



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

Μελέτη ακολουθίας Fibonacci με άθροισμα  
k-όρων μετά από m-όρους

Άγγελος Ηλίας

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**  
Επιβλέποντες  
Μαρία Αδάμ  
Επίκουρος Καθηγήτρια

Νικόλαος Ασημάκης  
Καθηγητής

Λαμία, Ιούλιος 2015





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ  
ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

Μελέτη ακολουθίας Fibonacci με άθροισμα  
k-όρων μετά από m-όρους

Άγγελος Ηλίας

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέποντες  
Μαρία Αδάμ  
Επίκουρος Καθηγήτρια  
Νικόλαος Ασημάκης  
Καθηγητής**

Λαμία, Ιούλιος 2015

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις <sup>(1)</sup>, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία: ...../...../20.....

Ο Δηλών

(Υπογραφή)

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

# Μελέτη ακολουθίας Fibonacci με άθροισμα k-όρων μετά από m-όρους

Άγγελος Ηλίας

## Τριμελής Επιτροπή:

Μαρία Αδάμ, Επίκουρος Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας (επιβλέπουσα)

Νικόλαος Ασημάκης, Καθηγητής του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Τ.Ε του Τ.Ε.Ι Στερεάς Ελλάδας (επιβλέπων)

Βασίλειος Πλαγιανάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας



## Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας από τον Οκτώβριο του 2012 έως τον Ιούνιο του 2015.

Έχοντας ολοκληρώσει την πτυχιακή μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

Την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου κα. Μαρία Αδάμ, Επίκουρο Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για την υπομονή, την εμπιστοσύνη και την ακεραιότητα της για την υλοποίηση της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Επίσης την πολύτιμη βοήθεια καθώς και την καθοδήγηση της στην επίλυση διάφορων θεμάτων στην πορεία της συγγραφής αυτής της εργασίας .

Επιπλέον τον επιβλέποντα καθηγητή και μέλος επιτροπής κ. Νικόλαο Ασημάκη, Καθηγητή του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Τ.Ε του Τεχνικού Εκπαιδευτικού Ιδρύματος Στερεάς Ελλάδας για τη συμβολή και την προσφορά του για την επίλυση διάφορων παραμέτρων στην πορεία της πτυχιακής εργασίας και τις διάφορες συζητήσεις που είχαμε επανειλημμένα. Το άλλο μέλος της Τριμελούς εξεταστικής επιτροπής κ. Βασίλειο Πλαγιανάκο για την συμμετοχή στην εξεταστική επιτροπή καθώς διαβεβαιώνεται ότι οι παρατηρήσεις τους θα ληφθούν υπ' όψιν και θα ενσωματωθούν στο τελικό κείμενο.

Το Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και όλους τους διδάσκοντες για το θερμό ακαδημαϊκό κλίμα και την άψογη συνεργασία μας για διάφορα θέματα .

Τους συμφοιτητές μου Θανάση Παγιαβλά και Ειρήνη Τεπελίδου για την επικοινωνιακή συζήτηση σε διάφορα τεχνικά θέματα καθώς και την ψυχολογική υποστήριξη που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας .

Τέλος, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στους γονείς μου οι οποίοι με στήριξαν με διάφορους τρόπους κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και όλους τους φίλους μου που με φροντίζουν και με ολοκληρώνουν σαν άνθρωπο .

Λαμία, Ιούνιος 2015





# Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Πρόλογος ..... 1

## Κεφάλαιο 1

1.1 Βασικές έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας .....	5
1.1.1 Ορισμοί Πινάκων .....	5
1.1.2 Χαρακτηριστικά Ποσά. Σημαντικότερα θεωρήματα μη αρνητικών πινάκων .....	8
1.2 Βασικές έννοιες για ακολουθίες–Ακολουθία Fibonacci .....	12
1.2.1 Οι σημαντικότεροι ορισμοί των ακολουθιών .....	12
1.2.2 Ορισμός ακολουθίας Fibonacci .....	14
1.2.3 Γεωμετρική ερμηνεία της ακολουθίας Fibonacci .....	15
1.2.4 Το πρόβλημα των κουνελιών .....	17
1.2.5 Μαθηματικοί τύποι .....	18
1.2.6 Γνωστές ακολουθίες .....	21

## Κεφάλαιο 2

### Ακολουθία Fibonacci με άθροισμα $k$ – όρων

2.1 Ακολουθία και πίνακας Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων .....	23
2.1.1 Ακολουθία Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων .....	23
2.1.2 Σχέση πινάκων και όρων της ακολουθίας Fibonacci .....	24
2.1.3 Ιδιότητες των ιδιοτιμών του $k$ -Fibonacci πίνακα $Q_k$ .....	27
2.2 Μη Αναδρομικός τύπος ακολουθίας Fibonacci .....	30
2.3 Χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας Fibonacci $k$ -αθροίσματος .....	33
2.4 Δυνάμεις $k$ -Fibonacci πίνακα $Q_k$ .....	36

## Κεφάλαιο 3

### **Ακολουθία Fibonacci με άθροισμα $k$ – όρων μετά από $m$ -όρους**

3.1 Ακολουθία και πίνακας Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων μετά από $m$ -όρους.....	45
3.1.1 Ακολουθία Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων μετά από $m$ -όρους .....	45
3.1.2 Σχέση πινάκων και όρων της ακολουθίας Fibonacci .....	46
3.1.3 Ιδιότητες των ιδιοτιμών του $k,m$ -Fibonacci πίνακα $R_{k,m}$ .....	49
3.2 Μη Αναδρομικός τύπος ακολουθίας Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων μετά από $m$ -όρους.....	52
3.3 Χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας Fibonacci $k$ -αθροίσματος μετά από $m$ -όρους .....	55
3.4 Δυνάμεις $k,m$ -Fibonacci πίνακα $R_{k,m}$ .....	58
<b>Συμπεράσματα .....</b>	<b>65</b>
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>67</b>
<b>Παράρτημα Α .....</b>	<b>69</b>
<b>Παράρτημα Β .....</b>	<b>71</b>
<b>Περίληψη .....</b>	<b>77</b>

# Πρόλογος

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία θα αναφερθούμε στη μελέτη ακολουθιών Fibonacci καθώς και διαφόρων γνωστών ακολουθιών με παρόμοιες ιδιότητες, οι οποίες έχουν βρει εφαρμογή σε ποικίλους κλάδους επιστημών.

Κάθε κεφάλαιο της πτυχιακής αυτής εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε τμήματα τα οποία αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ μερικά αριθμούνται με τρεις αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεση της ενότητας. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι παρατηρήσεις και τα παραδείγματα αριθμούνται με δύο αριθμούς, απ' τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισής τους. Οι τύποι αριθμούνται με τρεις αριθμούς, απ' τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος στη σειρά εμφάνισής του ενώ οι πίνακες και τα σχήματα έχουν μόνο έναν αριθμό που αναφέρεται στη σειρά εμφάνισής τους στην πτυχιακή εργασία.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε ορισμούς, προτάσεις και θεωρήματα από τη Γραμμική Άλγεβρα, τα οποία είναι απαραίτητα στην ανάπτυξη και απόδειξη της θεωρίας που αναπτύσσεται στα επόμενα κεφάλαια. Επίσης, γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση σε ορισμούς και προτάσεις που αφορούν στις ακολουθίες. Γίνεται αναφορά στην ακολουθία Fibonacci, η οποία αποτελεί μια αναδρομική ακολουθία με τύπο  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  και αρχικές συνθήκες  $f_1 = f_2 = 1$ , που πήρε το όνομά της από το δημιουργό Leonard Fibonacci. Η γεωμετρική της ερμηνεία εκφράζει τη διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δύο τμήματα (μέσος και άκρος λόγος) και την κατασκευή της χρυσής σπείρας. Ο λόγος των δύο τμημάτων μας δίνει έναν σταθερό αριθμό  $\varphi = 1.618$ , ο οποίος είναι χαρακτηριστικός για τη συγκεκριμένη ακολουθία. Επιπλέον εκτός από την ακολουθία Fibonacci υπάρχουν και άλλες δημοφιλείς ακολουθίες, οι οποίες σχετίζονται με την ακολουθία Fibonacci, δίνονται και αυτές από αναδρομικό τύπο, όπως για παράδειγμα, η ακολουθία Tribonacci, Tetranacci, Padovan, στις οποίες γίνεται αναφορά και θα τις συναντήσουμε και στα επόμενα κεφάλαια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η μελέτη ακολουθιών Fibonacci, της οποίας ο  $n$ -οστός όρος της δίνεται από τον αναδρομικό τύπο  $f_n = \sum_{j=1}^k f_{n-j}$ , όπου  $k$  είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει το πλήθος των όρων που προστίθενται και με αρχικές συνθήκες  $f_1 = f_2 = \dots = f_k = 1$ . Ορίζεται ένας κατάλληλος πίνακας Fibonacci,  $Q_k$ , με τη βοήθεια του οποίου κάθε όρος της ακολουθίας σχετίζεται με αυτόν τον πίνακα. Η μέγιστη πραγματική ιδιοτιμή του  $Q_k$  είναι η φασματική ακτίνα του, η οποία έχει τιμές μεταξύ 1 και 2. Αποδεικνύεται ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci δίνεται και με «κλειστό τύπο», ο οποίος συνδέεται με όλες τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Fibonacci  $Q_k$ . Το όριο της  $n$ -οστής ρίζας στο άπειρο καθώς και ο λόγος του επόμενου όρου της ακολουθίας προς τον προηγούμενο είναι ίσος με τη φασματική ακτίνα του  $Q_k$ . Τέλος γίνεται μελέτη της  $n$ -οστής δύναμης του πίνακα  $Q_k$  σε σχέση με τους όρους της αντίστοιχης ακολουθίας Fibonacci.

Στο τρίτο κεφάλαιο, δοθέντων δύο φυσικών αριθμών  $k, m$  γίνεται η μελέτη ακολουθιών Fibonacci με άθροισμα  $k$ -όρων μετά από  $m$ -όρους, της οποίας ο  $n$ -οστός όρος της δίνεται από τον αναδρομικό τύπο  $f_n = \sum_{j=m+1}^{k+m} f_{n-j}$ , με αρχικές συνθήκες  $f_1 = f_2 = \dots = f_{k+m} = 1$ . Ορίζεται ένας κατάλληλος πίνακας Fibonacci,  $R_{k,m}$ , με τη βοήθεια του οποίου κάθε όρος της ακολουθίας σχετίζεται με αυτόν. Αποδεικνύεται ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci δίνεται και με «κλειστό τύπο», ο οποίος συνδέεται με όλες τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Fibonacci  $R_{k,m}$ . Χαρακτηριστικές οριακές ιδιότητες των όρων της ακολουθίας συνδέονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $R_{k,m}$ . Τέλος, αποδεικνύεται ότι η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $R_{k,m}$  εξαρτάται από τους όρους της αντίστοιχης ακολουθίας Fibonacci και δίνεται η σχέση που συνδέει τα στοιχεία του πίνακα  $R_{k,m}^n$  με τους όρους της ακολουθίας.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας υπάρχουν τα συμπεράσματα, ένας κατάλογος με τα σχετικά συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο κείμενο, καθώς και δύο παραρτήματα. Στο πρώτο δίνονται ορισμένες πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του μαθηματικού Leonardo Pisano και στο δεύτερο αναφέρονται κώδικες-συναρτήσεις, που αναπτύχθηκαν χρησιμοποιώντας το λογισμικό Matlab [18] και Octave [6] και γράφτηκαν με σκοπό να υπολογίζουν τους όρους των ακολουθιών Fibonacci,

χαρακτηριστικά μεγέθη των Fibonacci πινάκων  $Q_k$ ,  $R_{k,m}$  καθώς και των δυνάμεών τους  $Q_k^n$ ,  $R_{k,m}^n$ .

Λαμία, Ιούνιος 2015



# Κεφάλαιο 1

## Βασικές έννοιες

### 1.1 Βασικές έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας

#### 1.1.1 Ορισμοί πινάκων

##### Ορισμός 1.1

Πίνακας  $A$  ονομάζεται μια ορθογώνια διάταξη των  $m \cdot n$  πραγματικών αριθμών,  $a_{i,j}$ , τοποθετημένοι σε  $m$  γραμμές και σε  $n$  στήλες ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Οι αριθμοί  $a_{i,j}$  ονομάζονται **στοιχεία** του πίνακα, τα οποία ανήκουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών,  $\mathbb{R}$ . Στη συνέχεια, ο  $m \times n$  πίνακας  $A$  συμβολίζεται  $[a_{i,j}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ .

Αν διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες από τον πίνακα  $A$ , ο πίνακας που προκύπτει ονομάζεται **υποπίνακας** του  $A$ . Ένας πίνακας  $A$  ονομάζεται **σύνθετος** πίνακας ή πίνακας **block**, αν τα στοιχεία του είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από αυτό του  $A$ . Οι υποπίνακες αυτοί είναι τέτοιοι ώστε τα στοιχεία – **υποπίνακες** που βρίσκονται στην ίδια στήλη, έχουν όλα τον ίδιο αριθμό στηλών. Ο σύνθετος πίνακας συμβολίζεται  $A = (A_{ij})$ , όπου  $A_{ij}$  είναι το στοιχείο-υποπίνακας, που προκύπτει από τη διαμέριση του αρχικού πίνακα  $A$  και βρίσκεται στην  $i$ -γραμμή και  $j$ -στήλη του πίνακα  $A$ .

Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

όπου  $A_{11} = [2 \ 1]$ ,  $A_{12} = [6]$ ,  $A_{13} = [1 \ 0 \ 3]$ ,  $A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , και

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες κατηγορίες πινάκων, που συναντώνται στα επόμενα κεφάλαια.

### Ορισμός 1.2

- Ένας  $1 \times n$  πίνακας λέγεται **πίνακας-γραμμή**, ενώ ένας  $m \times 1$  πίνακας λέγεται και **πίνακας-στήλη** ή **διάνυσμα-πίνακας-στήλη**.
- Εάν όλα τα στοιχεία ενός  $m \times n$  πίνακα είναι ίσα με μηδέν, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με  $0_{m \times n}$  ή με  $0$ , όταν δεν υπάρχει σύγχυση για τις διαστάσεις του πίνακα.
- Έστω  $A = [a_{ij}]$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Ο  $n \times m$  πίνακας  $[a_{ji}]$  ονομάζεται **ανάστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^T$ .

Για παράδειγμα, εάν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ , τότε  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ .

- Έστω  $A = [a_{ij}]$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Ο  $m \times n$  πίνακας  $[|a_{ij}|]$  ονομάζεται **απόλυτη τιμή** του  $A$  και συμβολίζεται με  $|A|$ .

Για παράδειγμα, εάν  $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -8 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ , τότε  $|A| = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ .



- Εάν ένας  $m \times n$  πίνακας έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ( $m = n$ ), ο πίνακας αυτός ονομάζεται **τετραγωνικός**.
- Ένας  $n \times n$  τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, αν για κάθε  $i \neq j$  ισχύει  $a_{ij} = 0$ , δηλαδή αν κάθε στοιχείο, που δεν βρίσκεται στη διαγώνιο, είναι ίσο με μηδέν. Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται και ως  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .  
Ειδικότερα, ο  $n \times n$  διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται  $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ .
- Ένας  $n \times n$  τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός**, αν για κάθε  $i > j$  ισχύει  $a_{ij} = 0$ , δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.  
Αντίθετα ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός**, αν για κάθε  $i < j$  ισχύει  $a_{ij} = 0$ , δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

### Ορισμός 1.3

Ένας  $m \times n$  πίνακας  $A$  ονομάζεται **θετικός** (positive) πίνακας και συμβολίζεται με  $A > 0$ , όταν όλα τα στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί.

Αν ο πίνακας  $A$  έχει όλα τα στοιχεία του μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός ονομάζεται **μη-αρνητικός** (non-negative) πίνακας και συμβολίζεται  $A \geq 0$ .

Για παράδειγμα, ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$  είναι θετικός, ενώ ο πίνακας  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  είναι μη-αρνητικός.

### Ορισμός 1.4

Έστω  $n \times n$  πραγματικός πίνακας  $A$ . Ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **ανάγωγος** (irreducible),

αν για οποιονδήποτε  $n \times n$  πραγματικό πίνακα μετάθεσης  $P$  ισχύει  $P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ ,

με  $A_i \neq 0$  για κάθε  $i = 1, 2, 3, 4$ , όπου  $A_i$  είναι ένας  $r \times r$  πίνακας με  $1 \leq r \leq n-1$  και  $A_4$  είναι ένας  $(n-r) \times (n-r)$  πίνακας.

Σε διαφορετική περίπτωση ο  $A$  ονομάζεται **μη-ανάγωγος** (reducible), δηλαδή, υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P$  έτσι ώστε  $P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ .

Για να διαπιστωθεί αν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ανάγωγος ή μη-ανάγωγος, δεν εξετάζεται η ύπαρξη του πίνακα μετάθεσης  $P$  και η επαλήθευση της σχέσης που διατυπώνεται στον Ορισμό 1.4, αλλά εφαρμόζεται η ακόλουθη πρόταση, όπου διατυπώνεται ένα ικανό και αναγκαίο κριτήριο για την απόδειξη της αγωγιμότητας ενός πίνακα, [8].

### Πρόταση 1.5

Ο  $n \times n$  πραγματικός πίνακας  $A$  είναι ανάγωγος αν και μόνο αν ισχύει

$$(I_n + |A|)^{n-1} > 0, \quad (1.1.1)$$

όπου  $|A|$  σημειώνει την απόλυτη τιμή του πίνακα  $A$ , (Ορισμός 1.2).

### 1.1.2 Χαρακτηριστικά ποσά. Σημαντικότερα θεωρήματα μη-αρνητικών πινάκων

Έστω ένας  $n \times n$  τετραγωνικός πίνακας  $A$  και ένα  $n \times 1$  διάνυσμα-πίνακας-στήλη  $x$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x, \text{ με } x \neq 0, \quad (1.1.2)$$

για κάποιον αριθμό (πραγματικό ή μιγαδικό)  $\lambda$ . Η τιμή του  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα  $A$  και το  $x$  ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector), αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα  $A$ .

### Ορισμός 1.6

Το σύνολο των ιδιοτιμών του  $n \times n$  πίνακα  $A$  ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα και συμβολίζεται  $\sigma(A)$ . Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή, κατά απόλυτη τιμή, του πίνακα ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται με  $\rho(A)$ , δηλαδή

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}. \quad (1.1.3)$$

Η ισότητα (1.1.2) γράφεται ισοδύναμα  $Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ . Αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή  $\lambda$  είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα λύνοντας το γραμμικό σύστημα, που προκύπτει από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)x = 0, \text{ για } x \neq 0.$$

Για να υπολογίσουμε όλες τις ιδιοτιμές  $\lambda \in \mathbb{F}$  ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ , πρέπει να ισχύει η διανυσματική εξίσωση (1.1.2), η οποία οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det[A - \lambda I] = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \alpha_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.1.4)$$

Δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές  $\lambda$  του πίνακα  $A$  πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (1.1.4), η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του τετραγωνικού πίνακα  $A$ .

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέρος της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.1.4) καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο  $n$ -οστού βαθμού, το οποίο γράφεται

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det[A - \lambda I] = \det[\lambda I - A] = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0, \quad (1.1.5)$$

και ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του  $A$  με συντελεστές  $b_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών  $\mathbb{C}$  και να γραφεί στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i},$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$  είναι οι διακεκριμένες ρίζες του  $\chi_A(\lambda)$  στο  $\mathbb{C}$ , και  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i$  η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα**.

Είναι φανερό ότι, για έναν  $n \times n$  πίνακα  $A$  ισχύει  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i = n$ .

Αν για κάποιο  $i$  ισχύει  $\nu_i = 1$ , η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **απλή**, διαφορετικά ονομάζεται **πολλαπλή**.

### Πρόταση 1.7

Έστω ο  $n \times n$  πίνακας  $A$  και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι οι ιδιοτιμές του.

- i) Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- ii)  $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^n b_0$ , όπου  $b_0$  είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (1.1.5).

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζεται ένα διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα, τα άκρα του διαστήματος είναι το άνω και κάτω φράγμα της, τα οποία εξαρτώνται από τα στοιχεία του πίνακα, [8, Theorem 8.1.22], [13, Theorem 7], [14].

### Θεώρημα 1.8

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  μη-αρνητικός πραγματικός πίνακας ( $A \geq 0$ ). Τότε ισχύουν:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \quad (1.1.6)$$

και

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \quad (1.1.7)$$

Στο ακόλουθο θεώρημα, το οποίο αποτελεί τη γενίκευση του θεωρήματος Perron-Frobenius, συγκεντρώνονται όλες οι ιδιότητες που έχει η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού και ανάγωγου πίνακα, (Ορισμός 1.3, Ορισμός 1.4, αντίστοιχα). Όπως αποδείχθηκε και [4, Θεώρημα 2.10] η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού και ανάγωγου πίνακα είναι μία πραγματική θετική ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας ίσης με 1.

### Θεώρημα 1.9

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  μη-αρνητικός ( $A \geq 0$ ) και ανάγωγος πίνακας. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- i)  $\rho(A) > 0$ .
- ii)  $\rho(A)$  είναι μια ιδιοτιμή του  $A$ .
- iii) Υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα  $x$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $Ax = \rho(A)x$ , και
- iv)  $\rho(A)$  είναι μια αλγεβρικά (επομένως και γεωμετρικά) απλή ιδιοτιμή του  $A$ .

### Ορισμός 1.10

Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  μη-αρνητικός ( $A \geq 0$ ) και ανάγωγος πίνακας. Αν ο πίνακας  $A$  έχει μια μόνο ιδιοτιμή πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου, με κέντρο  $(0,0)$  και ακτίνα  $\rho(A)$ , ονομάζεται **αρχικός πίνακας** (primitive). Σε αντίθετη περίπτωση, όπου υπάρχουν περισσότερες από μια ιδιοτιμές πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου, με κέντρο  $(0,0)$  και ακτίνα  $\rho(A)$ , ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **μη-αρχικός** (imprimitive).

Η επόμενη πρόταση δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες, σύμφωνα με τις οποίες μπορούμε να εξετάσουμε αν ένας μη-αρνητικός πίνακας  $A$  είναι αρχικός. Η μια συνθήκη εξαρτάται από ένα φυσικό αριθμό  $k$  άγνωστο, και σχετίζεται με την  $k$ -δύναμη του πίνακα  $A$ , γνωστή εκ των προτέρων, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος του πίνακα  $A$ .

### Θεώρημα 1.11

Έστω ένας  $n \times n$  μη-αρνητικός ( $A \geq 0$ ) και ανάγωγος πίνακας  $A$ . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

1. Ο  $A$  είναι αρχικός πίνακας.
2.  $A^k > 0$ , για κάποιο  $k \geq 1$ .
3.  $A^{n^2-2n+2} > 0$ .

## 1.2 Βασικές έννοιες για τις ακολουθίες-Ακολουθία Fibonacci

### 1.2.1 Οι σημαντικότεροι ορισμοί των ακολουθιών

#### Ορισμός 1.12

Ονομάζουμε **ακολουθία** πραγματικών αριθμών οποιαδήποτε συνάρτηση

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, μια ακολουθία έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{N}$  και οι τιμές της είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Έτσι, μια **ακολουθία** είναι ένα άπειρο πλήθος πραγματικών αριθμών, που προκύπτουν ως εικόνες της συνάρτησης  $a(n)$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , η δε αντίστοιχη τιμή  $a(n)$  της συνάρτησης συμβολίζεται ως  $a_n$ . Η εικόνα-τιμή της ακολουθίας ονομάζεται και **όρος** της ακολουθίας. Επίσης, ο όρος  $a_{n+1}$  χαρακτηρίζεται ως επόμενος όρος του  $a_n$  και ο  $a_{n-1}$  προηγούμενος του  $a_n$ . Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $n$ , η οποία παίρνει ως τιμές το σύνολο των φυσικών αριθμών  $\mathbb{N}$  ονομάζεται **δείκτης** και δείχνει τη σειρά επιλογής των όρων της ακολουθίας. Στη συνέχεια

Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε μία ακολουθία αντί για  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  θα σημειώνουμε

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ ή } \{a_n\}_{n=1,2,\dots} \text{ ή για συντομία } \{a_n\},$$

και θα γράφουμε

$$a_n = a(n), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τον τύπο της ακολουθίας, ο οποίος ονομάζεται **γενικός όρος** της ακολουθίας, όταν δίνεται μόνο ως συνάρτηση του  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Παράδειγμα 1.13

Για τις ακολουθίες :

- i)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = n$ , γράφουμε τους όρους της  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$
- ii)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = \frac{1}{n}$ , γράφουμε τους όρους της  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
- iii)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = 1$ , γράφουμε τους όρους της  $1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$
- iv)  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = m - n$ , και οποιονδήποτε  $m \in \mathbb{R}$ , γράφουμε τους όρους της ακολουθίας  $m - 1, m - 2, m - 3, \dots, m - n, \dots$

### Ορισμός 1.14

Μια ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  χαρακτηρίζεται **αύξουσα**, αν  $a_{n+1} \geq a_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , **γνησίως αύξουσα**, αν  $a_{n+1} > a_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , **φθίνουσα**, αν  $a_{n+1} \leq a_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και **γνησίως φθίνουσα**, αν  $a_{n+1} < a_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Η  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  χαρακτηρίζεται **μονότονη**, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα, και **γνησίως μονότονη**, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Η  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  χαρακτηρίζεται **σταθερή**, αν όλοι οι όροι της είναι ίσοι μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχει  $c$  ώστε  $\{a_n\} = \{c, c, \dots\}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

### Παράδειγμα 1.15

i) Η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = n^2$  είναι γνησίως αύξουσα, επειδή για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $a_{n+1} = (n+1)^2 > n^2 = a_n$ , το οποίο επαληθεύει τον Ορισμό 1.14.

ii) Η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = \frac{1}{n}$  είναι γνησίως φθίνουσα, επειδή για

κάθε  $n \in \mathbb{N}$   $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$ , επαληθεύοντας τον Ορισμό 1.14.

### Ορισμός 1.16

Λέμε ότι η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $a$**  ή ότι η  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **τείνει στον  $a$**  ή ότι ο  $a$  είναι το **όριο της**  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , αν

για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  ώστε να ισχύει  $|a_n - a| < \varepsilon$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

Το ότι η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $a$  συμβολίζεται με

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow a, \quad \text{όταν } n \rightarrow \infty.$$

Αν η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **δεν** συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή όταν το όριό της είναι κάποιο άπειρο ( $\pm\infty$ ), τότε λέμε ότι η  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  **αποκλίνει**.

### Παράδειγμα 1.17

Η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = \frac{1}{n}$  συγκλίνει στο 0.

**Απόδειξη :** Για κάθε  $\varepsilon > 0$  έχουμε

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Οπότε αρκεί να υπάρχει φυσικός αριθμός  $n_0$  τέτοιος ώστε  $n \geq n_0$ . Προφανώς  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  για κάθε  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , οπότε θεωρούμε κάθε φυσικό αριθμό  $n_0$  με  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ , με αποτέλεσμα κάθε δείκτης  $n > n_0$  είναι μεγαλύτερος του  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Συνεπώς ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του Ορισμού 1.16, άρα η ακολουθία  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με γενικό όρο  $a_n = \frac{1}{n}$  συγκλίνει στο 0.

□

### 1.2.2 Ορισμός ακολουθίας Fibonacci

Έστω μία ακολουθία με όρους  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της παραπάνω ακολουθίας προκύπτει ως άθροισμα των ακριβώς δύο προηγούμενων όρων της. Αυτό μπορούμε να το σημειώσουμε ως εξής

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ για κάθε } n \geq 2, \text{ και με αρχικές συνθήκες } f_1 = f_2 = 1. \quad (1.2.1)$$

Από την (1.2.1), για  $n = 2$  μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο  $f_3$  από τους δύο προηγούμενούς του,

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2,$$

για  $n = 3$  μπορούμε να βρούμε τον επόμενο όρο  $f_4$  από τους δύο προηγούμενούς του,

$$f_4 = f_3 + f_2 = 3 \text{ κτλ.}$$

Σε τέτοιες περιπτώσεις ακολουθιών, όπου δεν δίνεται ο γενικός όρος της ακολουθίας λέμε ότι η ακολουθία ορίζεται από έναν **αναδρομικό τύπο** και για να υπολογιστούν οι όροι της απαιτούνται οι τιμές κάποιων αρχικών όρων, οι οποίες ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**. Χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι στην (1.2.1) και στον αναδρομικό τύπο  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , για διαφορετικές αρχικές συνθήκες προκύπτουν διαφορετικές τιμές της ακολουθίας.

Για παράδειγμα, αν  $f_1 = 2$  και  $f_2 = 1$  έχουμε την ακολουθία  $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$

Η ακολουθία που υπολογίζεται από την (1.2.1) αποτελεί μια από τις πιο δημοφιλείς ακολουθίες παγκοσμίως, η οποία ονομάζεται **ακολουθία Fibonacci** και συμβολίζεται



ως  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  από το δημιουργό της (Leonard Pisano Fibonacci). Η ακολουθία Fibonacci από την (1.2.1) έχει όρους

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (1.2.2)$$

Η σπουδαιότητα της έγκειται στη **γεωμετρική ερμηνεία** και στην ύπαρξη διαφόρων **μαθηματικών τύπων**.

### 1.2.3 Γεωμετρική ερμηνεία της ακολουθίας Fibonacci

Υψώνουμε στο τετράγωνο τους όρους της ακολουθίας στην (1.2.2), οπότε προκύπτει :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 \\ 1 & 1 & 4 & 9 & 25 & 64 & 169 & 441 & 1156 & 3025 & 7921 & 20736 \dots \end{array}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα κατασκευάζουμε τον Πίνακα 1 ως ακολούθως.

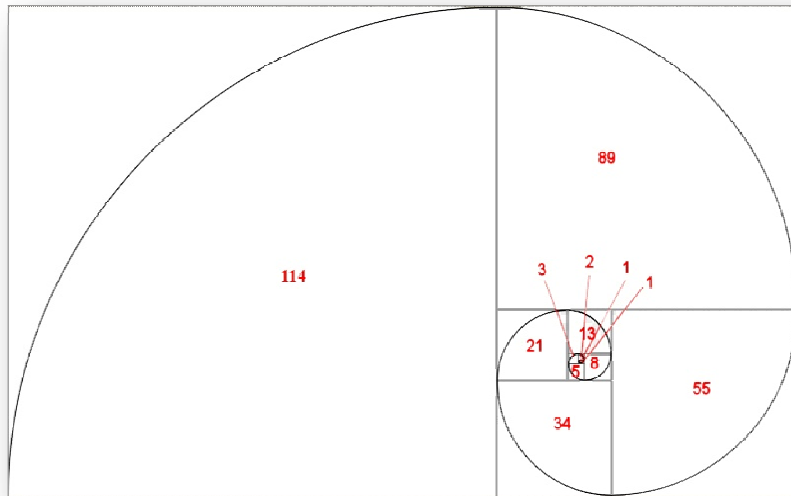
Πίνακας 1: Άθροισμα τετραγώνων των όρων της ακολουθίας-Γινόμενο των δύο τελευταίων όρων

Άθροισμα τιμών τετραγώνων	Fibonacci
1	1x1
1+1=2	1x2
1+1+4 = 6	2x3
1+1+4+9=15	3x5
1+1+4+9+25=40	5x8
1+1+4+9+25+64=104	8x13
1+1+4+9+25+64+169=273	13x21
1+1+4+9+25+64+169+441=714	21x34
1+1+4+9+25+64+441+1156=1870	34x55
1+1+4+9+25+64+441+1156+3025=4895	55x89
1+1+4+9+25+64+441+1156+3025+7921 =12816	89x144

Η σχέση των τετραγώνων της ακολουθίας εξηγείται ως εξής : προσθέτοντας τις τιμές των τετραγώνων, για παράδειγμα,  $1+1+4 = 6$ , το αποτέλεσμα δεν σχετίζεται με τις

τιμές της ακολουθίας, αλλά το γινόμενο των τιμών της ακολουθίας μας δίνει τις τιμές του αθροίσματος των τετραγώνων ( $6=2 \times 3$ ).

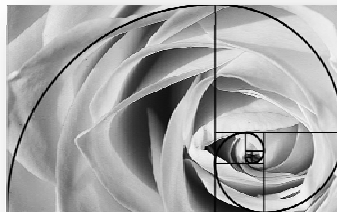
Έτσι, αν δημιουργήσουμε τετράγωνα με εμβαδόν των αντίστοιχων τιμών της ακολουθίας θα έχουμε το αντίστοιχο γεωμετρικό σχήμα γνωστό και ως **χρυσή σπείρα**, (βλέπε Σχήμα 1).



Σχήμα 1: Χρυσή σπείρα (Golden Ratio)

Από το Σχήμα 1, το συνολικό εμβαδόν ισούται με το άθροισμα των τιμών των τετραγώνων  $E = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 + 55^2 + 89^2 + 144^2 = 12816$  ( $89 \times 144$ ).

Η χρυσή σπείρα, δεν αποτελεί μόνο ένα αξιοπερίεργο μαθηματικό φαινόμενο αλλά έχει την αίσθηση του ωραίου και της αρμονίας καθώς συναντάται σχεδόν παντού στη φύση, ξεκινώντας από ένα απλό πετάλι ενός φυτού, (βλέπε, Σχήμα 2) μέχρι το σχήμα ενός ολόκληρου γαλαξία, (βλέπε, Σχήμα 3), το κοινό σημείο αναφοράς τους είναι η ακολουθία Fibonacci.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

### 1.2.4 Πρόβλημα των κουνελιών

Στο βιβλίο του Fibonacci, **Liber Abaci** (βλέπε, Παράρτημα Α), περιέχει διάφορα προβλήματα συμπεριλαμβανομένου και του κλασσικού προβλήματος με τα κουνέλια. Έστω ότι έχουμε 2 νεογέννητα κουνέλια, ένα αρσενικό και ένα θηλυκό. Θα βρούμε τον αριθμό των κουνελιών που θα παραχθούν κατά την διάρκεια ενός χρόνου αν :

- 1) Κάθε ζευγάρι χρειάζεται ένα μήνα για να γίνει ώριμο ζευγάρι.
- 2) Κάθε ζευγάρι παράγει ένα ζευγάρι κάθε μήνα, από το δεύτερο μήνα και μετά.
- 3) Κανένα ζευγάρι δεν πεθαίνει στη διάρκεια ενός έτους.

Επιπλέον για ευκολία, υποθέτουμε το πρώτο ζευγάρι των κουνελιών γεννήθηκε στις 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου. Θα χρειαστεί ένα μήνα για να γίνει ώριμο ζευγάρι, και έτσι θα υπάρξει μόνο ένα ζευγάρι στις 1<sup>η</sup> Φεβρουαρίου. Στις 1<sup>η</sup> Μαρτίου, θα είναι δύο μήνες παλαιό και θα παράξουν ένα καινούριο ζευγάρι και θα έχουμε σύνολο δύο ζευγάρια. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, θα υπάρξουν τρία ζευγάρια στις 1<sup>η</sup> Απριλίου, πέντε ζευγάρια στις 1<sup>η</sup> Μαΐου κτλ. Στον Πίνακα 2, βλέπουμε το σύνολο των ζευγαριών που προκύπτουν.

Πίνακας 2: Σύνολο ζευγαριών που προκύπτουν κατά τους μήνες

Αριθμός ζευγαριών	Ιαν	Φεβ	Μαρ	Απρ	Μαΐ	Ιουν	Ιουλ	Αυγ
Αποτελέσματα	0	1	1	2	3	5	8	13
Μωρά	1	0	1	1	2	3	5	8
Σύνολο	1	1	2	3	5	8	13	21

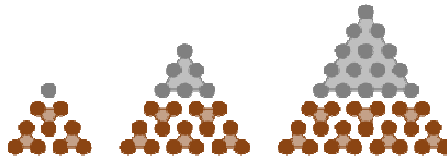
### 1.2.5 Μαθηματικοί τύποι

Πέρα από την γεωμετρική αναπαράσταση της ακολουθίας, έχουμε διάφορες μαθηματικές εφαρμογές στις οποίες συναντάμε τις τιμές της ακολουθίας.

Από παλιά, αρχαίοι πολιτισμοί χρησιμοποιούσαν τη σχηματική αναπαράσταση αριθμών για την επίλυση διάφορων προβλημάτων καθώς και για τον υπολογισμό αριθμητικών πράξεών τους. Για παράδειγμα, οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν αριθμητικά **τετράγωνα** ή **τρίγωνα** για την αναπαράσταση διαφόρων αριθμών. Έτσι, αριθμοί όπως,

$$1, 3, 6, 10, 16, 21$$

μπορούν να αναπαρασταθούν με μορφή τριγώνων (τριγωνικοί αριθμοί, βλέπε Σχήμα 4).



Σχήμα 4: Τρίγωνα και τριγωνικοί αριθμοί

#### Ορισμός 1.18

Έστω  $k, m$  μη-αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Για  $k \leq n$ , ο διωνυμικός συντελεστής

$\binom{n}{k}$  ορίζεται από τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (1.2.3)$$

όπου  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , με  $0! = 1! = 1$ .

Επίσης, ο διωνυμικός συντελεστής στη βιβλιογραφία συμβολίζεται και ως  $C(n, k)$  και  $nCk$ .

Για παράδειγμα, όταν  $n = 5$  και  $k = 3$  από την (1.2.3) έχουμε:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Επιπλέον για  $k = 0$ , έχουμε

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.$$

Ακόμη για  $k = n$  προκύπτει

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1.$$

Ο διωνυμικός συντελεστής  $\binom{n}{k}$ , όπου  $0 \leq k \leq n$ , μπορεί να πάρει μορφή τριγώνου,

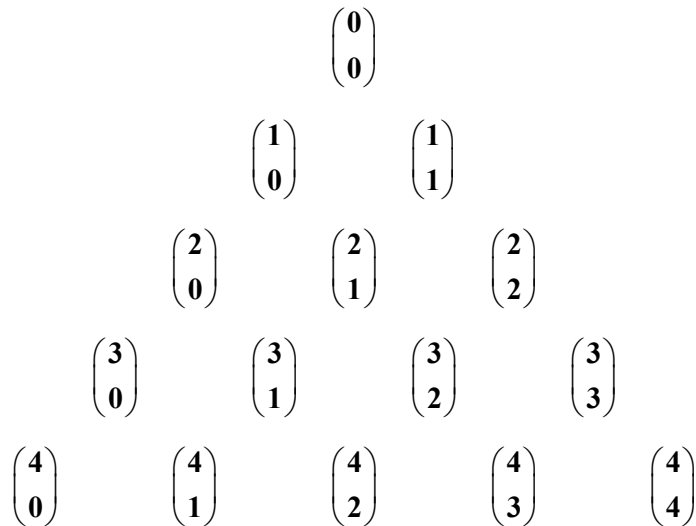
το οποίο ονομάζεται **τρίγωνο του Pascal** (βλέπε, Σχήμα 5 και Σχήμα 6).

			1					0 <sup>η</sup> γραμμή		
			1		1			1 <sup>η</sup> γραμμή		
			1	2	1			2 <sup>η</sup> γραμμή		
			1	3	3	1		3 <sup>η</sup> γραμμή		
			1	4	6	4	1	4 <sup>η</sup> γραμμή		
			1	5	10	10	5	1	5 <sup>η</sup> γραμμή	
			1	6	15	20	15	6	1	6 <sup>η</sup> γραμμή

Σχήμα 5: Τρίγωνο Pascal

Το τρίγωνο Pascal περιλαμβάνει διάφορες ενδιαφέρουσες ιδιότητες:

- Κάθε γραμμή ξεκινάει και τελειώνει σε 1.
- Το τρίγωνο Pascal είναι συμμετρικό ανάμεσα στη γραμμή που περνάει από την μέση.
- Κάθε εσωτερικός αριθμός σε κάθε γραμμή είναι το άθροισμα των ακριβώς αριστερά και δεξιά αριθμών της προηγούμενης γραμμής.
- Το άθροισμα των αριθμών οποιασδήποτε γραμμής είναι δύναμη του 2.



Σχήμα 6: Τρίγωνο Pascal

**Θεώρημα 1.19 [11, Διωνυμικό θεώρημα]**

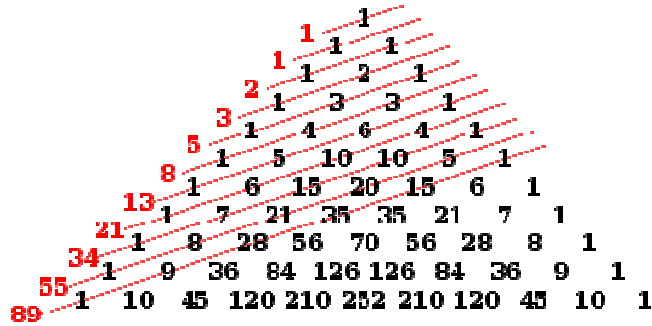
Έστω  $x$  και  $y$  πραγματικοί αριθμοί και  $n \geq 0$ . Τότε

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^{n-r} y^r . \quad (1.2.4)$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^0 &= 1 \\ (\alpha + \beta)^1 &= 1\alpha + 1\beta \\ (\alpha + \beta)^2 &= 1\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1\beta^2 \\ (\alpha + \beta)^3 &= 1\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 1\beta^3 \\ (\alpha + \beta)^4 &= 1\alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + 1\beta^4 \\ (\alpha + \beta)^5 &= 1\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + 1\beta^5 \end{aligned}$$

Σχήμα 7: Οι συντελεστές του Θεωρήματος 1.19 είναι όροι της ακολουθίας Fibonacci

Επιπλέον η ακολουθία **Fibonacci** εμφανίζεται στο τρίγωνο του Pascal ως αθροίσματα στοιχείων με λίγη περισσότερη σχετική κλίση (βλέπε, Σχήμα 7).



με τη Fibonacci έχουν ακριβώς ίδιο αναδρομικό τύπο  $a_{n-1} + a_{n-2}$ , αλλά διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

Πίνακας 3: Γνωστές ακολουθίες

Όνομα	Όροι	Αναδρομικός Τύπος	Αρχικές Συνθήκες
<b>Tribonacci</b>	1,1,2,4,7,13,24,44,...	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$ , $n \geq 4$	$f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2$
<b>Tetranacci</b>	1,1,2,4,8,15,29,56,...	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-4}$ , $n \geq 5$	$f_1 = f_2 = 1, f_3 = 2$ , $f_4 = 4$
<b>Padovan</b>	1,0,0,1,0,1,1,1,2,2,3,4,...	$a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ , $n \geq 5$	$a_1 = 1, a_2 = a_3 = 0$
<b>Lucas</b>	2,1,3,4,7,11,18,29,...	$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ , $n \geq 3$	$l_1 = 2, l_2 = 1$
<b>Perrin</b>	3,0,2,3,2,5,5,7,10,...	$p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ , $n \geq 4$	$p_1 = 3, p_2 = 0, p_3 = 2$
<b>Fibonacci</b>	1,1,2,3,5,8,13,21,34,...	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , $n \geq 3$	$f_1 = f_2 = 1$

Αντίστοιχα, η ακολουθία Padovan και η ακολουθία Perrin έχουν ίδιο τύπο  $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ , αλλά διαφορετικές αρχικές συνθήκες, (Πίνακας 3). Επίσης η ακολουθία Perrin με την ακολουθία Lucas είναι διαφορετικές στο βήμα, δηλαδή, πόσα βήματα πίσω πάμε για να προσθέσουμε τους όρους της ακολουθίας.

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία θα ασχοληθούμε με ακολουθίες με παρόμοιες ιδιότητες, όπως των προαναφερθέντων ακολουθιών. Για παράδειγμα, μια ακολουθία με τύπο  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$ , η οποία μοιάζει με την ακολουθία Tribonacci, έχει όμως διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Επίσης, θα παρουσιάσουμε ένα γενικό όρο υπολογισμού ακολουθιών Fibonacci, οι οποίες προκύπτουν από το **άθροισμα  $k$  – όρων μετά από  $m$  – όρους** και θα μελετήσουμε αυτές τις ακολουθίες με τη βοήθεια κατάλληλων πινάκων.



# Κεφάλαιο 2

## Ακολουθία Fibonacci με άθροισμα $k$ – όρων

Στο παρόν κεφάλαιο δίνεται ο αναδρομικός ορισμός της ακολουθίας Fibonacci, της οποίας κάθε όρος της προκύπτει από το άθροισμα  $k$  διαδοχικών όρων της ακολουθίας, για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ , και ορίζεται ο αντίστοιχος πίνακας Fibonacci,  $Q_k$ , με τη βοήθεια του οποίου κάθε όρος της ακολουθίας σχετίζεται με αυτόν τον πίνακα. Αποδεικνύεται ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci δίνεται από «κλειστό τύπο», ο οποίος συνδέεται με όλες τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Fibonacci  $Q_k$ . Χαρακτηριστικές οριακές ιδιότητες των όρων της ακολουθίας συνδέονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $Q_k$ . Η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα  $Q_k$  υπολογίζεται ως συνάρτηση κατάλληλων όρων της ακολουθίας Fibonacci.

### 2.1 Ακολουθία και πίνακας Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων

#### 2.1.1 Ακολουθία Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων

##### Ορισμός 2.1

Έστω ένας φυσικός αριθμός  $k$ , με  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Ορίζουμε ως ακολουθία Fibonacci αθροίσματος  $k$ -όρων την ακολουθία αριθμών, που ο  $n$ -οστός δίνεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_{n-(k-1)} + f_{n-k} = \sum_{j=1}^k f_{n-j}, \text{ για κάθε } n \geq k+1 \quad (2.1.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$f_1 = f_2 = \dots = f_k = 1. \quad (2.1.2)$$

Η ακολουθία των παραπάνω αριθμών Fibonacci συμβολίζεται με  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$

## Παρατήρηση 2.2

i) Από τις σχέσεις (2.1.1), (2.1.2) παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή είναι φυσικοί αριθμοί.

ii) Για  $k=1$  από τις σχέσεις (2.1.1), (2.1.2) είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι ίσοι με τη μονάδα, πρόκειται για σταθερή ακολουθία και δεν έχει κάτι το ιδιαίτερο, οπότε από εδώ και στο εξής εξετάζεται η περίπτωση, όπου  $k \geq 2$ .

iii) Η ακολουθία  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  που ορίστηκε στον Ορισμό 2.1.1 για τις διάφορες τιμές

του  $k$  με  $k \geq 2$ , παράγει ακολουθίες σαν αυτές που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1, (βλέπε, Πίνακα 3). Συγκεκριμένα,

- για  $k=2$ , από τη (2.1.1) και (2.1.2) προκύπτει η ακολουθία Fibonacci,  $1,1,2,3,5,8,13,\dots$
- για  $k=3$ , από τη (2.1.1) και (2.1.2) προκύπτει η ακολουθία  $1,1,1,3,5,9,17,31,\dots$ , που είναι παρόμοια με την Tribonacci, (βλέπε, Πίνακα 3).
- για  $k=4$ , από τη (2.1.1) και (2.1.2) προκύπτει η ακολουθία  $1,1,1,1,4,7,13,25,49,\dots$ , που είναι παρόμοια με την Tetranacci, (βλέπε, Πίνακα 3).

### 2.1.2 Σχέση πινάκων και όρων της ακολουθίας Fibonacci

Για τους φυσικούς αριθμούς  $k, n$  με  $k \geq 2$  και  $n \geq k+1$ , από τη (2.1.1) και (2.1.2) μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \dots + f_{n-(k-1)} + f_{n-k}$$

$$f_{n-1} = f_{n-1}$$

$$f_{n-2} = f_{n-2}$$

$$f_{n-3} = f_{n-3}$$

⋮

$$f_{n-(k-1)} = f_{n-(k-1)}$$

Έτσι, όπως και στην [1], χρησιμοποιώντας τον  $k \times 1$  πίνακα-στήλη με στοιχεία τους  $k$ -όρους της ακολουθίας Fibonacci, το παραπάνω γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί με τη μορφή πινάκων ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ \vdots \\ f_{n-(k-2)} \\ f_{n-(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \\ \vdots \\ f_{n-(k-1)} \\ f_{n-k} \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

Από τη (2.1.3) μπορούμε να καταλήξουμε στον επόμενο ορισμό, ο οποίος έχει παρουσιασθεί [1, 7, 9, 10, 11] και μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες του πίνακα που ορίζεται στον ορισμό έχουν μελετηθεί.

### Ορισμός 2.3

Ο  $k \times k$  πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος στη (2.1.3) είναι ένας σύνθετος πίνακας

$$Q_k = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1 & 1 \\ I_{k-1} & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1.4)$$

όπου  $\tilde{Q}_1$  είναι ο  $1 \times (k-1)$  πίνακας-γραμμή με όλα τα στοιχεία του να είναι ίσα με το 1,  $I_{k-1}$  είναι ο  $(k-1) \times (k-1)$  μοναδιαίος πίνακας και  $\tilde{Q}_2$  είναι το διάνυσμα-πίνακας-στήλη  $(k-1) \times 1$  με τα στοιχεία του να είναι όλα ίσα με το μηδέν. Στη συνέχεια, ο  $k \times k$  σύνθετος πίνακας  $Q_k$  ονομάζεται  $k$  – **Fibonacci πίνακας**.

### Παρατήρηση 2.4

Γνωστές ακολουθίες που αναφέρθηκαν στο (iii) της Παρατήρησης 2.2 μπορούν να αναπαρασταθούν και να μελετηθούν μέσω του αντίστοιχου  $k$  – Fibonacci πίνακα, όπως αυτός κατασκευάζεται από τη (2.1.4), για τις διάφορες τιμές του  $k$  :

**i)** για  $k = 2$  , η ακολουθία Fibonacci στο (iii) της Παρατήρησης 2.2 έχει αντίστοιχο

$$\text{πίνακα τον } Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii) για  $k=3$  , η ακολουθία  $\{f_n^{(3)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  στο (iii) της Παρατήρησης 2.2 έχει

$$\text{αντίστοιχο πίνακα τον } Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

iii) για  $k=4$  , η ακολουθία  $\{f_n^{(4)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  στο (iii) της Παρατήρησης 2.2 έχει

$$\text{αντίστοιχο πίνακα τον } Q_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

### Πρόταση 2.5

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\chi_{Q_k}(\lambda)$  του πίνακα  $Q_k$  , δίνεται από τον τύπο :

$$\chi_{Q_k}(\lambda) = \lambda^k - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i = \lambda^k - \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} = \lambda^k - \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \quad (2.1.5)$$

**Απόδειξη :**

Η απόδειξη της (2.1.5) βασίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ως προς  $k$  .

Αρχικά από τη (2.1.4) και για  $k=2$  υπολογίζουμε ότι ο αντίστοιχος πίνακας Fibonacci

είναι  $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  . Από την (1.1.5) υπολογίζουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

του  $Q_2$  είναι  $\chi_{Q_2}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = \lambda^2 - \sum_{i=1}^2 \lambda^{2-i}$  , το οποίο επαληθεύει τη (2.1.5) για

$k=2$  .

Θεωρούμε ότι η (2.1.5) ισχύει για κάποιο  $k$  (υπόθεση της επαγωγής), δηλαδή ότι ισχύει η ισότητα:

$$\chi_{Q_k}(\lambda) = \lambda^k - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i = \lambda^k - \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} = \lambda^k - \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} .$$

Θα αποδείξουμε ότι η (2.1.5) ισχύει και για  $k+1$  . Χρησιμοποιώντας την (1.1.5) για τον πίνακα  $Q_{k+1}$  την παραπάνω υπόθεση της επαγωγής και αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα  $\lambda I_{k+1} - Q_{k+1}$  ως προς την  $(k+1)$ -στήλη μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned}
\chi_{Q_{k+1}}(\lambda) &= \det[\lambda I_{k+1} - Q_{k+1}] = \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{k+2} (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 \\ 0 & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{2(k+1)} \lambda \det[\lambda I_k - Q_k] \\
&= (-1)^{k+3} (-1)^k + \lambda(\lambda^k - \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i}) = \lambda^{k+1} - \sum_{i=1}^k \lambda^{k+1-i} - 1 \\
&= \lambda^{k+1} - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^{k+1-i}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς η (2.1.5) ισχύει και για  $k+1$ , άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $k$ , που σημαίνει ότι η απόδειξη της (2.1.5) ολοκληρώθηκε.  $\square$

### 2.1.3 Ιδιότητες των ιδιοτιμών του $k$ -Fibonacci πίνακα $Q_k$

Στον Ορισμό 1.6 και στην (1.1.3) ορίστηκε η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα, η οποία σχετίζεται με το μέτρο των ιδιοτιμών του πίνακα. Για τη φασματική ακτίνα  $\rho(Q_k)$  του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$ , μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα της αξιοποιώντας την πληροφορία ότι ο πίνακας είναι μη αρνητικός, χωρίς να τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του. Αν συμβολίσουμε με  $q_{ij}$  το  $ij$ -στοιχείο του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$ , επειδή οι τιμές του πίνακα είναι 0 ή 1, εφαρμόζοντας την (1.1.6) και (1.1.7) του Θεωρήματος 1.8 έχουμε, αντίστοιχα

$$1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^k q_{ij} \right\} \leq \rho(Q_k) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^k q_{ij} \right\} = k,$$

και

$$1 = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k q_{ij} \right\} \leq \rho(Q_k) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k q_{ij} \right\} = 2,$$

από όπου συνυπολογίζοντας ότι  $k \geq 2$  καταλήγουμε

$$1 \leq \rho(Q_k) \leq 2. \quad (2.1.6)$$

Επιπλέον μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $Q_k$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Ορισμό 1.4 και Πρόταση 1.5), επειδή εύκολα επαληθεύεται ότι ισχύει η (1.1.1), δηλαδή,

$$(I_k + Q_k)^{k-1} > 0. \quad (2.1.7)$$

Συνδυάζοντας την αναγωγιμότητα του  $Q_k$  από τη (2.1.7) με [13, Theorem 7] και τη (2.1.6) συμπεραίνουμε

$$1 < \rho(Q_k) < 2. \quad (2.1.8)$$

Επίσης, από τη (2.1.5) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$  είναι  $-1$  και εφαρμόζοντας το (ii) της Πρότασης 1.7 καταλήγουμε

$$\det Q_k = (-1)^k (-1) = (-1)^{k+1}, \quad (2.1.9)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $k$ , ο  $k$ -Fibonacci πίνακας  $Q_k$  είναι πάντα αντιστρέψιμος, άρα καμία ιδιοτιμή του δεν μπορεί να είναι ίση με το μηδέν. Αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$  είναι  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k-1}, \rho(Q_k)$ , συνδυάζοντας την παραπάνω παρατήρηση με τη μη ύπαρξη μηδενικής ιδιοτιμής και το Θεώρημα 1.9 μπορούμε να πούμε ότι ισχύει:

$$0 < |\lambda_i| < \rho(Q_k), \text{ με } i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (2.1.10)$$

### Παράδειγμα 2.6

Για  $k=2$  η ακολουθία Fibonacci σύμφωνα με το (i) της Παρατήρησης 2.4 ο 2-Fibonacci πίνακας είναι

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

και από τη (2.1.5), (βλέπε, Παράρτημα Β, συνάρτηση **k\_Fibonacci\_Matrix**), υπολογίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $Q_2$ , που είναι

$$\chi_{Q_2}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Οι ρίζες του είναι

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\dots, \text{ και } \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots,$$

που είναι γνωστές από την κατασκευή της χρυσής σπείρας, (βλέπε, Κεφάλαιο 1, Σχήματα 1-3). Η φασματική ακτίνα είναι

$$\rho(Q_2) = 1.618,$$

από όπου είναι φανερό ότι επαληθεύεται η (2.1.8), δηλαδή

$$1 < \rho(Q_2) = 1.618 < 2 .$$

Επιπλέον  $(I_2 + Q_2)^1 = I_2 + Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > 0 .$

Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 1.5 ο πίνακας  $Q_2$  είναι ανάγωγος. □

### Παράδειγμα 2.7

Για  $k = 3$ , η ακολουθία  $\{f_n^{(3)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  σύμφωνα με το (ii) της Παρατήρησης 2.4 ο 3-  
Fibonacci πίνακας είναι

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

και από τη (2.1.5), (βλέπε, **Παράρτημα Β**, συνάρτηση **k\_Fibonacci\_Matrix**),  
υπολογίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $Q_3$ , που είναι

$$\chi_{Q_3}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Οι μιγαδικές ρίζες είναι

$$\lambda_2 = -0.4196 + 0.6063i, \text{ και } \lambda_3 = -0.4196 - 0.6063i,$$

η δε πραγματική είναι

$$\lambda_1 = 1.8393 .$$

Η φασματική ακτίνα είναι

$$\rho(Q_3) = 1.8393,$$

από όπου είναι φανερό ότι επαληθεύεται η (2.1.8), δηλαδή,

$$1 < \rho(Q_3) < 2 .$$

□

## 2.2 Μη αναδρομικός τύπος ακολουθίας Fibonacci

Προηγουμένως, για την ακολουθία Fibonacci  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$ , ο  $n$ -οστός όρος της δίνεται από τον αναδρομικό τύπο (2.1.1) και με αρχικές συνθήκες ίσες με 1.

Επίσης είναι γνωστό ότι η συνάρτηση δέλτα (delta ή Dirac function) και η βηματική (Heaviside step function) ορίζονται αντίστοιχα ως εξής :

$$\delta_{n-n_0} = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}, \quad u_{n-n_0} = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Με τη χρήση της συνάρτησης δέλτα και αν λάβουμε υπόψη ότι οι  $k$  όροι της ακολουθίας, που έχουν αρνητικό δείκτη, είναι ίσοι με το μηδέν

$$f_{-(k-1)} = \dots = f_{-1} = f_0 = 0, \quad (2.2.2)$$

οι όροι της ακολουθίας  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  μπορούν να δίνονται από «κλειστό τύπο» και όχι από αναδρομικό, όπως περιγράφεται στην παρακάτω πρόταση.

### Πρόταση 2.8

Έστω ένας φυσικός αριθμός  $k$  με  $k \geq 2$ . Για κάθε  $n \geq 1$ , ο  $n$ -οστός όρος  $f_n$  της ακολουθίας  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  μπορεί να δοθεί από την ακόλουθη αναδρομική σχέση

$$f_n = \sum_{i=1}^k f_{n-i} + \sum_{j=1}^k \delta_{n-j} - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} \delta_{n-i-j}, \quad (2.2.3)$$

με αρχικές συνθήκες όπως στη (2.2.2).

Η (2.2.3) μπορεί να γραφεί

$$f_n - \sum_{i=1}^k f_{n-i} = \sum_{j=1}^k \delta_{n-j} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{n-1-i} - \sum_{i=1}^{k-2} \delta_{n-2-i} - \dots - \sum_{i=1}^2 \delta_{n-(k-2)-i} - \delta_{n-k},$$

από όπου χρησιμοποιώντας  $z$ -μετασχηματισμό παράγεται η  $F(z)$  :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^{-1} + \dots + z^{-(k-1)} + z^{-k} - \sum_{i=1}^{k-1} z^{-(1+i)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^2 z^{-(k+i-2)} - z^{-(k)}}{1 - z^{-1} - z^{-2} - \dots - z^{-(k-1)} - z^{-k}} \\ &= \frac{z^{-1} + \dots + z^{-(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(1+i)} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^3 z^{-(k+i-3)} - z^{-(k-1)} - (k-2)z^{-k}}{1 - z^{-1} - z^{-2} - \dots - z^{-(k-1)} - z^{-k}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{z^{-1} + \dots + z^{-(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(1+i)} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^3 z^{-(k+i-3)} - z^{-(k-1)} - (k-2)z^{-k}}{\frac{1}{z^k} (z^k - z^{k-1} - \dots - 1)} \\
& = \frac{z^{-1} + \dots + z^{-(k-1)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(1+i)} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^3 z^{-(k+i-3)} - z^{-(k-1)} - (k-2)z^{-k}}{z^k \chi_{Q_k}(z)} \\
& = \frac{z^{-1} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(2+i)} - \sum_{i=1}^{k-4} z^{-(3+i)} - \dots - \sum_{i=1}^2 z^{-(k+i-3)} - z^{-(k-1)} - (k-2)z^{-k}}{z^k \chi_{Q_k}(z)} \tag{2.2.4}
\end{aligned}$$

Από τη (2.2.4) είναι σημαντικό να πούμε ότι οι πόλοι της  $F(z)$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $Q_k$ . Επιπλέον οι βαθμοί των πολωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίσοι. Έτσι γράφοντας την  $F(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων προκύπτει:

$$F(z) = k - 2 + \frac{c}{1 - \rho(Q_k)z^{-1}} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j}{1 - \lambda_j z^{-1}}, \tag{2.2.5}$$

όπου  $c, \rho(Q_k) \in \mathbb{R}$  και οι υπόλοιπες σταθερές  $c_j$  είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε έναν «κλειστό τύπο», ο οποίος υπολογίζει όλους τους όρους της ακολουθίας  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  ως συνάρτηση όλων των ιδιοτιμών του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$ , τύπος που διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

### Πρόταση 2.9

Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \rho(Q_k)$  οι ιδιοτιμές του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$  με  $k \geq 2$ . Ο  $n$ -οστός όρος  $f_n$  της ακολουθίας δίνεται από τη σχέση

$$f_n = c(\rho(Q_k))^n + \sum_{j=1}^{k-1} c_j (\lambda_j)^n, \tag{2.2.6}$$

όπου  $c, c_j$  για κάθε  $j=1,2,\dots,k-1$  είναι οι προσδιοριστέοι συντελεστές, που προκύπτουν από τη (2.2.5).

### Απόδειξη :

Χρησιμοποιώντας αντίστροφο  $z$ -μετασχηματισμό και στα δύο μέλη της (2.2.5) για οποιαδήποτε τιμή του  $n$  έχουμε:

$$f_n = (k-2)\delta_n + c(\rho(Q_k))^n u_n + \sum_{j=1}^{k-1} c_j (\lambda_j)^n u_n$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ισότητα με τους ορισμούς της βηματικής και της δέλτα συνάρτησης  $\delta$  στη (2.2.1) προκύπτει η σχέση στη (2.2.6).  $\square$

## 2.3 Χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας Fibonacci

### k- αθροίσματος

#### Πρόταση 2.10

Για δοθέντα φυσικό αριθμό  $k$ , με  $k \geq 2$ , οι όροι της ακολουθίας  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  της (2.1.1) ικανοποιούν τις παρακάτω χαρακτηριστικές ιδιότητες ορίων

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \rho(Q_k), \quad (2.3.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = \rho(Q_k), \quad (2.3.2)$$

όπου  $\rho(Q_k)$  είναι η φασματική ακτίνα του  $k$ - Fibonacci πίνακα  $Q_k$ .

#### Απόδειξη:

Θεωρούμε ότι η τριγωνομετρική μορφή των σταθερών  $c_j$  στη (2.2.5) είναι  $c_j = |c_j| e^{i\theta_j}$ , και των αντίστοιχων ιδιοτιμών  $\lambda_j$  του  $Q_k$  ότι είναι  $\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\omega_j}$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, k-1$ . Αντικαθιστώντας τις πολικές μορφές των  $c_j, \lambda_j$  στη (2.2.6) έχουμε :

$$\begin{aligned} f_n &= c(\rho(Q_k))^n + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| e^{i\theta_j} (|\lambda_j| e^{i\omega_j})^n \\ &= c(\rho(Q_k))^n + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^n e^{i(\theta_j + n\omega_j)} \\ &= c(\rho(Q_k))^n + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j)) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Από τη (2.3.3) μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\rho(Q_k))^{n+1} + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^{n+1} (\cos(\theta_j + (n+1)\omega_j) + i \sin(\theta_j + (n+1)\omega_j))}{c(\rho(Q_k))^n + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\rho(Q_k))^{n+1} (c + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| \left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right|^{n+1} (\cos(\theta_j + (n+1)\omega_j) + i \sin(\theta_j + (n+1)\omega_j)))}{(\rho(Q_k))^n (c + \sum_{j=1}^{k-1} |c_j| \left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j)))} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Επιπλέον, επειδή οι ακολουθίες  $\{\cos(\theta_j + n\omega_j)\}_{n=1,2,3,\dots}$  και  $\{\sin(\theta_j + n\omega_j)\}_{n=1,2,3,\dots}$  είναι φραγμένες, και επειδή η ανισότητα στη (2.1.10) συνεπάγεται  $\left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right| < 1$ , για κάθε

$$j=1,2,\dots,k-1, \text{ συμπεραίνουμε ότι } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right|^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right|^n = 0.$$

Από τις παραπάνω φραγμένες ακολουθίες και τις οριακές ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right|^{n+1} (\cos(\theta_j + (n+1)\omega_j) + i \sin(\theta_j + (n+1)\omega_j)) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(Q_k)} \right|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j)) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Είναι φανερό ότι η (2.3.1) προκύπτει μετά από αντικατάσταση της (2.3.5) στη (2.3.4).

Για να αποδείξουμε την (2.3.2) χρησιμοποιείται η άσκηση [16, Chapter 1], στην οποία αναφέρεται ότι: «για μια μη μηδενική ακολουθία  $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ , αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = a$ , τότε

ισχύει  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ ». Είναι προφανές ότι η κάθε ακολουθία  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  είναι θετικών όρων, οπότε συνδυάζοντας την παραπάνω άσκηση με την απόδειξη της (2.3.1) προκύπτει άμεσα η απόδειξη της (2.3.2).  $\square$

### Παράδειγμα 2.11

Έστω η ακολουθία  $\{f_n^{(2)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  του Παραδείγματος 2.6 οι ιδιοτιμές του 2-Fibonacci πίνακα  $Q_2$  είναι  $\rho(Q_2) = 1.618$ ,  $\lambda_1 = -0.618$  και οι σταθεροί όροι του κλάσματος στη (2.2.5) προσδιορίζονται με την υλοποίηση της συνάρτησης **kmst** (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι  $c = c_1 = 0.4472$ ,  $c_2 = -0.4472$ .

Για  $n \geq 1$ , ο κλειστός τύπος για το  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci υπολογίζεται από τη (2.2.6) και είναι

$$f_n = 0.4472(1.618)^n + (-0.4472)(-0.618)^n.$$

Οι χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας δίνονται από (2.3.1) και (2.3.2) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = 1.618 \quad \square$$

### Παράδειγμα 2.12

Έστω η ακολουθία  $\{f_n^{(3)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  του Παραδείγματος 2.7 οι ιδιοτιμές του 3-Fibonacci πίνακα  $Q_3$  είναι

$$\rho(Q_3) = 1.8393, \quad \lambda_1 = -0.4196 + 0.6063i, \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -0.4196 - 0.6063i.$$

Οι σταθεροί όροι του κλάσματος στη (2.2.5) προσδιορίζονται με την υλοποίηση της συνάρτησης **kmst**, (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι ίσοι με  $c = c_1 = 0.2368$ ,  $c_2 = -0.6184 - 0.0374i$ , και  $c_3 = -0.6184 + 0.0374i$ .

Για  $n \geq 1$ , ο κλειστός τύπος για το  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci υπολογίζεται από τη (2.2.6) και είναι

$$f_n = 0.2368(1.8393)^n + (-0.6184 - 0.0374i)(-0.4196 + 0.6063i)^n + (-0.6184 + 0.0374i)(-0.4196 - 0.6063i)^n.$$

Οι χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας δίνονται από (2.3.1) και (2.3.2) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = 1.8393 \quad \square$$

## 2.4 Δυνάμεις k-Fibonacci πίνακα $Q_k$

### Πρόταση 2.13

Έστω  $\{f_n^{(k)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  η ακολουθία Fibonacci  $k$ -αθροίσματος στη (2.2.3) με αρχικές συνθήκες στη (2.2.2) και ο αντίστοιχος  $k$ -Fibonacci πίνακας  $Q_k$ . Για  $n \geq k$ , η  $n$ -οστή δύναμη του  $k$ -Fibonacci πίνακα ορίζεται ως

$$Q_k^n = [\hat{q}_{i,j}] \quad (2.4.1)$$

όπου  $\hat{q}_{i,j}$  ορίζει τον  $ij$ -οστό στοιχείο του  $Q_k^n$ , για  $1 \leq i, j \leq k$ . Οι θετικοί ακέραιοι  $\hat{q}_{i,j}$  δίνονται από

$$\hat{q}_{i,1} = \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} f_{n-i+1+r} \quad (2.4.2)$$

$$\hat{q}_{i,k} = \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} f_{n-i+r} \quad (2.4.3)$$

και

$$\hat{q}_{i,j} = \frac{1}{k-1} \left( \sum_{r=1}^{j-1} f_{n-i+r} + \sum_{r=j}^{k-1} f_{n-i+1+r} \right), \text{ για } 2 \leq j \leq k-1. \quad (2.4.4)$$

### Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ως προς  $n$  και για  $k \geq 2$  έχουμε :

Για  $n=k=2$ , τα στοιχεία του πίνακα (2.4.1) ορίζονται από τη (2.4.2)-(2.4.4) ως ακολούθως:

$$Q_2^2 = \begin{bmatrix} \hat{q}_{1,1} & \hat{q}_{1,2} \\ \hat{q}_{2,1} & \hat{q}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2. \quad (2.4.5)$$

Υποθέτοντας ότι η (2.4.1) ισχύει για  $n \geq k$ , οι σχέσεις (2.4.2)-(2.4.4) είναι αληθείς για  $n$ , όπου  $n \geq 2$ . Έτσι έχουμε

$$Q_k^{n+1} = Q_k^n Q_k = \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} & \hat{q}_{12} & \hat{q}_{13} & \cdots & \hat{q}_{1k} \\ \hat{q}_{21} & \hat{q}_{22} & \hat{q}_{23} & \cdots & \hat{q}_{2k} \\ \hat{q}_{31} & \hat{q}_{32} & \hat{q}_{33} & \cdots & \hat{q}_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{q}_{k1} & \hat{q}_{k2} & \hat{q}_{k3} & \cdots & \hat{q}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \hat{q}_{11} + \hat{q}_{12} & \hat{q}_{11} + \hat{q}_{13} & \hat{q}_{11} + \hat{q}_{14} & \cdots & \hat{q}_{11} \\ \hat{q}_{21} + \hat{q}_{22} & \hat{q}_{21} + \hat{q}_{23} & \hat{q}_{21} + \hat{q}_{24} & \cdots & \hat{q}_{21} \\ \hat{q}_{31} + \hat{q}_{32} & \hat{q}_{31} + \hat{q}_{33} & \hat{q}_{31} + \hat{q}_{34} & \cdots & \hat{q}_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{q}_{k1} + \hat{q}_{k2} & \hat{q}_{k1} + \hat{q}_{k3} & \hat{q}_{k1} + \hat{q}_{k4} & \cdots & \hat{q}_{k1} \end{bmatrix} \\
&= [\hat{q}_1 + \hat{q}_2 \quad \hat{q}_1 + \hat{q}_3 \quad \hat{q}_1 + \hat{q}_4 \quad \cdots \quad \hat{q}_1] \\
&= [\tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3 \quad \cdots \quad \tilde{q}_4] = [\tilde{q}_{i,j}]
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

όπου  $\hat{q}_j, \tilde{q}_j$  συμβολίζουν τη  $j$ -οστή στήλη των  $Q_k^n, Q_k^{n+1}$  αντίστοιχα, και με  $\tilde{q}_{i,j}$  σημειώνονται τα στοιχεία του  $Q_k^{n+1}$ .

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $Q_k^{n+1}$  ταυτίζεται με την πρώτη στήλη του  $Q_k^n$ . Έτσι τα στοιχεία της  $k$ -οστής στήλης του πίνακα  $Q_k^{n+1}$  δίνονται από την (2.4.2), δηλαδή,

$$\tilde{q}_{i,k} = \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} f_{n-i+1+r} = \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} f_{(n+1)-i+r}.$$

Συνεπώς, η (2.4.3) ισχύει και για  $n+1$ , άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , που σημαίνει ότι η απόδειξη της (2.4.3) ολοκληρώθηκε.

Επιπλέον η πρώτη στήλη του πίνακα  $Q_k^{n+1}$  είναι ίση με το άθροισμα της πρώτης και της δεύτερης στήλης του  $Q_k^n$ , τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα  $Q_k^{n+1}$  δίνονται από τη (2.4.2) και (2.4.4) ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{i,1} &= \hat{q}_{i,1} + \hat{q}_{i,2} = \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} f_{n-i+1+r} + \frac{1}{k-1} (f_{n-i+1} + \sum_{r=2}^{k-1} f_{n-i+1+r}) \\
&= \frac{1}{k-1} (\sum_{r=1}^{k-1} f_{(n+1)-i+r} + \sum_{r=2}^{k-1} f_{(n+1)-i+r} + f_{(n+1)-i})
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Στην (2.4.7) θέτοντας  $\tau = r-1$ , λαμβάνοντας υπόψη ότι ο  $(n-\nu+k+1)$ -οστός όρος της ακολουθίας για  $\nu \geq 0$  και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.3), (2.2.2) μπορούμε να γράψουμε:

$$f_{n-\nu+k+1} = \sum_{r=1}^k f_{n-\nu+r} \tag{2.4.8}$$

Η (2.4.7) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως μετά τη χρησιμοποίηση της (2.4.8) :

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{i,1} &= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=0}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + f_{(n+1)-i} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + f_{(n+2)-i} + f_{(n+1)-i} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+1)-i+1+\tau} + f_{n-i+1} + f_{n-i+2} + \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{n-i+\tau+2} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+1)-i+1+\tau} + \sum_{r=1}^k f_{n-i+\tau} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+1)-i+1+\tau} + f_{n-i+k+1} \right) = \frac{1}{k-1} \sum_{\tau=1}^{k-1} f_{(n+1)-i+1+\tau}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η (2.4.2) ισχύει και για  $n+1$ , άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , που σημαίνει ότι η απόδειξη της (2.4.2) ολοκληρώθηκε.

Ακόμα από τη σχέση (2.4.6) είναι προφανές ότι, για  $2 \leq j \leq k-1$  η  $j$ -οστή στήλη του πίνακα  $Q_k^{n+1}$  ισούται με το άθροισμα της πρώτης  $(j+1)$ -οστής στήλης του  $Q_k^n$ . Έτσι τα στοιχεία της  $j$ -οστής στήλης του πίνακα  $Q_k^{n+1}$  δίνονται από την (2.4.2) και (2.4.4) ως ακολούθως :

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{i,j} = \hat{q}_{i,1} + \hat{q}_{i(j+1)} &= \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k-1} f_{n-i+1+r} + \frac{1}{k-1} \left( \sum_{r=1}^j f_{n-i+r} + \sum_{r=j+1}^{k-1} f_{n-i+1+r} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{r=1}^{k-1} f_{(n+1)-i+r} + \sum_{r=1}^j f_{n-i+r} + \sum_{r=j+1}^{k-1} f_{(n+1)-i+r} \right) \quad (2.4.9)
\end{aligned}$$

Θέτοντας  $\tau = r-1$  στην (2.4.9) και χρησιμοποιώντας τη (2.4.8) έχουμε :

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{i,j} &= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=0}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + \sum_{\tau=j}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + \sum_{\tau=0}^{j-1} f_{(n+1)+i-\tau} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + f_{(n+2)-i} + \sum_{\tau=j}^{k-2} f_{(n+2)-i+\tau} + \sum_{\tau=1}^{j-1} f_{(n+1)-i+\tau} + f_{(n+1)-i} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{j-1} f_{(n+1)-i+\tau} + \sum_{\tau=j}^{k-2} f_{(n+1)-i+1+\tau} + f_{n-i+1} + f_{n-i+2} + \sum_{\tau=1}^{k-2} f_{n-i+\tau+2} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{j-1} f_{(n+1)-i+\tau} + \sum_{\tau=j}^{k-2} f_{(n+1)-i+1+\tau} + \sum_{\tau=1}^k f_{n-i+\tau} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{j-1} f_{(n+1)-i+\tau} + \sum_{\tau=j}^{k-2} f_{(n+1)-i+1+\tau} + f_{n-i+k+1} \right) \\
&= \frac{1}{k-1} \left( \sum_{\tau=1}^{j-1} f_{(n+1)-i+\tau} + \sum_{\tau=j}^{k-1} f_{(n+1)-i+1+\tau} \right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η (2.4.4) ισχύει και για  $n+1$ , άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , που σημαίνει ότι η απόδειξη της (2.4.4) ολοκληρώθηκε.  $\square$



Η Πρόταση 2.13 είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις που χρειάζεται να αποδειχθούν ιδιότητες μη-αρνητικών πινάκων, που σχετίζονται είτε με το αν ο πίνακας είναι ανάγωγος, (βλέπε, Ορισμό 1.4 και Πρόταση 1.5) είτε αν ο πίνακας είναι αρχικός, (βλέπε, Ορισμό 1.10 και Θεώρημα 1.11 (ii)-(iii)).

### Παράδειγμα 2.14

Έστω  $k = 2$ . Ο αντίστοιχος 2-Fibonacci πίνακας είναι

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

όπως στο Παράδειγμα 2.6. Ο πίνακας  $Q_2^n$  υπολογίζεται εύκολα για κάθε  $n \geq 2$  από τις (2.4.2) και (2.4.3) ως εξής

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1,1} &= \sum_{r=1}^1 f_{n+r} = f_{n+1}, & \hat{q}_{1,2} &= \sum_{r=1}^1 f_{n-1+r} = f_n, \\ \hat{q}_{2,1} &= \sum_{r=1}^1 f_{n-2+1+r} = f_n, & \hat{q}_{2,2} &= \sum_{r=1}^1 f_{n-2+r} = f_{n-1}, \end{aligned}$$

οπότε

$$Q_2^n = \begin{bmatrix} \hat{q}_{1,1} & \hat{q}_{1,2} \\ \hat{q}_{2,1} & \hat{q}_{2,2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.4.10)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι όροι της αντίστοιχης ακολουθίας Fibonacci είναι 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,..., οπότε για τις διάφορες τιμές του  $n \geq 2$  ο πίνακας  $Q_2^n$  στη (2.4.10) υπολογίζεται με την υλοποίηση της συνάρτησης **k\_Fibonacci\_Matrix** (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι :

- Για  $n = 3$  :

$$Q_2^3 = \begin{bmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Για  $n = 4$  :

$$Q_2^4 = \begin{bmatrix} f_5 & f_4 \\ f_4 & f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Για  $n = 25$  :

$$Q_2^{25} = \begin{bmatrix} f_{26} & f_{25} \\ f_{25} & f_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 121393 & 75025 \\ 75025 & 46238 \end{bmatrix}$$

$$\text{Επιπλέον } (I_2 + Q_2)^1 = I_2 + Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > 0 .$$

Συνεπώς,  $Q_2$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Πρόταση 1.5).

Επίσης, από τη (2.4.5) έχουμε ότι

$$Q_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > 0 .$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.11 (iii),  $Q_2$  είναι αρχικός πίνακας. □

### Παράδειγμα 2.15

Έστω  $k = 3$ . Ο αντίστοιχος 3 – Fibonacci πίνακας είναι

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

όπως στο Παράδειγμα 2.7. Ο πίνακας  $Q_3^n$  υπολογίζεται εύκολα για κάθε  $n \geq 3$  από τις (2.4.2) και (2.4.3) ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1,1} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 f_{n+r} = \frac{1}{2} (f_{n+1} + f_{n+2}) & \hat{q}_{1,2} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{r=1}^1 f_{n-1+r} + \sum_{r=2}^2 f_{n+r} \right) = \frac{1}{2} (f_n + f_{n+2}) \\ \hat{q}_{2,1} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 f_{n-1+r} = \frac{1}{2} (f_n + f_{n+1}) & \hat{q}_{2,2} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{r=1}^1 f_{n-2+r} + \sum_{r=2}^2 f_{n-1+r} \right) = \frac{1}{2} (f_n + f_{n+1}) \\ \hat{q}_{3,1} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 f_{n-2+r} = \frac{1}{2} (f_{n-1} + f_n) & \hat{q}_{3,2} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{r=1}^1 f_{n-3+r} + \sum_{r=2}^2 f_{n-2+r} \right) = \frac{1}{2} (f_{n-1} + f_n) \\ \hat{q}_{1,3} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 f_{n-1+r} = \frac{1}{2} (f_n + f_{n+1}) \\ \hat{q}_{2,3} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 f_{n-2+r} = \frac{1}{2} (f_{n-1} + f_n) \\ \hat{q}_{3,3} &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^2 f_{n-3+r} = \frac{1}{2} (f_{n-2} + f_{n-1}) \end{aligned}$$

οπότε

$$Q_3^n = \begin{bmatrix} \hat{q}_{1,1} & \hat{q}_{1,2} & \hat{q}_{1,3} \\ \hat{q}_{2,1} & \hat{q}_{2,2} & \hat{q}_{2,3} \\ \hat{q}_{3,1} & \hat{q}_{3,2} & \hat{q}_{3,3} \end{bmatrix}^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{n+1} + f_{n+2} & f_n + f_{n+2} & f_n + f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} & f_{n-1} + f_{n+1} & f_{n-1} + f_n \\ f_{n-1} + f_n & f_{n-2} + f_n & f_{n-2} + f_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.4.11)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι όροι της αντίστοιχης ακολουθίας  $\{f_n^{(3)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  Fibonacci είναι  $1,1,1,3,5,9,17,31,57,105,\dots$ , οπότε για τις διάφορες τιμές του  $n \geq 3$ , ο πίνακας  $Q_3^n$  στη (2.4.11) υπολογίζεται με την υλοποίηση της συνάρτησης **k\_Fibonacci\_Matrix** (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι :

- Για  $n = 3$  :

$$Q_3^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_4 + f_5 & f_3 + f_5 & f_3 + f_4 \\ f_3 + f_4 & f_3 + f_5 & f_2 + f_3 \\ f_2 + f_3 & f_3 + f_5 & f_1 + f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Για  $n = 4$ :

$$Q_3^4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_5 + f_6 & f_4 + f_6 & f_4 + f_5 \\ f_4 + f_5 & f_3 + f_5 & f_3 + f_4 \\ f_3 + f_4 & f_2 + f_4 & f_2 + f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Για  $n = 25$ :

$$Q_3^{25} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{26} + f_{27} & f_{25} + f_{27} & f_{25} + f_{26} \\ f_{25} + f_{26} & f_{24} + f_{26} & f_{24} + f_{25} \\ f_{24} + f_{25} & f_{23} + f_{25} & f_{23} + f_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2555757 & 2145013 & 1389537 \\ 1389537 & 1166220 & 755476 \\ 755476 & 634061 & 410744 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον από τον πίνακα

$$I_3 + Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

υπολογίζουμε

$$[I_3 + Q_3]^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Συνεπώς,  $Q_3$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Πρόταση 1.5).

Επίσης, από τη (2.4.11) έχουμε ότι

$$Q_3^5 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_6 + f_7 & f_5 + f_7 & f_5 + f_6 \\ f_5 + f_6 & f_4 + f_6 & f_4 + f_5 \\ f_4 + f_5 & f_3 + f_5 & f_3 + f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} > 0.$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.11 (iii),  $Q_3$  είναι αρχικός πίνακας. □

### Παράδειγμα 2.16

Έστω  $k = 5$ , οπότε ο αντίστοιχος 5– Fibonacci πίνακας  $Q_5$  έχει τη μορφή

$$Q_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $Q_5^n$  υπολογίζεται εύκολα για κάθε  $n \geq 5$  από τις (2.4.2) και (2.4.3) ως εξής:

$$\hat{q}_{1,1} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^4 f_{n+r} = \frac{1}{4} (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4}) \quad \dots$$

$$\hat{q}_{1,2} = \frac{1}{4} \left( \sum_{r=1}^1 f_{n-1+r} + \sum_{r=2}^4 f_{n+r} \right) = \frac{1}{4} (f_n + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4}) \quad \dots$$

$$\hat{q}_{1,3} = \frac{1}{4} \left( \sum_{r=1}^2 f_{n-1+r} + \sum_{r=3}^4 f_{n+r} \right) = \frac{1}{4} (f_n + f_{n+1} + f_{n+3} + f_{n+4}) \quad \dots$$

$$\hat{q}_{1,4} = \frac{1}{4} \left( \sum_{r=1}^3 f_{n-1+r} + \sum_{r=4}^4 f_{n+r} \right) = \frac{1}{4} (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+4}) \quad \dots$$

$$\hat{q}_{1,5} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^4 f_{n-1+r} = \frac{1}{4} (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3}) \quad \dots$$

$$Q_5^n = \begin{bmatrix} \hat{q}_{1,1} & \hat{q}_{1,2} & \dots & \hat{q}_{1,5} \\ \hat{q}_{2,1} & \hat{q}_{2,2} & & \hat{q}_{2,5} \\ \vdots & \hat{q}_{3,2} & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \\ \hat{q}_{5,1} & \hat{q}_{5,2} & \dots & \hat{q}_{5,5} \end{bmatrix} \quad (2.4.12)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} & \dots & f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} \\ & \vdots & \vdots \\ f_{n-3} + f_{n-2} + f_{n-1} + f_n & \dots & f_{n-4} + f_{n-3} + f_{n-2} + f_{n-1} \end{bmatrix}$$

Υπενθυμίζεται ότι οι όροι της αντίστοιχης ακολουθίας  $\{f_n^{(5)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  Fibonacci είναι 1,1,1,1,5,9,17,33,65,129,..., οπότε για τις διάφορες τιμές του  $n \geq 5$ , ο πίνακας  $Q_5^n$  στη (2.4.12) υπολογίζεται με την υλοποίηση της συνάρτησης **k\_Fibonacci\_Matrix** (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι :

- Για  $n = 5$

$$Q_5^5 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_6 + f_7 + f_8 + f_9 & \cdots & f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_2 + f_3 + f_4 + f_5 & \cdots & f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 15 & 14 & 12 & 8 \\ 8 & 8 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Για  $n=6$ :

$$Q_5^6 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} & \cdots & f_6 + f_7 + f_8 + f_9 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_3 + f_4 + f_5 + f_6 & \cdots & f_2 + f_3 + f_4 + f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 30 & 28 & 24 & 16 \\ 16 & 15 & 14 & 12 & 8 \\ 8 & 8 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Για  $n=25$ :

$$Q_5^{25} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_{26} + f_{27} + f_{28} + f_{29} & \cdots & f_{25} + f_{26} + f_{27} + f_{28} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{22} + f_{23} + f_{24} + f_{25} & \cdots & f_{21} + f_{22} + f_{23} + f_{24} \end{bmatrix} \quad (2.4.13)$$

$$= \begin{bmatrix} 11749641 & 11349545 & 10562977 & 9016625 & 576577 \\ 5976577 & 5773064 & 5372968 & 4586400 & 3040048 \\ 3040048 & 2936529 & 2733016 & 2332920 & 1546352 \\ 1546352 & 1493696 & 1390177 & 1186664 & 786568 \\ 786568 & 759784 & 707128 & 603609 & 400096 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον από τον πίνακα

$$I_5 + Q_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

υπολογίζουμε

$$[I_5 + Q_5]^4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 41 & 40 & 39 & 34 & 22 \\ 22 & 19 & 18 & 17 & 12 \\ 12 & 10 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Συνεπώς,  $Q_5$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Πρόταση 1.5).

Επίσης, παρατηρούμε ότι ο πίνακας στη (2.4.13) είναι θετικός, συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 1.11 (ii),  $Q_5$  είναι αρχικός πίνακας.  $\square$

# Κεφάλαιο 3

## Ακολουθία Fibonacci άθροισμα $k - \acute{\alpha}$ ρων μετά από $m - \acute{\alpha}$ ρους

Στο παρόν κεφάλαιο δίνεται ο αναδρομικός ορισμός της ακολουθίας Fibonacci, της οποίας κάθε όρος της προκύπτει από το άθροισμα  $k$  διαδοχικών όρων της ακολουθίας μετά από  $m$  προηγούμενους όρους από αυτόν, δοθέντων  $k + m$  αρχικών όρων που είναι όλοι ίσοι με τη μονάδα, όπου  $k, m$  φυσικοί αριθμοί. Για κάθε τέτοια ακολουθία Fibonacci ορίζεται και ο αντίστοιχος πίνακας Fibonacci  $R_{k,m}$  με τη βοήθεια του οποίου κάθε όρος της ακολουθίας σχετίζεται με αυτόν τον πίνακα. Αποδεικνύεται ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci δίνεται από «κλειστό τύπο», ο οποίος συνδέεται με όλες τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Fibonacci  $R_{k,m}$ . Χαρακτηριστικές οριακές ιδιότητες των όρων της ακολουθίας συνδέονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $R_{k,m}$ . Η  $n$ -οστή δύναμη του πίνακα Fibonacci  $R_{k,m}$  υπολογίζεται ως συνάρτηση κατάλληλων όρων της ακολουθίας Fibonacci.

### 3.1 Ορισμός $k$ -αθροίσματος μετά από $m$ -όρους μιας ακολουθίας Fibonacci

#### 3.1.1 Ακολουθία Fibonacci αθροίσματος $k$ -όρων μετά από $m$ -όρους

##### Ορισμός 3.1

Έστω φυσικοί αριθμοί  $k, m$ , με  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Ορίζουμε ως ακολουθία Fibonacci  $k$ -αθροίσματος όρων μετά από  $m$ -όρους την ακολουθία αριθμών, όπου ο  $n$ -οστός όρος δίνεται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$f_n = f_{n-m-1} + f_{n-m-2} + \dots + f_{n-m-k} = \sum_{j=m+1}^{k+m} f_{n-j}, \text{ για κάθε } n \geq k + m + 1 \quad (3.1.1)$$

με αρχικές συνθήκες

$$f_1 = f_2 = \dots = f_{k+m} = 1. \quad (3.1.2)$$

Η ακολουθία των παραπάνω αριθμών Fibonacci συμβολίζεται με  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$

### Παρατήρηση 3.2

- i) Από τις σχέσεις (3.1.1), (3.1.2) παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, δηλαδή φυσικοί αριθμοί.
- ii) Για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού  $k$  και  $m = 0$  οι σχέσεις (3.1.1), (3.1.2) είναι φανερό ότι ανάγονται στους αντίστοιχους τύπους του Κεφαλαίου 2, δηλαδή στους (2.1.1) και (2.1.2). Συνεπώς, η μελέτη των Fibonacci ακολουθιών  $\{f_n^{(k,0)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  έχει μελετηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο παρόν κεφάλαιο γενικά θα μελετήσουμε την περίπτωση των Fibonacci ακολουθιών  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  με  $k \geq 2$  και  $m \geq 1$ .
- iii) Η ακολουθία  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$ , για διάφορες τιμές των  $k, m$  με  $k \geq 2$  και  $m \geq 1$  παράγει ακολουθίες σαν αυτές που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1, (βλέπε, Πίνακα 3).  
 Συγκεκριμένα, για  $k = 2$  και  $m = 1$ , η (3.1.1) και (3.1.2) προκύπτει η ακολουθία 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, ..., που είναι παρόμοια με την Padovan, (βλέπε, Πίνακα 3).

### 3.1.2 Σχέση πινάκων και όρων ακολουθίας Fibonacci

Για  $k \geq 2$  και  $m \geq 0$ , από την (3.1.1) και (3.1.2) μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-m-1} + f_{n-m-2} + \dots + f_{n-m-(k-1)} + f_{n-m-k} \\ f_{n-1} &= f_{n-1} \\ &\vdots \\ f_{n-m} &= f_{n-m} \\ f_{n-m-1} &= f_{n-m-1} \\ &\vdots \\ f_{n-m-(k-1)} &= f_{n-m-(k-1)} \end{aligned}$$

Έτσι, όπως και στην [1], χρησιμοποιώντας τον  $(k+m) \times 1$  πίνακα-στήλη με στοιχεία τους  $k, m$ -όρους της ακολουθίας Fibonacci, το παραπάνω γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφτεί με τη μορφή πινάκων ως ακολούθως :



$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ \vdots \\ f_{n-m} \\ f_{n-m-1} \\ \vdots \\ f_{n-m-(k-2)} \\ f_{n-m-(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \\ \vdots \\ f_{n-m} \\ f_{n-m-1} \\ \vdots \\ f_{n-m-(k-1)} \\ f_{n-m-k} \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Από την (3.1.3) μπορούμε να καταλήξουμε στον επόμενο ορισμό, ο οποίος έχει παρουσιασθεί [1, 11] και μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες του πίνακα που ορίζεται στον ορισμό έχουν μελετηθεί.

### Ορισμός 3.3

Ο  $(k+m) \times (k+m)$  πίνακας του γραμμικού συστήματος στη (3.1.3) είναι ένας σύνθετος πίνακας

$$R_{k,m} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.4)$$

όπου  $R_1$  είναι ο  $1 \times m$  πίνακας-γραμμή με όλα τα στοιχεία του να είναι ίσα με το 0, ο  $R_2$  είναι ο  $1 \times k$  πίνακας-γραμμή με τα στοιχεία του να είναι ίσα με το 1. Επιπλέον ο  $R_3$  είναι ο  $(k-m-1) \times (k-m-1)$  μοναδιαίος πίνακας και  $R_4$  είναι το διάνυσμα-πίνακας-στήλη  $(k+m-1) \times 1$  με τα στοιχεία του να είναι όλα ίσα με το 0. Στη συνέχεια, ο  $(k+m) \times (k+m)$  σύνθετος πίνακας  $R_{k,m}$  ονομάζεται  $k, m$ -**Fibonacci πίνακας**.

### Παρατήρηση 3.4

Γνωστές ακολουθίες που αναφέρθηκαν στο (ii) της Παρατήρησης 3.2 μπορούν να αναπαρασταθούν και να μελετηθούν μέσω του αντίστοιχου  $k, m$ -Fibonacci πίνακα, όπως αυτός κατασκευάζεται από τη (3.1.4) για τις διάφορες τιμές του  $k, m$ .

- Για  $k=2$  και  $m=1$ , η ακολουθία  $\{f_n^{(2,1)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  στο (iii) της Παρατήρησης 3.2 έχει αντίστοιχο πίνακα τον

$$R_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Πρόταση 3.5

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\chi_{R_{k,m}}(\lambda)$  του πίνακα  $R_{k,m}$  δίνεται από τον τύπο :

$$\chi_{R_{k,m}}(\lambda) = \lambda^{k+m} - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i = \lambda^{k+m} - \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} = \lambda^{k+m} - \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \quad (3.1.5)$$

#### Απόδειξη :

Η απόδειξη της (3.1.5) βασίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ως προς  $k$ .

Αρχικά από την (3.1.4) και για  $k=2$  και  $m=1$  υπολογίζουμε ότι ο αντίστοιχος

πίνακας Fibonacci είναι  $R_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Από την (1.1.5) υπολογίζουμε ότι το

χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $R_{2,1}$  είναι  $\chi_{R_{2,1}}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1 = \lambda^3 - \sum_{i=1}^2 \lambda^{2-i}$ , το

οποίο επαληθεύει την (3.1.5) για  $k=2$  και  $m=1$ .

Θεωρούμε ότι για μια σταθερή τιμή του  $m$  η (3.1.5) ισχύει για κάποιο  $k$ , (υπόθεση της επαγωγής), δηλαδή, ότι ισχύει η ισότητα:

$$\chi_{R_{k,m}}(\lambda) = \lambda^{k+m} - \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i = \lambda^{k+m} - \sum_{i=1}^k \lambda^{i-1} = \lambda^{k+m} - \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η (3.1.5) ισχύει και για  $k+1$ . Χρησιμοποιώντας την (1.1.5) για τον πίνακα  $R_{k+1,m}$  την παραπάνω υπόθεση της επαγωγής και αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα  $\lambda I_{k+m+1} - R_{k+1,m}$  ως προς την  $(k+m+1)$ -στήλη μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
x_{R_{k+1,m}}(\lambda) &= \det(\lambda I_{k+m+1} - R_{k+1,m}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{k+m+2} (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & & 0 \\ 0 & & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{2(k+m+1)} \lambda \det(\lambda I_{k+m} - R_{k,m}) \\
&= (-1)^{k+m+3} (-1)^{k+m} + \lambda (\lambda^{k+m} - \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i}) \\
&= \lambda^{k+m+1} - \sum_{i=1}^k \lambda^{k+1-i} - 1 \\
&= \lambda^{k+m+1} - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^{k+1-i}
\end{aligned}$$

Συνεπώς η (3.1.5) ισχύει και για  $k+1$ , άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό  $k, m$  που σημαίνει ότι η απόδειξη της (3.1.5) ολοκληρώθηκε.  $\square$

### 3.1.3 Ιδιότητες των ιδιοτιμών του $k, m$ -Fibonacci πίνακα $R_{k,m}$

Στον Ορισμό 1.6 και στην (1.1.3) ορίστηκε η φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα, η οποία σχετίζεται με το μέτρο των ιδιοτιμών του πίνακα. Για τη φασματική ακτίνα  $\rho(R_{k,m})$  του  $k, m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$ , μπορούμε να υπολογίσουμε ένα άνω και ένα κάτω φράγμα της αξιοποιώντας την πληροφορία ότι ο πίνακας είναι μη αρνητικός, χωρίς να τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του. Αν συμβολίσουμε με  $r_{ij}$  το  $ij$ -στοιχείο του  $k, m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$ , επειδή οι τιμές του πίνακα είναι 0 ή 1, εφαρμόζοντας την (1.1.6) και (1.1.7) του Θεωρήματος 1.8 έχουμε, αντίστοιχα

$$1 = \min_{1 \leq i \leq k+m} \sum_{j=1}^{k+m} r_{ij} \leq \rho(R_{k,m}) \leq \max_{1 \leq i \leq k+m} \sum_{j=1}^{k+m} r_{ij} = k$$

και

$$1 = \min_{1 \leq j \leq k+m} \sum_{i=1}^{k+m} r_{ij} \leq \rho(R_{k,m}) \leq \max_{1 \leq j \leq k+m} \sum_{i=1}^{k+m} r_{ij} = 2$$

από όπου συνυπολογίζοντας ότι  $k \geq 2$  και  $m > 0$ , καταλήγουμε

$$1 \leq \rho(R_{k,m}) \leq 2. \quad (3.1.6)$$

Επιπλέον μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $R_{k,m}$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Ορισμό 1.4 και Πρόταση 1.5), επειδή εύκολα επαληθεύεται ότι ισχύει η (1.1.1), δηλαδή,

$$(I_{k+m} + R_{k,m})^{k+m-1} > 0. \quad (3.1.7)$$

Συνδυάζοντας την αναγωγιμότητα του  $R_{k,m}$  από την (3.1.7) με [13, Theorem 7] και την (3.1.6) συμπεραίνουμε ότι για τη φασματική ακτίνα του  $R_{k,m}$  ισχύει

$$1 < \rho(R_{k,m}) < 2. \quad (3.1.8)$$

Επίσης, από την (3.1.5) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $k,m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$  είναι  $-1$  και εφαρμόζοντας το (ii) της Πρότασης 1.7 καταλήγουμε

$$\det R_{k,m} = (-1)^{k+m} (-1) = (-1)^{k+m+1}, \quad (3.1.9)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $k, m$ , ο  $k,m$ -Fibonacci πίνακας  $R_{k,m}$  είναι πάντα αντιστρέψιμος, άρα καμία ιδιοτιμή του δεν μπορεί να είναι ίση με το μηδέν. Αν θεωρήσουμε ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του  $k,m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$  είναι  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+m-1}, \rho(R_{k,m})$ , συνδυάζοντας την παραπάνω παρατήρηση με τη μη ύπαρξη μηδενικής ιδιοτιμής και το Θεώρημα 1.9 μπορούμε να πούμε ότι ισχύει:

$$0 < |\lambda_i| < \rho(R_{k,m}), \text{ με } i = 1, 2, \dots, k+m-1 \quad (3.1.10)$$

### Παράδειγμα 3.6

Για  $k=2, m=1$  η ακολουθία Fibonacci  $1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \dots$ , σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.4, ο  $2,1$ -Fibonacci πίνακας είναι

$$R_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Από την (3.1.5), (βλέπε, Παράρτημα Β, συνάρτηση **km\_Fibonacci\_Matrix**), υπολογίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $R_{2,1}$ , που είναι

$$\chi_{R_{2,1}}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1.$$

Οι ρίζες του  $\chi_{R_{2,1}}(\lambda)$  είναι

$$\lambda_1 = -0.66235 + 0.56227i \text{ και } \lambda_2 = -0.66235 - 0.56227i \text{ και } \lambda_3 = 1.32472.$$

Η φασματική ακτίνα είναι

$$\rho(R_{2,1}) = 1.32472,$$

από όπου είναι φανερό ότι επαληθεύεται η (3.1.8), δηλαδή,

$$1 < \rho(R_{2,1}) = 1.32472 < 2. \quad \square$$

### Παράδειγμα 3.7

Για  $k=2, m=2$  η ακολουθία Fibonacci  $\{f_n^{(2,2)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  έχει όρους 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7, 8, 9, ..., και ο 2,2-Fibonacci πίνακας υπολογίζεται από την (3.1.4) ότι είναι

$$R_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Από την (3.1.5), (βλέπε, Παράρτημα Β, συνάρτηση **km\_Fibonacci\_Matrix**), υπολογίζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $R_{2,2}$ , που είναι

$$\chi_{R_{2,2}}(\lambda) = \lambda^4 - \lambda - 1.$$

Οι ρίζες του είναι

$$\lambda_1 = -0.24812 + 1.0339i, \lambda_2 = -0.24812 - 1.0339i, \lambda_3 = -0.72449 \text{ και}$$

$$\lambda_4 = 1.22074.$$

Η φασματική ακτίνα είναι

$$\rho(R_{2,2}) = 1.22074,$$

από όπου είναι φανερό ότι επαληθεύεται η (3.1.8), δηλαδή,

$$1 < \rho(R_{2,2}) = 1.22074 < 2. \quad \square$$

### 3.2 Μη αναδρομικός τύπος ακολουθίας Fibonacci αθροίσματος k-όρων μετά από m-όρους

Προηγουμένως, για την ακολουθία Fibonacci  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$ , ο  $n$ -οστός όρος της δίνεται από τον αναδρομικό τύπο (3.1.1) με αρχικές συνθήκες ίσες με την τιμή 1.

Με τη χρήση της συνάρτησης δέλτα (όπως ορίστηκε στη (2.2.1), Κεφάλαιο 2) και αν λάβουμε υπόψη ότι οι  $k+m$  όροι της ακολουθίας, που έχουν αρνητικό δείκτη, είναι ίσοι με το μηδέν

$$f_{-(k+m-1)} = \dots = f_{-1} = f_0 = 0, \quad (3.2.1)$$

οι όροι της ακολουθίας  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  μπορούν να δίνονται από «κλειστό τύπο» και όχι από αναδρομικό, όπως περιγράφεται στην παρακάτω πρόταση.

#### Πρόταση 3.8

Έστω οι φυσικοί αριθμοί  $k, m$ , με  $k \geq 2$  και  $m \geq 0$ . Για κάθε  $n \geq 1$ , ο  $n$ -οστός όρος  $f_n$  της ακολουθίας  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  μπορεί να δοθεί από την ακόλουθη αναδρομική σχέση :

$$f_n = \sum_{i=1}^k f_{n-m-i} + \sum_{j=1}^{k+m} \delta_{n-j} - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} \delta_{n-m-i-j} \quad (3.2.2)$$

με αρχικές συνθήκες όπως στη (3.3.1).

Η (3.2.2) μπορεί να γραφεί

$$f_n - \sum_{i=1}^k f_{n-m-i} = \sum_{j=1}^{k+m} \delta_{n-j} - \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{n-m-1-i} - \sum_{i=1}^{k-2} \delta_{n-m-2-i} - \dots - \sum_{i=1}^2 \delta_{n-m-(k-2)-i} - \delta_{n-k-m}$$

όπου χρησιμοποιώντας  $z$ -μετασχηματισμό παράγεται η  $F(z)$  :

$$F(z) = \frac{z^{-1} + \dots + z^{-(k+m-1)} + z^{-(k+m)} - \sum_{i=1}^{k-1} z^{-(1+m+i)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(2+m+i)} - \dots - \sum_{i=1}^2 z^{-(k+m+i-2)} - z^{-(k+m)}}{1 - z^{-(m+1)} - z^{-(m+2)} - \dots - z^{-(m+k-1)} - z^{-(m+k)}}$$

$$= \frac{z^{-1} + \dots + z^{-(k+m-1)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(m+1+i)} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(m+2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^3 z^{-(k+m+i-3)} - z^{-(k+m-1)} - (k-2)z^{-(k+m)}}{1 - z^{-(m+1)} - z^{-(m+2)} - \dots - z^{-(m+k-1)} - z^{-(m+k)}}$$

$$\begin{aligned}
& z^{-1} + \dots + z^{-(k+m-1)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(m+1+i)} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(m+2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^3 z^{-(k+m+i-3)} - z^{-(k+m-1)} - (k-2)z^{-(k+m)} \\
= & \frac{1}{z^{k+m}} (z^{k+m} - z^{k-1} - \dots - 1) \\
& z^{-1} + \dots + z^{-(k+m-1)} - \sum_{i=1}^{k-2} z^{-(m+1+i)} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(m+2+i)} - \dots - \sum_{i=1}^3 z^{-(k+m+i-3)} - z^{-(k+m-1)} - (k-2)z^{-(k+m)} \\
= & \frac{z^{-(k+m)} x_{R_{k,m}}(z)}{z^{k+m} x_{R_{k,m}}(z)} \\
& z^{-1} - \sum_{i=1}^{k-3} z^{-(2+m+i)} - \sum_{i=1}^{k-4} z^{-(3+i)} - \dots - \sum_{i=1}^2 z^{-(k+m+i-3)} - z^{-(k+m-1)} - (k-2)z^{-(k+m)} \\
= & \frac{z^{k+m} x_{R_{k,m}}(z)}{z^{k+m} x_{R_{k,m}}(z)} \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

Από την (3.2.3) είναι σημαντικό να πούμε ότι οι πόλοι της  $F(z)$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $R_{k,m}$ . Επιπλέον, οι βαθμοί των πολωνύμων του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίσοι. Έτσι γράφοντας την  $F(z)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων προκύπτει :

$$F(z) = k - 2 + \frac{c}{1 - \rho(R_{k,m})z^{-1}} + \sum_{j=1}^{k+m-1} \frac{c_j}{1 - \lambda_j z^{-1}}, \tag{3.2.4}$$

όπου  $c, \rho(R_{k,m}) \in \mathbb{R}$ , και οι υπόλοιπες σταθερές  $c_j$  είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε έναν «κλειστό τύπο», ο οποίος υπολογίζει όλους τους όρους της ακολουθίας  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  ως συνάρτηση όλων των ιδιοτιμών του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$ , τύπος που διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

### Πρόταση 3.9

Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+m-1}, \rho(R_{k,m})$  οι ιδιοτιμές του  $k, m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$  με  $k \geq 2$  και  $m \geq 1$ . Ο  $n$ -οστός όρος  $f_n$  της ακολουθίας δίνεται από τη σχέση :

$$f_n = c(\rho(R_{k,m}))^n + \sum_{j=1}^{k+m-1} c_j (\lambda_j)^n \tag{3.2.5}$$

όπου  $c, c_j$  για κάθε  $j=1,2,\dots,k+m-1$  είναι προσδιοριστέοι συντελεστές, που προκύπτουν από την (3.2.4).

**Απόδειξη :**

Χρησιμοποιώντας αντίστροφο z-μετασχηματισμό και στα δύο μέλη της (3.2.4) για οποιαδήποτε τιμή του  $n$  έχουμε :

$$f_n = (k-2)\delta_n + c(\rho(R_{k,m}))^n u_n + \sum_{j=1}^{k+m-1} c_j (\lambda_j)^n u_n$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ισότητα με τους ορισμούς της βηματικής και της δέλτα συνάρτησης  $\delta$ , προκύπτει η σχέση στη (3.2.5). □



### 3.3 Χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας Fibonacci αθροίσματος k-όρων μετά από m-όρους

#### Πρόταση 3.10

Για τους φυσικούς αριθμούς  $k, m$  με  $k \geq 2$  και  $m \geq 0$ , οι όροι της ακολουθίας  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  της (3.1.1) ικανοποιούν τις παρακάτω χαρακτηριστικές ιδιότητες ορίων

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \rho(R_{k,m}), \quad (3.3.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = \rho(R_{k,m}), \quad (3.3.2)$$

όπου  $\rho(R_{k,m})$  είναι η φασματική ακτίνα του  $k, m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$ .

#### Απόδειξη :

Θεωρούμε ότι η τριγωνομετρική μορφή των σταθερών  $c_j$  στην (3.2.4) είναι  $c_j = |c_j| e^{i\theta_j}$ , και των αντίστοιχων ιδιοτιμών  $\lambda_j$  του  $R_{k,m}$  ότι είναι  $\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\omega_j}$ , για κάθε  $j = 1, 2, \dots, k+m-1$ . Αντικαθιστώντας τις πολικές μορφές των  $c_j, \lambda_j$  στην (3.2.5) έχουμε :

$$\begin{aligned} f_n &= c(\rho(R_{k,m}))^n + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| e^{i\theta_j} (|\lambda_j| e^{i\omega_j})^n \\ &= c(\rho(R_{k,m}))^n + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^n e^{i(\theta_j + n\omega_j)} \\ &= c(\rho(R_{k,m}))^n + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j)) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Από την (3.3.3) μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(\rho(R_{k,m}))^{n+1} + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^{n+1} (\cos(\theta_j + (n+1)\omega_j) + i \sin(\theta_j + (n+1)\omega_j))}{c(\rho(R_{k,m}))^n + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| \cdot |\lambda_j|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j))} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\rho(R_{k,m}))^{n+1} (c + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| \left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right|^{n+1} (\cos(\theta_j + (n+1)\omega_j) + i \sin(\theta_j + (n+1)\omega_j)))}{(\rho(R_{k,m}))^n (c + \sum_{j=1}^{k+m-1} |c_j| \left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j)))} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Επιπλέον, επειδή οι ακολουθίες  $\{\cos(\theta_j + n\omega_j)\}_{n=1,2,3,\dots}$  και  $\{\sin(\theta_j + n\omega_j)\}_{n=1,2,3,\dots}$  είναι φραγμένες, και επειδή η ανισότητα στην (3.1.10) συνεπάγεται  $\left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right| < 1$ , για κάθε

$j = 1, 2, \dots, k + m - 1$ , συμπεραίνουμε ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right|^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right|^n = 0$ .

Από τις παραπάνω φραγμένες ακολουθίες και τις οριακές ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right|^{n+1} (\cos(\theta_j + (n+1)\omega_j) + i \sin(\theta_j + (n+1)\omega_j)) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(R_{k,m})} \right|^n (\cos(\theta_j + n\omega_j) + i \sin(\theta_j + n\omega_j)) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Είναι φανερό ότι η (3.3.1) προκύπτει μετά από αντικατάσταση της (3.3.5) στη (3.3.4).

Για να αποδείξουμε την (3.3.2) χρησιμοποιείται η άσκηση [16, Chapter 1], στην οποία αναφέρεται ότι: «για μια μη μηδενική ακολουθία  $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ , αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = a$ , τότε

ισχύει  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ ». Είναι προφανές ότι η κάθε ακολουθία  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  είναι θετικών όρων, οπότε συνδυάζοντας την παραπάνω άσκηση με την απόδειξη της (3.3.1) προκύπτει άμεσα η απόδειξη της (3.3.2).  $\square$

### Παράδειγμα 3.11

Έστω η ακολουθία  $\{f_n^{(2,1)}\}_{n=1,2,3,\dots}$ . Όπως αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 3.6, οι ιδιοτιμές του 2,1-Fibonacci πίνακα  $R_{2,1}$  είναι

$$\rho(R_{2,1}) = 1.32472, \quad \lambda_1 = -0.66235 + 0.5622i, \quad \lambda_2 = -0.66235 - 0.5622i,$$

και οι σταθεροί όροι του κλάσματος στην (3.2.4) προσδιορίζονται με την υλοποίηση της συνάρτησης **kmst** (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι

$$c = 0.54511, \quad c_1 = -0.27255 + 0.07397i, \quad c_2 = -0.27255 - 0.07397i.$$

Για  $n \geq 1$ , ο «κλειστός τύπος»-μη αναδρομικός για το  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci υπολογίζεται από την (3.2.5) και είναι

$$\begin{aligned} f_n &= 0.54511(1.32472)^n + \\ &\quad + (-0.27255 + 0.07397i)(-0.66235 + 0.5622i)^n \\ &\quad + (-0.27255 - 0.07397i)(-0.66235 - 0.5622i)^n \end{aligned}$$

Οι χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας  $\{f_n^{(2,1)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  δίνονται από την (3.3.1) και (3.3.2) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = 1.32472 \quad \square$$

### Παράδειγμα 3.12

Έστω η ακολουθία  $\{f_n^{(2,2)}\}_{n=1,2,3,\dots}$ . Όπως αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 3.7, οι ιδιοτιμές του  $2,2$ -Fibonacci πίνακα  $R_{2,2}$  είναι :

$$\rho(R_{2,2}) = 1.22074, \quad \lambda_1 = -0.24812 + 1.0339i, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -0.24812 - 1.0339i, \text{ και} \\ \lambda_3 = -0.72449$$

Οι σταθεροί όροι του κλάσματος στην (3.2.4) προσδιορίζονται με την υλοποίηση της συνάρτησης **kmst**, (βλέπε, Παράρτημα Β) και είναι ίσοι με

$$c = 0.59122, \quad c_1 = -0.13687 + 0.00951i, \quad c_2 = \bar{c}_1 = -0.13687 - 0.00951i, \text{ και} \\ c_3 = -0.31747.$$

Για  $n \geq 1$ , ο κλειστός τύπος για το  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci υπολογίζεται από την (3.2.5) και είναι

$$f_n = 0.59122(1.22074)^n + (-0.13687 + 0.00951i)(-0.24812 + 1.0339i)^n \\ + (-0.13687 - 0.00951i)(-0.24812 - 1.0339i)^n - 0.31747(-0.72449)^n$$

Οι χαρακτηριστικές οριακές τιμές της ακολουθίας  $\{f_n^{(2,2)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  δίνονται από την (3.3.1) και (3.3.2) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n} = 1.22074 \quad \square$$

### 3.4 Δυνάμεις $k, m$ -Fibonacci Πίνακα $R_{k,m}$

#### Πρόταση 3.13

Έστω  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  η ακολουθία Fibonacci  $k, m$ -αθροίσματος στην (3.2.2) με αρχικές συνθήκες όπως στην (3.2.2) και ο αντίστοιχος  $k, m$ -Fibonacci πίνακας  $R_{k,m}$ .

Για  $n \geq k + 2m + 1$ , η  $n$ -οστή δύναμη του  $k, m$ -Fibonacci πίνακα ορίζεται ως

$$R_{k,m}^n = [\hat{r}_{i,j}], \quad (3.4.1)$$

όπου  $\hat{r}_{i,j}$  ορίζει τον  $ij$ -οστό όρο του  $R_{k,m}^n$ , για  $1 \leq i, j \leq k + m$ . Οι θετικοί ακέραιοι του  $\hat{r}_{i,j}$  δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{1}{k-1} (f_{n+k+j-i} - f_{n-j-i}), \quad \text{με } 1 \leq j \leq m \quad (3.4.2)$$

$$\hat{r}_{i,j} = \frac{1}{k-1} \sum_{r=1}^{k+m+1-j} (f_{n+1+k-i-r} - f_{n+1-i-r}), \quad m+1 \leq j \leq k+m \quad (3.4.3)$$

#### Απόδειξη :

Η απόδειξη βασίζεται στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ως προς  $n$ , και είναι ανάλογη αυτής που έγινε στο Κεφάλαιο 2, στην Πρόταση 2.13.  $\square$

#### Παράδειγμα 3.14

Έστω με  $k = 2$  και  $m = 1$ . Ο αντίστοιχος  $2, 1$ -Fibonacci πίνακας είναι:

$$R_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $R_{2,1}^n$  υπολογίζεται σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 για κάθε

$n \geq k + 2m + 1 = 5$  από τις (3.4.2) και (3.4.3) ως εξής :

$$\begin{aligned} \hat{r}_{1,1} &= f_{n+2} - f_n & \hat{r}_{1,2} &= \sum_{r=1}^2 (f_{n+2-r} - f_{n-r}) = f_{n+1} - f_{n-1} + f_n - f_{n-2} \\ \hat{r}_{2,1} &= f_{n+1} - f_{n-1} & \hat{r}_{2,2} &= \sum_{r=1}^2 (f_{n+1-r} - f_{n-1-r}) = f_n - f_{n-2} + f_{n-1} - f_{n-3} \\ \hat{r}_{3,1} &= f_n - f_{n-2} & \hat{r}_{3,2} &= \sum_{r=1}^2 (f_{n-r} - f_{n-2-r}) = f_{n-1} - f_{n-3} + f_{n-2} - f_{n-4} \\ \hat{r}_{3,1} &= f_{n+1} - f_{n-1} & \hat{r}_{3,2} &= f_n - f_{n-2} & \hat{r}_{3,3} &= f_{n-1} - f_{n-3} \end{aligned}$$

οπότε

$$R_{2,1}^n = \begin{bmatrix} \hat{r}_{1,1} & \hat{r}_{1,2} & \hat{r}_{1,3} \\ \hat{r}_{2,1} & \hat{r}_{2,2} & \hat{r}_{2,3} \\ \hat{r}_{3,1} & \hat{r}_{3,2} & \hat{r}_{3,3} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+2} - f_n & f_{n+1} - f_{n-1} + f_n - f_{n-2} & f_{n+1} - f_{n-1} \\ f_{n+1} - f_{n-1} & f_n - f_{n-2} + f_{n-1} - f_{n-3} & f_n - f_{n-2} \\ f_n - f_{n-2} & f_{n-1} - f_{n-3} + f_{n-2} - f_{n-4} & f_{n-1} - f_{n-3} \end{bmatrix}. \quad (3.4.4)$$

Υπενθυμίζεται ότι οι όροι της αντίστοιχης ακολουθίας Fibonacci είναι 1,1,1,2,2,3,4,5,7,9,..., οπότε για τις διάφορες τιμές του  $n \geq 5$ , ο πίνακας  $R_{2,1}^n$  στη (3.4.4) υπολογίζεται με την υλοποίηση της συνάρτησης **km\_Fibonacci\_Matrix** (βλέπε, Παράρτημα Β) για  $k=2, m=1$  και είναι :

- Για  $n=5$  :

$$R_{2,1}^5 = \begin{bmatrix} f_7 - f_5 & f_6 - f_4 + f_5 - f_3 & f_6 - f_4 \\ f_6 - f_4 & f_5 - f_3 + f_4 - f_2 & f_5 - f_3 \\ f_5 - f_3 & f_4 - f_2 + f_3 - f_1 & f_4 - f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^5 \quad (3.4.5)$$

- Για  $n=10$  :

$$R_{2,1}^{10} = \begin{bmatrix} f_{12} - f_{10} & f_{11} - f_9 + f_{10} - f_8 & f_{11} - f_9 \\ f_{11} - f_9 & f_{10} - f_8 + f_9 - f_7 & f_{10} - f_8 \\ f_{10} - f_8 & f_9 - f_7 + f_8 - f_6 & f_9 - f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- Για  $n=11$  :

$$R_{2,1}^{11} = \begin{bmatrix} f_{13} - f_{11} & f_{12} - f_{10} + f_{11} - f_9 & f_{12} - f_{10} \\ f_{12} - f_{10} & f_{11} - f_9 + f_{10} - f_8 & f_{11} - f_9 \\ f_{11} - f_9 & f_{10} - f_8 + f_9 - f_7 & f_{10} - f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 7 \\ 7 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

- Για  $n=25$  :

$$R_{2,1}^{25} = \begin{bmatrix} f_{27} - f_{25} & f_{26} - f_{24} + f_{25} - f_{23} & f_{26} - f_{24} \\ f_{26} - f_{24} & f_{25} - f_{23} + f_{24} - f_{23} & f_{25} - f_{23} \\ f_{25} - f_{23} & f_{24} - f_{22} + f_{23} - f_{21} & f_{24} - f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465 & 616 & 351 \\ 351 & 465 & 265 \\ 265 & 351 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\text{Επιπλέον } (I_3 + R_{2,1})^2 = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} > 0 .$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 1.5, ο πίνακας  $R_{2,1}$  είναι ανάγωγος.

Επίσης, από την (3.4.5) έχουμε

$$R_{2,1}^5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} > 0 .$$

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.11 (iii),  $R_{2,1}$  είναι αρχικός πίνακας. □

### Παράδειγμα 3.15

Έστω με  $k=2$  και  $m=2$ . Από αντίστοιχος  $2,2$ -Fibonacci πίνακας είναι:

$$R_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας  $R_{2,2}^n$  υπολογίζεται σύμφωνα με την Πρόταση 3.13, για κάθε

$n \geq k+2m+1=7$  από τις (3.4.2) και (3.4.3) ως εξής

$$\hat{r}_{1,1} = f_{n+2} - f_n \qquad \hat{r}_{1,2} = f_{n+3} + f_{n+1}$$

$$\hat{r}_{1,3} = \sum_{r=1}^2 (f_{n+2-r} - f_{n-r}) = f_{n+1} - f_{n-1} + f_n - f_{n-2}$$

$$\hat{r}_{2,1} = f_{n+1} - f_{n-1} \qquad \hat{r}_{2,2} = f_{n+2} + f_n$$

$$\hat{r}_{2,3} = \sum_{r=1}^2 (f_{n+1-r} - f_{n-1-r}) = f_n - f_{n-2} + f_{n-1} - f_{n-3}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\hat{r}_{4,1} = f_{n-1} - f_{n-3} \qquad \hat{r}_{4,2} = f_n - f_{n-2}$$

$$\hat{r}_{4,3} = \sum_{r=1}^2 (f_{n-1-r} - f_{n-3-r}) = f_{n-2} - f_{n-4} + f_{n-3} - f_{n-5}$$

$$\hat{r}_{1,4} = \sum_{r=1}^1 (f_{n+2-r} - f_{n-r}) = f_{n+1} - f_{n-1}$$

$$\hat{r}_{2,4} = \sum_{r=1}^1 (f_{n+1-r} - f_{n-1-r}) = f_n - f_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\hat{r}_{4,4} = \sum_{r=1}^1 (f_{n-1-r} - f_{n-3-r}) = f_{n-2} - f_{n-4}$$

$$\begin{aligned}
R_{2,2}^n &= \begin{bmatrix} \hat{r}_{1,1} & \hat{r}_{1,2} & \hat{r}_{1,3} & \hat{r}_{1,4} \\ \hat{r}_{2,1} & \hat{r}_{2,2} & \hat{r}_{2,3} & \hat{r}_{2,4} \\ \hat{r}_{3,1} & \hat{r}_{3,2} & \hat{r}_{3,3} & \hat{r}_{3,4} \\ \hat{r}_{4,1} & \hat{r}_{4,2} & \hat{r}_{4,3} & \hat{r}_{4,4} \end{bmatrix}^n \\
&= \begin{bmatrix} f_{n+2} - f_n & f_{n+3} - f_{n+1} & f_{n+1} - f_{n-1} + f_n - f_{n-2} & f_{n+1} - f_{n-1} \\ f_{n+1} - f_{n-1} & f_{n+2} - f_n & f_n - f_{n-2} + f_{n-1} - f_{n-3} & f_n - f_{n-2} \\ f_n - f_{n-2} & f_{n+1} - f_{n-1} & f_{n-1} - f_{n-3} + f_{n-2} - f_{n-4} & f_{n-1} - f_{n-3} \\ f_{n-1} - f_{n-3} & f_n - f_{n-2} & f_{n-2} - f_{n-4} + f_{n-3} - f_{n-5} & f_{n-2} - f_{n-4} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Οι όροι της αντίστοιχης ακολουθίας  $\{f_n^{(2,2)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  Fibonacci είναι 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7, 8, 9, ..., οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.13 για τις διάφορες τιμές του  $n \geq 7$ , ο πίνακας  $R_{2,2}^n$  στη (3.4.6) υπολογίζεται με την υλοποίηση της συνάρτησης

**km\_Fibonacci\_Matrix** (βλέπε, Παράρτημα Β) για  $k=2, m=2$  και είναι :

- Για  $n=10$  :

$$R_{2,2}^{10} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{12} - f_{10} & f_{13} - f_{11} & f_{11} - f_9 + f_{10} - f_8 & f_{11} - f_9 \\ f_{11} - f_9 & f_{12} - f_{10} & f_{10} - f_8 + f_9 - f_7 & f_{10} - f_8 \\ f_{10} - f_8 & f_{11} - f_9 & f_9 - f_7 + f_8 - f_6 & f_9 - f_7 \\ f_9 - f_7 & f_{10} - f_8 & f_8 - f_6 + f_7 - f_5 & f_8 - f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

- Για  $n=11$  :

$$R_{2,2}^{11} = \begin{bmatrix} f_{13} - f_{11} & f_{14} - f_{12} & f_{12} - f_{10} + f_{11} - f_9 & f_{12} - f_{10} \\ f_{12} - f_{10} & f_{13} - f_{11} & f_{11} - f_9 + f_{10} - f_8 & f_{11} - f_9 \\ f_{11} - f_9 & f_{12} - f_{10} & f_{10} - f_8 + f_9 - f_7 & f_{10} - f_8 \\ f_{10} - f_8 & f_{11} - f_9 & f_9 - f_7 + f_8 - f_6 & f_9 - f_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

- Για  $n=25$  :

$$R_{2,2}^{25} = \begin{bmatrix} f_{27} - f_{25} & f_{28} - f_{26} & f_{26} - f_{24} + f_{25} - f_{23} & f_{26} - f_{24} \\ f_{26} - f_{24} & f_{27} - f_{25} & f_{25} - f_{23} + f_{24} - f_{22} & f_{25} - f_{23} \\ f_{25} - f_{23} & f_{26} - f_{24} & f_{24} - f_{22} + f_{23} - f_{21} & f_{24} - f_{22} \\ f_{24} - f_{22} & f_{25} - f_{23} & f_{23} - f_{21} + f_{22} - f_{20} & f_{23} - f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 49 & 64 & 37 \\ 37 & 43 & 49 & 27 \\ 27 & 37 & 43 & 22 \\ 22 & 27 & 37 & 21 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον από τον πίνακα

$$I_4 + R_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

υπολογίζουμε

$$[I_4 + R_{2,2}]^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

Συνεπώς,  $R_{2,2}$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Πρόταση 1.5).

Επίσης, παρατηρούμε ότι ο πίνακας στη (3.4.7) είναι θετικός, συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 1.11 (iii),  $R_{2,2}$  είναι αρχικός πίνακας.  $\square$

### Παράδειγμα 3.16

Έστω  $k = 3$  και  $m = 2$ . Ο αντίστοιχος 3,2-Fibonacci πίνακας είναι:

$$R_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $R_{3,2}^n$  υπολογίζεται εύκολα από την Πρόταση 3.13, για κάθε  $n \geq 3+4+1=8$ , από τις (3.4.2) και (3.4.3) ως εξής :

$$\hat{r}_{1,1} = \frac{1}{2}(f_{n+3} - f_n) \quad \dots$$

$$\hat{r}_{1,2} = \frac{1}{2}(f_{n+2} - f_{n-1}) \quad \dots$$

$$\hat{r}_{1,3} = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^3 f_{n+3-r} - f_{n-r}\right) = \frac{1}{2}(f_{n+2} - f_{n-1} + f_{n+1} - f_{n-2} + f_n - f_{n-3}) \quad \dots$$

$$\hat{r}_{1,4} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^2 (f_{n+3-r} - f_{n-r}) = \frac{1}{2}(f_{n+2} - f_{n-1} + f_{n+1} - f_{n-2}) \quad \dots$$

$$\hat{r}_{1,5} = \frac{1}{2}(f_{n+2} - f_{n-1}) \quad \dots$$



$$\begin{aligned}
R_{3,2}^n &= \begin{bmatrix} \hat{r}_{1,1} & \hat{r}_{1,2} & \cdots & \hat{r}_{1,5} \\ \hat{r}_{2,1} & \hat{r}_{2,2} & & \hat{r}_{2,5} \\ \vdots & \hat{r}_{3,2} & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \\ \hat{r}_{5,1} & \hat{r}_{5,2} & \cdots & \hat{r}_{5,5} \end{bmatrix}^n \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{n+3} - f_n & f_{n+2} - f_{n-1} & \cdots & f_{n+2} - f_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{n-1} - f_{n-4} & \cdots & f_{n-2} - f_{n-5} & \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Οι όροι της αντίστοιχης ακολουθίας  $\{f_n^{(3,2)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  Fibonacci είναι 1,1,1,1,1,3,3,3,5,7,9,11..., οπότε για τις διάφορες τιμές του  $n \geq 8$ , ο πίνακας  $R_{3,2}^n$  στη (3.4.8) υπολογίζεται με την υλοποίηση της συνάρτησης **km\_Fibonacci\_Matrix** (βλέπε, Παράρτημα Β)  $k=3$  και  $m=2$ , και είναι :

- Για  $n=10$  :

$$R_{3,2}^{10} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{13} - f_{10} & f_{12} - f_9 & \cdots & f_{12} - f_9 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_9 - f_6 & \cdots & f_8 - f_5 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.9}$$

- Για  $n=15$  :

$$R_{3,2}^{15} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{18} - f_{15} & f_{17} - f_{14} & \cdots & f_{17} - f_{14} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{14} - f_{11} & \cdots & f_{13} - f_{10} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 24 & 31 & 23 & 13 \\ 13 & 18 & 24 & 28 & 10 \\ 10 & 13 & 18 & 14 & 8 \\ 8 & 10 & 13 & 10 & 6 \\ 6 & 8 & 10 & 7 & 4 \end{bmatrix} .$$

- Για  $n=30$  :

$$R_{3,2}^{30} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_{33} - f_{30} & f_{32} - f_{29} & \cdots & f_{32} - f_{29} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{29} - f_{26} & \cdots & f_{28} - f_{25} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1028 & 1601 & 2121 & 1601 & 912 \\ 912 & 1208 & 1601 & 1209 & 689 \\ 689 & 912 & 1208 & 912 & 520 \\ 520 & 689 & 912 & 668 & 392 \\ 392 & 520 & 689 & 520 & 296 \end{bmatrix}$$

Επιπλέον από τον πίνακα

$$I_5 + R_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

υπολογίζουμε

$$[I_5 + R_{3,2}]^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 6 & 11 & 15 & 11 & 5 \\ 5 & 6 & 11 & 10 & 6 \\ 6 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Συνεπώς,  $R_{3,2}$  είναι ανάγωγος πίνακας, (βλέπε, Πρόταση 1.5).

Επίσης, παρατηρούμε ότι ο πίνακας στη (3.4.9) είναι θετικός, συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 1.11 (ii),  $R_{3,2}$  είναι αρχικός πίνακας. □

# Συμπεράσματα

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία έγινε μελέτη ακολουθιών Fibonacci, οι οποίες δίνονται από τον αναδρομικό τύπο ως εξής: κάθε όρος της ακολουθίας Fibonacci προκύπτει από το άθροισμα  $k$  διαδοχικών όρων της ακολουθίας μετά από  $m$  προηγούμενους όρους από αυτόν, δοθέντων  $k+m$  αρχικών όρων όλοι ίσοι με τη μονάδα, όπου  $k, m$  φυσικοί αριθμοί. Οι ακολουθίες αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω ενός τετραγωνικού πίνακα, ο οποίος ανάλογα με το είδος της ακολουθίας συμβολίζεται με  $Q_k$  ή  $R_{k,m}$ , και ονομάζεται πίνακας Fibonacci. Ο πίνακας Fibonacci  $Q_k$ , αντιστοιχεί στην ακολουθία Fibonacci, που κάθε όρος της ισούται με το άθροισμα των  $k$  προηγούμενων όρων του για  $m=0$ , και ο πίνακας  $R_{k,m}$  αντιστοιχεί στην ακολουθία Fibonacci, που κάθε όρος της ισούται με το άθροισμα των  $k$  όρων της μετά από  $m$  προηγούμενους όρους από αυτόν, με  $m \geq 1$ .

Στην παρούσα πτυχιακή αποδείχτηκε ότι κάθε όρος της ακολουθίας Fibonacci μπορεί εύκολα να υπολογιστεί και από μη αναδρομικό τύπο, ως συνάρτηση όλων των ιδιοτιμών των πινάκων  $Q_k, R_{k,m}$ . Επιπλέον αποδεικνύονται τα ακόλουθα :

- Το εύρος της φασματικής ακτίνας των πινάκων  $Q_k, R_{k,m}$ , κυμαίνεται μεταξύ των αριθμών 1 και 2.
- Το όριο του λόγου, δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας Fibonacci, καθώς  $n$  τείνει στο άπειρο ισούται με τη φασματική ακτίνα των πινάκων  $Q_k, R_{k,m}$ , και
- Το όριο της  $n$ -οστής ρίζας του  $n$ -οστού όρου της ακολουθίας Fibonacci, καθώς  $n$  τείνει στο άπειρο ισούται με τη φασματική ακτίνα των πινάκων  $Q_k, R_{k,m}$ .

Για τους φυσικούς αριθμούς  $k, m, n$  με  $k \geq 2$ ,  $m \geq 0$  και  $n \geq k + 2m + 1$ , οι  $n$ -οστές δυνάμεις των πινάκων  $Q_k, R_{k,m}$  υπολογίζονται ως συνάρτηση κατάλληλων όρων της αντίστοιχης ακολουθίας Fibonacci (βλέπε, Πρόταση 2.13, Πρόταση 3.13), καθώς τα στοιχεία των πινάκων Fibonacci σχετίζονται άμεσα με τους όρους της αντίστοιχης ακολουθίας. Στο τελευταίο θεώρημα αποδεικνύεται ότι οι πίνακες  $R_{k,m}^n$  είναι αρχικοί και ανάγωγοι, το οποίο σημαίνει ότι βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορους τομείς των θετικών επιστημών, όπως κρυπτογραφία, θεωρία γραφημάτων, φασματική ανάλυση κτλ.

Για να υπολογιστούν οι όροι των ακολουθιών Fibonacci και των αντίστοιχων όρων των πινάκων Fibonacci, αναπτύχθηκαν κώδικες σε περιβάλλον Matlab/Octave.

# Βιβλιογραφία

- [1] Maria Adam and Nicholas Assimakis, k-step sum and m-step gap Fibonacci sequence, *ISRN Discrete Mathematics, International Scholarly Research Notices*, v. 2014, Article ID 374902, (2014), 7 pages.
- [2] Artur Benjamin , The Magic of Fibonacci numbers,  
<https://www.youtube.com/watch?v=SjSHVDFXHQ4>
- [3] Δημήτριος Γραμματικόπουλος, *Η ακολουθία Fibonacci Ορισμός-Ταυτότητες – Διαταραχή-Εφαρμογές*, Διπλωματική εργασία , Νοέμβριος 2007.
- [4] Χρήστος Δέδες , *Μη αρνητικοί πίνακες*, Πτυχιακή εργασία , Λαμία, 2011.
- [5] Γεώργιος Δονάτος και Μαρία Αδάμ, *Γραμμική Άλγεβρα-Θεωρία και Εφαρμογές*, Gutenberg, Αθήνα, 2008.
- [6] John W. Eaton, David Bateman, Søren Hauberg and Rik Wehbring, *Free Your Numbers*, Boston, USA, 2013, <http://www.gnu.org/software/octave/octave.pdf>
- [7] Xudan Fu and Xia Zhou, On matrices related with Fibonacci and Lucas numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 200, (2008), 96-100.
- [8] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [9] John Ivie, A general  $Q$ -matrix, *Fibonacci Quarterly*, 10(3), (1972), 255-264.
- [10] Dan Kalman, Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, *The Fibonacci Quarterly*, 20(1), (1982), 73-76.
- [11] Erdal Karaduman, An application of Fibonacci numbers in matrices, *Applied Mathematics and Computation*, 147, (2004), 903–908.
- [12] Thomas Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [13] D. Noutsos, Perron-Frobenius theory and some extensions, Como, Italy, May 2008, the presentation available at  
[http://www.math.uoi.gr/~dnoutsos/Papers\\_pdf\\_files/slide\\_perron.pdf](http://www.math.uoi.gr/~dnoutsos/Papers_pdf_files/slide_perron.pdf)
- [14] D. Noutsos, On Perron-Frobenius property of matrices having some negative entries, *Linear Algebra and its Applications*, 412, (2006), 132-153.
- [15] Μιχαήλ Παπαδημητράκης, *Πραγματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής*, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης , Σεπτέμβριος 2011.

- [16] Elias Stein and Rami Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.
- [17] Bo Tan and Zhi-Ying Wen, Some properties of the Tribonacci sequence, *European Journal of Combinatorics*, 28, (2007), 1703-1719.
- [18] The MathWorks Inc., *The Student Edition of MATLAB*, Prentice-Hall, 1997.
- [19] Sheng-liang Yang, On the k-generalized Fibonacci numbers and high-order linear recurrence relations, *Applied Mathematics and Computation*, 196, (2008), 850-857.
- [20] <https://ascendingearth2012.wordpress.com/fibonacci-geometry/>
- [21] [http://rosettacode.org/wiki/Fibonacci\\_n-step\\_number\\_sequences](http://rosettacode.org/wiki/Fibonacci_n-step_number_sequences)
- [22] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org/>

## Παράρτημα Α



Ο Fibonacci ήταν πολύ γνωστός στην εποχή του και αναγνωρίζεται σήμερα ως ο μεγαλύτερος μαθηματικός του Μεσαίωνα. Γεννήθηκε τη δεκαετία του 1170 και πέθανε αυτή του 1240. Άγαλμά του υπάρχει στο νεκροταφείο δίπλα στον Καθεδρικό Ναό της Pisa (Πίζας), κοντά στον περίφημο πύργο. Το όνομά του έχει δοθεί σε δύο δρόμους της πόλης της Πίζας και σε δύο αντίστοιχα της Φλωρεντίας. Το πραγματικό του όνομα ήταν Leonardo Pisano, όμως ο ίδιος αποκαλούσε τον εαυτό του Fibonacci, σύντμηση του Filius Bonacci (γιος του Bonacci), από το όνομα του πατέρα του. Ο πατέρας του Leonardo, Guglielmo Bonacci, ήταν τελωνειακός υπάλληλος στη Βορειοαφρικανική πόλη Bugia. Ο Fibonacci μεγάλωσε εκεί και η εκπαίδευσή του επηρεάστηκε σημαντικά από τους Μαυριτανούς, αλλά και από τα ταξίδια που έκανε αργότερα σε όλο το μήκος της μεσογειακής ακτής. Έτσι, γνώρισε πολλούς εμπόρους και έμαθε τα αριθμητικά συστήματα, που αυτοί χρησιμοποιούσαν για τις συναλλαγές και τους λογαριασμούς τους. Σύντομα διαπίστωσε τα πλεονεκτήματα του «Ινδοαραβικού» αριθμητικού συστήματος και έγινε από τους πρώτους, που το εισήγαγαν στην Ευρώπη. Πρόκειται για το αριθμητικό σύστημα που χρησιμοποιείται και σήμερα με δέκα ψηφία, ένα εκ των οποίων το μηδέν, και την υποδιαστολή.

Το βιβλίο του, Liber abaci (βιβλίο των υπολογισμών), το οποίο ολοκληρώθηκε το 1202, έπεισε αρκετούς Ευρωπαίους μαθηματικούς να χρησιμοποιήσουν το «νέο» σύστημα. Το βιβλίο, γραμμένο στα λατινικά, περιγράφει με λεπτομέρεια τους μαθηματικούς κανόνες που σήμερα διδάσκονται στο δημοτικό για την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και περιέχει πολλές ασκήσεις-παραδείγματα με λεπτομέρειες για την εφαρμογή αυτών των κανόνων.

Κατά το 1220, ο Leonardo, έγραψε το Practica Geometriaes, βιβλίο το οποίο αφιέρωσε στον Δάσκαλο Dominique, για τον οποίο όμως δεν υπάρχουν καταγραφές σε κανένα αρχείο. Σε αυτό το έργο του ο Leonardo, συστηματοποίησε το αντικείμενο της πρακτικής γεωμετρίας με ειδίκευση στις μετρήσεις σωμάτων. Έχει συμπεριλάβει επίσης κάποια θέματα άλγεβρας και τριγωνομετρίας, καθώς και τετραγωνικών και κυβικών ριζών, αναλογιών και απροσδιόριστων προβλημάτων.



# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

## Χρήση Matlab/Octave για τον υπολογισμό των όρων της ακολουθίας Fibonacci

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι κώδικες που αναπτύχθηκαν με χρήση του εμπορικού λογισμικού Matlab [18] και του λογισμικού Octave [6], που είναι ελεύθερος κλώνος ανοικτού κώδικα του λογισμικού Matlab, προκειμένου να υπολογιστούν οι όροι των ακολουθιών Fibonacci  $\{f_n^{(k,m)}\}_{n=1,2,3,\dots}$  για διάφορες τιμές των φυσικών αριθμών  $k, m$ , (βλέπε τη συνάρτηση **kmst**), και χαρακτηριστικών μεγεθών και ιδιοτήτων των αντίστοιχων πινάκων Fibonacci, (βλέπε τη συνάρτηση **k\_Fibonacci\_Matrix** ή **km\_Fibonacci\_Matrix**).

```
function[F,C,P,f]= kmst(k,m,n)
% INPUT
% m gap
% k number of previous sum
% n the numbers of the terms of the sequence
%OUTPUT
% f = all the n first terms
% C = constants numbers C1,C2...
% P = Poles l1,l2....
% F = Fibonacci Matrix

Z1=zeros(1,k+m+1);
Z2 = Z1;
Z = Z1;

a=zeros(1,m);
b=ones(1,k);
c=eye(m+k-1,m+k-1);
d=zeros(m+k-1,1);
F=[a b;c d];          % The k,m Fibonacci Matrix
E =max( eig(F));
B = poly(F);
for j=1:(k+m)
    Z1(1,j+1)=1;
end

for t=1:k-1
    for i=1:k-t
        Z(1,m+i+t+1) = 1;
        Z2(1,m+i+t+1) = Z(1,m+i+t+1)+Z2(1,m+i+t);
    end
end
```

```
end
A = Z1-Z2;
[C,P,K] = residuez(A,B); % Calculate the poles and zeros of non recursive Fibonacci
formula (2.3.3)
for i=1:n
    f(i) = sum(C.*(P.^(i))); % The Terms of non-recursive k,m- Fibonacci Formula
end
end %End of kmst
```

- Η συνάρτηση **k\_Fibonacci\_Matrix** υπολογίζει τη  $n$ -οστή δύναμη του  $k$ -Fibonacci πίνακα  $Q_k$ , για  $n \geq k$ .

```
function [Q,f]= k_Fibonacci_Matrix(k,n1,n)
% k Fibonacci matrix n>k
% INPUT
% k number of sum
% n1 all the terms of sequence
% n the pow of fibonacci matrix
% OUTPUT
% Q fibonacci matrix
% f sequence

f=zeros(1,n1);
for i=1:k
    f(1,i)=1;
end
for i=(k+1):n1
    for j=1:k
        f(1,i)=f(1,i-j)+f(1,i);
    end
end
Q = zeros(k,k);
Q1 = zeros(1,k-1);
for i=1:k
    for r=1:k-1
        Q1(1,r)=f(1,n-i+1+r);
    end
    Q(i,1) = (1/(k-1))*sum(Q1(1,1:k-1));
end

for i=1:k
    for r=1:k-1
        Q1(1,r)=(f(1,n-i+r));
    end
    Q(i,k) = (1/(k-1))*sum(Q1(1,1:k-1));
end

for i=1:k
    for j=2:k-1
        for r=1:j
            Q1(1,r)=(f(1,n-i+r));
        end
        for r=j:k-1
            Q1(1,r)=(f(1,n-i+1+r));
        end
        Q(i,j) = (1/(k-1))*sum(Q1(1,1:k-1));
    end
end
```

```
end
end % End of k_Fibonacci_Matrix
```

- Η συνάρτηση **km\_Fibonacci\_Matrix**, υπολογίζει τη  $n$ -οστή δύναμη του  $k, m$ -Fibonacci πίνακα  $R_{k,m}$ , για  $n \geq k + 2m + 1$ .

```
function [R,f] = km_Fibonacci_Matrix(k,m,n,n1)
% k,m Fibonacci matrix n>k+2*m+1
% INPUT
% k number of sum
% m gap
% n1 all the terms of sequence
% n the power of fibonacci matrix
% OUTPUT
% R fibonacci matrix
% f sequence

f=zeros(1,n1);
for i=1:m+k
    f(1,i)=1;
end
for i=(k+m+1):n1
    for j=1:k
        f(1,i)=f(1,i-j-m)+f(1,i);
    end
end

R = zeros(k+m,k+m);
R1 = zeros(1,k+m-1);
for i=1:k+m
    for j=1:m
        R(i,j) = (1/(k-1))*(f(1,n+k+j-i)-f(1,n+j-i));
    end
end

for i=1:k+m
    for j=m+1:k+m
        for r=1:k+m+1-j
            R1(1,r) = f(1,n+1+k-i-r) - f(1,n+1-i-r);
        end
        R(i,j) = (1/(k-1))*sum(R1(1,1:r));
    end
end
end % End of km_Fibonacci_Matrix
```



## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη ακολουθιών Fibonacci αθροίσματος  $k$ - όρων μετά από  $m$ -όρους. Ο  $n$ -οστός όρος της ακολουθίας δίνεται

από τον αναδρομικό τύπο  $f_n = \sum_{j=m+1}^{k+m} f_{n-j}$ , με τις αρχικές συνθήκες

$f_1 = f_2 = \dots = f_{k+m} = 1$ , όταν  $k, m$  είναι φυσικοί αριθμοί με  $k \geq 2, m \geq 0$ . Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η αναπαράσταση των ακολουθιών μέσω ενός κατάλληλου πίνακα Fibonacci και γίνεται μελέτη διαφορών ιδιοτήτων του πίνακα αυτού.

Στο πρώτο κεφάλαιο, γίνεται εισαγωγή στους βασικότερους ορισμούς και στις απαραίτητες έννοιες της Γραμμικής Άλγεβρας που είναι απαραίτητα στα επόμενα κεφάλαια. Επιπλέον γίνεται μία σύντομη ανασκόπηση σε ορισμούς ακολουθιών και αναφορά στην ακολουθία Fibonacci και σε άλλες ακολουθίες με παρόμοιες ιδιότητες.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός της ακολουθίας Fibonacci αθροίσματος  $k$ -όρων και ο ορισμός του αντίστοιχου πίνακα. Ο πίνακας της ακολουθίας αθροίσματος  $k$ -όρων συμβολίζεται  $Q_k$  και ονομάζεται  $k$ -πίνακας Fibonacci. Στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας δίνεται και με «κλειστό τύπο», ο οποίος συνδέεται με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $Q_k$ . Τέλος, γίνεται μελέτη της  $n$ -οστής δύναμης του πίνακα Fibonacci  $Q_k^n$ . Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μελέτη ακολουθιών Fibonacci με άθροισμα  $k$ -όρων μετά από  $m$ -όρους για  $k, m$  φυσικούς αριθμούς. Ο πίνακας της ακολουθίας αθροίσματος  $k, m$ -όρων συμβολίζεται  $R_{k,m}$  και ονομάζεται  $k, m$ -πίνακας Fibonacci. Στην συνέχεια αποδεικνύεται ότι ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας δίνεται και εκείνος με «κλειστό τύπο», ο οποίος συνδέεται με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $R_{k,m}$ . Τέλος γίνεται μελέτη της  $n$ -οστής δύναμης του πίνακα Fibonacci  $R_{k,m}^n$ . Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας παρουσιάζεται κώδικας σε Matlab/Octave για τον υπολογισμό όρων των ακολουθιών Fibonacci και των δυνάμεων των πινάκων Fibonacci  $Q_k^n, R_{k,m}^n$ .

**Λέξεις-κλειδιά :** Ακολουθία Fibonacci, πίνακας Fibonacci, Ιδιοτιμή, φασματική ακτίνα, ανάγωγος πίνακας, αρχικός πίνακας





