	0	0	0	0	0
9	**6**	0	0	0	0,1956	0,4761	0,3283	0	0	0	0
9	**7**	0	0	0	0,1148	0,3154	0,4269	0,1429	0	0	0
9	**8**	0	0	0	0,0745	0,2089	0,3541	0,3625	0	0	0
9	**9**	0	0	0	0,0475	0,152	0,2797	0,3511	0,1697	0	0
9	**10**	0	0	0	0,0335	0,1097	0,2121	0,3165	0,2601	0,0681	0
10	**5**	0	0	0	0,4003	0,5997	0	0	0	0	0
10	**6**	0	0	0	0,2044	0,4681	0,3275	0	0	0	0
10	**7**	0	0	0	0,1124	0,3156	0,4297	0,1423	0	0	0
10	**8**	0	0	0	0,0784	0,2215	0,3329	0,3672	0	0	0
10	**9**	0	0	0	0,0471	0,1511	0,2811	0,3563	0,1644	0	0
10	**10**	0	0	0	0,0326	0,1083	0,2149	0,3115	0,2618	0,0709	0

Πίνακας 9. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (n, f,4) (μέσω προσομοίωσης)

k=5

f	**n**	Υπογραφή									
7	**6**	0	0	0	0	0,3338	0,6662	0	0	0	0
7	**7**	0	0	0	0	0,1404	0,4351	0,4245	0	0	0
7	**8**	0	0	0	0	0,0674	0,2547	0,6779	0	0	0
7	**9**	0	0	0	0	0,0356	0,1507	0,8137	0	0	0
7	**10**	0	0	0	0	0,0259	0,0987	0,8754	0	0	0
8	**6**	0	0	0	0	0,3336	0,6664	0	0	0	0
8	**7**	0	0	0	0	0,142	0,434	0,424	0	0	0
8	**8**	0	0	0	0	0,0714	0,2433	0,4262	0,2591	0	0
8	**9**	0	0	0	0	0,0383	0,1486	0,3109	0,5022	0	0
8	**10**	0	0	0	0	0,0251	0,0955	0,2087	0,6707	0	0
9	**6**	0	0	0	0	0,3308	0,6692	0	0	0	0
9	**7**	0	0	0	0	0,1468	0,4288	0,4244	0	0	0
9	**8**	0	0	0	0	0,0711	0,2421	0,4464	0,2404	0	0
9	**9**	0	0	0	0	0,042	0,1569	0,3065	0,3836	0,111	0
9	**10**	0	0	0	0	0,0271	0,0952	0,2131	0,3332	0,3314	0
10	**6**	0	0	0	0	0,3294	0,6706	0	0	0	0
10	**7**	0	0	0	0	0,1385	0,4286	0,4329	0	0	0
10	**8**	0	0	0	0	0,0675	0,2508	0,4242	0,2575	0	0

10	**9**	0	0	0	0	0,0397	0,1552	0,3072	0,3886	0,1093	0
10	**10**	0	0	0	0	0,0254	0,0935	0,218	0,3321	0,331	0

Πίνακας 10. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (*n*, *f*,5)

(μέσω προσομοίωσης)

k=6

f	**n**	Υπογραφή									
8	**7**	0	0	0	0	0	0,2855	0,7145	0	0	0
8	**8**	0	0	0	0	0	0,1098	0,3956	0,4946	0	0
8	**9**	0	0	0	0	0	0,049	0,2015	0,7495	0	0
8	**10**	0	0	0	0	0	0,0209	0,1134	0,8657	0	0
9	**7**	0	0	0	0	0	0,2953	0,7047	0	0	0
9	**8**	0	0	0	0	0	0,1058	0,3928	0,5014	0	0
9	**9**	0	0	0	0	0	0,0448	0,2022	0,4155	0,3375	0
9	**10**	0	0	0	0	0	0,0238	0,1089	0,2705	0,5968	0
10	**7**	0	0	0	0	0	0,2884	0,7116	0	0	0
10	**8**	0	0	0	0	0	0,1067	0,3921	0,5012	0	0
10	**9**	0	0	0	0	0	0,0489	0,2013	0,4132	0,3366	0
10	**10**	0	0	0	0	0	0,0252	0,1081	0,2607	0,399	0,207

Πίνακας 11. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (*n*, *f*,6)

(μέσω προσομοίωσης)

k=7

f	**n**	Υπογραφή									
9	**8**	0	0	0	0	0	0	0,2474	0,7526	0	0
9	**9**	0	0	0	0	0	0	0,0801	0,3603	0,5596	0
9	**10**	0	0	0	0	0	0	0,0318	0,1661	0,8021	0
10	**8**	0	0	0	0	0	0	0,2473	0,7527	0	0
10	**9**	0	0	0	0	0	0	0,0839	0,3632	0,5529	0
10	**10**	0	0	0	0	0	0	0,0342	0,1608	0,4005	0,4045

Πίνακας 12. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (*n*, *f*,7)

(μέσω προσομοίωσης)

k=8

f	**n**	Υπογραφή									
10	**9**	0	0	0	0	0	0	0	0,2298	0,7702	0
10	**10**	0	0	0	0	0	0	0	0,0678	0,3372	0,595

Πίνακας 13. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος (*n*, *f*,8)

(μέσω προσομοίωσης)

Τα αρχεία που παρήχθησαν κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου για την διαμόρφωση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, παρουσιάζονται ακολούθως.

- **Αρχείο scriptsystem2f.m**

Προσομοιώνουμε 15 συστήματα με χρήση της *myfun2f* τα οποία αποτελούνται από *n* μονάδες, όπου η παράμετρος *n*λαμβάνει τις εξής τιμές:

n=[3 4 5 6 7 8 9 10 3 4 5 6 7 8 9 10]

Τα συγκεκριμένα συστήματα αξιοπιστίας διακόπτουν τη λειτουργία τουςείτε αν χαλάσουν

f=[3 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4]

οποιεσδήποτε μονάδες είτε αν χαλάσουν τουλάχιστον k=3 συνεχόμενεςμονάδες. Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας δύο διαστάσεων με την υπογραφή του κάθε συστήματος.

- **Αρχείο scriptsystem2f2.m**

Προσομοιώνουμε 15 συστήματα με χρήση της *myfun2f* τα οποία από *n* μονάδες, όπου η παράμετρος *n*λαμβάνει τιμές από 5 μέχρι 10 και για κάθε τιμή του *n* το f από *n* μέχρι 10 ενώ η παράμετρος k=4. Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας δύο διαστάσεων με την υπογραφή του κάθε συστήματος.

3.2 Εφαρμογή του νέου αλγορίθμου για τη μελέτη του συστήματος *r*-μεταξύ-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n:F*

Στην παρούσα ενότητα μελετάται το σύστημα *r*-μεταξύ-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n:F* και παρουσιάζεται ο τροποποιημένος κώδικας που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της παρούσας πτυχιακής εργασία για τον προσδιορισμό του διανύσματος της υπογραφής του για διάφορες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού του.

Το σύστημα *r*-μεταξύ-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n:F* αποτελείται από γραμμικώς διευθετημένες μονάδες καιαποτυγχάνει εάν σε μία αλυσίδα *k* συνεχόμενων μονάδων υπάρχουν τουλάχιστον *r* μονάδες που αποτυγχάνουν.

Αρχικά, θα περιγράψουμε αναλυτικά τον σχετικό κώδικα που αναπτύξαμε για να μελετήσουμε την οικογένεια των *r*-μεταξύ-συνεχόμενων-*k*-από-τα-*n:F* συστημάτων.

- **Συνάρτηση *myfunkr.m***

Περιγραφή λειτουργίας: Προσομοιώνουμε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από *n* μονάδες λειτουργίας οι οποίες βγαίνουν εκτός λειτουργίας σε τυχαίες χρονικές στιγμές. Το σύστημα θα χαλάσει αν υπάρχει αλυσίδα *k* συνεχόμενων μονάδων στις οποίες τουλάχιστον *r* μονάδες είναι χαλασμένες.

Παράμετροι εισόδου: Η παράμετρος *k* εκφράζει το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που εντοπίζονται κάθε φορά, η παράμετρος *r* το πλήθος εκείνων των μονάδων μέσα στις συνεχόμενες *k* μονάδες που βγάζουν εκτός λειτουργίας το σύστημα, ενώ η παράμετρος *n*συμβολίζει το πλήθος των μονάδων που αποτελούν το σύστημα. Προφανώς $r \leq k$.

Παράμετροι εξόδου: Η παράμετρος ***m*** εκφράζει τη μονάδα (τον αύξοντα αριθμό της μονάδας) η οποία έθεσε εκτός λειτουργίας το σύστημα (ήταν μοιραία για τη λειτουργία του συστήματος), ***index*** αποτελεί τον πίνακαπου περιλαμβάνει τις μονάδες που χάλασαν και ο οποίος είναι ταξινομημένος ως προς τη χρονική στιγμή που η *i*-οστή μονάδα βγήκε εκτός λειτουργίας, ενώ ***t*** είναι οι χρονικές στιγμές στις οποίες παρατηρήθηκε διακοπή λειτουργίας των μονάδων.Πρόσθετα, **tripl** συμβολίζει τοναύξοντα αριθμό (α/α) της ομάδας των *k* συνεχόμενων μονάδων για τις οποίες χάλασε το σύστημα.

- **Συνάρτηση *myfun2kr.m***

Περιγραφή λειτουργίας: Προσομοιώνουμε *N* συστήματα της *myfun2* και υπολογίζουμε για κάθε μία από τις μονάδες την πιθανότητα να χαλάσει το σύστημα όταν η συγκεκριμένη μονάδα τέθηκε εκτός λειτουργίας.

Παράμετροι εισόδου: Η παράμετρος *k*εκφράζει το πλήθος των συνεχόμενων μονάδων που κάθε φορά εντοπίζουμε, η παράμετρος *r* συμβολίζει το πλήθος εκείνων των μονάδων μέσα σε *k*συνεχόμενες που βγάζουν εκτός λειτουργίας το σύστημα, η παράμετρος *n* εκφράζει το πλήθος των μονάδων που αποτελούν το σύστημα, ενώ *N*είναι το πλήθος των συστημάτων που προσομοιώνουμε.

Παράμετροι εξόδου: *P* συμβολίζει τον πίνακα*n* στοιχείων που περιέχει τις πιθανότητες της κάθε ομάδας των *k* συνεχόμενων μονάδων για τις οποίες χάλασε το σύστημα.

- **Αρχείο scriptsystem_*rkn.m***

Προσομοιώνουμε 15 συστήματα με χρήση της *myfun2kr* τα οποία σχηματίζονται βάσει των ακόλουθων παραμέτρων σχεδιασμού: r=4, k=r+1 και n=k+1,...,10. Η έξοδος του προγράμματος είναι πίνακας δύο διαστάσεων με την υπογραφή του κάθε συστήματος.

Οι Triantafyllou & Koutras (2011) μελετούν το σύστημα r-μεταξύ-συνεχόμενων-k-από-τα-n:F και αποδεικνύουν αναδρομικές σχέσεις και κλειστούς τύπους για τον υπολογισμό του διανύσματος της υπογραφής του συστήματος για ειδικές τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού.

Για την πειραματική επαλήθευση των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στην εργασία των Triantafyllou & Koutras (2011) προσομοιώσαμε τα συστήματα r-μεταξύ-συνεχόμενων-k-από-τα-n:F για r = 2, k=r+1 και n =4,5,...,10. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα και συμφωνούν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που είχαν παραχθεί βάσει των θεωρητικών σχέσεων της εργασίας των Triantafyllou & Koutras(2011).

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
4	**3**	0	0,83366	0,16634	0	0	0	0	0	0	0
5	**3**	0	0,69654	0,30346	0	0	0	0	0	0	0
6	**3**	0	0,6019	0,3981	0	0	0	0	0	0	0
7	**3**	0	0,52342	0,44788	0,0287	0	0	0	0	0	0
8	**3**	0	0,46728	0,46206	0,07066	0	0	0	0	0	0
9	**3**	0	0,4188	0,46424	0,11696	0	0	0	0	0	0
10	**3**	0	0,37988	0,45536	0,1605	0,00426	0	0	0	0	0
n	***k***										
4	**3**	0	20	4	0	0	0	0	0	0	0
5	**3**	0	84	36	0	0	0	0	0	0	0
6	**3**	0	433	287	0	0	0	0	0	0	0

7	**3**	0	2638	2257	145	0	0	0	0	0	0
8	**3**	0	18841	18630	2849	0	0	0	0	0	0
9	**3**	0	151974	168463	42442	0	0	0	0	0	0
10	**3**	0	1378509	1652410	582422	15459	0	0	0	0	0

Πίνακας 14. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-3-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	**k**	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
5	**4**	0	0,89968	0,10032	0	0	0	0	0	0	0
6	**4**	0	0,79764	0,20236	0	0	0	0	0	0	0
7	**4**	0	0,71154	0,28846	0	0	0	0	0	0	0
8	**4**	0	0,64258	0,35742	0	0	0	0	0	0	0
9	**4**	0	0,58396	0,40382	0,01222	0	0	0	0	0	0
10	**4**	0	0,53112	0,43618	0,0327	0	0	0	0	0	0
n	***k***										
5	**4**	0	108	12	0	0	0	0	0	0	0
6	**4**	0	574	146	0	0	0	0	0	0	0
7	**4**	0	3586	1454	0	0	0	0	0	0	0
8	**4**	0	25909	14411	0	0	0	0	0	0	0
9	**4**	0	211907	146538	4434	0	0	0	0	0	0
10	**4**	0	1927328	1582810	118662	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 15. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-4-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
6	**5**	0	0,93406	0,06594	0	0	0	0	0	0	0
7	**5**	0	0,8565	0,1435	0	0	0	0	0	0	0
8	**5**	0	0,7846	0,2154	0	0	0	0	0	0	0
9	**5**	0	0,71992	0,28008	0	0	0	0	0	0	0
10	**5**	0	0,665	0,335	0	0	0	0	0	0	0
n	***k***										
6	**5**	0	673	47	0	0	0	0	0	0	0
7	**5**	0	4317	723	0	0	0	0	0	0	0
8	**5**	0	31635	8685	0	0	0	0	0	0	0
9	**5**	0	261245	101635	0	0	0	0	0	0	0
10	**5**	0	2413152	1215648	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 16. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-5-από-τα-*n:F*(μέσω προσομοίωσης)

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
7	**6**	0	0,9524	0,0476	0	0	0	0	0	0	0
8	**6**	0	0,89434	0,10566	0	0	0	0	0	0	0
9	**6**	0	0,83194	0,16806	0	0	0	0	0	0	0
10	**6**	0	0,77898	0,22102	0	0	0	0	0	0	0
n	**k**										
7	**6**	0	4800	240	0	0	0	0	0	0	0
8	**6**	0	36060	4260	0	0	0	0	0	0	0
9	**6**	0	301894	60986	0	0	0	0	0	0	0
10	**6**	0	2826763	802037	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 17. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-6-από-τα-*n:F*(μέσω προσομοίωσης)

n	**k**	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
8	**7**	0	0,9644	0,0356	0	0	0	0	0	0	0
9	**7**	0	0,91814	0,08186	0	0	0	0	0	0	0
10	**7**	0	0,8685	0,1315	0	0	0	0	0	0	0
n	**k**										
8	**7**	0	38885	1435	0	0	0	0	0	0	0
9	**7**	0	333175	29705	0	0	0	0	0	0	0
10	**7**	0	3151613	477187	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 18. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-7-από-τα-*n:F*(μέσω προσομοίωσης)

n	**k**	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
9	**8**	0	0,97158	0,02842	0	0	0	0	0	0	0
10	**8**	0	0,93584	0,06416	0	0	0	0	0	0	0
n	**k**										
9	**8**	0	352567	10313	0	0	0	0	0	0	0
10	**8**	0	3395976	232824	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 19. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-*n:F*(μέσω προσομοίωσης)

n	**k**	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
10	**9**	0	0,97882	0,02118	0	0	0	0	0	0	0
n	**k**										
10	**9**	0	3551942	76858	0	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 20. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 2-μεταξύ-συνεχόμενων-*9*-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Οι ακόλουθοι πίνακες περιλαμβάνουν αποτελέσματα που σχετίζονται με τα υπό μελέτη συστήματα αλλά με την παράμετρο σχεδιασμού *r* > 2.

Αποτελέσματα για *r*=3

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
5	**4**	0	0	0,69866	0,30134	0	0	0	0	0	0
6	**4**	0	0	0,50008	0,43184	0,06808	0	0	0	0	0
7	**4**	0	0	0,3704	0,45962	0,16998	0	0	0	0	0
8	**4**	0	0	0,29118	0,42376	0,28506	0	0	0	0	0
9	**4**	0	0	0,22416	0,38844	0,3404	0,047	0	0	0	0
10	**4**	0	0	0,1811	0,3409	0,36002	0,11284	0,00514	0	0	0

n	*k*										
5	**4**	0	0	84	36	0	0	0	0	0	0
6	**4**	0	0	360	311	49	0	0	0	0	0
7	**4**	0	0	1867	2316	857	0	0	0	0	0
8	**4**	0	0	11740	17086	11494	0	0	0	0	0
9	**4**	0	0	81343	140957	123524	17055	0	0	0	0
10	**4**	0	0	657176	1237058	1306441	409474	18652	0	0	0

Πίνακας 21. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 3-μεταξύ-συνεχόμενων-*4*-από-τα-*n:F*(μέσω προσομοίωσης)

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
6	**5**	0	0	0,80184	0,19816	0	0	0	0	0	0
7	**5**	0	0	0,62626	0,34526	0,02848	0	0	0	0	0
8	**5**	0	0	0,50526	0,40978	0,08496	0	0	0	0	0
9	**5**	0	0	0,40338	0,43568	0,16094	0	0	0	0	0
10	**5**	0	0	0,33362	0,42572	0,24066	0	0	0	0	0

n	*k*										
6	**5**	0	0	577	143	0	0	0	0	0	0
7	**5**	0	0	3156	1740	144	0	0	0	0	0
8	**5**	0	0	20372	16522	3426	0	0	0	0	0
9	**5**	0	0	146379	158100	58402	0	0	0	0	0
10	**5**	0	0	1210640	1544853	873307	0	0	0	0	0

Πίνακας 22. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 3-μεταξύ-συνεχόμενων-5-από-τα-*n:F*(μέσω προσομοίωσης)

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
7	**6**	0	0	0,8583	0,1417	0	0	0	0	0	0
8	**6**	0	0	0,71216	0,27348	0,01436	0	0	0	0	0
9	**6**	0	0	0,59602	0,35532	0,04866	0	0	0	0	0
10	**6**	0	0	0,50138	0,40322	0,0954	0	0	0	0	0
n	*k*										
7	**6**	0	0	4326	714	0	0	0	0	0	0
8	**6**	0	0	28714	11027	579	0	0	0	0	0
9	**6**	0	0	216284	128939	17658	0	0	0	0	0
10	**6**	0	0	1819408	1463205	346188	0	0	0	0	0

Πίνακας 23. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 3-μεταξύ-συνεχόμενων-6-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
8	**7**	0	0	0,8935	0,1065	0	0	0	0	0	0
9	**7**	0	0	0,7734	0,21888	0,00772	0	0	0	0	0
10	**7**	0	0	0,66754	0,30414	0,02832	0	0	0	0	0
n	*k*										
8	**7**	0	0	36026	4294	0	0	0	0	0	0
9	**7**	0	0	280651	79427	2801	0	0	0	0	0
10	**7**	0	0	2422369	1103663	102768	0	0	0	0	0

Πίνακας 24. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 3-μεταξύ-συνεχόμενων-7-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
9	**8**	0	0	0,9176	0,0824	0	0	0	0	0	0
10	**8**	0	0	0,81876	0,17704	0,0042	0	0	0	0	0
n	*k*										
9	**8**	0	0	332979	29901	0	0	0	0	0	0
10	**8**	0	0	2971116	642443	15241	0	0	0	0	0

Πίνακας 25. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 3-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
10	9	0	0	0,93268	0,06732	0	0	0	0	0	0
n	k										
10	9	0	0	3384509	244291	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 26. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 3-μεταξύ-συνεχόμενων-9-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Αποτελέσματα για *r*=4

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
6	5	0	0	0	0,6004	0,3996	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0,36966	0,48324	0,1471	0	0	0	0
8	5	0	0	0	0,24276	0,43702	0,28396	0,03626	0	0	0
9	5	0	0	0	0,16892	0,3571	0,35692	0,11706	0	0	0
10	5	0	0	0	0,11792	0,2895	0,35432	0,23826	0	0	0

n	*k*										
6	5	0	0	0	432	288	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	1863	2436	741	0	0	0	0
8	5	0	0	0	9788	17621	11449	1462	0	0	0
9	5	0	0	0	61298	129584	129519	42479	0	0	0
10	5	0	0	0	427908	1050538	1285756	864598	0	0	0

Πίνακας 27. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 4-μεταξύ-συνεχόμενων-5-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, το σύστημα 4-μεταξύ-συνεχόμενων-5-από-τα-6:*F* έχει πιθανότητα ίση με 6.004% να διακόψει τη λειτουργία του κατά τον 4^{ο} διατεταγμένο χρόνο αποτυχίας μονάδας του, δηλαδή κατά τη στιγμή που χαλάει η 4^{η} μονάδα του συστήματος. Ομοίως, μπορούμε να δώσουμε την ερμηνεία και στα υπόλοιπα αριθμητικά αποτελέσματα του πίνακα.

n	*k*	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
7	6	0	0	0	0,71518	0,28482	0	0	0	0	0
8	6	0	0	0	0,49318	0,43508	0,07174	0	0	0	0
9	6	0	0	0	0,35942	0,4518	0,17646	0,01232	0	0	0

10	**6**	0	0	0	0,26186	0,42074	0,26926	0,04814	0	0	0
n	***k***										
7	**6**	0	0	0	3605	1435	0	0	0	0	0
8	**6**	0	0	0	19885	17542	2893	0	0	0	0
9	**6**	0	0	0	130426	163949	64034	4471	0	0	0
10	**6**	0	0	0	950238	1526781	977091	174690	0	0	0

Πίνακας 28. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 4-μεταξύ-συνεχόμενων-6-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
8	**7**	0	0	0	0,78612	0,21388	0	0	0	0	0
9	**7**	0	0	0	0,5959	0,3652	0,0389	0	0	0	0
10	**7**	0	0	0	0,45284	0,4276	0,1145	0,00506	0	0	0
n	***k***										
8	**7**	0	0	0	31696	8624	0	0	0	0	0
9	**7**	0	0	0	216240	132524	14116	0	0	0	0
10	**7**	0	0	0	1643266	1551675	415498	18362	0	0	0

Πίνακας 29. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 4-μεταξύ-συνεχόμενων-7-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
9	**8**	0	0	0	0,83208	0,16792	0	0	0	0	0
10	**8**	0	0	0	0,66352	0,31262	0,02386	0	0	0	0
n	***k***										
9	**8**	0	0	0	301945	60935	0	0	0	0	0
10	**8**	0	0	0	2407781	1134435	86583	0	0	0	0

Πίνακας 30. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 4-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, το σύστημα 4-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-10:*F* έχει πιθανότητα ίση με 31.262% να διακόψει τη λειτουργία του κατά τον $5^{ο}$ διατεταγμένο χρόνο αποτυχίας μονάδας του, δηλαδή κατά τη στιγμή που χαλάει η $5^{η}$ μονάδα του συστήματος. Ομοίως, μπορούμε να δώσουμε την ερμηνεία και στα υπόλοιπα αριθμητικά αποτελέσματα του πίνακα.

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
10	**9**	0	0	0	0,8671	0,1329	0	0	0	0	0

n	k										
10	9	0	0	0	3146532	482268	0	0	0	0	0

Πίνακας 31. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 4-μεταξύ-συνεχόμενων-9-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Αποτελέσματα για *r*=5

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
7	6	0	0	0	0	0,52262	0,47738	0	0	0	0
8	6	0	0	0	0	0,2898	0,49684	0,21336	0	0	0
9	6	0	0	0	0	0,16714	0,3939	0,35574	0,08322	0	0
10	6	0	0	0	0	0,10258	0,28786	0,37568	0,21194	0,02194	0
n	k										
7	6	0	0	0	0	2634	2406	0	0	0	0
8	6	0	0	0	0	11685	20033	8603	0	0	0
9	6	0	0	0	0	60652	142938	129091	30199	0	0

Πίνακας 32. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 5-μεταξύ-συνεχόμενων-6-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
8	7	0	0	0	0	0,64552	0,35448	0	0	0	0
9	7	0	0	0	0	0,40284	0,47742	0,11974	0	0	0
10	7	0	0	0	0	0,26204	0,44654	0,25716	0,03426	0	0
n	k										
8	7	0	0	0	0	26027	14293	0	0	0	0
9	7	0	0	0	0	146183	173246	43451	0	0	0
10	7	0	0	0	0	950891	1620404	933182	124323	0	0

Πίνακας 33. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 5-μεταξύ-συνεχόμενων-7-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
9	8	0	0	0	0	0,72228	0,27772	0	0	0	0
10	8	0	0	0	0	0,5022	0,42734	0,07046	0	0	0
n	k										
9	8	0	0	0	0	262101	100779	0	0	0	0
10	8	0	0	0	0	1822383	1550731	255685	0	0	0

Πίνακας 34. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 5-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
10	**9**	0	0	0	0	0,7749	0,2251	0	0	0	0
n	**k**										
10	**9**	0	0	0	0	2811957	816843	0	0	0	0

Πίνακας 35. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 5-μεταξύ-συνεχόμενων-9-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
8	**7**	0	0	0	0	0	0,46502	0,53498	0	0	0
9	**7**	0	0	0	0	0	0,23082	0,4936	0,27558	0	0
10	**7**	0	0	0	0	0	0,1184	0,34718	0,40142	0,133	0
n	**k**										
8	**7**	0	0	0	0	0	18750	21570	0	0	0
9	**7**	0	0	0	0	0	83760	179118	100002	0	0
10	**7**	0	0	0	0	0	429650	1259847	1456673	482630	0

Πίνακας 36. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 6-μεταξύ-συνεχόμενων-7-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, το σύστημα 6-μεταξύ-συνεχόμενων-7-από-τα-9:*F* έχει πιθανότητα ίση με 27.558% να διακόψει τη λειτουργία του κατά τον 8^{o} διατεταγμένο χρόνο αποτυχίας μονάδας του, δηλαδή κατά τη στιγμή που χαλάει η 8^{η} μονάδα του συστήματος. Ομοίως, μπορούμε να δώσουμε την ερμηνεία και στα υπόλοιπα αριθμητικά αποτελέσματα του πίνακα.

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
9	**8**	0	0	0	0	0	0,58488	0,41512	0	0	0
10	**8**	0	0	0	0	0	0,33174	0,5003	0,16796	0	0
n	**k**										
9	**8**	0	0	0	0	0	212241	150639	0	0	0
10	**8**	0	0	0	0	0	1203818	1815489	609493	0	0

Πίνακας 37. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 6-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

n	k	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
10	**9**	0	0	0	0	0	0,6637	0,3363	0	0	0
n	**k**										

10	**9**	0	0	0	0	0	2408435	1220365	0	0	0

Πίνακας 38. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 6-μεταξύ-συνεχόμενων-9-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Αποτελέσματα για *r*=7

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
9	**8**	0	0	0	0	0	0	0,4183	0,5817	0	0
10	**8**	0	0	0	0	0	0	0,18518	0,48248	0,33234	0
n	***k***										
9	**8**	0	0	0	0	0	0	151793	211087	0	0
10	**8**	0	0	0	0	0	0	671981	1750823	1205995	0

Πίνακας 39. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 7-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα, το σύστημα 7-μεταξύ-συνεχόμενων-8-από-τα-10:*F* έχει πιθανότητα ίση με 33.234% να διακόψει τη λειτουργία του κατά τον $9^{ο}$ διατεταγμένο χρόνο αποτυχίας μονάδας του, δηλαδή κατά τη στιγμή που χαλάει η $9^{η}$ μονάδα του συστήματος. Ομοίως, μπορούμε να δώσουμε την ερμηνεία και στα υπόλοιπα αριθμητικά αποτελέσματα του πίνακα.

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
10	**9**	0	0	0	0	0	0	0,53308	0,46692	0	0
n	***k***										
10	**9**	0	0	0	0	0	0	1934441	1694359	0	0

Πίνακας 40. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 7-μεταξύ-συνεχόμενων-9-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Αποτελέσματα για *r*=8

n	***k***	**i=1**	**i=2**	**i=3**	**i=4**	**i=5**	**i=6**	**i=7**	**i=8**	**i=9**	**i=10**
10	**9**	0	0	0	0	0	0	0	0,37522	0,62478	0
n	***k***										
10	**9**	0	0	0	0	0	0	0	1361598	2267202	0

Πίνακας 41. Υπολογισμός της υπογραφής του συστήματος 8-μεταξύ-συνεχόμενων-9-από-τα-*n:F* (μέσω προσομοίωσης)

Στους ακόλουθους πίνακες εμφανίζεται η συγκριτική παρουσίαση των διανυσμάτων της υπογραφής για τα μονότονα συστήματα που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία για συγκεκριμένο πλήθος μονάδων. Πιο συγκεκριμένα, για τις ειδικές περιπτώσεις διατάξεων αξιοπιστίας 5 και 6 μονάδων, έχει καταγραφεί το διάνυσμα υπογραφής για τα συστήματα (*n*,*f*,*k*), *r*-within-consecutive-*k*-out-of-*n* και C: *k*/*n* για διάφορες τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων σχεδιασμού. Είναι σαφές ότι τα συστήματα που εμφανίζουν μη μηδενικές συντεταγμένες στο δυνατόν πιο «μακρινές» θέσεις του αντίστοιχου διανύσματος υπογραφής, είναι εκείνα που κρίνονται ως πιο αξιόπιστα.

***n*=5**											
Σύστημα C:*k*/*n*											
k											
2		0	0,4008	0,4994	0,0998	0	0	0	0	0	0
3		0	0	0,3006	0,4976	0,2018	0	0	0	0	0
4		0	0	0	0,4008	0,5992	0	0	0	0	0
Σύστημα *n*,*f*,*k*											
k	f										
2	3	0	0,3858	0,6142	0	0	0	0	0	0	0
2	4	0	0,3969	0,5094	0,0937	0	0	0	0	0	0
2	5	0	0,3926	0,5051	0,1023	0	0	0	0	0	0
3	4	0	0	0,3006	0,6994	0	0	0	0	0	0
3	5	0	0	0,3056	0,496	0,1984	0	0	0	0	0
4	5	0	0	0	0,4028	0,5972	0	0	0	0	0
Σύστημα *r*-within-*k*											
k	*r*										
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0,69882	0,30118	0	0	0	0	0	0	0
4	3	0	0	0,70154	0,29846	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 42. Υπολογισμός της υπογραφής των τριών συστημάτων με πλήθος μονάδων *n*=5

***n*=6**										
Σύστημα C:*k*/*n*										
k										
2	0	0,3334	0,4638	0,2028	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0,2004	0,4017	0,3979	0	0	0	0	0

4		0	0	0	0,1954	0,4612	0,34	0	0	0	0
5		0	0	0	0	0,3272	0,67	0	0	0	0
Σύστημα *n,f,k*											
k	*f*										
2	3	0	0,3291	0,6709	0	0	0	0	0	0	0
2	4	0	0,3292	0,4694	0,2014	0	0	0	0	0	0
2	5	0	0,3353	0,4752	0,1895	0	0	0	0	0	0
2	6	0	0,3355	0,4646	0,1999	0	0	0	0	0	0
3	4	0	0	0,1963	0,8037	0	0	0	0	0	0
3	5	0	0	0,1932	0,3975	0,4093	0	0	0	0	0
3	6	0	0	0,1998	0,4036	0,3966	0	0	0	0	0
4	5	0	0	0	0,2063	0,7937	0	0	0	0	0
4	6	0	0	0	0,1951	0,4655	0,34	0	0	0	0
5	6	0	0	0	0	0,3255	0,67	0	0	0	0
Σύστημα *r*-within-*k*											
k	*r*										
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0,60076	0,39924	0	0	0	0	0	0	0
4	3	0	0	0,50374	0,43044	0,06582	0	0	0	0	0
5	4	0	0	0	0,60122	0,39878	0	0	0	0	0

Πίνακας 43. Υπολογισμός της υπογραφής των τριών συστημάτων με πλήθος μονάδων *n*=6

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barlow, R.E. &Proschan, F. (1975). Statistical theory of reliability and life testing, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Birnbaum, Z.W.,Esary, J.D. & Saunders, S.C. (1961). Multi-component systems and structures and their reliability,*Technometrics*,**3**, 55–77.

Boland, P.J. (2001). Signatures of indirect majority systems, *Journal of Applied Probability,* **38**, 597–603.

Boland, P.J., Samaniego, F.J. and Verstup, E.M. (2001). Linking dominations and signatures in network reliability theory, *Technical Report # 372,* Department of Statistics, University of California, Davis.

Boland, P.J. & El-Neweihi, E. (1995). Component redundancy vs system redundancy in the hazard rate ordering, *IEEE Transactions on Reliability,* **44**, 614–619.

Chang, J. G., Cui, L. &Hwang, F. K. (1999). Reliabilities for (n, f, k) systems, *Statistics & Probability Letters*, **43**, 237–242.

Chiang, D.T. and Niu, S. (1981). Reli`ability of consecutive–*k*–out–of–*n*: *F* system, *IEEE Transactions on Reliability,* **30**, 87–89.

Cui, L., Kuo, W., Li, J. &Xie, M. (2006). On the dual reliability systems of (n, f, k) and $\langle n, f, k \rangle$, *Statistics & Probability Letters*, **76**, 1081–1088.

Esary, J.D. & Marshall, A.W. (1964). System structure and the existence of a system life, *Technometrics,***6**,459–462.

Esary, J.D. &Proschan, F. (1963). Relation between system failure rate and component failure rates, *Technometrics*, **5**,183–189.

Kochar, S., Mukerjee, H. &Samaniego, F.J. (1999). The signature of a coherent system and its application to comparisons among systems, *Naval Research Logistics*, **46**, 507–523.

Koutras, M. V., Tsitmidelis, S. and Zissimopoulos, V. (2003). Evaluation of reliability bounds by set covering models. *Statistics and Probability Letters*,61, 163-175.

Sobel, M. J. (1974). Optimal Operation of Queues, In *Mathematical Methods in Queueing Theory* (ed. A.B. Clarke), **98**, 231-261.

Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2011). Signature and *IFR* Preservation of 2-within-consecutive *k*-out-of-*n*: *F* Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 315-322.

Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2014). Reliability properties of (*n*, *f*, *k*) systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **63**, 357-366.

Zuo, M. J., Lin, D. & Wu, Y. (2000). Reliability evaluation of combined *k*–out–of–*n*:*F*, consecutive–*k*–out–of–*n*:*F* and linear connected–(*r*,*s*)–out–of–(*m*,*n*):*F* system structures, *IEEE Transactions on Reliability*,**49**, 99–104.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τριανταφύλλου, Ι.Σ. & Κούτρας, Μ. Β. (2005). Η υπογραφή ενός μονότονου συστήματος, 18^{ο} Πανελλήνιο Συνέδριο Στατιστικής, Ρόδος.