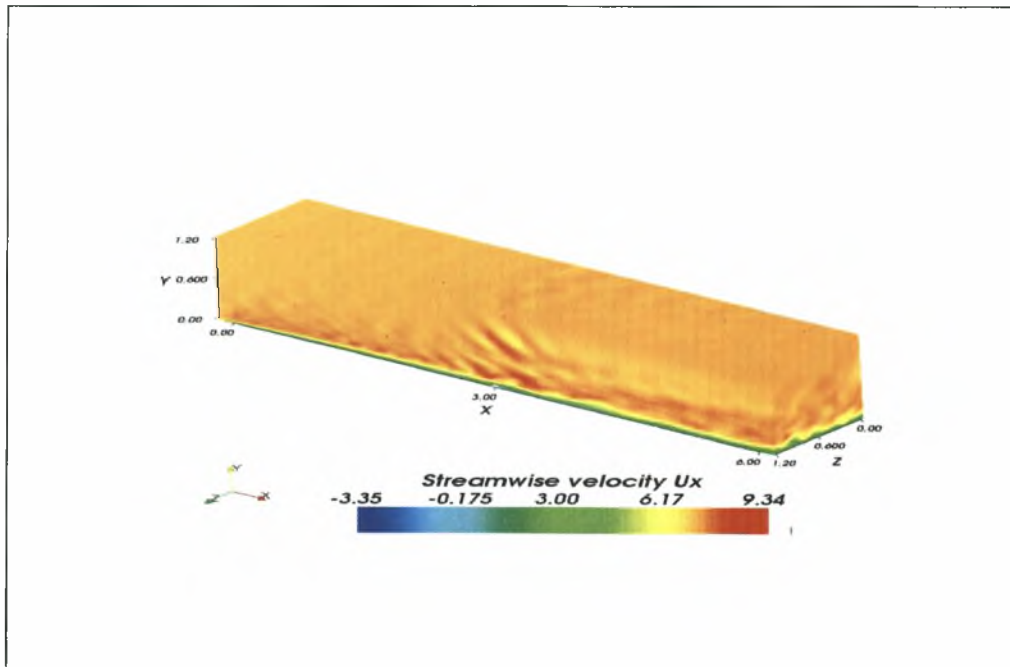


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Π.Μ.Σ. "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ"

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ  
Ακαδημαϊκό Έτος 2007-2008

"Αριθμητική προσομοίωση της τυρβώδους ροής σε λόφο με τη μέθοδο των  
μεγάλων δινών"



ΠΑΡΕΣΙΔΟΥ ΑΝΑΤΟΛΗ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ  
Δρ. ΣΑΡΡΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΒΟΛΟΣ 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6770/1  
Ημερ. Εισ.: 22-12-2008  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ  
532.052 7  
ΠΑΡ

Αφιερώνω τη μεταπτυχιακή μου διατριβή,  
στους γονείς των γονιών μου, Σοφοκλή και  
Ανατολή, Βασίλη και Μαρία για την αληθινή  
αγάπη τους στο πρόσωπο μου. Και στον  
Αριστείδη που υπήρξε ένας από τους λόγους  
που παρακολούθησα, το συγκεκριμένο,  
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διατριβή εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Εφαρμοσμένη Μηχανική και Προσομοίωση Συστημάτων» του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Αντικείμενο της παρούσας διατριβής είναι η μελέτη της τυρβώδους ροής σε λόφο με τη μέθοδο των μεγάλων δινών και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με πειραματικά αποτελέσματα, και με αριθμητικά αποτελέσματα βασισμένα στο μοντέλο k-ε.

Η προσομοίωση της ροής έγινε με το πρόγραμμα OpenFOAM. Αρχικά καταστρώθηκε το πρόβλημα και εισήχθησαν τα δεδομένα (πλέγμα και οριακές συνθήκες) στη συνέχεια έγιναν παράλληλοι υπολογισμοί σε συστάδα ηλεκτρονικών υπολογιστών (cluster). Η χρονική ολοκλήρωση των τριδιάστατων εξισώσεων της ροής είχε μεγάλη διάρκεια. Η επεξεργασία των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε με το πρόγραμμα ParaView, έτσι μας δόθηκε η δυνατότητα να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα και στη συνέχεια να τα συγκρίνουμε με τα πειραματικά και τα υπολογιστικά αποτελέσματα.

Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, της διατριβής μου, κ. Σαρρή Ιωάννη για την πολύτιμη βοήθεια του καθώς και για την υπομονή που υπέδειξε κατά τη διάρκεια της υλοποίησης της Μεταπτυχιακή Διατριβή, τους καθηγητές του υδραυλικού τομέα, του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, και ιδιαίτερα τους κ.κ. Λιακόπουλο Αντώνη, Μυλόπουλο Νικήτα Παπανικολάου Παναγιώτη, Λουκά Αθανάσιο, Καρακασίδη Θεόδωρο, Παπανικολάου Παναγιώτη και την κ. Φαρσιρώτου Ευαγγελία, για την καθοδήγηση τους και την μεταλαμπάδευση των γνώσεων τους. Τέλος, οφείλω να ευχαριστήσω τον διευθυντή του εργαστηρίου Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών, του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, καθηγητή κ. Βλάχο Νικόλαο, για την φιλοξενία του στο εργαστήριο.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....	1
1.1 Το Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα .....	1
1.2 Κάθετη κατανομή ταχύτητας σε Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα .....	1
1.3 Θεωρία Ομοιότητας .....	4
1.3.1 Εισαγωγή.....	4
1.3.2 Κάθετες κατανομές της ταχύτητας.....	5
1.3.3 Κάθετες κατανομές των δευτέρων στιγμιαίων ταχυτήτων (τάσεις Reynolds) .....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	9
2.1 Εξισώσεις NAVIER-STOKES.....	9
2.2 Μοντελοποίηση της τύρβης .....	11
2.3 Μέθοδος λύσης στροβίλων: LES και DES .....	13
2.3.1 Φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier-Stokes .....	13
2.3.2 Μοντελοποίηση των Φίλτρων.....	15
2.3.3 Δυναμικό μοντέλο μιας εξίσωσης.....	17
2.4 Συναρτήσεις τοίχου για τραχιές επιφάνειες .....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	22
3.1 Διαφορικοί Τελεστές.....	22
3.1.1 Κλίση.....	22
3.1.2 Απόκλιση.....	23
3.1.3 Περιστροφή .....	23
3.1.4 Λαπλασιανή.....	24
3.1.5 Χρονική παράγωγος.....	24
3.2 Διακριτοποίηση .....	25
3.3 Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης .....	25
3.3.1 Καθορισμός πλέγματος στο OpenFOAM .....	27
3.3.2 Καθορισμός του γεωμετρικού πεδίου στο OpenFOAM .....	29
3.4 Εξισώσεις διακριτοποίησης .....	32
3.4.1 Ο Λαπλασιανός όρος.....	36
3.4.2 Ο όρος μεταφοράς.....	36
3.4.3 Πρώτη χρονική παράγωγος.....	37
3.4.4 Δεύτερη χρονική παράγωγο .....	38
3.4.5 Διακριτοποίηση της απόκλισης.....	38
3.4.6 Διακριτοποίηση της κλίσης.....	39
3.4.7 Διακριτοποίηση του τετραγώνου δύο κλίσεων .....	41
3.4.8 Διακριτοποίηση της Περιστροφής .....	41
3.4.9 Όροι πηγής .....	41
3.4.10 Άλλοι ρητοί τύποι διακριτοποίησης.....	42
3.5 Χρονική διακριτοποίηση.....	43
3.6 Οριακές Συνθήκες .....	45
3.6.1 Φυσικές οριακές συνθήκες.....	46
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	48
4.1 Εισαγωγή.....	48
4.1.1 Περιγραφή του πειράματος .....	48
4.2 Κατάστροψη του προβλήματος .....	50

4.2.1 Υπολογιστικό πεδίο – πλέγμα .....	51
4.2.2 Οριακές συνθήκες .....	57
4.2.3 Αρχείο Ελέγχου .....	58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....	59
5.1 Μέση ροή .....	59
5.2 Τυρβώδες ροϊκό πεδίο .....	62
5.3 Τυρβώδεις Στατιστικά .....	69
5.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων με πειραματικά .....	74
5.5 Χρονική εξάρτηση των μεταβλητών και φάσματα .....	75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 .....	81
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....	83

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Το Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα

### 1.1 Το Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα

Το Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα, ή Οριακό Πλανητικό Στρώμα, μπορεί να περιγραφεί ως “ η χαμηλότερη περιοχή (1-2 Km) της ατμόσφαιρας, που επηρεάζεται αμεσότερα από την αλλαγή της ορμής, της θερμότητας και της υγρασίας της επιφάνεια της γης”, Kaimal και Finnigan (1994).

Ο Stull (1988) αντί του προηγούμενου ορισμού, καθορίζει το οριακό στρώμα ως “εκείνο το μέρος της ατμόσφαιρας που επηρεάζεται άμεσα από την παρουσία της επιφάνειας της γης και αποκρίνεται στις επιφανειακές δυνάμεις με τη χρονική κλίμακα περίπου μίας ώρας και λιγότερο” Επιπλέον ο Stull (1988) αναφέρει διάφορες δυνάμεις που διαταράσσουν το οριακό στρώμα. Δηλαδή όπως τροποποιήσεις της ροής λόγω της τοπογραφίας μέσω της οπισθέλκουσας, της εξάτμισης, της μεταφοράς θερμότητας και των ρύπων. Σύμφωνα με τον Stull (1988) το βάθος του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος κυμαίνεται από εκατό μέτρα ως λίγα χιλιόμετρα, ανάλογα με τις επιφανειακές δυνάμεις.

Όσον αφορά της ροές και τα φαινόμενα μεταφοράς μέσα σε ένα Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα, ένα χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα είναι η μία ώρα (όπως αναφέραμε ήδη) ενώ οι χαρακτηριστικές χωρικές κλίμακες είναι λίγα χιλιόμετρα, αυτές οι κλίμακες είναι σημαντικές για τον υπολογισμό των παραμέτρων στην εκτέλεση των αριθμητικών προσομοιώσεων.

### 1.2 Κάθετη κατανομή ταχύτητας σε Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα

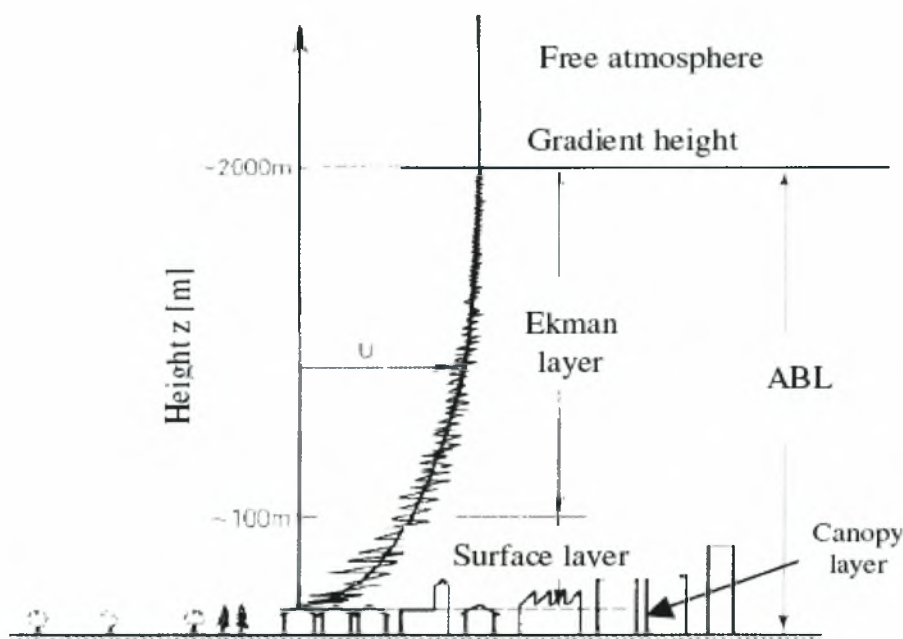
Ένα ουδέτερο Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα, όπου η μεταφορά θερμότητας είναι αμελητέα, μπορεί να υποδιαιρεθεί σε διάφορα υποστρώματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1. Το στρώμα του θόλου συνδέεται με την επιφάνεια της γης, όπου τα εμπόδια που υπάρχουν (βλάστηση, κατασκευές κ.τ.λ) αποτελούν τα στοιχεία τραχύτητας. Επάνω από το



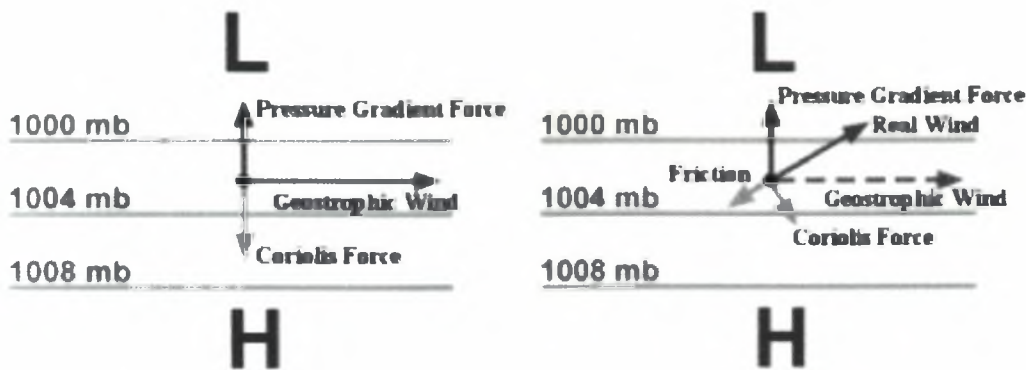
στρώμα του θόλου υπάρχει το επιφανειακό στρώμα όπου τα αποτελέσματα της δύναμης Coriolis είναι ακόμα αμελητέα. Θεωρείται συνήθως ότι το ένα δέκατο από το συνολικό ύψος του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος (το εξωτερικό στρώμα του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος ή του στρώματος Ekman) επηρεάζεται από την περιστροφή της γης λόγω της δύναμης Coriolis. Επομένως παρατηρείται μία περιστροφή της κατεύθυνσης του αέρα, περνώντας βαθμιαία από ένα ισοβαρές στρώμα αέρα μέσα στο οριακό στρώμα σε παράλληλο ισοβαρές αέρα (γεωστροφικός αέρας) σε μια ελεύθερη ατμόσφαιρα όπου οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες.

Η ισοβαρής ροή και ο γεωστροφικός αέρας οφείλονται στην ισορροπία των ιξωδών δυνάμεων, της κλίσης πίεσης και της δύναμης Coriolis. Στο επιφανειακό στρώμα οι μόνες σημαντικές δυνάμεις είναι η τριβή και η κλίση πίεσης επομένως δεν παρατηρείται κάποια σημαντική μεταβολή της οριζόντιας κατεύθυνσης αέρα μέσα σε αυτό.

Ο γεωστροφικός αέρας και ο αέρας μέσα σε στρώμα Ekman φαίνεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.1 Υποδιαίρεση του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος σε μικρότερα υποστρώματα.



Σχήμα 1.2 Γεωστροφικός αέρας και αέρας στο στρώμα Ekman.

Θεωρητικές υποθέσεις μας οδηγούν στο να υποθέσουμε ότι το οριακό στρώμα έχει βάθος ανάλογο προς το  $u_\tau/f$ , όπου  $u_\tau$  είναι η ταχύτητα τριβής η οποία καθορίζεται από τη σχέση (1.1) και  $f$  είναι η δύναμη Coriolis,  $f = 2\pi\Omega\sin\phi$ ,  $\Omega$  είναι η περιστροφική ταχύτητα γης και  $\phi$  το γεωγραφικό πλάτος. Το ύψος του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος, στην περίπτωση της ουδέτερης στρωματοποίησης μπορεί να εκφραστεί από την σχέση (1.2).

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.1)$$

$$z_h = C \left( \frac{u_\tau}{f} \right) \quad (1.2)$$

Μια χαρακτηριστική τιμή του  $C$  είναι το 0,25.

Εάν οι κλίσεις Coriolis, τριβής και πίεσης είναι υπεύθυνες για την ροή του αέρα στο εξωτερικό στρώμα και την ελεύθερη ατμόσφαιρα, στο επιφανειακό στρώμα η δύναμη Coriolis χάνει την σημαντικότητα της ενώ η τραχύτητα του εδάφους γίνεται η περισσότερο σημαντική παράμετρος. Η τραχύτητα έχει επιπτώσεις στο προφίλ της ταχύτητας και στην γωνία της πρόσπτωσης του αέρα στο επίπεδο του εδάφους και στην κατανομή της πίεσης.

Η τραχύτητα του εδάφους επηρεάζει το βάθος του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3, όσο τραχύτερο το έδαφος τόσο υψηλότερο το Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα. Στο Σχήμα 1.3 η τραχύτητα του εδάφους περιγράφεται από την παράμετρο  $z_0$  η οποία ονομάζεται αεροδυναμικό μήκος τραχύτητας ή απλώς μήκος

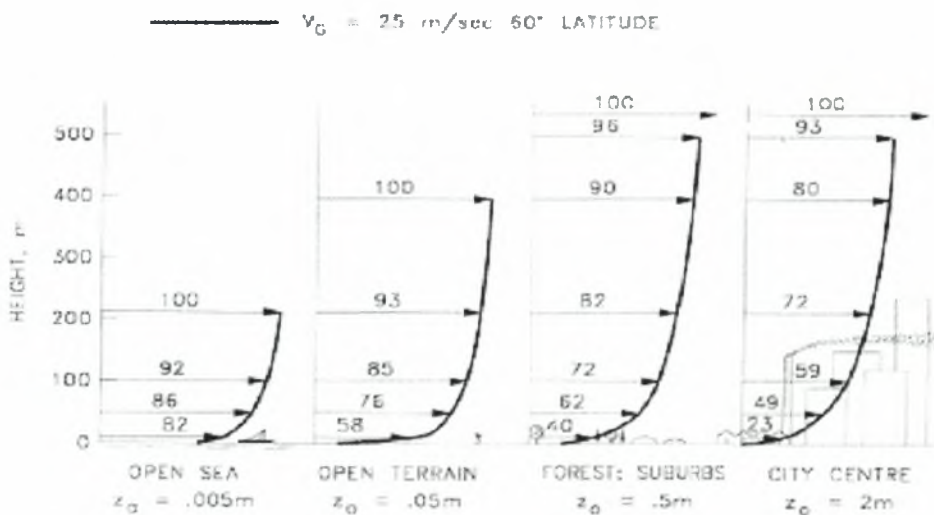
τραχύτητας, του οποίου η έννοια θα εισαχθεί στην παρακάτω παράγραφο στην θεωρία της ομοιότητας.

### 1.3 Θεωρία Ομοιότητας

#### 1.3.1 Εισαγωγή

Η θεωρία της ομοιότητας παρέχει ένα τρόπο να οργανωθούν και να ομαδοποιηθούν οι μεταβλητές του προβλήματος σε αδιάστατες ομάδες. Αυτή η διαδικασία είναι χρήσιμη για μια καλύτερη κατανόηση των φαινομένων της ρευστοδυναμικής και παρέχει οδηγίες για την επιλογή της κλίμακας στις πειραματικές διατάξεις.

Μια κατάλληλη επιλογή των αδιάστατων ομάδων πρέπει να επιτρέψει την καθιέρωση "universal" σχέσεων μεταξύ των ομάδων, έγκυρων για κάθε κατάσταση, οι οποίες μπορεί να αντιπροσωπευθούν στις γραφικές παραστάσεις, τους αριθμητικούς πίνακες, κ.τ.λ.



Σχήμα 1.3 Διαφορετικά σχεδιαγράμματα τραχύτητας για τέσσερις διαφορετικούς τύπους εδάφους.

Διάφορες παρόμοιες προσεγγίσεις έχουν προταθεί στην λογοτεχνία για το Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα. Στην επόμενη παράγραφο αναφέρουμε μόνο λίγες σχέσεις

από την θεωρία ομοιότητας, γνωστή επίσης σαν θεωρία Monin-Obukhov ή θεωρία ομοιότητας επιφανειακού στρώματος. Για περισσότερες πληροφορίες για τις θεωρίες ομοιότητας Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος προτείνεται να ανατρέξετε στον Stull(1988).

### 1.3.2 Κάθετες κατανομές της ταχύτητας

Μια μελέτη ομοιότητας μπορεί να πραγματοποιηθεί για να περιγράψει τις κάθετες κατανομές της στατιστικής τύρβης στο Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα όταν επιτυγχάνονται οι πλήρως αναπτυγμένες συνθήκες (και επομένως οριζόντια ομοιογένεια). Στο επιφανειακό στρώμα η μέση οριζόντια ταχύτητα περιγράφεται συνήθως από ένα σχεδιάγραμμα τοίχου σε ουδέτερες συνθήκες. Οι ουδέτερες συνθήκες θεωρούμε ότι υπάρχουν όταν οι θερμικές επιδράσεις είναι αμελητέες,

$$\frac{U(z)}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (1.3)$$

Στην εξίσωση (1.3) η μέση οριζόντια ταχύτητα  $U$  κανονικοποιείται με την ταχύτητα τριβής  $u_\tau$  η οποία καθορίζεται από την σχέση (1.1) ενώ το ύψος  $z$  συγκρίνεται με το μήκος τραχύτητας  $z_0$  (το ύψος όπου η μέση ταχύτητα θα πήγαινε στο μηδέν σύμφωνα πάντα με την σχέση (1.3)) και  $\kappa$  είναι η σταθερά του Von Karman ( $\approx 0,4$ ).

Οι τύποι του εδάφους μπορούν να ταξινομηθούν από το μήκος της τραχύτητας τους  $z_0$ , σύμφωνα με την ταξινόμηση που προτείνεται στον Ευρωπαϊκό Ατλάντα Αέρα.

Πίνακας 1.1 – Ταξινόμηση των εκτάσεων με βάση το μήκος τραχύτητας τους, που προσαρμόζεται μερικώς από τον Ευρωπαϊκό Ατλάντα Αέρα (1989).

κατηγορία	εκτάσεις	$z_0$
I	Λασπώδεις εκτάσεις, υγρότοποι, πάγος	$10^{-5} - 3 \cdot 10^{-5}$
	Περιοχές νερού*	$3 \cdot 10^{-5} - 0,0002$
II	Άμμος	$0,0002 - 0,001$
III	Περιοχές διαδρόμων αερολιμένων, κομμένη χλόη	$0,001 - 0,01$
IV	Καλλιεργήσιμο έδαφος/ αερολιμένες με πολύ λίγα δέντρα, κτίρια, κ.τ.λ.	$0,01 - 0,04$
V	Πολλά δέντρα και/ ή θάμνοι	$0,04 - 0,1$
VI	Δάση, προάστια	$0,1 - 1$
VII	Πόλεις	$1 - 4$

\* Η μορφή αέρα και θάλασσας ένα δυναμικά συνδεδεμένο σύστημα, ο προσδιορισμός του μήκους της τραχύτητας των επιφανειών ανοικτής θάλασσας και νερού λαμβάνεται συνήθως από τα μοντέλα λαμβάνοντας υπόψη της μορφές και τις διαστάσεις των κυμάτων.

Η πρώτη παράγωγος της μέσης οριζόντιας ταχύτητας αναφέρεται ως διάτμηση του ανέμου, η οποία μπορεί να συνδυαστεί με τα  $\kappa$ ,  $z$  και  $u_\tau$  για να δημιουργήσει μια αδιάστατη ομάδα  $\phi_m$ , σχέση (1.4), η οποία σε συνθήκες ουδέτερης ευστάθειας είναι ίση με ένα. Σε αυτές τις συνθήκες οδηγεί ο νόμος του τοίχου, σχέση (1.3), ενώ σε μη-ουδέτερες συνθήκες μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του αδιάστατου ύψους  $z/L$ , όπου  $L$  είναι το μήκος Monin-Obukhov.

$$\phi_m = \frac{\kappa z}{u_\tau} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.4)$$

### 1.3.3 Κάθετες κατανομές των δεύτερων στιγμιαίων ταχυτήτων (τάσεις Reynolds)

Έχουν προταθεί επίσης διάφορες κάθετες κατανομές για της υψηλότερης τάξης ορμές των ταχυτήτων, οι οποίες έχουν το ίδιο σχήμα παντού. Σύμφωνα με τον Stull (1988), η ροή τύρβης για το ουδέτερο οριακό στρώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται γραμμικά με το ύψος  $z$ .

$$\frac{\overline{u'w'}}{(\overline{u'w'})_s} = 1 - \frac{z}{z_h} \quad (1.5)$$

Για τις μεταβολές των ταχυτήτων, Stull (1988):

$$\frac{\overline{u'^2}}{u_r'^2} = 6 \left(1 - \frac{z}{z_h}\right)^2 + \frac{z}{z_h} \frac{\overline{u'^2}_{top}}{u_r'^2}, \text{ για την κατεύθυνση της ροής} \quad (1.6)$$

$$\frac{\overline{v'^2}}{u_r'^2} = 3 \left(1 - \frac{z}{z_h}\right)^2 + \frac{z}{z_h} \frac{\overline{v'^2}_{top}}{u_r'^2}, \text{ για την κατεύθυνση κάθετα στη ροή} \quad (1.7)$$

$$\frac{\overline{w'^2}}{u_r'^2} = \left(1 - \frac{z}{z_h}\right)^2, \text{ για την κάθετη στο έδαφος κατεύθυνση} \quad (1.8)$$

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί σε αυτές τις εκφράσεις για την ροή της ορμή και τις διάφορες συνιστώσες της ταχύτητας (1.6)-(1.8) το ύψος  $z$  κανονικοποιείται σε σχέση με το βάθος του οριακού στρώματος  $z_i$  παρά με το μήκος  $z_o$ .

Στις εκφράσεις για τις μεταβολές των οριζόντιων ταχυτήτων (1.6) και (1.7) οι τιμές στην κορυφή των ορίων (υποθέτοντας γνωστό ένα καλά καθορισμένο μέγιστο ύψος  $z_i$ ), κανονικοποιούνται από την επιφανειακή τάση. Αν και αυτή η αναλογία αναμένεται να ποικίλει, κατά τη διάρκεια του πειράματος KONTUR (Grant, 1986) βρέθηκε ίσο με 2.0 και για τις δύο εξισώσεις.

Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (1.6) έως (1.8) και τον ορισμό της Τυρβώδης Κινητικής Εξίσωσης Ενέργειας (1.9) ακολουθεί επίσης για κάθετη κατανομή για την ομαλοποιημένη τυρβώδη κινητική ενέργεια, ΤΚΕ (1.10).

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{u_r^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{u^2}}{u_r^2} + \frac{\overline{v^2}}{u_r^2} + \frac{\overline{w^2}}{u_r^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 6 \left( 1 - \frac{z}{z_h} \right)^2 + \frac{z}{z_h} \frac{\overline{u^2}_{top}}{u_r^2} + 3 \left( 1 - \frac{z}{z_h} \right)^2 + \frac{z}{z_h} \frac{\overline{v^2}_{top}}{u_r^2} + \left( 1 - \frac{z}{z_h} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{k}{u_r^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\overline{u^2}}{u_r^2} + \frac{\overline{v^2}}{u_r^2} + \frac{\overline{w^2}}{u_r^2} \right) = \frac{1}{2} \left( 9 \left( 1 - \frac{z}{z_h} \right)^2 + 4 \frac{z}{z_h} + \left( 1 - \frac{z}{z_h} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Υπολογιστική Μοντελοποίηση του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος

### 2.1 Εξισώσεις NAVIER-STOKES

Οι εξισώσεις που κυβερνούν στην ρευστομηχανική στηρίζονται στις μαθηματικές εκφράσεις των τριών φυσικών αρχών:

- Διατήρησης της μάζας
- Διατήρησης της ορμής
- Διατήρησης της ενέργειας

Δυο από τις αναφερθείσες αρχές (διατήρησης της μάζας και της ενέργειας) οδηγούν σε δύο βαθμωτές εκφράσεις ενώ η διατήρηση της ορμής μετατρέπεται σε διανυσματική έκφραση. Οι βασικές εξισώσεις της ρευστομηχανικής που ισχύουν πάντα μπορούν να απλοποιηθούν. Αν το ρευστό είναι Νευτώνειο και η ροή ασυμπίεστη, μόνο η συνέχεια της μάζας και οι εξισώσεις της ορμής, που ονομάζονται Navier–Stokes από τους επιστήμονες που αρχικά τις παρήγαγαν απαιτούνται να λυθούν για τον υπολογισμό μιας ροής. Οι εξισώσεις Navier–Stokes μπορούν να γραφτούν με διαφορετικές μορφές, παρακάτω εκφράζονται χρησιμοποιώντας τη μορφοποίηση αθροίσματος:

#### Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u_i) = 0 \quad (2.1)$$

#### Εξίσωση ορμής

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} u_i + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.2)$$



Γενικά, οι εξισώσεις της κίνησης μπορούν να γραφτούν με τέσσερις διαφορετικές μορφές: Σε συντηρητική (αναφορά στο επίπεδο Euler) ή μη συντηρητική μορφή (αναφορά στο επίπεδο Lagrange), με ολοκληρωτική ή διαφορική μορφή. Όταν θέλουμε να μελετήσουμε μια δεδομένη ροή πρέπει να ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις της κίνησης και τις δεδομένες οριακές συνθήκες. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι εξισώσεις της κίνησης δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά και οι αριθμητικές λύσεις παραμένουν ο μόνος πιθανός τρόπος.

Από την καθαρώς θεωρητική άποψη, οι τέσσερις μορφές των εξισώσεων είναι ισοδύναμες αλλά δεν είναι και από αριθμητικής άποψης δεδομένου ότι οι αριθμητικές μέθοδοι αναφέρονται σε ιδιαίτερες μορφές των εξισώσεων. Για παράδειγμα, στους πεπερασμένους όγκους οι εξισώσεις των Navier–Stokes εξετάζονται με συντηρητική ολοκληρωτική μορφή και εφαρμόζονται σε όγκους ελέγχου που καλύπτουν ολόκληρη την υπολογιστική περιοχή.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάζει της αριθμητικές προσομοιώσεις του ουδέτερου Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος σε έκταση μικρό-κλίμακας, το οποίο σημαίνει ότι θα εξετάσουμε διαστάσεις λίγων χιλιομέτρων. Σε τέτοιου είδους ροές τόσο η συμπίεστικότητα όσο και οι θερμικές επιδράσεις είναι αμελητέες. Αντί αυτού, αυτό που δεν είναι αμελητέο και παίζει σημαντικό ρόλο σε ένα Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα είναι η τύρβη. Οι τυρβώδεις ροές μπορούν να λυθούν με άμεσες προσομοιώσεις, που ονομάζονται Direct numerical simulation (DNS), που είναι προσιτές σήμερα μόνο για τη μελέτη περιπτώσεων με πολύ μικρό αριθμό Reynolds και μόνο με τη βοήθεια υπολογιστών υψηλής επίδοσης. Σε ένα χαρακτηριστικό Ατμοσφαιρικό Οριακό Στρώμα ο αριθμός Reynolds κυμαίνεται μεταξύ  $10^5$  έως  $10^{10}$  που κάνουν την επίλυση του δυνατή μόνο για τις χρονικά μέσες Navier-Stokes εξισώσεις (RANS) και σε μικρές εκτάσεις, επίσης με προσομοιώσεις μεγάλων δινών με μοντέλα τοίχου, (WMLES) και υβριδικές μεθοδολογίες RANS/LES. Όλες αυτές οι μεθοδολογίες θα περιγραφούν στα ακόλουθα κεφάλαια που είναι αφιερωμένα στην μοντελοποίηση της τύρβης.

## 2.2 Μοντελοποίηση της τύρβης

Μια κλασική προσέγγιση στη μελέτη της τύρβης πραγματοποιείται μέσω της διάσπασης Reynolds: οι μεταβλητές που κυμαίνονται σε μια τυρβώδη ροή μπορούν να διασπαστούν στο μέσο όρο και σε έναν κυμαινόμενο όρο. Οι μέσες χρονικά (Reynolds averaged Navier-Stokes) εξισώσεις Navier-Stokes, σύντομα RANS, λαμβάνονται εφαρμόζοντας τη διάσπαση Reynolds στους αγνώστους που εμφανίζονται στις εξισώσεις Navier-Stokes, και λαμβάνοντας μέση τιμή στο χρόνο. Οι εξισώσεις RANS περιέχουν επιπλέον αγνώστους που αποκαλούνται τάσεις Reynolds οι οποίες οφείλονται σε όλες τις κλίμακες της τύρβης και χρειάζονται να μοντελοποιηθούν προκειμένου να κλείσει το σύνολο των εξισώσεων. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις RANS στην προσομοίωση της τυρβώδους ροής είναι ότι επιτρέπουν να μεταχειριστούμε την τύρβη ως ένα σταθερό φαινόμενο, δηλαδή εάν μία ροή είναι ασταθής μόνο λόγω της τύρβης η προσομοίωση με εξισώσεις RANS θα είναι μία σταθερή προσομοίωση, με μεγάλη οικονομία σε υπολογιστικό κόστος.

Τα μοντέλα τύρβης που βασίζονται στις εξισώσεις RANS ταξινομούνται συνήθως από τον αριθμό των πρόσθετων διαφορικών εξισώσεων που χρειάζονται για να κλείσει το αρχικό σύνολο των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Κάποια από τα μοντέλα τύρβης που χρησιμοποιούνται για να κλείσουν οι εξισώσεις RANS είναι:

- Αλγεβρικό ή μοντέλο μηδενικής εξίσωσης: mixing length
- Μοντέλο μιας εξίσωσης: Spalart Allmaras
- Μοντέλο δύο εξισώσεων: k-ε (e.g. standard, RNG, realizable)
- Μοντέλο δύο εξισώσεων: k-ω(e.g. standard, SST)
- Πέντε (2D) και επτά (3D) εξισώσεων: RSM (Reynolds Stress Model)

Μια δεύτερη προσέγγιση του μοντέλου τύρβης η οποία κερδίζει όλο και περισσότερες εφαρμογές είναι η προσομοίωση των μεγάλων δινών, Large Eddy Simulation (LES), η οποία βασίζεται στις χωρικά φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier –Stokes.

Η τεχνική των πεπερασμένων όγκων είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή του χωρικού φίλτρου στις εξισώσεις Navier-Stokes, με αυτόν τον τρόπο μόνο οι μεγάλοι στρόβιλοι των οποίων οι διαστάσεις είναι μεγαλύτερες από το πλάτος των φίλτρων, τα οποία συνδέονται με τις διαστάσεις των κελιών, υπολογίζονται άμεσα. Οι μη επιλύσιμοι στρόβιλοι ή οι στρόβιλοι που είναι μικρότεροι από το φίλτρο μοντελοποιούνται με συγκεκριμένο μοντέλο τύρβης που ονομάζεται Sub Grid Scale (SGS) ή Sub Filter Scale (SFS) μοντέλο τύρβης.

Εξαιτίας του γεγονότος ότι οι μεγαλύτεροι στρόβιλοι πρέπει να υπολογιστούν άμεσα, η προσομοίωση LES μπορεί να είναι μόνο τρισδιάστατη και χρονικά μεταβαλλόμενη. Ακόμη και αν σε κάποιες περιπτώσεις για παράδειγμα για κάποιες περιβαλλοντικές ροές, καλή λύση μπορεί να επιτευχθεί σε 2D αλλά πάντα σε χρονικά μεταβλητή προσομοίωση.

Είναι γνωστό ότι τα μοντέλα τύρβης τύπου RANS χαρακτηρίζονται από κάποιες σταθερές που πρέπει να προϋπολογιστούν για να προσομοιώσουν όσο το δυνατό καλύτερα το δεδομένο πρόβλημα. Με άλλα λόγια τα μοντέλα τύρβης τύπου RANS είναι εξαρτημένα από το πρόβλημα και αυτό είναι ένα μεγάλο μειονέκτημα. Οι μεγάλοι στρόβιλοι είναι έντονα ανισότροποι και εξαρτώνται από τις οριακές συνθήκες και τη μέση ροή. Αντί αυτού θεωρώντας μικρότερους και μικρότερους στρόβιλους χάνονται οι πληροφορίες για τη μέση ροή και τις οριακές συνθήκες, οι μικρές δίνες επίσης διαδίδονται πιο ομογενώς και περισσότερο ισοτροπικά. Υπάρχει ελπίδα ότι η μικρής κλίμακας δίνες μπορεί να είναι καθολικές (ισότροπη τύρβη) και ότι τα μοντέλα SGS μπορούν να λειτουργήσουν για κάθε είδος τύρβης εάν το πλάτος των φίλτρων εφαρμόζεται στο κατάλληλο μέγεθος.

Η προσομοίωση με LES απαιτεί ακόμα τη χρήση υπερυπολογιστών για υψηλούς αριθμούς Reynolds και ο κύριος λόγος για αυτό είναι το λεπτό πλέγμα που απαιτείται κοντά στους τοίχους που σχηματίζουν οριακά στρώματα. Όταν οι τοίχοι είναι ομαλοί, είναι συνηθισμένο ώστε το πλέγμα στο LES να έχει ικανοποιητική διακριτική ικανότητα, να κατανέμεται με κελιά χαρακτηριστικού μήκους περίπου 100 (σε μονάδες τοίχου, wallwunits) στην διεύθυνση της ροής (streamwise) και 20 στην κάθετα στη ροή (spanwise), ενώ μόνο μία μονάδα απαιτείται στην διεύθυνση κάθετα στο έδαφος. Μεταξύ των μεθοδολογιών που γεννήθηκαν για να μεταχειριστούν ροές με υψηλό αριθμό Reynolds, η υβριδική μέθοδος LES-RANS ονομαζόμενη Detached Eddy Simulation (DES) πρέπει να αναφερθεί. Με αυτή την τεχνική η περιοχή κοντά στους τοίχους μοντελοποιείται με προσέγγιση RANS και η ροή

στις απόμακρες ζώνες μακριά από τον τοίχο, λύνεται με μια προσέγγιση LES. Το DES κατασκευάζεται με την τροποποίηση του συνηθισμένου μοντέλου RANS (k-ε, k-ω) το οποίο ενεργεί με τον τυποποιημένο τρόπο κοντά στον τοίχο και με έναν τροποποιημένο σε μια ορισμένη απόσταση από τον τοίχο, όπως με το μοντέλο SGS. Το DES γεννήθηκε για να μελετήσει την αεροδυναμική σε εξωτερικές ροές, για παράδειγμα να υπολογίσει τη ροή γύρω από μία αεροτομή σε κατάσταση αποκόλλησης. Το μοντέλο μεταχειρίζεται το μη αποκολλημένο οριακό στρώμα με τη μεθοδολογία URANS και το αποκολλημένο οριακό στρώμα με LES.

## 2.3 Μέθοδος λύσης στροβίλων: LES και DES

### 2.3.1 Φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier-Stokes

Οι αυξανόμενες υπολογιστικές ικανότητες και η δυνατότητα να χτιστούν συστάδες από υπολογιστές που να επιτρέπουν σήμερα να εκτελεστούν προσομοιώσεις του Ατμοσφαιρικού Οριακού Στρώματος με μεθοδολογίες επίλυσης στροβίλων όπως η LES (η πιο σωστά με τον μοντελοποιημένο τοίχο LES, WMLES) και υβριδικές μεθοδολογίες RANS/LES όπως η DES.

Στην επίλυση με μοντέλα LES οι κυβερνώσες εξισώσεις είναι φιλτραρισμένες χωρικά και σε αντίθεση με τα RANS δεν λύνουμε ως προς την μέση χρονική τιμή τους. Μια γενική μεταβλητή  $\phi(\xi, t)$  χωρικά φιλτραρισμένη είναι:

$$\bar{\phi}(x, t) = \int_{\Omega} \phi(\xi, t) G(\xi, x) d\xi \quad (2.3)$$

Όπου το G είναι μία συνάρτηση φίλτρου και το ολοκλήρωμα του όγκου επεκτείνεται σε όλη την υπολογιστική περιοχή.

Για επιλυτές πεπερασμένων όγκων, όπως το Fluent ή το PHOENICS, το πλέγμα από μόνο του ενεργεί σαν φίλτρο τύπου Top-Hat, εξετάζοντας μία περιοχή υποδιαιρεμένη σε ένα πλέγμα, σε ένα εσωτερικό κύτταρο του όγκου V:

$$G(\xi, x) = \begin{cases} 1/V & , \quad \xi \in V \\ 0 & , \quad \xi \notin V \end{cases} \quad (2.4)$$

Με αυτόν τον τρόπο το ίδιο το πλέγμα ενεργεί ως χωρικό φίλτρο, ενώ άλλοι τύποι φίλτρων επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για παράδειγμα το φίλτρο με κατανομή Gauss ή το φίλτρο με απότομη αποκοπή (sharp cut off) Fourier. Συνάγεται επίσης ότι το πλάτος των φίλτρων συνδέεται άμεσα με την κυβική ρίζα του όγκου του κελιού.

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (2.3) και (2.4) έχουμε μια φιλτραρισμένη ποσότητα  $\bar{\phi}$  να δίδεται από τον τύπο:

$$\bar{\phi}(x, t) = \frac{1}{V} \int_V \phi(\xi, t) d\xi, \quad \xi \in V \quad (2.5)$$

Όπου τώρα η μπάρα χρησιμοποιείται για να δείξει τη διαδικασία χωρικού φιλτραρίσματος. Οι φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier-Stokes για την περίπτωση των ασυμπιέστων ισόθερμων ροών δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

Με το φιλτράρισμα των εξισώσεων Navier-Stokes εισάγεται ένα πρόβλημα προσδιορισμού του  $\tau_{ij}$ , δηλαδή του τανυστή διατμητικών τάσεων του μοντέλου LES. Ο τανυστής του μοντέλου LES εξαρτάται από τα άγνωστα  $\overline{u_i u_j}$ .

$$\tau_{ij} = \overline{\rho u_i u_j} - \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.8)$$

Προκειμένου να κλείσει το σύνολο των εξισώσεων οι όροι των διατμητικών τάσεων του μοντέλου τύρβης πρέπει να μοντελοποιηθούν. Η βασική ιδέα του LES είναι ότι η μικρής κλίμακας δίνες είναι καθολικές, δεν εξαρτώνται από τους μέσους όρους της ροής ούτε και από τις οριακές συνθήκες. Επομένως εάν το πλάτος των φίλτρων έχει την κατάλληλη τιμή, δηλαδή εάν το πλέγμα είναι αρκετά μικρό ώστε το LES μοντέλο να είναι καθολικό, μπορεί να λειτουργεί καλά άσχετα από τον τύπο της ροής.

### 2.3.2 Μοντελοποίηση των Φίλτρων

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, οι φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier-Stokes εισάγουν ένα πρόβλημα κλεισίματος, όπως και σε όλες σχεδόν τις μεθόδους μοντελοποίησης της τύρβης. Υπάρχουν όροι ανώτερης τάξης που δεν μπορούν να υπολογιστούν. Άρα το μοντέλο τύρβης πρέπει να υπολογίσει αυτούς τους όρους, τις διατμητικές τάσεις της εξίσωσης.

Η πρωτοποριακή εργασία του Smagorinsky (1963) στα μοντέλα LES υιοθέτησε την έννοια του SGS τύπου ιξώδους στροβίλου (eddy viscosity) (2.10), ενώ οι εξισώσεις (2.9) έως (2.13) περιγράφουν πως τα μοντέλα Smagorinsky-Lilly εφαρμόζονται στα ρευστά.

Τα μοντέλα eddy viscosity δεν επιτρέπουν την μεταφορά της ενέργειας προς τα πίσω δηλαδή από μικρές δίνες σε μεγάλες δίνες, με μεταφορά που δεν είναι αμελητέα κατά την μελέτη της τύρβης για ροές κοντά σε τοίχους. Η προσπάθεια να διορθωθεί αυτή η έλλειψη οπισθοδιασποράς στις ροές οριακού στρώματος έγινε από τους Mason και Thomson (1992) με την προσθήκη μίας στοχαστικής δύναμης στις ταχύτητες στα παρακείμενα κελία των τοίχων. Η τεχνική της στοχαστικής δύναμης επιτρέπει να έχουμε μια κατανομή ταχύτητας κοντά στο λογαριθμικό προφίλ.

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\mu_t \overline{S_{ij}} \quad (2.9)$$

$$\mu_t = \rho L_s^2 S \quad (2.10)$$

$$\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.11)$$

$$S = \sqrt{2\overline{S_{ij}S_{ij}}} \quad (2.12)$$

$$L_s = \min \left( \kappa d, C_s V^{1/3} \right) \quad (2.13)$$

Η σταθερά Smagorinsky,  $C_s$ , που χρησιμοποιείται στο μοντέλο Smagorinsky συνήθως ποικίλει σε μία σειρά τιμών ανάλογα με την τοπική τύρβη και το πρόβλημα που λύνουμε. Ένας τρόπος για να βελτιωθεί το μοντέλο του Smagorinsky είναι να υπολογιστεί δυναμικά η σταθερά Smagorinsky ως συνέπεια των χαρακτηριστικών της ροής. Ένα δυναμικό μοντέλο Smagorinsky προτάθηκε από τον Germano et al. (1991) και στη συνέχεια τροποποιήθηκε από τον Lilly (1992) και χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις της παρούσας μελέτης.

Μια διαφορετική προσέγγιση κλεισίματος της τύρβης για τις φιλτραρισμένες εξισώσεις Navier-Stokes και περαιτέρω βελτιώσεις του μοντέλου LES έχει γίνει από τον Bardina et al. (1983) με το πρώτο μοντέλο κλίμακας-ομοιότητας. Στο μοντέλο κλίμακας-ομοιότητας η αφιλτράριστη ταχύτητα εκφράζεται σαν μία συνάρτηση της φιλτραρισμένης ταχύτητας  $u_i = f(u_i)$ , για παράδειγμα η αφιλτράριστη ταχύτητα μπορεί να γραφτεί ως σειρά Taylor της φιλτραρισμένης ταχύτητας. Το απλούστερο μοντέλο κλίμακας ομοιότητας (scale similarity) είναι αυτό που προτείνεται από τον Bardina et al. (1983) όπου οι συγγραφείς πρότειναν ότι η ταχύτητα θα μπορούσε να προσεγγιστεί με τη φιλτραρισμένη ταχύτητα  $u_i \approx \overline{u_i}$  κατά αυτόν τον τρόπο ο όρος τάσεων του μοντέλου LES γίνεται:

$$\tau_{ij} = \overline{\overline{\rho u_i u_j}} - \overline{\rho u_i u_j} \quad (2.14)$$

Τα μικτά μοντέλα της ομοιότητας κλίμακας και του δυναμικού eddy-viscosity που προτέθηκαν, για παράδειγμα στον Zang et al. (1993). Τα μικτά μοντέλα είναι σε θέση να

υπολογίσουν την μεταφορά της κινητικής ενέργειας αντίστοιχα από της μικρής κλίμακας δίνες στην μεγάλη κλίμακας δίνες και αντίστροφα και της σκέδασης ιξώδους, ως εκ τούτου έχουν μία συμπεριφορά πιο κοντά στην πραγματικότητα σε αντίθεση με τα μοντέλα eddy-viscosity που επιτρέπουν μεταφορά ενέργειας μόνο προς τις μικρές δίνες.

### 2.3.3 Δυναμικό μοντέλο μιας εξίσωσης

Η επιτυχία της μεθόδου των μεγάλων δινών έγκειται στο πόσο καλά μοντελοποιούνται οι τάσεις SGS. Το μοντέλο Smagorinsky είναι ένα παραδοσιακό και σχετικά απλό. Σε αυτό το μοντέλο η σταθερά της αναλογίας στον καθορισμό των μικρότερων από το πλέγμα δινών,  $C$  ή  $C_s$  ( $C = C_s^2$ ), έχει μια σταθερή τιμή η οποία να καθοριστεί πριν την προσομοίωση. Το αδύνατο σημείο του μοντέλου είναι ότι η σταθερά η οποία δεν είναι πραγματικά ανεξάρτητη του προβλήματος επίλυσης. Με άλλα λόγια ο συντελεστής Smagorinsky εξαρτάται από τη ροή, και ποικίλλει στο χρόνο και στο χώρο. Το μοντέλο αυτό έχει ορισμένους περιορισμούς και μερικές προσπάθειες έχουν γίνει έτσι ώστε να το βελτιώσουν. Επιπλέον, το μοντέλο Smagorinsky θεωρεί ότι η κινητική ενέργεια μόνο καταστρέφεται. Τα δυναμικά μοντέλα, τα οποία είναι ικανά να εξαλείψουν ορισμένα προβλήματα, είναι μια καλή εναλλακτική λύση. Σε αυτά τα μοντέλα, το  $C$  στις μικρότερες από το πλέγμα δίνες δεν είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία καθορίζεται αρχικά, αλλά υπολογίζεται κατά τη διάρκεια των υπολογισμών. Ένα από τα προβλήματα του δυναμικού μοντέλου είναι η αριθμητική αστάθεια η συνδεδεμένη με τις αρνητικές τιμές ποικιλία του συντελεστή  $C$ .

Πρόσφατα παρουσιάστηκε ένα νέο δυναμικό μοντέλο μιας εξίσωσης. Το μοντέλο παρουσιάζεται, συνοπτικά, παρακάτω. Η μοντελοποιημένη εξίσωση για το  $k_{sgs}$  μπορεί να γραφτεί

$$\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k_{sgs}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \langle C^k \rangle_{xyz} \Delta k_{sgs}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j} \right) + 2\nu_{sgs} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} - C_*^k \frac{k_{sgs}^{\frac{3}{2}}}{\Delta} \quad (2.15)$$

Στον παραγόμενο όρο, ο δυναμικός συντελεστής  $C^k$



$$Pk_{sgs} = -T_{ij} \bar{u}_{i,j}, \quad \bar{S}_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad \tau_{ij}^a = -2C^k \Delta k_{sgs}^{\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij} \quad (2.16)$$

υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που χρησιμοποιείται στο τυπικό δυναμικό μοντέλο, δηλαδή

$$C^k = -\frac{L_{ij} M_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}}, \quad L_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (2.17)$$

$$K = \bar{k}_{sgs} + \frac{1}{2} L_{ii}, \quad M_{ij} = \overline{\Delta K^{\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij}} - \Delta k_{sgs}^{\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij}$$

Όπου  $L_{ij}$  δείχνει τις δυναμικές τάσεις του Leonard, όπου  $K \equiv 1/2 T_{ij}$  στη μικρότερη από το πλέγμα κινητική ενέργεια στο επίπεδο ελέγχου.

Η κινητική ενέργεια των δινών που έχουν μέγεθος μικρότερο του πλέγματος,  $k_{sgs}$ , είναι ουσιαστικά μια τοπική ποσότητα. Πράγματι, το μοντέλο Smagorinsky βασίζεται στην υπόθεση της τοπικής ισορροπίας του  $k_{sgs}$ , π.χ.,  $P_{k_{sgs}} - \epsilon_{k_{sgs}} = 0$ . Μία ελαφρώς καλύτερη υπόθεση είναι να υπολογιστεί το  $C^k$  με όρους σκέδασης, με το να υποθέσουμε ότι το φιλτραρισμένο μέρος της εξίσωσης  $k_{sgs}$  είναι ίσο με αυτό της εξίσωσης  $K$ , δηλαδή

$$\bar{P}_{k_{sgs}} - \frac{1}{\Delta} \overline{C^k k_{sgs}^{\frac{3}{2}}} = P_K - C^k \frac{K^{\frac{3}{2}}}{\Delta} \Rightarrow C^k = \left( P_K - \bar{P}_{k_{sgs}} + \frac{1}{\Delta} \overline{(C^k)^n k_{sgs}^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\Delta}{K^{\frac{3}{2}}} \quad (2.18)$$

Η σκέδαση δεν μπορεί να είναι αρνητική, η οποία απαιτεί τον περιορισμό των τιμών του  $(C^k)^n$  σε θετικές τιμές, δηλαδή  $C^k \geq 0$ . για να σιγουρέψουμε την αριθμητική σταθερότητα, μια σταθερή τιμή του  $C^k$  στο χώρο  $(\langle C^k \rangle_{xyz})$  χρησιμοποιείται στις εξισώσεις. Αυτό καθορίζεται με την απαίτηση ότι η παραγωγή σε ολόκληρη την υπολογιστική περιοχή πρέπει να παραμείνει η ίδια, δηλ.

$$\langle 2 C^k \Delta k_{sgs}^{\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle_{xyz} = 2 \langle C^k \rangle_{xyz} \langle \Delta k_{sgs}^{\frac{1}{2}} \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \rangle_{xyz} \quad (2.19)$$

Η ιδέα είναι να περιληφθούν όλες οι τοπικές δυναμικές πληροφορίες μέσω των όρων πηγής της εξίσωσης μεταφορών για το  $k_{sgs}$ . Αυτό είναι πιθανώς αληθινό επειδή οι μεγάλες τοπικές μεταβολές του συντελεστή  $C^k$  εμφανίζονται μόνο στους όρους πηγής, και η επίδραση των μεγάλων διακυμάνσεων στους δυναμικούς συντελεστές θα εξομαλυνθεί με φυσικό τρόπο. Άρα με τον παραπάνω τρόπο δεν προκύπτει η ανάγκη για περιορισμό ή έλεγχο της τιμής του δυναμικού ιξώδους.

## 2.4 Συναρτήσεις τοίχου για τραχιές επιφάνειες

Σύμφωνα με τη θεωρία που προτείνεται από τον Cebeci και Bradshaw (1997) το οριακό στρώμα της τύρβης που οριοθετεί μια τραχιά επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί με τρεις περιοχές της δυναμικής του ρευστού ανάλογα με τον αριθμό Reynolds  $K_s^+$  που βασίζεται στη διάσταση των στοιχείων τραχύτητας  $K_s$  (ισοδύναμη διάμετρος άμμου) και της ταχύτητας τριβής  $u_\tau$ .

$$K_s^+ = \frac{\rho K_s u_\tau}{\mu} \quad (2.20)$$

Οι Cebeci και Bradshaw (1977) πρότειναν ότι ο καθολικός νόμος του τοίχου για τους ομαλούς τοίχους θα μπορούσε να τροποποιηθεί για τις τραχιές επιφάνειες με την αφαίρεση μίας συνάρτησης  $\Delta B$ .

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B \quad (2.21)$$

Όπου  $u^+$  και  $y^+$  ( $u^+ = \frac{u}{u_\tau}$ ;  $y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu}$ ) είναι οι συντεταγμένες του τοίχου,  $\kappa$  είναι η σταθερά Von Karman και  $B$  είναι η πειραματική σταθερά η οποία βρίσκεται ότι είναι περίπου 5,45.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + B - \Delta B \quad (2.22)$$

Οι τρεις περιοχές της ροής που αναφερθήκαν προηγουμένως είναι:

- η ομαλή ( $K_s^+ < 2.25$ )
- η μεταβατική ( $2.25 < K_s^+ < 90$ )
- και η περιοχή πλήρους αναπτυσσόμενης τραχύτητας ( $K_s^+ > 90$ )
- 

Ο νέος όρος  $\Delta B$  μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του αδιάστατου ύψους τραχύτητας  $K_s^+$ . Γενικά οι εκφράσεις για το  $\Delta B$  για τις τρεις διαφορετικές περιοχές δίνονται από τις σχέσεις:

- Στην ομαλή περιοχή:

$$\Delta B = 0$$

- Στην μεταβατική περιοχή:

$$\Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{K_s^+ - 2.25}{87.75} + C_s K_s^+ \right) \sin \left[ 0.4258 (\ln K_s^+ - 0.811) \right]$$

- Στην περιοχή πλήρως αναπτυσσόμενης τραχύτητας:

$$\Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln (1 + C_s K_s^+)$$

Οι δύο παράμετροι που χρησιμοποιούνται στο ρευστό για να περιγράψουν την τραχύτητα του τοίχου είναι: η σταθερά  $C_s$  και το ύψος τραχύτητας  $K_s$ .

Από την σύγκριση της εξίσωσης (1.3) με (2.17) στην περιοχή πλήρως αναπτυσσόμενης τραχύτητας μετά από κάποια άλγεβρα μια απλή σχέση βρίσκεται μεταξύ του προϊόντος  $C_s K_s$  και του αεροδυναμικού μήκους τραχύτητας  $z_0$ .

$$C_s K_s \approx E z_0 \tag{2.23}$$

Όπου  $E$  ίσο με  $\exp(\kappa B)$ .

Από θεωρητική άποψη οι συναρτήσεις των τοίχων είναι σωστές μόνο εάν οι οριζόντιες κλίσεις πίεσης είναι αμελητέες (στους όρους ισορροπίας) αλλά στην καθημερινή χρήση του κώδικα επίλυσης οι συναρτήσεις των τοίχων εφαρμόζονται ως οριακές συνθήκες σε κάθε είδος τοίχου που οριοθετεί τη ροή χωρίς να τις λαμβάνουμε πάρα πολύ υπόψη στην ανάλυση μας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Μαθηματική Προσομοίωση με τον κώδικα OpenFOAM

### Διαδικασίες Διακριτοποίησης

Με τις Μερικές Διαφορικές εξισώσεις επιθυμούμε να λύσουμε μικτές παραγώγους τανυστών στον χρόνο και στον χώρο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αρχικά μια μαθηματική περιγραφή όλων των διαφορικών τανυστών που μπορούμε να έχουμε. Έπειτα θα παρουσιάσουμε πως ένα πεδίο τανυστών κατασκευάζεται με τον κώδικα OpenFOAM και πώς τα παράγωγα αυτών των πεδίων διακριτοποιούνται σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων.

### 3.1 Διαφορικοί Τελεστές

Πριν καθορίσουμε τις χωρικές παραγώγους θα εισάγουμε πρώτα το διανυσματικό τελεστή ανάδελτα  $\nabla_x$ , ο οποίος παρουσιάζεται σε μορφή δεικτών  $\partial_i$ :

$$\nabla \equiv \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (3.1)$$

Ο διανυσματικός τελεστής ανάδελτα είναι χρήσιμος σε μορφή δεικτών και υπακούει στους παρακάτω κανόνες:

- λειτουργεί στους τανυστές από τα δεξιά, και ισχύουν οι συμβατικοί κανόνες τελεστών γινομένου, δηλαδή  $\partial_i ab = (\partial_i a)b + a(\partial_i b)$
- διαφορετικά, ο τελεστής ανάδελτα συμπεριφέρεται όπως οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα σε μία αλγεβρική πράξη.

#### 3.1.1 Κλίση

Αν ορίσουμε ένα κλιμακωτό πεδίο  $s$  που να είναι συνεχόμενα διαφορίσιμο τότε η κλίση του  $s$ ,  $\nabla s$ , είναι ένα διανυσματικό πεδίο

$$\nabla s = \partial_i s = \left( \frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2}, \frac{\partial s}{\partial x_3} \right) \quad (3.2)$$

Η κλίση μπορεί να λειτουργήσει σε οποιοδήποτε πεδίο τανυστών για να παράγει ένα πεδίο τανυστών το οποίο είναι μία βαθμίδα ψηλότερα. Για παράδειγμα, η κλίση ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{a}$  είναι ένα δεύτερο πυκνό πεδίο τανυστών

$$\nabla \mathbf{a} = \partial_i a_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Απόκλιση

Εάν καθορίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{a}$  που είναι συνεχόμενα διαφορίσιμο τότε η απόκλιση του  $\mathbf{a}$  είναι ένα βαθμώτο πεδίο

$$\nabla \bullet \mathbf{a} = \partial_i a_i = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \quad (3.4)$$

Η απόκλιση μπορεί να λειτουργήσει σε οποιοδήποτε πεδίο τανυστών της τάξης 1 και ανωτέρω και να παράγει ένα τανυστή ο οποίος είναι μίας τάξης μικρότερος. Παραδείγματος χάρη, η απόκλιση ενός πεδίου τανυστών, δεύτερης τάξης,  $\mathbf{T}$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο (που επεκτείνει το διάνυσμα ως σειρά στηλών για ευκολία)

$$\nabla \bullet \mathbf{T} = \partial_i T_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Περιστροφή

Εάν καθορίζουμε ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{a}$  που είναι συνεχόμενα διαφορίσιμο τότε η περιστροφή του  $\mathbf{a}$ ,  $\nabla \times \mathbf{a}$  είναι ένα διανυσματικό πεδίο

$$\nabla \times \mathbf{a} = e_{ijk} \partial_j a_k = \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \quad (3.6)$$

### 3.1.4 Λαπλασιανή

Η Λαπλασιανή (Laplacian) είναι ένας τελεστής που μπορεί μαθηματικά να οριστεί από τον συνδυασμό της απόκλισης και του τελεστή κλίσης με  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ . Εντούτοις η Λαπλασιανή πρέπει να θεωρηθεί ως ένας μονός τελεστής που μετασχηματίζει το πεδίο τανυστών σε άλλο πεδίο τανυστών της ίδιας τάξης, κατά τον συνδυασμό των δύο τελεστών το αποτέλεσμα δεν αλλάζει τάξη.

Στην πραγματικότητα, η Λαπλασιανή ορίζεται καλύτερα ως βαθμωτός τελεστής, ακριβώς όπως καθορίσαμε το ανάδελτα σαν διανυσματικό τελεστή, με

$$\nabla^2 \equiv \partial^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (3.7)$$

Για παράδειγμα, η Λαπλασιανή ενός βαθμωτού πεδίου  $s$  είναι ένα βαθμωτό πεδίο

$$\nabla^2 s \equiv \partial^2 s \equiv \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_3^2} \quad (3.8)$$

### 3.1.5 Χρονική παράγωγος

Υπάρχουν περισσότεροι από ένας ορισμοί για τη χρονική, παράγωγο ενός τανυστή. Για να περιγράψουμε τις χρονικές παραγωγούς πρέπει πρώτα να υπενθυμίσουμε ότι οι τανυστές αφορούν την ιδιότητα του όγκου του υλικού το οποίο μπορεί να κινείται. Εάν ακολουθήσουμε έναν πολύ μικρό όγκο του υλικού, ή μόριο, καθώς κινείται και παρατηρήσουμε την αλλαγή στην τανυστική ιδιότητα  $\phi$  στον χρόνο, έχουμε την ολική, ή υλική παράγωγο η οποία συμβολίζεται:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (3.9)$$

Εντούτοις στη μηχανική συνεχούς μέσου, ιδιαίτερα στη ρευστομηχανική, παρατηρούμε συχνά την αλλαγή ενός  $\phi$  σε ένα σταθερό σημείο στο διάστημα ως διαφορετική κίνηση μορίων πέρα από εκείνο το σημείο. Αυτή η αλλαγή σε ένα σημείο στο διάστημα καλείται χρονική παράγωγος η οποία συμβολίζεται  $\frac{\partial}{\partial t}$  και σχετίζεται με την υλική παράγωγο

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + U \bullet \nabla\phi \quad (3.10)$$

Όπου  $U$  είναι το πεδίο ταχύτητας της ιδιότητας  $\phi$ . Ο δεύτερος όρος στα δεξιά είναι γνωστός ως ποσοστό από μεταφορά της αλλαγής του  $\phi$ .

### 3.2 Διακριτοποίηση

Ο όρος διακριτοποίηση σημαίνει την προσέγγιση ενός προβλήματος σε διακριτές ποσότητες. Η μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων Ελέγχου και άλλες, όπως το πεπερασμένο στοιχείο και οι πεπερασμένες μέθοδοι διαφοράς, όλες διακριτοποιούν το πρόβλημα ως εξής:

**Χωρική διακριτοποίηση** που καθορίζει την περιοχή της λύσης με ένα σύνολο σημείων που γεμίζουν και δεσμεύουν μια περιοχή του διαστήματος όταν συνδέεται.

**Χρονική διακριτοποίηση** (Για χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα) διαιρείται η χρονική περιοχή σε έναν πεπερασμένο αριθμό χρονικών διαστημάτων, ή βημάτων

**Εξίσωση διακριτοποίησης** παράγει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με όρους διαχωρισμένων ποσοτήτων που καθορίζονται στις συγκεκριμένες θέσεις της έκτασης, από τις Μερικές Διαφορικές Παραγωγούς που χαρακτηρίζουν το πρόβλημα.

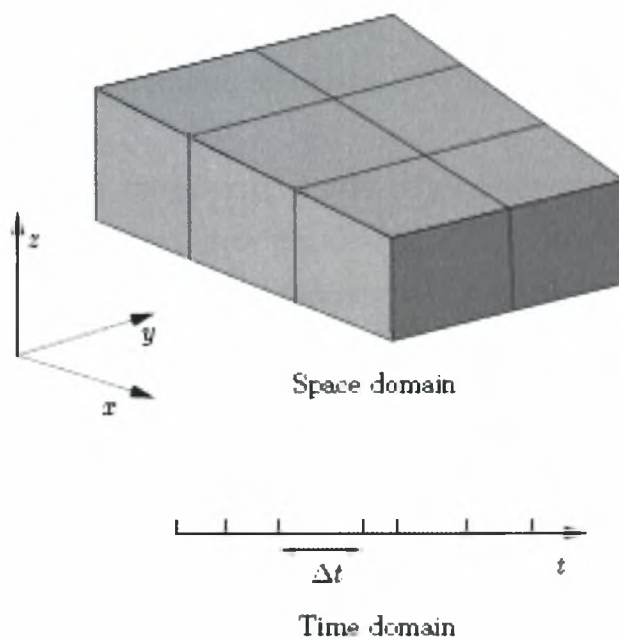
### 3.3 Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης

Η διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1 Το διάστημα του πεδίου διακριτοποιείται στο υπολογιστικό πλέγμα στο οποίο οι Μερικές Διαφορικές Παράγωγοι στη συνέχεια διακριτοποιούνται. Αν είναι απαραίτητη η διακριτοποίηση του χρόνου, απλά: σπάει σε ένα σύνολο χρονικών βημάτων  $\Delta t$  που μπορεί να αλλάξει κατά τη



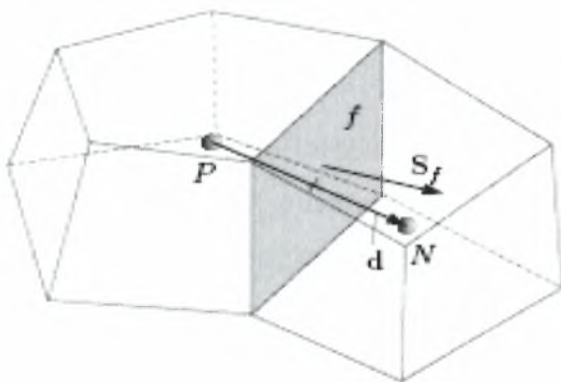
διάρκεια μιας αριθμητικής προσομοίωσης, ίσως ανάλογα με κάποιο όρο που υπολογίζεται κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης.

Σε ένα πιο λεπτομερές επίπεδο, η διακριτοποίηση του διαστήματος απαιτεί την υποδιαίρεση του πεδίου σε έναν αριθμό κελιών, ή τους όγκους ελέγχου. Τα κελία είναι παρακείμενα, δηλαδή δεν επικαλύπτουν το ένα το άλλο και γεμίζουν εντελώς το πεδίο. Ένα χαρακτηριστικό κελί παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.2. Οι εξαρτημένες μεταβλητές και οι άλλες ιδιότητες αποθηκεύονται κυρίως στο κέντρο του κελιού  $P$  αν και μπορούν να αποθηκευτούν και στην επιφάνεια. Στο OpenFOAM δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στον αριθμό των οριακών επιφανειών κάθε κελιού, ούτε οποιοσδήποτε περιορισμός στην ευθυγράμμιση της κάθε επιφάνειας. Αυτό το είδος πλέγματος συχνά αναφέρεται αυθαίρετα «μη δομημένο» για να διαφοροποιηθεί από τα πλέγματα στα οποία οι επιφάνειες των κελιών έχουν μια ορισμένη ευθυγράμμιση, κάθετα με τις συντεταγμένες των αξόνων.



Σχήμα 3.1 Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης

Οι κώδικες με τα αυθαίρετα μη δομημένα πλέγματα προσφέρουν μεγαλύτερη ελευθερία στην παραγωγή πλέγματος και στο χειρισμό όταν η γεωμετρία του πεδίου είναι σύνθετη ή αλλάζει στον χρόνο.



Σχήμα 3.2 Παράμετροι στη διακριτοποίηση πεπερασμένων όγκων

Ενώ οι περισσότερες ιδιότητες καθορίζονται στα κέντρα των κελιών, μερικά καθορίζονται στις επιφάνειες των κελιών. Υπάρχουν δύο τύποι επιφανειών κελιών.

**Εσωτερικές επιφάνειες:** Εκείνες οι επιφάνειες που συνδέουν δύο κελιά (και δεν μπορούν ποτέ να είναι περισσότερες από δύο). Για κάθε εσωτερική επιφάνεια, το OpenFOAM υποδεικνύει ένα γειτονικό κελί για να είναι η επιφάνεια *ιδιοκτήτης* και ένα άλλο για να είναι ο *γείτονας*.

**Οριακές επιφάνειες:** Εκείνες που ανήκουν σε ένα κελί δεδομένου ότι συμπίπτουν με το όριο του πεδίου. Αυτές οι επιφάνειες έχουν απλά ένα κελί *ιδιοκτήτη*.

### 3.3.1 Καθορισμός πλέγματος στο OpenFOAM

Υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα περιγραφής πλέγματος στο OpenFOAM, αρχίζοντας με την πιο βασική κατηγορία πλέγματος, που ονομάζεται polyMesh δεδομένου ότι είναι βασισμένο σε πολυέδρα. Ένα πλέγμα κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τις ελάχιστες πληροφορίες που απαιτούνται για να καθορίσουν τη γεωμετρία του πλέγματος που περιγράφεται κατωτέρω και που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3:

**Σημεία** Μια λίστα σημείων συντεταγμένων

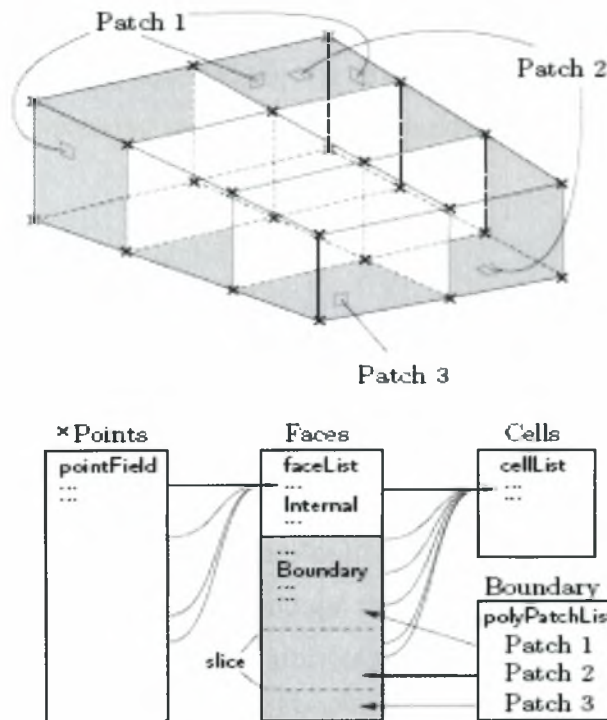
**Επιφάνειες** Μια λίστα από επιφάνειες που ορίζουν επιφάνειες, όπου η κατηγορία επιφανειών καθορίζεται από έναν κατάλογο από αριθμούς, που αντιστοιχούν στα σημεία του πεδίου

**Κελιά** Μια λίστα από κελιά, όπου η κατηγορία των κελίων καθορίζεται από έναν αριθμό επιφανών, που αντιστοιχούν στις επιφάνειες που περιγράφονται προηγουμένως.

**Περιοχές ορίων.** Το όριο υποδιαιρείται σε διάφορες επιφάνειες για να επιτρέψει στις διαφορετικές οριακές συνθήκες να δοθούν σε διαφορετικές επιφάνειες κατά τη διάρκεια μιας λύσης. Όλες οι επιφάνειες οποιουδήποτε polyPatch αποθηκεύονται ως ένα μονό μπλοκ του faceList, έτσι ώστε οι επιφάνειες να μπορούν να προσεγγιστούν εύκολα χρησιμοποιώντας αναφορές στο πρώτο και τελευταίο επίπεδο του μπλοκ. Κάθε polyPatch κατασκευάζεται έπειτα από

- Μία φέτα
- Μία λέξη για να του ορίσει ένα όνομα.

Η διακριτοποίηση με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο στοιχείο που προκύπτει από τη γεωμετρία του πλέγματος που αποθηκεύεται στον κατάλογο polyMesh. Το OpenFOAM επομένως επεκτείνει την κατηγορία polyMesh στο αρχείο fvMesh που αποθηκεύει τα στοιχεία που απαιτούνται πρόσθετα για την διακριτοποίηση με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Όγκων. Το αρχείο fvMesh κατασκευάζεται από το polyMesh και αποθηκεύει τα πρόσθετα στοιχεία στον Πίνακα 3.1 που μπορεί να ενημερωθεί κατά τη διάρκεια του χρόνου εκτέλεσης σε περιπτώσεις όπου το πλέγμα κινείται, κ.λπ....



Σχήμα 3.3: Σχηματική περιγραφή του βασικού πλέγματος που χρησιμοποιείται στο OpenFOAM

Πίνακας 3.1: Στοιχεία που αποθηκεύουμε στο αρχείο fvMesh

Class	Description	Symbol	Access function
volScalarField	Cell volumes	$V$	$V()$
surfaceVectorField	Face area vectors	$S_f$	$Sf()$
surfaceScalarField	Face area magnitudes	$ S_f $	$magSf()$
volVectorField	Cell centres	$C$	$C()$
surfaceVectorField	Face centres	$C_f$	$Cf()$
surfaceScalarField	Face motion fluxes **	$\phi_s$	$phi()$

### 3.3.2 Καθορισμός του γεωμετρικού πεδίου στο OpenFOAM

Μέχρι τώρα μπορούμε να καθορίσουμε ένα πεδίο, δηλαδή μία λίστα τανυστών, και ενός πλέγματος. Αυτά μπορούν να συνδυαστούν για να καθορίσουν ένα πεδίο τανυστή σχετικά με τα ιδιαίτερα σημεία στο πεδίο μας, που προσδιορίζονται στο OpenFOAM ως αντικείμενο από την κατηγορία `geometricField<Type>`. Οι τιμές του Field είναι χωρισμένες σε εκείνες

μέσα στην εσωτερική περιοχή του πεδίου, π.χ. στο κέντρο του κελιού, και σε εκείνες που καθορίζονται στην οριακή περιοχή του πεδίου, π.χ. στις οριακές επιφάνειες. Τα αντικείμενα `geometricField<Type>` αποθηκεύουν τις ακόλουθες πληροφορίες:

**Εσωτερικό πεδίο**

**Οριακό πεδίο**

**Πλέγμα**

**Παλιές τιμές**

**Τιμές προηγούμενης επανάληψης**

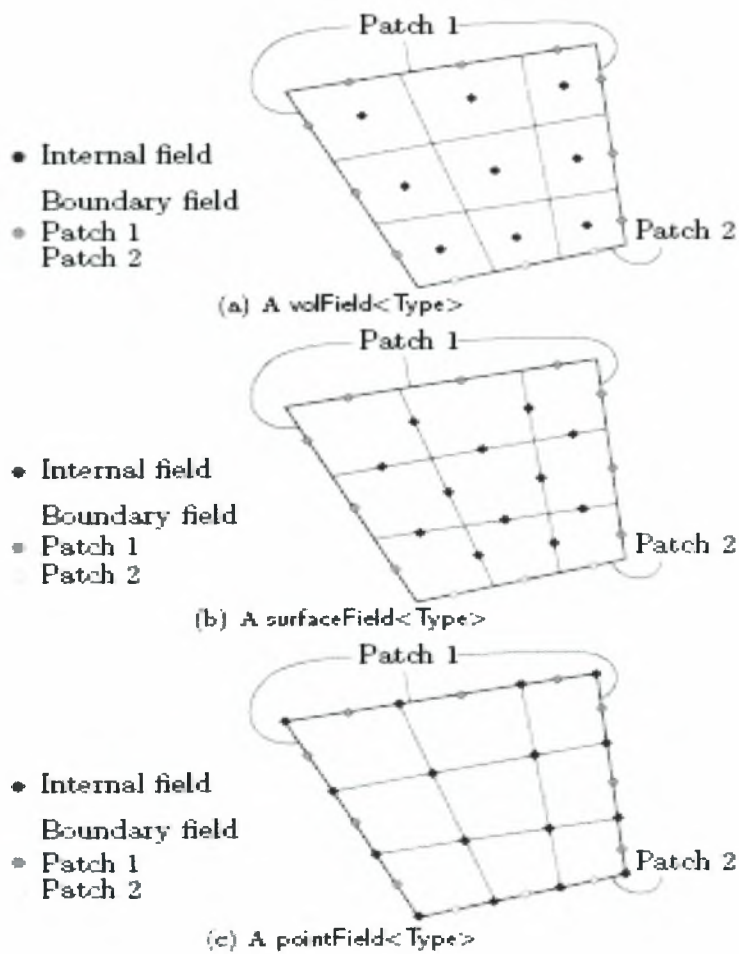
Όπως συζητείται στην παράγραφο 3.3, καθορίζουμε μια ιδιότητα, κυρίως, στα κέντρα των κελιών, αλλά αρκετά συχνά την αποθηκεύουμε και στις επιφάνειες των κελιών. Το `geometricField<Type>` μετονομάζεται χρησιμοποιώντας δηλώσεις αντικειμένων για να δείξει το πεδίο όπου η μεταβλητή καθορίζεται ως εξής:

`volField<Type>`; Το πεδίο που καθορίζεται στα κέντρα των κελιών

`surfaceField<Type>`: Το πεδίο που καθορίζεται στις πλευρές των κελιών

`pointField<Type>`: Το πεδίο που καθορίζεται στα σημεία των κελιών.

Αυτές οι κατηγορίες πεδίου του αντικειμένου `geometricField<Type>` παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.4. Το αντικείμενο `geometricField<Type>` κληρονομεί όλες τις ιδιότητες του αντικειμένου `Field<Type>` και έχει όλες τις διαδικασίες. Ελέγχει επίσης τις διαστάσεις των δεδομένων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `dimensionSet`. Μπορεί επίσης να κληρονομήσει τις διαδικασίες διακριτοποίησης των πεπερασμένων όγκων που περιγράφονται στο παρακάτω κεφάλαιο. Η δομή των αντικειμένων που χρησιμοποιείται για να χτιστεί το `geometricField<Type>` παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.4 Τύποι των  $geometricField<Type>$  καθορίζονται στο πλέγμα με 2 οριακά patches (για απλότητα σε 2 διαστάσεις)



όπου [A] είναι ένα τετραγωνικό μητρώο, [x] είναι το διάνυσμα στήλη της εξαρτημένης μεταβλητής και [b] είναι το διάνυσμα των σταθερών όρων. Η περιγραφή των [x] και [b] ως διανύσματα προέρχεται από την ορολογία των μητρώων παρά από την ύπαρξη μιας ακριβής περιγραφής αυτού που είναι πραγματικά: μία λίστα τιμών που καθορίζουν τις θέσεις στη γεωμετρία, δηλαδή ένα `geometricField<Type>`, ή πιο συγκεκριμένα ένα `volField<Type>` όταν χρησιμοποιείται στη διακριτοποίηση με πεπερασμένους όγκους.

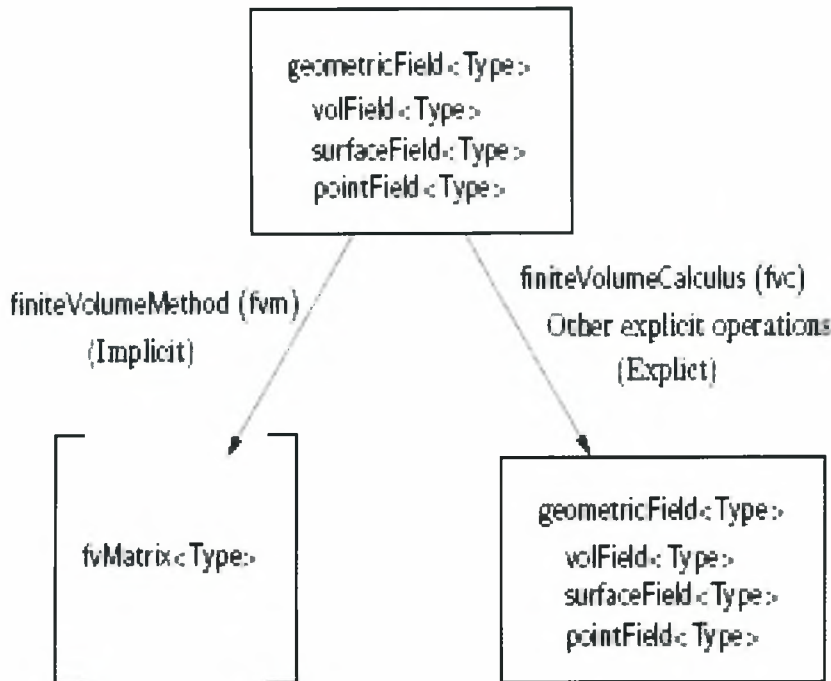
Το μητρώο [A] είναι μία λίστα συντελεστών ενός συνόλου αλγεβρικών εξισώσεων, και δεν μπορεί να περιγραφεί ως αντικείμενο `geometricField<Type>`. Επομένως δίνεται μια κατηγορία του: `fvMatrix`. Το αντικείμενο `fvMatrix<Type>` δημιουργείται μέσω μιας διακριτοποίησης του `geometric<Type>Field` και επομένως κληρονομεί το `<Type>`. Υποστηρίζει πολλές από τις τυποποιημένες αλγεβρικές διαδικασίες μητρώων την πρόσθεση +, την αφαίρεση - και τον πολλαπλασιασμό \*

Κάθε όρος στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις αντιπροσωπεύεται χωριστά στον κώδικα `OpenFOAM` χρησιμοποιώντας τις κατηγορίες στατικών λειτουργιών `finiteVolumeMethod` και `finiteVolumeCalculus`, που παράγονται από έναν ορισμό τύπου στο `fvn` και `fvn` αντίστοιχα. Στα αντικείμενα `fvn` και `fvn` περιέχονται οι στατικές συναρτήσεις, που αντιπροσωπεύουν τις διαφορικές λειτουργίες, π.χ.  $\nabla^2$ ,  $\nabla \cdot$  και  $\partial/\partial t$ , τα οποία διακριτοποιούν το αντικείμενο `geometricFields<Type>`. Ο σκοπός του καθορισμού αυτών των συναρτήσεων, `fvn` και `fvn`, μέσα σε δύο κατηγορίες, παρά μία, είναι για να διακρίνει:

- λειτουργίες του `fvn` που υπολογίζουν τα παράγωγα και επιστρέφουν ένα `fvMatrix<Type>`
- μερικές λειτουργίες του `fvn` που υπολογίζουν τα ρητά παράγωγα και άλλους ρητούς υπολογισμούς, επιστρέφοντας ένα `geometricField<Type>`.

Το Σχήμα 3.6 παρουσιάζει ένα `geometricField<Type>` που καθορίζεται σε ένα πλέγμα με 2 οριακές επιφάνειες και επεξηγεί ότι οι ρητές διαδικασίες μετασχηματίζουν μόνο έναν τομέα σε άλλο και σχεδιάζεται σε δυο διαστάσεις για απλότητα.





Σχήμα 3.6: Το `geometricField<Type>` και οι λειτουργίες του

Ο πίνακας 3.2 απαριθμεί τις κύριες λειτουργίες που είναι διαθέσιμες στα αντικείμενα `fvM` και `fvC` για να διακριτοποιήσουν τους όρους που μπορούν να βρεθούν στις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Η διακριτοποίηση με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων κάθε όρου διατυπώνεται πρώτα με τον υπολογισμό του όρου πάνω σε ένα κελί όγκου  $V$ . Οι περισσότεροι όροι με χωρικές παραγώγους μετατρέπονται έπειτα στα ολοκληρώματα πάνω στην επιφάνεια  $S$  του κελιού οριοθετώντας τον όγκο χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss

$$\int_V \nabla * \phi dV = \int_S dS * \phi \quad (3.12)$$

όπου το  $S$  είναι το διάνυσμα της επιφάνειας της περιοχής,  $\phi$  μπορεί να αντιπροσωπεύσει οποιοδήποτε τανυστή του πεδίου και το αστεράκι  $*$  χρησιμοποιείται για να αντιπροσωπεύσει οποιοδήποτε προϊόν τανυσμού, δηλ. εσωτερικός, εξωτερικός και

διαγώνιος και τα αντίστοιχα παράγωγα: απόκλιση  $\nabla \cdot \phi$ , κλίση  $\nabla \phi$  και  $\nabla \times \phi$ . Τα ολοκληρώματα όγκου και επιφάνειας γίνονται γραμμικά χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα σχήματα τα οποία περιγράφονται για κάθε όρο στα παρακάτω κεφάλαια. Μερικοί όροι πάντα διακριτοποιούνται χρησιμοποιώντας ένα σχήμα, ενώ μια επιλογή των σχημάτων προσφέρεται στο OpenFOAM για τη διακριτοποίηση των υπολοίπων όρων. Η επιλογή του σχήματος γίνεται είτε από τον άμεσο καθορισμό του μέσα στον κώδικα είτε από ένα αρχείο εισόδου κατά το χρόνο εκτέλεσης της προσομοίωσης, που να αποθηκεύεται μέσα σε ένα αντικείμενο κατηγορίας fvSchemes.

Πίνακας 3.2: Διακριτοποίηση των όρων των Μερικών Διαφορικών Παραγώγων στο OpenFOAM

Term description	Implicit / Explicit	Text expression	fvm::/fvc:: functions
Laplacian	Imp/Exp	$\nabla^2 \phi$ $\nabla \cdot \Gamma \nabla \phi$	laplacian(phi) laplacian(Gamma, phi)
Time derivative	Imp/Exp	$\frac{\partial \phi}{\partial t}$ $\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}$	ddt(phi) ddt(rho, phi)
Second time derivative	Imp/Exp	$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$	d2dt2(rho, phi)
Convection	Imp/Exp	$\nabla \cdot (\psi)$ $\nabla \cdot (\psi \phi)$	div(psi, scheme)* div(psi, phi, word)* div(psi, phi)
Divergence	Exp	$\nabla \cdot \chi$	div(chi)
Gradient	Exp	$\nabla \chi$ $\nabla \phi$	grad(chi) gGrad(phi) lsGrad(phi) snGrad(phi) snGradCorrection(phi)
Grad-grad squared	Exp	$ \nabla \nabla \phi ^2$	sqrGradGrad(phi)
Curl	Exp	$\nabla \times \phi$	curl(phi)
Source	Imp Imp/Exp†	$\rho \phi$	Sp(rho, phi) SuSp(rho, phi)

† fvm::SuSp source is discretised implicit or explicit depending on the sign of rho.

† An explicit source can be introduced simply as a vol<Type>Field, e.g. rho\*phi.

Function arguments can be of the following classes:

phi: vol<Type>Field

Gamma: scalar volScalarField, surfaceScalarField, volTensorField, surfaceTensorField.

rho: scalar, volScalarField

psi: surfaceScalarField.

chi: surface<Type>Field, vol<Type>Field.

### 3.4.1 Ο Λαπλασιανός όρος

Ο όρος Laplacian είναι ενσωματωμένος πάνω σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\int_V \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_S dS \cdot (\Gamma \nabla \phi) = \sum_f \Gamma_f S_f \cdot (\nabla \phi)_f \quad (3.13)$$

Η διακριτοποίηση της κλίσης της επιφάνειας είναι υπόλοιπο προς το διανυσματικό μήκος  $d$  μεταξύ του κέντρου του κελιού ενδιαφέροντος  $P$  και του κέντρου ενός γειτονικού κελιού  $N$ . Είναι ορθογώνιο στο επίπεδο της επιφάνειας, δηλαδή παράλληλο στο  $S_f$ :

$$s_f \cdot (\nabla \phi)_f = |S_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|d|} \quad (3.14)$$

Στην περίπτωση των μη-ορθογώνιων πλεγμάτων, ένας πρόσθετος ρητός όρος εισάγεται ο οποίος μεταβάλλεται από την παρεμβολή των κλίσεων στο κέντρο των κελιών, υπολογίζεται από τις κεντρικές διαφορές και τιμή στο κέντρο των κελιών.

### 3.4.2 Ο όρος μεταφοράς

Ο όρος μεταφοράς είναι ενσωματωμένος μέσα σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιημένος ως εξής:

$$\int_V \nabla \cdot (\rho U \phi) dV = \int_S dS \cdot (\rho U \phi) = \sum_f S_f \cdot (\rho U)_f \phi_f = \sum_f F \phi_f \quad (3.15)$$

Το πεδίο  $\phi_f$  στην επιφάνεια  $f$  μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας ποικίλα σχήματα:

**Κεντρικές διαφορές (CD)** που είναι δευτέρου βαθμού ακριβείας

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N \quad (3.16)$$

όπου  $f_x \equiv \frac{\overline{fN}}{\overline{PN}}$  όπου  $\overline{fN}$  είναι η απόσταση μεταξύ του  $f$  και του κέντρου  $N$  των κελιών

και  $\overline{PN}$  είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των κελιών  $P$  και  $N$ .

**Απάνεμες διαφορές (upwind differencing, UD)** που καθορίζει το  $\phi_f$  από την κατεύθυνση της ροής και είναι πρώτης τάξης ακρίβειας

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{για } F \geq 0 \\ \phi_N & \text{για } F < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

**Μικτές διαφορές (blended differencing, BD)** συνδιασμός των UD και CD σε μια προσπάθεια να διατηρηθεί η ευστάθεια του αριθμητικού σχήματος με λογική ακρίβεια,

$$\phi_f = (1-\gamma)(\phi_f)_{UD} + \gamma(\phi_f)_{CD} \quad (3.18)$$

Το OpenFOAM προσφέρει επίσης μια ποικιλία συντελεστών  $\gamma$ , και άλλα γνωστά σχήματα όπως του van Leer, SUPERBEE, MINMOD κ.λπ....

### 3.4.3 Πρώτη χρονική παράγωγος

Η παράγωγος ως προς χρόνο  $\partial/\partial t$  είναι ενσωματωμένη μέσα σε έναν όγκο ελέγχου ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \quad (3.19)$$

Ο όρος διακριτοποιείται με μια απλή διαφορά στον χρόνο χρησιμοποιώντας:

**νέες τιμές**  $\phi^n \equiv \phi(t + \Delta t)$  στο χρονικό βήμα για το οποίο λύνουμε

**παλιές τιμές**  $\phi^0 \equiv \phi(t)$  που αποθηκεύονται από το προηγούμενο χρονικό βήμα

**παλιές-παλιές τιμές**  $\phi^{00} \equiv \phi(t - \Delta t)$  αποθηκεύονται από το χρονικό βήμα το προηγούμενο, στο τελευταίο.

Ένα από τα δύο σχήματα διακριτοποίησης μπορεί να δηλωθούν χρησιμοποιώντας τη λέξη κλειδί `timeScheme` στο κατάλληλο αρχείο εισόδου.

`Euler implicit scheme (timeScheme EulerImplicit)` το οποίο έχει πρώτης τάξης ακρίβεια στο χρόνο:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV = \frac{(\rho p \phi_p V)^n - (\rho p \phi_p V)^0}{\Delta t} \quad (3.20)$$

**Backward differencing scheme (timeScheme BackwardDifferencing)** το οποίο έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης στο χρόνο και αποθηκεύει την παλιά-παλιά τιμή και επομένως γι' αυτό απαιτείται κατανάλωση μεγαλύτερου αποθηκευτικού χώρου στον Η/Υ από ότι στο σχήμα `EulerImplicit`:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV = \frac{3(\rho p \phi_p V)^n - 4(\rho p \phi_p V)^0 + (\rho p \phi_p V)^{00}}{2\Delta t} \quad (3.21)$$

#### 3.4.4 Δεύτερη χρονική παράγωγο

Η δεύτερη χρονική παράγωγος είναι ενσωματωμένη μέσα σε όγκο ελέγχου και γραμμικοποιημένη ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \frac{(\rho p \phi_p V)^n - 2(\rho p \phi_p V)^0 + (\rho p \phi_p V)^{00}}{\Delta t^2} \quad (3.22)$$

Είναι ακρίβειας πρώτης τάξης στο χρόνο.

#### 3.4.5 Διακριτοποίηση της απόκλισης

Ο όρος απόκλισης που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο είναι αυστηρά ένας ρητός όρος που διακρίνεται από τον όρο μεταφοράς της παραγράφου 2.4.2, δηλαδή δεν είναι η

απόκλιση του γινομένου μιας ταχύτητας και μιας εξαρτώμενης μεταβλητής. Ο όρος ενσωματώνεται σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιείται ως εξής:

$$\int_V \nabla \cdot \phi dV = \int_S dS \cdot \phi = \sum_f S_f \cdot \phi_f \quad (3.23)$$

Η συνάρτηση `fv::div` μπορεί να πάρει ως στοιχείο της καθένα ένα αντικείμενο `surface<Type>Field`, που στην περίπτωση το  $\phi_f$  καθορίζεται άμεσα, ή ένα αντικείμενο `vol<Type>Field` το οποίο παρεμβάλλεται στην επιφάνεια κοντά στις κεντρικές διαφορές όπως περιγράφεται στην παράγραφο 2.4.10.

### 3.4.6 Διακριτοποίηση της κλίσης

Ο όρος κλίσης είναι ένας ρητός όρος που μπορεί να υπολογιστεί με ποικίλους τρόπους. Το σχήμα μπορεί να λειτουργήσει είτε με την επιλογή της ιδιαίτερης συνάρτησης `grad` που είναι σχετική με τη διακριτοποίηση του σχήματος, π.χ. `fv::gGrad`, `fv::lsGrad` κ.λπ., είτε με τη χρησιμοποίηση της συνάρτησης `fv::grad` που συνδυάζεται με την κατάλληλη λέξη κλειδί `timeScheme` σε ένα αρχείο εισόδου.

Η ολοκλήρωση **Gauss** καλείται χρησιμοποιώντας τη λειτουργία `fv::grad` με το `timeScheme Gauss` ή άμεσα χρησιμοποιώντας τη λειτουργία `fv::gGrad`. Η διακριτοποίηση εκτελείται χρησιμοποιώντας την τυποποιημένη μέθοδο του θεωρήματος του Gauss στον όγκο ολοκλήρωσης:

$$\int_V \nabla \phi dV = \int_S dS \phi = \sum_f S_f \phi_f \quad (3.24)$$

Όπως με τη λειτουργία `fv::div`, η Γκαουσιανή ολοκλήρωση `fv::grad` μπορεί να πάρει είτε ένα `surfaceField` είτε ένα `volField` ως στοιχείο.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι βασισμένη στην ακόλουθη ιδέα:

1. μια τιμή στο σημείο P μπορεί να επεκταθεί σε γειτονικό σημείο N χρησιμοποιώντας την κλίση στο P
2. η εκτιμώμενη τιμή στο N μπορεί να συγκριθεί με την πραγματική τιμή στο N, και η διαφορά θα είναι το λάθος,
3. εάν ελαχιστοποιούμε τώρα το άθροισμα των τετραγώνων των υπολογισμένων λαθών σε όλους τους γείτονες του P ως προς την κλίση, τότε η κλίση θα πρέπει να έχει προσεγγιστεί καλά.

Τα ελάχιστα τετράγωνα καλούνται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `func:: grad` με `timeScheme leastSquares` ή άμεσα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `func:: lsGrad` λειτουργία. Η διακριτοποίηση εκτελείται όπως με τον πρώτο υπολογισμό του τανυστή **G** σε κάθε σημείο P αθροίζοντας όλους τους γείτονες N:

$$G = \sum_N \omega_N^2 dd \quad (3.25)$$

όπου **d** είναι το διάνυσμα από το P στο N και η συνάρτηση στάθμισης  $\omega_N = 1/|d|$ . Η κλίση υπολογίζεται έπειτα ως:

$$(\nabla \phi)_P = \sum_N \omega_N^2 G^{-1} \cdot d(\phi_N - \phi_P) \quad (3.26)$$

**Κανονική κλίση επιφάνειας:** Η κανονική κλίση σε μια επιφάνεια  $n_f \cdot (\nabla \phi)_f$  μπορεί να υπολογιστεί στις επιφάνειες των κελιών χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$(\nabla \phi)_f = \frac{\phi_N - \phi_P}{d} \quad (3.27)$$

Αυτή η κλίση καλείται από τη λειτουργία `func:: snGrad` και επιστρέφει ένα τύπο `surfaceField<Type>`. Ο τύπος είναι άμεσα ανάλογος με αυτόν που υπολογίζεται από τον τύπο της Λαπλασιανής διακριτοποίησης στην παράγραφο 2.4.1, και με τον ίδιο τρόπο, μια διόρθωση μπορεί να εισαχθεί για να βελτιώσει την ακρίβεια αυτής της επιφανειακής κλίσης στην περίπτωση των μη-ορθογώνιων πλεγμάτων. Αυτή η διόρθωση γίνεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `func:: snGradCorrection [Check**]`.

### 3.4.7 Διακριτοποίηση του τετραγώνου δύο κλίσεων

Ο όρος του τετραγώνου δύο κλίσεων υπολογίζεται με τη λήψη της κλίσης του πεδίου, τη λήψη της κλίσης του προκύπτοντος πεδίου κλίσης και τέλος υπολογίζοντας το μέγεθος. Η μαθηματική έκφραση για το τετραγώνο του  $\phi$  είναι  $|\nabla(\nabla\phi)|^2$ .

### 3.4.8 Διακριτοποίηση της Περιστροφής

Η περιστροφή υπολογίζεται από τον όρο κλίσης που περιγράφεται στην παράγραφο 2.4.6. Κατ' αρχάς, η κλίση διακριτοποιείται και έπειτα η περιστροφή υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\nabla \times \phi = 2 * (\text{skew} \nabla \phi)$$

### 3.4.9 Όροι πηγής

Οι όροι πηγής μπορούν να καθοριστούν με 3 τρόπους:

**Ρητός** Κάθε ρητός όρος είναι ένα αντικείμενο `volField<Type>`. Ως εκ τούτου, ένας ρητός όρος πηγής μπορεί να είναι ενσωματωμένος σε μια εξίσωση απλά ως πεδίο τιμών. Παραδείγματος χάριν εάν θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση Poisson  $\nabla^2\phi = f$ , θα πρέπει να καθορίσουμε το  $\phi$  και το  $f$  ως αντικείμενα `volScalarField` και έπειτα να λύσουμε `solve(fvm::laplacian(phi) == f)`

**Άρρητος:** Ένας άρρητος όρος πηγής είναι ενσωματωμένος πάνω σε έναν όγκο ελέγχου και γραμμικοποιείται με



$$\int_V \rho \phi dV = \rho_P V_P \phi_P \quad (3.28)$$

**Άρρητος / ρητός:** Ο άρρητο όρος πηγής αλλάζει το συντελεστή της διαγωνίου του μητρώου. Ανάλογα με το πρόσημο των συντελεστών και των όρων του μητρώου, αυτό είτε θα αυξήσει είτε θα μειώσει τη διαγώνια κυριαρχία του μητρώου. Η μείωση της διαγώνιας κυριαρχίας μπορεί να προκαλέσει αστάθεια κατά τη διάρκεια της επαναληπτικής λύσης της εξίσωσης του μητρώου. Επομένως το OpenFOAM παρέχει μια μικτή πηγή διακριτοποιημένης διαδικασίας αυτή είναι άρρητη όταν οι συντελεστές είναι μεγαλύτεροι από μηδέν, και ρητή για τους συντελεστές μικρότερους του μηδενός. Στους μαθηματικούς όρους ο συντελεστής μητρώων για τον κόμβο P είναι  $V_P \max(\rho_P, 0)$  και ο όρος πηγής είναι  $V_P \phi_P \min(\rho_P, 0)$ .

### 3.4.10 Άλλοι ρητοί τύποι διακριτοποίησης

Υπάρχουν μερικές άλλες διαδικασίες διακριτοποίησης που μετατρέπουν αντικείμενο volField<type> σε surfaceFields και αντίστροφα.

**Ακέραιη επιφάνεια:** fvc:: surfaceIntegrate εκτελεί ένα άθροισμα του αντικειμένου surface<type> Field επιφανειακών τιμών οριοθετώντας κάθε κελί και διαιρώντας με τον όγκο κελιού, δηλαδή  $\left( \sum_f \phi_f \right) / V_P$ . Επιστρέφει ένα αντικείμενο volField<type>.

**Άθροισμα επιφάνειας:** fvc:: surfaceSum εκτελεί ένα άθροισμα του αντικειμένου surface<type> Field επιφανειακών τιμών οριοθετώντας κάθε κελί, δηλαδή  $\sum_f \phi_f$  επιστρέφοντας ένα αντικείμενο volField<Type>.

**Μέσος όρος:** `fv::average` παράγει ένα σταθμισμένο μέσο όρο του αντικειμένου `surface<Type>Field` στις τιμές των επιφανειών του, δηλαδή  $\left(\sum_f S_f \phi_f\right) / \sum_f S_f$ , και επιστρέφει ένα αντικείμενο `volField<Type>`.

### 3.5 Χρονική διακριτοποίηση

Αν και έχουμε περιγράψει τη διακριτοποίηση των χρονικών παραγώγων στις παραγράφους 2.4.3 και 2.4.4, πρέπει να εξετάσουμε πώς να χρησιμοποιήσουμε τις χωρικές παραγώγους σε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο πρόβλημα. Εάν ορίσουμε όλους τους χωρικούς όρους όπως το  $\mathbf{A}\phi$  όπου το  $\mathbf{A}$  είναι οποιαδήποτε χωρική λειτουργία, π.χ. Λαπλασιανή, κατόπιν μπορούμε να εκφράσουμε μη-μόνιμες Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις με ακέραια μορφή ως εξής:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_V \mathbf{A} \phi dV \right] dt = 0 \quad (3.29)$$

Χρησιμοποιώντας την άρρητη μέθοδο Euler εξίσωσης 2.21, ο πρώτος όρος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \frac{(\rho_p \phi_p V)^n - (\rho_p \phi_p V)^0}{\Delta t} dt = \frac{(\rho_p \phi_p V)^n - (\rho_p \phi_p V)^0}{\Delta t} \Delta t \quad (3.30)$$

ο δεύτερος όρος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_V \mathbf{A} \phi dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{A}^* \phi dt \quad (3.31)$$

Όπου, το  $\mathbf{A}^*$  αντιπροσωπεύει μια χωρική διακριτοποίηση του  $\mathbf{A}$ . Το χρονικό ολοκλήρωμα μπορεί να διακριτοποιηθεί με τρεις τρόπους:

**Euler implicit:** χρησιμοποιεί την άρρητη διακριτοποίηση των χωρικών όρων, με αυτόν τον τρόπο παίρνονται οι τρέχουσες τιμές  $\phi^n$ .

$$\int_t^{t+\Delta t} A^* \phi dt = A^* \phi^n \Delta t \quad (3.32)$$

Είναι πρώτης τάξης ακρίβεια στο χρόνο, αλλά είναι άνευ όρων σταθερή.

**Explicit:** χρησιμοποιεί ρητή διακριτοποίηση των χωρικών όρων, με αυτόν τον τρόπο παίρνοντας τις παλαιές τιμές  $\phi^0$

$$\int_t^{t+\Delta t} A^* \phi dt = A^* \phi^0 \Delta t \quad (3.33)$$

Είναι πρώτης τάξης ακρίβεια στο χρόνο και είναι ασταθής εάν ο αριθμός Courant είναι μεγαλύτερος από 1. Ο αριθμός Courant ορίζεται ως

$$C_0 = \frac{U_f \cdot d}{|d|^2 \Delta t} \quad (3.34)$$

όπου  $U_f$  είναι μια χαρακτηριστική ταχύτητα, π.χ. ταχύτητα ενός μετώπου κυμάτων, η ταχύτητα της ροής.

**Crack Nicholson** χρησιμοποιεί τον κανόνα του τραπεζίου για να διακριτοποιήσει τους χωρικούς όρους, με αυτόν τον τρόπο λαμβάνεται ένας μέσος όρος των τιμών του  $\phi^n$  και παλαιών τιμών,  $\phi^0$ .

$$\int_t^{t+\Delta t} A^* \phi dt = A^* \frac{(\phi^n + \phi^0)}{2} \Delta t \quad (3.35)$$

Είναι δεύτερης τάξης ακρίβεια στο χρόνο.

### 3.6 Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες απαιτούνται για να ολοκληρώσουν το πρόβλημα που επιθυμούμε να λύσουμε. Επομένως πρέπει να διευκρινίσουμε τις οριακές συνθήκες σε όλες τις οριακές επιφάνειες. Οι οριακές συνθήκες μπορούν να διαιρεθούν σε 2 τύπους:

**Dirichlet:** ορίζει την τιμή της εξαρτώμενης μεταβλητής στο όριο και επομένως καλείται “fixed value”.

**Neumann:** ορίζει την κλίση της μεταβλητής συνήθως στο όριο και επομένως καλείται “fixed gradient”.

Όταν διακριτοποιούμε τους όρους που περιλαμβάνουν το άθροισμα πάνω στις επιφάνειες  $\sum_f$ , πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν μία από τις επιφάνειες είναι οριακή επιφάνεια. Σύμφωνα με τις οριακές συνθήκες έχουμε:

**Fixed Value:** όπου θέτουμε μια σταθερή τιμή στο όριο  $\phi_b$

- Μπορούμε απλά να αντικαταστήσουμε το  $\phi_b$  στις περιπτώσεις όπου η διακριτοποίηση απαιτεί την τιμή σε μία οριακή επιφάνεια  $\phi_f$ , π.χ. στον όρο μεταφοράς στην εξίσωση 2.16.

- Σε όρους όπου η κλίση της επιφάνειας  $(\nabla\phi)_f$  απαιτείται, π.χ. Λαπλασιανή, αυτό υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την τιμή στην οριακή επιφάνεια και την τιμή στο κέντρο των κελιών,

$$S_f \cdot (\nabla\phi)_f = |S_f| \frac{\phi_b - \phi_p}{|d|} \quad (3.36)$$

**Fixed gradient:** όπου κλίση της ποσότητας στην οριακή επιφάνεια  $g_b$  είναι δεδομένη, εκεί έχουμε τον υπολογισμό των:

$$g_b = \left( \frac{S}{|S|} \cdot \nabla \phi \right)_f \quad (3.37)$$

- Όταν απαιτείται διακριτοποίηση της τιμής σε μία οριακή επιφάνεια πρέπει να παρεμβάλουμε την τιμή στο κέντρο του κελιού στο όριο με

$$\phi_f = \phi_p + d \cdot (\nabla \phi)_f = \phi_p + |d| g_b \quad (3.38)$$

- Το  $\phi_b$  μπορεί να αντικατασταθεί άμεσα σε περιπτώσεις όπου απαιτείται η διακριτοποίηση για να υπολογιστεί η κλίση επιφανειών,

$$S_f \cdot (\nabla \phi)_f = |S_f| g_b \quad (3.39)$$

### 3.6.1 Φυσικές οριακές συνθήκες

Ο καθορισμός των οριακών συνθηκών, αφορά συνήθως την ερμηνεία της αληθινής συμπεριφοράς. Οι πραγματικές οριακές συνθήκες καθορίζονται γενικά από μερικές φυσικές ιδιότητες παρά από την αριθμητική περιγραφή όπως περιγράφονται στις προηγούμενες παραγράφους. Στην ασυμπιεστή ροή ρευστού υπάρχουν τα ακόλουθα φυσικά όρια

**Είσοδος:** Το πεδίο ταχύτητας στην είσοδο δίνεται και, με συνέπεια, η οριακή συνθήκη της κλίσης πίεσης είναι μηδέν. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα καθορισμού μιας τυρβώδους εισόδου, όπου εκτός από τη μέση τιμή δίνουμε και τις διαταραχές.

**Έξοδος:** Το πεδίο πίεσης στην έξοδο δίνεται και είναι μηδέν η οριακή συνθήκη της κλίσης της ταχύτητας.

**No-slip impermeable wall:** Η ταχύτητα του ρευστού είναι ίση με αυτή του τοίχου, δηλαδή ορίζουμε μία συνθήκη σταθερής τιμής. Η κλίση της πίεσης καθορίζεται μηδέν δεδομένου ότι η ροή μέσω του τοίχου είναι μηδέν.

Σε ένα πρόβλημα του οποίου η λύση του πεδίου και οι οριακές συνθήκες είναι συμμετρικές σε ένα επίπεδο, πρέπει μόνο να διαμορφώσουμε το μισό πεδίο στη μια πλευρά του επιπέδου συμμετρίας. Οι οριακές συνθήκες του επιπέδου πρέπει να καθοριστούν σύμφωνα με το επίπεδο συμμετρίας.

**Επίπεδο συμμετρίας:** Οι συνθήκες στο επίπεδο συμμετρίας καθορίζονται από την κλίση του επιπέδου, συνήθως πρέπει να είναι μηδέν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΡΟΗ ΑΕΡΑ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΛΟΦΟ

#### 4.1 Εισαγωγή

Αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τις τρισδιάστατης ροής πάνω από ένα δυσδιάστατο λόφο. Μια περίπτωση έχει μελετηθεί, για να δώσει έμφαση στη συμπεριφορά της τυρβώδους ροής, με την κλίση του λόφου να είναι σταθερή. Στο τέλος πραγματοποιούμε σύγκριση μεταξύ των πειραματικών και αριθμητικών αποτελεσμάτων όπου φαίνεται να βρίσκονται σε καλή συμφωνία. Η αριθμητική προσομοίωση είναι βασισμένη στη λύση των εξισώσεων Navier-Stoke, με το μοντέλο τύρβης των μεγάλων δινών. Το πραγματοποιημένο αριθμητικό πλέγμα είναι και στις δύο περιπτώσεις μη-ορθογώνιο, ενώ στηρίζεται στη μέθοδο PISO.

#### 4.1.1 Περιγραφή του πειράματος

Τα πειραματικά αποτελέσματα προέρχονται από μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν σε μία ανοιχτή σήραγγα αέρα με το οριακό στρώμα δοκιμαστικό τμήμα να έχει πλάτος, ύψος και μήκος από 1.2, 1.2 και 6 μέτρων, αντίστοιχα. Το ουδέτερο διαστρωματοποιημένο οριακό στρώμα αναπτύσσεται χρησιμοποιώντας αντλίες δινών τριγωνικού κωνικού τύπου με ίσα διαστήματα ύψους 0.25 m, και τεχνητή χλόη ύψους 5 mm. Σε αυτά τα πειράματα, ένα πλήρως ανεπτυγμένο οριακό στρώμα τύρβης 0.25 m ύψους παράγεται, και έχει μια χαρακτηριστική κατανομή ταχύτητας αέρα.

Η μορφή του λόφου περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση

$$Z = \frac{H}{2} * \left\{ 1 + \cos \left[ \left( \frac{\pi}{2} \right) * \left( \frac{x}{L_1} \right) \right] \right\} \quad (4.1)$$

όπου:

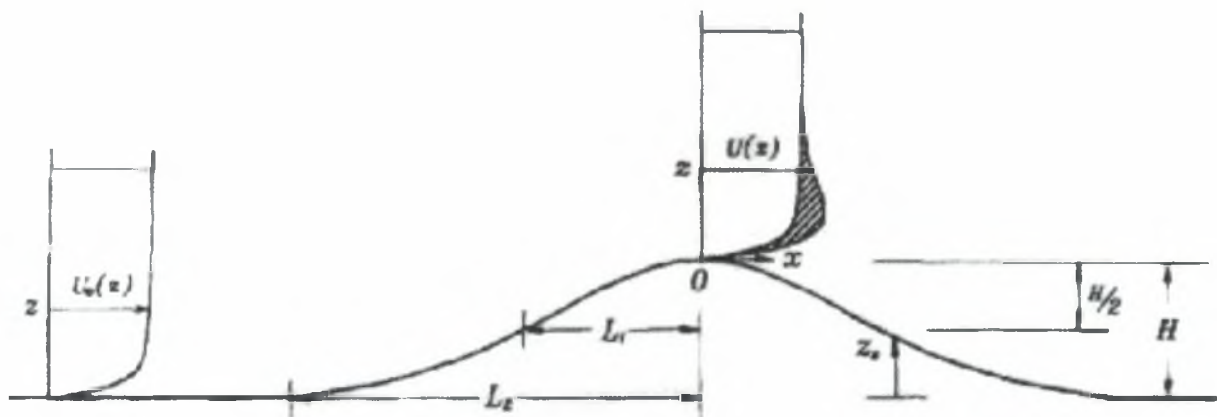
$H$  [m] είναι το ύψος του λόφου

$L_1$  [m] είναι το μισό μήκος του λόφου

Η κλίση του λόφου  $S$  ορίζεται ως η μέση κλίση για το κορυφαίο μισό του λόφου προς τα πάνω του λόφου, μέσω της εξίσωσης

$$S = \frac{H}{2 * L_1} \quad (4.2)$$

Το μοντέλο ροής που επιλύθηκε έχει κλίση λόφου 0,5 και για ύψος λόφων 4 cm. Ένα σκίτσο του λόφου που μελετήθηκε παρουσιάζεται στο ακόλουθο Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1: Πεδίο της ροής αέρα πάνω από λόφο.

Τα πειραματικά στοιχεία, σχετικά με τη ροή σαν είσοδο της σήραγγας αέρα, έχουν προσεγγιστεί με την ακόλουθη λογαριθμική εξίσωση

$$U_0(z) = \frac{U_*}{k} * \log\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (4.3)$$

με:

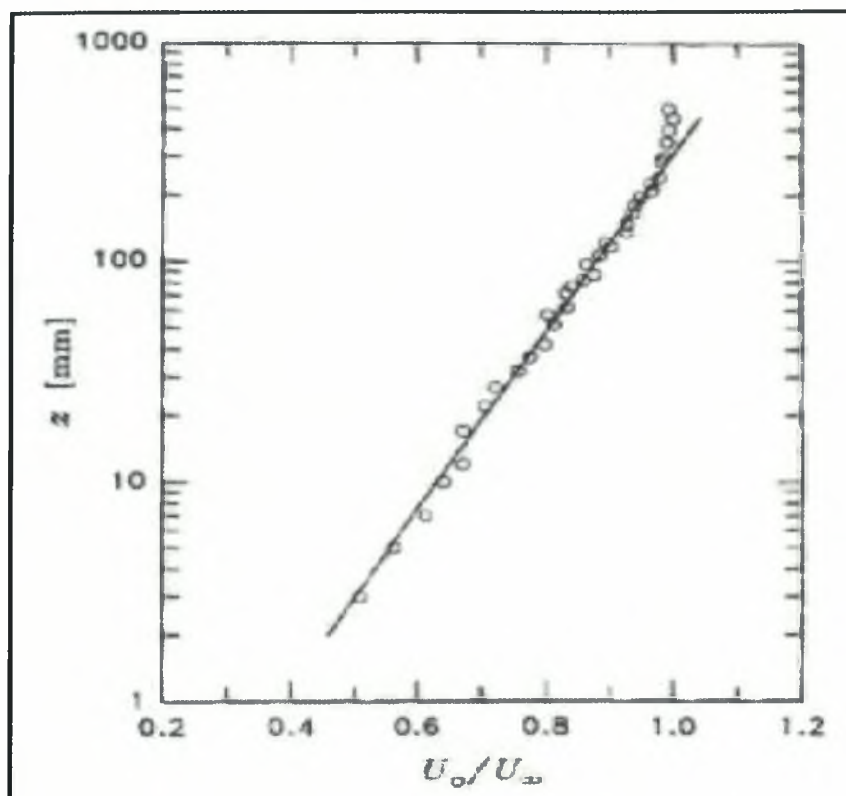
$$U_* = 0.33 \text{ m/s}$$

$$Z_0 = 0.05 \text{ mm}$$



$K=0.41$  σταθερά του Von Karman

Το ακόλουθο Σχήμα 4.2 παρουσιάζει την παρεμβολή του σχεδιαγράμματος ταχύτητας.



Σχήμα 4.2 Προφίλ μέσης ταχύτητας πάνω σε μία επίπεδη επιφάνεια στην θέση εισόδου.

## 4.2 Κατάστρωση του προβλήματος

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζεται η κατάστρωση του προβλήματος. Αρχικά δημιουργούμε το πλέγμα, στη συνέχεια καθορίζουμε τις οριακές συνθήκες και τρέχουμε το πρόβλημα στο πρόγραμμα προσομοίωσης OpenFOAM. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο πρόγραμμα γραφικών Paraview.

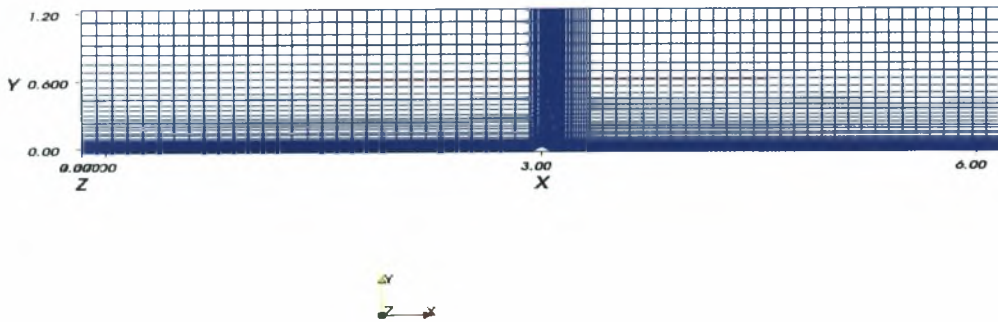
## 4.2.1 Υπολογιστικό πεδίο – πλέγμα

Αρχικά εισάγουμε στο πρόγραμμα OpenFOAM τις συντεταγμένες των σημείων που ορίζουν το πεδίο μελέτης μας. Τα σημεία όπως φαίνονται παρακάτω είναι 0 έως 35.

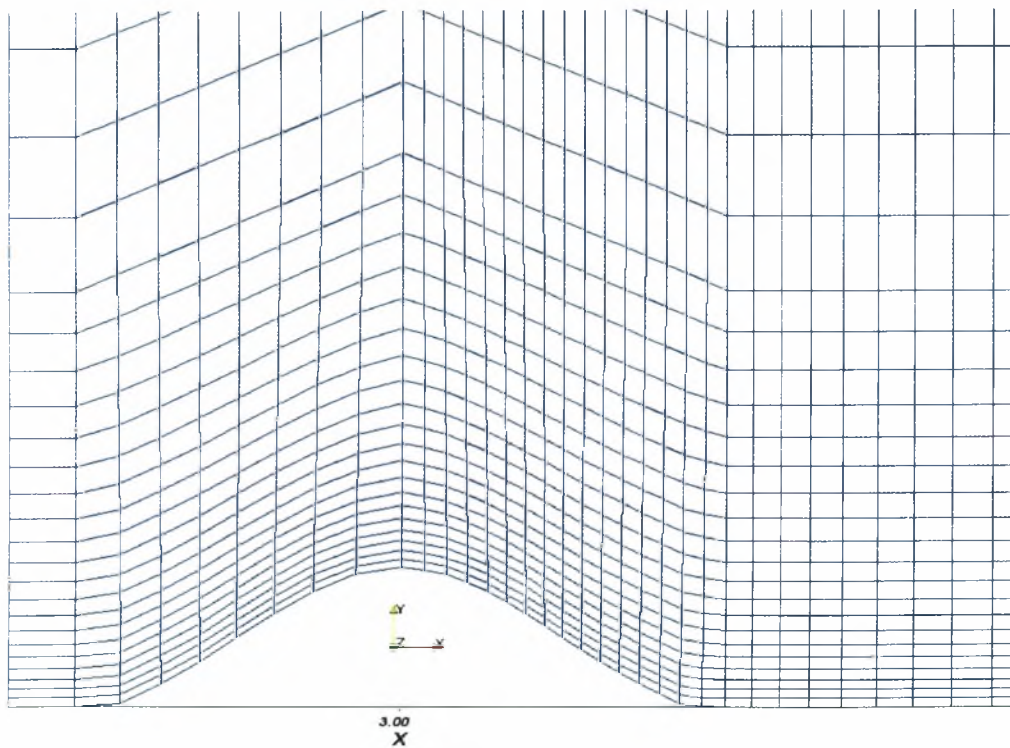
```
/*-----*- C++ -*-----*\n|=====  
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |  
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 1.4.1 |  
| \\ / A n d | Web: http://www.openfoam.org |  
| \\ M a n i p u l a t i o n | |  
\\*-----*/\n\n// FoamX Case Dictionary.\n\nFoamFile\n{\n  version 2.0;\n  format ascii;\n\n  root "/home/sarris/Anatoly";\n  case "newhill";\n  instance "constant/polyMesh";\n  local "";\n\n  class dictionary;\n  object blockMeshDict;\n}\n\n// ***** //\n\narguments "/home/sarris/Anatoly/newhill" off;\n\nconvertToMeters 1;\n\nvertices\n(\n  (0 0 0)\n  (2.92 0 0)\n  (3 0.04 0)\n  (3.08 0 0)\n  (3.32 0 0)\n  (6 0 0)\n  (0 0.12 0)
```

(2.92 0.12 0)  
(3 0.16 0)  
(3.08 0.12 0)  
(3.32 0.12 0)  
(6 0.12 0)  
(0 1.2 0)  
(2.92 1.2 0)  
(3 1.2 0)  
(3.08 1.2 0)  
(3.32 1.2 0)  
(6 1.2 0)  
(0 0 1.2)  
(2.92 0 1.2)  
(3 0.04 1.2)  
(3.08 0 1.2)  
(3.32 0 1.2)  
(6 0 1.2)  
(0 0.12 1.2)  
(2.92 0.12 1.2)  
(3 0.16 1.2)  
(3.08 0.12 1.2)  
(3.32 0.12 1.2)  
(6 0.12 1.2)  
(0 1.2 1.2)  
(2.92 1.2 1.2)  
(3 1.2 1.2)  
(3.08 1.2 1.2)  
(3.32 1.2 1.2)  
(6 1.2 1.2)

);



Σχήμα 4.3. κατανομή πλέγματος



Σχήμα 4.4 Λεπτομέρεια του πλέγματος γύρω από τον λόφο

Στη συνέχεια ορίζουμε τα μπλοκς που υποδιαιρείται το πεδίο ροής τα οποία είναι 9 και για κάθε μπλοκ δημιουργούμε ένα πλέγμα αναλόγως με τη θέση του στο πεδίο μελέτης μας, για παράδειγμα ο αριθμός των κελιών κοντά στο λόφο είναι μεγαλύτερος σε σχέση με τον αριθμό των κελιών στην είσοδο ή στην έξοδο του πεδίου. Τα μπλοκς και ο αριθμός των κελιών για κάθε μπλοκ αντίστοιχα φαίνονται παρακάτω. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο συνολικός αριθμός των κελιών είναι 104x40x20.

```
blocks
(
  hex (0 1 7 6 18 19 25 24) (30 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (1 2 8 7 19 20 26 25) (8 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (2 3 9 8 20 21 27 26) (16 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (3 4 10 9 21 22 28 27) (20 20 20) simpleGrading (3 5 1)
  hex (4 5 11 10 22 23 29 28) (30 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (6 7 13 12 24 25 31 30) (30 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (7 8 14 13 25 26 32 31) (8 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (8 9 15 14 26 27 33 32) (16 20 20) simpleGrading (1 5 1)
  hex (9 10 16 15 27 28 34 33) (20 20 20) simpleGrading (3 5 1)
  hex (10 11 17 16 28 29 35 34) (30 20 20) simpleGrading (1 5 1)
);
```

Επόμενο βήμα είναι η δημιουργία της καμπύλης του λόφου, για να επιτευχθεί αυτό επιλέξαμε τη μέθοδο polyLine και εισάγαμε τα σημεία από τα οποία περνάει ο λόφος.

```
edges
(
  polyLine 1 2
  (
    (2.92 0 0)
    (2.93 0.0001533 0)
    (2.94 0.005875 0)
    (2.95 0.012365 0)
    (2.96 0.020016 0)
    (2.97 0.027665 0)
    (2.98 0.034148 0)
    (2.99 0.038479 0)
    (3 0.04 0)
  )
  polyLine 19 20
  (
```

```

(2.92 0 1.2)
(2.93 0.0001533 1.2)
(2.94 0.005875 1.2)
(2.95 0.012365 1.2)
(2.96 0.020016 1.2)
(2.97 0.027665 1.2)
(2.98 0.034148 1.2)
(2.99 0.038479 1.2)
(3 0.04 1.2)
)
polyLine 2 3
(
(3 0.04 0)
(3.01 0.038479 0)
(3.02 0.034148 0)
(3.03 0.027665 0)
(3.04 0.020016 0)
(3.05 0.012365 0)
(3.06 0.005875 0)
(3.07 0.0001533 0)
(3.08 0 0)
)
polyLine 20 21
(
(3 0.04 1.2)
(3.01 0.038479 1.2)
(3.02 0.034148 1.2)
(3.03 0.027665 1.2)
(3.04 0.020016 1.2)
(3.05 0.012365 1.2)
(3.06 0.005875 1.2)
(3.07 0.0001533 1.2)
(3.08 0 1.2)
)
);

```

Έπειτα δημιουργήσαμε τις διεπιφάνειες του πλέγματος όπως παραθέτονται παρακάτω

```

patches
(
cyclic frontBack1
(
(0 1 7 6)

```

```

(18 19 25 24)
)
cyclic frontBack2
(
(1 2 8 7)
(19 20 26 25)
)
cyclic frontBack3
(
(2 3 9 8)
(20 21 27 26)
)
cyclic frontBack4
(
(3 4 10 9)
(21 22 28 27)
)
cyclic frontBack5
(
(4 5 11 10)
(22 23 29 28)
)
cyclic frontBack6
(
(6 7 13 12)
(24 25 31 30)
)
cyclic frontBack7
(
(7 8 14 13)
(25 26 32 31)
)
cyclic frontBack8
(
(8 9 15 14)
(26 27 33 32)
)
cyclic frontBack9
(
(9 10 16 15)
(27 28 34 33)
)
cyclic frontBack10
(
(10 11 17 16)
(28 29 35 34)
)

```

```

)
wall wallFixedwall
(
(0 1 19 18)
(1 2 20 19)
(2 3 21 20)
(3 4 22 21)
(4 5 23 22)
)
patch inlet
(
(0 6 24 18)
(6 12 30 24)
)
patch outlet
(
(5 11 29 23)
(11 17 35 29)
)
patch atmosphere
(
(12 13 31 30)
(13 14 32 31)
(14 15 33 32)
(15 16 34 33)
(16 17 35 34)
)
);
// ..... //

```

## 4.2.2 Οριακές συνθήκες

Ορίζουμε την διεπιφάνεια εισόδου σαν είσοδο, την διεπιφάνεια εξόδου σαν έξοδο, τις πλευρικές διεπιφάνειες ως κυκλικές, την κάτω διεπιφάνεια ως τοίχο και τέλος την πάνω διεπιφάνεια σαν επίπεδο συμμετρίας. Εισάγουμε ταχύτητα στην διεύθυνση x στην διεπιφάνεια εισόδου ίση με 7 m/sec. Ο αριθμός Reynolds, που καθορίζεται από τον τύπο

$$Re = \frac{d|U|}{\nu}$$



όπου  $d$  και  $|U|$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος και η ταχύτητα αντίστοιχα και  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες. Ο αριθμός Reynolds λαμβάνεται ίσος με  $1,87 \times 10^4$ . Το ιξώδες στην περίπτωση μας ισούται με  $1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}^{-1}$  και  $d=0.04$  είναι το ύψος του λόφου.

### 4.2.3 Αρχείο Ελέγχου

Αρχικά θέτουμε την αρχή και το τέλος του χρόνου των υπολογισμών έτσι ώστε τα στατιστικά της τύρβης να συγκλίνουν. Το χρονικό βήμα των υπολογισμών λαμβάνεται σε σχέση με τον αριθμό Courant, ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$Co = \frac{\delta t |U|}{\delta x}$$

Όπου  $\delta t$  είναι το χρονικό βήμα,  $|U|$  είναι το μέγεθος της ταχύτητας διαμέσου ενός κελιού και  $\delta x$  είναι το μέγεθος του κελιού στην κατεύθυνση της ταχύτητας. Η ταχύτητα της ροής ποικίλει στο πεδίο και γι' αυτό πρέπει να διασφαλίσουμε ότι θα ισχύει παντού  $Co < 1$ . Γι' αυτό επιλέγουμε  $\delta t$  βασιζόμενο στην χειρότερη περίπτωση, που είναι όταν έχουμε τον μέγιστο αριθμό Courant, δηλαδή όταν έχουμε συνδυασμό μεγάλης ταχύτητας ροής και μικρού μεγέθους κελιού. Στην περίπτωση μας  $\delta t = 10^{-4} \text{ sec}$ .

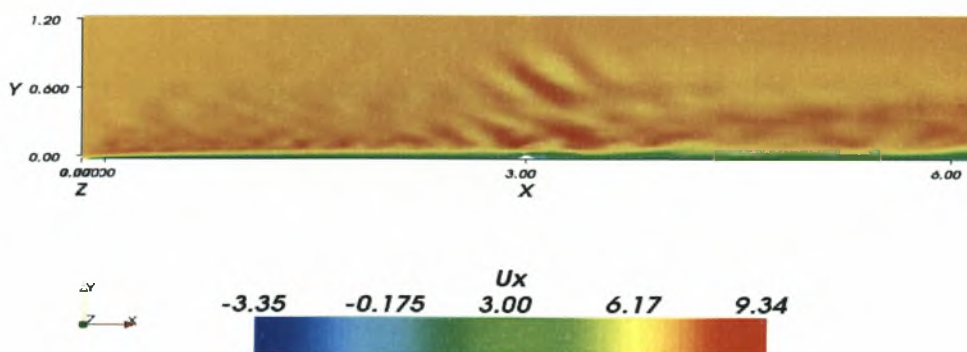
Στις προσομοιώσεις επιθυμούμε να αποθηκεύονται τα αποτελέσματα σε διάφορα χρονικά διαστήματα, έτσι ώστε αργότερα να μπορούμε να τα δούμε και να τα αξιολογήσουμε. Στην περίπτωση μας έγινε μία προσομοίωση, επιλύθηκε το πεδίο μέχρι χρόνο 16,5 sec που αντιστοιχεί σε 165000 χρονικά βήματα. Αποθηκεύτηκαν τα αρχεία κάθε 100 χρονικά βήματα άρα η επεξεργασία των στατιστικών της τύρβης έγινε γι' αυτά τα 1650 στιγμιότυπα. Ο συνολικός αποθηκευτικός χώρος που χρειάστηκε για την προσομοίωση ήταν πάνω από 50 Gb και η επίλυση έγινε σε τέσσερις επεξεργαστές.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

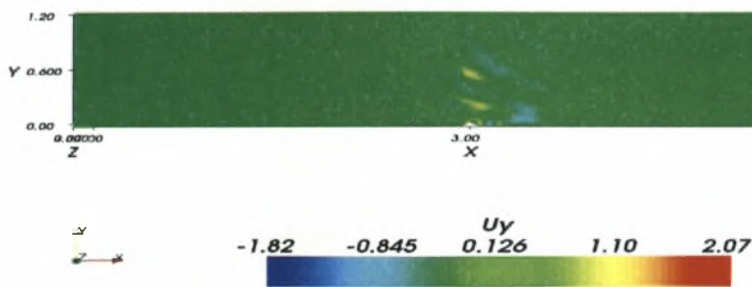
#### 5.1 Μέση ροή

Στο Σχήμα 5.1, όπως αναμενόταν φαίνεται ότι η ροή μας είναι τυρβώδης, γιατί τα σωματίδια του αέρα κινούνται σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις κατευθύνσεις. Οι διαταραχές αρχίζουν κοντά στην είσοδο του πεδίου μελέτης, ενώ κοντά στο λόφο γίνονται πολύ έντονες. Προς τη έξοδο, του πεδίου μελέτης, η ροή γίνεται περισσότερο ομογενής. Η ταχύτητα του αέρα, στην παράλληλη διεύθυνση με την διεύθυνση της ροής, παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές της πάνω από τον λόφο. Στο Σχήμα 5.4, παρατηρούμε την δημιουργία οριακού στρώματος κοντά στο οποίο η ταχύτητα μηδενίζεται ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτό, η ταχύτητα παίρνει μία σταθερή τιμή γύρω στα  $7\text{m/sec}^2$ .

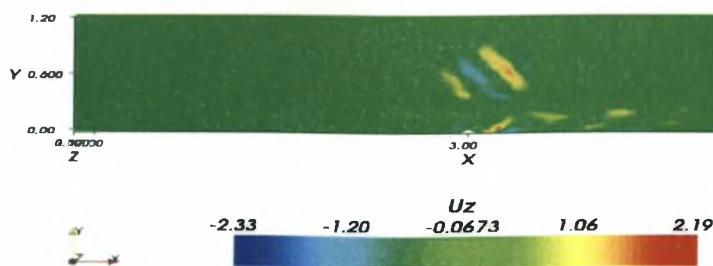


Σχήμα 5.1 Μέση τιμή της ταχύτητας  $u_x$

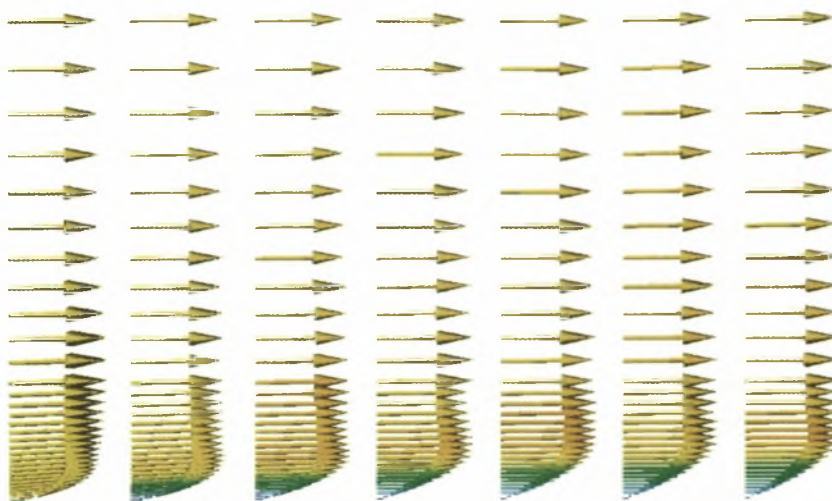
Η μέση τιμή της ταχύτητας  $u_y$ , στον άξονα  $y$  είναι περίπου μηδέν, αυτό γίνεται αντιληπτό και από το Σχήμα 5.2. οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές της ταχύτητας εμφανίζονται λίγο πριν, πάνω και πίσω από τον λόφο, το ίδιο παρατηρείται και στο Σχήμα 5.3, για την ταχύτητα  $u_z$ , στον άξονα  $z$ . Αυτό είναι λογικό επειδή η μεταφορά ορμής στη διεύθυνση της ροής μεταφέρεται και στις άλλες διευθύνσεις κυρίως λόγω της παρουσίας του λόφου.



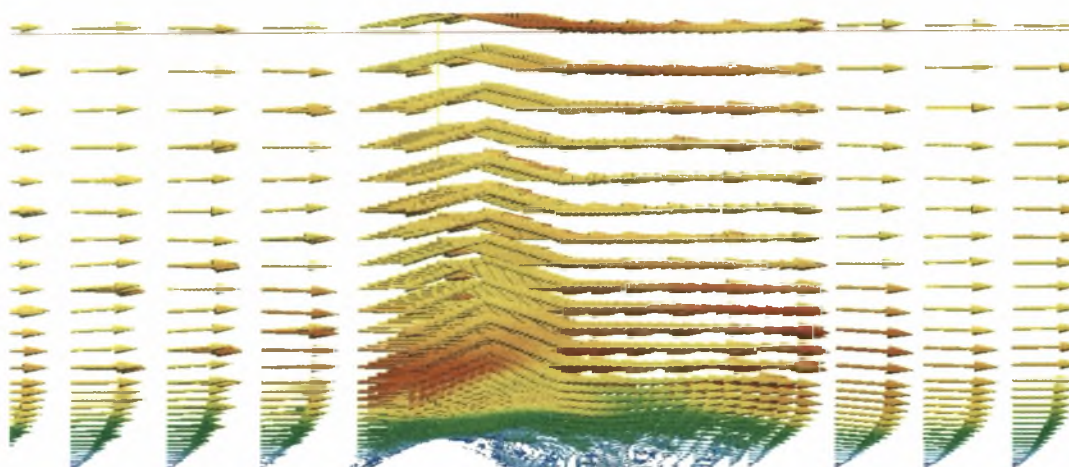
Σχήμα 5.2 Μέση τιμή της ταχύτητας  $u_y$



Σχήμα 5.3 Μέση τιμή της ταχύτητας  $u_z$

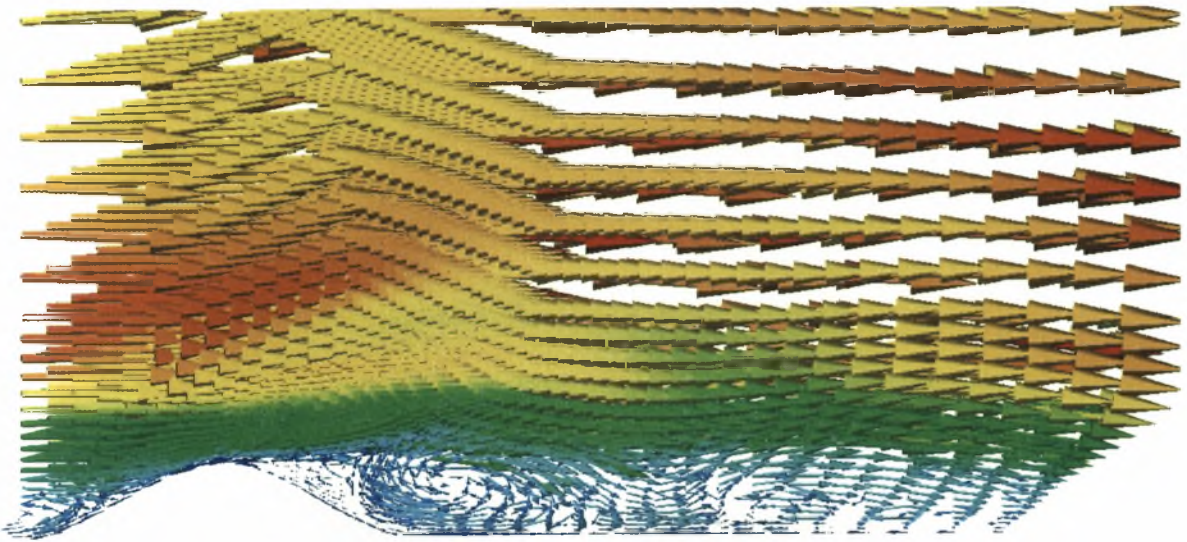


Σχήμα 5.4 Διανύσματα της μέση τιμή της ταχύτητας  $u_x$  στην είσοδο του πεδίου μελέτης



Σχήμα 5.5 Λεπτομέρεια ανακυκλοφορίας μπροστά από το λόφο

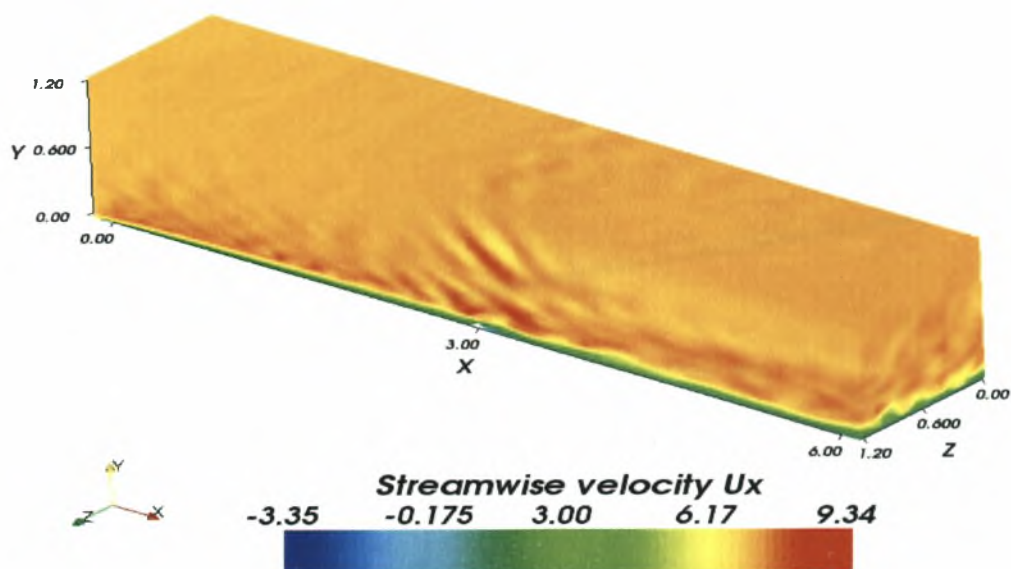
Η παρουσία του λόφου γίνεται αιτία για την δημιουργία ανακυκλοφορίας τόσο λίγο πριν τον λόφο όσο και μετά τον λόφο, που είναι και περισσότερο έντονη, το γεγονός αυτό είναι εμφανές στα Σχήματα 5.5 και 5.6.



Σχήμα 5.6 Λεπτομέρεια ανακυκλοφορίας πίσω από το λόφο

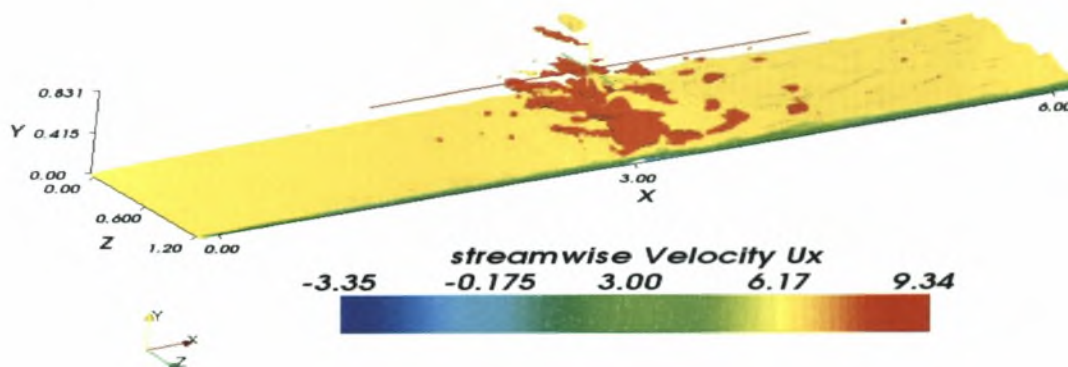
## 5.2 Τυρβώδες ροϊκό πεδίο

Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζεται η ταχύτητα στην διεύθυνση της ροής,  $u_x$ , όπως ήταν αναμενόμενο, παρατηρούμε ότι δημιουργείται οριακό στρώμα στην επιφάνεια του εδάφους, λόγω της ιξώδους φύσης του ρευστού.



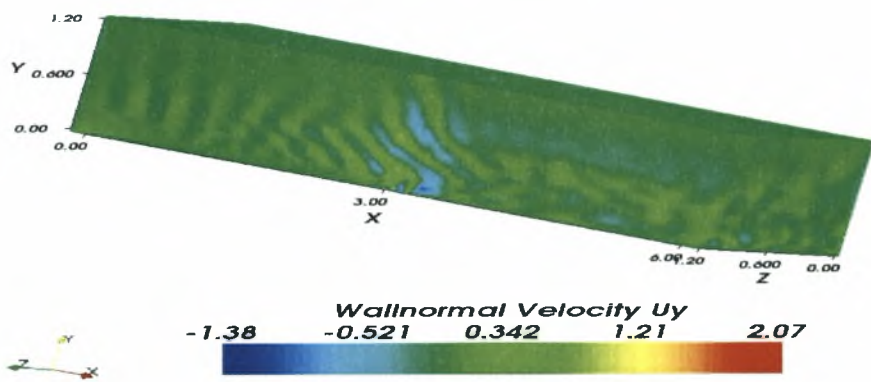
Σχήμα 5.7 Κατανομή της ταχύτητας  $u_x$

Στο σημείο  $x=3$ , δηλαδή πάνω στον λόφο, έχουμε μεγάλες ταχύτητες άρα δημιουργία μεγάλων δινών πάνω από τον λόφο, οι οποίες μετά το λόφο σπάνε σε άλλες μικρότερες. Είναι εμφανές ότι, η τύρβη δημιουργείται εξαιτίας του λόφου. Στη συνέχεια, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.8, οι δίνες πίσω από τον λόφο σπάνε και το οριακό στρώμα εξελίσσεται κανονικά.

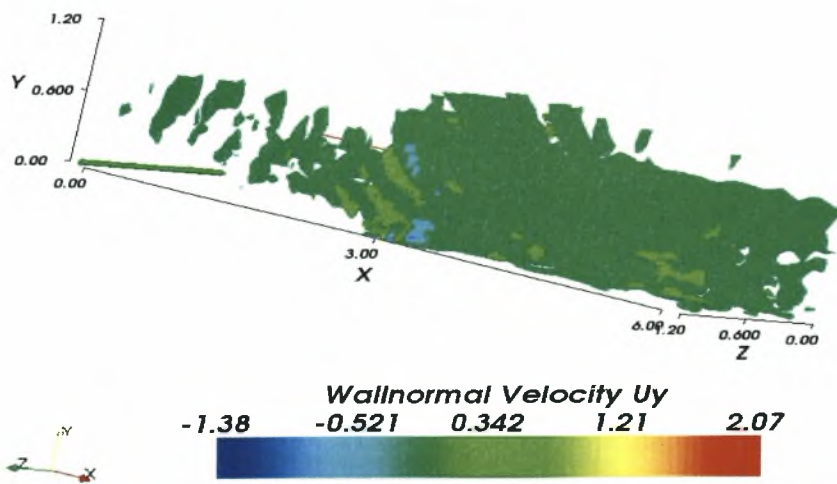


Σχήμα 5.8 Ισοϋψής της ταχύτητας  $u_x$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.9, η μέση τιμή της ταχύτητας  $u_y$  είναι περίπου μηδέν. Δημιουργούνται διαταραχές οι οποίες ξεκινάνε κοντά στην είσοδο, είναι κάθετες στο έδαφος και παράλληλες μεταξύ τους και αποκτούν μία κλίση πριν το λόφο. Οι μέγιστες και οι ελάχιστες τιμές παρουσιάζονται πάνω και πίσω από το λόφο. Η ροή στην έξοδο φαίνεται πιο ομογενής. Το στρωτό οριακό στρώμα δεν επιτρέπει ροή ορμής στην  $y$  διεύθυνση άρα οι ταχύτητες  $u_y$  κοντά στην είσοδο είναι μηδενικές (θεωρία οριακών στρωμάτων). Ο τοπικός αριθμός Reynolds αυξάνει με την απόσταση από την είσοδο και έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία των ισοϋψών της κάθετης ταχύτητας  $u_y$ , οι οποίες μεταφέρονται κατά τη διεύθυνση της ροής, η παρουσία του λόφου προκαλεί βίαιη μεταφορά ορμής από την  $x$  διεύθυνση στις υπόλοιπες διευθύνσεις. Με αποτέλεσμα, το πεδίο των ταχυτήτων στην διεύθυνση  $y$  που φαίνεται στο Σχήμα 5.10 μετά τον λόφο να φαίνεται έντονα τυρβώδης.



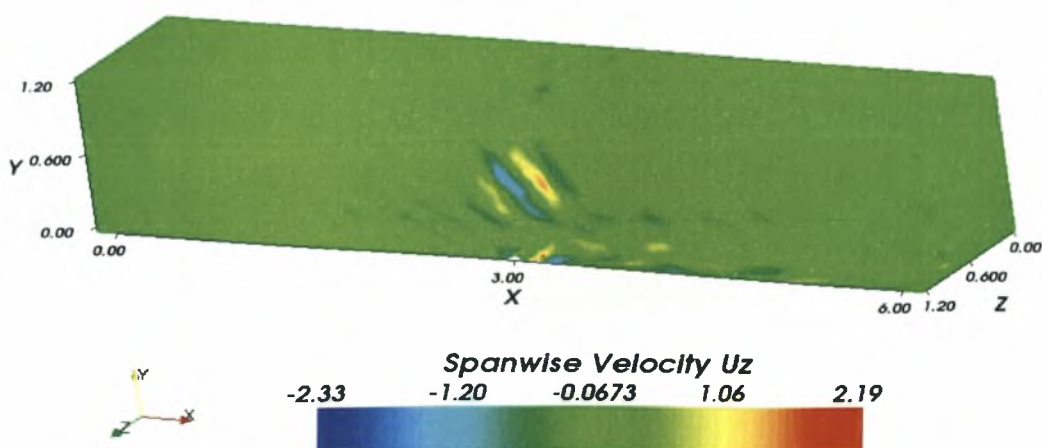
Σχήμα 5.9 Κατανομή της ταχύτητας  $u_y$



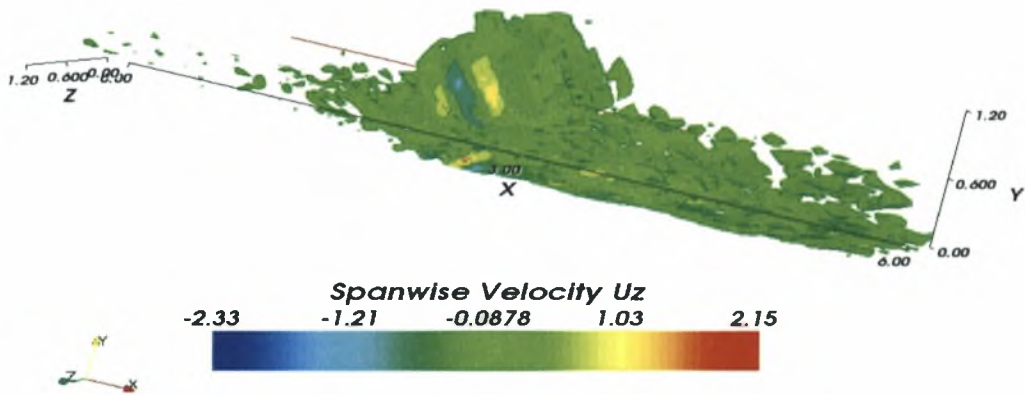
Σχήμα 5.10 Ισοϋψείς της ταχύτητας  $u_y$



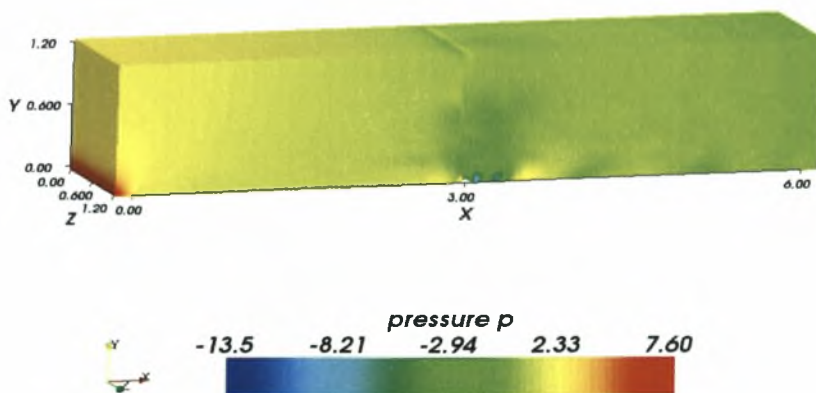
Για την ταχύτητα  $u_z$ , που βρίσκεται στο κάθετο επίπεδο με αυτό της ροής, η παρουσία του λόφου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.11, δημιουργεί τις σημαντικότερες διακυμάνσεις. Αυτό είναι λογικό, επειδή, όπως προαναφέραμε η μεταφορά ορμής από την διεύθυνση της ροής μεταφέρεται στις άλλες διευθύνσεις κυρίως λόγω της παρουσίας του λόφου. Οποσδήποτε μικρές διαταραχές υπάρχουν και πριν τον λόφο. Αυτό γίνεται εντονότερα αντιληπτό από τις ισοϋψείς γραμμές της ταχύτητας  $u_z$  που φαίνονται στο Σχήμα 5.12. Όπως είναι λογικό για οριακά στρώματα τα τρισδιάστατα φαινόμενα ενισχύονται ανάλογα με την απομάκρυνση από την είσοδο της ροής. Παρατηρούμε στο Σχήμα 5.12 ότι ο λόφος δημιουργεί έντονα τρισδιάστατα φαινόμενα, τα οποία εντοπίζονται κυρίως πάνω από τον λόφο και σε μια περιοχή πίσω από τον λόφο. Στο τέλος του πεδίου επίλυσης, η τύρβη στην ταχύτητα  $u_z$  και άρα και τα τρισδιάστατα φαινόμενα, φαίνεται να περιορίζονται άρα οι τρισδιάστατες διαταραχές που εισάγονται στη ροή εξαιτίας του λόφου έχουν τοπικό χαρακτήρα.



Σχήμα 5.11 Κατανομή της ταχύτητας  $u_z$

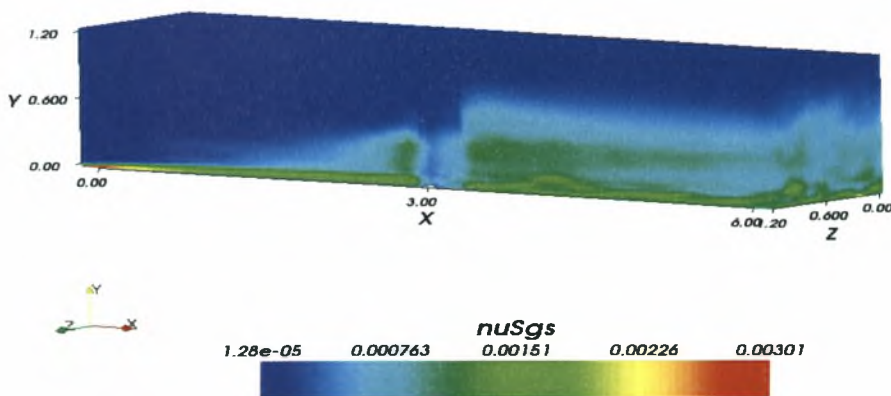


Σχήμα 5.12 Ισοϋψείς της ταχύτητας  $u_z$



Σχήμα 5.13 Κατανομή της πίεσης  $p$

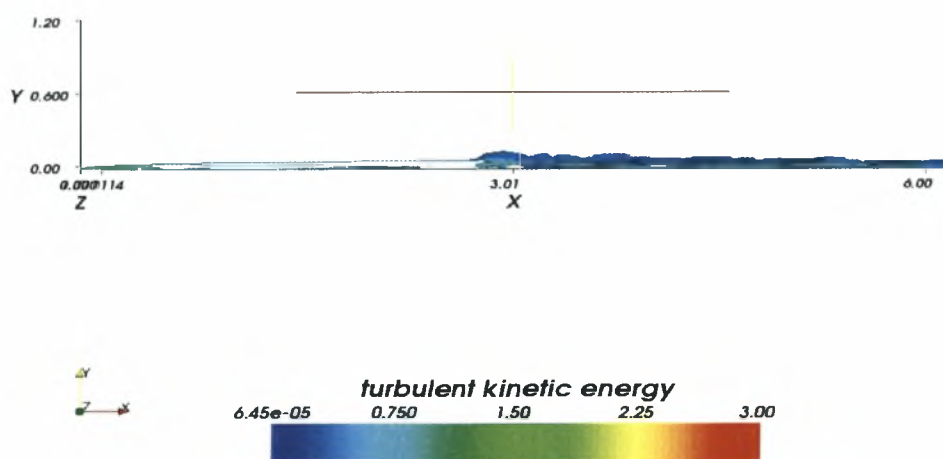
Το πεδίο της πίεσης ακολουθεί τα χαρακτηριστικά του πεδίου ταχύτητας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13, όπου οι περιοχές υποπίεσης δημιουργούνται πίσω από τον λόφο και ταξιδεύουν προς την έξοδο ακολουθώντας τις φουσαλίδες ανακυκλοφορίας που δημιουργούνται πίσω από το λόφο. Τα αποτελέσματα του συντελεστή eddy viscosity, όπως αναμενόταν, εξαρτώνται από το πλέγμα. Όσο πιο πυκνό είναι το πλέγμα τόσο λιγότερο δουλεύει το μοντέλο της τύρβης αυτό φαίνεται και στο σχήμα 5.14, πάνω στον λόφο που είναι πιο μπλε. Οι τιμές που το τυρβώδες ιξώδες είναι μεγαλύτερο, χρειάζονται πιο πυκνό πλέγμα.



Σχήμα 5.14 Συντελεστής eddy viscosity

Στο Σχήμα 5.15 που παραθέτετε παρακάτω παρουσιάζεται η στιγμιαία κατανομή της κινητικής ενέργειας,  $k_{sgs}$ , των δινών με μέγεθος μικρότερο από αυτό του πλέγματος. Δηλαδή είναι η στιγμιαία λύση της επιπλέον εξίσωσης μεταφοράς της ενέργειας  $k_{sgs}$  που επιλύουμε για το μοντέλο των μεγάλων δινών. Παρατηρούμε ότι, εκτός από την αρχή της ανάπτυξης του οριακού στρώματος, κοντά την είσοδο του πεδίου ροής, η κινητική ενέργεια

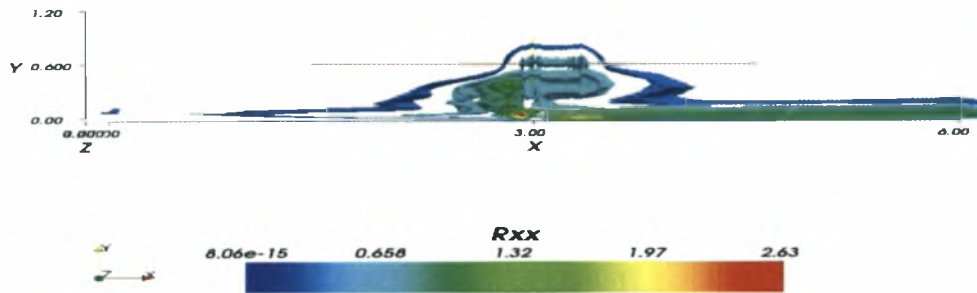
των δινών που είναι μικρότερες από το πλέγμα είναι μεγάλη κοντά στο έδαφος και στην περιοχή πάνω και πίσω από το λόφο. Η παρουσία του στερεού ορίου, όπως είναι γνωστό, ευνοεί την δημιουργία μικρών δινών που στην συνέχεια θα μεταφερθούν μέσα στην ροή και θα την διαταράξουν. Επειδή το πλέγμα δεν είναι πολύ πυκνό, σημαντικό ποσοστό των μικρών δινών κοντά στο στερεό όριο πρέπει να μοντελοποιηθεί από το μοντέλο τύρβης, άρα η κινητική ενέργεια των μικρών δινών είναι μεγαλύτερη εκεί. Η παρουσία του λόφου επίσης ευνοεί την μετατροπή των μεγάλων δινών σε μικρότερες δίνες και για τον λόγο αυτό το  $k_{sgs}$  είναι επίσης μεγάλο στην περιοχή του λόφου.



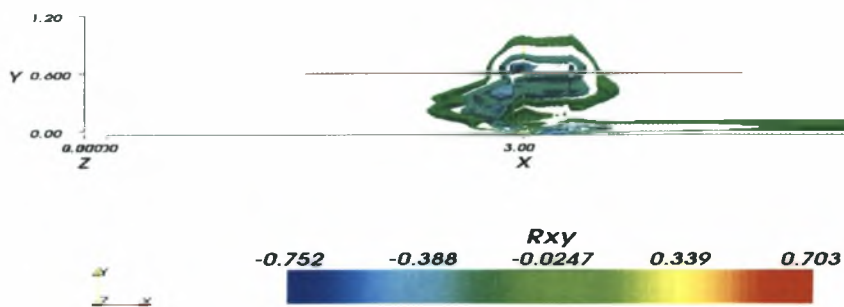
Σχήμα 5.15 Κινητική ενέργεια του μοντέλου τύρβης,  $k_{sgs}$

### 5.3 Τυρβώδεις Στατιστικά

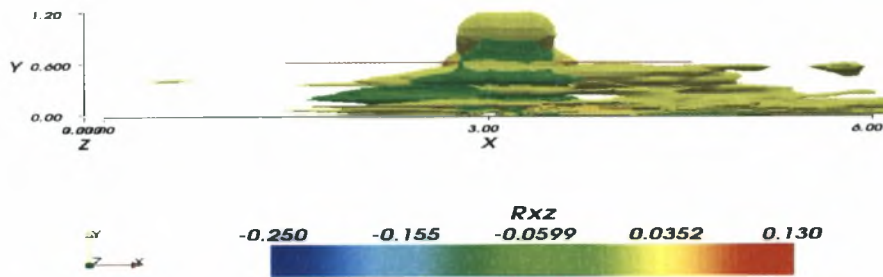
Από τα παρακάτω Σχήματα 5.16 έως 5.24 προκύπτει ότι οι μεγαλύτερες τάσεις δηλαδή η μεγαλύτερη τύρβη είναι πάνω στο λόφο.



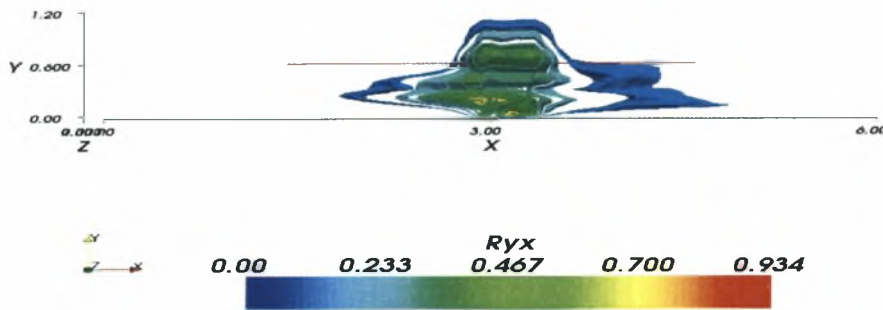
Σχήμα 5.16  $R_{xx}$



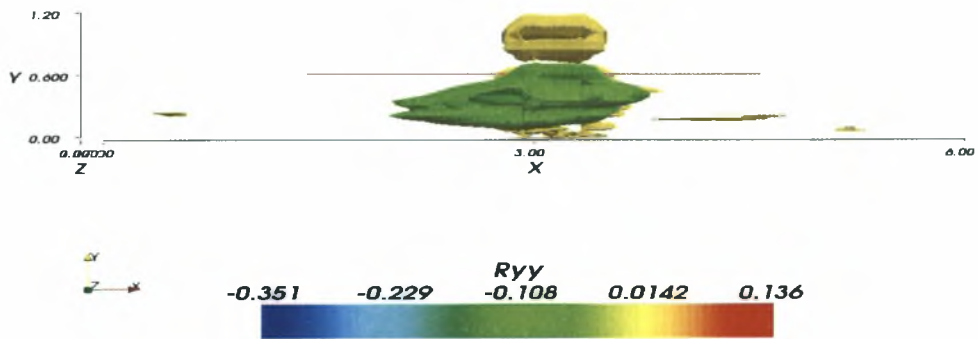
Σχήμα 5.17  $R_{xy}$



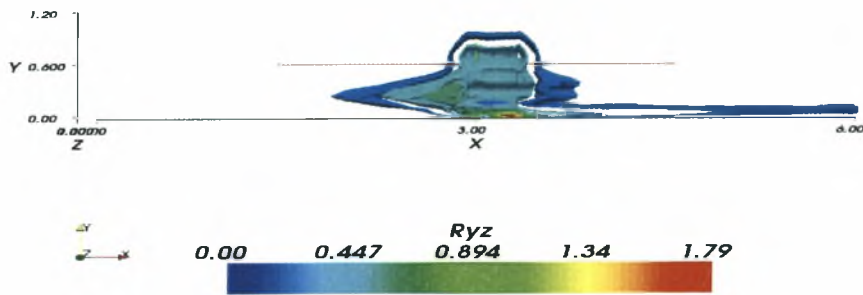
Σχήμα 5.18  $R_{xz}$



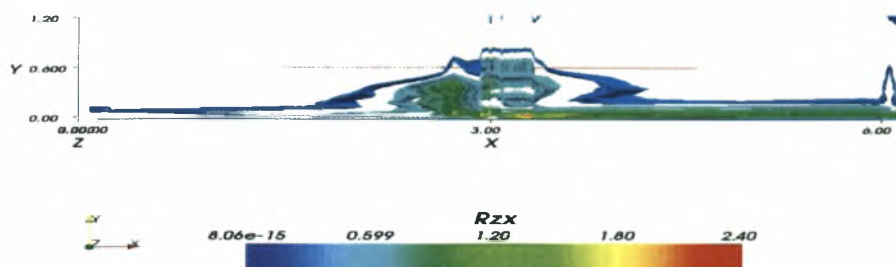
Σχήμα 5.19  $R_{yx}$



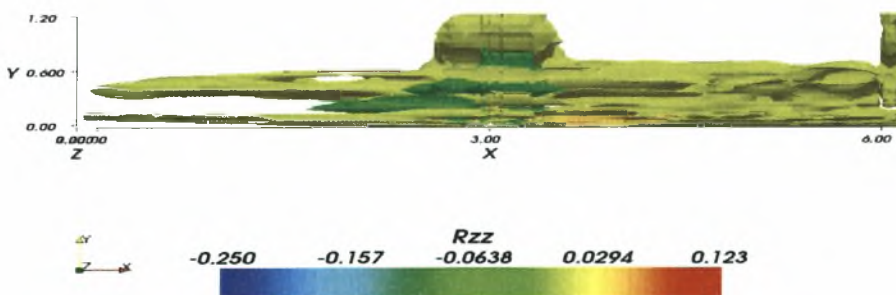
Σχήμα 5.20  $R_{yy}$



Σχήμα 5.21  $R_{yz}$

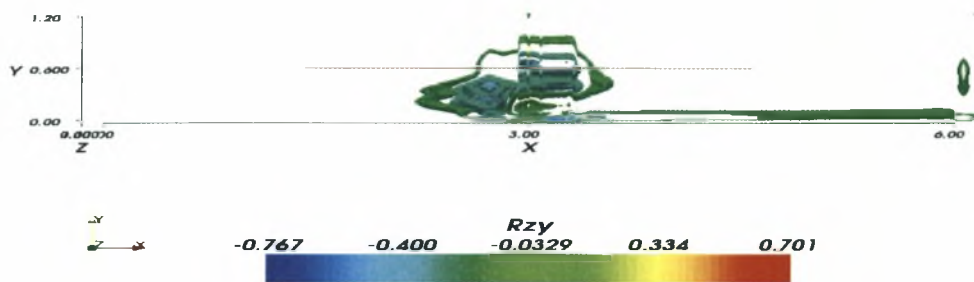


Σχήμα 5.22  $R_{zx}$



Σχήμα 5.23  $R_{zz}$





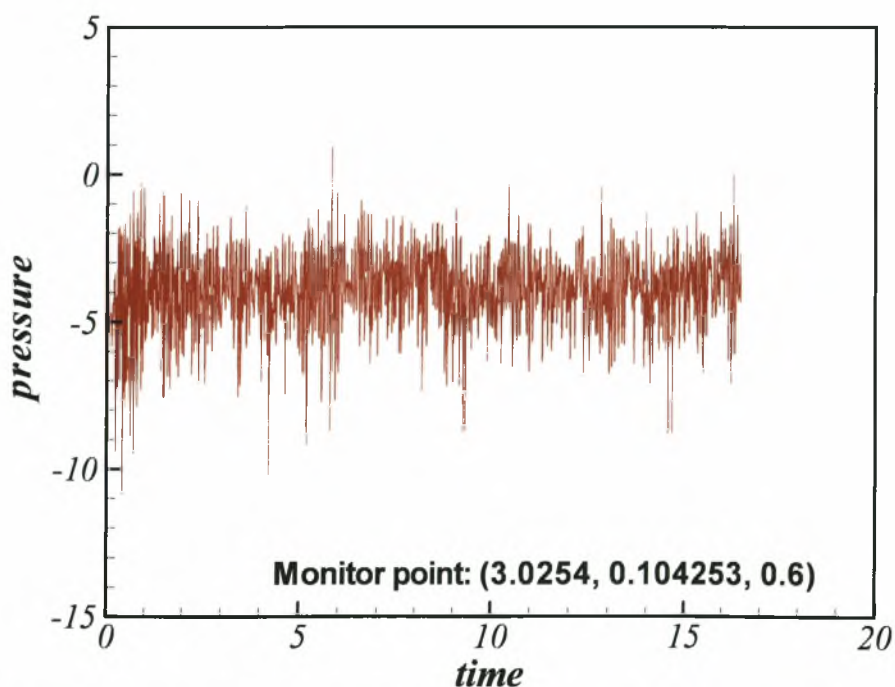
Σχήμα 5.24  $R_{zy}$

#### 5.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων με πειραματικά

Σκοπός της παρούσας Μεταπτυχιακής Διατριβής είναι η αξιολόγηση διαφόρων υπολογιστικών εργαλείων που είναι απαραίτητα για την μελέτη τρισδιάστατων ροών με τύρβη και με μη δομημένα πλέγματα όπως αυτά των ροών στην ατμόσφαιρα. Πιο συγκεκριμένα έγιναν προσομοιώσεις με τον κώδικα υπολογιστικής ρευστομηχανικής openFoam, η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έγινε με το paraview, μελετήθηκε η θεωρία των οριακών στρωμάτων και της τυρβώδους ροής σε λόφο ημιτονοειδούς γεωμετρίας με τη μέθοδο των μεγάλων δινών και με παράλληλους υπολογισμούς. Η μελέτη έδειξε ότι τα υπολογιστικά εργαλεία μπορούν να συνεργαστούν και να δώσουν ρεαλιστικά αποτελέσματα. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με τα πειραματικά αποτελέσματα των Kim et al. (1997) είναι ένα ακόμη απαραίτητο βήμα που πρέπει να ολοκληρωθεί. Λόγω έλλειψης χρόνου, η σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα δεν ήταν εφικτή και μετατέθηκε για την Διδακτορική διατριβή που θα ακολουθήσει.

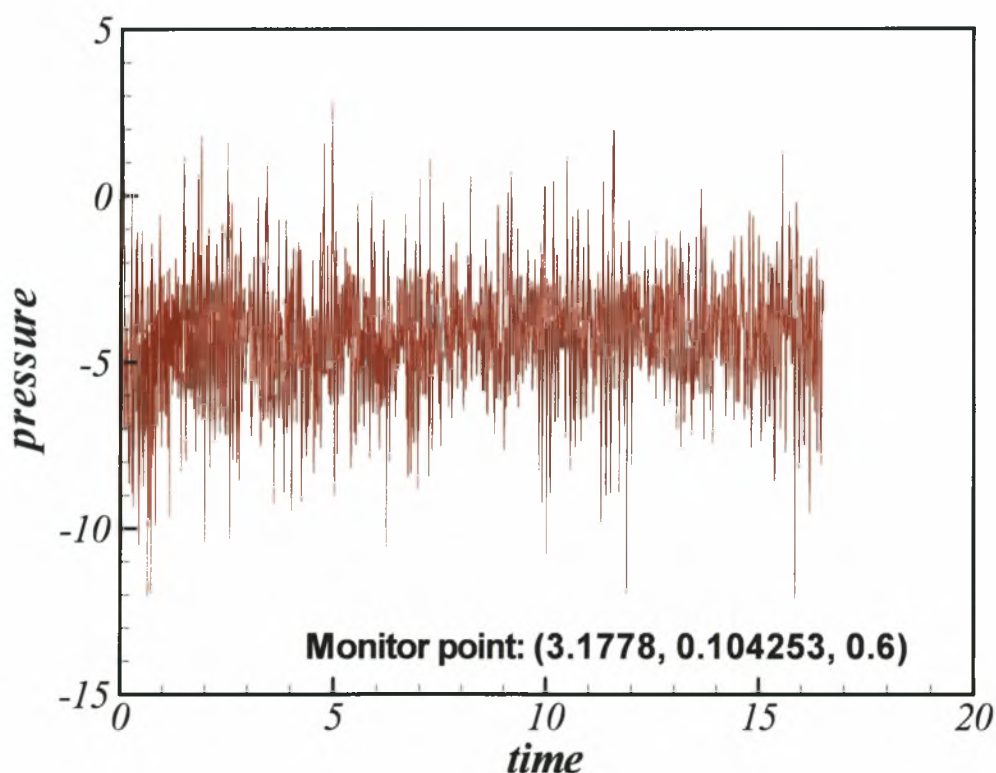
## 5.5 Χρονική εξάρτηση των μεταβλητών και φάσματα

Υπολογίσαμε τις τιμές της πίεσης και της ταχύτητας σε ορισμένα σταθερά σημεία του πεδίου, για τα 165000 χρονικά βήματα που διήρκησε η προσομοίωση. Από την επεξεργασία των τιμών της πίεσης και της ταχύτητας στα καθορισμένα σημεία προέκυψαν ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα. Τα παρακάτω σχήματα αναφέρονται στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6) που βρίσκεται πάνω στον λόφο και το σημείο (3.1778, 0.104253, 0.6) που βρίσκεται μετά τον λόφο. Παρατηρούμε ότι η διαφορά της πίεσης στον χρόνο κυμαίνεται γύρω στο -5 για τα δύο σημεία, αυτό σημαίνει ότι στα σημεία αυτά, έχουμε υποπίεση. Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι διακυμάνσεις της πίεσης του σημείου πάνω στον λόφο κυμαίνονται από περίπου -1 έως 6 ενώ για το σημείο μετά τον λόφο οι διακυμάνσεις κυμαίνονται από 0 έως -10, δηλαδή έχουμε μεγαλύτερο εύρος διακυμάνσεων γεγονός που σημαίνει ότι στο δεύτερο σημείο έχουμε μεγαλύτερη τιμή τύρβης, η οποία δημιουργείται λόγω του λόφου, Σχήματα 5.25 και 5.26.



Σχήμα 5.25 Μεταβολή της πίεσης στο χρόνο στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6)

Είναι εμφανές ότι οι διακυμάνσεις της ταχύτητας  $u$ , στο σημείο πάνω στον λόφο, είναι μεγαλύτερες από ότι στο σημείο πίσω από το λόφο όπου σε αυτό το σημείο οι διακυμάνσεις των άλλων ταχυτήτων ( $v$ ,  $w$ ) είναι μεγαλύτερες, άρα στην ουσία πρόκειται για μεταφορά της τύρβης από τη διεύθυνση της ροής  $u$  στην διεύθυνση κάθετα στη ροή  $w$  άρα ο λόφος έχει σαν αποτέλεσμα να ενισχύονται οι τρισδιάστατες διαταραχές, Σχήματα 5.27 και 5.28.



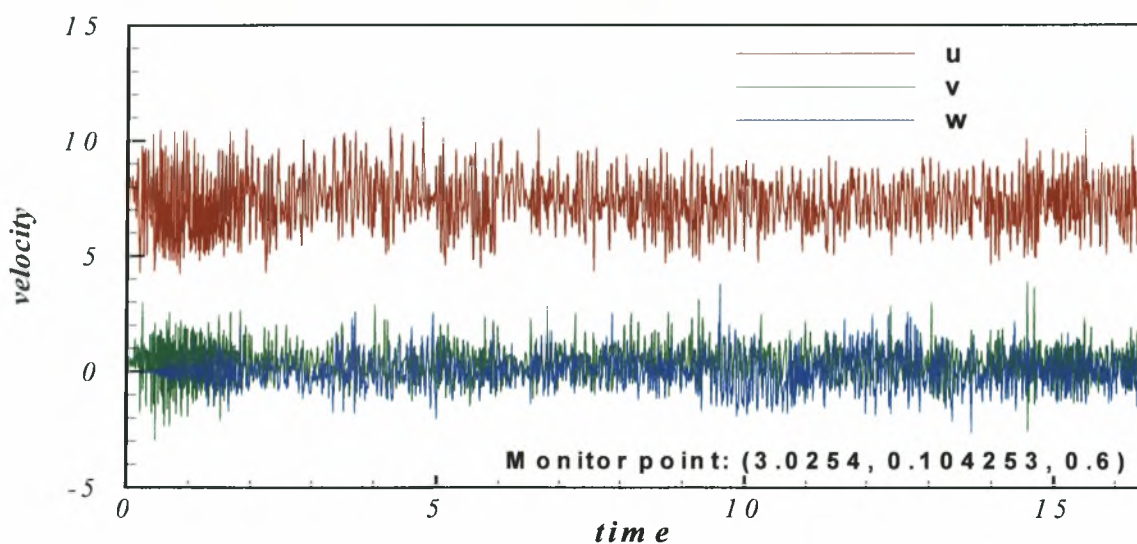
Σχήμα 5.26 Μεταβολή της πίεσης στο χρόνο στο σημείο (3.1778, 0.104253, 0.6)

Το φάσμα της πίεσης ακολουθεί κανονική κατανομή. Σε κάποια περιοχή του φάσματος έχουμε κλίση  $-5/3$ , που είναι αναμενόμενη από την θεωρία του Kolmogorov για τις τυρβώδης ροές, Σχήμα 5.29

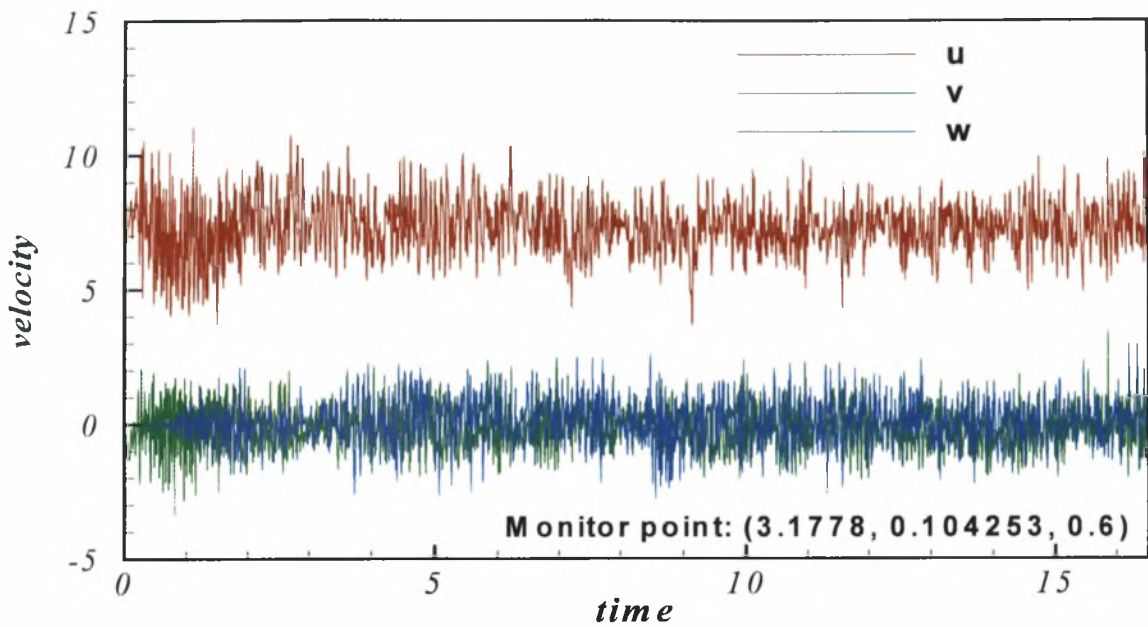
Στο φάσμα της ταχύτητας  $u$ , Σχήμα 5.30, φαίνεται ότι οι μεγάλες δίνες κατανέμονται στις συχνότητες 0,1 έως 10 περίπου. Επίσης μπορεί να εντοπιστεί σε κάποια περιοχή του φάσματος κλίση  $\eta -5/3$ . Η ουρά στο τέλος της γραφικής παράστασης, δεν αντιπροσωπεύει

φυσικές συχνότητες, μέχρι την συχνότητα  $\Delta t=1/400$  αφορά πραγματικές συχνότητες δινών. Ενώ, η μεγαλύτερη τιμή συχνοτήτων η οποία είναι περίπου 5000, είναι ανάλογη του χρονικού βήματος της προσομοίωσης.

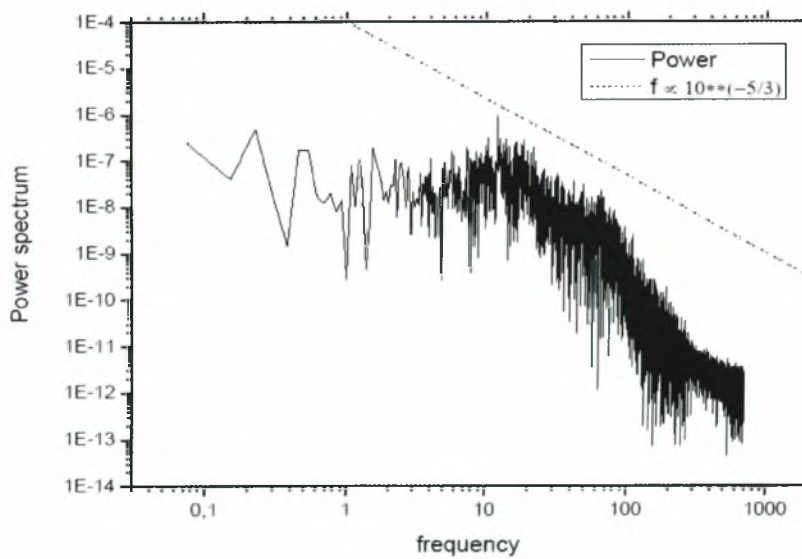
Το φάσμα της ταχύτητας  $v$  ακολουθεί τα ίδια χαρακτηριστικά με το φάσμα της ταχύτητας  $u$ , Σχήμα 5.30. Η κατανομή του φάσματος στην συνιστώσα  $w$  είναι παρόμοια της συνιστώσας  $v$ , Σχήμα 5.31. Το φάσμα της συνιστώσας  $v$  έχει μια μεγαλύτερη περιοχή κοντά στη θεωρία του Κολμογορον ως συνέπεια του πυκνότερου πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε σ' αυτή τη διεύθυνση.



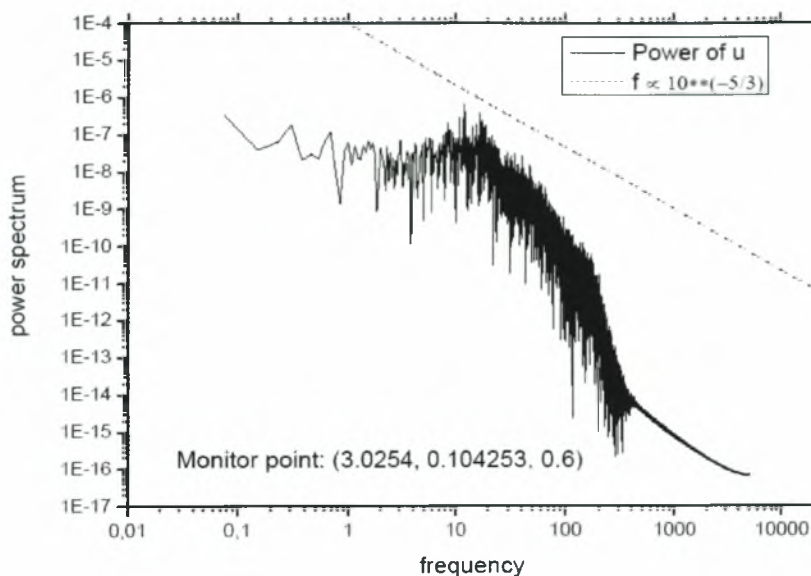
Σχήμα 5.27 Μεταβολή της ταχύτητας στο χρόνο στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6)



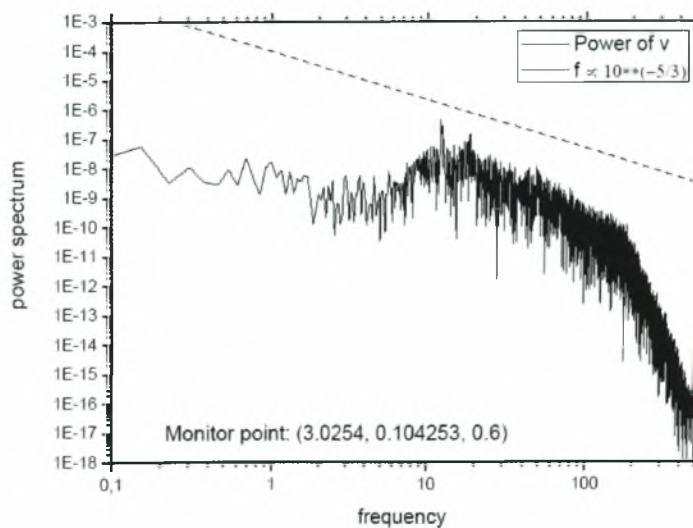
Σχήμα 5.28 Μεταβολή της ταχύτητας στο χρόνο στο σημείο (3.1778, 0.104253, 0.6)



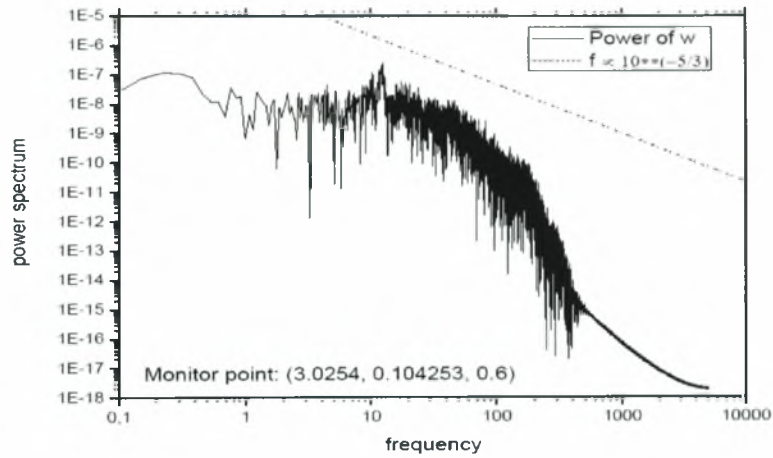
Σχήμα 5.29 Φάσμα της πίεσης  $p$  στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6)



Σχήμα 5.30 Φάσμα της ταχύτητας  $u$  στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6)



Σχήμα 5.31 Φάσμα της ταχύτητας  $v$  στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6)



Σχήμα 5.32 Φάσμα της ταχύτητας  $w$  στο σημείο (3.0254, 0.104253, 0.6)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ολοκληρώνοντας την αριθμητική προσομοίωση της τυρβώδους ροής σε λόφο με τη μέθοδο των μεγάλων δινών, όπως περιγράφηκε αναλυτικά στα προηγούμενα κεφαλαία της διατριβής, προκύπτουν ορισμένα πολύ βασικά συμπεράσματα:

1. Ο κώδικας openFoam χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά για την μελέτη της τυρβώδους ροής σε οριακό στρώμα και πάνω από λόφο, με τη μέθοδο των μεγάλων και έδωσε λογικά αποτελέσματα.
2. Οι παράλληλοι υπολογισμοί έχουν γίνει σε συστάδα υπολογιστών (cluster), και τα αποτελέσματα παράχθηκαν σε ικανοποιητικό χρόνο, οπότε μπορούμε να δουλέψουμε σε μεγαλύτερο πλέγμα, επομένως σε μεγαλύτερο πεδίο μελέτης και με πιο σύνθετη γεωμετρία.
3. Η επίδραση του λόφου στην τρισδιάστατη ροή φαίνεται σοβαρή.
4. Υψηλότερη τύρβη έχουμε στα σημεία που βρίσκονται στην περιοχή του λόφου, όπως ήταν αναμενόμενο.
5. Με τον κώδικα που χρησιμοποιήσαμε, μπορούμε να εντοπίσουμε τα σημεία με την υψηλότερη ένταση του αέρα, το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό γιατί έτσι μπορούμε να εγκαταστήσουμε στα σημεία αυτά ανεμογεννήτριες και να αξιοποιήσουμε τον αέρα, για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.
6. Ο κώδικας κοστίζει σε αποθηκευτικό χώρο του Η/Υ. Τα χρονικά βήματα μίας προσομοίωσης ήταν 165000, η αποθήκευση τους ορίστηκε κάθε 100 χρονικά βήματα, οπότε είχαμε 1650 αποθηκευμένα στιγμιότυπα. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να χρειαστεί συνολικός αποθηκευτικός χώρος πάνω από 50 Gb.

Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί πυκνότερο πλέγμα για την προσομοίωση, αυτό δεν έγινε διότι επιθυμούσαμε, μόνο, να εξετάσουμε αν ο κώδικας δουλεύει σωστά ούτως ώστε να τον



χρησιμοποιήσουμε, ως βάση, στην εκπόνηση διδακτορικής διατριβής, η οποία θα πραγματεύεται την μελέτη της ροής του αέρα σε διάφορα πεδία ροής, με σύνθετη γεωμετρία. Αξίζει να σημειωθεί ότι, η μελέτη του συγκεκριμένου θέματος είναι πολύ σημαντική, γιατί είναι ένα κατεξοχήν οικολογικό θέμα. Σκοπός της έρευνας είναι η καλή προσομοίωση του φυσικού περιβάλλοντος έτσι ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή αξιοποίηση της ενέργειας του αέρα, η οποία είναι μία από της παλιότερες πηγές ενέργειας. Με την πάροδο του χρόνου λιγοστεύουν οι συνηθισμένες πηγές ενέργειας όπως είναι το πετρέλαιο, το φυσικό αέριο και ο λιγνίτης, οι οποίες είναι και εξαιρετικά ρυπογόνες πηγές ενέργειας, οπότε επιβάλλεται να στραφούμε σε εναλλακτικές πηγές ενέργειας. Η χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας αποτελεί την μοναδική λύση για την σωτηρία του πλανήτη.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

**Bardina, J., Ferziger, J. H. & Reynolds, W. C. (1983).** Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows. Technical Report TF-19. Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California

**Cebeci T. and Bradshaw. P. (1977).** Momentum Transfer in Boundary Layers. Hemisphere. Publishing Corporation, New York.

**Germano, M., Piomelli, U., Moin, P. & Cabot, W. H. (1991).** A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. Physics of Fluids 3 (7), pp. 1760-1765

**Grant, A.L.M.** Observations of boundary layer structure made during the 1981 KONTUR experiment. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., Vol. 112, pp 825-841.

**Kaimal J.C., Finnigan J.J. (1994).** Atmospheric boundary layer flows: Their structure and measurement. Oxford University Press, New York, NY.

**Kim H.G., Lee C.M., Lim H.C., Kyong N.H. (1997).** An experimental and numerical study on the flow over two-dimensional hills. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, vol. 66, pp. 17-33

**Lilly (1992).** A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. Physics of Fluids 4 (3), pp. 633-635.

**Mason P.J. and Thompson D.J. (1987).** Large-eddy simulations of the neutral-static-stability planetary boundary layer. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., Vol. 113, pp 413-443.

**Smagorinsky J. (1963).** General circulation experiments with the primitive equations. Monthly Weather Review, vol. 91, pp. 99-152.

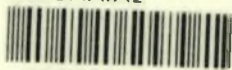
**Stull R.B. (1988).** An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluwer Academic Publisher

**Troen I., Lundtang Petersen E. (1989).** European Wind Atlas. Risø National Laboratory, Denmark.

**Wong V. C., Lilly D. K. (1994).** A comparison of two dynamic subgrid closure methods for turbulent thermal-convection. Physics of Fluids 6 (2), pp. 1016-1023.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091670