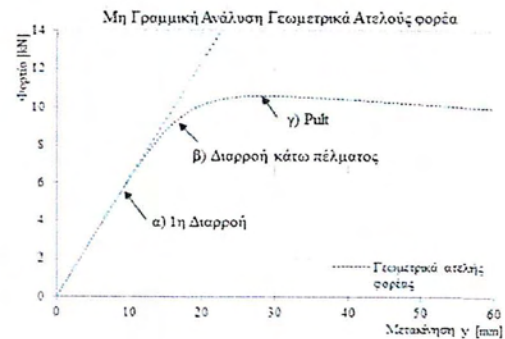
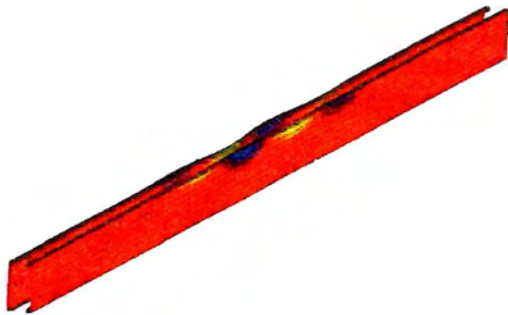
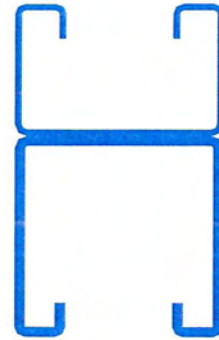
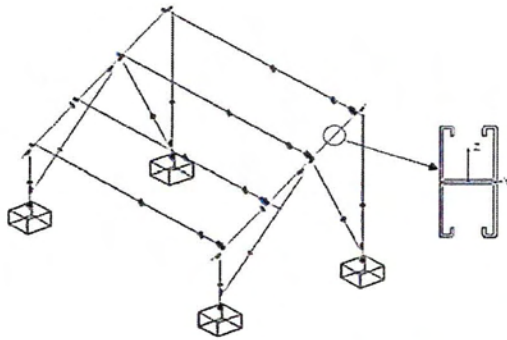


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

**ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ  
ΧΑΛΥΒΔΙΝΩΝ ΜΕΛΩΝ ΨΥΧΡΗΣ ΕΛΑΣΗΣ  
ΒΑΣΕΩΝ ΦΩΤΟΒΟΛΤΑΪΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟ  
ΣΥΓΚΟΛΛΗΤΗ ΔΙΑΤΟΜΗ ΔΙΠΛΟΥ U**



ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΟΥΛΓΑΡΗΣ

Επιβλέπων: Κ. Τζάρος, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός

Εξεταστική επιτροπή:

Ε. Μυστακίδης, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Καθηγητής

Ο. Παναγούλη, Δρ. Πολιτικός Μηχανικός, Επ. Καθηγήτρια



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 14075/1  
Ημερ. Εισ.: 06-09-2017  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ  
2015  
ΒΟΥ

© 2015 Βούλγαρης Δημήτριος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	1
2. Κεφάλαιο 1 <sup>ο</sup> - Βάσεις φωτοβολταϊκών συστημάτων από μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές ψυχρής διαμόρφωσης.....	4
3. Κεφάλαιο 2 <sup>ο</sup> - Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δοκών διπλής συμμετρίας-Αναλυτικοί τύποι υπολογισμού.....	14
4. Κεφάλαιο 3 <sup>ο</sup> - Βασικά στοιχεία μη γραμμικής ανάλυσης μεταλλικών κατασκευών με πεπερασμένα στοιχεία .....	18
5. Κεφάλαιο 4 <sup>ο</sup> - Ανάλυση λυγισμού χαλύβδινων μελών με την μέθοδο πεπερασμένων λωρίδων μέσω του προγράμματος CUFSM .....	23
6. Κεφάλαιο 5 <sup>ο</sup> - Μελέτη λυγισμικής συμπεριφοράς χαλύβδινων μελών ψυχρής έλασης από συγκολλητή λεπτότοιχη διατομή διπλού U.....	44
7. Βιβλιογραφία.....	87

## 1. Εισαγωγή

Η ανάγκη αξιοποίησης της ηλιακής ενέργειας στον Ελλαδικό χώρο σε συνδυασμό με τα κίνητρα που δόθηκαν σε ιδιώτες από την κρατική νομοθεσία για την εκμετάλλευση της, οδήγησε τα τελευταία χρόνια στην αύξηση της χρήσης φωτοβολταϊκών συστημάτων. Τα συστήματα αυτά στηρίζονται σε ειδικές μεταλλικές βάσεις των οποίων οι διατομές αποτελούνται κυρίως από λεπτότοιχα χαλύβδινα στοιχεία ψυχρής διαμόρφωσης που εμφανίζουν ποικιλία σχημάτων (απλές ή σύνθετες, συγκολλητές ή κοχλιωτές, κλπ). Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα χρησιμοποιούνται ειδικοί χάλυβες που χαρακτηρίζονται από πολύ υψηλές τιμές της τάσης διαρροής.

Ο στατικός σχεδιασμός αυτού του είδους των κατασκευών βασίζεται στις κανονιστικές διατάξεις του Μέρους 1.3 του Ευρωκώδικα 3. Παρόλα αυτά, είναι γνωστό ότι πολλές από τις διατάξεις του κανονισμού αυτού είναι συντηρητικές. Το γεγονός αυτό αναγνωρίζεται από το ίδιο το κανονιστικό κείμενο, όπου επισημαίνεται ότι ο σχεδιασμός των μελών από λεπτότοιχες διατομές ψυχρής διαμόρφωσης, που στηρίζεται στις συμβατικές διαδικασίες υπολογισμού, είναι συντηρητικός και μπορεί να οδηγήσει σε μη-οικονομικές λύσεις. Για τον λόγο αυτό, και προκειμένου να βρεθούν οικονομικά συμφέρουσες λύσεις για βιομηχανικές κατασκευές πολλαπλής εφαρμογής, προτείνεται η ενεργοποίηση της υποβοηθούμενης από πειράματα διαδικασίας σχεδιασμού. Η διαδικασία αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί επίσης να καλύψει κανονιστικά και περιπτώσεις που δεν εμπίπτουν στις συμβατικές διατάξεις σχεδιασμού, όπως ειδικά σχήματα διατομών ή χάλυβες πολύ υψηλής αντοχής που παρουσιάζουν μειωμένη πλαστιμότητα.

Στα πλαίσια ενός ερευνητικού έργου που διεξήχθη το έτος 2010 με την συνεργασία των εργαστηρίων Σχεδιασμού και Ανάλυσης Κατασκευών του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και Στοιχείων Μηχανών και Μηχανολογικού Σχεδιασμού του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Α.Π.Θ., υπό την επίβλεψη των κ. καθηγητών Ε. Μυστακίδη και Α. Μιχαηλίδη, πραγματοποιήθηκε μια σειρά πειραμάτων κάμψης 4 και 3 σημείων σε δοκούς από μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές που χρησιμοποιούνται σε βάσεις φωτοβολταϊκών συστημάτων. Σκοπός των πειραμάτων ήταν η εύρεση της πειραματικής αντοχής έναντι κάμψης των υπόψη διατομών και η μετέπειτα στατιστική τους επεξεργασία για τον προσδιορισμό των καμπτικών αντοχών σχεδιασμού βάσει των οποίων θα ήταν δυνατό

να εφαρμοστούν οι διατάξεις του Ευρωκώδικα 3 για τον έλεγχο των δομικών μελών των φωτοβολταϊκών βάσεων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αρχικώς επιχειρείται η περαιτέρω αξιοποίηση των ανωτέρω πειραματικών δεδομένων με στόχο την ερμηνεία της καμπτικής και λυγισμικής απόκρισης δοκών από μη συμβατικές διατομές ψυχρής διαμόρφωσης. Για το στόχο αυτό δημιουργούνται κατάλληλα τρισδιάστατα αριθμητικά προσομοιώματα πεπερασμένων στοιχείων κελύφους με βάση τα δεδομένα των πειραμάτων. Τα συγκεκριμένα προσομοιώματα είναι σε θέση να αναδείξουν όλα τα μη γραμμικά φαινόμενα που δύναται να εμφανιστούν κατά την καμπτική καταπόνηση αυτού του είδους των δοκών. Επιπρόσθετα εισάγονται αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και υλοποιούνται παραμετρικές αναλύσεις με σκοπό την λεπτομερέστερη περιγραφή της λυγισμικής απόκρισης που λαμβάνει χώρα κατά την κάμψη των υπόψη δοκών και η οποία παρατηρήθηκε και στην πειραματική διαδικασία. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής και πειραματικής εργασίας ήταν αρκούντως ικανοποιητική και ως εκ τούτου μέσω των αριθμητικών προσομοιωμάτων και της παραμετρικής μελέτης ήταν δυνατή η κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα καθώς και η εξαγωγή συμπερασμάτων για την κάμψη δοκών που εξετάστηκαν.

Εν συνεχεία, με δεδομένο ότι κατά τον σχεδιασμό των μελών των φωτοβολταϊκών βάσεων απαιτείται η διενέργεια ελέγχων έναντι φαινομένων στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, οι οποίοι με την σειρά τους απαιτούν τον προσδιορισμό της κρίσιμης ροπής ( $M_{cr}$ ) έναντι στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, εκτελείται μια νέα σειρά αναλύσεων με στόχο την εύρεση της κρίσιμης ροπής  $M_{cr}$  για καταπόνηση σε ομοιόμορφη κάμψη. Η εργασία αυτή είναι σημαντική διότι οι τύποι υπολογισμού που παρέχονται από την βιβλιογραφία και το παράρτημα του ευρωκώδικα δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστούν (στην πλειονότητα των περιπτώσεων) για την περίπτωση των μη συμβατικών λεπτότοιχων διατομών. Στην μελέτη αυτή γίνεται φανερό η μεγάλη επιρροή των συνοριακών συνθηκών στην τιμή της κρίσιμης ροπής.

Στην ανωτέρω μελέτη που διεξήχθη με στόχο τον προσδιορισμό της κρίσιμης ροπής έναντι στρεπτοκαμπτικού λυγισμού, πέραν της χρήσης μη γραμμικής ανάλυσης με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, συμβάλει και η μέθοδος των πεπερασμένων λωρίδων (Finite Strip Method). Η μέθοδος των Πεπερασμένων Λωρίδων είναι μια παραλλαγή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων. Μέσω αυτής μια λεπτότοιχη διατομή διακριτοποιείται σε μία σειρά από επιμήκεις λωρίδες ή στοιχεία. Με βάση αυτές τις λωρίδες μορφώνονται τα μητρώα ελαστικής και γεωμετρικής στιβαρότητας και λύνεται το αντίστοιχο ιδιοπρόβλημα. Στα πλαίσια της παρούσης εργασίας εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων λωρίδων για

τις μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές που εξετάστηκαν στα πειράματα μέσω της χρήσης του ελεύθερου προγράμματος CUFMS 4.

Με βάση τα παραπάνω η παρούσα διπλωματική εργασία διαρθρώνεται στα ακόλουθα κεφάλαια.

Το 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο αναφέρεται στα είδη μη συμβατικών λεπτότοιχων διατομών ψυχρής διαμόρφωσης που χρησιμοποιούνται στην πράξη για την κατασκευή βάσεων φωτοβολταϊκών συστημάτων και δίνει πληροφορίες για τον τρόπο υπολογισμού τους κατά τον σχεδιασμό. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της υποβοηθούμενης από πειράματα διαδικασίας υπολογισμού των αντοχών αυτών των διατομών όπως προδιαγράφεται από τον Ευρωκώδικα 3 (Design calculation assisted by testing).

Στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο διατυπώνεται η απαραίτητη θεωρία από την επιστήμη της γραμμικής ελαστικής ευστάθειας μεταλλικών δοκών και δίνονται οι αντίστοιχοι αναλυτικοί τύποι υπολογισμού της κρίσιμης καμπτικής ροπής. Εν συνεχεία, τα ακόλουθα 2 Κεφάλαια, επιχειρούν μια σύνοψη των αριθμητικών μεθόδων των Πεπερασμένων Λωρίδων και της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων που κρίνεται απαραίτητη για την αυτοτέλεια του κειμένου της εργασίας.

Τέλος, το 5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο σχετίζεται με την αριθμητική προσομοίωση των πειραμάτων των δοκών με τις μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές που εξετάστηκαν, την παραμετρική μελέτη της απόκρισης τους, την σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά καθώς και με την μελέτη που υλοποιήθηκε με στόχο την εύρεση της κρίσιμης καμπτικής ροπής τόσο με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων όσο και με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Λωρίδων.

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, τον κ. Κώστα Τζάρο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια αυτών των δύο χρόνων. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Ευριπίδη Μυστακίδη και Ολυμπία Παναγούλη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Κ. Μυστακίδη και τον κ. Μιχαηλίδη για την διάθεση των πειραματικών αποτελεσμάτων των δοκών που μελέτησα. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στην οικογένεια μου για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

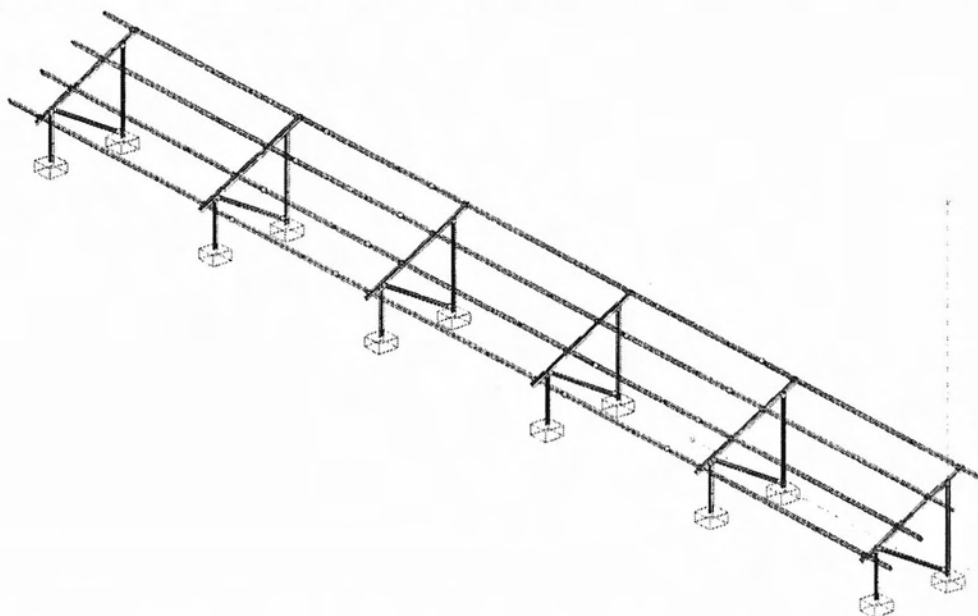
Βούλαρης Δημήτρης, Λάρισα Ιούλιος 2015

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup>

### **Βάσεις φωτοβολταϊκών συστημάτων από μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές ψυχρής διαμόρφωσης.**

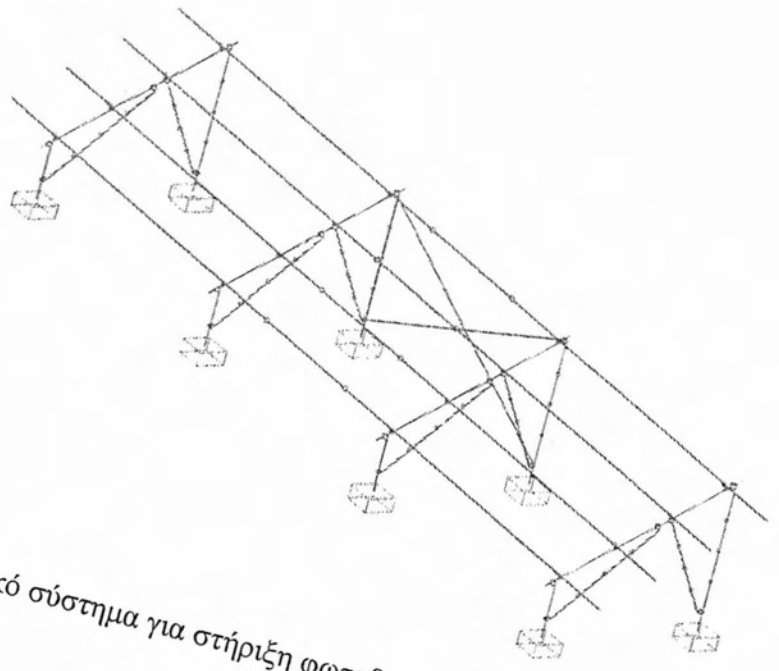
#### **1.1 Γενικά**

Τα φωτοβολταϊκά συστήματα είναι διατάξεις που χρησιμοποιούνται για να παράγουν ηλεκτρικό ρεύμα από την ηλιακή ακτινοβολία. Επιπλέον πρόκειται για μικρά και ευέλικτα συστήματα που έχουν μεγάλο εύρος εφαρμογής. Η στήριξη των φωτοβολταϊκών συστημάτων στο έδαφος ή σε δώματα και στέγες γίνεται με ειδικές βάσεις, τους ηλιοστάτες. Για τη κατασκευή των ηλιοστατών μπορούν να χρησιμοποιηθούν τυποποιημένες, συμβατικές διατομές. Ωστόσο, έχει αποδειχτεί ότι η χρήση των διατομών αυτών συνήθως καταλήγει σε οικονομικά ασύμφωρες λύσεις. Για το λόγο αυτό, οι κατασκευαστές συνήθως καταφεύγουν σε ειδικές διατομές, συνήθως από λεπτότοιχα χαλύβδινα στοιχεία ψυχρής διαμόρφωσης που εμφανίζουν ποικιλία σχημάτων (απλές ή σύνθετες, συγκολλητές ή κοχλιωτές, κλπ). Σε πολλές περιπτώσεις μάλιστα χρησιμοποιούνται ειδικοί χάλυβες που χαρακτηρίζονται από πολύ υψηλές τιμές της τάσης διαρροής. Στα Σχήματα 1.1 και 1.2 παρουσιάζονται συγκεκριμένες πλαισιακές διάταξεις ηλιοσταστών για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων επί του εδάφους ενώ τα Σχήματα 1.3,1.4 και 1.5 παρουσιάζουν διάφορες διατάξεις για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων σε στέγες και δώματα.

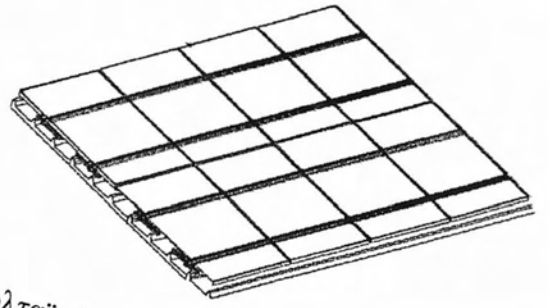
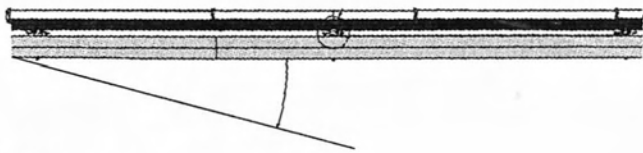


Σχήμα. 1.1 Τυπικό πλαισιακό σύστημα για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων επί εδάφους.

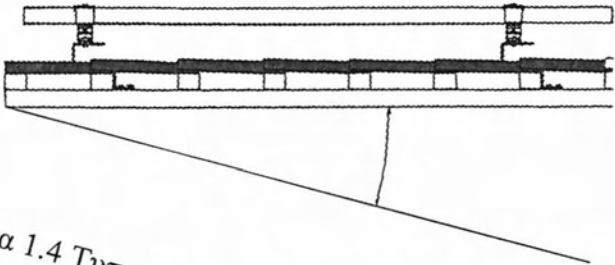




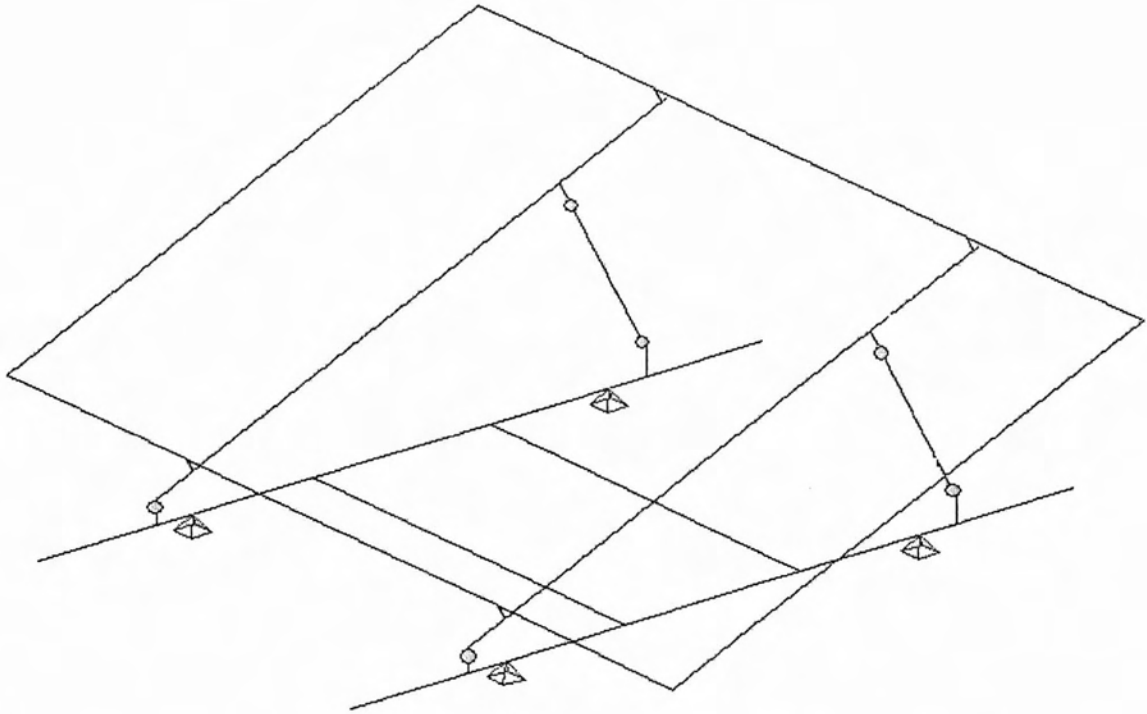
Σχήμα 1.2 Τυπικό πλαίσιακό σύστημα για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων επί εδάφους.



Σχήμα 1.3 Τυπικό μεταλλικό σύστημα για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων σε στέγη με πάνελ.

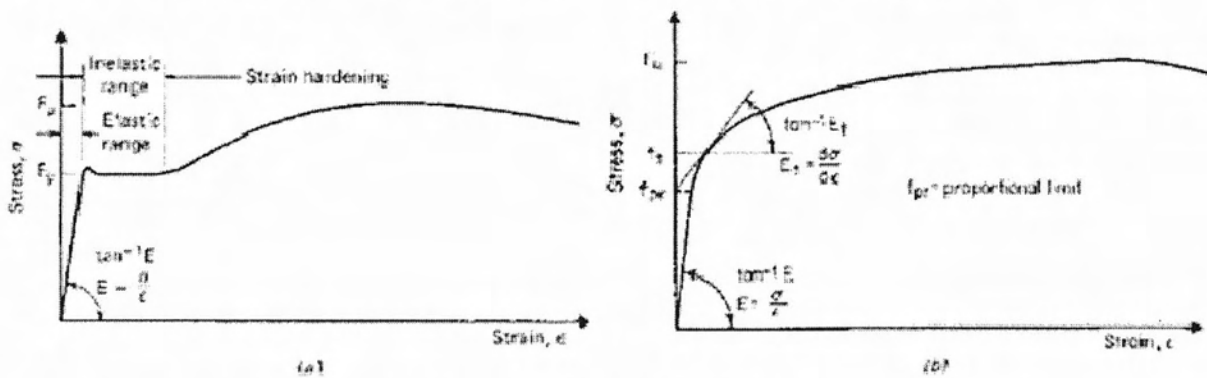


Σχήμα 1.4 Τυπικό μεταλλικό σύστημα για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων σε στέγη με κεραμίδια.



Σχήμα 1.5 Τυπικό μεταλλικό σύστημα για στήριξη φωτοβολταϊκών συστημάτων σε δώμα.

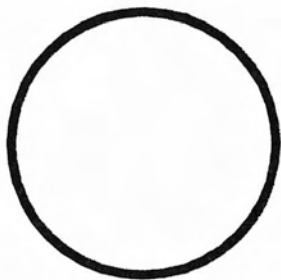
Οι διατομές των μελών των βάσεων των φωτοβολταϊκών στοιχείων μπορεί να είναι είτε συμβατικές λεπτότοιχες διατομές ψυχρής ή θερμής έλασης είτε μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές ψυχρής έλασης. Ανάλογα με το είδος της κατεργασίας διαφοροποιείται και το διάγραμμα τάσεων- ανηγμένων παραμορφώσεων ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) του χάλυβα. Στο σχήμα 1.6 εμφανίζονται οι δύο γενικοί τύποι διαγραμμάτων  $\sigma$ - $\epsilon$ , ένα τυπικό διάγραμμα  $\sigma$ - $\epsilon$  χάλυβα θερμής έλασης και ένα χάλυβα ψυχρής έλασης. Τα διαγράμματα διαφέρουν στον τρόπο διαρροής του χάλυβα, στο πρώτο παρατηρείται απότομη διαρροή (sharp yielding type) του χάλυβα ενώ στο δεύτερο παρουσιάζεται σταδιακή διαρροή (gradual yielding).



Σχήμα 1.6 Διαγράμματα  $\sigma$ - $\epsilon$  χάλυβα θερμής και ψυχρής έλασης.

Στο Σχήμα 1.7 που ακολουθεί παρουσιάζονται διάφορες διατομές που χρησιμοποιούνται ευρέως στην πράξη για την κατασκευή μελών φωτοβολταϊκών βάσεων.

Όσον αφορά το υλικό κατασκευής των φωτοβολταϊκών βάσεων, το βασικό υλικό είναι ο χάλυβας σε διάφορες εκδόσεις του (θερμογαλβανισμένος, προγαλβανισμένος, ανοξείδωτος κτλ). Οι συνήθεις ποιότητες χάλυβα που χρησιμοποιούνται είναι του τύπου S235 και S355 ενώ σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και μη συμβατικοί χάλυβες που χαρακτηρίζονται από την υψηλή τιμή στην αντοχή τους (τάση διαρροής  $f_y > 660$  Mpa).



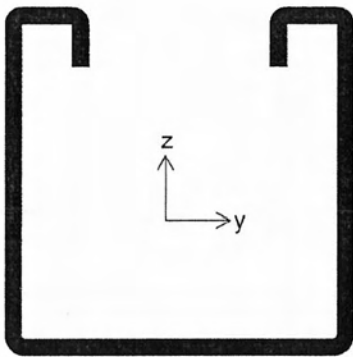
Κυκλική κοιλοδοκός



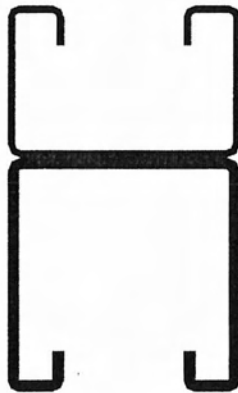
Ορθογωνική  
κοιλοδοκός



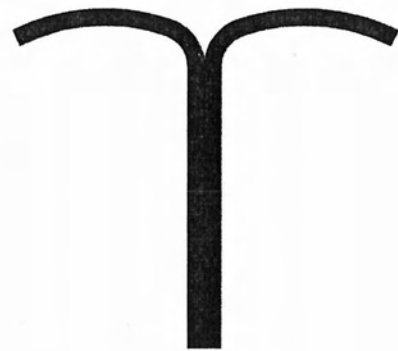
Διατομή τύπου U χωρίς  
ακραίες ενισχύσεις



Διατομή τύπου U με ακραίες  
ενισχύσεις



Σύνθετη συγκολλητή  
λεπτότοιχη διατομή  
ψυχρής έλασης διπλού  
U με ακραίες  
ενισχύσεις



Σύνθετη συγκολλητή  
λεπτότοιχη διατομή  
ψυχρής έλασης διπλού J



### Σύνθετη συγκολλητή διατομή ψυχρής έλασης

- Άνω τμήμα: Διατομή τύπου U με ακραίες ενισχύσεις.
- Κάτω τμήμα: Ορθογωνική κοιλοδοκός.

Σχήμα 1.7 Διατομές μελών φωτοβολταϊκών βάσεων.

### **1.2 Στατικός σχεδιασμός βάσεων φωτοβολταϊκών συστημάτων –Κανονισμοί-Φορτίσεις-Έλεγχοι αντοχής.**

Ο στατικός σχεδιασμός των βάσεων φωτοβολταϊκών συστημάτων απαιτεί την εύρεση της εντατικής και παραμορφωσιακής κατάστασης του στατικού συστήματος με στόχο την ασφαλή ανάληψη και μεταφορά των επιβαλλόμενων εξωτερικών φορτίων. Ο στατικός σχεδιασμός διεξάγεται με βάση τα κείμενα των Ευρωκωδίκων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.8.

1.	Eurocode1-Part 1.3	Actions in structures-Part 1-3 General actions- Snow loads	EN 1991-1-3:2004
2.	Eurocode1-Part 1.3	Greek National Annex to ELOT EN 1991-1-3:2004 Eurocode 1 - Actions on structures - Part 1-3: General actions - Snow loads	ΣΕΠΕΛΟΤ 1491-1-3:2009
3.	Eurocode1-Part 1.4	Actions in structures-Part 1-4 General actions- Wind Actions	EN 1991-1-4:2005
4.	Eurocode1-Part 1.4	Greek National Annex to ELOT EN 1991-1-4 Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions	ΣΕΠΕΛΟΤ 1491-1-4:2009
5.	Eurocode3-Part 1.3	Design of steel structures - Part 1-3: General rules - Supplementary rules for cold-formed members and sheeting	EN 1993-1-3: 2006
6.	Eurocode3-Part 1.8	Design of steel structures - Part 1-8 : Design of joints	EN 1993-1-8: 2005

Σχήμα. 1.8 Κανονισμοί που χρησιμοποιούνται για τον στατικό σχεδιασμό των ηλιοστατών.

Οι συνήθεις φορτίσεις που ασκούνται στις βάσεις των φωτοβολταϊκών συστημάτων είναι:

- Ίδιον βάρος φερόντων μεταλλικών στοιχείων.
- Ίδιο βάρος φωτοβολταϊκών συστημάτων.
- Ανεμοπίεση (πίεση και υποπίεση).
- Φορτίο χιονιού.
- Σεισμική δράση.

Συνήθως δεν λαμβάνονται υπόψη θερμοκρασιακά φορτία διότι η σύνδεση των μελών γίνεται έτσι ούτως ώστε οι θερμοκρασιακές μεταβολές να εκτονώνονται.

Με βάση τις παραπάνω φορτίσεις, τα μέλη των φωτοβολταϊκών βάσεων καταπονούνται κυρίως σε κάμψη, τέμνουσα και αξονική δύναμη. Συνεπώς, οι διατομές θα πρέπει να επαρκούν έναντι των παραπάνω εντατικών μεγεθών. Οι απαιτούμενοι έλεγχοι επάρκειας των διατομών διεξάγονται με βάση τον Ευρωκώδικα 3 για τις συνήθεις διατομές ενώ με το μέρος 1.3 του αντίστοιχου ευρωκώδικα για τις διατομές ψυχρής έλασης.

Πέρα όμως των ελέγχων επάρκειας των διατομών, ο σχεδιασμός περιλαμβάνει και έλεγχοι έναντι φαινομένων αστάθειας (τοπικών και καθολικών). Συγκεκριμένα, για κάθε μέλος θα πρέπει να διεξαχθούν έλεγχοι έναντι καμπτικού, στρεπτικού και στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Στους ελέγχους αυτούς θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η πιθανή εμφάνιση φαινομένων τοπικού λυγισμού διαμέσου της χρήσης ενεργών διατομών. Σημειώνεται ότι, μέλη από κλειστές διατομές (πχ. κοίλες ορθογωνικές ή κυκλικές διατομές) έχουν μεγάλη στρεπτική δυσκαμψία και δύναται να αστοχήσουν μόνο από καμπτικό λυγισμό, ως εκ τούτου δεν απαιτούνται έλεγχοι έναντι στρεπτικού ή στρεπτοκαμπτικού λυγισμού. Αντιθέτως, για όλες τις ανοικτές διατομές που καταπονούνται σε κάμψη ή/ και θλίψη απαιτείται έλεγχος έναντι στρεπτικών μορφών αστάθειας.

### **1.3 Διαδικασία σχεδιασμού υποβοηθούμενη από πειράματα-Αριθμητική προσομοίωση και βέλτιστος οικονομικός σχεδιασμός.**

Είναι γνωστό ότι πολλές από τις διατάξεις του μέρους 1.3 του ευρωκώδικα 3 που αφορά τις λεπτότοιχες διατομές ψυχρής διαμόρφωσης είναι συντηρητικές. Για τον λόγο αυτό, και προκειμένου να βρεθούν οικονομικά συμφέρουσες λύσεις για βιομηχανικές κατασκευές πολλαπλής εφαρμογής, προτείνεται η ενεργοποίηση της υποβοηθούμενης από πειράματα

διαδικασίας σχεδιασμού. Η διαδικασία αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι μπορεί επίσης να καλύψει κανονιστικά και περιπτώσεις που δεν εμπίπτουν στις συμβατικές διατάξεις σχεδιασμού, όπως ειδικά σχήματα διατομών ή χάλυβες πολύ υψηλής αντοχής που παρουσιάζουν μειωμένη πλαστιμότητα. (η μειωμένη πλαστιμότητα οφείλεται στην ειδική επεξεργασία που έχουν υποστεί οι χάλυβες αυτοί προκειμένου να αποκτήσουν την αυξημένη τάση διαρροής που αποβαίνει όμως σε βάρος της διαθέσιμης πλαστιμότητας, με αποτέλεσμα να εμφανίζουν σχετικά ψαθυρή συμπεριφορά).

Η διαδικασία σχεδιασμού που βασίζεται στη διεξαγωγή πειραμάτων αφορά στην εύρεση της αντοχής σχεδιασμού των δομικών μελών ώστε στη συνέχεια να μπορούν να εφαρμοστούν όλοι οι έλεγχοι επάρκειας των μελών. Είναι φανερό πως η εκμετάλλευση της πειραματικής διαδικασίας μπορεί να οδηγήσει στον βέλτιστο σχεδιασμό των βάσεων των φωτοβολταϊκών συστημάτων, αφού δίνει τη δυνατότητα της πιο ακριβούς εκτίμησης της αντοχής των χαλύβδινων μελών και συνεπώς στην πιο ορθή εκμετάλλευση τους. Επιπρόσθετα, παρέχεται η δυνατότητα εφαρμογής των διατάξεων του Ευρωκώδικα 3 στην περίπτωση που χρησιμοποιείται μη-συμβατικός χάλυβας. Παράλληλα, είναι σύνηθες στην κατασκευή των ηλιοστατών, εκτός από τις συμβατικές διατομές να χρησιμοποιούνται και μη-συμβατικές σύνθετες διατομές (Εικ. 6) που η αντοχή τους είναι δύσκολο ή αδύνατο να υπολογισθεί βάσει των συμβατικών διατάξεων του κανονισμού. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο σχεδιασμός θα πρέπει υποχρεωτικά να στηρίζεται σε πειραματικά αποτελέσματα.

Στο παράρτημα Α του Μέρους 1.3 του Ευρωκώδικα 3 δίνονται οδηγίες σχετικά με τις πειραματικές διαδικασίες καθώς και για τον υπολογισμό των αντοχών σχεδιασμού των δομικών μελών χρησιμοποιώντας πειραματικά αποτελέσματα.

Όπως ορίζεται στο παράρτημα αυτό, ο προσδιορισμός ενός συγκεκριμένου μεγέθους αντοχής  $R_d$ , απαιτεί την διενέργεια τουλάχιστον 4 δοκιμών ώστε να προσδιοριστούν οι τιμές αντοχής  $R_{obs,i}$  ( $i=1,\dots,4$ ). Ο τύπος των δοκιμών που πρέπει να εκτελεστούν εξαρτάται από το ζητούμενο μέγεθος αντοχής (κάμψη, διάτμηση, αντοχή σε εφελκυσμό ή θλίψη κλπ). Οδηγίες για τον τρόπο εκτέλεσης των δοκιμών αυτών δίνονται στο παράρτημα. Οι τουλάχιστον 4 αυτές μετρηθείσες πειραματικές τιμές μεγεθών αντοχής  $R_{obs,i}$  πρέπει να προσαρμοσθούν κατάλληλα ώστε να ληφθούν υπόψη οι διαφορές μεταξύ πραγματικής και ονομαστικής τάσης διαρροής καθώς και οι διαφορές που προκύπτουν από τη διαφοροποίηση του πραγματικού πάχους του υλικού του πειράματος σε σχέση με το ονομαστικό. Αυτό γίνεται μέσω ενός συντελεστή αντοχής  $\mu_R$  μέσω της σχέσης:

$$R_{adj,i} = \frac{R_{obs,i}}{\mu_R} \quad (1)$$

όπου  $R_{adj,i}$  η προσαρμοσμένη πειραματική τιμή μεγέθους αντοχής. Ο προσαρμοστικός συντελεστής  $\mu_R$  δίνεται από την παρακάτω σχέση που λαμβάνει υπόψη την πραγματική και την ονομαστική τάση διαρροής ( $f_{yb,obs}$  και  $f_{yb}$  αντίστοιχα), καθώς και το πραγματικό και το ονομαστικό πάχος ( $t_{obs,cor}$  και  $t_{cor}$  αντίστοιχα):

$$\mu_R = \left( \frac{f_{yb,obs}}{f_{yb}} \right)^\alpha \left( \frac{t_{obs,cor}}{t_{cor}} \right)^\beta \quad (2)$$

Στην παραπάνω σχέση και σύμφωνα με την παράγραφο A.6.2 του παραρτήματος Α του μέρους 1.3 του Ευρωκώδικα 3, χρησιμοποιούνται τα παρακάτω:

- Ο εκθέτης  $\alpha$  είναι μηδενικός ( $\alpha = 0$ ) εάν  $f_{yb,obs} \leq f_{yb}$  και ίσος με την μονάδα ( $\alpha = 1$ ) εάν  $f_{yb,obs} > f_{yb}$ .
- Ο εκθέτης  $\beta$  είναι ίσος με την μονάδα ( $\beta = 1$ ) εάν  $t_{obs,cor} \leq t_{cor}$ . Στην περίπτωση όπου  $t_{obs,cor} > t_{cor}$  χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα:

$$\text{Εάν } b_p / t \leq (b_p / t)_{lim} \quad \rightarrow \beta = 1$$

$$\text{Εάν } b_p / t > 1.5(b_p / t)_{lim} \quad \rightarrow \beta = 2$$

Εάν  $(b_p / t)_{lim} \leq b_p / t < 1.5(b_p / t)_{lim}$  τότε ο εκθέτης  $\beta$  προσδιορίζεται μέσω γραμμικής παρεμβολής.

Στις ανωτέρω σχέσεις είναι :

$$(b_p / t)_{lim} = 0.64 \sqrt{\frac{Ek_\sigma}{f_{yb}}} \sqrt{\frac{f_{yb} / \gamma_{M1}}{\sigma_{com,Ed}}} \cong 19.1\varepsilon \sqrt{k_\sigma} \sqrt{\frac{f_{yb} / \gamma_{M1}}{\sigma_{com,Ed}}}$$

όπου  $b_p$  το πλάτος ενός επίπεδου πλακιδίου,  $k_\sigma$  ο σχετικός συντελεστής λυγισμού,  $\sigma_{com,Ed}$  η μέγιστη θλιπτική τάση στο στοιχείο που μελετάται την στιγμή της οριακής του αντοχής και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας.

Οι προσαρμοσμένες τιμές των μεγεθών αντοχής επεξεργάζονται στη συνέχεια στατιστικά με σκοπό τον προσδιορισμό της χαρακτηριστικής αντοχής σχεδιασμού  $R_k$ . Ειδικότερα χρησιμοποιείται η σχέση:

$$R_k = R_m - k \times s \quad (3)$$

όπου,  $R_m$  η μέση τιμή των προσαρμοσμένων πειραματικών τιμών αντοχής,  $k$  συντελεστής που σχετίζεται με τον αριθμό των πειραμάτων και  $s$  η τυπική απόκλιση.

Η τυπική απόκλιση σύμφωνα με το παράρτημα Α του Ευρωκώδικα 3 Μέρος 1.3 δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$s = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (R_{adj,i} - R_m)^2}{n-1} \right]^{0.5} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (R_{adj,i})^2 - (1/n)(\sum_{i=1}^n R_{adj,i})^2}{n-1} \right]^{0.5} \quad (4)$$

όπου  $n$  ο αριθμός των πειραματικών δοκιμών.

Τέλος, η τιμή σχεδιασμού του μεγέθους αντοχής που ενδιαφέρει, υπολογίζεται από την σχέση:

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_M \gamma_{sys}} \quad (5)$$

Οι συντελεστές ασφαλείας που αφορούν το υλικό ( $\gamma_M$ ) και τις διαφορετικές συνθήκες που δύναται να εμφανιστούν μεταξύ πειραμάτων και πραγματικής λειτουργίας στην διάρκεια ζωής του έργου ( $\gamma_{sys}$ ), λαμβάνονται συνήθως ίσοι με την μονάδα.

Αφού προσδιοριστούν οι αντοχές των δομικών στοιχείων (αντοχή σε κάμψη, διάτμηση, αξονική κλπ), διεξάγονται στη συνέχεια οι συνήθεις έλεγχοι αντοχής για κάθε φέρον μέλος του στατικού συστήματος για όλους τους κρίσιμους συνδυασμούς εντατικών μεγεθών. Οι έλεγχοι αυτοί είναι ο κλασικός έλεγχος επάρκειας διατομής μέσω της σχέσεως αλληλεπίδρασης του Ευρωκώδικα 3, οι έλεγχοι διάτμησης, οι έλεγχοι ευστάθειας (κλασικός λυγισμός, στρεπτοκαμπτικός λυγισμός) κλπ.

Η πειραματική διαδικασία που ακολουθείται για τον προσδιορισμό της αντοχής σχεδιασμού μπορεί να υποστηριχθεί και από τη χρήση προχωρημένης αριθμητικής προσομοίωσης. Πιο συγκεκριμένα, τα πειράματα μπορούν να προσομοιωθούν μέσω μη-γραμμικής ανάλυσης στα πλαίσια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να προσομοιωθεί με ακρίβεια η συμπεριφορά των δοκιμίων που εξετάστηκαν πειραματικά. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων παρέχουν πληροφορίες σε σχέση με το εντατικό και παραμορφωσιακό πεδίο των δοκιμίων καθώς επίσης και με τη τελική μορφή αστοχίας. Επιπλέον η αριθμητική ανάλυση βοηθά και στην παρατήρηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά τη διάρκεια του πειράματος και στην αποτίμηση της συνολικής απόκρισης. Η αξιοπιστία των αριθμητικών προσομοιωμάτων βασίζεται στην



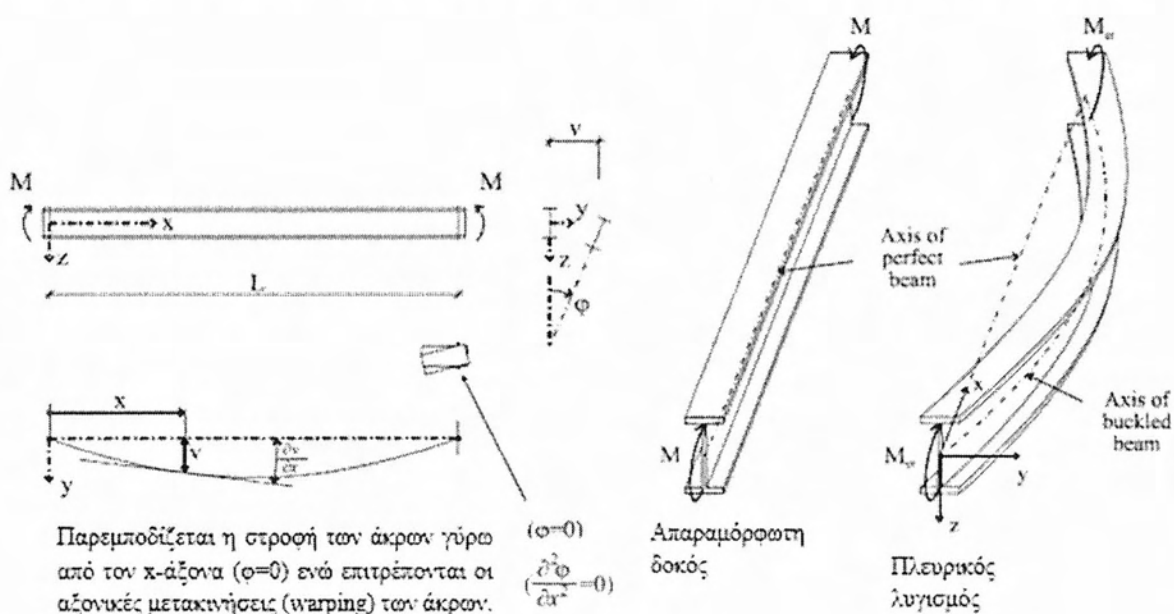
σύγκριση των εξαγόμενων αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα πειραματικά. Η ικανοποιητική σύγκλιση των αποτελεσμάτων παρέχει τη δυνατότητα της χρήσης των αριθμητικών προσομοιώσεων για παραμετρικές αναλύσεις. Ειδικότερα μπορεί να εκτιμηθεί η αντοχή μεταβάλλοντας παραμέτρους όπως το πάχος των επιμέρους τμημάτων της διατομής, την ποιότητα του υλικού κ.τ.λ. Η διαδικασία αριθμητικής μελέτης που περιγράφηκε ανωτέρω πραγματεύεται από μεγάλο μέρος της παρούσας διπλωματικής.

## Κεφάλαιο 2°

### Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός δοκών διπλής συμμετρίας – Αναλυτικοί τύποι υπολογισμού

Οι αναλυτικές μέθοδοι είναι πάντα σημαντικές και χρήσιμες (αν και συνήθως περιορίζονται στις απλούστερες περιπτώσεις) καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένα μέτρο σύγκρισης των αριθμητικών μεθόδων. Για τις ιδιομορφικές αναλύσεις πλευρικού λυγισμού με Πεπερασμένα Στοιχεία στο κεφάλαιο 5 χρησιμοποιήθηκαν ως μέτρο σύγκρισης οι κλειστές λύσεις των (Timoshenko and Gere, 1961) για πλευρικό λυγισμό αμφιέριστης δοκού με διατομή διπλής συμμετρίας. Στη συνέχεια ακολουθεί μια απόδειξη των τύπων πλευρικού λυγισμού για αμφιέριστες διατομές  $I$  που φορτίζονται στα άκρα τους με ίσες ροπές (Καλα, 2013).

Οι δοκοί που υπόκεινται σε κάμψη έχουν την μέγιστη καμπτική αντίσταση και δυσκαμψία στο επίπεδο που σχετίζεται με την κάμψη περί τον ισχυρό άξονα (στο επίπεδο που ασκούνται τα φορτία), πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με το επίπεδο που σχετίζεται με την κάμψη περί τον ασθενή άξονα τους. Επομένως, είναι δυνατόν να αστοχήσουν λόγω αστάθειας του θλιβόμενου πέλματος για φόρτιση μικρότερη εκείνης που αντιστοιχεί στη μέγιστη ελαστική καμπτική αντίσταση της δοκού, εκτός αν παρεμποδισθεί η εγκάρσια μετακίνηση και στροφή αυτών των μελών. Το πρόβλημα το πλευρικού λυγισμού παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Πλευρικός λυγισμός αμφιέριστης δοκού για ομοιόμορφη κάμψη που προκαλείται από ίσες ροπές  $M_y$  στα δύο άκρα. (Καλα, 2013)

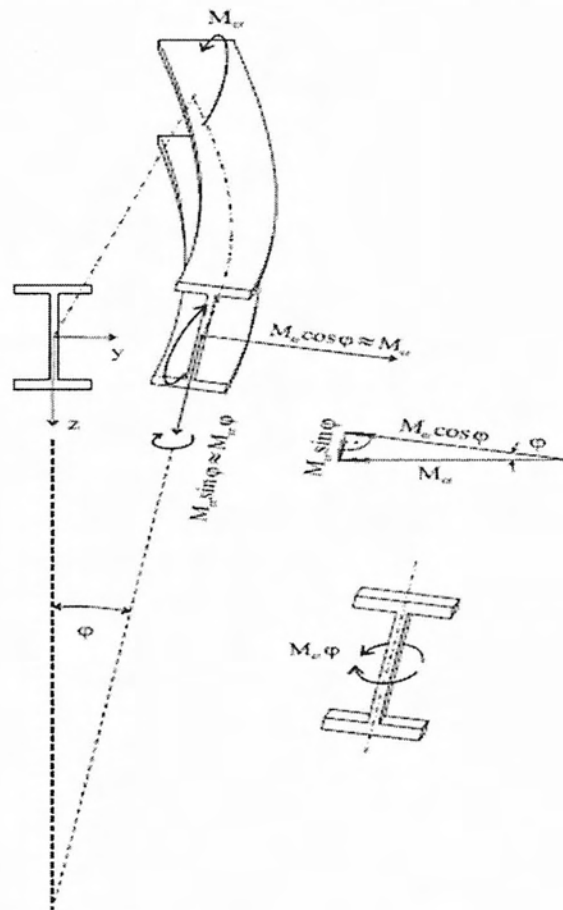
Τα άκρα της δοκού παρεμποδίζονται από εγκάρσια εκτροπή και στροφή, αλλά είναι ελεύθερα να στραφούν πλευρικά:

$$(v)_0 = (v)_L = 0, (\varphi)_0 = (\varphi)_L = 0, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_L = 0, \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_L = 0. \quad (2)$$

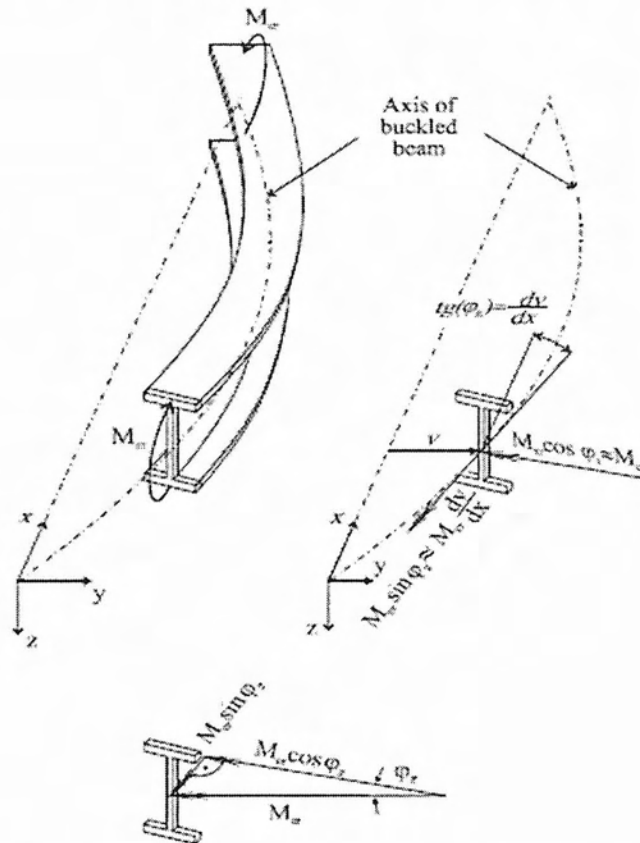
Η ελαστική κρίσιμη ροπή  $M_{cr}$  του Σχήμα 2.1 μπορεί να υπολογιστεί από την ισορροπία του μέλους στην παραμορφωμένη κατάσταση του πλευρικού λυγισμού.

Η εσωτερική ροπή κάμψης περί τον ασθενή  $M_{cr}$  φ προκαλείται από την ροπή κάμψης  $M_{cr}$  λόγω της στροφής της διατομής κατά φ (Σχήμα 2.2). Η τιμή της εσωτερικής ροπής  $M_{cr}$  φ υπολογίζεται από την ισορροπία της δοκού στην παραμορφωμένη θέση του Σχήμα 2.2. Η ροπή  $M_{cr}$  σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος της παραμορφωμένης δοκού προκύπτει ως το άθροισμα των διανυσμάτων των ροπών  $M_{cr} \sin(\varphi)$  και  $M_{cr} \cos(\varphi)$ . Επειδή η τιμή του φ είναι πολύ μικρή, οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να γραφούν προσεγγιστικά  $M_{cr} \varphi$  και  $M_{cr}$ .



Σχήμα 2.2 Η καμπτική ισορροπία της δοκού λόγω στροφής. (Kala, 2013)

Η στρεπτική ροπή  $M_{cr} dv/dx$  προκαλείται λόγω της καμπτικής ροπής  $M_{cr}$  και της εκτροπής  $v$  της δοκού. Η τιμή της εσωτερικής στρεπτικής ροπής  $M_{cr} dv/dx$  από την ισορροπία ροπών της παραμορφωμένης δοκού του Σχήμα 2.3. Η ροπή  $M_{cr}$  σε οποιοδήποτε σημείο κατά μήκος της παραμορφωμένης δοκού προκύπτει ως το άθροισμα των διανυσμάτων των ροπών  $M_{cr} \sin(\varphi_z)$  και  $M_{cr} \cos(\varphi_z)$  όπου  $\tan(\varphi_z) = dv/dx$ . Επειδή η τιμή του  $\varphi_z$  είναι πολύ μικρή οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να γραφούν ως  $M_{cr} \sin(\varphi_z) \approx M_{cr} dv/dx$  και  $M_{cr} \cos(\varphi_z) \approx M_{cr}$ .



Σχήμα 2.3 Η καμπτική ισορροπία της δοκού λόγω της εκτροπής της δοκού. (Καλα, 2013)

Η διαφορική εξίσωση ισορροπίας για κάμψη της δοκού είναι:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -M_{cr} \varphi, \quad (3)$$

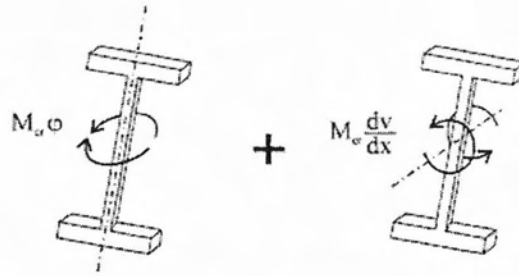
όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $I_z$  ροπή αδράνειας περί τον  $z$  άξονα.

Η διαφορική εξίσωση ισορροπίας για στρέψη της δοκού είναι:

$$EI_\omega \frac{d^3 \varphi}{dx^3} - GI_t \frac{d\varphi}{dx} = -M_{cr} \frac{dv}{dx}, \quad (4)$$

όπου  $G$  μέτρο διάτμησης,  $I_\omega$  σταθερά στρεβλώσεως,  $I_t$  στρεπτική σταθερά. Προσεγγιστικά (για μεγάλη στρέψη) οι συναρτήσεις  $\cos(\varphi)$ ,  $\sin(\varphi)$  μπορούν να δοθούν από τις σχέσεις  $\cos(\varphi) \approx 1 -$

$\varphi^2/2$  και  $\sin(\varphi) \approx \varphi - \varphi^3/6$ . Στο Σχήμα 2.4 εμφανίζονται η ροπή κάμψης και η ροπή στρέψης που αναπτύσσονται όταν η δοκός λυγίσει πλευρικά λόγω της ασκούμενης  $M_{cr}$ .



Σχήμα 2.4 Παρουσίαση των δύο συνιστωσών της ασκούμενης καμπτικής ροπής  $M_{cr}$ . (Kala, 2013)

Όταν και η (3) και η (4) ικανοποιούνται για όλα τα σημεία της δοκού, η εκτροπή  $v$  και η στροφή  $\varphi$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$v = a_{vc} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

$$\varphi = a_{\varphi c} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

Όπου το εύρος  $a_{vc}$  είναι συνάρτηση του  $a_{\varphi c}$ :

$$a_{vc} = a_{\varphi c} \frac{M_{cr} L^2}{\pi^2 E I_z} \quad (7)$$

Με αντικατάσταση των (5) και (6) στη σχέση (4), προκύπτει:

$$\begin{aligned} -E I_{\omega} a_{vc} \frac{\pi^5 E I_z}{M_{cr} L^5} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - G I_t a_{vc} \frac{\pi^3 E I_z}{M_{cr} L^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \\ -M_{cr} a_{vc} \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Η κρίσιμη ροπή  $M_{cr}$  για πλευρικό λυγισμό που προκύπτει από τη σχέση (8) είναι:

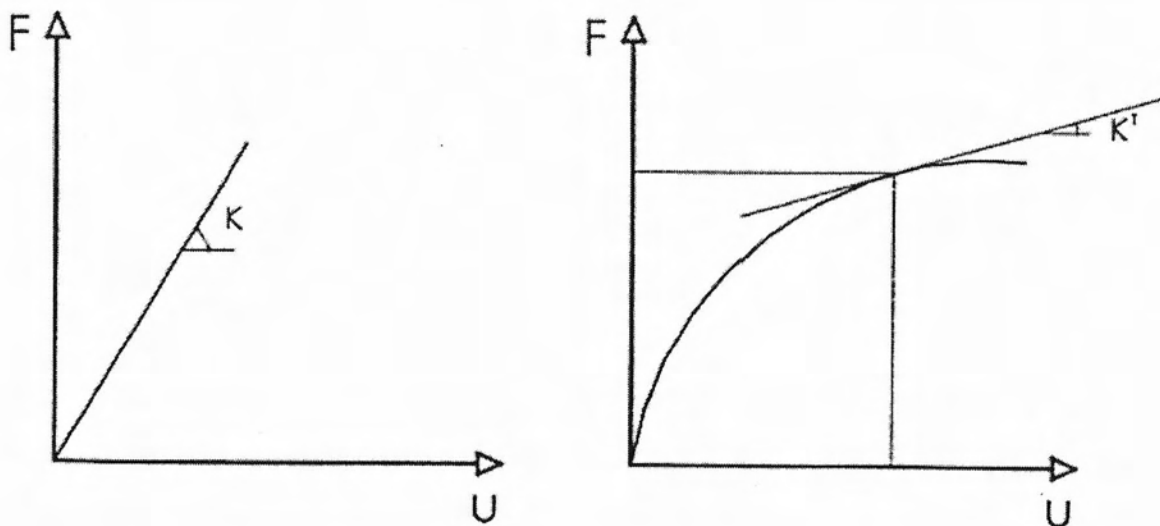
$$M_{cr} = \pi \frac{\sqrt{E I_z G I_t}}{L} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E I_{\omega}}{L^2 G I_t}} \quad (9)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup>

### Βασικά Στοιχεία Μη Γραμμικής Ανάλυσης Μεταλλικών Κατασκευών με την Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων

#### 3.1 Μη γραμμικότητα στην συμπεριφορά των κατασκευών

Η αστοχία των μεταλλικών κατασκευών μπορεί να είναι είτε καθολικού τύπου (συνολική σε επίπεδο φορέα) είτε τοπικού τύπου (μέσω αστοχίας καθορισμένου αριθμού δομικών μελών). Και στις δύο αυτές περιπτώσεις η αστοχία επέρχεται είτε ως αποτέλεσμα φαινομένων αστάθειας (instability failure), είτε ως συνέπεια υπερκερασμού της επάρκειας των μηχανικών αντοχών των διατομών και των συνδέσεων (material failure), είτε ως συνδυασμό των δύο προηγούμενων τύπων αστοχιών. Αυτού του τύπου οι αστοχίες είναι απόρροια μη γραμμικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά την παραμόρφωση του φορέα και καθορίζουν την συνολική του απόκριση. Οι μη γραμμικότητες που δύναται να αναπτυχθούν στις μεταλλικές κατασκευές υποδηλώνουν μεταβολή της δυσκαμψίας των φορέων οδηγώντας σε δρόμους ισορροπίας παρόμοιους με του Σχήματος 3.1.

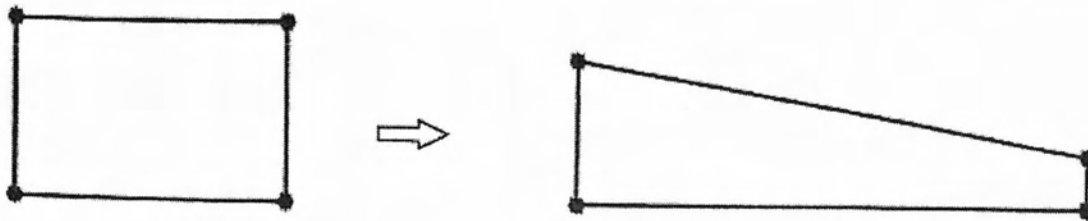


Σχήμα 3.1 Γραμμικός και μη γραμμικός δρόμος ισορροπίας φορέα.

Επιπλέον δύναται να ταξινομηθούν στις παρακάτω κατηγορίες:

- Γεωμετρική μη γραμμικότητα

Είναι η περίπτωση στην οποία μια κατάσκευή εμφανίζει μεγάλες μετακινήσεις για δυσανάλογη αύξηση των φορτίων που τις προκαλούν, οδηγώντας σε απότομη μεταβολή την γεωμετρία του φορέα και κατά συνέπεια της δυσκαμψίας του (Σχήμα 3.2). Έγκειται κυρίως στην μη γραμμικότητα των κινηματικών σχέσεων που συνδέουν τις αναπτυσσόμενες μετακινήσεις με τις εργικά αντίστοιχες παραμορφώσεις του φορέα. Επιπλέον, η ανάδειξη φαινομένων που λαμβάνουν χώρα στην φύση (φαινόμενα αστάθειας-καμπτικός λυγισμός, πλευρικός λυγισμός, γενική αστάθεια φορέα κτλ.) δεν είναι δυνατή χωρίς την μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη θέση του φορέα.



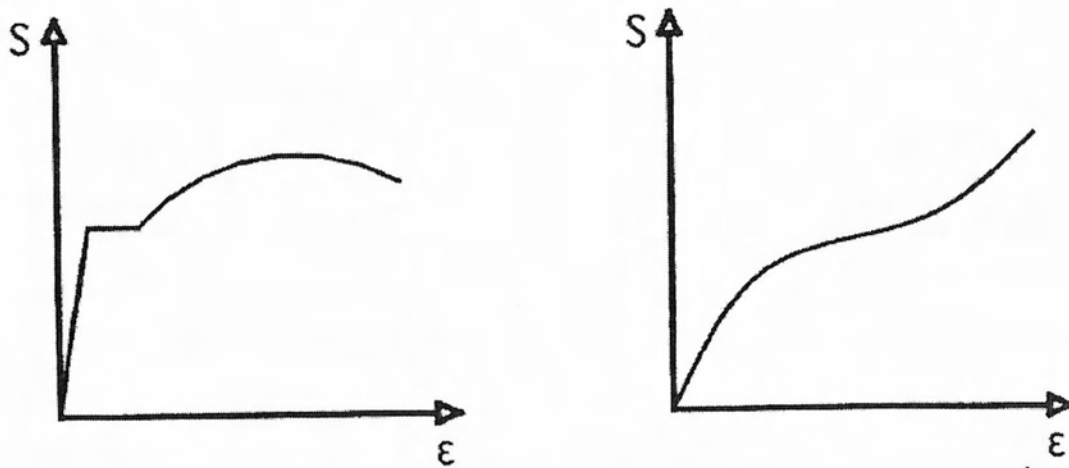
Σχήμα 3.2 Μεγάλες παραμορφώσεις σε πεπερασμένο στοιχείο αριθμητικού προσομοιώματος με γεωμετρική μη γραμμικότητα.

Διακρίνονται οι παρακάτω κατηγορίες γεωμετρικής μη γραμμικότητας:

- I. Θεώρηση μεγάλων μετακινήσεων ως αποτέλεσμα σύνθεσης μικρών παραμορφώσεων (large displacements/small strains). Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη θέση του φορέα θεωρώντας παράλληλα τις κλασσικές γραμμικές κινηματικές σχέσεις.
- II. Θεώρηση μεγάλων μετακινήσεων και μεγάλων παραμορφώσεων (large displacements/large strains). Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας στην παραμορφωμένη θέση του φορέα θεωρώντας παράλληλα μη γραμμικές κινηματικές σχέσεις.

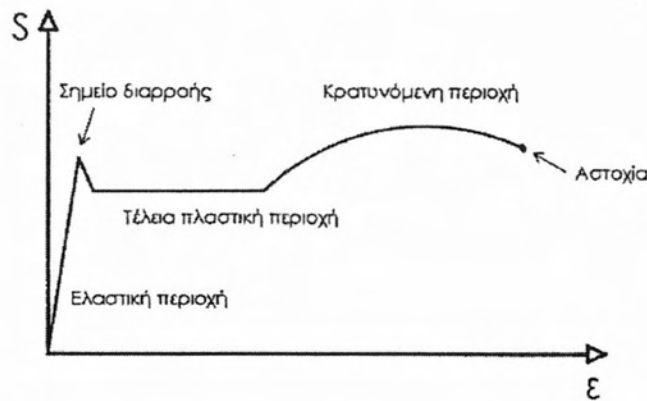
- Μη γραμμικός καταστατικός νόμος του υλικού της κατασκευής

Η μη γραμμική σχέση του καταστατικού νόμου τάσεων-παραμορφώσεων ενός υλικού αποτελεί αιτία μη γραμμικής συμπεριφοράς των δομικών μελών ενός φορέα. Παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την καταστατική συμπεριφορά ενός υλικού είναι το ιστορικό φόρτισης (πχ. ελαστοπλαστική απόκριση), οι συνθήκες περιβάλλοντος (πχ. θερμοκρασία) καθώς και η χρονικής διάρκειας και ο τρόπος επιβολής του φορτίου (ερπυσμός, κόπωση κτλ.). Η μη γραμμικότητα στον καταστατικό νόμο συμπεριφοράς του υλικού εκφράζεται μέσω του διαγράμματος τάσεων – παραμορφώσεων και αναδεικνύεται από τις μόνιμες (μη αναστρέψιμες) παραμορφώσεις του φορέα (Σχήμα 3.3). Για ελαστοπλαστικά υλικά (όπως ο χάλυβας) η σχέση μεταξύ τάσεων – παραμορφώσεων καθορίζεται ουσιαστικά από τρία στοιχεία, το αναλογικό όριο/proportional limit, το όριο διαρροής/yield stress, και την κράτυνση/ strain hardening (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.3 Τυπικοί μη γραμμικοί καταστατικοί νόμοι υλικών





Σχήμα 3.4 Καταστατικός νόμος τάσεων-παραμορφώσεων χάλυβα.

- Μη γραμμικότητα λόγω αλλαγής συνοριακών συνθηκών

Η μη γραμμικότητα οφειλόμενη σε συνοριακές συνθήκες προκαλείται κυρίως από τις εσωτερικές ή/ και εξωτερικές συνθήκες επαφής του φορέα. Η μονόπλευρη ή αμφίπλευρη επαφή μερών του φορέα μεταβάλλει σημαντικά την δυσκαμψία του επηρεάζοντας την συνολική απόκριση. Η αλλαγή των συνοριακών συνθηκών κατά την παραμόρφωση ενός φορέα καταστεί αδύνατη την αναλυτική επίλυση ενώ δημιουργούνται σημαντικά προβλήματα και στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, γιατί αρχικά η επιφάνεια επαφής θεωρείται άγνωστη και επιπρόσθετα τα περισσότερα προβλήματα επαφής εμπεριέχουν το φαινόμενο της τριβής που αποτελεί από την φύση του ένα μη γραμμικό φαινόμενο.

### **3.2 Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για την μην γραμμική ανάλυση των κατασκευών**

Η αναλυτική επίλυση προβλημάτων των κατασκευών στις οποίες αναπτύσσονται μη γραμμικά φαινόμενα είναι συνήθως δυσχερής έως αδύνατη τόσο λόγω της φύσης των φαινομένων που δύναται να εμφανιστούν όσο και λόγω των πολύπλοκων γεωμετριών. Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι μια αριθμητική προσεγγιστική μέθοδος επίλυσης προβλημάτων συνοριακών ή αρχικών τιμών. Τέτοια είναι τα προβλήματα στατικής ή δυναμικής ανάλυσης των κατασκευών των οποίων η μάρφωση αποτελείται από ένα σύστημα γραμμικών ή μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας (στις οποίες είναι πρακτικά ενσωματωμένες οι καταστατικές και κινηματικές σχέσεις που διέπουν το εκάστοτε πρόβλημα) που πρέπει να ικανοποιείται συγχρόνως με τις συνοριακές συνθήκες. Η εφαρμογή

της μεθόδου απαιτεί υποχρεωτικά την χρήση H/Y. Παρακάτω αναφέρονται συνοπτικά τα βασικά βήματα της μέθόδου:

- I. Διακριτοποίηση του φορέα σε Πεπερασμένα Στοιχεία που ενώνονται μεταξύ τους στους κόμβους.
- II. Επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων σχήματος (βασική παραδοχή της μεθόδου) που συνδέουν την διακριτή λύση (στους κόμβους) με την λύση στο εσωτερικό του στοιχείου.
- III. Μόρφωση των μητρώων δυσκαμψίας των στοιχείων.
- IV. Μόρφωση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας του φορέα.
- V. Μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας του φορέα.
- VI. Επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων ισορροπίας μέσω ενός επαυξητικού (Incremental Procedure) και επαναληπτικού σχήματος (πχ Newton Raphson).

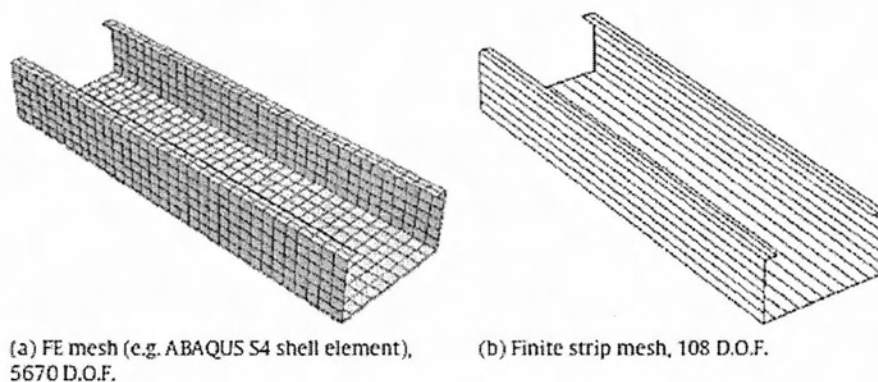
Στην παρούσα διπλωματική εφαρμόζεται η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων για την εύρεση της απόκρισης μελών από μη συμβατικές λεπτότοιχες διατομές ψυχρής διαμόρφωσης μέσω του προχωρημένου προγράμματος μη γραμμικής ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων Marc MSC.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4<sup>ο</sup>

### Ανάλυση λυγισμού χαλύβδινων μελών με το πρόγραμμα CUFSM

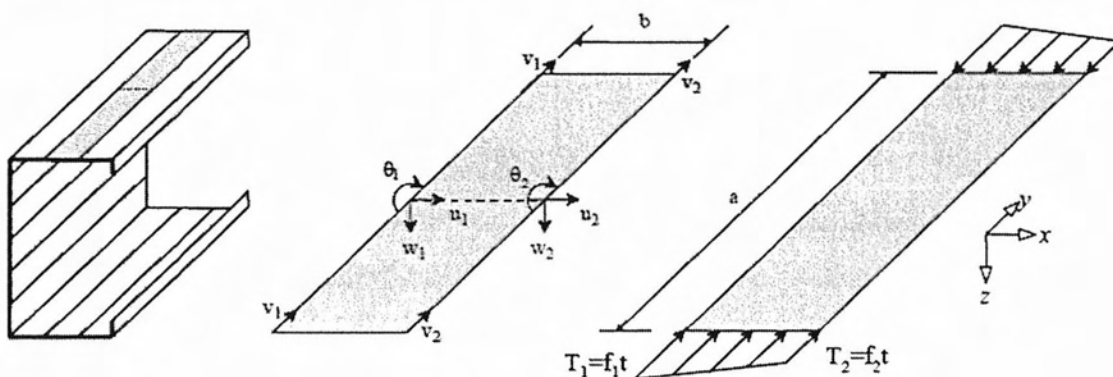
#### 4.1 Συμβατική Μέθοδος Πεπερασμένων Λωρίδων (Finite Strip Method)

Με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Λωρίδων (ΜΠΛ) ένα λεπτότοιχο μέλος, όπως η διατομή τύπου C που διακρίνεται στο Σχήμα 4.2, διακριτοποιείται σε διαμήκειες λωρίδες. Η (ΜΠΛ) αξιοποιεί την ομοιομορφία του μέλους κατά τον διαμήκη άξονα, για να μειώσει δραστικά το μέγεθος του προβλήματος. Σε αντίθεση με τα Πεπερασμένα Στοιχεία όπου το μέλος διακριτοποιείται εκτός από την εγκάρσια και στην αξονική διεύθυνση, στη (ΜΠΛ) γίνεται η υπόθεση ότι η συνάρτηση σχήματος του διαμήκη άξονα είναι μια τριγωνομετρική συνάρτηση. Από το Σχήμα 4.1 γίνεται αντιληπτή η διαφορετική διακριτοποίηση του προβλήματος της (ΜΠΛ) σε σχέση με τη (ΜΠΣ) και η δραστική μείωση που επιτυγχάνεται στον υπολογιστικό όγκο του προβλήματος λόγω της ύπαρξης πολύ λιγότερων βαθμών ελευθερίας στο αριθμητικό προσομοίωμα.



Σχήμα 4.1 Συγκριτική παράθεση της διακριτοποίησης ενός μέλους με πλέγμα της (ΜΠΣ) και της (ΜΠΛ) με αντίστοιχη αναφορά των β.ε. για την κάθε περίπτωση. (Z. Li, B.W. Schafer, 2010)

Στο Σχήμα 4.2 απομονώνεται μια λωρίδα του μέλους πάνω στην οποία εμφανίζονται οι βαθμοί ελευθερίας, οι διαστάσεις και τα ασκούμενα φορτία της.



Σχήμα 4.2 Διακριτοποίηση Πεπερασμένων Λωρίδων, β.ε. λωρίδας, ασκούμενα φορτία. (Schafer, B.W. , Ádány, S., 2006)

### Συναρτήσεις σχήματος

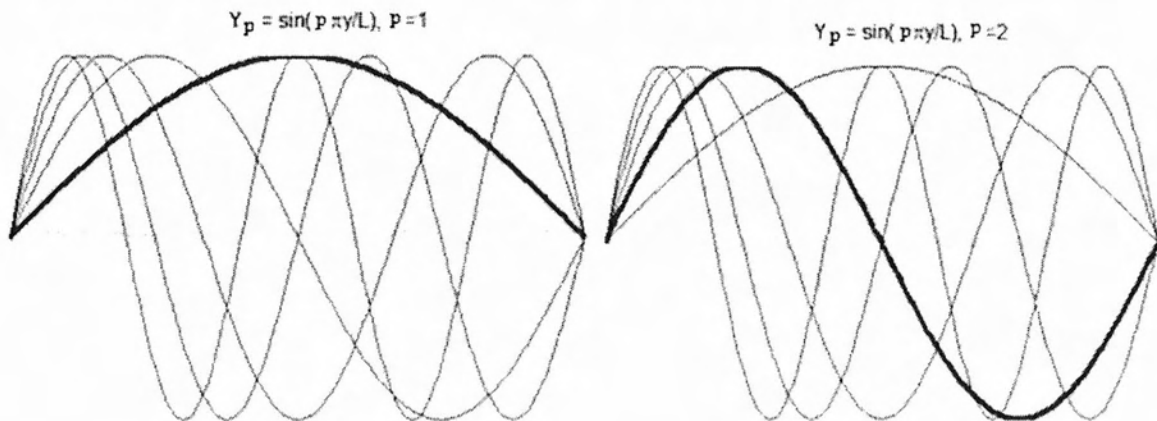
Οι συναρτήσεις σχήματος κατά την εγκάρσια και την αξονική διεύθυνση επιλέγονται ώστε να αποδίδουν κατά το δυνατόν καλύτερα την πραγματική παραμόρφωση του στοιχείου. Στο CUFISM, οι συναρτήσεις σχήματος της λωρίδας στην εγκάρσια διεύθυνση είναι οι ίδιες με αυτές της (ΜΠΣ) για στοιχείου δοκού επίπεδου πλαισίου, ενώ στην αξονική διεύθυνση γίνεται χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για τις εντός επιπέδου, ή μεμβρανικές, μετατοπίσεις  $u$  και  $v$  ορίζονται γραμμικές συναρτήσεις σχήματος κατά την εγκάρσια διεύθυνση ενώ κατά την αξονική για το  $u$  ορίζεται ημιτονοειδής συνάρτηση για το  $v$  ορίζεται συνημιτονοειδής συνάρτηση.

$$u = \sum_{p=1}^m \left[ \left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad \frac{x}{b} \right] \begin{Bmatrix} u_{1p} \\ u_{2p} \end{Bmatrix} Y_p \quad v = \sum_{p=1}^m \left[ \left(1 - \frac{x}{b}\right) \quad \frac{x}{b} \right] \begin{Bmatrix} v_{1p} \\ v_{2p} \end{Bmatrix} Y_p \frac{a}{\mu_p} \quad (1)$$

Οι εκτός επιπέδου μετακινήσεις  $w$ , εκφράζονται με μια κυβική κατανομή:

$$w = \sum_{p=1}^m \left[ \begin{matrix} 1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} & x \left(1 - \frac{2x}{b} + \frac{x^2}{b^2}\right) & \frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} & x \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{x}{b}\right) \end{matrix} \right] \begin{Bmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{Bmatrix} Y_p$$

Όπου  $Y_p = \sin(p\pi y/a)$  (και  $\mu_p = p\pi$ ) η συνάρτηση σχήματος στην αξονική διεύθυνση, στην περίπτωση απλής έδρασης του μέλους και στα δυο του άκρα. Σε περίπτωση άλλων συνθηκών στήριξης η  $Y_p$  αλλάζει μορφή, για παράδειγμα σε περίπτωση πάκτωσης του μέλους και στα δύο άκρα η  $Y_p = \sin(p\pi y/a) \sin(\pi y/a)$ . (Li, 2009), (Zhanjie, Li, Schafer, B. W., 2010) Για  $p = 1, 2, \dots, m$  η συνάρτηση σχήματος  $Y_p$  έχει τη μορφή του Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.3 Σχηματική απεικόνιση της συναρτήσεως σχήματος  $Y_p$  για διάφορα μισά μήκη κύματος (half-wavelengths).

### Σχέσεις ανηγμένων παραμορφώσεων – επικόμβιων μετακινήσεων

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις των λωρίδων αποτελούνται από δύο τμήματα: μεμβρανικές και καμπτικές παραμορφώσεις. Οι μεμβρανικές παραμορφώσεις  $\varepsilon_m$  είναι στη μέση γραμμή της λωρίδας και διέπονται από τις παραδοχές της θεωρίας της επίπεδης έντασης. Οι καμπτικές παραμορφώσεις  $\varepsilon_b$  ακολουθούν τις παραδοχές της θεωρίας λεπτών πλακών του Kirchhoff, μηδενίζονται στη μέση γραμμή της λωρίδας και είναι μόνο συνάρτηση του  $w$ .

$$\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_B \quad (3)$$

$$\{\varepsilon_M\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}_M = \sum_{p=1}^m [N'_m] \begin{Bmatrix} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^m [B_M^p] d_m^p \quad (4)$$

$$\{\varepsilon_B\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}_B = \sum_{p=1}^m z [N'_w] \begin{Bmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{Bmatrix} = \sum_{p=1}^m z [B_B^p] d_w^p \quad (5)$$

### Ελαστικό Μητρώο Στιβαρότητας (Elastic stiffness matrix)

Επειδή η μεμβρανική συμπεριφορά ( $u, v$ ) (membrane behavior) αποσυνδέεται από την καμπτική συμπεριφορά ( $w$ ) (bending behavior), η εσωτερική ενέργεια παραμορφώσεως κατά το λυγισμό αποτελείται από δύο ξεχωριστά τμήματα, έτσι ώστε:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_M\}^T \{\sigma_M\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon_B\}^T \{\sigma_B\} dV \quad (6)$$

Για σταθερό πάχος  $t$ , και εφαρμόζοντας τις καταστατικές σχέσεις  $\{\sigma_m\} = [D_m] \{\varepsilon_m\}$  και  $\{\sigma_b\} = [D_b] \{\varepsilon_b\}$  η εσωτερική ενέργεια παραμορφώσεως μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$U = \frac{1}{2} t \int_0^a \int_0^b \{\varepsilon_M\}^T [D_M] \{\varepsilon_M\} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{\varepsilon_B\}_e^T [D_B] \{\varepsilon_B\}_e dx dy \quad (7)$$

$$\text{όπου } [D_M] = \begin{bmatrix} E_1 & \nu_x E_2 & 0 \\ \nu_y E_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \text{ και } [D_B] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \text{ με } E_1 = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y},$$

$$E_2 = \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y}, \quad D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)},$$

$$D_1 = \frac{\nu_y E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_x E_y t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \text{ και } D_{xy} = \frac{G t^3}{12}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (6) των ανηγμένων παραμορφώσεων των σχέσεων (4) και (5) η σχέση (7) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$U = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \frac{1}{2} (d_{in}^p)^T \left( t \int_0^a \int_0^b (B_M^p)^T [D_M] B_M^q dx dy \right) d_{in}^q + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \frac{1}{2} (d_w^p)^T \left( \int_0^a \int_0^b (B_B^p)^T [D_B] B_B^q dx dy \right) d_w^q \quad (8)$$

ή για συντομία ως :

$$U = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \frac{1}{2} d_p^T k_{pq} d_q \quad (9)$$

όπου  $d_p = \begin{bmatrix} d_{in}^p \\ d_w^p \end{bmatrix}$ ,  $d_q = \begin{bmatrix} d_{in}^q \\ d_w^q \end{bmatrix}$  και  $k_{pq}$  είναι το ελαστικό μητρώο ακαμψίας το οποίο

μπορεί να διαχωριστεί και αυτό σε δύο τμήματα :

$$k_{pq} = \begin{bmatrix} k_{pq}^{in} & \cdot \\ \cdot & k_{pq}^{w} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$k_{pq}^{in} = t \int_0^a \int_0^b (B_M^p)^T [D_M] B_M^q dx dy \text{ και } k_{pq}^{w} = \int_0^a \int_0^b (B_B^p)^T [D_B] B_B^q dx dy \quad (11)$$

Συνεπώς το μητρώο ακαμψίας μπορεί να εκφραστεί συνοπτικά με τη μορφή:

$$k = \left[ k_{pq} \right]_{m \times m} \quad (12)$$

Με ολοκλήρωση και αντικατάσταση καταλήγει κανείς στις ακόλουθες σχέσεις:

$$k_{eM}^{pq} = r \begin{bmatrix} \left( \frac{E_1 I_1 + G b I_5}{b} + \frac{G b I_5}{3} \right) & \left( -\frac{E_2 \nu_x I_3}{2c_2} - \frac{G I_5}{2c_2} \right) & \left( -\frac{E_1 I_1 + G b I_5}{b} + \frac{G b I_5}{6} \right) & \left( -\frac{E_2 \nu_x I_3}{2c_2} + \frac{G I_5}{2c_2} \right) \\ \left( -\frac{E_2 \nu_x I_2}{2c_1} - \frac{G I_5}{2c_1} \right) & \left( \frac{E_2 b I_4}{3c_1 c_2} + \frac{G I_5}{b c_1 c_2} \right) & \left( \frac{E_2 \nu_x I_2}{2c_1} - \frac{G I_5}{2c_1} \right) & \left( \frac{E_2 b I_4}{6c_1 c_2} - \frac{G I_5}{b c_1 c_2} \right) \\ \left( -\frac{E_1 I_1 + G b I_5}{b} + \frac{G b I_5}{6} \right) & \left( \frac{E_2 \nu_x I_3}{2c_2} - \frac{G I_5}{2c_2} \right) & \left( \frac{E_1 I_1 + G b I_5}{b} + \frac{G b I_5}{3} \right) & \left( \frac{E_2 \nu_x I_3}{2c_2} + \frac{G I_5}{2c_2} \right) \\ \left( -\frac{E_2 \nu_x I_2}{2c_1} + \frac{G I_5}{2c_1} \right) & \left( \frac{E_2 b I_4}{6c_1 c_2} - \frac{G I_5}{b c_1 c_2} \right) & \left( \frac{E_2 \nu_x I_2}{2c_1} + \frac{G I_5}{2c_1} \right) & \left( \frac{E_2 b I_4}{3c_1 c_2} + \frac{G I_5}{b c_1 c_2} \right) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\text{όπου } I_1 = \int_0^a Y_p Y_q dy : I_2 = \int_0^a Y_p'' Y_q dy : I_3 = \int_0^a Y_p Y_q'' dy : I_4 = \int_0^a Y_p' Y_q' dy : I_5 = \int_0^a Y_p Y_q' dy$$

$$k_{eB}^{pq} = \frac{1}{420b^3} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 5040D_x I_1 - 504b^2 D_1 I_2 \\ -504b^2 D_1 I_3 + 156b^4 D_y I_4 \\ + 2016b^2 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2520b D_x I_1 - 462b^3 D_1 I_2 \\ -42b^3 D_1 I_3 + 22b^5 D_y I_4 \\ + 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5040D_x I_1 + 504b^2 D_1 I_2 \\ + 504b^2 D_1 I_3 + 54b^4 D_y I_4 \\ - 2016b^2 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2520b D_x I_1 - 42b^3 D_1 I_2 \\ -42b^3 D_1 I_3 - 13b^5 D_y I_4 \\ + 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2520b D_x I_1 - 462b^3 D_1 I_2 \\ -42b^3 D_1 I_2 + 22b^5 D_y I_4 \\ + 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1680b^2 D_x I_1 - 56b^4 D_1 I_2 \\ -56b^4 D_1 I_3 + 4b^6 D_y I_4 \\ + 224b^4 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2520b D_x I_1 + 42b^3 D_1 I_2 \\ + 42b^3 D_1 I_3 + 13b^5 D_y I_4 \\ - 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 840b^2 D_x I_1 + 14b^4 D_1 I_2 \\ + 14b^4 D_1 I_3 - 3b^6 D_y I_4 \\ - 56b^4 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5040D_x I_1 + 504b^2 D_1 I_2 \\ + 504b^2 D_1 I_3 + 54b^4 D_y I_4 \\ - 2016b^2 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2520b D_x I_1 + 42b^3 D_1 I_2 \\ + 42b^3 D_1 I_3 + 13b^5 D_y I_4 \\ - 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5040D_x I_1 - 504b^2 D_1 I_2 \\ - 504b^2 D_1 I_3 + 156b^4 D_y I_4 \\ + 2016b^2 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2520b D_x I_1 + 462b^3 D_1 I_2 \\ + 42b^3 D_1 I_3 - 22b^5 D_y I_4 \\ - 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2520b D_x I_1 - 42b^3 D_1 I_2 \\ -42b^3 D_1 I_3 - 13b^5 D_y I_4 \\ + 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 840b^2 D_x I_1 + 14b^4 D_1 I_2 \\ + 14b^4 D_1 I_3 - 3b^6 D_y I_4 \\ - 56b^4 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2520b D_x I_1 + 462b^3 D_1 I_2 \\ + 42b^3 D_1 I_2 - 22b^5 D_y I_4 \\ - 168b^3 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1680b^2 D_x I_1 - 56b^4 D_1 I_2 \\ - 56b^4 D_1 I_3 + 4b^6 D_y I_4 \\ + 224b^4 D_{xy} I_5 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\text{όπου } c_1 = \frac{p\pi}{a} : c_2 = \frac{q\pi}{a} : I_1 = \int_0^a Y_p Y_q dy : I_2 = \int_0^a Y_p'' Y_q dy : I_3 = \int_0^a Y_p Y_q'' dy : I_4 = \int_0^a Y_p'' Y_q'' dy : I_5 = \int_0^a Y_p' Y_q' dy$$

Για συνθήκες στήριξης απλής έδρασης και στα δύο άκρα, τα ολοκληρώματα  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  παίρνουν τη μορφή:

$$I_1 = \frac{a}{2} \cdot (p = q) \quad I_2 = I_3 = -\frac{\pi^2 p^2}{2a} \cdot (p = q) \quad I_4 = \frac{\pi^4 p^4}{2a^3} \cdot (p = q) \quad I_5 = \frac{\pi^2 p^2}{2a} \cdot (p = q)$$



### Γεωμετρικό Μητρώο Στιβαρότητας (geometric stiffness matrices)

Θεωρείται ότι το μέλος φορτίζεται με τη γραμμικά μεταβαλλόμενη κατανομή  $(T_1, T_2)$  του Σχήμα 4.2. Το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας μπορεί να προσδιορισθεί λαμβάνοντας υπόψη το πρόσθετο δυναμικό που προκύπτει καθώς η λωρίδα βραχύνεται από τις εξωτερικές φορτίσεις  $T_1, T_2$  (παραμορφώσεις δευτέρας τάξης (Green-Lagrange strain)), δηλαδή:

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b}) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (15)$$

Οι παράγωγοι των μετακινήσεων μπορεί να γραφούν ως παράγωγοι των συναρτήσεων σχήματος,  $N_{uv}$  και  $N_w$  και των επικόμβιων μετακινήσεων, όμοια με το ελαστικό μητρώο ελαστικότητας. Για την καμπτική συμπεριφορά, η παράγωγος του  $w$  μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \left( \sum_{p=1}^m [N'_w] \begin{Bmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{Bmatrix} \right)^2 = \left( \sum_{p=1}^m [G_B^p] \begin{Bmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{Bmatrix} \right)^2 = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \begin{Bmatrix} w_{1p} \\ \theta_{1p} \\ w_{2p} \\ \theta_{2p} \end{Bmatrix}^T [G_B^p]^T [G_B^q] \begin{Bmatrix} w_{1q} \\ \theta_{1q} \\ w_{2q} \\ \theta_{2q} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Για την μεμβρανική συμπεριφορά, οι παράγωγοι των  $u$  και  $v$  μπορούν να γραφούν:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right\} = \left( \sum_{p=1}^m [N'_u] \begin{Bmatrix} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{Bmatrix} \right)^2 = \left( \sum_{p=1}^m [G_M^p] \begin{Bmatrix} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{Bmatrix} \right)^2 = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \begin{Bmatrix} u_{1p} \\ v_{1p} \\ u_{2p} \\ v_{2p} \end{Bmatrix}^T [G_M^p]^T [G_M^q] \begin{Bmatrix} u_{1q} \\ v_{1q} \\ u_{2q} \\ v_{2q} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Το δυναμικό  $V_p$  μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b}) \left( \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m d_p^T [G^p]^T [G^q] d_q \right) dx dy \\ &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \frac{1}{2} d_p^T \left( \int_0^a \int_0^b (T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b}) [G^p]^T [G^q] dx dy \right) d_q \end{aligned} \quad (18)$$

ή για συντομία ως:

$$V_p = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \frac{1}{2} d_p^T k_{pq}^I d_q \quad (19)$$

Το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας  $K_g^{pq}$  μπορεί να χωριστεί σε δύο τμήματα: της μεμβρανικής συμπεριφοράς  $K_{gM}^{pq}$  και της καμπτικής συμπεριφοράς  $K_{gB}^{pq}$ :

$$k_{\varepsilon M}^{pq} = \int_0^a \int_0^b (T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b}) [G_M^p]^T [G_M^q] dx dy \text{ και } k_{\varepsilon B}^{pq} = \int_0^a \int_0^b (T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{b}) [G_B^p]^T [G_B^q] dx dy \quad (20)$$

Με αντικατάσταση και ολοκλήρωση καταλήγει κανείς στις πιο κάτω σχέσεις:

$$k_{\varepsilon M}^{pq} = \begin{bmatrix} \frac{(3T_1 + T_2)bI_5}{12} & 0 & \frac{(T_1 + T_2)bI_5}{12} & 0 \\ \frac{(3T_1 + T_2)ba^2I_4}{12\mu_p\mu_q} & 0 & \frac{(T_1 + T_2)ba^2I_4}{12\mu_p\mu_q} & 0 \\ \frac{(T_1 + 3T_2)bI_5}{12} & 0 & \frac{(T_1 + 3T_2)ba^2I_4}{12\mu_p\mu_q} & 0 \\ \text{symmetric} & & & \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$k_{\varepsilon B}^{pq} = \begin{bmatrix} \frac{(10T_1 + 3T_2)bI_5}{35} & \frac{(15T_1 + 7T_2)b^2I_5}{420} & \frac{9(T_1 + T_2)bI_5}{140} & \frac{(7T_1 + 6T_2)b^2I_5}{420} \\ \frac{(5T_1 + 3T_2)b^3I_5}{840} & \frac{(6T_1 + 7T_2)b^2I_5}{420} & \frac{(3T_1 + 10T_2)bI_5}{35} & \frac{(7T_1 + 15T_2)b^2I_5}{280} \\ \frac{(3T_1 + 10T_2)bI_5}{35} & \frac{(7T_1 + 15T_2)b^2I_5}{280} & \frac{(10T_1 + 3T_2)bI_5}{35} & \frac{(7T_1 + 6T_2)b^2I_5}{420} \\ \text{symmetric} & & & \frac{(3T_1 + 5T_2)b^3I_5}{840} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{όπου } \mu_p = p\pi ; \mu_q = q\pi ; I_1 = \int_0^a Y_p Y_q dy ; I_2 = \int_0^a Y_p'' Y_q'' dy ; I_3 = \int_0^a Y_p Y_q'' dy ; I_4 = \int_0^a Y_p' Y_q' dy ;$$

$$I_5 = \int_0^a Y_p' Y_q' dy$$

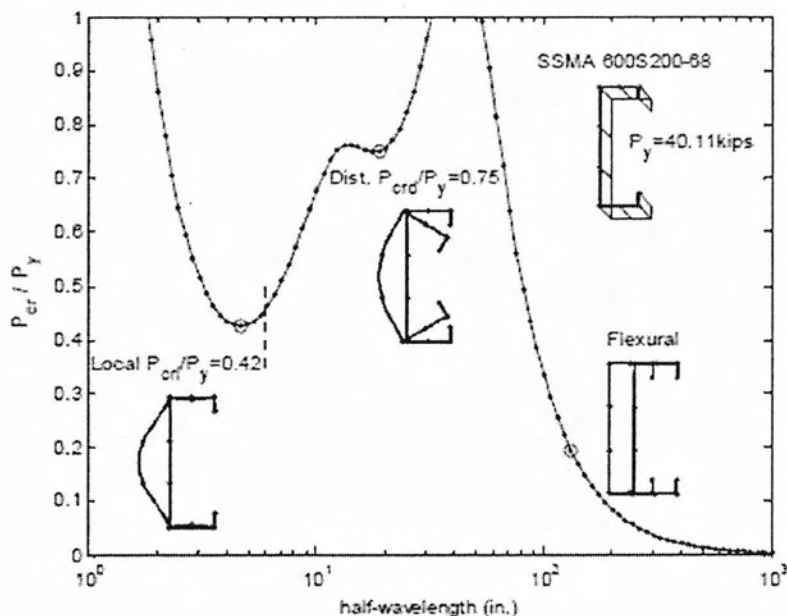
Απαιτούνται μετασχηματισμοί από τις τοπικές στις καθολικές συντεταγμένες για το σχηματισμό των καθολικών μητρώων στιβαρότητας για κάθε λωρίδα. Επομένως με μία κατάλληλη άθροιση μητρώων στιβαρότητας σε καθολικές συντεταγμένες, ορίζονται το καθολικό  $K_e$  και το γεωμετρικό  $K_g$  μητρώο στιβαρότητας. Το πρόβλημα ιδιοτιμών προς επίλυση είναι της μορφής:

$$K_e \Phi = \Lambda K_g \Phi \quad (23)$$

$[\Lambda] = \text{diag} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{ns,m}]$ ,  $[\Phi] = [\{\Phi\}_1 \{\Phi\}_2 \dots \{\Phi\}_{ns,q}]$  όπου ns ο αριθμός των γραμμών των λωρίδων (strip lines).

### Χαρακτηριστική καμπύλη ανάλυσης ευστάθειας (Signature curve stability analysis)

Για την ειδική περίπτωση, της απλής έδρασης των ακραίων στηρίξεων (simply supported end conditions, etc. Members are pinned and free to warp) οι  $[q]$  όροι των αξονικών συναρτήσεων σχήματος είναι ορθογωνικοί και επομένως κάθε όρος  $[q]$  είναι ξεχωριστός, άρα το πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί ως μια σειρά  $m$  ξεχωριστών λύσεων. Επιπλέον, για απλή έδραση των ακραίων στηρίξεων τα ολοκληρώματα  $I_1$  έως  $I_5$  μηδενίζονται για  $p \neq q$ , καθιστώντας διαγώνια τα τοπικά μητρώα  $K_e$  και  $K_g$ . Η κλασική χαρακτηριστική καμπύλη (classic signature curve) ανάλυσης πεπερασμένων λωρίδων παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.4. Η καμπύλη του σχήματος απεικονίζει για μια δεδομένη κατανομή τάσεων (στην προκειμένη περίπτωση ομοιόμορφη θλίψη), την πρώτη λύση του προβλήματος ιδιοτιμών της σχέσης (23) ως συνάρτηση του  $a$  (δηλαδή την πρώτη ιδιοτιμή και ιδιομορφή του προβλήματος ιδιοτιμών ως συνάρτηση του μήκους της λωρίδας). Τα μητρώα  $K_e$  και  $K_g$  είναι και αυτά συναρτήσεις του  $a$  ενώ στη συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται η παραδοχή ότι  $q = 1$  δηλαδή  $Y_p = \sin(\pi y/a)$ . Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού και απεικόνισης και μεγαλύτερων ιδιοτιμών του προβλήματος εφόσον το επιθυμεί ο μελετητής (συνεχίζει να ισχύει η παραδοχή  $q = 1$ ).



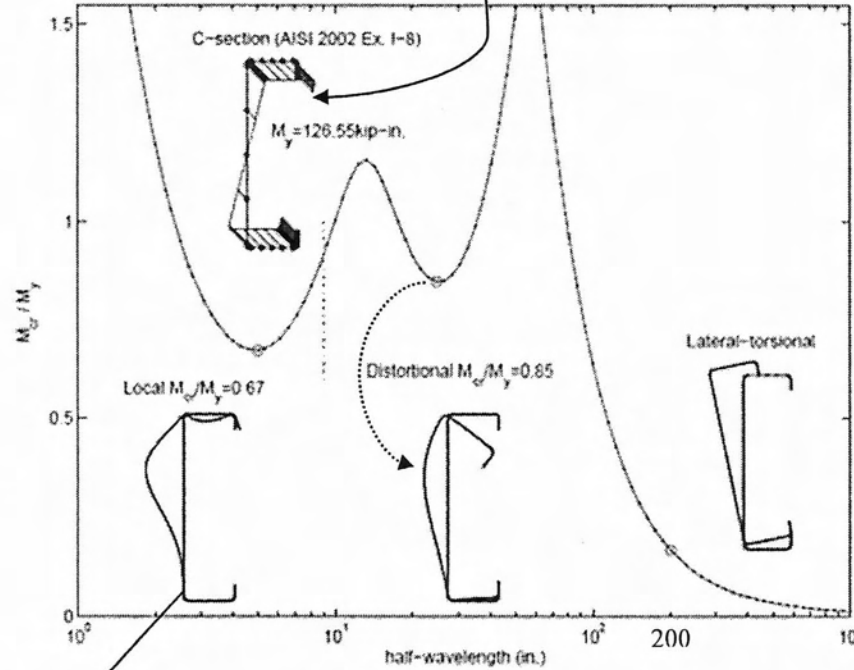
Σχήμα 5.4 Χαρακτηριστική καμπύλη ανάλυσης πεπερασμένων λωρίδων για υποστύλωμα υπό ομοιόμορφη θλίψη.

Η χαρακτηριστική καμπύλη αποτέλεσε το αρχικό στάδιο της μεθόδου πεπερασμένων λωρίδων και περιλαμβάνει τις παραδοχές που αναφέραμε πιο πάνω όσον αφορά τις στηρίξεις και την μορφή της αξονικής συνάρτησης. Δε θα γίνει αναφορά στη χρήση της μεθόδου για άλλες συνοριακές συνθήκες (πάκτωση κ.λ.π) και στο τι αλλάζει στις αναλύσεις και στα αποτελέσματα, καθώς δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής. Στην επόμενη σελίδα γίνεται μια πιο επισταμένη προσπάθεια ερμηνείας της χαρακτηριστικής καμπύλης, της φυσικής ερμηνείας των αποτελεσμάτων της και μια αναφορά στα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των κυρίων μορφών λυγισμού.

**Ανάλυση των αποτελεσμάτων της μεθόδου των Πεπερασμένων Λωρίδων**

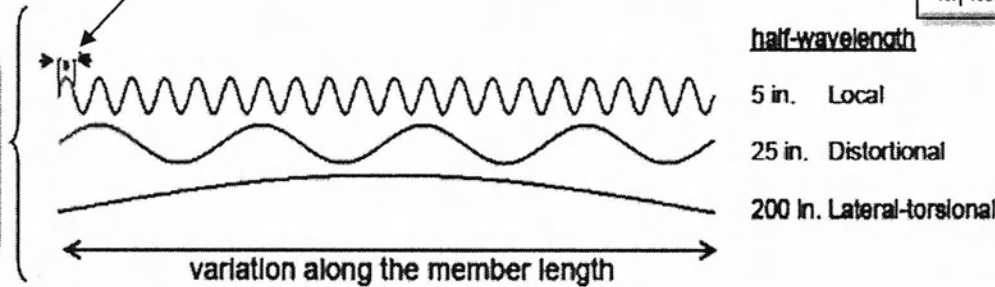
Η ασκούμενη τάση στη διατομή προσομοιώνει την κατάσταση ομοιόμορφης κάμψης της δοκού περί τον ισχυρό άξονα. Όλα τα εξαγόμενα αποτελέσματα οφείλονται στη συγκεκριμένη κατανομή τάσεων.

**Τοπικά ελάχιστα:**  
Υποδεικνύουν τη μικρότερη ιδιοτιμή στην οποία εμφανίζεται μια ιδιομορφή. Αναζητείται ο μικρότερος λόγος  $M_x/M_y$  για κάθε είδος λυγισμού. Μία προσδιορισθείσα ιδιομορφή της διατομής μπορεί να επαναλαμβάνεται καθ' όλο το μήκος του μέλους.



Στο σχήμα εμφανίζονται οι ιδιομορφές της διατομής για τα δύο τοπικά ελάχιστα και για μισό μήκος κύματος 200 in.. Από το σχήμα διακρίνεται ότι: Ο τοπικός λυγισμός περιλαμβάνει στρέβλωση της διατομής, αλλά αυτή η στρέβλωση περιλαμβάνει στροφή γύρω από τις εσωτερικές ακμές, χωρίς ταυτόχρονη μετάθεση τους και μήκος κύματος ίσο ή μικρότερο με τη μεγαλύτερη διάσταση του μέλους υπό θλίψη. Ο λυγισμός με στρέβλωση της διατομής περιλαμβάνει στρέβλωση της διατομής που συνοδεύεται από στροφή και μετάθεση μίας ή περισσότερων εσωτερικών ακμών του μέλους με μήκη κύματος που κυμαίνονται μεταξύ αυτών του τοπικού και του καθολικού λυγισμού. Ο καθολικός λυγισμός δεν περιλαμβάνει στρέβλωση της διατομής αλλά μετάθεση ή στροφή ολόκληρης της διατομής, σε μεγάλα μήκη κύματος.

Το μισό μήκος κύματος (Half-wavelength) δείχνει το πώς μια ιδιομορφή μεταβάλλεται κατά μήκος του μέλους, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



## 4.2 Περιορισμένη Μέθοδος Πεπερασμένων Λωρίδων (Constrained Finite Strip Method) για ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές

Γενικά μιλώντας η ανάλυση λυγισμού ενός φορέα, αφορά την εύρεση συγκεκριμένων μετακινήσεων του μέλους ( και των αντίστοιχων κρίσιμων φορτίων) που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες (ισορροπία, συμβιβαστό κ.λ.π). Εφόσον ο φορέα (είτε λεπτότοιχος είτε όχι) μπορεί να παραμορφωθεί με άπειρους τρόπους, θεωρητικά μπορούν να βρεθούν άπειρες λύσεις άρα το πρόβλημα στην πράξη να είναι απειροδιάστατο.

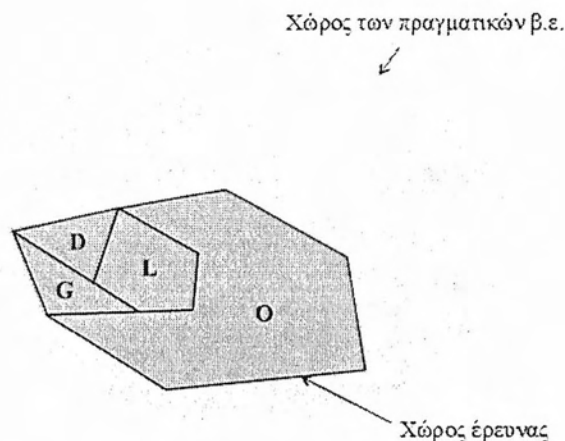
Όμως όλες οι μέθοδοι υπολογισμού των προβλημάτων λυγισμού αναζητούν λύσεις σε χώρους πεπερασμένων διαστάσεων. Τα χαρακτηριστικά των χώρων έρευνας καθορίζονται από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται και τις παραδοχές της (π.χ. παραδοχές σχετικά με τις δυνατές μετακινήσεις του φορέα). Για παράδειγμα, η αναλυτική λύση του προβλήματος για καμπτικό λυγισμό της αξονικής θλίψης ενός αμφιέριστου υποστυλώματος, όπως αυτή δόθηκε από τον Euler. Αν το σκεφτεί κανείς σε αυτό το πρόβλημα καμπτικού λυγισμού η λύση ερευνάται σε έναν μονοδιάστατο χώρο, ο οποίος καθορίζεται από κάποιες παραδοχές, όπως:

- Η παραδοχή της απαραμόρφωτης διατομής του φορέα (rigid-cross section), καθιστά εφικτή την περιγραφή των μετακινήσεων οποιασδήποτε διατομής με μία στροφή και δύο μετακινήσεις. Πιο γενικά, το πεδίο των μετακινήσεων του φορέα μπορεί να περιγραφεί με τρεις συναρτήσεις οι οποίες καθορίζουν τις τρεις παραπάνω μετακινήσεις κατά μήκος του φορέα
- Η υπόθεση ότι οι αξονικές κατανομές είναι συναρτήσεις του ημιτόνου.
- Επιπλέον, αν κανείς ενδιαφέρεται για τις πρώτες ιδιοτιμές και ιδιομορφές, η κατανομή των μετακινήσεων στη αξονική διεύθυνση μπορεί να υποτεθεί ως μισό μήκος κύματος ημιτονοειδούς συνάρτησης, περιορίζοντας το χώρο έρευνας σε τρισδιάστατο.
- Τέλος, αν εξεταστούν οι μετακινήσεις σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, υπάρχει ένα μισό μήκος κύματος, που είναι η μόνη δυνατή ιδιομορφή του φορέα. Άρα, ο χώρος έρευνας περιορίζεται στη μία διάσταση.

Ως γενίκευση της παραπάνω ιδέας, εισάγεται η ακόλουθη υπόθεση:

- Ο χώρος έρευνας του προβλήματος λυγισμού ενός λεπτότοιχου μέλους μπορεί να υποδιαιρεθεί σε τέσσερις υπόχωρους, οι οποίοι καθορίζονται από ένα συγκεκριμένο πλαίσιο μετακινήσεων – παραμορφώσεων που επιτρέπεται σε κάθε έναν από αυτούς. Ορίζονται κατ' αυτό τον τρόπο 4 υπόχωροι, ένας για τον καθολικό (G), ένας για το λυγισμό με στρέβλωση(D), ένας για τον τοπικό (L) και ένας για όλες τις άλλες μορφές λυγισμού που δεν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε καμιά από τις άλλες κατηγορίες(O). Οι παραπάνω υπόχωροι δεν επικαλύπτονται αλλά καλύπτουν όλο το χώρο έρευνας.

Οι υπόχωροι G,D,L και O εξαρτώνται και από τη μέθοδο υπολογισμού αλλά και από διάφορες παραμέτρους της μεθόδου όπως η διακριτοποίηση του πλέγματος στη (ΜΠΣ) και (ΜΠΑ).



Σχήμα 5.5 Υποδιαίρεση του χώρου έρευνας του προβλήματος λυγισμού ενός μέλους. (Adany, 2004)

### Κατηγοριοποίηση Ιδιομορφών Λυγισμού

Οι ορισμοί του καθολικού (G), του λυγισμού με στρέβλωση (D), του τοπικού (L) και των υπόλοιπων (O) ιδιομορφών λυγισμού βασίζονται στις παραδοχές της Γενικευμένης Θεωρίας Δοκού (Generalized Beam Theory, GBT (Silvestre, N., Camotim, D., 2002)). Η γενικευμένη θεωρία δοκού έχει τις ακόλουθες παραδοχές:

1. Υπόθεση Vlasov : α)  $\gamma_{xy} = 0$ , δηλαδή μηδενίζονται οι εντός επιπέδου (μεμβρανικές) διατμητικές τροπές, β)  $\epsilon_x = 0$ , μηδενίζονται οι εγκάρσιες ορθές ( x – διεύθυνση) μεμβρανικές τροπές, γ) Οι (v) μετακινήσεις κατά τον y – άξονα μεταβάλλονται γραμμικά κατά x μεταξύ δύο εσωτερικών ακμών της διατομής.
2. (Longitudinal warping) Αξονικές μετακινήσεις (v) : α)  $v \neq 0$ , δηλαδή οι αξονικές μετακινήσεις δεν μηδενίζονται παντού κατά μήκος ολόκληρης της διατομής και β) η διατομή είναι σε εγκάρσια ισορροπία (transverse equilibrium).
3. Μη ύπαρξη στρέβλωσης της διατομής (undistorted section):  $k_{xx} = 0$ , δεν υπάρχει εγκάρσια κάμψη.

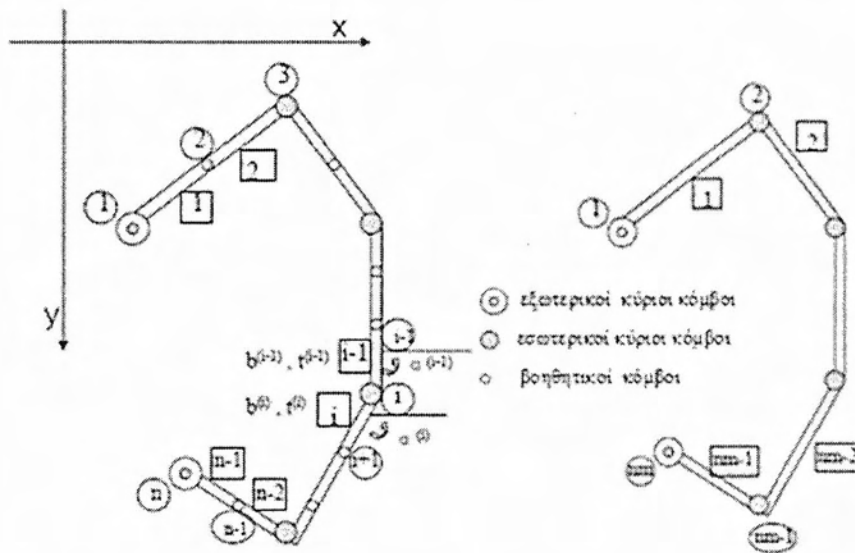
Ο διαχωρισμός των ιδιομορφών λυγισμού στις κατηγορίες τους (G,D,L και O) πραγματοποιείται με την εφαρμογή των τριών παραπάνω κριτηρίων στη μέθοδο των πεπερασμένων λωρίδων. Τα κριτήρια που ισχύουν στην κάθε κατηγορία εμφανίζονται στον Πίνακα 4.1.

	G modes	D modes	L modes	O modes
Criterion #1--Vlasov's hypothesis	YES	YES	YES	NO
Criterion #2--Longitudinal warping	YES	YES	NO	n/a
Criterion #3--Undistorted section	YES	NO	n/a	n/a

Πίνακας 4.1 Κατηγοριοποίηση των ιδιομορφών λυγισμού με βάση τα κριτήρια της θεωρίας γενικευμένης δοκού. (Zhanjie, Li, Schafer, B. W., 2010)

**Εφαρμογή των παραδοχών της Γενικευμένης θεωρίας δοκού στη Μέθοδο Πεπερασμένων Λωρίδων για ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές**

Το σύστημα συντεταγμένων είναι το ίδιο με αυτό της (ΜΠΛ) του Σχήμα 4.2, ενώ για τη διαχείριση προβλημάτων που αφορούν λεπτότοιχες διατομές τυχαίων σχημάτων προκύπτει η ανάγκη κατηγοριοποίησης των κόμβων της διατομής. Ορίζονται λοιπόν τρεις κατηγορίες: α) (sub-nodes) Οι βοηθητικοί κόμβοι που χρησιμοποιούνται για την υποδιαίρεση των πλακιδίων, μόνο δύο πλακίδια (συνευθειακά) είναι συνδεδεμένα με αυτούς, β) όλοι οι υπόλοιποι κόμβοι λέγονται κύριοι κόμβοι και διακρίνονται σε εξωτερικούς (external main nodes) αν μόνο ένα στοιχείο είναι συνδεδεμένο μαζί τους (π.χ. ο πρώτος και ο τελευταίος κόμβος μιας διατομής) και οι υπόλοιποι καλούνται ως εσωτερικοί κύριοι κόμβοι (internal main nodes) ή κόμβοι γωνιών. (Σχήμα 4.6)



Σχήμα 4.6 Απεικόνιση της αρίθμησης των κόμβων, των στοιχείων και των γωνιών της διατομής τυχούσας ανοιχτής λεπτότοιχης διατομής και της κατηγοριοποίησης των κόμβων. (Zhanjie, Li, Schafer, B. W., 2010)

Στη συνέχεια θα δοθεί ένα παράδειγμα της επιρροής ενός κινηματικού περιορισμού, που εμπεριέχεται στα κριτήρια της υπόθεσης Vlasov, στο πεδίο μετατοπίσεων της (ΜΠΛ). Χάριν απλότητας, στις σχέσεις που ακολουθούν γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές: σταθερό πάχος, συνεχές ισότροπο υλικό και δεν λαμβάνονται υπόψη οι βοηθητικοί κόμβοι.

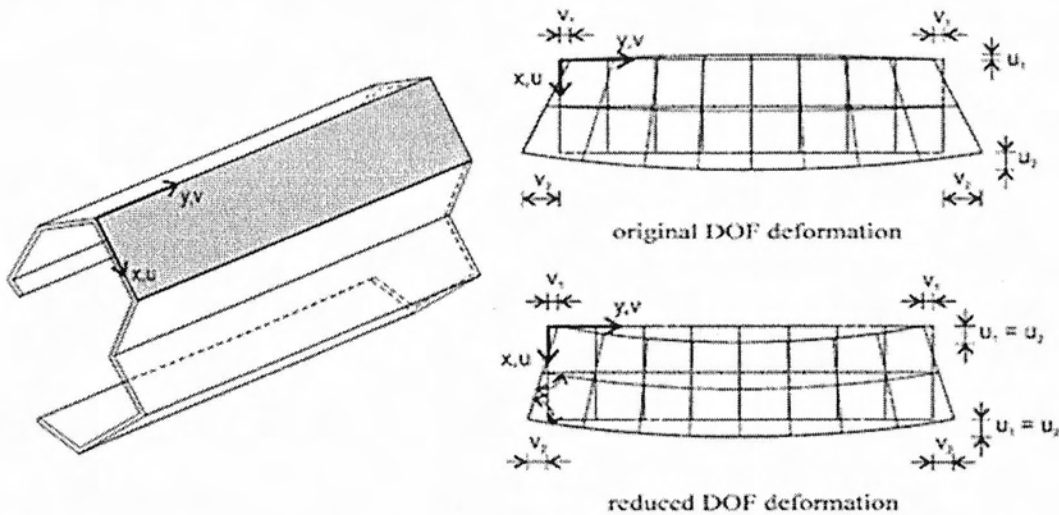
Για τις μεμβρανικές μετατοπίσεις  $u$  ισχύει η σχέση:

$$u(x, y) = \left[ \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{b} \\ \frac{x}{b} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (24)$$

Εισάγοντας τον περιορισμό  $\epsilon_x = 0$ , προκύπτει:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-u_1 + u_2}{b} \sin \frac{m\pi y}{a} = 0 \quad (25)$$

Άρα,  $u_1 = u_2 = u$  αφού η συνάρτηση ημιτόνου είναι γενικά διάφορη του μηδενός και συνεπώς  $u(y) = u \sin(m\pi y/a)$ , ανεξάρτητη του  $x$ . Στο Σχήμα 5.7 φαίνεται η επιρροή του κινηματικού περιορισμού  $\varepsilon_x = 0$  στις παραμορφώσεις  $u$  της σκιασμένης λωρίδας του σχήματος στο επίπεδο  $x$ - $y$ . Όπως γίνεται στο σχήμα οι εγκάρσιες μετακινήσεις  $u$  των δύο επικόμβιων γραμμών (nodal lines) της λωρίδας είναι πανομοιότυπες.



Σχήμα 5.7 Επιρροή του περιορισμού  $\varepsilon_x = 0$  στις παραμορφώσεις  $u$  μιας λωρίδας. (Adany, 2004)

Τα παραπάνω καταδεικνύουν ότι η εισαγωγή περιορισμών στις παραμορφώσεις μειώνουν τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του γενικού διανύσματος επικόμβιων (μεμβρανικών) μετακινήσεων και στη συγκεκριμένη περίπτωση από 4 σε 3. Το νέο διάνυσμα επικόμβιων (μεμβρανικών) μετακινήσεων, ορίζεται από 3 μετακινήσεις  $u, v_1$  και  $v_2$  σύμφωνα με τη σχέση που ακολουθεί:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{or } d_{uv} = R d_{uv-r} \quad (26)$$

R-πίνακας περιορισμών (constraint matrix)

### Υπολογισμός καθαρών μορφών λυγισμού (Modal decomposition)

Η περιορισμένη μέθοδος πεπερασμένων λωρίδων (ΠΜΠΛ) βασίζεται στην εφαρμογή των παραδοχών της (ΓΘΔ) για τον υπολογισμό «καθαρών» μορφών λυγισμού (pure modes). Ένα σημαντικό αντικείμενο της μεθόδου αφορά τον προσδιορισμό κατάλληλων μητρώων περιορισμών (constraint matrices) για κάθε κατηγορία λυγισμού. Αυτά τα μητρώα μειώνουν τους  $m$  ( $m = 4n$ ,  $n$  ο αριθμός των κόμβων της διατομής) βαθμούς ελευθερίας του πεδίου των μετακινήσεων της (ΜΠΛ), σε ένα πεδίο μετακινήσεων με μικρότερο αριθμό βαθμών ελευθερίας που



ικανοποιεί τα κριτήρια που κάθε κατηγορίας λυγισμού. Τα παραπάνω συνοψίζονται στη σχέση (27) που ακολουθεί:

$$d = R_M d_M \quad (27)$$

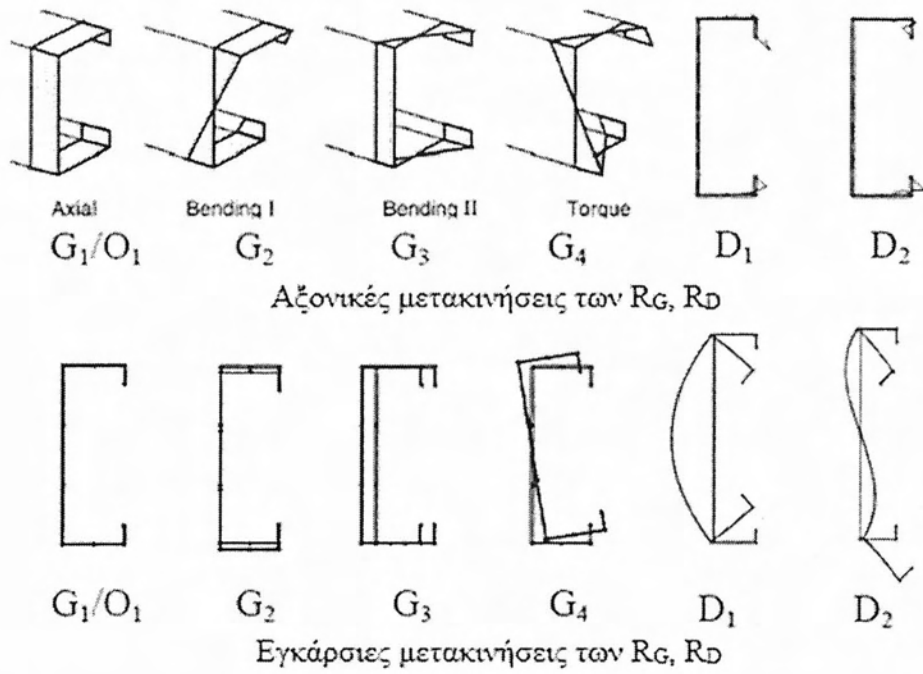
Όπου  $d$  = το γενικό διάνυσμα μετακινήσεων  $m$  - στοιχείων,  $R_M$  = το μητρώο περιορισμών για κάθε ιδιομορφή,  $d_M$  = το διάνυσμα των μετακινήσεων στο μειωμένο χώρο της κάθε ιδιομορφής

Από μαθηματική σκοπιά, το μητρώο  $R_M$  ορίζει έναν υπόχωρο του πραγματικού χώρου των βαθμών ελευθερίας της (ΜΠΛ) ο οποίος ικανοποιεί τα κριτήρια της εκάστοτε ιδιομορφής  $M$ . Ουσιαστικά όπως φαίνεται και από τη σχέση (27) το μητρώο  $R_M$  πρόκειται για έναν πίνακα αλλαγής βάσης, όπου οι στήλες του  $R_M$  μπορούν να θεωρηθούν ως τα διανύσματα βάσης του χώρου της ιδιομορφής  $M$ . Στον Πίνακα 4.2 περιλαμβάνονται οι ορισμοί των βάσεων και των διαστάσεων των υποχώρων GD, G, D, L και O.

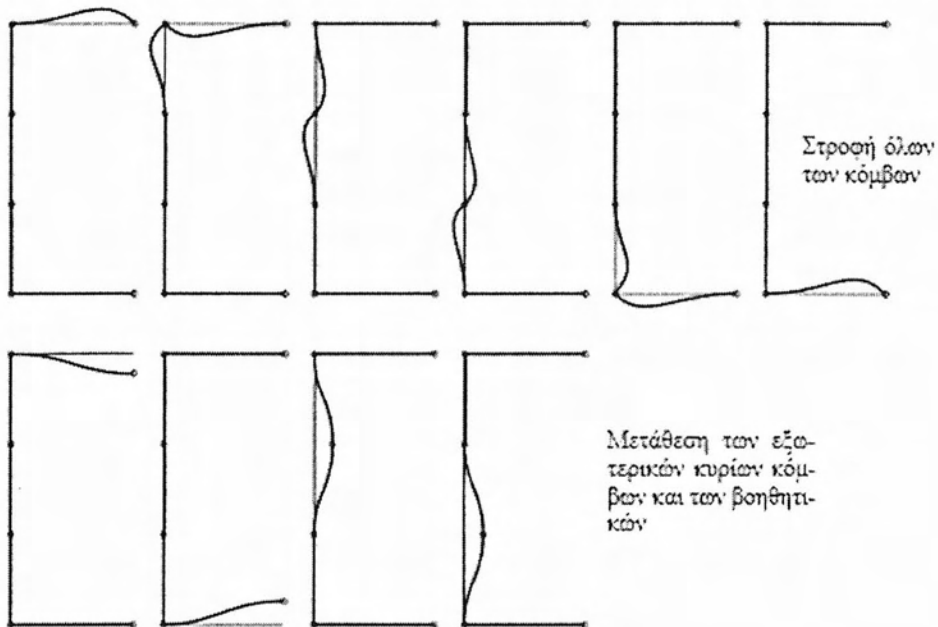
Υπόχωρος	Ορισμοί των μητρώων περιορισμών R (διανυσμάτων βάσης των υποχώρων)	Διαστάσεις του υποχώρου
GD	Η εφαρμογή των παραδοχών της υπόθεσης Vlasov, οδηγεί σε μια σχέση όπου όλες οι εντός επιπέδου μετακινήσεις ( $u, w, \theta$ ), μπορούν να προσδιοριστούν απευθείας από τις αξονικές μετακινήσεις $v$ (warping deformations). Επειδή οι αξονικές μετακινήσεις είναι γραμμικές κατά $x$ μεταξύ δύο κυρίων κόμβων, όλο το πεδίο των μετακινήσεων μπορεί να οριστεί από τις αξονικές μετακινήσεις ( $v$ ) των κυρίων κόμβων και μόνο. Ως συνέπεια αυτού τα διανύσματα βάσης του χώρου είναι ίσα με τον αριθμό των κυρίων κόμβων ( $n_m$ ), ενώ οποιοδήποτε σύνολο $n_m$ ανεξάρτητων αξονικών κατανομών (δηλ. διανυσμάτων $v$ ) μπορεί να αποτελέσει βάση του χώρου.	$n_m$
G	Ο χώρος G είναι ένας υπόχωρος του GD (ισχύουν όλα τα παραπάνω), που δεν περιλαμβάνει στρέβλωση της διατομής (rigid-body-like cross section). Επομένως, υπάρχουν 4 καθολικές μορφές λυγισμού (Σχήμα 4.8): μία αξονική, 2 καμπτικές και μία στρεπτική (torque).	4
D	Οι αξονικές μετακινήσεις (deformations $v$ ) του χώρου GD που οδηγούν σε στρέβλωση της διατομής (Σχήμα 4.8). Κάθε διάνυσμα βάσης του χώρου G είναι ορθογωνικό σε κάθε διάνυσμα της βάσης του χώρου D.	$n_m - 4$
L	Εφαρμόζονται οι παραδοχές της υπόθεσης Vlasov ως αποτέλεσμα η ύπαρξη σχέσης που συνδέει τις αξονικές μετακινήσεις των κυρίων κόμβων με τις εντός επιπέδου μετακινήσεις των εσωτερικών κυρίων κόμβων. Όμως παραβιάζεται το δεύτερο κριτήριο του Πίνακα 4.1, αφού μηδενίζονται οι αξονικές μετακινήσεις και παραβιάζεται η εγκάρσια ισορροπία. Τα διανύσματα βάσης του χώρου L προκύπτουν με επιβολή μοναδιαίας μετακίνησης $w$ και στροφής $\theta$ στους βοηθητικούς και στους εσωτερικούς κύριους κόμβους και με επιβολή στροφής $\theta$ στους κύριους εσωτερικούς κόμβους. (Σχήμα 4.9)	$2n_s + 2n_{m-e} + n_{m-i}$
O	Περιλαμβάνει εκείνες τις ιδιομορφές που εμφανίζουν είτε εγκάρσια μήκυνση ή βράχυνση ( $\epsilon_x \neq 0$ ) ή εντός επιπέδου διάτμηση (η οποία προκαλεί μη γραμμικότητα κατά $x$ των αξονικών μετακινήσεων μεταξύ των κυρίων κόμβων). (Σχήμα 4.10)	$2(n_m + n_s - 1)$



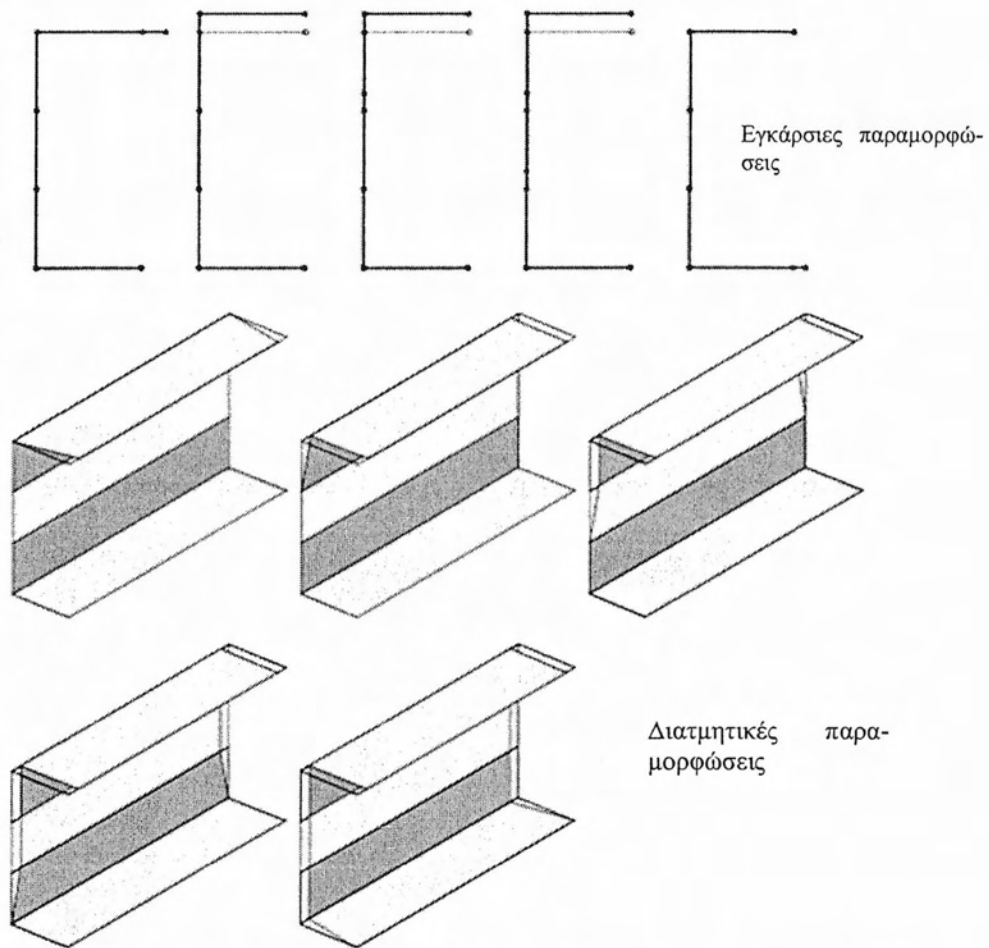
Πίνακας 4.2 Ορισμοί των βάσεων και των διαστάσεων των υποχώρων  $G_D, G, D, L$  και  $O$ .



Σχήμα 4.8 Απεικόνιση των αξονικών και των εγκάρσιων μετακινήσεων των μητρών  $R_G$  και  $R_D$ .



Σχήμα 4.9 Διανύσματα βάσης τοπικού λυγισμού.



Σχήμα 4.10 Διανύσματα βάσης ιδιομορφών με εγκάρσιες και διατμητικές μεμβρανικές παραμορφώσεις.

Δεν θα γίνει στην παρούσα εργασία περαιτέρω ανάλυση των μαθηματικών σχέσεων που διέπουν τη μόρφωση καθενός από τα μητρώα, για περισσότερες πληροφορίες μπορεί κάποιος να ανατρέξει εδώ (Adany, 2004) και εδώ (Sándor Ádány, B.W. Schafer, 2008).

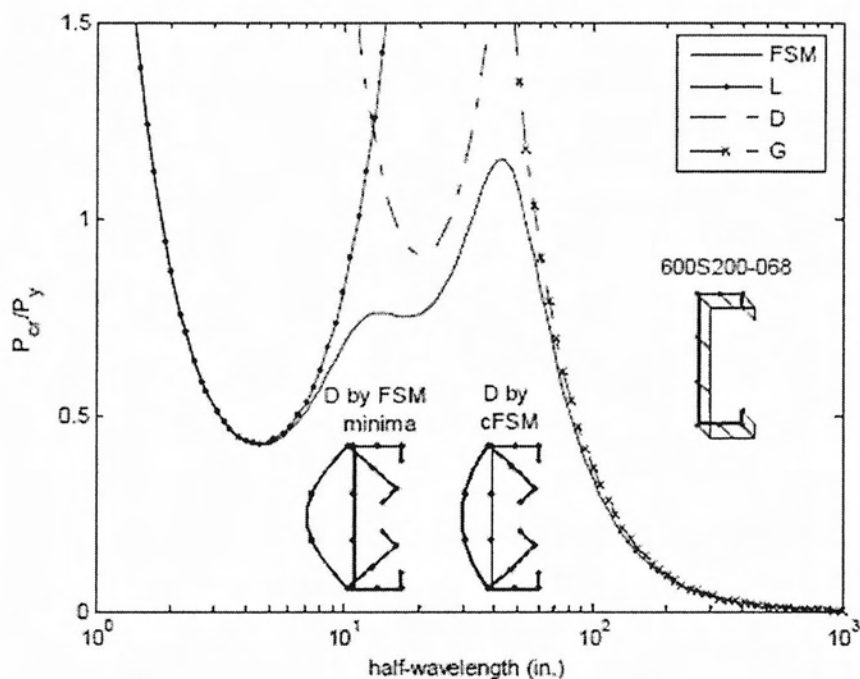
Καταλήγοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών της (ΠΜΠΛ) ενσωματώνοντας τη σχέση (27) στη σχέση (23) παίρνει τη μορφή:

$$R_M^T K_e R_M \Phi_M = \Lambda_M R_M^T K_g R_M \Phi_M \quad (28)$$

$$K_{e,M} \Phi_M = \Lambda_M K_{g,M} \Phi_M \quad (29)$$

Όπου  $K_{e,M}$ ,  $K_{g,M}$  τα μητρώα ελαστικής και γεωμετρικής στιβαρότητας,  $\Lambda_M$  ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών της δεδομένης μορφής  $M$ ,  $\Phi_M$  ο πίνακας με στήλες τις ιδιομορφές λυγισμού της  $M$  μορφής.

Στο Σχήμα 4.11 συγκρίνεται η χαρακτηριστική καμπύλη με τις καμπύλες του καθολικού, του λυγισμού με στρέβλωση και του τοπικού λυγισμού όπως προέκυψαν από ανάλυση με τη μέθοδο της (ΠΜΠΛ) για υποστύλωμα υπό ομοιόμορφη θλίψη.



Σχήμα 4.11 Συγκριτική απεικόνιση της χαρακτηριστικής καμπύλης με τα αποτελέσματα της (ΠΜΠΑ) για υποστώμα υπό ομοιόμορφη θλίψη.

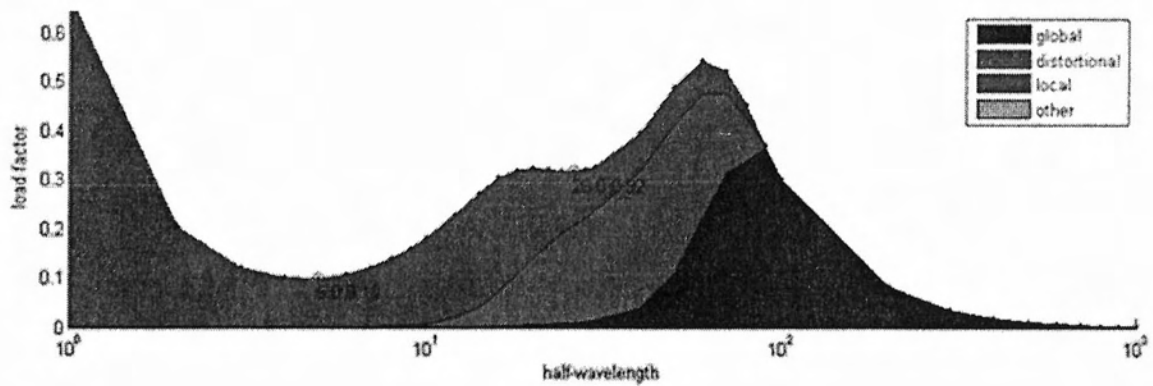
#### Αναγνώριση των ιδιομορφών λυγισμού (Modal Identification)

Όπως έχει τονιστεί η συμβατική μέθοδος πεπερασμένων λωρίδων δεν μπορεί να «απομονώσει» τις διαφορετικές μορφές λυγισμού. Είναι λοιπόν σημαντικό να γίνει αντιληπτό, πως οι διάφορες μορφές λυγισμού συνεισφέρουν στο αποτέλεσμα μιας ανάλυσης (ΜΠΑ). Οποιαδήποτε ιδιομορφή  $\Phi$  μπορεί μέσω του μητρώου  $\mathbf{R}$  να μετασχηματιστεί στη βάση που ορίζουν οι κατηγορίες λυγισμού, μέσω της σχέσης:

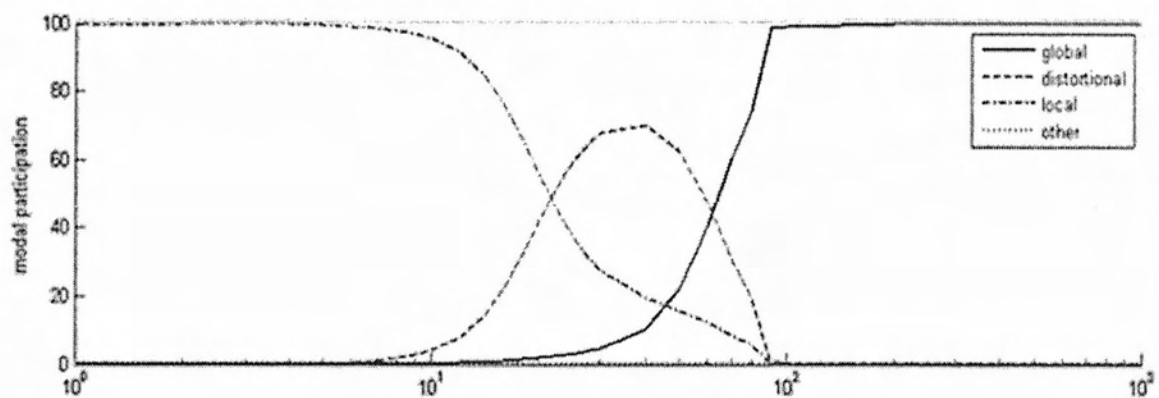
$$\phi_r = \mathbf{R}^{-1}\phi \quad (30)$$

Όπου οι συντελεστές του  $\Phi_r$  δίνουν τη συνεισφορά σε μια δεδομένη στήλη του  $\mathbf{R}$ , ή αθροιζόμενοι καθ' ύψος μιας στήλης του  $\mathbf{R}$  δίνουν τη συνεισφορά μιας κατηγορίας λυγισμού. Ωστόσο οι συντελεστές του μητρώου  $\Phi_r$  εξαρτώνται από την κανονικοποίηση των στηλών του  $\mathbf{R}$ .

Το πρόγραμμα CUFEM 4 δίνει τη δυνατότητα να υπολογιστεί η συνεισφορά κάθε κατηγορίας λυγισμού ( G,D,L και O) σε οποιαδήποτε ιδιομορφή της χαρακτηριστικής καμπύλης. (Περισσότερα για τη μεθοδολογία αυτής της διαδικασίας μπορεί κανείς να βρει εδώ (Li, Z., Hanna, M.T. , Adany, S. , Schafer, B.W., 2011)). Στο Σχήμα 5.12 μπορεί κανείς να διακρίνει ένα παράδειγμα αυτής της ανάλυσης του προγράμματος CUFEM 4 για μια τυχαία διατομή.



(α)



(β)

Σχήμα 5.12 Διαγράμματα συμμετοχής των διαφόρων κατηγοριών λυγισμού σε κάθε ιδιομορφή της χαρακτηριστικής καμπύλης.

### 4.3 Σύνοψη

Η βασική ιδέα της (ΜΠΛ) είναι η χρήση όμοιων με τα πεπερασμένα στοιχεία, συναρτήσεων σχήματος και διακριτοποίησης στην εγκάρσια διεύθυνση, ενώ δεν πραγματοποιείται διακριτοποίηση του φορέα στην αξονική διεύθυνση. Αντ' αυτού χρησιμοποιείται μια συνάρτηση σχήματος που να περιγράφει την κατανομή των αξονικών μετακινήσεων σε όλο το μήκος του φορέα.

#### a) Πλεονεκτήματα της μεθόδου πεπερασμένων λωρίδων

- Η (ΜΠΛ) απαιτεί πολύ μικρότερο αριθμό βαθμών ελευθερίας από τη (ΜΠΣ), άρα είναι πιο αποτελεσματική υπολογιστικά.
- Υπάρχουν αρκετά διαθέσιμα λογιστικά στην αγορά (όπως CUFSM, Thin-Wall), τα οποία είναι κατασκευασμένα αποκλειστικά για λεπτότοιχες διατομές και επομένως πιο εύκολα στη χρήση.
- Το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου είναι παρόμοιο με αυτό της (ΜΠΣ), επομένως ένας χρήστης εξοικειωμένος με τη (ΜΠΣ) μπορεί να κατανοήσει και τη (ΜΠΛ).

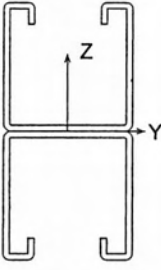
- Η (ΠΜΠΣ) δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού των καθαρών ιδιομορφών λυγισμού του φορέα και των κρίσιμων φορτίων τους, όπως επίσης μπορεί να υπολογίσει τη συνεισφορά κάθε κατηγορίας λυγισμού σε οποιαδήποτε υπολογισμένη ιδιομορφή.
  - b) Μειονεκτήματα της μεθόδου πεπερασμένων λωρίδων
- Η (ΜΠΛ) είναι λιγότερο γενική από αυτή της (ΜΠΣ). Η εφαρμογή της έχει περιορισμούς (όπως για παράδειγμα τις συνοριακές συνθήκες ενώ η (ΜΠΣ) μπορεί να προσομοιώσει σχεδόν οποιαδήποτε συνοριακή συνθήκη τις πραγματικότητας).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5°

### Μελέτη λυγισμικής συμπεριφοράς χαλύβδινων μελών ψυχρής έλασης από συγκολλητή λεπτότοιχη διατομή διπλού U

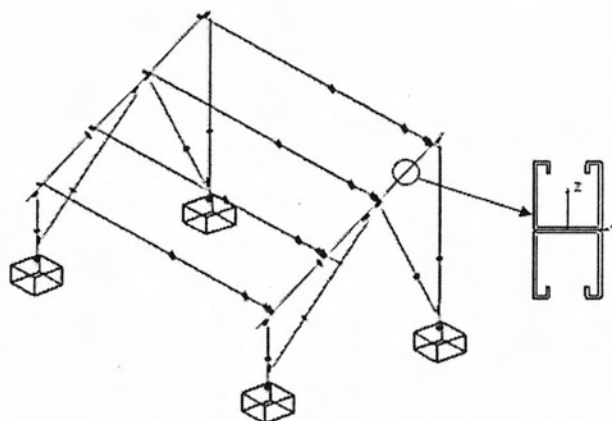
#### Εισαγωγή 5.1

Η διατομή K6 ανήκει στην κατηγορία των μη συμβατικών, συγκολλητών, λεπτότοιχων διατομών, ψυχρής διαμόρφωσης. Ο τρόπος κατασκευής της είναι με αναδίπλωση και συμπίεση, με πρέσα στράντζας. Συγκεκριμένα, η διατομή K6 αποτελείται από δύο συγκολλητά U (channel or C sections with complex edge stiffeners) πάχους 2 mm και μητρικού υλικού με ονομαστική τάση διαρροής  $f_y = 355$  MPa, ενώ πραγματική ίση με  $f_y = 405$  MPa (Πίνακας 5.1).

K6		Πλάτος $b = 41.30$ mm	$A = 5.7052$ cm <sup>4</sup>
		Ύψος $h = 82.60$ mm	$I_{y-y} = 33.375$ cm <sup>4</sup>
		Πάχος τοιχωμάτων $t = 2$ mm	$I_{z-z} = 16.03$ cm <sup>4</sup>
		Ονομαστική τάση διαρροής $f_y = 355$ MPa, Πραγματική τάση διαρροής $f_y = 405$ MPa	$J_t = 0.1383$ cm <sup>4</sup>
			$J_w = 171.86$ cm <sup>6</sup>

Πίνακας 5.1 Χαρακτηριστικά της διατομής K6 (υπολογισμοί FAGUS).

Οι συγκεκριμένες διατομές αναπτύχθηκαν από την εταιρία EXEL MAKMETAL για τη δημιουργία ηλιοστάτη με σταθερή βάση για φωτοβολταϊκά στοιχεία. Το στατικό σύστημα του ηλιοστάτη αποτελείται από 4 πλαίσια των οποίων οι δοκοί διατομής K6, αποτελούν τους κύριους φορείς μεταφοράς φορτίων (Σχήμα 5.1).



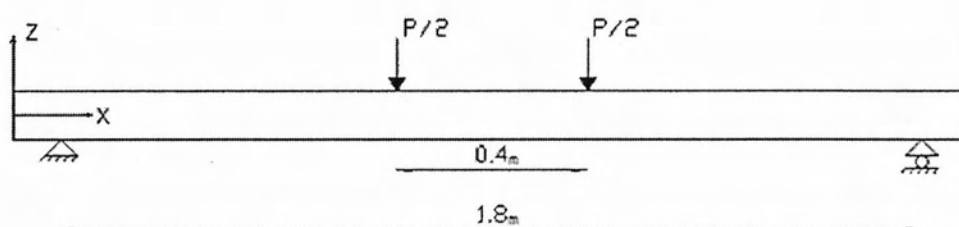
Σχήμα 5.1 Το ραβδοστατικό χωρικό μοντέλο του ηλιοστάτη.

Η διαστασιολόγηση των μεταλλικών φερόντων στοιχείων του ηλιοστάτη βασίστηκε στην εφαρμογή του Ευρωκώδικα 3 (EN 1993-1-1, 2005), αρμόδιου για θέματα σχεδιασμού μεταλλικών κατασκευών. Η χρησιμοποίηση διατομών που μπορεί να καταταγούν στην κατηγορία των λεπτότοιχων διατομών ψυχρής διαμόρφωσης λόγω των γεωμετρικών χαρακτηριστικών τους και του τρόπου κατασκευής τους (αναδίπλωση και συμπίεση) οδήγησε και στην εφαρμογή του (EN 1993-1-3, 2006) που σχετίζεται με τον σχεδιασμό λεπτότοιχων μεταλλικών κατασκευών ψυχρής διαμόρφωσης. Σε περιπτώσεις μη συμβατικών διατομών, όπως η K6, το κεφάλαιο 9 του (EN 1993-1-3, 2006) επιτρέπει οι χρησιμοποιούμενες αντοχές να προκύπτουν δια μέσου πειραματικής διαδικασίας (design assisted by testing). Για το σκοπό αυτό εκτελέστηκαν μια σειρά από πειράματα για κάμψη περί τον ισχυρό άξονα (y-y).

Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν από το εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών και Μηχανολογικού Σχεδιασμού του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Α.Π.Θ. υπό την επίβλεψη των κυρίων καθηγητών Α. Μιχαηλίδη και Ε. Μυστακίδη. Μέρος της μελέτης δημοσιεύθηκε στο (Ε. Μυστακίδης, Α. Μιχαηλίδης, Κ. Τζάρος, Δ. Παντούσα, Μ. Μαλικουτσάκης, 2011).

## 5.2 Πειραματική διαδικασία

Η πειραματική διαδικασία που ακολουθήθηκε για τον προσδιορισμό της καμπτικής αντοχής των διατομών K6, είναι πλήρως εναρμονισμένη με τις διατάξεις του παραρτήματος Α του (EN 1993-1-3, 2006). Εκτελέστηκαν 4 πειράματα κάμψης 4-σημείων, σε δοκίμια συνολικού μήκους 2.00 m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2 Η πειραματική διάταξη για τον προσδιορισμό της καμπτικής αντοχής της K6.

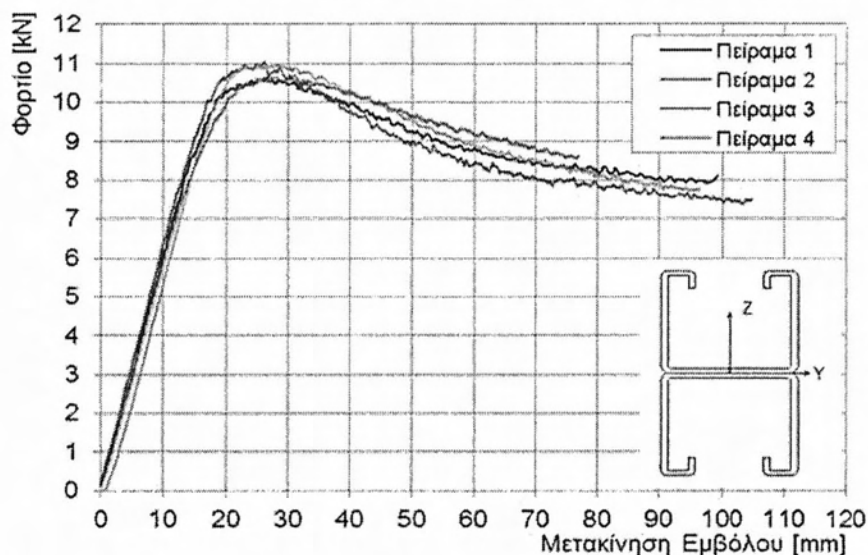
Τα πειράματα εκτελούνται σε αμφιέριστες δοκούς, καθαρού ανοίγματος μεταξύ των στηρίξεων 1.80 m. Φορτίζονται με επιβαλλόμενη μετακίνηση σε 2 σημεία, σε απόσταση 0.70 m το καθένα από τις στηρίξεις.

Στα συγκεκριμένα πειράματα μετρήθηκαν πειραματικά:

- Η μετακίνηση του εμβόλου σε (mm)
- Η αντίδραση (KN) της δοκού στην μετακίνηση του εμβόλου



Τα αποτελέσματα των πειραμάτων εμφανίζονται στο Σχήμα 5.3 που ακολουθεί.



Σχήμα 5.3 Πειραματικά αποτελέσματα μετακίνησης εμβόλου –δύναμης.

Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα, σε όλα τα πειράματα που διενεργήθηκαν παρατηρήθηκε η ίδια περίπου συμπεριφορά, που χαρακτηρίζεται από μια μορφή α-στοχίας, με σταδιακή διαρροή (gradual-yielding) και στρογγυλεμένο «γόνατο» (rounded knee). Τα παραπάνω χαρακτηριστικά είναι αναμενόμενα για χαλύβδινες διατομές ψυχρής έλασης, όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 1. Στον Πίνακα 5.2 που ακολουθεί, αναγράφονται οι πειραματικές τιμές του οριακού φορτίου και της οριακής ροπής αντοχής δοκών διατομής K6 και για τα 4 πειράματα.

Πειραματικά δοκίμια	Μέγιστο φορτίο $P_{ult}$ (KN)	Μέγιστη καμπτική Ροπή $M_{ult}$ (KNm)
1	10.635	3.722
2	10.652	3.728
3	11.044	3.865
4	10.994	3.848

Πίνακας 5.2 Πειραματικές τιμές οριακού φορτίου και οριακής ροπής αντοχής δοκών διατομής K6.

### 5.3 Προσδιορισμός καμπτικής αντοχής σχεδιασμού

Για τον προσδιορισμό της καμπτικής αντοχής σχεδιασμού της διατομής Κ6 χρησιμοποιείται η διαδικασία υπολογισμού που προτείνεται από το παράρτημα του Ευρωκώδικα 3 (Appendix : Design assisting by testing) και η οποία περιγράφηκε αναλυτικά στην παράγραφο 1.3 του Κεφαλαίου 1. Για την διατομή Κ6 όπου η ονομαστική τάση διαρροής του υλικού είναι  $f_y = 355 \text{ Mpa}$  ενώ η πραγματική είναι ίση με  $f_y = 405 \text{ Mpa}$  ο προσαρμοστικός συντελεστής  $\mu_R$  δύναται να υπολογιστεί άμεσα από τη σχέση (2) της παραγράφου 1.3:

$$\mu_R = \left( \frac{f_{yb,obs}}{f_{yb}} \right)^a \left( \frac{t_{obs,cor}}{t_{cor}} \right)^b = \left( \frac{355}{300} \right)^1 \left( \frac{1.8}{1.8} \right)^1 = 1.183$$

Στη συνέχεια εφαρμόζεται η ανωτέρω διαδικασία υπολογισμού με την οποία προκύπτει ο πίνακας 5.3 με βάση τον οποίο υπολογίζεται η καμπτική αντοχή σχεδιασμού.

Πειραματικά δοκίμια	Μέγιστο φορτίο $P_{ult}$ (kN)	Μέγιστη καμπτική ροπή $M_{ult}$ (kNm)	$R_{obs,i}$ (σε όρους ροπής)	$R_{adj,i}$ (σε όρους ροπής)	$R_m$ Μέση τιμή των $R_{adj,i}$	s τυπική απόκλιση	$R_k$ Χαρακτηριστική τιμή ροπής αντοχής	$R_d$ Ροπή αντοχής σχεδιασμού
1	10.635	3.722	3.722	3.685	3.753	0.075508	4.20	4.20
2	10.652	3.728	3.728	3.691				
3	11.044	3.865	3.865	3.827				
4	10.994	3.848	3.848	3.810				

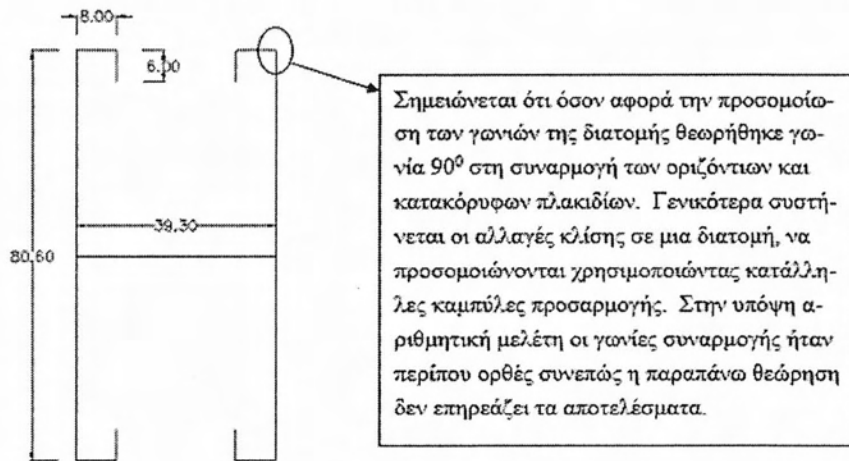
Πίνακας 5.3 Αντοχή σχεδιασμού για την κάμψη της διπλά συμμετρικής διατομής Κ6.

### 5.4 Αριθμητική προσομοίωση πειραμάτων

Όπως έχει αναφερθεί και στο κεφάλαιο 3, η συνιστώμενη πρακτική για την προσομοίωση κατασκευών από λεπτότοιχες χαλύβδινες διατομές ψυχρής έλασης, είναι με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων κελύφους. Μέσω αυτής δίνεται η δυνατότητα διαχείρισης με επιτυχία του μη-γραμμικού προβλήματος (μη-γραμμικότητα υλικού και γεωμετρίας). Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων επηρεάζεται από μια σειρά παραγόντων όπως η γεωμετρία της διατομής, το πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων, η επιλογή του κατάλληλου στοιχείου, τις συνοριακές συνθήκες, τα κριτήρια διαρροής, τις γεωμετρικές ατέλειες, τις παραμένουσες τάσεις, καθώς και τις μεθόδους επίλυσης. Στη συνέχεια της παραγράφου πραγματοποιείται αριθμητική προσομοίωση των πειραμάτων κάμψης με στόχο την ακριβή ανάδειξη των φαινομένων που αναπτύσσονται κατά την κάμψη και την αιτιολόγηση των μορφών αστοχίας λαμβάνοντας υπόψη όλους τους προαναφερθέντες παράγοντες.

### 5.4.1 Γεωμετρία της διατομής

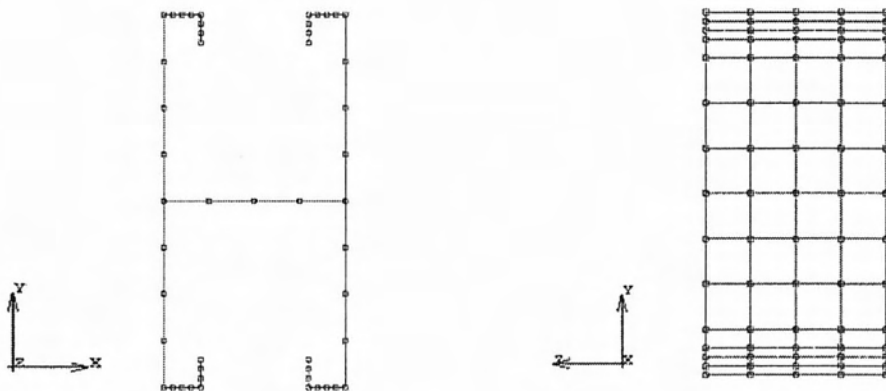
Η γεωμετρία της διατομής μοντελοποιήθηκε στο σχεδιαστικό πρόγραμμα AutoCad 2013 χρησιμοποιώντας τις διαστάσεις της μέσης γραμμής της διατομής K6 όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.4. Για την προσομοίωση της συγκόλλησης, έγινε η θεώρηση (παραδοχή) ότι οι δύο διατομές συνδέονται μονολιθικά μεταξύ τους. Γι' αυτό το λόγο στην κοινή τους πλευρά θεωρήθηκε διπλάσιο πάχος  $t=4$  mm ενώ το πάχος των υπόλοιπων στοιχείων της διατομής είναι 2 mm.



Σχήμα 5.4 Γεωμετρία διατομής K6 (mm).

### 5.4.2 Πλέγμα Πεπερασμένων Στοιχείων

Χρησιμοποιήθηκε ένα αρκετά πυκνό δίκτυο όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.5 που στη σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα έδειξε ότι ανταποκρίνεται με επάρκεια. Στην παρούσα ανάλυση δεν πραγματοποιήθηκε κάποια ανάλυση ευαισθησίας των αποτελεσμάτων για πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας (mesh sensitivity).



Σχήμα 5.5 Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων του αριθμητικού μοντέλου.

### 5.4.3 Τύπος στοιχείου

Επιλέχθηκε το στοιχείο κελύφους 75 από τη βιβλιοθήκη του προγράμματος MSC MARC. Το στοιχείο Type 75 (thick shell) είναι ένα διγραμμικό, τετρακομβικό στοιχείο κελύφους που λαμβάνει υπόψη φαινόμενα εγκάρσιας διάτμησης και είναι κατάλληλο για εντόνως μη γεωμετρικά ελαστοπλαστικά προβλήματα. Δεν πραγματοποιήθηκε κάποια ανάλυση ευαισθησίας των αποτελεσμάτων για διαφορετικούς τύπους στοιχείων (element sensitivity).

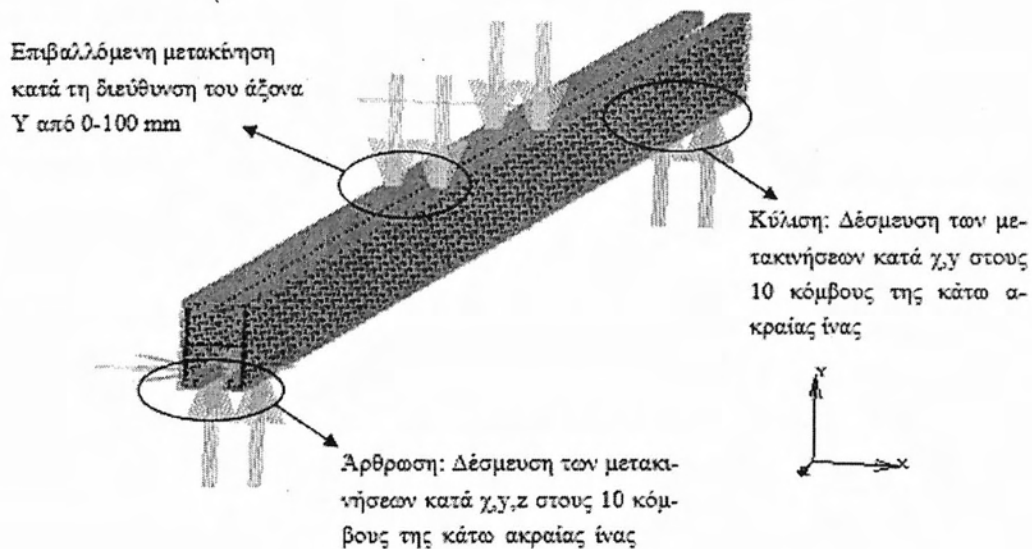
### 5.4.4 Ιδιότητες του υλικού

Μέτρο Ελαστικότητας	$E = 210000 \text{ MPa}$
Λόγος του Poisson	$\nu = 0.3$
Κριτήριο Διαρροής (Yield criterion)	Von Mises
Νόμος κράτνσης (Hardening Rule)	Isotropic
Νόμος υλικού	Τέλειος πλαστικός
Τάση διαρροής	$f_y = 405 \text{ MPa}$

Πίνακας 5.4 Ιδιότητες μητρικού υλικού της διατομής Κ6.

### 5.4.5 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόστηκαν είναι όμοιες με αυτές που εφαρμόστηκαν στην πειραματική διαδικασία. Στο Σχήμα 5.6 παρουσιάζονται οι συνοριακές συνθήκες στήριξης και φόρτισης.



Σχήμα 5.6 Μοντελοποίηση των συνοριακών συνθηκών των πειραμάτων.

#### 5.4.6 Παραμένουσες τάσεις και παραμορφώσεις

Δεν λήφθηκαν υπόψη στην ανάλυση, τυχόν παραμένουσες τάσεις και παραμορφώσεις που ενδέχεται να αναπτύχθηκαν:

- 1) κατά την κατασκευαστική διαδικασία (coiling, uncoiling, cold bending)
- 2) κατά τη συγκόλληση των δύο μερών (U) της διατομής.

#### 5.4.7 Γεωμετρικές ατέλειες

Ο σκοπός της εισαγωγής γεωμετρικών ατελειών στο αριθμητικό προσομοίωμα είναι αφενός η ύπαρξη τους λόγω του τρόπου κατασκευής αυτού του είδους των κατασκευών και αφετέρου η ενεργοποίηση φαινομένων αστάθειας στην αριθμητική προσομοίωση που παρατηρήθηκαν στην πειραματική διαδικασία. Επιπλέον δίνεται με αυτό τον τρόπο η δυνατότητα αξιολόγησης της ευαισθησίας του γεωμετρικά ατελούς φορέα για διάφορα μεγέθη γεωμετρικών ατελειών (imperfection sensitivity). Η προσέγγιση που ακολουθήθηκε είναι η ακόλουθη: Ως σχήμα της γεωμετρικής ατέλειας επιλέχθηκε η μικρότερη (θετική) ιδιομορφή λυγισμού που αντικατοπτρίζει την τελική μορφή αστοχίας της δοκού (Σχήμα 5.7), ενώ δοκιμάστηκαν διάφορα μέγιστα εύρη (max amplitudes).



Σχήμα 5.7 Μορφή γεωμετρικής ατέλειας λυγισμού.

#### 5.4.8 Μέθοδος επίλυσης (Solution scheme)

Τύπος Ανάλυσης	Μη γραμμική στατική ανάλυση μεγάλων μετακινήσεων και παραμορφώσεων.
Μέθοδος επίλυσης	Full Newton-Raphson
Μέθοδος εύρεσης ιδιομορφών και ιδιοτιμών λυγισμού	Lanczos

Πίνακας 5.5 Μέθοδος επίλυσης της αριθμητικής προσομοίωσης των πειραμάτων της K6.

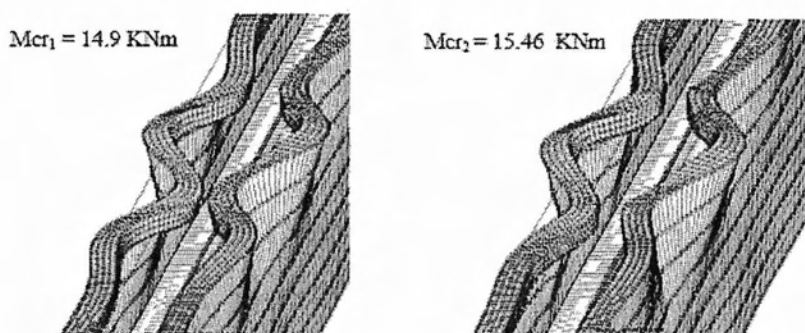
#### 5.5 Αριθμητικά αποτελέσματα - Σύγκριση με πειραματικά

Στην παρούσα παράγραφο παρατίθενται τα τελικά αριθμητικά αποτελέσματα, από τα οποία εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα για την κατανόηση της καμπτικής απόκρισης των δοκών με διατομή (K6) που εξετάστηκαν πειραματικά. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η ιδιομορφική ανάλυση για το στατικό σύστημα του πειράματος (Σχήμα 5.2), παρατίθεται μία μη γραμμική ελαστοπλαστική ανάλυση του γεωμετρικά

τέλειου φορέα (perfect model) και μία σειρά μη γραμμικών ελαστοπλαστικών αναλύσεων του γεωμετρικά ατελούς φορέα(imperfect models) με διαφορετικά μεγέθη ατελειών (5,10 mm και 5.5 mm ). Κάθε ένα από τα προαναφερθέντα μοντέλα συγκρίνεται με τα αντίστοιχα πειραματικά.

### 5.5.1 Ιδιομορφική ανάλυση της πειραματικής διάταξης

Το στατικό σύστημα του Σχήμα 5.2 όπως προσδιορίζεται από το Παράρτημα Α του (EN 1993-1-3, 2006) στοχεύει στον προσδιορισμό της καμπτικής αντοχής και της στροφικής ικανότητας της διατομής, εξασφαλίζοντας ότι δεν θα προηγηθεί κάποια καθολική αστάθεια του μέλους. Σε διατάξεις όπως η παραπάνω (short beams), η αστοχία οφείλεται σε διαρροή ή τοπικό λυγισμό και η καμπτική αντοχή της δοκού είναι ανεξάρτητη των συνθηκών στήριξης και φόρτισης. Οι διατομές τύπου (Κ6) λόγω της διαμόρφωσης τους, με την ύπαρξη ακραίων ενισχύσεων και συγκεκριμένα διπλής αναδιπλώσεως (διπλό στραντζάρισμα) δεν κινδυνεύουν γενικά από εμφάνιση τοπικού λυγισμού. Βέβαια η παραπάνω διαμόρφωση μειώνει μεν τον κίνδυνο εμφάνισης τοπικού λυγισμού αυξάνει όμως τον κίνδυνο εμφάνισης λυγισμού με στρέβλωση της διατομής (distortional buckling), διότι κάθε ενίσχυση προσθέτει έναν ενδιάμεσο κόμβο ο οποίος μπορεί να μετατοπισθεί. Στο Σχήμα 5.8 παρουσιάζονται οι δύο μικρότερες θετικές ιδιοτιμές με τις ιδιομορφές τους. Οι ιδιομορφές του σχήματος ανήκουν στην κατηγορία του λυγισμού με στρέβλωση της διατομής καθώς διαθέτουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα αυτής της κατηγορίας: Τα τοιχώματα της διατομής υφίστανται στρέβλωση, λόγω μετατοπίσεων των εσωτερικών ακμών και οι ιδιομορφές τους εμφανίζουν μεσαία μήκη κύματος (half-wavelengths).

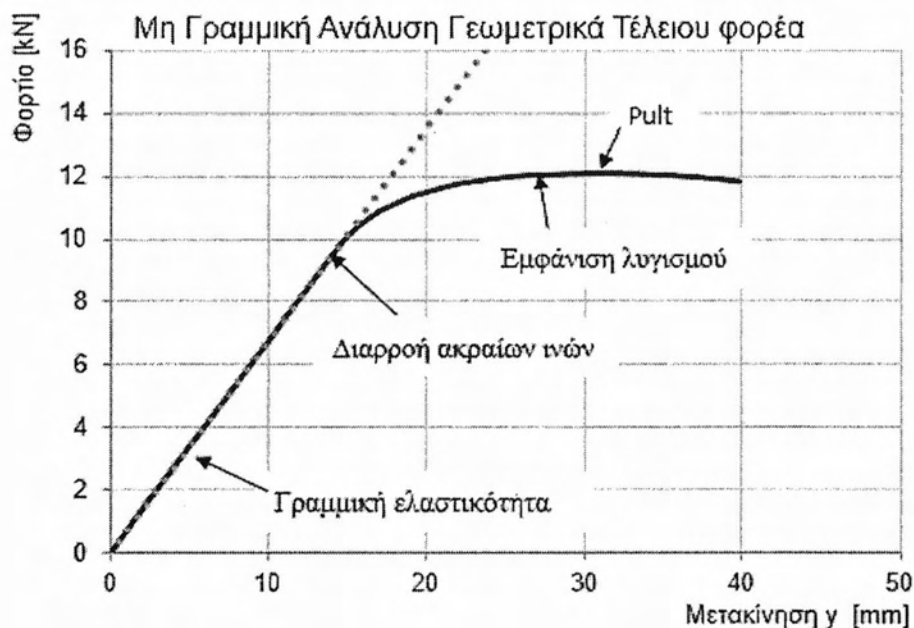


Σχήμα 5.8 Αποτελέσματα ιδιομορφικής ανάλυσης για το στατικό σύστημα της πειραματικής διάταξης.

### 5.5.2 Μη γραμμική ανάλυση Γεωμετρικά τέλειου φορέα

Στο Σχήμα 5.9 παρουσιάζεται η καμπύλη απόκρισης του αριθμητικού μοντέλου της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) χωρίς γεωμετρικές ατέλειες. Με τη χρήση βελών επί του Σχήμα 5.9 υποδεικνύεται κάθε στάδιο της μη γραμμικής

ανάλυσης του γεωμετρικά τέλειου φορέα. Στη συνέχεια θα γίνει πιο αναλυτική περιγραφή των διαφόρων σταδίων της ανάλυσης.



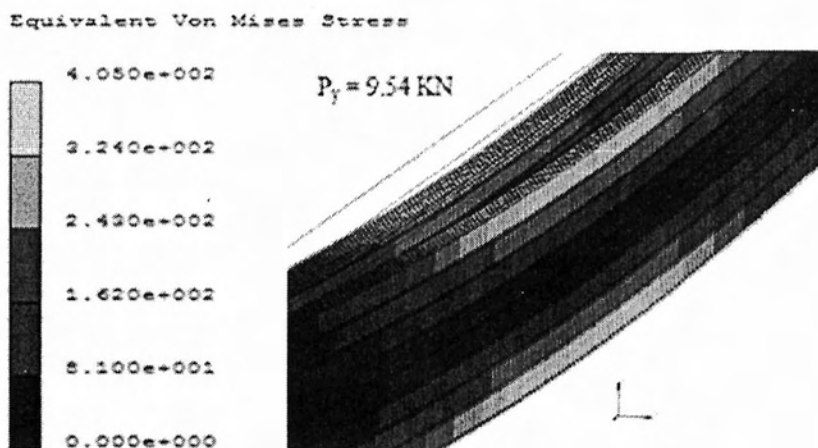
Σχήμα 5.9 Διάγραμμα φορτίου – μετακίνησης για γεωμετρικά τέλειο αριθμητικό προσομοίωμα.

Για την διατομή K6 έχουν υπολογιστεί με το πρόγραμμα ανάλυσης διατομών FAGUS, το φορτίο και η ροπή διαρροής της ακρότατης ίνας καθώς και το φορτίο και η ροπή πλήρους πλαστικοποίησης (Πίνακας 5.6). Οι ανωτέρω υπολογισμοί δεν λαμβάνουν υπόψη φαινόμενα λυγισμού σε αντίθεση με το αριθμητικό προσομοίωμα της (ΜΠΣ).

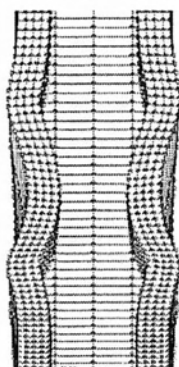
	$M_y$	$P_y$	$M_u$	$P_u$
Fagus	3.4 KNm	9.71 KNm	4.41 KNm	12.6 KNm

Πίνακας 5.6 Υπολογισμοί (FAGUS) των μεγεθών διαρροής και αστοχίας της K6.

Από τη σύγκριση των τιμών της ιδιομορφικής ανάλυσης του Σχήμα 5.8 και των τιμών του Πίνακας 5., παρατηρείται ότι το φορτίο (ή ροπή) διαρροής της ακρότατης ίνας είναι αρκετά μικρότερο από την πρώτη θετική ιδιοτιμή. Γίνεται αντιληπτό ότι για το στατικό σύστημα της πειραματικής διάταξης η διαρροή της ακραίας ίνας των διατομών μορφής K6 θα προηγηθεί της εμφάνισης λυγισμού του άνω πέλματος. Η παραπάνω εκτίμηση επαληθεύεται από το αριθμητικό προσομοίωμα της (ΜΠΣ), όπου για  $P_y = 9.54$  KN ( $P_y = 9.71$  KN από FAGUS, διαφορά 1.65 %) διαρρέουν οι ακραίες ενισχύσεις της διατομής, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.10.



Σχήμα 5.10 Παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα τη στιγμή διαρροής των ακραίων ιών της διατομής.



Το μέγιστο φορτίο καμπτικής αντοχής, όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 5.9, του αριθμητικού προσομοιώματος της (ΜΠΣ) είναι  $P_{ult} = 12.1167 \text{ KN}$  μικρότερο από το αντίστοιχο του FAGUS που είναι  $P_{ult} = 12.6 \text{ KN}$ . Από το Σχήμα 5.11 γίνεται φανερό ότι προηγήθηκε της πλήρους πλαστικοποίησης της διατομής εμφάνιση ανελαστικού λυγισμού, καθώς η τελική παραμορφωσιακή κατάσταση του φορέα έχει το σχήμα της πρώτης ιδιομορφής (Σχήμα 5.8). Ως εκ τούτου η αστοχία επέρχεται ως αποτέλεσμα ελαστοπλαστικού λυγισμού.

Σχήμα 5.11 Τελική παραμορφωσιακή κατάσταση της μη γραμμικής ανάλυσης του γεωμετρικά τέλει φορέα

Λόγω του ότι προηγείται η διαρροή τμημάτων της διατομής της εμφάνισης του λυγισμού, δεν παρατηρούνται απότομες αλλαγές στις παραμορφώσεις. Άρα, δεν είναι εύκολο να βρεθεί σε ποιο βήμα της μη γραμμικής ανάλυσης εμφανίζεται λυγισμός. Για φορτίο περίπου  $12 \text{ KN}$  και μετακίνηση  $26.5 \text{ mm}$  γίνεται διακριτή η μορφή του. (Σχήμα 5.11)

Στον Πίνακα 5.7 παρατίθενται συγκεντρωτικά οι τιμές του μεγίστου φορτίου και της μέγιστης ροπής, όπως αυτές υπολογίζονται από το πρόγραμμα Fagus είτε από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων (MSC Marc 2011) για μοντέλο χωρίς γεωμετρικές ατέλειες αλλά και από τις πειραματικές διαδικασίες.

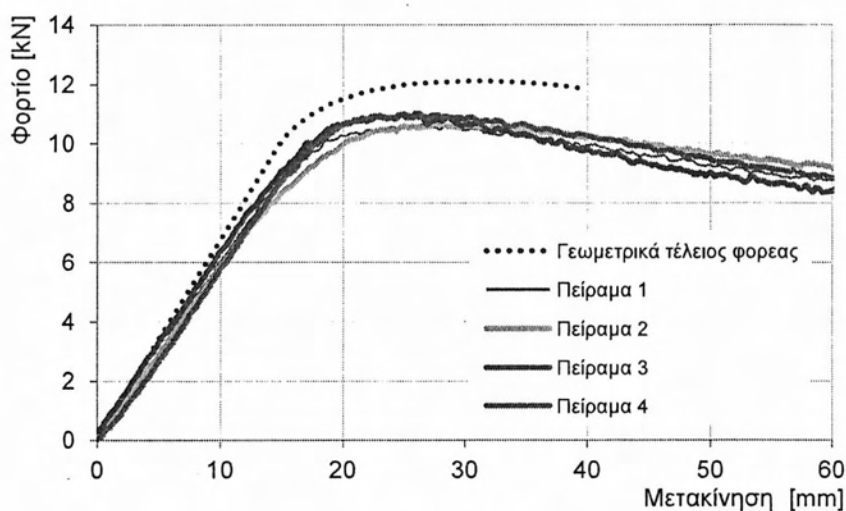
	FAGUS	FEM (χωρίς ατέλειες)	Πειράματα (μ.ο.)
$P_u \text{ (KN)}$	12.6	12.117	10.654
$M_u \text{ (KNm)}$	4.41	4.241	3.729

Πίνακας 5.7 Συγκριτικός πίνακας φορτίου και ροπής αστοχίας της K6

Στο Σχήμα 5.12 συγκρίνονται: η καμπύλη απόκρισης του αριθμητικού προσομοιώματος χωρίς γεωμετρικές ατέλειες με τις καμπύλες απόκρισης των πειραμάτων. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει, το αριθμητικό μοντέλο χωρίς αρχικές ατέλειες



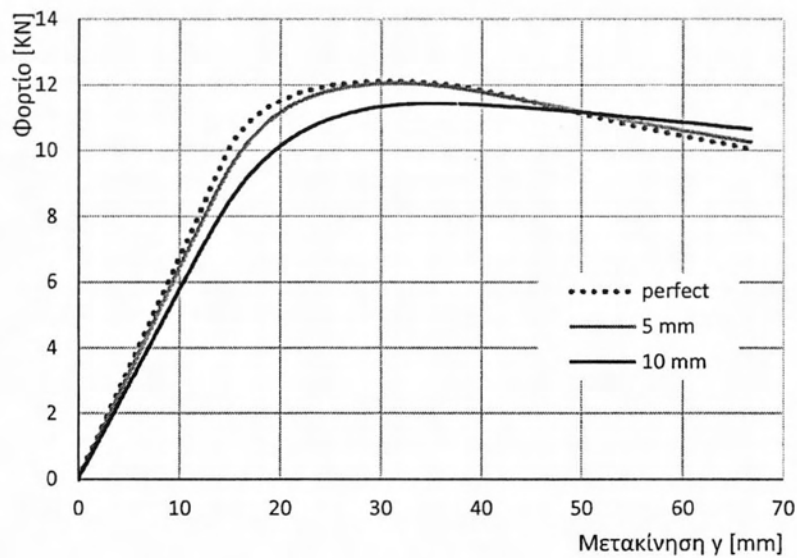
παρουσιάζει μεγαλύτερη δυσκαμψία και φέρουσα ικανότητα σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι διαφορές αυτές σε μεγάλο βαθμό οφείλονται στο ότι η προσομοίωση αυτής της ενότητας αποτελεί εξιδανίκευση της πραγματικότητας, διότι η ύπαρξη γεωμετρικά τέλει φορέα είναι ανέφικτη στην πράξη. Στην επόμενη ενότητα θα διερευνηθεί η επιρροή των γεωμετρικών ατελειών επί της συμπεριφοράς των καμπτόμενων δοκών μορφής Κ6.



Σχήμα 5.12 Συγκριτικό διάγραμμα καμπύλης απόκρισης πειραμάτων - γεωμετρικά τέλει φορέα.

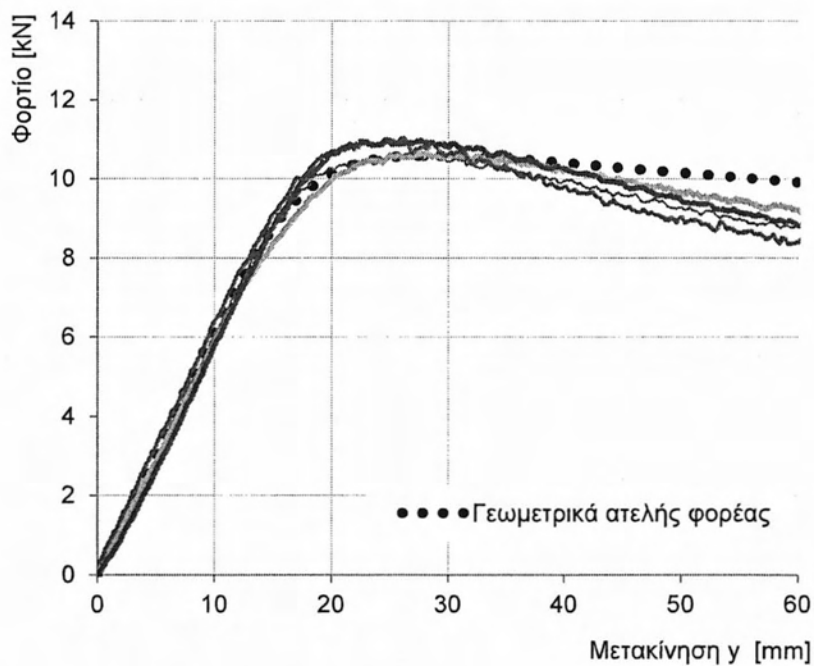
### 5.5.3 Μη Γραμμική Ανάλυση Γεωμετρικά Ατελούς φορέα

Προκειμένου να προσεγγισθεί επαρκώς η πραγματική καμπτική συμπεριφορά των δοκών που εξετάστηκαν, εισήχθησαν στο μοντέλο γεωμετρικές ατέλειες με στόχο την όσο το δυνατόν πιο πιστή αναπαράσταση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα κατά την κάμψη. Η μορφή των ατελειών που εισήχθηκε αντικατοπτρίζει την τελική παραμορφωμένη κατάσταση του μέλους (Σχήμα 5.7), ενώ όσον αφορά το εύρος τους δοκιμάστηκαν διάφορα μεγέθη. Στο Σχήμα 5.13 εμφανίζονται ενδεικτικά δύο από αυτά (5,10 mm). Όπως αναμενόταν η αύξηση του μεγέθους της αρχικής γεωμετρικής ατέλειας προκαλεί μείωση της δυσκαμψίας και της φέρουσας ικανότητας του αριθμητικού μοντέλου.

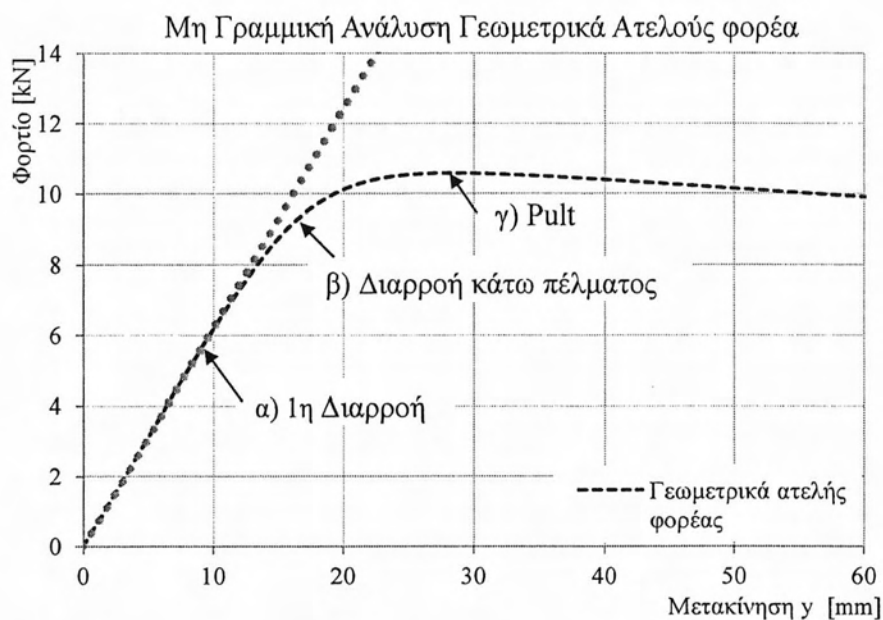


Σχήμα 5.13 Συγκριτικό διάγραμμα γεωμετρικά ατελούς φορέα για διάφορα μεγέθη (5,10 mm) γεωμετρικών ατελειών.

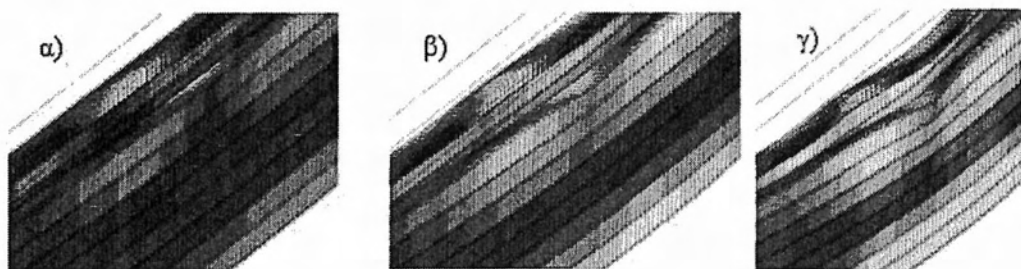
Σε μια προσπάθεια να προσεγγιστεί η αντοχή των πειραμάτων, δοκιμάστηκαν διάφορα μεγέθη ατελειών. Στο Σχήμα 5.14 παρουσιάζονται οι καμπύλες των πειραμάτων με την αντίστοιχη αριθμητική για ατέλεια της τάξης των 5.5mm.



Σχήμα 5.14 Συγκριτικό διάγραμμα καμπύλης απόκρισης πειραμάτων - γεωμετρικά ατελούς φορέα, εύρος ιδιομορφής 5.5 mm .



Σχήμα 5.15 Διάγραμμα φορτίου – μετακίνησης γεωμετρικά ατελούς αριθμητικού προσομοιώματος.



Σχήμα 5.16 Παραμορφωμένη κατάσταση και κατανομή των τάσεων (Von Mises) του αριθμητικού προσομοιώματος.

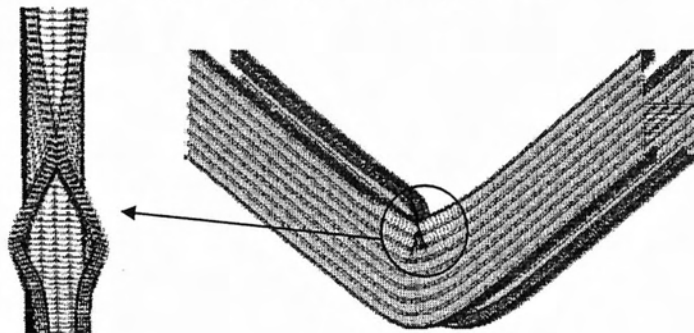
Στα παραπάνω σχήματα γίνεται μια προσπάθεια ερμηνείας της καμπτικής συμπεριφοράς των πειραμάτων των διατομών μορφής K6, μέσω των αποτελεσμάτων της μη γραμμικής (μη γραμμικότητα γεωμετρίας και υλικού) ανάλυσης ενός αριθμητικού μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων. Στο διάγραμμα του Σχήμα 5.15 υποδεικνύονται με βέλη τρία χαρακτηριστικά στάδια τη μη γραμμικής ανάλυσης τα οποία συνοδεύονται στο Σχήμα 5.16 με αντίστοιχες εικόνες της παραμορφωμένης κατάστασης και της κατανομής των τάσεων (κατά Von Mises). Στη συνέχεια επεξηγείται αναλυτικά κάθε ένα από τα τρία στάδια:

A) Λόγω της εισαγωγής γεωμετρικής ατέλειας στο μοντέλο εμφανίζεται η πρώτη διαρροή, στην ακραία ενίσχυση του άνω θλιβόμενου τμήματος (εμφανίζεται με κίτρινο χρώμα στο Σχήμα 5.16) σε φορτίο  $P_y = 5.77 \text{ KN}$ . Στην περίπτωση του γεωμετρικά τέλειου φορέα εμφανίζεται ταυτόχρονη διαρροή των θλιβόμενων και εφελκόμενων ινών της διατομής για φορτίο  $P_y = 9.54 \text{ KN}$ .

Β) Η πτώση της δυσκαμψίας που παρουσιάζει το αριθμητικό προσομοίωμα για φορτία μεγαλύτερα από 9 kN οφείλεται στην έναρξη διαρροής ακραίων ινών, των ακραίων ενισχύσεων του εφελκόμενου τμήματος της διατομής.

Γ) Στο τρίτο στάδιο απεικονίζεται η παραμορφωμένη κατάσταση του αριθμητικού μοντέλου και η κατανομή των τάσεων καθ' ύψος της διατομής του στο σημείο της μέγιστης αντοχής για φορτίο  $P_{ult} = 10.6 \text{ kN}$ .

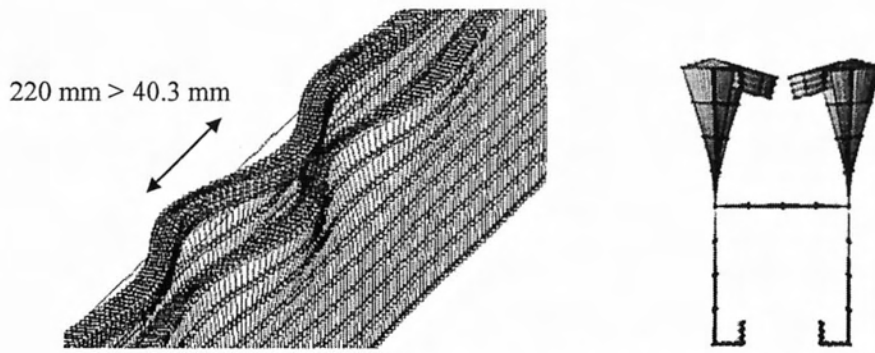
Στο Σχήμα 5.17 μπορεί κανείς να διακρίνει την τελική μορφή αστοχίας του αριθμητικού μοντέλου για επιβαλλόμενη μετατόπιση 100 mm.



Σχήμα 5.17 Μορφή αστοχίας του τελικού μοντέλου (ultimate failure mode)

Η μορφή αστοχίας της διατομής K6 για τις συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες και διαστάσεις των δοκιμίων είναι όμοια με την ιδιομορφή του Σχήμα 5.7. Η ιδιομορφική ανάλυση λυγισμού με τη (ΜΠΣ) δεν μπορεί να απομονώσει και να ταξινομήσει τις ιδιομορφές λυγισμού στις διάφορες κατηγορίες τους (τοπικός, καθολικός, λυγισμός με στρέβλωση της διατομής κ.α.), όμως κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια προσπάθεια κατάταξης της κυρίαρχης ιδιομορφής λυγισμού. Με μια πρώτη προσέγγιση η ιδιομορφή του Σχήμα 5.7 μπορεί να θεωρηθεί ιδιομορφή τοπικού λυγισμού. Κάτι τέτοιο όμως αντιβαίνει στον ορισμό του τοπικού λυγισμού κατά (AISI, 2004), τόσο στο σχήμα της διατομής σε παραμορφωμένη κατάσταση όσο και στο μισό μήκος κύματος (half-wavelength).

Αρχικά, όσον αφορά το σχήμα της ιδιομορφής (mode shape) τοπικού λυγισμού, το πεδίο των μετατοπίσεων των κόμβων της διατομής απαγορεύει την εντός επιπέδου μετακίνηση των εσωτερικών κυρίων κόμβων (internal main nodes) ή αλλιώς των εσωτερικών ακμών. Αυτή η αρχή παραβιάζεται όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 5.18β αφού έχουμε ξεκάθαρη μετακίνηση των εσωτερικών ακμών του πάνω τμήματος της διατομής K6. Επιπλέον, το μισό μήκος κύματος (half-wavelength) της ιδιομορφής τοπικού λυγισμού πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με τη μεγαλύτερη διάσταση της διατομής (στην περίπτωση μας 40.3 mm). Κάτι που όπως μπορεί να φανεί στο Σχήμα 5.18α δεν ισχύει.

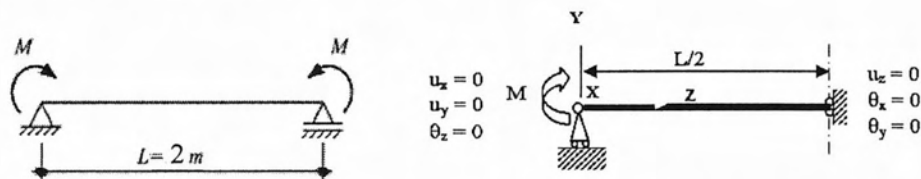


Σχήμα 5.18 Χαρακτηρισμός μορφής αστοχίας της K6

Συνεπώς, η παραπάνω ιδιομορφή ανήκει στην κατηγορία του λυγισμού με στρέβλωση της διατομής (distortional buckling) γιατί περιλαμβάνει στρέβλωση της διατομής μεν, αλλά αποτυγχάνει στα κριτήρια του τοπικού λυγισμού.

## 5.6 Διερεύνηση πλευρικού λυγισμού της Κ6 με Πεπερασμένα Στοιχεία

Πέρα των ελέγχων επάρκειας των διατομών, ο σχεδιασμός περιλαμβάνει και ελέγχους έναντι φαινομένων αστάθειας (τοπικών και καθολικών). Για ανοιχτές λεπτότοιχες διατομές όπως οι δοκοί με διατομή Κ6 ιδιαίτερα κρίσιμος είναι ο υπολογισμός του πλευρικού λυγισμού. Για τη διερεύνηση του πλευρικού λυγισμού μιας δοκού ιδιαίτερα κρίσιμη είναι η επιλογή του στατικού συστήματος που θα μελετηθεί. Ένας μεγάλος αριθμός ερευνητών και μηχανικών που είναι εξοικειωμένος με το πρόβλημα του στρεπτοκαμπτικού λυγισμού λεπτότοιχων δοκών, διαισθητικά περιμένει ότι η μικρότερη και πιο κρίσιμη ροπή πάντοτε αντιστοιχεί σε ομοιόμορφη κάμψη, απουσία εγκάρσιων φορτίων που διέρχονται σε απόσταση από το κέντρο διάτμησης. Αυτή η παραδοχή επιβεβαιώνεται πλήρως για διατομές με δύο άξονες συμμετρίας (όπως η Κ6), όμως δεν επαληθεύεται για μόνο-συμμετρικές διατομές όπως κατέδειξαν οι (Dinar Camotim, Anisio Andrade, Cilmar Basaglia, 2012) για διατομές διπλούς και μονής συμμετρίας (monosymmetric I-section beams). Το στατικό σύστημα που επιλέχθηκε είναι αυτό μιας άπλά εδραζόμενης δοκού ανοίγματος 2 m, η οποία φορτίζεται με ομοιόμορφη ροπή στα άκρα της. Στο Σχήμα 5.19 μπορεί κανείς να δει και το αντίστοιχο συμμετρικό μοντέλο.



Σχήμα 5.19 Στατικό σύστημα για τη διερεύνηση του πλευρικού λυγισμού

Σε αυτό το σημείο γεννούνται δύο δυσκολίες στην δημιουργία ενός αξιόπιστου μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων. Όσον αφορά τις στηρίξεις, πως θα προσομοιωθεί η απλή έδραση, ενώ σχετικά με τη φόρτιση, πως θα επιβληθεί ομοιόμορφη ροπή στις ακραίες διατομές της δοκού. Λόγω της ευαισθησίας των αναλύσεων αυτών, μικρές αλλαγές στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος επηρεάζουν σημαντικά τα αποτελέσματα. Αυτό καταδεικνύεται στη συνέχεια της ενότητας 5.5 όπου παρουσιάζονται αναλυτικά μια σειρά αναλύσεων στις οποίες διαφέρει ο τρόπος επιβολής της ομοιόμορφης ροπής αλλά και ο τρόπος στήριξης της δοκού.

Στις αναλύσεις που ακολουθούν, δεν έχουμε σημαντικές μεταβολές στην γεωμετρία, στο δίκτυο Πεπερασμένων Στοιχείων, στον τύπο του στοιχείου κελύφους, τις παραμένουσες τάσεις και παραμορφώσεις και τις μεθόδους επίλυσης από αυτές που αναλύθηκαν στην ενότητα 5.3 του παρόντος κεφαλαίου για αυτό και δεν θα γίνεται πρόσθετη αναφορά. Πραγματοποιήθηκαν αναλύσεις ελαστικού λυγισμού (elastic buckling analysis) αλλά και μη γραμμικές στατικές αναλύσεις (θεώρηση γεωμετρικής μη γραμμικότητας μόνο) με εισαγωγή γεωμετρικών ατελειών. Παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα κρίσιμα φορτία των δύο αναλύσεων και οι δρόμοι ισορροπίας με ή χωρίς γεωμετρικές ατέλειες για κάθε περίπτωση. Σε κάθε περίπτωση εξηγούνται

αναλυτικά με κατάλληλα σχόλια και διαγράμματα ο τρόπος στήριξης και επιβολής της φόρτισης και πως αυτά επηρεάζουν τα κρίσιμα φορτία.

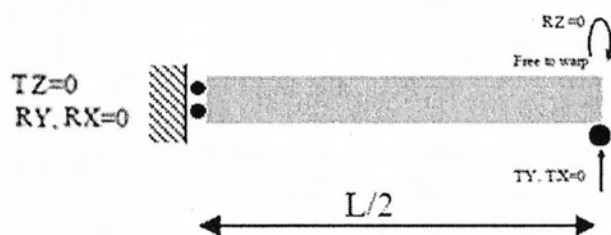
### 5.6.1 Απλή έδραση χωρίς στρεπτικούς περιορισμούς και τριγωνική φόρτιση (free to warp)

Αυτή η περίπτωση περιλαμβάνει την απλούστερη διάταξη, στο Σχήμα 5.20 μπορεί κανείς να παρατηρήσει τους κινηματικούς περιορισμούς της δοκού. Για λόγους υπολογιστικού κόστους αλλά και αδυναμίας επιτυχούς ολοκλήρωσης της ανάλυσης (σε ορισμένες περιπτώσεις) ολόκληρης της διάταξης, χρησιμοποιήθηκε το συμμετρικό μοντέλο του Σχήμα 5.20, όπως αυτό εμφανίζεται στο Σχήμα 5.21.



Σχήμα 5.20 Συνθήκες στήριξης απλά εδραζόμενης δοκού (free to warp).

Σε ένα τρισδιάστατο πλέγμα τα άκρα της δοκού αποτελούνται από δεκάδες κόμβους και όχι από ένα σημείο. Επηρεάζει λοιπόν σε μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα ποιοι από αυτούς τους κόμβους θα δεσμευθούν ή όχι σε συγκεκριμένους βαθμούς ελευθερίας. Παραδείγματος χάρη, για να υλοποιηθεί η κύλιση που εμφανίζεται στο Σχήμα 5.21, ακολουθήθηκε η μεθοδολογία που παρουσιάζεται από τους (Nirosha Dolamune Kankanamge, Mahen Mahendran, 2012) και δεσμεύθηκαν σε όλους τους κόμβους της δεξιάς ακραίας διατομής οι βαθμοί ελευθερίας 1,2,6 ( $T_x = 0$ ,  $T_y = 0$ ,  $R_z = 0$ ). Ως αποτέλεσμα, το μέλος εξαιτίας και της ελαστικότητας του υλικού, εμφανίζει αντοχή, αρκετές φορές πολλαπλάσια από αυτή που παρέχουν οι αναλυτικοί τύποι για πλευρικό λυγισμό, απλά εδραζόμενης δοκού. Κάτι που ασφαλώς δεν μπορεί να αποτελέσει αποδεκτό αποτέλεσμα. Γεννήθηκε λοιπόν η ανάγκη να δοκιμαστούν διαφορετικές προσομοιώσεις της κύλισης που να οδηγούν σε αριθμητικές λύσεις πιο κοντά στις αναλυτικές.

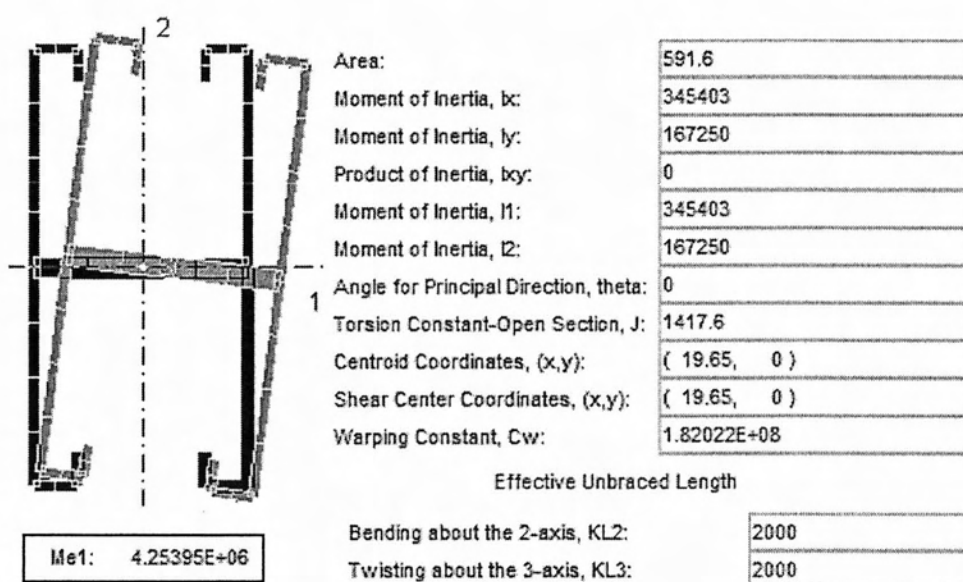


Σχήμα 5.21 Συνθήκες στήριξης συμμετρικού μοντέλου απλά εδραζόμενης δοκού

Ως έλεγχος για την ορθότητα των αποτελεσμάτων του καθολικού λυγισμού του μέλους, χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα CUTWP. Το πρόγραμμα CUTWP

(Sarawit, 2006) υπολογίζει τις ιδιότητες των λεπτότοιχων διατομών ( π.χ.  $C_w, J_t$ ) και χρησιμοποιώντας τους κλασικούς τύπους της θεωρίας ελαστικής ευστάθειας του Timoshenko (ή πιο σωστά τη δουλειά του Rekoz από το τέλος της δεκαετίας του 1960) υπολογίζει τον καθολικό λυγισμό (καμπτικός, πλευρικός κ.λ.π) των μελών.

Στο Σχήμα 5.2 παρουσιάζονται αναλυτικά οι ιδιότητες της διατομής, η παραμορφωμένη κατάσταση και η κρίσιμη ροπή ( $M_{cr} = 4.254 \text{ KNm}$ ) στην περίπτωση του πλευρικού λυγισμού (η πιο κρίσιμη για το δεδομένο μήκος της δοκού) όπως αυτά υπολογίστηκαν με το πρόγραμμα CUTWP. Για την εξαγωγή τους έγινε εισαγωγή: των συντεταγμένων των κόμβων, ορισμός κόμβου αρχή και πέρας των στοιχείων, μέτρου ελαστικότητας, λόγου Poisson και μήκος δοκού (unbraced length).



Σχήμα 5.2 Αποτελέσματα CUTWP για τη δοκό K6 (mm, N)

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y GJ} \sqrt{1 + W^2}$$

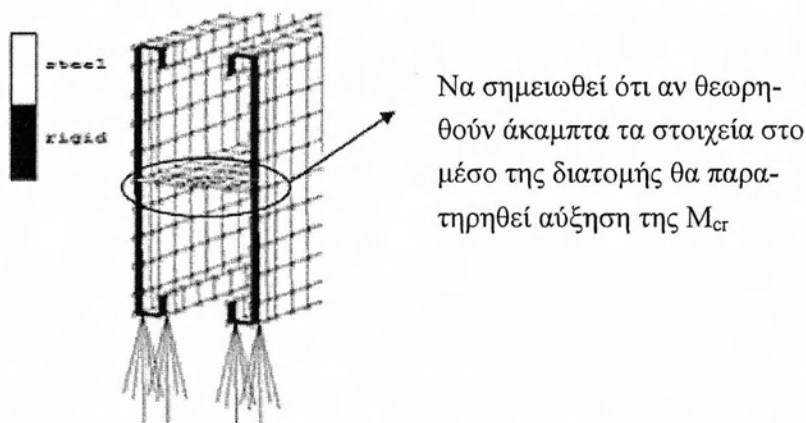
$$W = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EC_w}{GJ}}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα κατέληγε κανείς( δηλ.  $M_{cr} = 4.254 \text{ KNm}$ ) και με τη χρήση του διπλανού τύπου (αφορά διατομές απλά εδραζόμενες και με διπλή συμμετρία). (Galambos, 1998)

Κάτι που ακόμα πρέπει να τονιστεί είναι ότι αν παρατηρήσει κανείς τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της διατομής K6 (ροπές αδρανείας, εμβαδό κ.λ.π) στον **Σφάλμα!** Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε. και στο Σχήμα 5.2 θα διαπιστώσει ότι διαφέρουν μεταξύ τους αφού έχουν υπολογιστεί με διαφορετικά προγράμματα. Για τα δεδομένα του **Σφάλμα!** Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε. η κρίσιμη ροπή υπολογίζεται:  $M_{cr} = 4.083 \text{ KNm}$ . Μια διαφορά δηλαδή περίπου 4%.

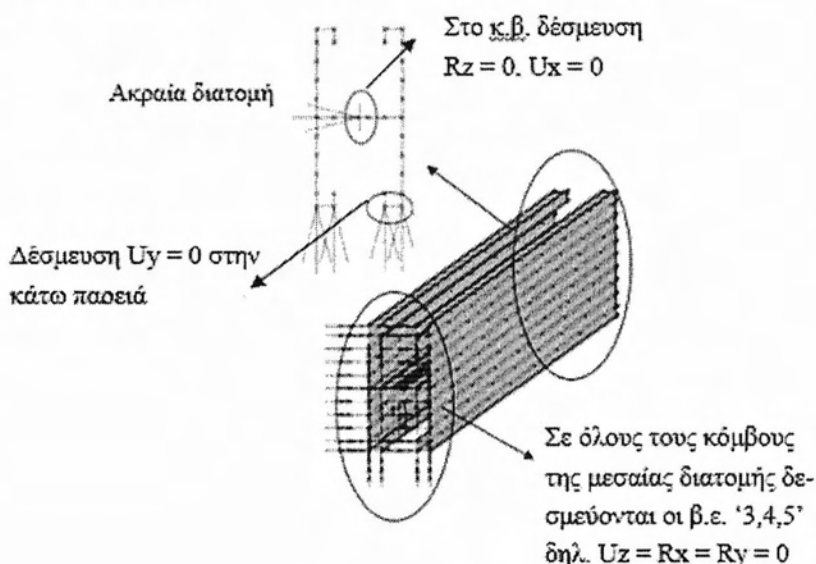


Για την αποφυγή φαινομένων συγκέντρωσης τάσεων, εισάγεται στο μοντέλο πέραν του μήκους των 2m (μετά τις στηρίξεις) μια λωρίδα μήκους 5mm με ελαστικά άκαμπτα ( $E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ KN/m}^2, \nu=0.3$ ) στοιχεία, πάνω στα οποία ασκούνται τα φορτία. Εξαιρούνται τα στοιχεία της δοκού που βρίσκονται στο μέσο της διατομής (Σχήμα 5.23). Για την ομοιόμορφη κατανομή της ροπής, ασκήθηκαν μια σειρά από γραμμικές δυνάμεις στο άκαμπτο τμήμα της ακραίας διατομής, δημιουργώντας έτσι μια τριγωνική κατανομή δυνάμεων καθ' ύψος της διατομής. Το πάνω μισό της διατομής είναι υπό θλίψη και το κάτω μισό υπό εφελκυσμό δημιουργώντας ένα σταθερό διάγραμμα κάμψης κατά μήκος της δοκού. Να τονιστεί ότι οι δεσμεύσεις των στηρίξεων επιβάλλονται στους κόμβους που βρίσκονται μετά την άκαμπτη πλάκα και όχι πάνω σε αυτή.



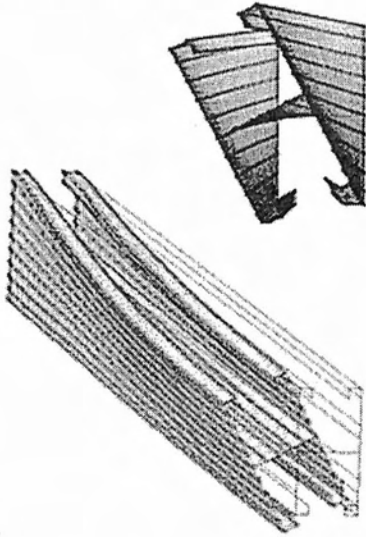
Σχήμα 5.23 Μοντελοποίηση λωρίδας άκαμπτων στοιχείων στη ακραία διατομή

Η παραπάνω διάταξη για την εισαγωγή η ομοιόμορφης ροπής, οδήγησε στις μικρότερες κρίσιμες ροπές, ακολουθώντας την προσομοίωση που παρουσιάζεται αναλυτικά στο Σχήμα 5.24.



Σχήμα 5.24 Αναλυτική περιγραφή των στηρίξεων του αριθμητικού μοντέλου

### 5.6.1.1 Αποτελέσματα ιδιομορφικής ανάλυσης



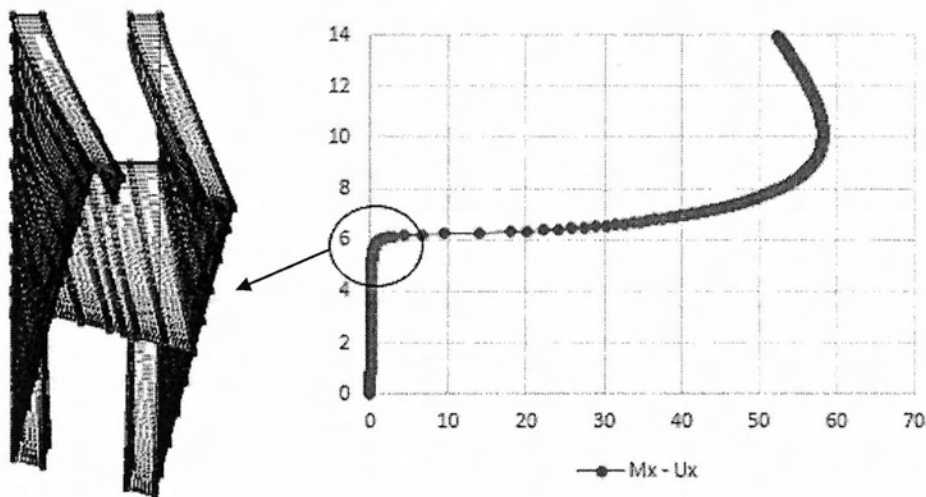
Από την ανάλυση ελαστικού λυγισμού της δοκού K6 για μήκος 2m και το στατικό σύστημα που περιγράφηκε παραπάνω, προέκυψε ότι η πιο κρίσιμη μορφή λυγισμού είναι αυτή του πλευρικού λυγισμού με  $M_{cr} = 4.65 \text{ KNm}$ .

Όπως μπορεί να διακρίνει κανείς στο Σχήμα 5.25 η διατομή στρέφεται κατά τον διαμήκη άξονα της χωρίς να παραμορφώνεται (distortion) καθόλου το αρχικό σχήμα της διατομής (Vlasov's hypothesis).

Η αμέσως επόμενη ιδιομορφή εμφανίζεται σε πολύ μεγαλύτερη ροπή  $M_{cr} = 15.4 \text{ KNm}$ . (Ιδιομορφή με στρέβλωση της διατομής)

Σχήμα 5.25 Κρίσιμη μορφή λυγισμού

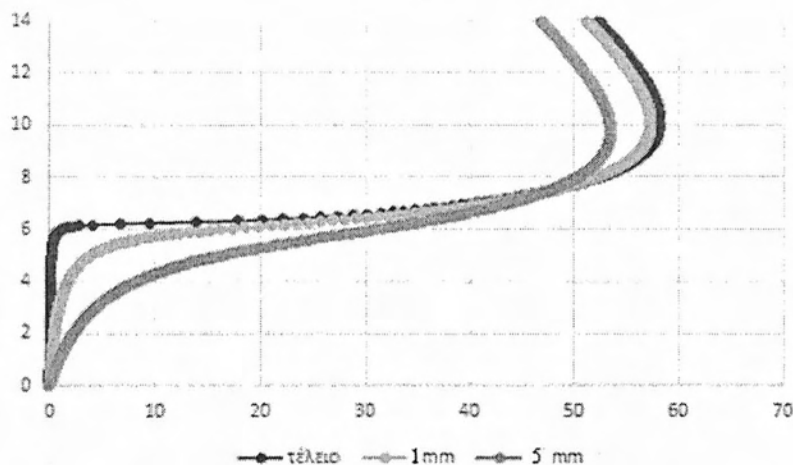
### 5.6.1.2 Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης



Σχήμα 5.26 Δρόμος ισοροπίας και εμφάνιση πλευρικού λυγισμού

Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.26 για ροπή περίπου  $M_{cr} = 6.2 \text{ KNm}$  έχουμε την εμφάνιση πλευρικού λυγισμού, μια διαφορά 25% σε σχέση με το αποτέλεσμα της ιδιομορφικής ανάλυσης. Για τη μη γραμμική ανάλυση χρησιμοποιήθηκε μία μικρή ατέλεια (0,1mm της ιδιομορφής πλευρικού λυγισμού) για αριθμητικούς λόγους. Στο Σχήμα 5.27 μπορεί κανείς να δει μια παραμετρική ανάλυση γεωμετρικών ατελειών της δοκού. Όπως προέκυψε από την ελαστική ανάλυση λυγισμού του μέλους, η πιο κρίσιμη μορφή λυγισμού με διαφορά από τη δεύτερη είναι αυτή του πλευρικού. Συνε-

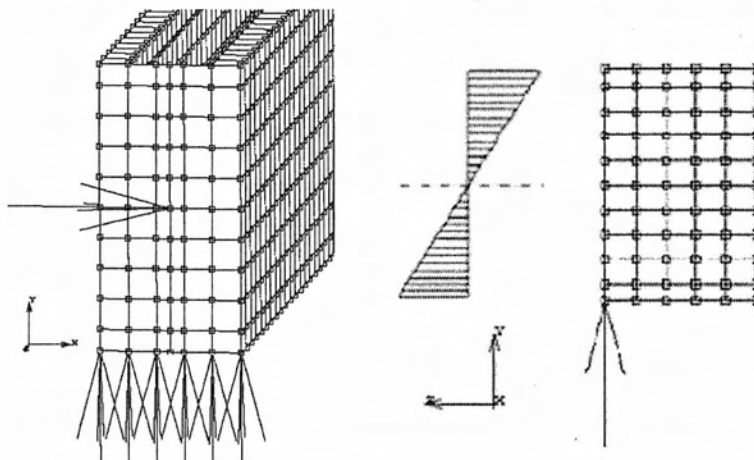
πώς, για την παραμετρική ανάλυση ατελειών αρκεί η εισαγωγή ατελειών μόνο της συγκεκριμένης μορφής, με εύρος 1 και 5 mm.



Σχήμα 5.27 Παραμετρική ανάλυση ατελειών

### 5.6.2 Απλή έδραση με μετωπική πλάκα και τριγωνική φόρτιση

Σε αυτή την περίπτωση τοποθετείται μια άκαμπτη ελαστική πλάκα ( $E=2.1 \cdot 10^{11} \text{ KN/m}^2, \nu=0.3$ ), πάχους 8mm, στην ακραία διατομή όπως εμφανίζεται στο Σχήμα 5.28. Ως αποτέλεσμα, περιορίζονται μερικώς οι μετατοπίσεις κατά την αξονική διεύθυνση και η διατομή δεν μπορεί να στρεβλωθεί ελεύθερα (partial warping restraint).

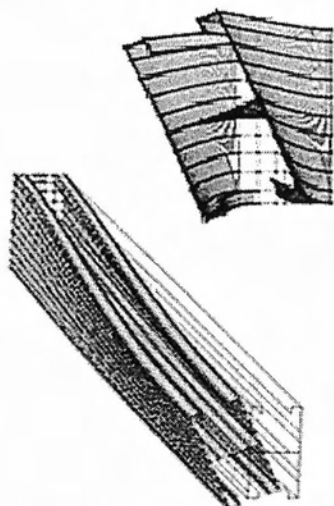


Σχήμα 5.28 Συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης με πλάκα

Οι συνθήκες στήριξης είναι όμοιες με αυτές του Σχήμα 5.24. Για την υλοποίηση της κύλισης, δεσμεύεται η μετακίνηση κατά  $y$  ( $U_y=0$ ) στους κόμβους της κάτω παρειάς ενώ στο κέντρο βάρους δεσμεύεται η στροφή κατά  $z$  και η μετακίνηση κατά  $x$  ( $R_z=U_x=0$ ). Αντίστοιχα στην μεσαία διατομή δεσμεύονται οι βαθμοί ελευθερίας “3,4,5” σε όλους τους κόμβους ( $U_z=R_x=R_y=0$ ).

Για την ομοιόμορφη κατανομή της ροπής, ασκήθηκαν μια σειρά από γραμμικές δυνάμεις στους κόμβους της πλάκας, που βρίσκονται στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής, δημιουργώντας έτσι μια τριγωνική κατανομή δυνάμεων καθ' ύψος της διατομής. Σχήμα 5.28

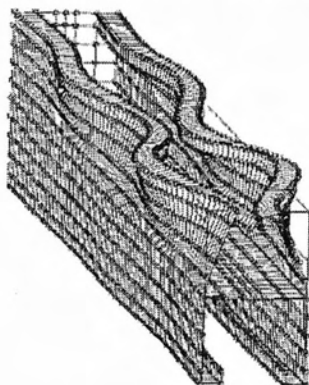
### 5.6.2.1 Αποτελέσματα ελαστικού λυγισμού



Όμοια με την προηγούμενη μοντελοποίηση των συνοριακών συνθηκών της Κ6, η κρίσιμότερη μορφή λυγισμού όπως προκύπτει από την ανάλυση ελαστικού λυγισμού είναι ο πλευρικός λυγισμός με  $M_{cr} = 7.1 \text{ KNm}$ .

Όπως αναμενόταν, εξαιτίας των περιορισμών που επιβάλλει η πλάκα (partial warping), παρατηρείται αύξηση της κρίσιμης ροπής έναντι πλευρικού λυγισμού κατά 35%, σε σχέση με το μοντέλο της ενότητας 5.5.1.1.

Σχήμα 5.29 Κρίσιμη μορφή λυγισμού με μετωπική πλάκα

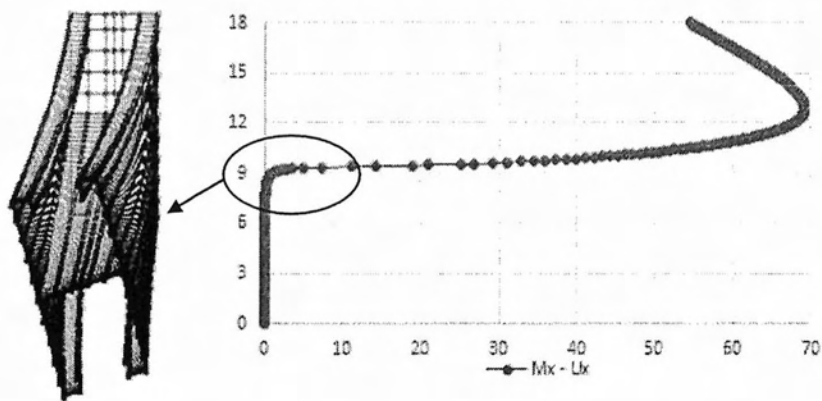


Η αμέσως επόμενη θετική ιδιομορφή (Σχήμα 5.30) εμφανίζεται σε υπερδιπλάσια ροπή  $M_{cr} = 15.4 \text{ KNm}$ . Έχει ενδιαφέρον ότι ανεξάρτητα από τις αλλαγές στη προσομοίωση (μετωπική πλάκα, διαφορετική φόρτιση) η συγκεκριμένη ιδιομορφή έχει το ίδιο σχήμα και την ίδια ιδιοτιμή με την περίπτωση της ενότητας 5.5.1.1.

Σχήμα 5.30 Δεύτερη θετική ιδιομορφή λυγισμού

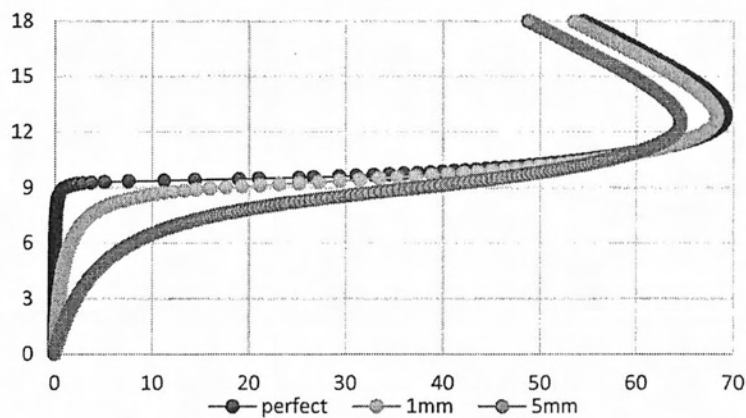
### 5.6.2.2 Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης

Στο Σχήμα 5.31 μπορεί κανείς να διακρίνει την εμφάνιση πλευρικού λυγισμού για ροπή περίπου  $M_{cr} = 9.1 \text{ KNm}$ , μια διαφορά κατά 22% μεγαλύτερη σε σχέση με τα αποτελέσματα της ιδιομορφικής ανάλυσης. Για αριθμητικούς λόγους χρησιμοποιήθηκε μια «διαταραχή», δηλαδή η εισαγωγή μιας μικρής ατέλειας στο αριθμητικό προσομοίωμα εύρους  $0.05 \text{ mm}$  και μορφής όμοιας με το Σχήμα 5.29.



Σχήμα 5.31 Δρόμος ισορροπίας και εμφάνιση πλευρικού λυγισμού (μοντέλο με πλάκα)

Στο ακόλουθο διάγραμμα μπορεί κανείς να διακρίνει την επιρροή των γεωμετρικών ατελειών στον τελικό δρόμο ισορροπίας. Επιλέχθηκαν δύο είδη ατελειών μεγέθους 1 και 5 mm και μορφής πλευρικού λυγισμού, καθώς όμοια με την προηγούμενη ενότητα η κυρίαρχη μορφή αστοχίας είναι αυτή του πλευρικού λυγισμού.



Σχήμα 5.32 Παραμετρική ανάλυση ατελειών (μοντέλο με πλάκα)

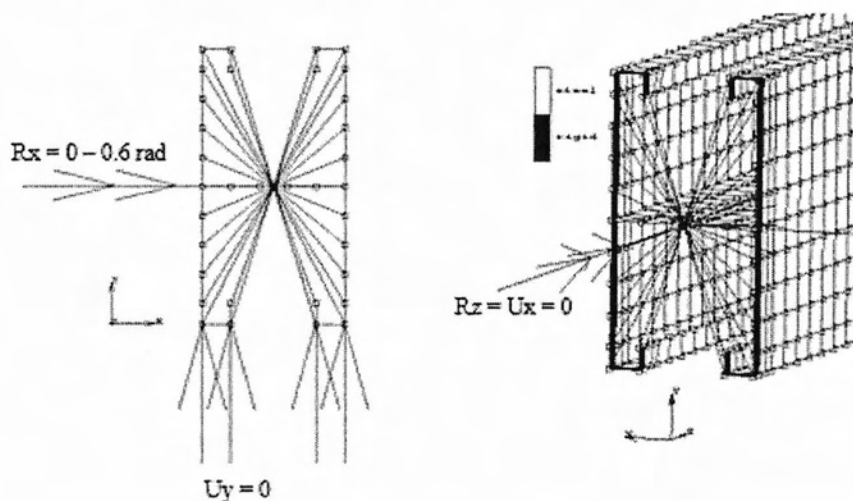
### 5.6.3 Απλή έδραση με επιβολή στροφής μέσω του στοιχείου RBE2

Η επιλογή RBE2 του προγράμματος MSC Marc 2011, ορίζει μία άκαμπτη κινηματική σύνδεση μεταξύ ενός συγκεκριμένου κόμβου αναφοράς, και ενός αυθαίρετου αριθμού άλλων συνδεδεμένων με αυτόν κόμβων, με εξαρτημένους βαθμούς ελευθερίας μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν όλοι οι βαθμοί ελευθερίας των συνδεδεμένων κόμβων είναι δεσμευμένοι, τότε η επιλογή RBE2 προσομοιώνει μία άκαμπτη κίνηση του σώματος (rigid body motion). Στην περίπτωση της παρούσας ενότητας, οι βαθμοί ελευθερίας των δεσμευμένων κόμβων συστρέφονται σύμφωνα με τη στροφή του κόμβου αναφοράς. Από τα παραπάνω, μπορεί κανείς να αναμένει ότι η συμπε-

ριφορά της δοκού θα είναι ανάλογη με αυτή της προηγούμενης περίπτωσης (χρήση μετωπικής πλάκας).

Ως κόμβος αναφοράς ορίζεται το κέντρο βάρους του μοντέλου, ενώ συνδεδεμένοι με αυτόν είναι όλοι οι κόμβοι της ακραίας διατομής εκτός από τους συνευθειακούς του κέντρου βάρους. Ως εξαρτημένος βαθμός ελευθερίας ορίστηκε η στροφή γύρω από τον  $x$  άξονα. Να τονιστεί ότι δοκιμάστηκε και η δέσμευση όλων των βαθμών ελευθερίας των δεσμευμένων κόμβων με μικρή διαφορά στα αποτελέσματα. Επιλέχθηκε η δέσμευση μόνο της στροφής περί τον  $x$  άξονα γιατί δίνει ελαφρώς μικρότερη κρίσιμη ροπή πλευρικού λυγισμού και πιο λείο δρόμο ισορροπίας.

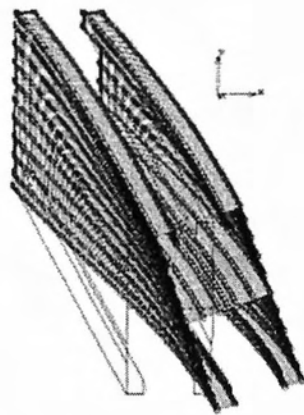
Κρίνεται απαραίτητη και σε αυτή την περίπτωση η ύπαρξη ζώνης ελαστικών άκαμπτων στοιχείων μήκους 5 mm,  $E=2.1 \times 10^{11}$  KN/m<sup>2</sup> και  $\nu=0.3$ , χωρίς την ύπαρξη των οποίων παρατηρούνται φαινόμενα συγκέντρωσης τάσεων στην ακραία διατομή. Σε αντίθεση με τις προηγούμενες ενότητες, δεν ασκούνται στους κόμβους της ακραίας διατομής εξωτερικές δυνάμεις (τριγωνική φόρτιση) αλλά εισάγεται στον κόμβο αναφοράς (κ.β.) στροφή κατά τον  $x$  - άξονα ( $R_x = 0-0.6$  rad). Οι υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες είναι όμοιες με τις προηγούμενες ενότητες, όπως παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.33



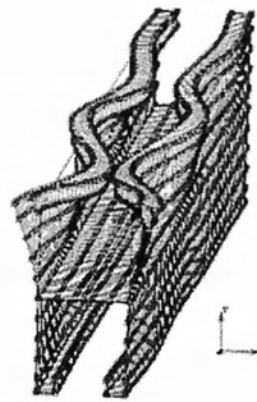
Σχήμα 5.33 Συνοριακές συνθήκες μοντέλου με συγκεντρωμένη στροφή

### 5.6.3.1 Αποτελέσματα ελαστικού λυγισμού

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύμπτωση των αποτελεσμάτων της ιδιομορφικής ανάλυσης του μοντέλου αυτής της ενότητας με το μοντέλο με μετωπική πλάκα. Κυρίαρχη μορφή λυγισμού παραμένει ο πλευρικός λυγισμός με ροπή  $M_{cr} = 7.12$  KNm, ενώ η αμέσως επόμενη ιδιομορφή (λυγισμός με στρέβλωση της διατομής) εμφανίζεται σε υπερδιπλάσια ροπή  $M_{cr} = 15.4$  KNm, όπως διακρίνεται στο Σχήμα 5.34.



Πλευρικός λυγισμός:  
 $M_{cr} = 7.12 \text{ KNm}$

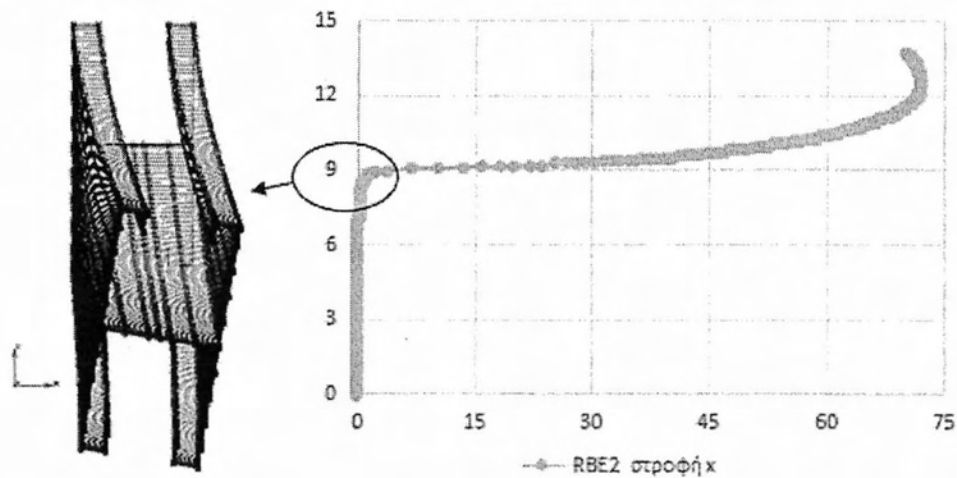


Λυγισμός με στρέβλωση:  
 $M_{cr} = 15.4 \text{ KNm}$

Σχήμα 5.34 Ιδιομορφές λυγισμού για το μοντέλο με συγκεντρωμένη στροφή

### 5.6.3.2 Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης

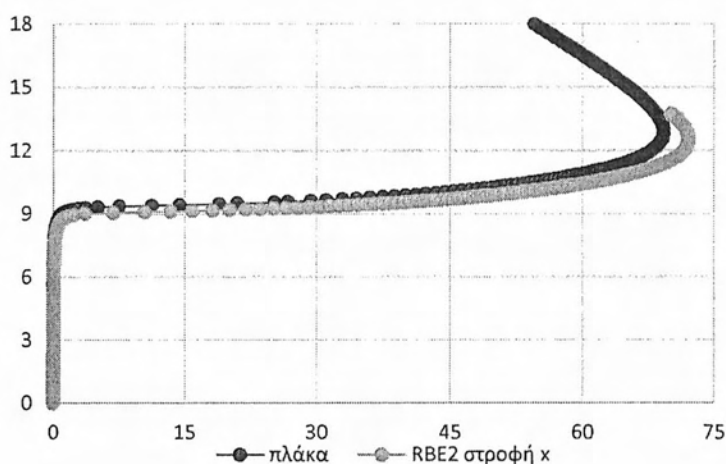
Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.35 για ροπή περίπου  $M_{cr} = 9.1 \text{ KNm}$  το μοντέλο παθαίνει πλευρικό λυγισμό. Όμοια με τις προηγούμενες ενότητες στο αριθμητικό προσομοίωμα εισήχθηκε μια μικρή γεωμετρική ατέλεια μεγέθους  $0.05 \text{ mm}$  και μορφής πλευρικού λυγισμού. Δεν κρίθηκε σκόπιμη η εκτέλεση παραμετρικής ανάλυσης γεωμετρικών ατελειών για διαφορετικά εύρη ατελειών της κυρίαρχης ιδιομορφής.



Σχήμα 5.35 Δρόμος ισορροπίας μοντέλου με συγκεντρωμένη στροφή

Συμπερασματικά, μπορεί κανείς να διακρίνει στο Σχήμα 5.36 τις ομοιότητες στη συμπεριφορά των μοντέλων της παρούσας ενότητας και της προηγούμενης με μετωπική πλάκα. Εξαιτίας του περιορισμού της στροφής κατά  $x$  περιορίζονται μερικώς οι μετατοπίσεις κατά την αξονική διεύθυνση και η διατομή δεν μπορεί να στρε-

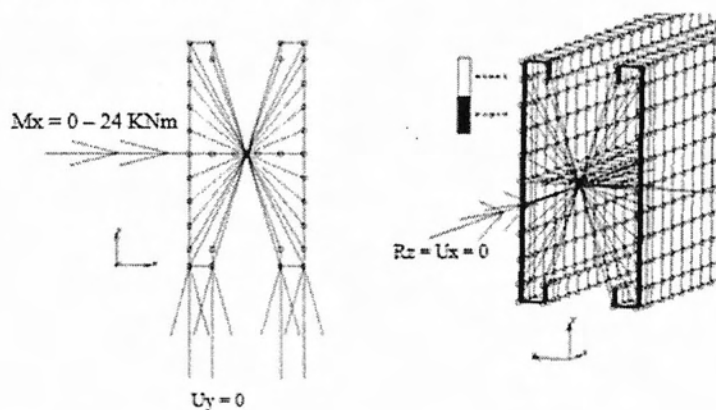
βλωθεί ελεύθερα (partial warping restraint), όπως συνέβαινε και στην περίπτωση της πλάκας.



Σχήμα 5.36 Συγκριτικό διάγραμμα μοντέλων συγκεντρωμένης ροπής και πλάκας

#### 5.6.4 Απλή έδραση με επιβολή ροπής μέσω του στοιχείου RBE2

Στο Σχήμα 5.37 μπορεί κανείς να παρατηρήσει τις συνοριακές συνθήκες του μοντέλου με εισαγωγή ομοιόμορφης ροπής  $M_x = 0 - 24 \text{ KNm}$ , όπως αυτή επιβάλλεται ταυτόχρονα σ' όλους τους κόμβους της ακραίας διατομής μέσω του στοιχείου RBE2 του προγράμματος MSC Marc 2011. Όμοια με την προηγούμενη ενότητα δεσμεύεται η στροφή περί τον  $x -$  άξονα, μεταξύ του κόμβου αναφοράς και των δεσμευμένων κόμβων της ακραίας διατομής. Να τονιστεί ότι, μικρή μεταβολή παρουσιάζεται στα αποτελέσματα στην περίπτωση δέσμευσης όλων των βαθμών ελευθερίας μεταξύ κόμβου αναφοράς και δεσμευμένων κόμβων. Οι συνοριακές συνθήκες για την προσομοίωση απλής έδρασης είναι ίδιες με αυτές των προηγούμενων ενοτήτων. Επιπλέον, κρίθηκε απαραίτητη η χρήση ζώνης άκαμπτων ελαστικών στοιχείων για την αποφυγή φαινομένων συγκέντρωσης τάσεων.

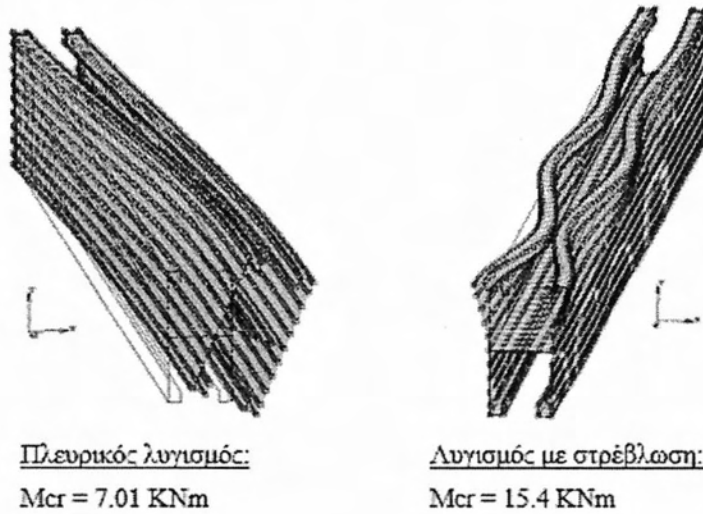


Σχήμα 5.37 Συνοριακές συνθήκες μοντέλου με συγκεντρωμένη ροπή



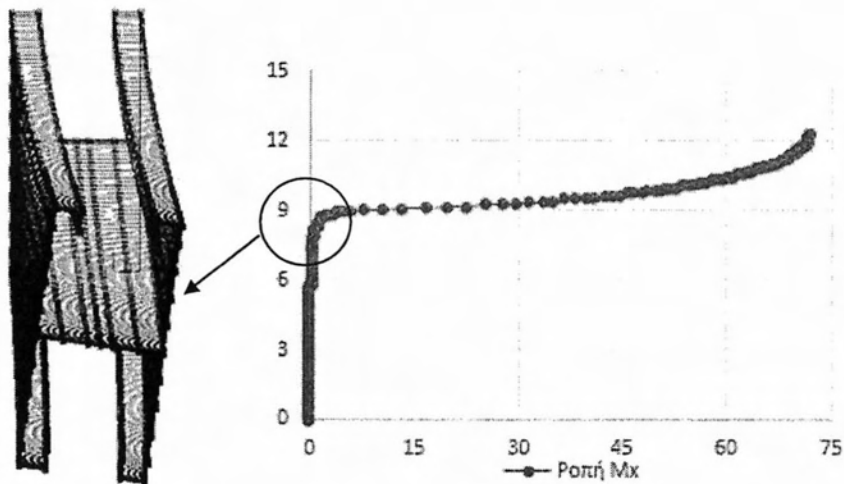
#### 5.6.4.1 Αποτελέσματα ελαστικού λυγισμού

Στο Σχήμα 5.38 μπορεί κανείς να διακρίνει την συμπεριφορά της προσομοίωσης με συγκεντρωμένη ροπή. Όπως καταδεικνύεται από τις ιδιοτιμές της ανάλυσης ελαστικού λυγισμού κρίσιμη μορφή είναι αυτή του πλευρικού λυγισμού με  $M_{cr} = 7.01 \text{ KNm}$ , έχοντας μια διαφορά περίπου 1.5% από την αντίστοιχη κρίσιμη ροπή των ενοτήτων 5.5.3 και 5.5.2. Αμετάβλητη παρουσιάζεται η τιμή της ιδιοτιμής για λυγισμό με στρέβλωση.



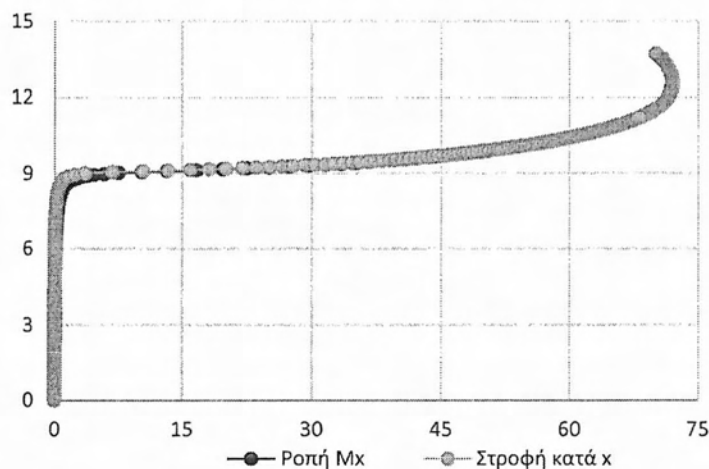
Σχήμα 5.38 Ιδιομορφές λυγισμού για το μοντέλο με συγκεντρωμένη ροπή

#### 5.6.4.2 Αποτελέσματα μη γραμμικής ανάλυσης



Σχήμα 5.39 Δρόμος ισορροπίας μοντέλου με συγκεντρωμένη ροπή

Στο Σχήμα 5.39 παρουσιάζεται ο δρόμος ισορροπίας του μοντέλου με συγκεντρωμένη ροπή. Για ροπή περίπου  $M_{cr} = 9.1$  KNm, όμοια με την περίπτωση συγκεντρωμένης στροφής, το μοντέλο παθαίνει πλευρικό λυγισμό. Δεν κρίθηκε σκόπιμη επιπρόσθετη παραμετρική διερεύνηση γεωμετρικών ατελειών, παρά μόνο η χρήση μιας μικρής ατέλειας πλευρικού λυγισμού μεγέθους 0.1 mm για αριθμητικούς λόγους. Όπως καταδεικνύεται στο Σχήμα 5.40 τα μοντέλα με συγκεντρωμένη ροπή και στροφή παρουσιάζουν παρόμοια μη γραμμική συμπεριφορά.



Σχήμα 5.40 Συγκριτικό διάγραμμα μοντέλων με συγκεντρωμένη ροπή και στροφή

	Ιδιομορφική ανάλυση		Μη γραμμική
	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή (KNm)	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή (KNm)	Κρίσιμη ροπή (KNm)
Free to warp	4.65	15.4	6.2
Πλάκα	7.1	15.4	9.1
RBE2 Ροπή	7.12	15.4	9.1
RBE2 Στροφή	7.01	15.4	9.1

Πίνακας 5.8 Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων των αναλύσεων πλευρικού λυγισμού με πεπερασμένα στοιχεία

## 5.7 Διερεύνηση ελαστικού λυγισμού των δοκών μορφής K6 με τη μέθοδο Πεπερασμένων Λωρίδων (ΜΠΛ) και την Περιορισμένη (ΜΠΛ)

Όπως αναλύθηκε λεπτομερώς στο κεφάλαιο 4, αυτή η μέθοδος ανάλυσης έχει τη δυνατότητα να παράγει ακριβείς λύσεις σε προβλήματα ελαστικού λυγισμού, σε λίγο χρόνο και με μικρή προσπάθεια. Για αυτού του είδους τις αναλύσεις χρησιμοποιήθηκε το ελεύθερο λογισμικό CUFEM 4 (Li, Z., Schafer, B.W., 2010). Τα κύρια βήματα για την εκτέλεση μιας ανάλυσης πεπερασμένων λωρίδων (ΜΠΛ) είναι τα εξής:

- προσδιορισμός της γεωμετρίας της διατομής
- προσδιορισμός του αριθμού των στοιχείων
- προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών (στηρίξεων)
- προσδιορισμός της κατανομής των ασκούμενων τάσεων
- προσδιορισμός των διαφόρων μισών μηκών κύματος (half-wavelengths),
- εκτέλεση της ανάλυσης ελαστικού λυγισμού
- εξέταση της χαρακτηριστικής καμπύλης της διατομής (signature curve), δηλαδή της καμπύλης του συντελεστή φορτίου έναντι του εύρους του μισού μήκους κύματος (load-factor vs. Half-wavelength).

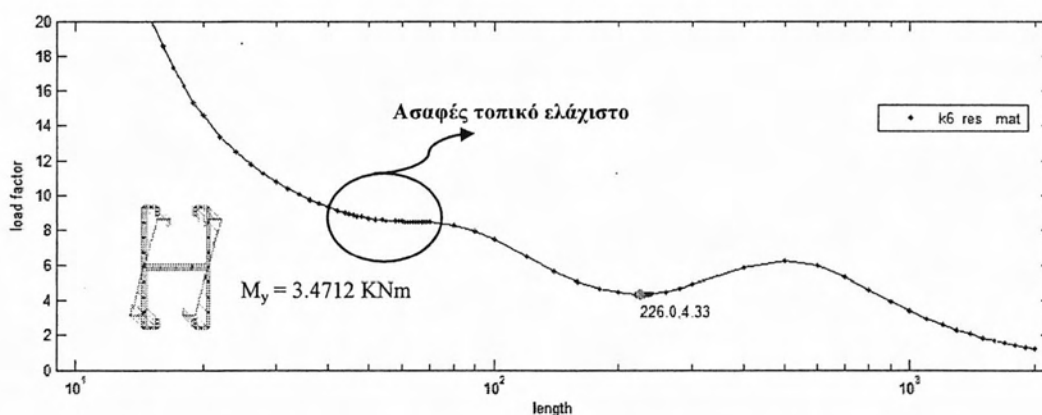
Από την χαρακτηριστική καμπύλη της διατομής θα προσδιορισθούν οι ελάχιστοι συντελεστές φορτίου δηλαδή ο μικρότερος λόγος ( $M_{cr}/M_y$ ) για την κάθε ιδιομορφή. Για την επιτυχή εκτέλεση της παραπάνω διαδικασίας ακολουθήθηκαν οδηγίες που παρουσιάζονται στο (AISI, Direct Strength Method (DSM) Design Guide, 2006).

Για την εισαγωγή της γεωμετρίας της διατομής, εισήχθησαν οι συντεταγμένες των κόμβων, ενώ για την προσομοίωση της συγκόλλησης επιλέχθηκε συντηρητικά η θεώρηση κοινής πλευράς με διπλάσιο πάχος. Επιπλέον θεωρήθηκε γωνία  $90^\circ$  στις γωνίες της διατομής. Σχετικά με τον αριθμό των στοιχείων της διατομής, τηρήθηκε η οδηγία της ύπαρξης τουλάχιστον δύο στοιχείων σε κάθε τμήμα της πλάκας που υπόκειται σε θλίψη. Η επιλογή των διαφόρων μισών μηκών κύματος (half-wavelengths) που συμπεριλήφθηκαν στην ανάλυση, έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλότητα της χαρακτηριστικής καμπύλης.

Σε ότι έχει να κάνει με τις συνοριακές συνθήκες, επιλέχθηκε η απλή έδραση του μέλους και στα δύο άκρα (simple-simple (S-S)), ενώ ασκήθηκε στο μέλος τριγωνική κατανομή τάσεων με τάση διαρροής  $f_y = 405 \text{ Mpa}$ , η οποία δημιούργησε  $M_{xx} = 3.4712 \text{ KNm}$  και  $M_{zz} = 3.4471 \text{ KNm}$ .

### 5.7.1 Χαρακτηριστική καμπύλη (signature curve) της ανάλυσης Πεπερασμένων Λωρίδων για τις δοκούς μορφής K6

Στο Σχήμα 5.41 παρουσιάζεται η χαρακτηριστική καμπύλη της (ΜΠΛ) για δοκούς μορφής K6 για ροπή περί τον x-άξονα. Όπως αναφέρθηκε στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο η χαρακτηριστική καμπύλη της (ΜΠΛ) απεικονίζει για συνθήκες απλής στήριξης των άκρων (simply supported, members are pinned and free to warp) και για αξονική συνάρτηση σχήματος  $Y_p = \sin(\pi y/a)$  τα κρίσιμα φορτία και τις ιδιομορφές τους για μεταβλητό  $a$ . Τα τοπικά ελάχιστα της χαρακτηριστικής καμπύλης υποδεικνύουν τον κρίσιμο συντελεστή φορτίου για κάθε ιδιομορφή. Στόχος της χαρακτηριστικής καμπύλης είναι ο προσδιορισμός του κρίσιμου συντελεστή φορτίου και του μισού μήκους κύματος στο οποίο παρουσιάζεται η καθεμιά από τις βασικές μορφές λυγισμού (G,D,L). Η καμπύλη του Σχήμα 5.41 παρουσιάζει ένα τοπικό ελάχιστο για μισό μήκος κύματος ίσο με 226 mm και συντελεστή φορτίου 4.33, ενώ για μήκη κοντά στο 0 ο συντελεστής φορτίου απειρίζεται και για πολύ μεγάλα μήκη τείνει στο μηδέν.

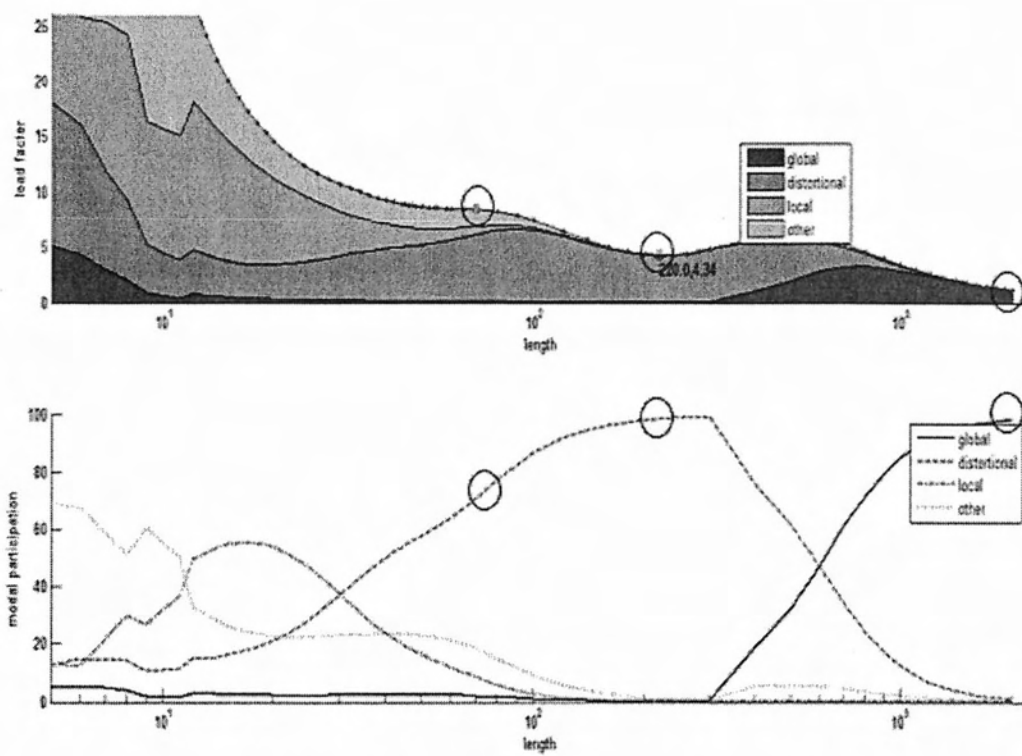


Σχήμα 5.41 Χαρακτηριστική καμπύλη της (ΜΠΛ) των δοκών μορφής K6.

Επιπλέον, για μήκη από 60–70mm παρουσιάζεται στην καμπύλη ένα ασαφές τοπικό ελάχιστο (indistinct minima). Ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα της (ΜΠΛ) είναι η ύπαρξη ασαφών τοπικών ελαχίστων, που καθιστούν ασαφή τον προσδιορισμό του κρίσιμου συντελεστή φορτίου για τη συγκεκριμένη κατηγορία λυγισμού. Συνήθως μία χαρακτηριστική καμπύλη παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα ένα για τον τοπικό λυγισμό (μισά μήκη κύματος μικρότερα από τη μεγαλύτερη διάσταση της διατομής που βρίσκεται σε θλίψη) και έναν για το λυγισμό με στρέβλωση (μεσαίου μεγέθους μήκη). Η λύση σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να δοθεί είτε με την εισαγωγή ορισμένων κινηματικών περιορισμών στη διατομή (για παράδειγμα αν θέλει κανείς να απομονώσει σε μια ανάλυση (ΜΠΛ) τον τοπικό λυγισμό, αρκεί η εισαγωγή αρθρώσεων στις εσωτερικές κύριες ακμές της διατομής ώστε να επιβάλλει στο μέλος να εμφανίσει τοπικό λυγισμό, για περισσότερα στο κεφάλαιο 3.3 του (AISI, Direct Strength Method (DSM) Design Guide, 2006)) ή με τη χρήση της περιορισμένης με-

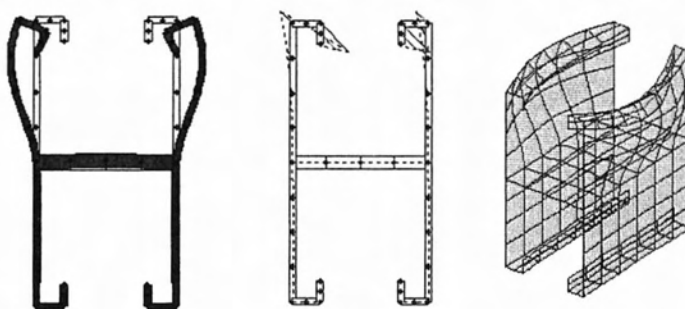
θόδου πεπερασμένων λωρίδων. Με την (ΠΜΠΛ) μπορεί κανείς είτε να βρει τις καμπύλες για τις καθαρές μορφές λυγισμού είτε να βρει τη συνεισφορά καθεμιάς από τις μορφές λυγισμού στο σχήμα μιας τυχαίας ιδιομορφής.

Στη συνέχεια, θα εξεταστούν για το ασαφές τοπικό ελάχιστο, το τοπικό ελάχιστο και για μήκος κύματος ίσο με το φυσικό μήκος της δοκού (2000mm) οι ιδιομορφές λυγισμού, οι ιδιοτιμές, τα μισά μήκη κύματος και με τη βοήθεια των Σχήμα 5.42 θα γίνει ανάλυση της συνεισφοράς καθεμιάς εκ των κυρίων ιδιομορφών στις παραπάνω ιδιομορφές. Για τα αποτελέσματα του Σχήμα 5.42 επιλέχθηκαν στο πρόγραμμα CUFEM 4 ως Βάση - Natural Basis και ως Κανονικοποίηση - Vector Norm.



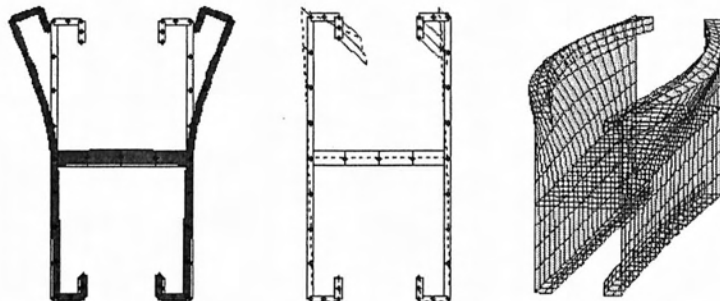
Σχήμα 5.42 Γραφική και ποσοστιαία αναπαράσταση της συνεισφοράς (modal identification) των ιδιομορφών σε όλες τις ιδιομορφές της χαρακτηριστικής καμπύλης.

a) Ασαφές τοπικό ελάχιστο



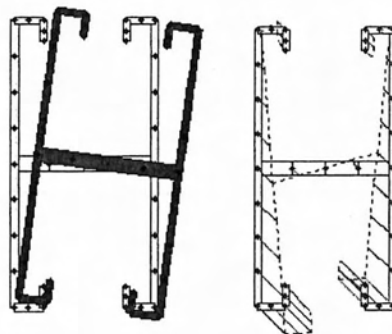
Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)	
	Ναι		Ναι		Ναι	
Μισό μήκος κύματος(mm)	70	Load factor	8.4505	Mcr(KNm)	29.33	
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D		L		O
	2.1	70.6		8.7		18.6

b) Τοπικό ελάχιστο



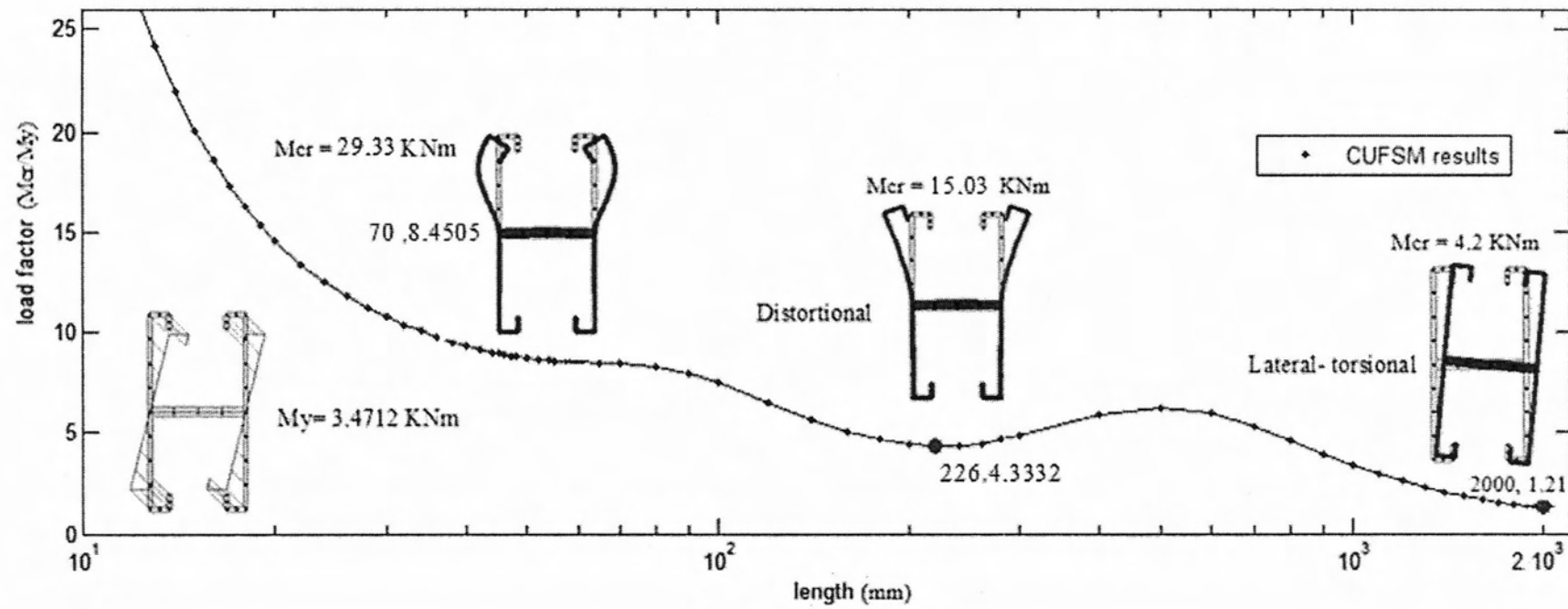
Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)	
	Ναι		Ναι		Ναι	
Μισό μήκος κύματος(mm)	226	Load factor	4.3332	Mcr(KNm)	15.03	
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D		L		O
	0.3	98.8		0.5		0.5

c) Φυσικό μήκος δοκού



Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)	
	Όχι		Ναι		Ναι	
Μισό μήκος κύματος(mm)	2000	Load factor	1.2111	Mcr(KNm)	4.204	
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D		L		O
	98.5	1.1		0		0.4

Στο Σχήμα 5.43 παρουσιάζονται: η χαρακτηριστική καμπύλη των δοκών τύπου K6 με τις ιδιομορφές, τις ιδιοτιμές, τα μισά μήκη κύματος των τριών χαρακτηριστικών σημείων της καμπύλης που εξετάστηκαν παραπάνω.

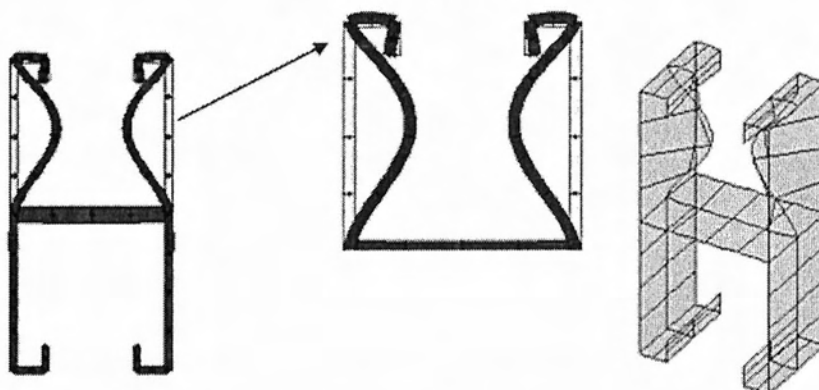
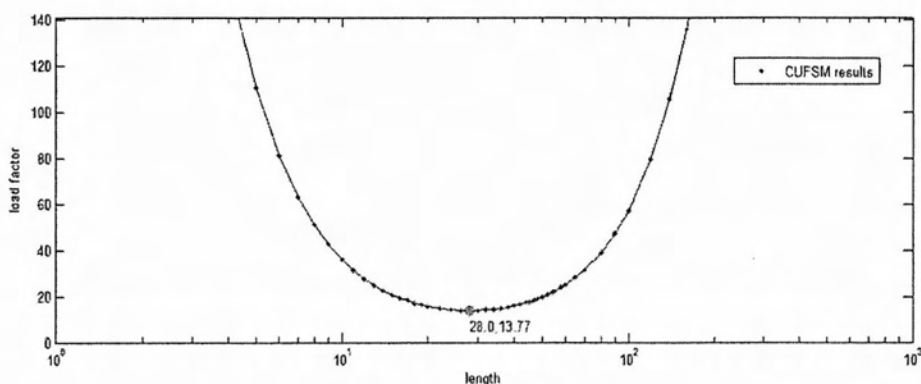


Σχήμα 5.43 Χαρακτηριστική καμπύλη (signature curve) της διατομής Κ6.

## 5.7.2 Αποτελέσματα ανάλυσης με την Περιορισμένη Μέθοδο Πεπερασμένων Λωρίδων

Στη συνέχεια μέσω της (ΠΜΠΛ), για κάθε μία από τις κύριες μορφές λυγισμού θα παρουσιάζεται: η καμπύλη ανάλυσης της (ΠΜΠΛ) και για το μικρότερο συντελεστή φορτίου της κάθε καμπύλης (τοπικό ελάχιστο) θα αναλύεται η ιδιομορφή και θα υπολογίζεται η κρίσιμη ροπή.

### a) Τοπικός Λυγισμός



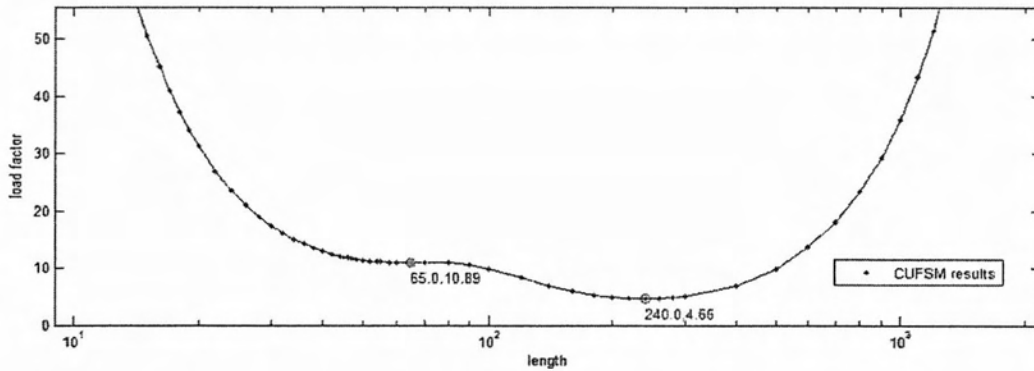
Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)
	Ναι	Όχι	Ναι	Όχι	Όχι
Μισό μήκος κύματος(mm)	28	Load factor	13.77	Mcr(KNm)	47.8
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D	L	O	
	0	0	100	0	

Όπως έχει τονιστεί και στην ενότητα 5.4.1 οι διατομές (K6) λόγω της διαμόρφωσής τους, με την ύπαρξη ακραίων ενισχύσεων και συγκεκριμένα διπλής αναδιπλώσεως (διπλό στραντζάρισμα) δεν κινδυνεύουν από εμφάνιση τοπικού λυγισμού. Αυτό καταδεικνύεται και από τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας αφού η πιο κρίσιμη

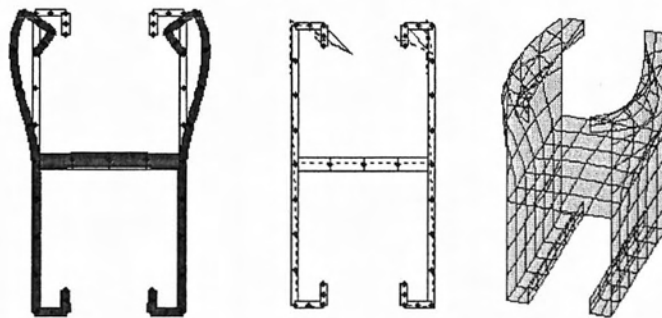


μη ιδιομορφή τοπικού λυγισμού προκύπτει για  $M_{cr} = 47.8 \text{ KNm}$ , ροπή μεγαλύτερη από τις υπόλοιπες κρίσιμες ροπές των υπόλοιπων ιδιομορφών της Κ6. (Σχήμα 5.44)

b) Λυγισμός με στρέβλωση

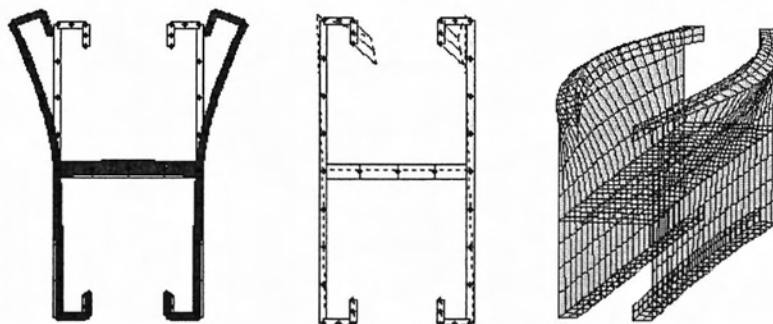


a) Πρώτο τοπικό ελάχιστο της καμπύλης λυγισμού με στρέβλωση της διατομής



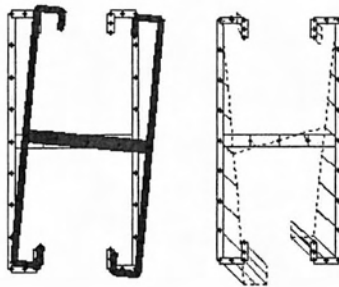
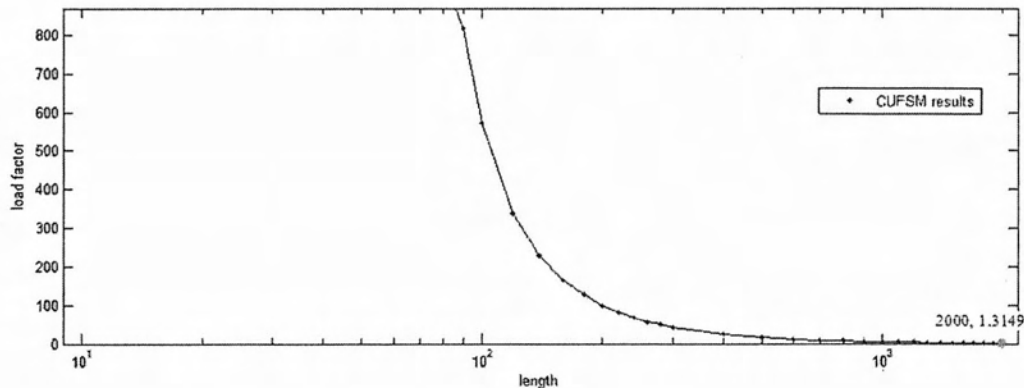
Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)
	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Μισό μήκος κύματος(mm)	65	Load factor	10.89	$M_{cr}(\text{KNm})$	37.8
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D	L	O	O
	0	100	0	0	0

b) Δεύτερο τοπικό ελάχιστο της καμπύλης λυγισμού με στρέβλωση της διατομής



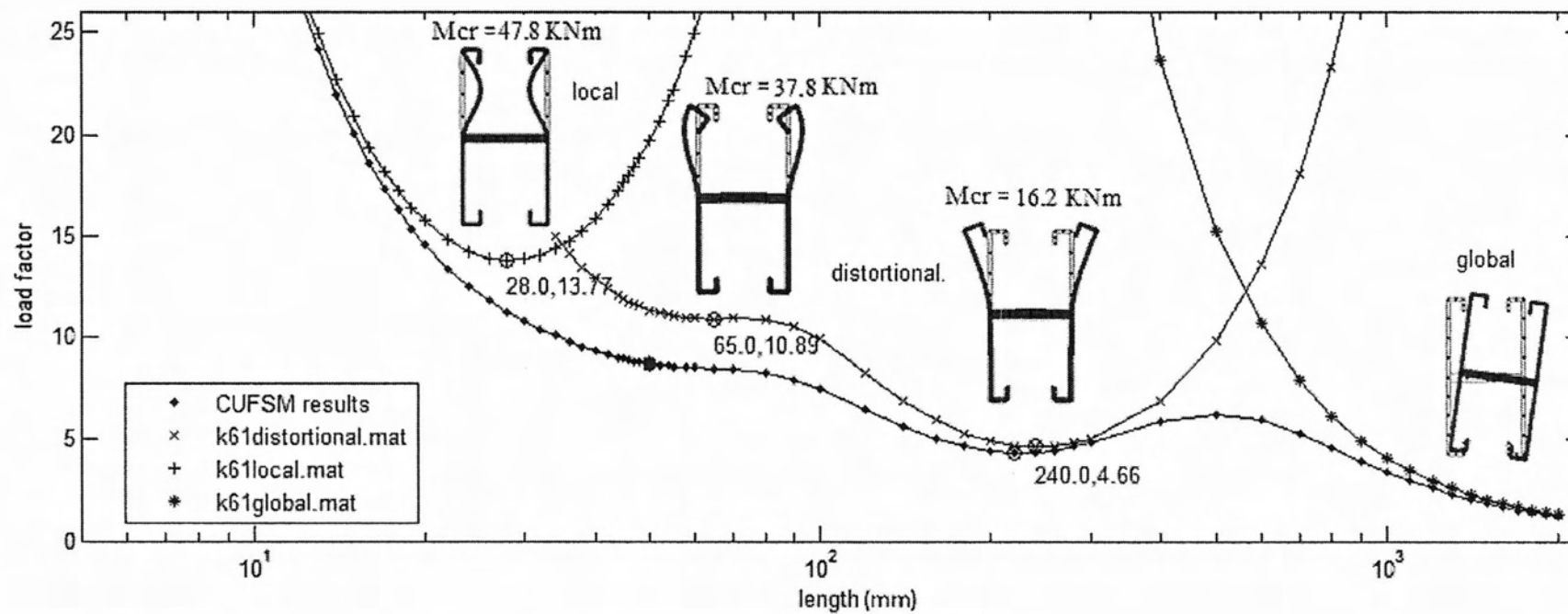
Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)	
	Ναι		Ναι		Ναι	
Μισό μήκος κύματος(mm)	240	Load factor	4.66	Mcr(KNm)	16.17	
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D		L		O
	0	100		0		0

c) Στρεπτοκαμπτικός λυγισμός



Σχήμα	Στρέβλωση (distortion)		Μετακίνηση εσωτερικών κυρίων κόμβων		Αξονικές μετακινήσεις(warping)	
	Όχι		Ναι		Ναι	
Μισό μήκος κύματος(mm)	2000	Load factor	1.3149	Mcr(KNm)	4.564	
Ποσοστιαία συμμετοχή ιδιομορφών	G	D		L		O
	100	0		0		0

Στο Σχήμα 5.44 μπορεί κανείς να διακρίνει το συγκριτικό διάγραμμα της χαρακτηριστικής καμπύλης της (ΜΠΛ) με τις καμπύλες της ανάλυσης της (ΠΜΠΛ). Σημαντικό στοιχείο που πρέπει κανείς να λάβει υπόψη στη σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων, είναι ότι η (ΠΜΠΛ) είναι πάντα πιο συντηρητική της (ΜΠΛ) εξαιτίας των επιπρόσθετων περιορισμών που επιβάλλει στο δυνατό πεδίο των μετακινήσεων του φορέα. Οι διαφορές στα αποτελέσματα των δύο μεθόδων συμπεριλαμβάνονται στον Πίνακα που ακολουθεί το Σχήμα 5.44.



Σχήμα 5.44 Συγκριτικό διάγραμμα χαρακτηριστικής καμπύλης και καθαρών ιδιομορφών της Κ6.

	Τοπικός λυγισμός	Λυγισμός με στρέβλωση		Καθολικός λυγισμός
FSM analysis	Μη ύπαρξη τοπικού ελαχίστου	-	15.065 KNm	4.204 KNm
cFSM analysis	47.8 KNm	37.8 KNm	16.2 KNm	4.5643 KNm

### 5.7.3 Σύγκριση των αποτελεσμάτων μεταξύ των Μεθόδων Πεπερασμένων Λωρίδων και Πεπερασμένων Στοιχείων

Στο παρόν κεφάλαιο συγκρίνονται τα αποτελέσματα της ιδιομορφικής ανάλυσης της (ΜΠΣ) με τα αποτελέσματα ανάλυσης ευστάθειας της (ΜΠΛ) για το στατικό σύστημα της ενότητας 5.5. Στην ανάλυση με τη (ΜΠΣ) δεν πραγματοποιείται ιδιομορφική ανάλυση για διαφορετικά μήκη όπως στη (ΜΠΛ), αλλά εξετάζονται όλες οι ιδιομορφές λυγισμού που παρουσιάζονται για ένα δεδομένο μήκος του μέλους κατά αύξουσα σειρά των ιδιοτιμών και πρέπει ο μελετητής να αποφασίσει για την κατάταξη τους στις διάφορες μορφές λυγισμού.

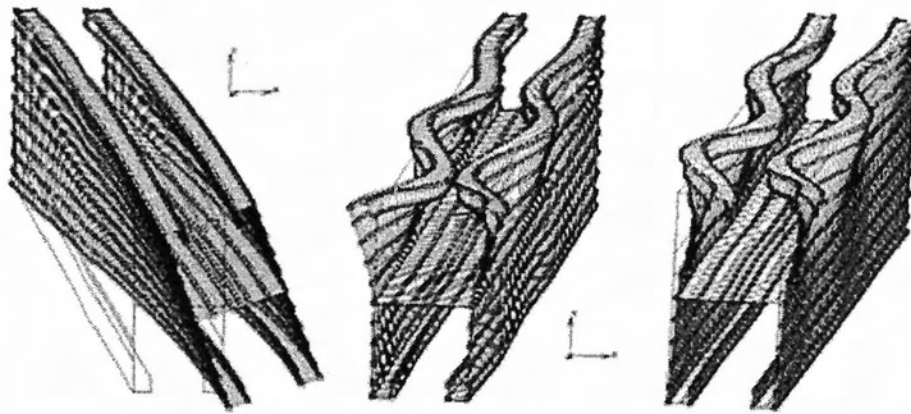
Ένας τρόπος σύγκρισης των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων είναι η εκτέλεση ιδιομορφικών αναλύσεων με τη (ΜΠΣ) για διαφορετικά μήκη του φορέα και η παράλληλη σύγκριση με τα αποτελέσματα της χαρακτηριστικής καμπύλης για τα αντίστοιχα μισά μήκη κύματος (half-wavelengths). Όμως επειδή οι αξονικές μετακινήσεις της (ΜΠΣ) είναι γενικές ενώ οι αντίστοιχες της (ΜΠΛ) έχουν τη μορφή των αντίστοιχων τριγωνομετρικών αξονικών συναρτήσεων σχήματος, τα αποτελέσματα δεν μπορούν να θεωρηθούν ταυτόσημα.

Ένας άλλος πιο ακριβής τρόπος, που περιγράφεται από τους (Schafner, B.W., Moen, C.D., 2010), θα χρησιμοποιηθεί σ' αυτή την ενότητα. Για ένα συγκεκριμένο φυσικό μήκος του φορέα (εδώ 2000 mm) αλλά για  $m \geq 1$  πραγματοποιείται ανάλυση με τη (ΜΠΛ) για αξονικές συναρτήσεις σχήματος ( $Y_m = \sin(m\pi y/a)$ ) που δεν περιορίζονται στη μορφή του μισού μήκους κύματος ημιτονοειδούς συνάρτησης όπως στην περίπτωση της χαρακτηριστικής καμπύλης. Προσεγγίζεται κατ' αυτό τον τρόπο σε μεγαλύτερο βαθμό το γενικό πεδίο μετακινήσεων των πεπερασμένων στοιχείων στην αξονική διεύθυνση.

Στα επόμενα σχήματα συγκρίνονται οι τρεις πρώτες ιδιομορφές λυγισμού της ιδιομορφικής ανάλυσης με τη (ΜΠΣ) με τις αντίστοιχες της (ΜΠΛ), ενώ στον πίνακα που ακολουθεί συγκρίνονται η ιδιοτιμές που προκύπτουν από τις δύο μεθοδολογίες.

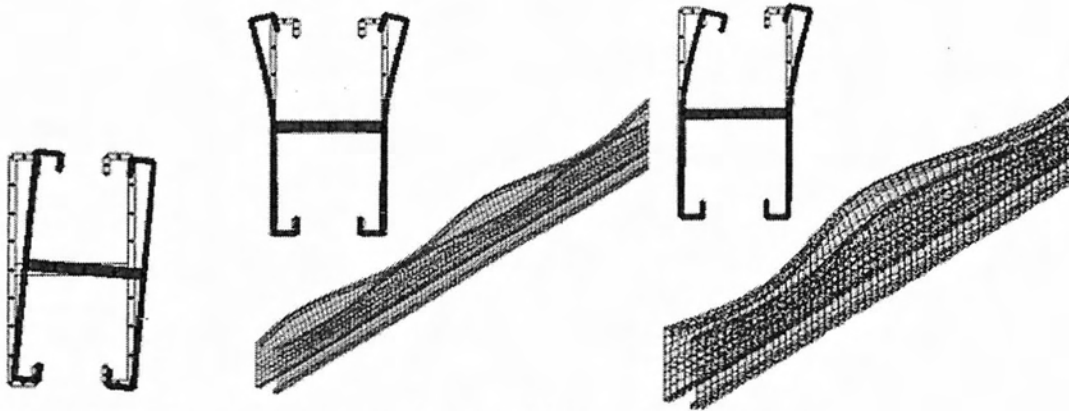
Μέθοδος	1 <sup>η</sup> ιδιομορφή	2 <sup>η</sup> ιδιομορφή	3 <sup>η</sup> ιδιομορφή
FEM	4.648 KNm	15.4 KNm	16.08 KNm
FSM	4.204 KNm	15.04 KNm	15.77 KNm
Διαφορά	9.04 %	2.34 %	1.93 %

Πίνακας 5.9 Σύγκριση των ιδιοτιμών μεταξύ ιδιομορφικής ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων και ανάλυσης πεπερασμένων λωρίδων.



Πλευρικός λυγισμός:  
 $M_{cr} = 4.648 \text{ KNm}$

Λυγισμός με στρέβλωση:  
 $M_{cr} = 15.4 \text{ KNm}$  ,  $M_{cr} = 16.08 \text{ KNm}$



Πλευρικός λυγισμός:  
 $M_{cr} = 4.204 \text{ KNm}$

Λυγισμός με στρέβλωση:  
 $M_{cr} = 15.04 \text{ KNm}$   $M_{cr} = 15.77 \text{ KNm}$

Σχήμα 5.45 Συγκριτική παράθεση των ιδιομορφών των τριών μικρότερων ιδιοτιμών της ιδιομορφικής ανάλυσης της (ΜΠΣ) και των αντίστοιχων ιδιομορφών της (ΜΠΛ).

## Βιβλιογραφία

- Adany, S. (2004). *Buckling mode classification of members with open thin-walled cross-sections by using the finite strip method*. Baltimore: Johns Hopkins University.
- AISI. (2004). *Supplement to the North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members*. American Iron And Steel Institute.
- AISI. (2006). *Direct Strength Method (DSM) Design Guide*. American Iron and Steel Institute. Washington, D.C.
- Dinar Camotim, Anisio Andrade, Cilmar Basaglia. (2012, September 1). Some thoughts on a surprising result concerning the lateral-torsional buckling of monosymmetric I-section beams. *Thin-Walled Structures*, pp. 216-221.
- EN 1993-1-1. (2005). In *Eurocode 3: Design of steel structures - General rules and rules for buildings*. European Union.
- EN 1993-1-3. (2006). In *Eurocode 3: General rules - Supplementary rules for cold-formed members and sheeting* (pp. 73,100-118). European Union.
- Galambos, T. V. (1998). *Guide to stability design criteria for metal structures*. John Wiley & Sons.
- Kala, Z. (2013). Elastic Lateral-Torsional Buckling of Simply Supported Hot-Rolled Steel I-Beams with Random Imperfections. *11th International Conference on modern Building Materials, Structures and Techniques*, (pp. 504-515). Elsevier.
- Li, Z. (2009). *BUCKLING ANALYSIS OF THE FINITE STRIP METHOD AND THEORETICAL EXTENSION OF THE CONSTRAINED FINITE STRIP METHOD FOR GENERAL BOUNDARY CONDITIONS*. Baltimore, MD, USA: Department of Civil Engineering, Johns Hopkins University.
- Li, Z., Hanna, M.T. , Adany, S. , Schafer, B.W. (2011). Impact of basis, orthogonalization, and normalization on the constrained Finite Strip Method for stability solutions of open thin-walled members. *Thin-walled Structures*, 1108-1122.
- Nirosha Dolamune Kankanamge, Mahen Mahendran. (2012). Behaviour and design of cold-formed steel beams subject to lateral-torsional buckling. *Thin-walled Structures*, 25-38.
- Sándor Ádány, B.W. Schafer. (2008). A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method. *Journal of constructional Steel Research*, 12-29.
- Sarawit, A. (2006, December). [www.ce.jhu.edu/bschafer/cutwp](http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cutwp). Retrieved from [www.ce.jhu.edu/bschafer/](http://www.ce.jhu.edu/bschafer/).

- Schafer, B.W. , Ádány, S. (2006). Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. *Proceedings of the Eighteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, (pp. 39-54). Orlando, Florida.
- Schafer, B.W., Moen, C.D. (2010). Computational modeling of cold-formed steel. *Thin-walled Structures*, 752-762.
- Silvestre, N., Camotim, D. (2002). First-order generalised beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-walled Structures*, 755-89.
- Silvestre, N., Camotim, D. (2002). Second-order generalized beam theory for arbitrary orthotropic materials. *Thin-walled Structures*, 791-820.
- Stephen P. Timoshenko, James M. Gere. (1961). *Theory of Elastic Stability*. McGraw-Hill.
- Z. Li, B.W. Schafer. (2010). Application of the finite strip method in cold-formed steel member design. *Journal of Constructional Steel Research*, 971-980.
- Zhanjie, Li , Schafer, B. W. (2010). Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. *Twentieth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, (p. 17). Saint Louis, Missouri, USA.
- Zhanjie, Li, Schafer, B.W. (2010). Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. *Twentieth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*. St. Louis.
- E. Μυστακίδης, Α. Μιχαηλίδης, Κ. Τζάρος, Δ. Παντούσα, Μ. Μαλικουτσάκης. (2011). Σχεδιασμός μεταλλικών βάσεων φωτοβολταϊκών στοιχείων με τον Ευρωκώδικα 3, αξιοποιώντας την υποβοηθούμενη από πειράματα διαδικασία σχεδιασμού. *7ο Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών*. Βόλος.

