

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ”**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**



# **ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

**ΤΣΕΛΕΠΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΔΡ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΚΑΡΑΚΑΣΙΔΗΣ**

**ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011**

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ”**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**



# **ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΜΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ**

**ΤΣΕΛΕΠΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ : ΔΡ. ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΚΑΡΑΚΑΣΙΔΗΣ**

**ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2011**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 10122/1  
Ημερ. Εισ.: 16-12-2011  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξινόμησης Κωδικός: Δ  
519.76  
ΤΣΕ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	4
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	5
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α</b>	
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	
1. ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	7
1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
1.2. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	8
1.2.1. Συνιστώσα τάσης	9
1.2.2. Στοιχείο περιοδικότητας	10
1.2.3. Μη ομαλή συνιστώσα	10
1.3. ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	11
1.3.1. Ο χώρος των φάσεων	11
1.3.2. Ο ελκυστής	13
1.3.3. Το σύστημα Lorenz	16
1.3.4. Χαοτική χρονοσειρά	16
2. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	20
2.1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΕΤΡΑ	20
2.1.1. Μέτρα κεντρικής τάσης	20
2.1.2. Μέτρα μεταβλητότητας	21
2.1.3. Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης	22
2.1.4. Φάσματα ισχύος – Μετασχηματισμοί Fourier	22
3. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	25
3.1. ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	25
3.1.1. Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$	28
3.1.2. Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης $m$	31
3.1.3. Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων στο σύστημα Lorenz	34
3.2. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	35
3.2.1. Διάσταση συσχέτισης	35

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΕ ΘΕΡΜΑΙΝΟΜΕΝΗ ΤΥΡΒΩΔΗ ΕΚΤΟΞΕΥΟΜΕΝΗ ΦΛΕΒΑ	
4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ	40
4.1.1. Τυρβώδης εκτοξευόμενη φλέβα	40
4.1.2. Μετρήσεις σε εκτοξευόμενες φλέβες	41
4.1.3. Μετρήσεις τύρβης	41
4.1.4. Πειραματική διάταξη – Σύντομη περιγραφή	42
4.2. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	43
4.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	47
4.3.1. Αφαίρεση τάσης	47
4.4. ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ	55
4.5. ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	64
4.5.1. Ανακατασκευή χώρου των φάσεων	64
4.6. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	72
5. ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ	75
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	75
5.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ	78
5.3 ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΤΑΣΗΣ	80
5.3.1 Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας ακροτάτων διαφορών	82
5.3.2 Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας ακροτάτων προσαρμοσμένων	85
5.4 ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ	86
5.5 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ	87
5.5.1 Ανακατασκευή χώρου των φάσεων	87
5.6 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ	94
5.7 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ	94
5.8 ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ	95
5.8.1 ΑΡΧΙΚΕΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ	96
5.8.2 ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ	101
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	106
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	108

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η συγκεκριμένη Μεταπτυχιακή Διατριβή, εκπονήθηκε στα πλαίσια απόκτησης του μεταπτυχιακού τίτλου "Εφαρμοσμένης Μηχανικής και Προσομοίωσης Συστημάτων" του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Η διατριβή αυτή εντάσσεται στο γενικότερο γνωστικό αντικείμενο της θεωρίας της γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης των χρονοσειρών και μέσω αυτών της μελέτης του αιτιοκρατικού χάους. Το έναυσμα για την επιλογή της συγκεκριμένης εργασίας ήταν το μάθημα "Θεωρία και Προσομοίωσης Συστημάτων" το οποίο προσέφερε και τις απαραίτητες γνώσεις για την ολοκλήρωση της.

Επιβλέπων της εργασίας ήταν ο κ. Θεόδωρος Καρακασίδης, Επίκουρος Καθηγητής του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα για τη ουσιαστική παρουσία, την αρωγή και συνεχή καθοδήγηση του στην όλη προσπάθεια για την ολοκλήρωση της. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παναγιώτη Παπανικολάου για τα πειραματικά δεδομένα που μας διέθεσε και τις σημαντικές και χρήσιμες υποδείξεις που έκανε, τον Καθηγητή κ. Α. Λιακόπουλο, Διευθυντή του Εργαστηρίου Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής για τις χρήσιμες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις καθώς επίσης και τα μέλη της Επιτροπής Επίκουρο Καθηγητή Δημήτριο Σοφιανόπουλο και τον Λέκτορα Θεοφάνη Γραμμένο για τις χρήσιμες και ενδιαφέρουσες υποδείξεις τους.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στο γενικότερο γνωστικό αντικείμενο της θεωρίας της γραμμικής και μη γραμμικής ανάλυσης των χρονοσειρών και μέσω αυτών της μελέτης του αιτιοκρατικού χάους. Η εργασία περιλαμβάνει την παρουσίαση των χρονοσειρών πειραματικών δεδομένων ελλειπτικής εκτοξευόμενης θερμαινόμενης φλέβας ρευστού, όπου έχουν καταγραφεί θερμοκρασίες μέσω αισθητήρων κατά μήκος μιας κατακόρυφης τομής της φλέβας. Μελετήθηκαν οι χρονοσειρές μετά από την αφαίρεση της τάσης με προσαρμογή γραμμικής συνάρτησης και με τη μέθοδο πρώτων διαφορών και έγινε ανάλυση με γραμμικές και μη γραμμικές μεθόδους. Η γραμμική ανάλυση περιλαμβάνει τις μεθόδους συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και φάσματος ισχύος ενώ οι μη γραμμικές μέθοδοι που βασίζονται στην ανακατασκευή του χώρου των φάσεων περιλαμβάνουν τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας, διάσταση συσχέτισης.

Στην περίπτωση της θερμαινόμενης φλέβας τα αποτελέσματα δείχνουν μια ασύμμετρη συμπεριφορά των χρονοσειρών που σχετίζεται με τη διαφορετική συμπεριφορά αυτών στο κέντρο της φλέβας. Στα φάσματα ισχύος υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά στις χαμηλές από ότι στις υψηλές συχνότητες. Έχουμε παρουσία μεγάλου εύρους συχνοτήτων από χαμηλές (μεγάλοι χρόνοι) ως υψηλές (μικροί χρόνοι) γεγονός που δείχνει την ύπαρξη μηχανισμών σε πολλές χρονικές κλίμακες με μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών χρόνων. Είναι άλλωστε και αναμενόμενο κοντά στον άξονα της φλέβας όπου περιμένουμε να έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη. Στα άκρα της φλέβας παρατηρούμε μετατόπιση προς χαμηλές συχνότητες

(μεγάλοι χρόνοι), όπου παρατηρούνται μεγάλες δομές που “ταξιδεύουν” αργά. Ανιχνεύθηκαν τρεις περιοχές χαμηλών, μεσαίων και υψηλών συχνοτήτων όπου η διαφορετική συμπεριφορά μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνεισφορά του φαινομένου δεν είναι ίδια παντού. Ειδικά για τις υψηλές συχνότητες (στα άκρα φλέβας) η συνεισφορά των φαινομένων με μικρό χαρακτηριστικό χρόνο είναι μειούμενη. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς προς τα άκρα της φλέβας η συνεισφορά των μικρών δομών είναι μικρότερη απ’ ότι στο κέντρο. Η ανάλυση των χρονικών υστερήσεων από την μέση αμοιβαία πληροφορία οδηγεί στον εντοπισμό του άξονα της φλέβας σε συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα. Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης μας οδηγεί στο συμπέρασμα της πιθανής ύπαρξης υψηλοδιάστατου ελκυστή, που χρειάζεται αρκετές εξισώσεις για να περιγραφεί. Επιπλέον στο κέντρο της φλέβας όπου έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη έχουμε αυξημένη πολυπλοκότητα, σε αντίθεση με τα άκρα όπου έχουμε μικρότερες τιμές της διάστασης συσχέτισης και συνεπώς μειωμένη πολυπλοκότητα. Στις χρονοσειρές από πρώτες διαφορές το μέγιστο της διάστασης συσχέτισης παρουσιάζεται στο σημείο του άξονα της φλέβας.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μπορεί να οδηγήσει σε χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με την ανίχνευση διαφορετικών καταστάσεων του συστήματος.

Επίσης χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα των χρονοσειρών ακροτάτων οι οποίες προκύπτουν από τις αρχικές με χρήση των σημείων μεγίστων-ελαχίστων. Παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά με τις αρχικές χρονοσειρές. Το γεγονός αυτό είναι πολύ σημαντικό αφού έτσι μπορούμε να μελετάμε χρονοσειρές χρησιμοποιώντας αρκετά λιγότερα δεδομένα.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α

### ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Στην παρούσα εργασία δεν είναι δυνατόν να καλυφθούν όλα τα αντικείμενα της μη γραμμικής ανάλυσης των χρονοσειρών όπως παρουσιάζονται στη βιβλιογραφία. Εντούτοις θα γίνει μια προσπάθεια παρουσίασης των σημαντικότερων σημείων αυτής καθώς και της μεθοδολογίας της. Ο αναγνώστης για περισσότερες πληροφορίες μπορεί να ανατρέξει σε εξειδικευμένες βιβλιογραφικές αναφορές.

#### 1. ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

##### 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Χρονοσειρά είναι ένα σύνολο παρατηρήσεων που εξελίσσονται στο χρόνο οι οποίες λαμβάνονται παίρνοντας μετρήσεις μιας μεταβλητής, σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα. Ζητούμενο είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων από μια παρατηρούμενη ποσότητα σχετικά με τη δυναμική του συστήματος.

Οι χρονοσειρές προέρχονται κυρίως από συστήματα ντετερμινιστικά ή στοχαστικά. Το ντετερμινιστικό σύστημα ακολουθεί κάποιους κανόνες εξέλιξης που περιγράφονται συνήθως από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων ή εξισώσεων διαφορών. Στο στοχαστικό σύστημα η επόμενη κατάσταση δεν εξαρτάται από την προηγούμενη, σε αντίθεση με ότι συμβαίνει σε ένα ντετερμινιστικό σύστημα όπου η επόμενη κατάσταση εξαρτάται από την προηγούμενη ή μια σειρά προηγούμενων καταστάσεων.

Ένα ντετερμινιστικό σύστημα μπορεί να είναι είτε γραμμικό, τα εργαλεία για την ανάλυση του οποίου είναι αρκετά ανεπτυγμένα, είτε μη γραμμικό. Τα μη γραμμικά

ντετερμινιστικά συστήματα είναι πολύπλοκα. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση μη γραμμικών συστημάτων είναι τα χαοτικά συστήματα τα οποία παρουσιάζουν πολύ μεγάλη ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

## 1.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Κάθε χρονοσειρά  $x_1, x_2, \dots, x_n$  μπορεί να περιγραφεί από το απλό μοντέλο

(Chatfield 2004)  $x_t = \mu_t + s_t + y_t$  όπου :

- $\mu_t$  είναι η συνιστώσα τάσης (trend component) και περιγράφει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της χρονοσειράς
- $s_t$  είναι το στοιχείο της περιοδικότητας ή εποχικότητας (cyclical or seasonal component) και περιγράφει κανονικές διακυμάνσεις κάποιας περιόδου (που μπορεί να αντιστοιχούν σε ένα χρόνο, μια εποχή του χρόνου, μια εβδομάδα κλπ.).
- $y_t$  είναι η μη ομαλή συνιστώσα (irregular component) που απομένει όταν αφαιρεθούν από τη χρονοσειρά τα  $\mu_t$  και  $s_t$ . Η χρονοσειρά των  $y_t$  μπορεί να αποτελείται από πλήρως τυχαίες διακυμάνσεις και τότε λέγεται λευκός θόρυβος (white noise), ή να παρουσιάζει κάποια δομή, όπως στην περίπτωση χαοτικών συστημάτων.

Μια χρονοσειρά θεωρείται στάσιμη (stationary) όταν οι ιδιότητες της χρονοσειράς δεν αλλάζουν με το χρόνο. Αν η μέση τιμή και διασπορά παραμένουν σταθερές, μιλάμε για ασθενή στασιμότητα (weak stationarity). Επομένως μια χρονοσειρά με τάση ή περιοδικότητα δεν είναι στάσιμη και η απαλοιφή τους αποσκοπεί πρακτικά να την κάνει στάσιμη.

Πριν εφαρμόσουμε τα εργαλεία της μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών, θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι στατιστικές ιδιότητες της χρονοσειράς (όπως οι ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης) δεν αλλάζουν με το χρόνο που σημαίνει ότι η χρονοσειρά είναι στάσιμη. Στην περίπτωση που η χρονοσειρά  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  δεν είναι στάσιμη λόγω τάσεων, μπορεί να γίνει στάσιμη αφαιρώντας την τάση.

Ένας απλός έλεγχος στασιμότητας γίνεται με τον υπολογισμό της μέσης τιμής και την τυπική απόκλιση χωρίζοντας τη χρονοσειρά σε δυο ίσα τμήματα και υπολογίζοντας τις ποσότητες αυτές για κάθε τμήμα.

### 1.2.1 Συνιστώσα τάσης

Η τάση είναι μια συνιστώσα ενός απλού μοντέλου χρονοσειράς που περιγράφει τη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της.

Μια πραγματική χρονοσειρά είναι φυσικό να εμφανίζει κάποια τάση, π.χ. η χρονοσειρά μέτρησης της κυκλοφορίας σε μια οδική αρτηρία μπορεί να παρουσιάζει αυξητική τάση με το χρόνο, οπότε προσαρμόζουμε στη χρονοσειρά πολυώνυμο πρώτης τάξης. Για μια πιο πολύπλοκη τάση θα χρειαστεί να προσαρμόσουμε πιο σύνθετη, π.χ. εκθετική συνάρτηση ή πολυώνυμο υψηλότερης τάξης.

Σε πολλές εφαρμογές στην ανάλυση χρονοσειράς το ενδιαφέρον δεν είναι στην μακροπρόθεσμη τάση, που μπορεί να οφείλεται σε εξωγενείς παράγοντες αλλά σε αλλαγές που γίνονται σε μικρότερο χρονικό διάστημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις προτιμούμε την απαλοιφή της τάσης.

Οι μέθοδοι για την απαλοιφή της τάσης είναι : το γραμμικό φιλτράρισμα (smoothing, low-pass filtering), η μέθοδος των διαφορών (differencing) και η

προσαρμογή (fitting) μιας συνάρτησης. Στην παρούσα εργασία εφαρμόσαμε τις δύο τελευταίες μεθόδους.

### 1.2.2 Στοιχείο περιοδικότητας

Μια χρονοσειρά μπορεί να παρουσιάζει κάποια περιοδικότητα, που είτε οφείλεται σε εξωγενείς παράγοντες που δε μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε και γι' αυτό θέλουμε να την απαλείψουμε, ή είναι σημαντική και θέλουμε να την αναλύσουμε.

Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την κυκλοφορία σε μια οδική αρτηρία που παρουσιάζει συστηματικές διακυμάνσεις στη διάρκεια της ημέρας. Αν θέλουμε να μελετήσουμε τη μεταβολή της κυκλοφορίας στις διάφορες περιόδους της ημέρας είναι σημαντικό να προσδιορίσουμε αυτήν τη μεταβολή ως μια συνάρτηση του χρόνου για μια ημέρα. Αν θέλουμε να δούμε αν η κυκλοφορία έχει κάποια δυναμική, δηλαδή αν η κυκλοφορία σε κάποια ώρα της ημέρας εξαρτάται από την κυκλοφορία στις προηγούμενες ώρες, τότε πρέπει να απαλείψουμε την περιοδικότητα, δηλαδή την κίνηση που αναλογεί λόγω της συγκεκριμένης ώρας της ημέρας. Και στις δύο περιπτώσεις πρέπει πρώτα να εκτιμήσουμε την περιοδικότητα. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την ανάλυση Fourier.

### 1.2.3 Μη ομαλή συνιστώσα

Η μη ομαλή συνιστώσα μπορεί να παρουσιάσει είτε στοχαστική συμπεριφορά, είτε χαοτική συμπεριφορά.

### 1.3 ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Δυναμικό σύστημα (dynamical system) είναι ένα σύστημα που εξελίσσεται στο χρόνο. Κάθε σύστημα παράγει μια ή περισσότερες χρονοσειρές πιθανώς όσες είναι και οι μεταβλητές που το περιγράφουν. Οι χρονοσειρές σχηματίζονται από τη χρονική εξέλιξη των μεταβλητών του συστήματος ή είναι συναρτήσεις αυτών.

Σε ένα δυναμικό σύστημα του οποίου μελετάμε παρατηρήσεις δε γνωρίζουμε από πριν πόσες είναι οι μεταβλητές που περιγράφουν το σύστημα ούτε και τον τρόπο που αυτό συμπεριφέρεται.

Στη θεώρηση που ακολουθεί θεωρούμε πως το υπό μελέτη σύστημα που παρατηρούμε μέσω μιας χρονοσειράς είναι ντετερμινιστικό κι όχι στοχαστικό. Θεωρούμε ότι είναι ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα, διακριτό (discrete) ή συνεχές (continuous), τα οποία ορίζονται από κάποιες εξισώσεις διαφορών ή διαφορικές εξισώσεις αντίστοιχα. Γνωστά δυναμικά συστήματα είναι το εκκρεμές και το σύστημα Lorenz για τα οποία γίνεται εκτενής αναφορά παρακάτω.

#### 1.3.1 Ο χώρος των φάσεων

Ο χώρος των φάσεων είναι ο μαθηματικός χώρος του οποίου οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες μεταβλητές που χρειάζονται για να καθορίσουν την κατάσταση του δυναμικού συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. Η μη γραμμικότητα έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση πολύπλοκων δομών στο χώρο των φάσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο χώρος των φάσεων μπορεί να χαρακτηρίζεται από τη συνύπαρξη περιοχών χάους και περιοχών οργανωμένης συμπεριφοράς των μεταβλητών (βλέπε για παράδειγμα Συριόπουλος και Λεοντίσης, 2000).

Θα μπορούσε να πει κανείς ότι ο χώρος των φάσεων μετατρέπει τους αριθμούς σε εικόνες παρουσιάζοντας τις ουσιαστικές πληροφορίες ενός κινούμενου συστήματος, δημιουργώντας έναν εύχρηστο «οδικό» χάρτη που απεικονίζει όλες του τις δυνατότητες. Στο χώρο των φάσεων, η πλήρης γνώση ενός δυναμικού συστήματος σε μια στιγμή του χρόνου παριστάνεται με ένα σημείο. Την επόμενη στιγμή όμως που το σύστημα θα έχει αλλάξει κατάσταση, έστω και πολύ λίγο, το σημείο κινείται, και το σύστημα 'επισκέπτεται' τις καταστάσεις που είναι συμβατές με τις επικρατούσες συνθήκες.

Στο χώρο των φάσεων η κίνηση παρουσιάζει γενικά μια από τις ακόλουθες μορφές καθώς εξελίσσεται στο χρόνο.

(α) Σύγκλιση προς (ή απόκλιση από) απομονωμένα σημεία ισορροπίας του χώρου των φάσεων  $x$  όπου  $f(x)=0$  αναλόγως αν αποτελούν ευσταθείς ή ασταθείς κόμβους, όπου  $x$  είναι το διάνυσμα που περιγράφει την κατάσταση του συστήματος.

(β) Ταλαντώσεις που είναι περιοδικές, αν οι τροχιές χαρακτηρίζονται από  $d$  συχνότητες  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d$  ρητώς εξαρτημένες μεταξύ τους, ή σχεδόν περιοδικές αν οι συχνότητες αυτές είναι ρητώς ανεξάρτητες.

(γ) Χαοτική συμπεριφορά, κατά την οποία η κίνηση είναι απεριοδική, πεπερασμένη και χαρακτηρίζεται από ένα συνεχές (ή γενικά μη διακριτό) φάσμα συχνοτήτων και ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Όπως στην περίπτωση (α) έτσι και στις (β) και (γ) ενδέχεται η τελική μορφή κίνησης στο χώρο των φάσεων να είναι ελκυστής (ή απώστης) της δυναμικής του συστήματος. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις ο εν λόγω ελκυστής λέγεται κανονικός ενώ στην (γ) λέγεται παράξενος ( strange attractor / repeller).

Στην περίπτωση χαοτικών χρονοσειρών υπάρχει ελάχιστη πιθανότητα να βρούμε απλοποίηση στο πρόβλημα μέσω του μετασχηματισμού Fourier. (Η ανάλυση για το μετασχηματισμού Fourier γίνεται στα φάσματα ισχύος της γραμμικής ανάλυσης παρακάτω).

### 1.3.2 Ο ελκυστής

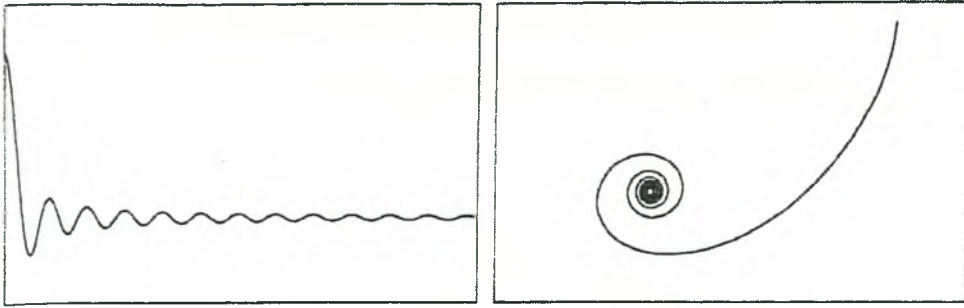
Μια σημαντική έννοια του χώρου των φάσεων είναι η έννοια του ελκυστή. Βραχυπρόθεσμα κάθε σημείο του χώρου των φάσεων μπορεί να παριστάνει μια πιθανή συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος. Μακροπρόθεσμα όμως οι μόνες δυνατές συμπεριφορές αναπαριστώνται από τους ελκυστές.

Ο ελκυστής είναι ένα σύνολο σημείων στο χώρο των φάσεων, προς το οποίο τείνουν ασυμπτωτικά στο χρόνο οι τροχιές για ένα εύρος αρχικών συνθηκών. Ο ελκυστής φαίνεται στο σύστημα αφού σταθεροποιηθεί και αρχίσει να επαναλαμβάνει κάποια συμπεριφορά. Συνεπώς, οι αρχικές συνθήκες και η συμπεριφορά στις πρώτες επαναλήψεις δε συμπεριλαμβάνονται στον ελκυστή.

Λεκάνη έλξης ενός ελκυστή είναι το σύνολο των αρχικών συνθηκών που η εξέλιξή τους τις οδηγεί στον ελκυστή.

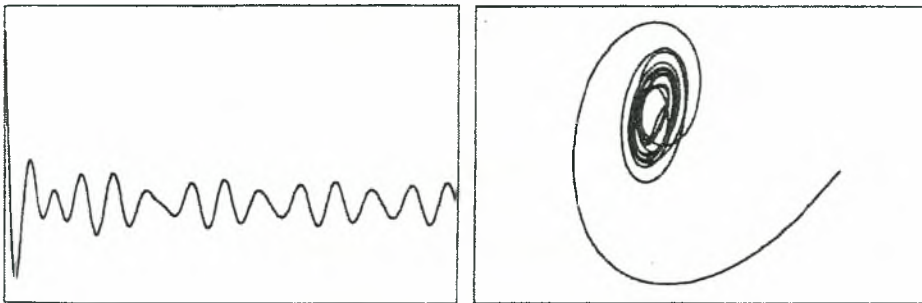
Υπάρχουν διάφορα είδη ελκυστών, οι χαρακτηριστικότεροι των οποίων περιγράφονται παρακάτω :

- Ελκυστής σημείου (point attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος.



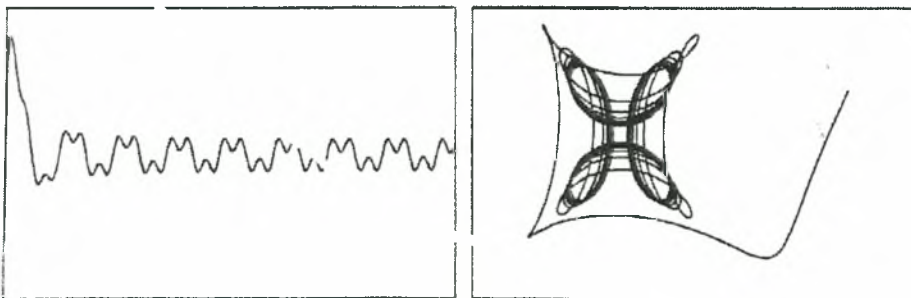
Σχήμα 1.1 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε ελκυστή σημείου (δεξιά).

- Ελκυστής οριακού κύκλου (limit cycle attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα κύκλο, για περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων.



Σχήμα 1.2 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε ελκυστή οριακού κύκλου (δεξιά).

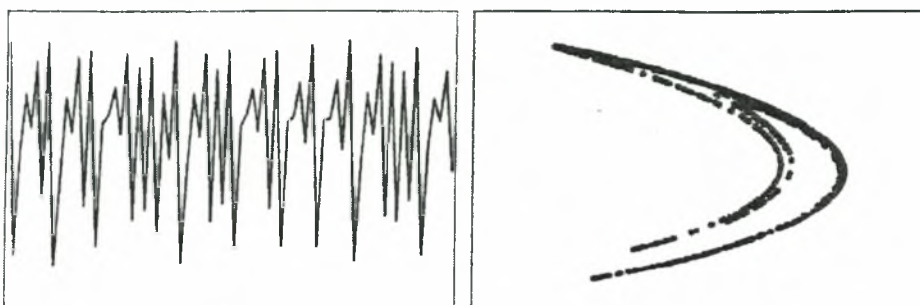
- Ελκυστής δύο περιόδων ή τορροειδής ελκυστής (toroidal attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα σχήμα που μοιάζει με δύο κύκλους ο ένας πάνω στον άλλο, για ψευδο-περιοδικές τροχιές συνεχών συστημάτων.



Σχήμα 1.3 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε ελκυστή δυο περιόδων ή τορροειδή ελκυστή (δεξιά).



- Χαοτικός ή παράξενος ελκυστής (chaotic/strange attractor), όταν τα σημεία στο χώρο των φάσεων έλκονται από ένα παράξενο αντικείμενο που δεν έχει συγκεκριμένο σχήμα



Σχήμα 1.4 : Παράδειγμα χρονοσειράς (αριστερά) που αντιστοιχεί σε χαοτικό ή παράξενο ελκυστή (δεξιά).

Παρακάτω παρουσιάζεται η περίπτωση δυναμικού συστήματος, που παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, το σύστημα Lorenz. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται ως σύστημα αναφοράς για την εφαρμογή μεθόδων μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών (Lorenz 1963).

### 1.3.3 Το σύστημα Lorenz

Το σύστημα Lorenz είναι ένα από τα πιο γνωστά χαοτικά δυναμικά συστήματα. Ο μετεωρολόγος Edward Lorenz (1963) προσπαθώντας να ερμηνεύσει την πρόβλεψη του καιρού χρησιμοποίησε τρεις μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3$$

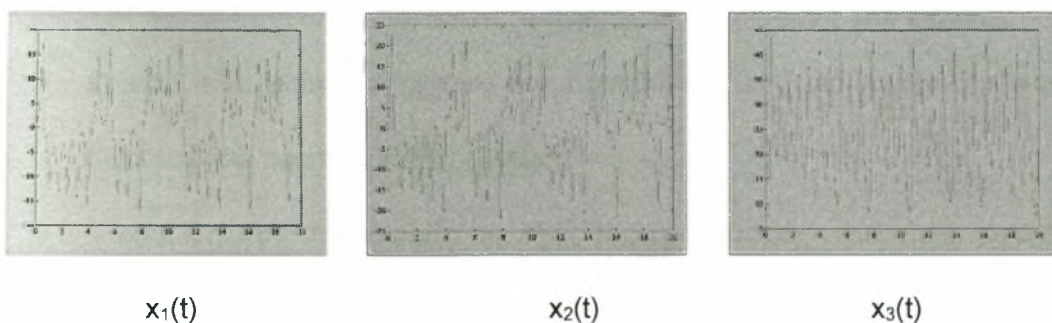
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3$$

Το μοντέλο αυτό είναι ένα τρισδιάστατο αυτόνομο συνεχές δυναμικό σύστημα που παράγεται από μια δραστική περικοπή (απλοποίηση) μιας ανάπτυξης των εξισώσεων μεταφοράς θερμότητας μέσω ρευμάτων συναγωγής (convection) όπου :

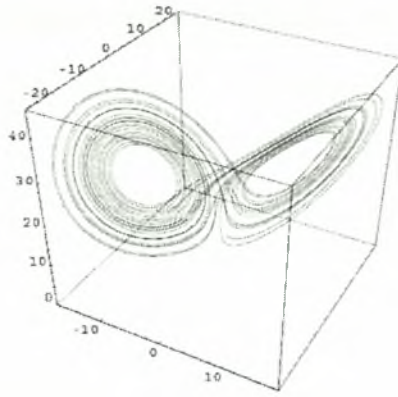
- $x_1$  είναι το πλάτος της πρώτης οριζόντιας αρμονικής της κατακόρυφης ταχύτητας του ρευστού,
- $x_2$  το πλάτος της αντίστοιχης θερμοκρασιακής ταλάντωσης,
- $x_3$  μια συνάρτηση θερμοκρασιακού πεδίου,
- $\sigma$  είναι ο αριθμός του Prandtl,
- $r$  είναι ο κανονικοποιημένος αριθμός του Rayleigh ( $r=R/R_e$  όπου  $R_e$  είναι ο κρίσιμος αριθμός Rayleigh) και
- $b$  είναι μια παράμετρος που σχετίζεται με οριζόντιο κυματοδιάνυσμα.

Όταν η μεταβλητή  $r$  παίρνει τιμές μικρότερες της μονάδος  $r < 1$ , όλες οι τροχιές του τείνουν σε ένα σταθερό σημείο  $(0,0,0)$  του διανυσματικού πεδίου που παριστάνει την κατάσταση της θερμικής επαγωγής. Όταν το  $r > 1$ , η κατάσταση  $(0,0,0)$  γίνεται γραμμικώς ασταθής και το διανυσματικό πεδίο έχει δυο συμμετρικά, γραμμικώς ευσταθή σταθερά σημεία. Αυξάνοντας την τιμή μέχρι  $r=r_0=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$  οι τροχιές καταλήγουν στο σημείο  $(x_{1\pm}, x_{2\pm}, x_{3\pm})$  αναλόγως της τιμής του  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ . Όταν  $r > r_0$  τα δυο σταθερά σημεία του διανυσματικού πεδίου γίνονται γραμμικώς ασταθή και απωθούν όλες σχεδόν τις τροχιές από κοντά τους. Καθώς το  $r$  αυξάνει πέρα από μια δεύτερη κρίσιμη τιμή  $r > r_0$  η χρονοασυμπτωματική κατάσταση που προκύπτει από όλες σχεδόν τις αρχικές συνθήκες εκτελεί μια απεριοδική κίνηση πάνω σε αυτό που ονομάζουμε χαοτικό ελκυστή.

Στο σχήμα 1.5 παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη των  $x_1, x_2, x_3$  του συστήματος Lorenz για τις τιμές των παραμέτρων  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  και  $r=28$ , στις τρεις διαστάσεις  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  (Παπαϊωάννου 1999), που αντιστοιχούν στην χαοτική περιοχή, ενώ στο σχήμα 1.6 παρουσιάζεται ο χώρος των φάσεων και ο αντίστοιχος παράξενος ελκυστής που προκύπτει.



Σχήμα 1.5 : Απεικόνιση των μεταβλητών  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  και  $x_3(t)$  της χρονοσειράς Lorenz για τις τιμές των παραμέτρων  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  και  $r=28$ .



Σχήμα 1.6 : Ο χώρος των φάσεων του συστήματος Lorenz.

#### 1.3.4 Χαοτική χρονοσειρά

Με τον όρο “χαοτική” χρονοσειρά εννοούμε μια σειρά δεδομένων τα οποία εμφανίζονται μη περιοδικά εμπεριέχουν όμως σαφείς ενδείξεις μιας ντετερμινιστικής δυναμικής μικρού αριθμού ( $d \leq 10$ ) μεταβλητών. Με τον τρόπο αυτό θέλουμε να αντιδιαστείλουμε τον χαρακτηρισμό χαοτική από τον αντίστοιχο της στοχαστικής χρονοσειράς που υπονοεί την ύπαρξη πολύ μεγαλύτερου (θεωρητικά άπειρου) αριθμού μεταβλητών.

Μια χαοτική χρονοσειρά συνήθως είναι :

- Πολύπλοκη, μη κανονική συμπεριφορά με απότομες και μεγάλες αλλαγές. Σε καμία περίπτωση δε φαίνεται καθαρά η ισορροπία και αν ακολουθείται κάποιος νόμος.
- Οι τιμές που φαίνονται τυχαίες δεν προκύπτουν από μια τυχαία διαδικασία, αλλά από μια προσδιοριστική εξίσωση.
- Η εξίσωση που προσδιορίζει τις τιμές της χρονοσειράς είναι απλή. Δεν είναι απαραίτητο η συμπεριφορά να είναι αποτέλεσμα περίπλοκης εξίσωσης.

- Η συμπεριφορά μπορεί να είναι αποτέλεσμα και λίγων μεταβλητών. Δεν είναι απαραίτητο να είναι πολλές οι μεταβλητές για να έχουμε περίπλοκη συμπεριφορά.

Σε μια χαστική χρονοσειρά δυο είναι οι πιθανοί στόχοι που μπορούμε να θέσουμε, η ανακατασκευή υποδείγματος και οι προβλέψεις.

Ανακατασκευή υποδείγματος : αποσκοπεί στο να δώσει ένα υπόδειγμα που να περιγράφει όσο το δυνατόν πιο ικανοποιητικά τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς. Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε μεθόδους που αναλύονται παρακάτω.

Προβλέψεις : Θα δούμε την ύπαρξη ισχυρών εργαλείων βασισμένων σε έννοιες όπως η διάσταση εμπύθισης και η χρονική υστέρηση, τα οποία μας επιτρέπουν να πάρουμε καλύτερη ακρίβεια στις προβλέψεις από άλλα παραδοσιακά εργαλεία. (Συριόπουλος και Λεοντίσης, 2000).

Εμείς θα ασχοληθούμε με το πρώτο κομμάτι, με το τμήμα που αφορά προβλέψεις να αποτελεί στόχο για μελλοντική εργασία.

## 2. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Η γραμμική ανάλυση χρονοσειρών μελετά γραμμικά χαρακτηριστικά όπως η αυτοσυσχέτιση και το φάσμα ισχύος. Τα χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να αναπαράγει ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, τη διασπορά και την αυτοσυσχέτιση (θυμίζουμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι ο μετασχηματισμός Fourier του φάσματος ισχύος). Η γραμμική ανάλυση είναι ικανοποιητική για την περιγραφή μιας γραμμικής διαδικασίας αλλά δεν αποτελεί ικανοποιητική περιγραφή μιας μη γραμμικής. Εφαρμόζοντας τη γραμμική ανάλυση σε μια πραγματική χρονοσειρά που μπορεί να έχει φαινομενικά στοχαστική συμπεριφορά ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας δεν μπορεί να περιγραφεί. Η μη γραμμική ανάλυση προσπαθεί να διερευνήσει το τμήμα αυτό της πληροφορίας.

### 2.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΕΤΡΑ

Τα κύρια γραμμικά μέτρα είναι τα μέτρα στατιστικών δεδομένων που χωρίζονται στα μέτρα κεντρικής τάσης, στα μέτρα μεταβλητότητας, τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και το φάσμα ισχύος.

#### 2.1.1 Μέτρα κεντρικής τάσης

Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_n$  οι τιμές των παρατηρήσεων για μια μεταβλητή  $x$  που μελετάμε σε διάφορες χρονικές στιγμές. Τα μέτρα κεντρικής τάσης είναι (Κόλυβα και Μπόρα, 1998):

- Η δειγματική μέση τιμή (sample mean) ή ο μέσος όρος (average) που είναι το «κέντρο ισορροπίας» των δεδομένων, συμβολίζεται με  $\bar{x}$  και ορίζεται ως:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

- Η δειγματική διάμεσος (sample median)  $\tilde{x}$  η οποία, σε μια διατεταγμένη αύξουσα σειρά των  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ορίζεται ως η κεντρική τιμή:

$$\tilde{x} = \frac{n+1}{2} \quad (2.2)$$

αν το  $n$ =περιττός, το  $\tilde{x}$  αντιστοιχεί στην τιμή  $\frac{n+1}{2}$  και

αν το  $n$ =άρτιος, το  $\tilde{x}$  αντιστοιχεί στο ημίαθροισμα των  $\frac{n}{2}$  και  $\frac{n}{2+1}$ .

### 2.1.2 Μέτρα μεταβλητότητας

Από παρατηρήσεις που έγιναν διαπιστώθηκε ότι διαφορετικά δείγματα από τον ίδιο πληθυσμό μπορεί να έχουν το ίδιο μέτρο κεντρικής τάσης αλλά να κατανέμονται περισσότερο ή λιγότερο γύρω από το κέντρο. Τα κυριότερα μέτρα διασποράς των δεδομένων είναι [Κόλυβα και Μπόρα, 1998]:

- Η δειγματική διακύμανση ή δειγματική διασπορά  $s^2$  (sample variance) η οποία μετράει τη μεταβλητότητα των παρατηρήσεων γύρω από τη δειγματική μάζα, και ορίζεται ως:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2) \quad (2.3)$$

- Η δειγματική τυπική απόκλιση  $s$  (standard deviation) η οποία εκφράζει κατά πόσο η τιμή της μεταβλητής απέχει από τη μέση τιμή, και ορίζεται ως:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $r_x(\tau)$  (autocorrelation function) είναι το κύριο γραμμικό μέτρο που μετράει τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των διαδοχικών τιμών μιας χρονοσειράς. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του φάσματος ισχύος. Δίνει ανάλογες πληροφορίες με το φάσμα ισχύος, που αφορούν όμως το πεδίο του χρόνου και όχι το πεδίο των συχνοτήτων.

### 2.1.4 Φάσματα ισχύος (Power spectrum) – Μετασχηματισμοί Fourier

Μέρος της ανάλυσης των χρονοσειρών αποτελεί η εύρεση τυχόν ισχυρών συχνοτήτων και η κατασκευή του φάσματος ισχύος (power spectrum). Το στοιχείο της περιοδικότητας είναι έντονα συνδεδεμένο με το φάσμα ισχύος. Εάν η χρονοσειρά έχει έντονη περιοδικότητα με περίοδο  $k$ , τότε το φάσμα ισχύος δείχνει έντονη ισχύ για συχνότητα  $1/k$ .

Στη χρονοσειρά υπάρχουν μικροί και μεγάλοι κύκλοι με μορφή ημιτόνου (ή συνημιτόνου). Σκοπός μας είναι να διακρίνουμε τους κύκλους που συμβάλουν σε μεγάλο ποσοστό στη διακύμανση της χρονοσειράς, και να αγνοήσουμε αυτούς που συμβάλουν με μικρό ποσοστό.

Η χρονοσειρά αναλύεται με βάση τη σειρά Fourier και η διακύμανση υπολογίζεται από το συνδυασμό των συντελεστών ημιτόνου και συνημιτόνου. Η χρησιμότητα της ανάλυσης είναι η εύρεση χαρακτηριστικών συχνοτήτων, η αφαίρεση περιοδικής ή εποχικής συνιστώσας και η πρόβλεψη. Η διάκριση μιας περιοδικής ή σχεδόν περιοδικής χρονοσειράς από μια χαοτική χρονοσειρά φαίνεται στο φάσμα ισχύος όταν στην πρώτη περίπτωση έχουμε χαρακτηριστικές κορυφές ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ένα ευρυζωνικό φάσμα ισχύος.



Θεωρούμε μια χρονική σειρά μήκους  $N$  ως μια σειρά από κύκλους περιόδου  $2, 3, \dots, T$ . Η συχνότητα ορίζεται ως το αντίστροφο της περιόδου. Οι αντίστοιχες συχνότητες είναι  $1/2, 1/3, \dots, 1/T$  ή σε γωνιακές συχνότητες (σε ακτίνες ανά μονάδα χρόνου)  $2\pi/2, 2\pi/3, \dots, 2\pi/T$ . Η θεμελιώδης συχνότητα ταλάντωσης, δηλαδή η συχνότητα της πρώτης αρμονικής ταλάντωσης, είναι  $f=1/T$  και αντίστοιχα η θεμελιώδης γωνιακή συχνότητα είναι  $\omega=2\pi/T=2\pi f$ .

Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε μια χρονική σειρά διακριτού χρόνου ως μια περιοδική κυματομορφή (periodic waveform) περιόδου το πολύ  $T$  που δίνεται από τη σειρά Fourier:

$$x_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^M (\alpha_k \cos(2\pi kfn) + b_k \sin(2\pi kfn)) \quad (2.5)$$

όπου  $\alpha_0$  είναι η μέση τιμή,  $\alpha_k$  και  $b_k$  είναι τα πλάτη για κάθε συνημιτονοειδή και ημιτονοειδή ταλάντωση στις αρμονικές συχνότητες  $k\omega=2\pi kf$  αντίστοιχα και  $M$  μπορεί να τείνει στο άπειρο.

Όταν ο χρόνος είναι συνεχής ( $\tau_s \rightarrow 0$ ) η χρονική σειρά είναι μια συνεχής κυματομορφή με υψηλότερη περίοδο  $T$ . Καθώς η περίοδος  $T$  αυξάνει το διάστημα μεταξύ των ταλαντώσεων μικραίνει. Αφήνοντας την περίοδο να τείνει στο άπειρο, θεωρώντας δηλαδή ότι η περίοδος δεν είναι περιοδική, ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier για ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων  $f$ :

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.6)$$

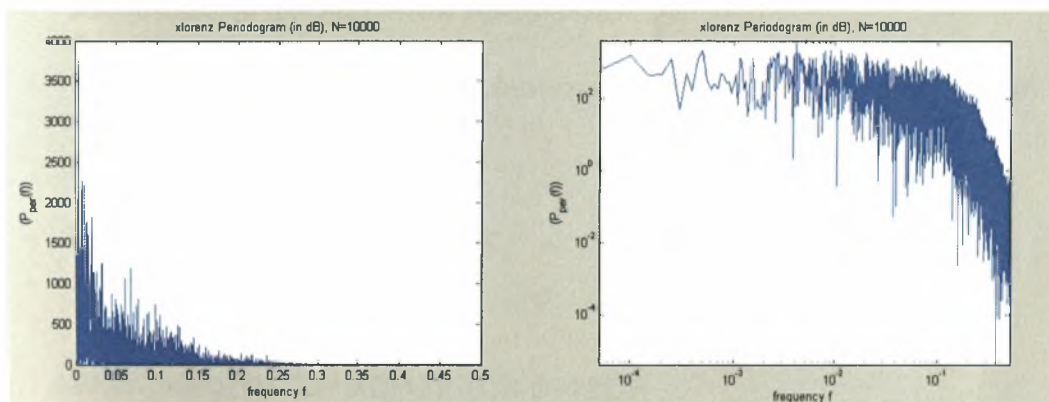
Όταν ο χρόνος δεν είναι συνεχής και έχουμε μια χρονική σειρά  $N$  στοιχείων, τότε ορίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier με επίσης  $N$  στοιχεία ως:

$$F_D(f) = \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi fn} \quad (2.7)$$

Τα στοιχεία του μετασχηματισμού Fourier  $F(f)$  ή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier  $F_D(f)$  είναι μιγαδικοί αριθμοί. Το φάσμα ισχύος δίνεται από το τετράγωνο του μέτρου των μιγαδικών αριθμών του διακριτού μετασχηματισμού Fourier:

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M x_n e^{-i2\pi fn} \right|^2 \right] \quad \text{ή} \quad P_{per}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi fn} \right|^2 \quad (2.8)$$

Στο σχεδιασμό του φάσματος ισχύος υπολογίζονται συνήθως οι συχνότητες τόσο στη γραμμική μορφή της χρονοσειράς όσο και στη λογαριθμική μορφή όπου η ύπαρξη νόμων κλίμακας της μορφής  $P(f) = cf^\alpha$  (Mandelbrot, 2002, Bak et. al, 1992).



(α)

(β)

Σχήμα 2.1 : Φάσμα ισχύος του συστήματος Lorenz στη γραμμική μορφή (α) και στη λογαριθμική μορφή (β).

### 3. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Στη μη-γραμμική ανάλυση χρονοσειρών υποθέτουμε ότι η χρονοσειρά παράγεται από ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα που ενδεχομένως περιέχει θόρυβο και ότι το αιτιοκρατικό μέρος της διαδικασίας είναι αυτό που κατά κύριο λόγο διαμορφώνει τη χρονοσειρά. Γι' αυτό θέλουμε να μελετήσουμε χαρακτηριστικά του αιτιοκρατικού δυναμικού συστήματος, να το περιγράψουμε με κατάλληλο μοντέλο και να πετύχουμε καλύτερες προβλέψεις.

Η γενική μεθοδολογία ασχολείται με τα εξής θέματα :

- Ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων.
- Εκτίμηση χαρακτηριστικών του δυναμικού συστήματος (διάσταση ελκυστή, εκθέτες Lyapunov).
- Μη-γραμμικά μοντέλα πρόβλεψης.

#### 3.1 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

Για να διαπιστώσουμε ότι η χρονοσειρά προέρχεται από ντετερμινιστικό ή στοχαστικό σύστημα θα πρέπει να γίνει ανακατασκευή του χώρου των φάσεων. Δηλαδή η κατασκευή ενός χώρου φάσεων μόνο από τη χρονοσειρά με τα ίδια χαρακτηριστικά που έχει ο αυθεντικός χώρος φάσεων του συστήματος που την έδωσε. Με την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων μπορούμε να δούμε τη δομή της μονοδιάστατης χρονοσειράς παρατηρώντας τα διαγράμματα διασποράς σε υψηλότερες διαστάσεις.

Εάν το σύστημα είναι κατά βάση αιτιοκρατικό είναι λογικό να περιμένουμε ότι κάθε μέτρηση εξαρτάται από έναν αριθμό προηγούμενων μετρήσεων δηλαδή  $x_{n+1}=f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m})$  και για μικρά  $\Delta t$  αυτές οι τιμές εμπεριέχουν πληροφορία

ισοδύναμη με αυτή κάποιων παραγώγων που θα μπορούσαν να περιγράψουν την εξέλιξη του συστήματος.

Δεν είναι απαραίτητο να ανακατασκευασθεί ο πλήρης χώρος των φάσεων από τη μετρούμενη ποσότητα καθώς στην πλειονότητα των περιστάσεων η διάσταση του ελκυστή είναι σημαντικά μικρότερη του χώρου των φάσεων.

Είναι συνήθως αρκετό να κατασκευάσουμε ένα χώρο όπου μπορεί να εμβυθισθεί το ανακατασκευασμένο διάνυσμα καταστάσεων.

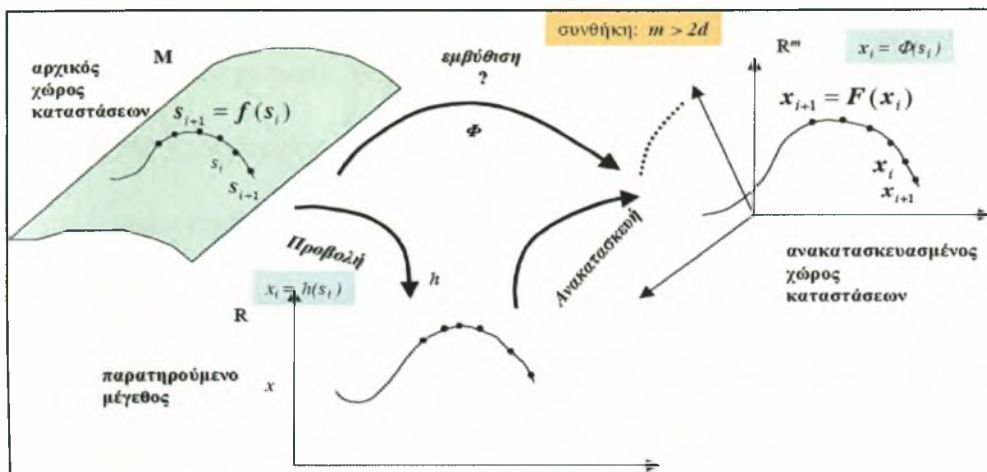
Ο νέος αυτός χώρος έχει τις εξής ιδιότητες :

- Κάθε σημείο του αντιστοιχεί μέσω της δυναμικής σε ένα μοναδικό επόμενο σημείο.
- Υπάρχει ένας ομαλός και μη ιδιάζων μετασχηματισμός μεταξύ αυτού και του αρχικού χώρου.
- Επίσης θέλουμε αυτός ο χώρος να είναι καρτεσιανός (ορθογώνιος) παρά καμπυλωμένος.

Η μεθοδολογία αυτή ονομάζεται ανακατασκευή του χώρου των φάσεων και εισήχθη από τους Packard et al (1980) και Takens (1981).

Το θεώρημα του Takens (1981) επιτρέπει κάτω από κάποιες συνθήκες να κατασκευάσουμε ένα νέο χώρο καταστάσεων διάστασης  $m$  από τη γνώση της χρονοσειράς και μόνο. Σ' αυτόν το χώρο οι ανακατασκευασμένες τροχιές από τη χρονοσειρά αποτελούν τον ανακατασκευασμένο ελκυστή, ο οποίος διατηρεί τις τοπολογικές ιδιότητες του αρχικού ελκυστή και το ανακατασκευασμένο δυναμικό σύστημα έχει τα ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με το αρχικό σύστημα, δηλαδή επιτυγχάνεται εμβύθιση του αρχικού συστήματος στο ανακατασκευασμένο σύστημα.

Το θεώρημα του Takens έχει ως συνθήκη για την ανακατασκευή  $m \geq 2D+1$  όπου  $D$  είναι η μορφοκλασματική διάσταση του ελκυστή. Αν η διάσταση  $m$  δεν είναι ικανοποιητικά μεγάλη, τότε ο ανακατασκευασμένος ελκυστής δεν «απλώνεται» πλήρως αλλά παρουσιάζει αυτό-τομές και δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμος με τον αρχικό ελκυστή.



Σχήμα 3.1 : Σχεδιάγραμμα ανακατασκευής του χώρου των φάσεων

Η ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων γίνεται με τη δημιουργία  $m$ -διάστατων διανυσμάτων καταστάσεων από τη χρονοσειρά ως εξής:

$$x_i = [x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}]$$

Οι παράμετροι ανακατασκευής είναι :

- Η διάσταση εμβύθισης  $m$  που ορίζει τον αριθμό των παρατηρήσεων που γίνονται συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος.
- Η υστέρηση  $\tau$  που ορίζει με ποια χρονική διαφορά επιλέγονται οι  $m$  παρατηρήσεις.

Η πληροφορία που διοχετεύεται από τη χρονοσειρά στο κάθε ανακατασκευασμένο διάνυσμα καλύπτει το χρονικό παράθυρο (time window)  $(m-1)\tau$  το οποίο θα πρέπει να μην είναι ούτε πολύ μικρό γιατί σημαίνει ότι δε θα περιέχει αρκετή πληροφορία για την ανακατασκευή, αλλά ούτε και πολύ μεγάλο γιατί θα περιέχει περιττή πληροφορία που θα κάνει πιο περίπλοκη την ανακατασκευή.

### 3.1.1 Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$ (time delay)

Η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  είναι ιδιαίτερα σημαντική όταν η δειγματοληψία της χρονοσειράς έχει γίνει με μικρό  $\tau_s$ . Αν το  $\tau$  επιλεγεί πολύ μικρό τότε οι διαδοχικές τιμές είναι ισχυρά συσχετισμένες και στην ουσία δεν έχουμε στις συνιστώσες επιπλέον πληροφορία. Αν το  $\tau$  επιλεγεί πολύ μεγάλο οι τιμές γίνονται ιδιαίτερα ασυσχέτιστες και χάνουμε πληροφορία για τη δυναμική του συστήματος (που περιγράφει την εξάρτηση της μιας τιμής από την προηγούμενη).

Ο εμπειρικός κανόνας που έχει επικρατήσει για την βέλτιστη επιλογή του  $\tau$  είναι η μικρότερη τιμή του  $\tau$  για την οποία οι συνιστώσες του ανακατασκευασμένου διανύσματος καταστάσεων  $x_i = [x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}]$  γίνονται ασυσχέτιστες για πρώτη φορά.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της χρονικής υστέρησης  $\tau$  είναι :

- η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) και
- η συνάρτηση μέσης αμοιβαίας πληροφορίας (average mutual information).

1. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function), επιλέγεται ο χρόνος  $\tau$  για τον οποίο μηδενίζεται η αυτοσυσχέτιση για πρώτη φορά  $\tau_x(\tau)=0$ . Αν η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δε φθίνει γρήγορα προς το 0, τότε ο χρόνος επιλέγεται από τη σχέση  $\tau_x(\tau)=1/e$ .

Η επιλογή του  $\tau$  υποδηλώνει απλά και μόνο την ύπαρξη γραμμικής ανεξαρτησίας μεταξύ των συνιστωσών του διανύσματος καθυστέρησης. Είναι η μέση τιμή πάνω στα δεδομένα (ή πάνω στον ελκυστή) μιας ενδογενούς 'δυναμικής' στατιστικής του συστήματος. Όπου μηδενίζεται για πρώτη φορά η συνάρτηση, είναι η χρονική περίοδος που θα διαλέξουμε για να ανακατασκευάσουμε τον χώρο των φάσεων.

2. Η συνάρτηση μέσης αμοιβαίας πληροφορίας (mutual information)  $I(X, Y)$  μετράει την γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δυο μεταβλητών  $X$  και  $Y$  και ορίζεται ως

$$I(X, Y) = \sum_{x,y} P_{XY}(x, y) \log \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)} \quad (3.1)$$

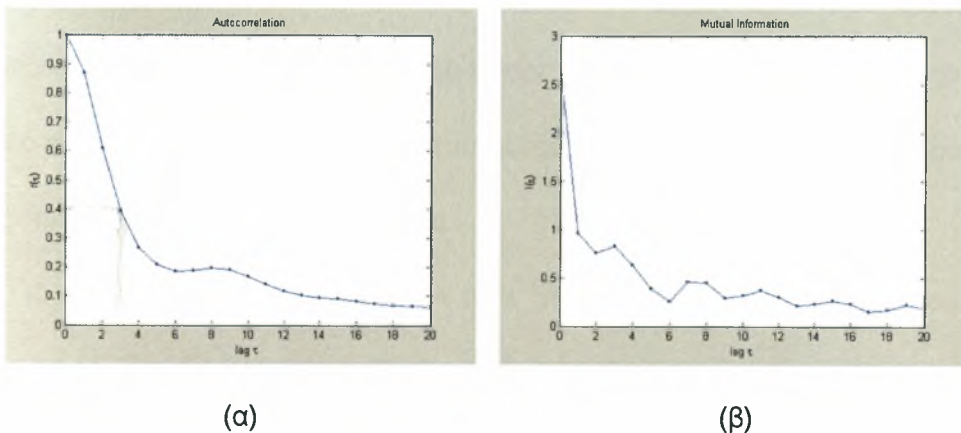
όπου  $p_X(x)$  είναι η πιθανότητα του  $X=x$ ,  $P_{XY}(x,y)$  είναι η κοινή πιθανότητα  $X=x$  και  $Y=y$ . Το άθροισμα υπολογίζεται για όλες τις δυνατές τιμές των  $X$  και  $Y$ . Για χρονοσειρές, η αμοιβαία πληροφορία δίνεται ως  $I(\tau)$  και αφορά τις μεταβλητές  $x_i, x_{i-\tau}$ . Η συνάρτηση  $I(\tau)$  παίρνει πάντα θετικές τιμές. Η υστέρηση  $\tau$  που αντιστοιχεί στο πρώτο τοπικό ελάχιστο της  $I(\tau)$  προτείνεται ως η καταλληλότερη για την ανακατασκευή του χώρου των καταστάσεων.

Η επιλογή του  $\tau$  πρέπει να γίνει έτσι ώστε, η μέση αμοιβαία πληροφορία που θα πάρουμε από τα δεδομένα πριν από το  $\tau$  και από τα δεδομένα μετά το  $\tau$  να είναι η ελάχιστη δυνατή. Αυτό επιτυγχάνεται όταν τα δεδομένα είναι όσο το δυνατόν πιο απλωμένα.

### Επιλογή χρόνου υστέρησης $\tau$ (time delay) στο σύστημα Lorenz

Στο σχήμα 3.2 δίνεται η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας σε χρονοσειρά του δυναμικού χαοτικού συστήματος Lorenz.

Από τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης έχουμε ως χρόνο υστέρησης  $\tau=3$  σύμφωνα με το κριτήριο  $1/e$  στο 40% της αρχικής τιμής για  $t=0$ . Από τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας έχουμε ως χρόνο υστέρησης  $\tau=2$  όπου είναι το πρώτο τοπικό ελάχιστο. Η επιλογή θα είναι  $\tau=2$  με βάση τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας γιατί μετράει τη γραμμική και μη γραμμική συσχέτιση δυο μεταβλητών και είναι και η μικρότερη τιμή.



Σχήμα 3.2 : Επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  από (α) τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  
(β) τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας.



### 3.1.2 Εκτίμηση της διάστασης εμβύθισης $m$ (embedding dimension)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Takens [1981], ικανή συνθήκη για την αποφυγή αυτοτομών στην ανακατασκευή του ελκυστή είναι  $m \geq 2D+1$  όπου  $D$  η διάσταση του ελκυστή (άλλοι ερευνητές θέτουν  $m \geq D$ ). Αυτή η συνθήκη δεν είναι και αναγκαία και θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν μικρότερη διάσταση εμβύθισης  $m$ . Αν γνωρίζουμε την τοπολογική διάσταση  $d$  της πολλαπλότητας ή του Ευκλείδειου χώρου που τον καλύπτει, για τη ζητούμενη βέλτιστη διάσταση εμβύθισης  $m$  θα ίσχυε:

$$2D+1 \geq m \geq d$$

Επειδή όμως  $d$  και  $D$  είναι άγνωστα δεν υπάρχουν ενδείξεις για την επιλογή του  $m$ .

Σκοπός του θεωρήματος εμβύθισης είναι να εξασφαλισθεί η ύπαρξη ενός Ευκλείδειου χώρου αρκετά μεγάλης διάστασης  $d$  ώστε να εμβυθισθεί σ' αυτόν το σύνολο σημείων ενός ελκυστή χωρίς ταυτοσημία και χωρίς να αλλάξει η απόσταση μεταξύ των σημείων για διαστάσεις  $m > d$ .

Για μικρή διάσταση ο ελκυστής θα είναι "μπλεγμένος", θα παρουσιάζει τομές με τον εαυτό του και δε θα είναι ισοδύναμος τοπολογικά με τον αρχικό ελκυστή. Αν η διάσταση είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη, οι υπολογισμοί θα είναι πιο πολύπλοκοι και χρονοβόροι.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να κατανοήσουμε το θεώρημα της εμβύθισης είναι να θεωρήσουμε ότι ο ελκυστής αποτελείται από τροχιές ενός συστήματος εξαιρετικά μεγάλης διάστασης, ακόμη και άπειρης. Ένας ελκυστής περιορισμένης διάστασης καταλαμβάνει ένα πολύ μικρό μέρος του όλου φασικού χώρου, και επομένως απαιτείται να βρεθεί ένας υποχώρος στον οποίο ο ελκυστής μπορεί αξιόπιστα να αναπαρασταθεί.

Δυο προβλήματα προκύπτουν όταν δουλεύουμε σε διαστάσεις μεγαλύτερες από αυτές που απαιτούνται για την ικανοποιητική εμπύθιση της χρονοσειράς.

- ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται για την εξαγωγή ιδιοτήτων που μας ενδιαφέρουν από τα δεδομένα αυξάνει εκθετικά με τη  $d$ , και
- υπό την παρουσία “θορύβου”, οι “επί πλέον” διαστάσεις δεν “επικίζονται” από τη δυναμική (που ήδη συντελείται σε μια μικρότερη διάσταση) αλλά καταλαμβάνονται από το “μολυσμένο” μέρος του σήματος.

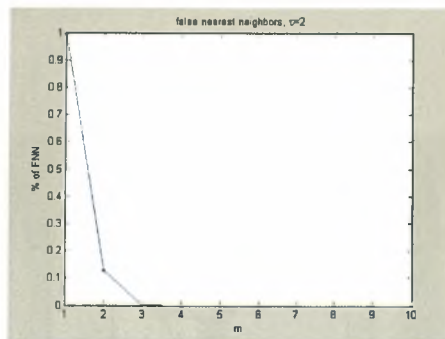
Μια μέθοδος που χρησιμοποιείται συνήθως για την εκτίμηση της διάστασης εμπύθισης  $m$  είναι η μέθοδος των ψευδών γειτόνων (method of false nearest neighbors FNN) (Schreiber et al., 1998). Οι άλλες δυο είναι η ανάλυση των χαρακτηριστικών τιμών και η ασφαλής εκτίμηση αναλλοίωτων μεγεθών. Εμείς θα αναλύσουμε τη μέθοδο των ψευδών γειτόνων την οποία θα εφαρμόσουμε και στη συγκεκριμένη εργασία.

Η μέθοδος των ψευδών γειτόνων αναφέρεται στο εξής ερώτημα: πότε θεωρούμε ότι έχουμε εξαλείψει τις ψευδείς τομές μιας τροχιάς με τον εαυτό της, που προκύπτουν από την προβολή του ελκυστή πάνω σε ένα χώρο χαμηλών διαστάσεων; Εξετάζοντας την ερώτηση αυτή διαδοχικά σε διαστάσεις  $d=1,2,3$ , κλπ, μπορούμε να προσδιορίσουμε μια τιμή για την αναγκαία διάσταση εμπύθισης  $m$  έτσι ώστε να μην υπάρχουν πλέον ψευδείς γείτονες.

Η μέθοδος των ψευδών γειτόνων είναι πολύ ευαίσθητη στο θόρυβο και δίνει μεγάλες τιμές  $m$  για θορυβώδη δεδομένα. Μάλιστα η επίδραση αυτή του θορύβου είναι μεγαλύτερη για μεγαλύτερες τιμές της  $\tau$ . Αυτό αποτελεί μειονέκτημα της μεθόδου γιατί σε πραγματικές εφαρμογές οδηγούμαστε στην επιλογή μεγαλύτερης  $m$  από αυτήν που πραγματικά χρειαζόμαστε.

### Εκτίμηση της διάστασης εμπύθισης $m$ στο σύστημα Lorenz

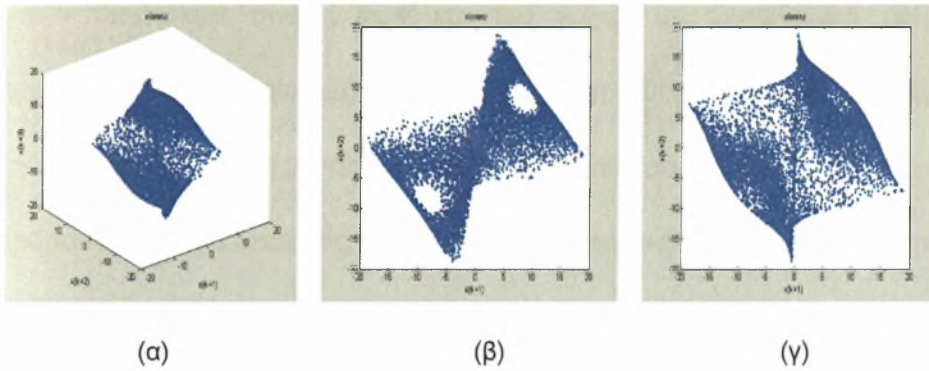
Στο σχήμα 3.3 παρουσιάζεται η εύρεση της διάστασης εμπύθισης  $m$  εφαρμόζοντας τη μέθοδο FNN σε χρονοσειρά του δυναμικού χαοτικού συστήματος Lorenz. Από το σχήμα επιλέγουμε διάσταση εμπύθισης  $m=3$  γιατί το ποσοστό των ψευδών γειτόνων σύμφωνα με μέθοδο FNN πέφτει κάτω από 1%.



Σχήμα 3.3 : Εκτίμηση της διάστασης εμπύθισης  $m$  του συστήματος Lorenz με τη μέθοδο των ψευδών γειτόνων (FNN).

### 3.1.3 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων στο σύστημα Lorenz

Με τα δεδομένα της επιλογής του χρόνου υστέρησης  $\tau=2$  και της διάστασης εμπύθισης  $m=3$  για το σύστημα Lorenz ανακατασκευάζουμε το χώρο των φάσεων και παρατηρούμε τα διαγράμματα διασποράς σε υψηλότερες διαστάσεις. Μπορεί κανείς να κάνει τη σύγκριση με τον πραγματικό χώρο των φάσεων και τον ελκυστή που παρουσιάστηκε στο σχήμα 1.6.



Σχήμα 3.4 : Σχεδιάγραμμα ανακατασκευής του χώρου των φάσεων του συστήματος Lorenz σε μια (α), δυο (β) και τρεις (γ) διαστάσεις.

## 3.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών περιλαμβάνει την εκτίμηση μη γραμμικών χαρακτηριστικών τα οποία δίνουν πληροφορίες για το υπό μελέτη σύστημα, όπως για τη διάσταση του ελκυστή και την πολυπλοκότητα του συστήματος και βοηθούν στην επιλογή κατάλληλου μοντέλου για τη χρονοσειρά, καθώς η διάσταση καθορίζει τον ελάχιστο αριθμό βαθμών ελευθερίας στο μοντέλο.

Τα μη γραμμικά χαρακτηριστικά ορίζονται στα πλαίσια της θεωρίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χάους ως αναλλοίωτα μέτρα του συστήματος (invariant measures). Ως σταθερά δηλαδή μεγέθη που δεν αλλοιώνονται από την εξέλιξη του συστήματος, καθώς και τη διαδικασία παρατήρησης του όταν αναφερόμαστε σε χρονοσειρές. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι η πυκνότητα των τροχιών, η μορφοκλασματική διάσταση, η εντροπία και οι εκθέτες Lyapunov. Εμείς θα αναφερθούμε σε δυο μεγέθη τη μορφοκλασματική διάσταση και τους εκθέτες Lyapunov (Lillekjendlie et al 1995).

### 3.2.1 Διάσταση συσχέτισης (correlation dimension)

Ένας ελκυστής χαρακτηρίζεται από την Ευκλείδεια διάσταση του χώρου που περιέχει τον ελκυστή (π.χ. για τον ανακατασκευασμένο χώρο είναι η διάσταση εμβύθισης  $m$ ) και την τοπολογική διάσταση της πολλαπλότητας πάνω στην οποία βρίσκεται ο ελκυστής. Για να χαρακτηρίσουμε όμως την ιδιότητα της αυτο-ομοιότητας εισάγουμε τη μορφοκλασματική διάσταση. Η διάσταση αυτή είναι συνεπής με τη συνήθη έννοια της διάστασης δηλαδή πεπερασμένα σύνολα σημείων έχουν διάσταση 0, γραμμές έχουν διάσταση 1 και επιφάνειες έχουν διάσταση 2. για

γεωμετρικά αντικείμενα με την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας όπως τυπικά είναι οι παράξενοι ελκυστές, η μορφοκλασματική διάσταση είναι μη ακέραιος αριθμός.

Η διάσταση συσχέτισης (correlation dimension)  $\nu$ , που μελετήθηκε για πρώτη φορά διεξοδικά από τους Grassberger και Procaccia (1983), είναι ένα από τα αναλλοίωτα μέτρα που εκφράζουν τη μορφοκλασματική διάσταση. Αν θεωρήσουμε έναν ελκυστή ως μη πεπερασμένο σύνολο σημείων  $x_i$  κι αν ορίσουμε την πιθανότητα η απόσταση δυο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη από κάποια απόσταση  $r$  ως  $P(\|x_i - x_j\| < r)$ , όπου  $\|x\|$  είναι το μήκος του διανύσματος  $x$ . Αν  $\mu_i$  είναι ο αριθμός των σημείων που βρίσκονται μέσα σε σφαίρα με ακτίνα  $r$  και κέντρο  $x_i$ , τότε η μέση τιμή ως προς όλα τα  $x_i$ ,  $(\mu_i)_x$ , προσεγγίζει την παραπάνω πιθανότητα.

Σύμφωνα με το νόμο της κλιμάκωσης (scaling law) είναι  $(\mu_i)_x \sim r^\nu$ , όταν  $r \rightarrow 0$  δηλαδή η πιθανότητα η απόσταση δυο σημείων του ελκυστή να είναι μικρότερη του  $r$  αλλάζει σύμφωνα με κάποια δύναμη της απόστασης  $r$  με σταθερό εκθέτη  $\nu$ . Αν ο ελκυστής έχει συνηθισμένη μορφή (πεπερασμένο σύνολο σημείων, γραμμή, επιφάνεια κτλ.) ο εκθέτης  $\nu$  είναι ακέραιος αριθμός, ενώ αν είναι παράξενος το  $\nu$  είναι μη ακέραιος και δηλώνει το βαθμό αυτό-ομοιότητας.

Η διαδικασία υπολογισμού της διάστασης συσχέτισης  $\nu$  παριστάνεται γραφικά με τέσσερα σχήματα :

(α) Το πρώτο σχήμα δείχνει το ολοκλήρωμα συσχέτισης (correlation integral) και είναι  $\log C(r)$  vs  $\log r$  για ένα εύρος τιμών της  $m$ ,  $m=1,2,3,\dots,m_{\max}$ , όπου  $C(r)$  είναι το άθροισμα της συσχέτισης (correlation sum). Περιμένουμε το γράφημα  $\log C(r)$  vs  $\log r$  να σχηματίζει ευθεία γραμμή για κάποιο μεγάλο εύρος σχετικά μικρών τιμών του  $r$ , που το ονομάζουμε περιοχή κλιμάκωσης του  $r$  (scaling region).

(β) Το δεύτερο σχήμα δείχνει τις κλίσεις συναρτήσεων του  $r$  και  $m$  (local slope) και είναι  $d \log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$  για το ίδιο εύρος τιμών της  $m$ . Θα πρέπει για κάποιο μεγάλο εύρος σχετικά μικρών τιμών του  $r$ , όπως και στο (α), το γράφημα της παραγώγου  $d \log C(r) / d \log r$  να σταθεροποιείται σε μια οριζόντια γραμμή στο ύψος της τιμής  $\nu$ . Για την εκτίμηση χαρακτηριστικής για το σύστημα διάσταση συσχέτισης  $\nu$  από μια χρονοσειρά θα πρέπει επιπλέον το ίδιο οριζόντιο επίπεδο της παραγώγου  $d \log C(r) / d \log r$  να παρατηρείται για διαφορετικές ανακατασκευές του ελκυστή.

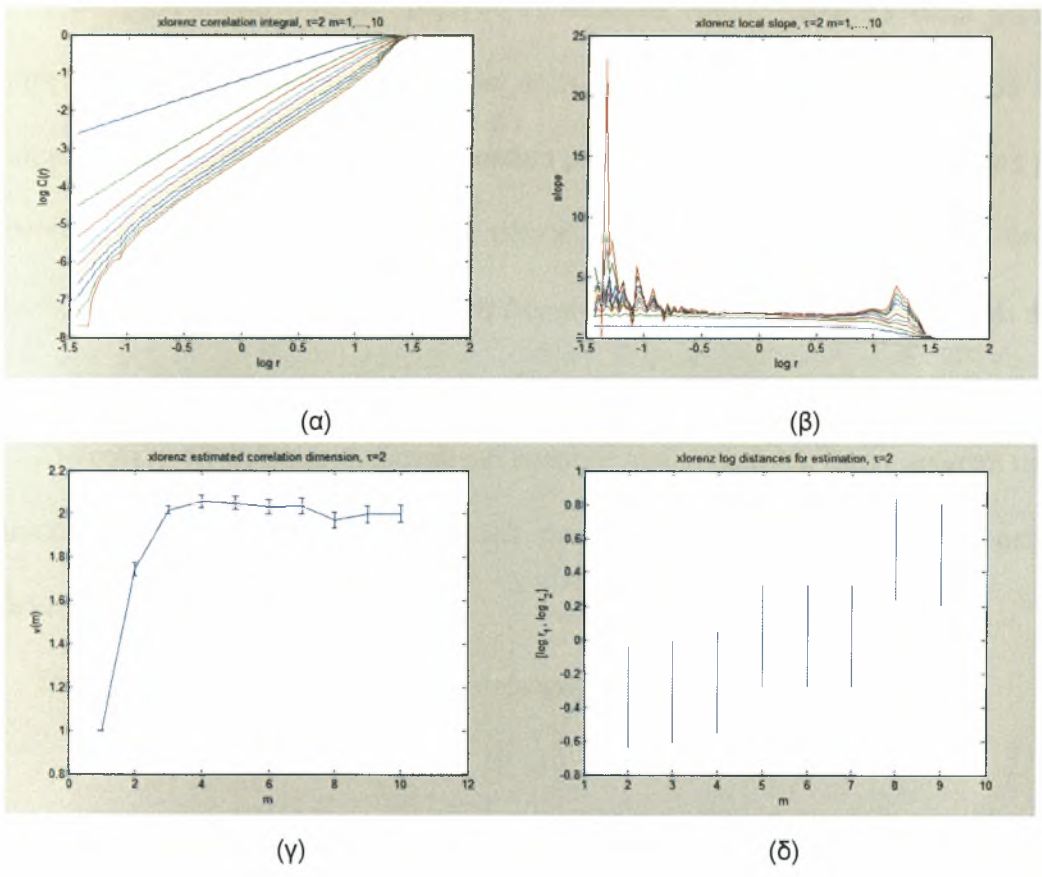
(γ) Το τρίτο σχήμα δείχνει τις κλίσεις συναρτήσεων της διάστασης εμβύθισης (estimated correlation dimension) και είναι  $\nu(m)$  vs  $m$ , όπου  $\nu(m)$  είναι η εκτίμηση της κλίσης από τα γραφήματα του πρώτου σχήματος ή του οριζόντιου επιπέδου από τα γραφήματα του δεύτερου σχήματος αντίστοιχα για κάθε  $m$ . Για τις ανακατασκευές συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της υστέρησης με σταθερή κάποια κατάλληλα τιμή του  $\tau$  και αυξανόμενη διάσταση εμβύθισης  $m$ . Φυσικά για μικρές τιμές του  $m$ , όπου η ανακατασκευή του ελκυστή δεν είναι ικανοποιητική, το οριζόντιο επίπεδο που δίνει την εκτίμηση του  $\nu(m)$  θα αυξάνει με την αύξηση του  $m$ . Για μεγαλύτερες τιμές του  $m$  όμως θα πρέπει το οριζόντιο επίπεδο να συγκλίνει στο ίδιο ύψος  $\nu = \nu(m)$ . Καθώς το  $m$  μεγαλώνει ακόμα περισσότερο η περιοχή κλιμάκωσης σταδιακά εξαφανίζεται και η εκτίμηση του  $\nu$  δεν είναι πια δυνατή.

(δ) Το τέταρτο σχήμα δείχνει τις περιοχές κλιμάκωσης (log distances for estimation) και είναι  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .

Η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης γίνεται με τη βοήθεια του αλγόριθμου Grassberger & Procaccia (1983).

### Εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης $\nu$ στο σύστημα Lorenz

Στο σχήμα 1.7 φαίνεται γραφικά η εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης μιας χρονοσειράς 10.000 σημείων της  $x$  μεταβλητής του συστήματος Lorenz στη χαοτική περιοχή, χρησιμοποιώντας ανακατασκευές του χώρου καταστάσεων με  $\tau=2$  και  $m=1,2,\dots,10$ .



Σχήμα 3.5: Εκτίμηση διάστασης συσχέτισης για το σύστημα Lorenz στη χαοτική περιοχή (α) διάγραμμα  $\log C(r)$  vs  $\log r$ , (β) διάγραμμα  $d \log C(r) / d \log r$  (slope) vs  $\log r$ , (γ) διάγραμμα  $\nu(m)$  vs  $m$  και (δ) διάγραμμα  $[\log r_1, \log r_2]$  vs  $m$ .



Στο σχήμα 1.7(α) φαίνεται πως τα γραφήματα  $\log C(r)$  vs  $\log r$  για  $m=1,2,\dots,10$  παρουσιάζουν γραμμική συμπεριφορά για μεγάλο εύρος τιμών της απόστασης  $r$ . Η κλιμάκωση δε διατηρείται για πολύ μικρά  $r$  ( $\log r < -0.5$ ), γιατί δεν υπάρχουν αρκετά σημεία σε σφαίρες με τόσο μικρές ακτίνες και η στατιστική είναι φτωχή, καθώς και για πολύ μεγάλα  $r$  ( $\log r > 1$ ), όπου η αυτό-ομοιότητα καταστρέφεται από τη γεωμετρία του ελκυστή.

Στο σχήμα 1.7(β) από το οριζόντιο επίπεδο της κλίσης  $d\log C(r)/d\log r$  φαίνεται πως η περιοχή κλιμάκωσης είναι για  $-0,5 < \log r < 1$ , για μεγάλα  $m$ . Για μικρά  $m$  η περιοχή κλιμάκωσης επεκτείνεται σε ακόμα μικρότερα  $r$ . Η οριζόντια γραμμή για  $m=1$  αντιστοιχεί σε κλίση 1, ενώ για  $m=2$  πλησιάζει την κλίση 2 και αυτό δείχνει ότι για αυτές τις τιμές του  $m$  η ανακατασκευή δεν είναι ικανοποιητική. Για μεγαλύτερα  $m$  τα γραφήματα της κλίσης συγκλίνουν στην ίδια στάθμη που αντιστοιχεί σε κλίση  $\nu=2$ .

Στο σχήμα 1.7(γ) φαίνεται η σταθερή εκτίμηση του  $\nu$  για  $m \geq 3$ , όπου φαίνεται και το μικρό όριο σφάλματος  $\pm SD$  (όπου  $SD$  είναι η τυπική απόκλιση). Η πραγματική διάσταση συσχέτισης είναι 2,06.

Στο σχήμα 1.7(δ) φαίνονται οι δύο περιοχές κλιμάκωσης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β

### 4. ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑΣ ΣΕ ΤΥΡΒΩΔΗ ΕΚΤΟΞΕΥΟΜΕΝΗ ΦΛΕΒΑ

#### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

##### 4.1.1 Τυρβώδης εκτοξευόμενη φλέβα

Εκτοξευόμενη φλέβα είναι μια φλέβα ρευστού που διαχέεται σε ομοειδές ρευστό με την ίδια ή διαφορετική πυκνότητα. Τυρβώδης, σημαίνει ότι στο πεδίο ροής υπάρχει διακύμανση της ταχύτητας και συγκέντρωσης κάποιας ουσίας που μεταφέρει η εκτοξευόμενη φλέβα.

Τα αρχικά χαρακτηριστικά της φλέβας αποτελούν η αρχική κατανομή της ταχύτητας και ένταση τύρβης, η ογκομετρική παροχή και ορμή της φλέβας, καθώς και η συγκέντρωση μεταφερόμενης ουσίας ή η θερμοκρασία της, προκειμένου περί θερμαινόμενης φλέβας. Στις περιβαλλοντικές παραμέτρους περιλαμβάνονται η πυκνομετρική διαφορά ανάμεσα στο ρευστό της φλέβας και του αποδέκτη, η θερμική ή πυκνομετρική στρωμάτωση και η κίνηση στον αποδέκτη κτλ. Οι γεωμετρικές παράμετροι σχετίζονται με τη μορφή του ακροφυσίου (π.χ. κυκλικές ή ορθογωνικές), τον προσανατολισμό (οριζόντιες, κατακόρυφες ή υπό γωνία), την αλληλεπίδραση με άλλες φλέβες, καθώς και την επίδραση των ορίων και του μεγέθους του αποδέκτη στη φλέβα.

Οι εκτοξευόμενες φλέβες μπορεί να είναι φυσικές (π.χ. υποθαλάσσιες φλέβες ή seavents, ηφαίστεια), ή τεχνητές όπως π.χ. καμινάδες, πυρκαγιές μικρής ή μεγάλης

κλίμακας, υποθαλάσσιοι διαχυτήρες διάθεσης αποβλήτων από μονάδες βιολογικής επεξεργασίας, εξάτμιση ή fuel injection αυτοκινήτων (διφασική φλέβα ή spray), κλπ.

#### 4.1.2 Μετρήσεις σε εκτοξευόμενες φλέβες.

Οι εκτοξευόμενες φλέβες αποτελούν περίπτωση των διατμητικών ροών (shear flows). Διατμητική ορίζεται η ροή που αναπτύσσεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες στρώσεις με διαφορετική ταχύτητα. Η ροή είναι εν γένει τυρβώδης. Μετρήσεις σε ανωστικές φλέβες αφορούν στον προσδιορισμό της τροχιάς τους και τις ιδιότητες της τύρβης. Συνήθως οι μετρήσεις τύρβης γίνονται με βάση ένα ή περισσότερα σταθερά σημεία στη γεωμετρία της φλέβας, θεωρώντας δηλαδή τις συντεταγμένες του σημείου μέτρησης ως ανεξάρτητες μεταβλητές (μέθοδος Euler, Daily & Harleman 1966) και εξετάζοντας τη μεταβολή της παραμέτρου στην εκάστοτε θέση μέτρησης.

Οι μετρήσεις αυτές στοχεύουν στον καθορισμό του άξονα της φλέβας, καθώς και του πλάτους της. Ο καθορισμός της τροχιάς της φλέβας γίνεται συνήθως με φωτογράφιση υπό μόνιμες συνθήκες και στη συνέχεια με οπτική ανάλυση των φωτογραφιών για τον προσδιορισμό του 'μέσου' άξονα της φλέβας.

#### 4.1.3 Μετρήσεις τύρβης

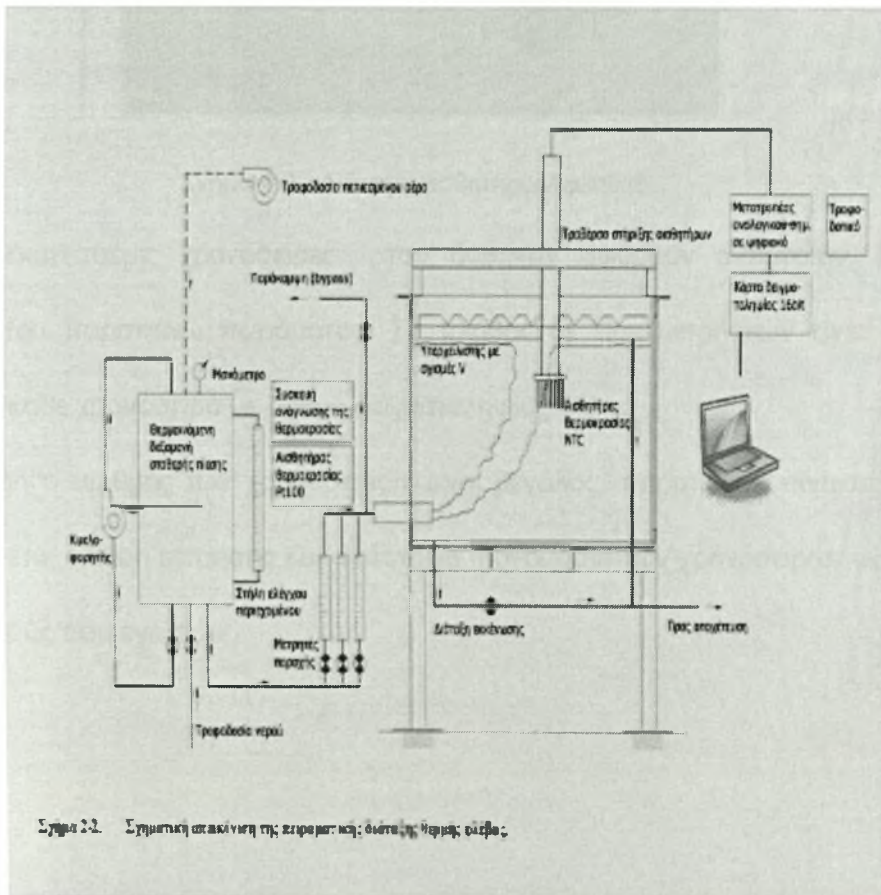
Η ένταση της τύρβης προκύπτει από στατιστική ανάλυση δείγματος τιμών μιας παραμέτρου της ροής της φλέβας, που μετράται σε συγκεκριμένα σημεία. Η παράμετρος αυτή μπορεί να είναι η ταχύτητα ή θερμοκρασία του ρευστού, ή η συγκέντρωση μεταφερόμενης ουσίας, κλπ στα εν λόγω σημεία. Στην περίπτωση δε θερμαινόμενης φλέβας, η τύρβη μπορεί να προσδιοριστεί από μετρήσεις της θερμοκρασίας σε κατάλληλες θέσεις του πεδίου ροής. Από την επεξεργασία των

μετρήσεων, προκύπτουν στατιστικά μεγέθη που περιγράφουν τις ιδιότητες της τύρβης. Όταν δε οι μετρήσεις αυτές γίνουν σε όλο το εύρος μιας διατομής της φλέβας, τότε μπορούν να αποδώσουν την κατανομή των μέσων ιδιοτήτων της φλέβας.

#### 4.1.4 Πειραματική διάταξη – περιγραφή

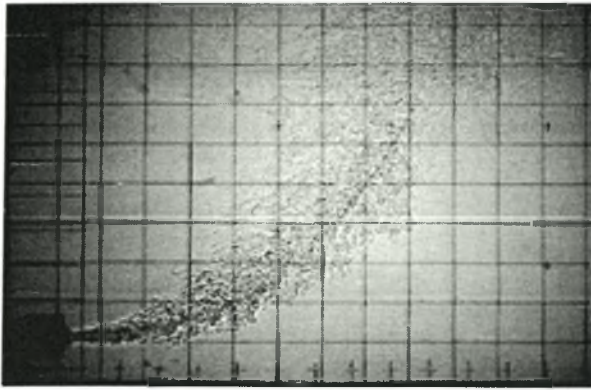
Οι μετρήσεις έγιναν στο Εργαστήριο Υδρομηχανικής και Περιβαλλοντικής Τεχνικής του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών και μας δόθηκαν από τον Αναπληρωτή Καθηγητή Π. Παπανικολάου (Μίχας 2009).

Η πειραματική διάταξη, η οριζόντια θερμαινόμενη φλέβα καθώς και η διάταξη των αισθητήρων στους οποίους έγιναν οι μετρήσεις, φαίνονται αντίστοιχα στα παρακάτω σχήματα 4.1, 4.2 και 4.3.

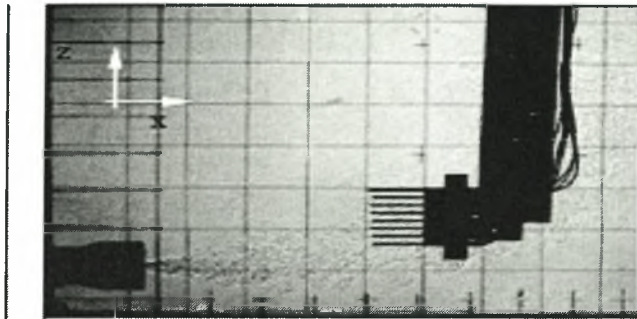


Σχήμα 2-2. Σχηματική απεικόνιση της πειραματικής διάταξης θερμής φλέβας.

Σχήμα 4.1 : Απεικόνιση πειραματικής διάταξης θερμής φλέβας (Μίχας 2009).



Σχήμα 4.2 : Εικόνα οριζόντιας θερμαινόμενης φλέβας



Σχήμα 4.3 : Διάταξη αισθητήρων φλέβας

Οι δεκατέσσερις χρονοσειρές που δόθηκαν αφορούν αντίστοιχες θέσεις μέτρησης του παραπάνω πειράματος. Το πλήθος δε των μετρήσεων είναι 3.200 σημεία για κάθε χρονοσειρά με ρυθμό δειγματοληψίας 80Hz.

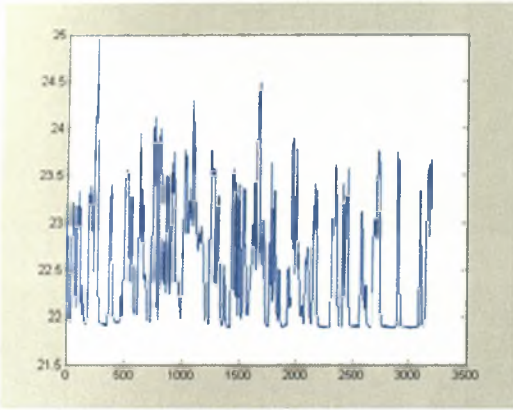
Επειδή ο αριθμός των χρονοσειρών είναι μεγάλος, παρατίθεται πίνακας στον οποίο φαίνεται η θέση μέτρησης και αντίστοιχα η ονομασία των χρονοσειρών για τους υπολογισμούς που έγιναν.

α/α Χρονοσειράς	Θέση μέτρησης	Ονομασία Χρονοσειράς	Αρχική χρονοσειρά	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές
			(α)	(β)	(γ)
1	-2,5	am2p5	a <sub>1</sub>	w <sub>1</sub>	q <sub>1</sub>
2	-1,5	am1p5	a <sub>2</sub>	w <sub>2</sub>	q <sub>2</sub>
3	-1,0	am1p0	a <sub>3</sub>	w <sub>3</sub>	q <sub>3</sub>
4	-0,5	am0p5	a <sub>4</sub>	w <sub>4</sub>	q <sub>4</sub>
5	0	a0	a <sub>5</sub>	w <sub>5</sub>	q <sub>5</sub>
6	0,5	a0p5	a <sub>6</sub>	w <sub>6</sub>	q <sub>6</sub>
7	1,0	a1p0	a <sub>7</sub>	w <sub>7</sub>	q <sub>7</sub>
8	1,5	a1p5	a <sub>8</sub>	w <sub>8</sub>	q <sub>8</sub>
9	2,0	a2p0	a <sub>9</sub>	w <sub>9</sub>	q <sub>9</sub>
10	2,5	a2p5	a <sub>10</sub>	w <sub>10</sub>	q <sub>10</sub>
11	3,0	a3p0	a <sub>11</sub>	w <sub>11</sub>	q <sub>11</sub>
12	3,5	a3p5	a <sub>12</sub>	w <sub>12</sub>	q <sub>12</sub>
13	4,0	a4p0	a <sub>13</sub>	w <sub>13</sub>	q <sub>13</sub>
14	5,0	a5p0	a <sub>14</sub>	w <sub>14</sub>	q <sub>14</sub>

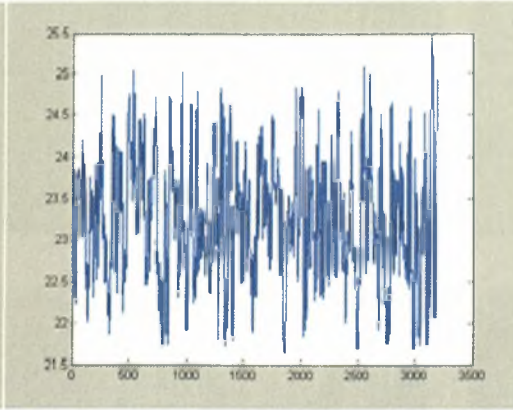
Πίνακας 4.1 : Χαρακτηριστικά χρονοσειρών

## 4.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

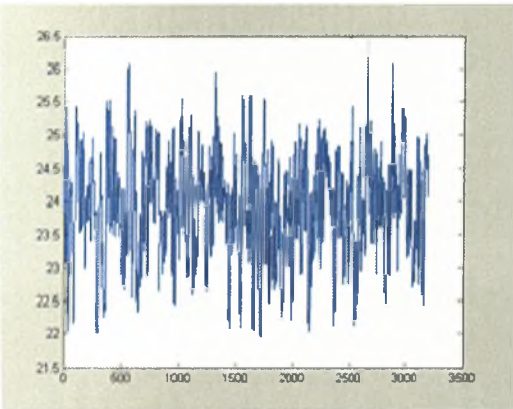
$a_1(x=-2,5)$



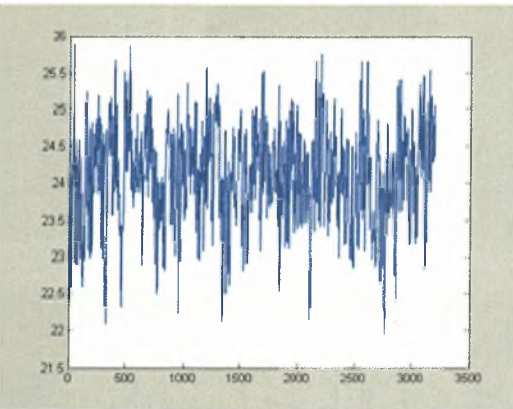
$a_2(x=-1,5)$



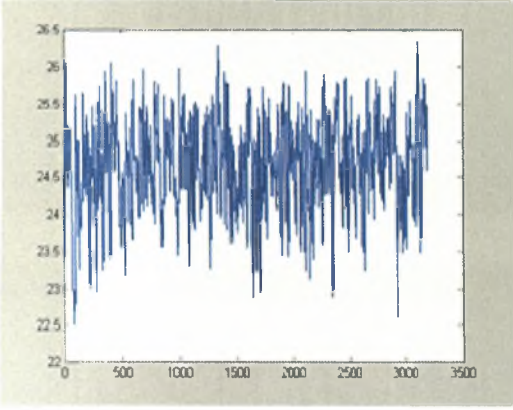
$a_3(x=-1,0)$



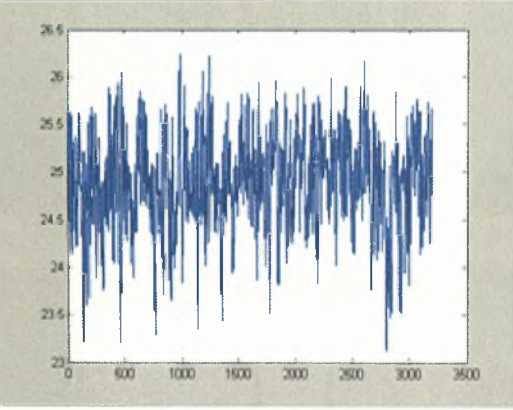
$a_4(x=-0,5)$



$a_5(x=0)$



$a_6(x=0,5)$

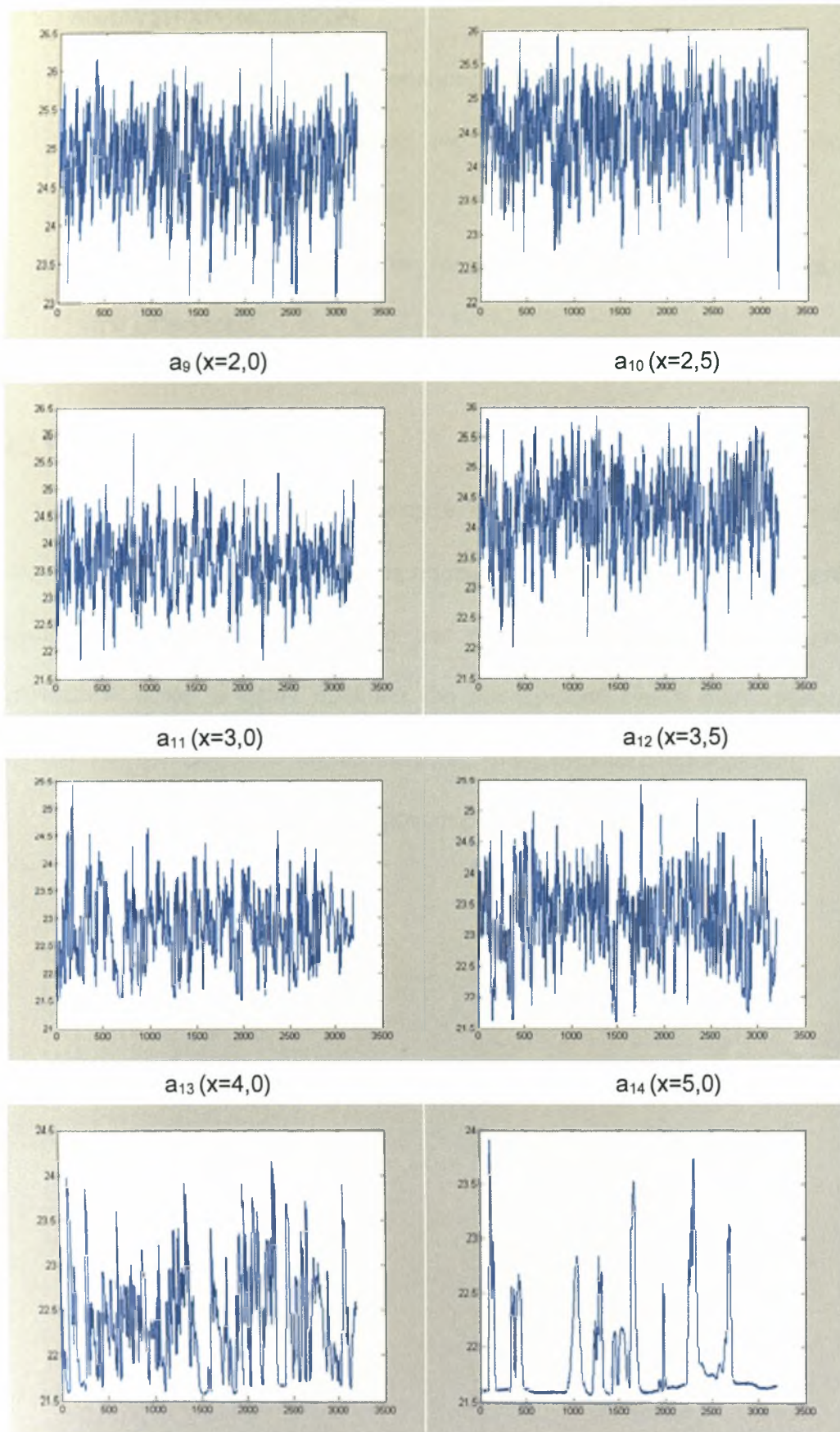


$a_7(x=1,0)$



$a_8(x=1,5)$





Σχήμα 4.4 : Απεικόνιση αρχικών χρονοσειρών.



### 4.3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Ακολουθήθηκε ο εξής τρόπος ανάλυσης των χρονοσειρών:

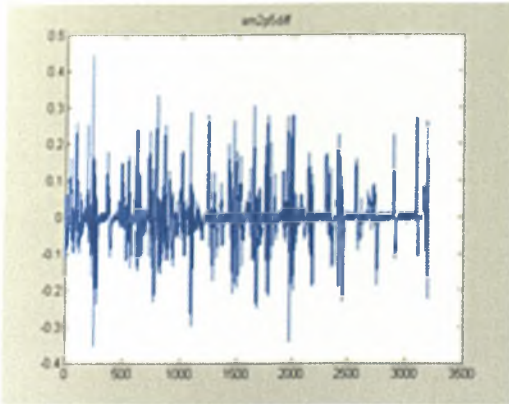
1. Ανάλυση μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης.
2. Ανάλυση μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών (first differences).

#### 4.3.1 Αφαίρεση τάσης

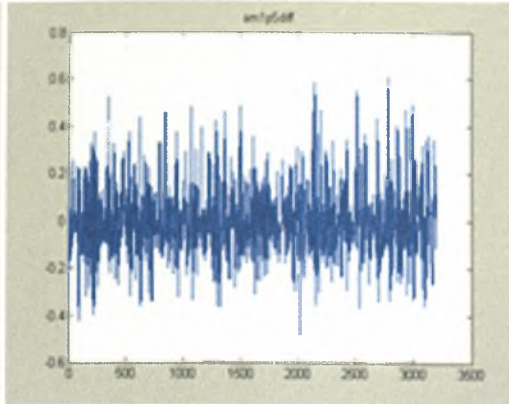
Από το σχεδιασμό των χρονοσειρών  $a$  (αρχικής),  $w$  (μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης) και  $q$  (μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών), προέκυψε ότι οι χρονοσειρές  $a$  και  $w$  έχουν πρακτικά ίδια συμπεριφορά ενώ η συμπεριφορά της χρονοσειράς  $q$  παρουσιάζει κάποιες διαφορές, όπως είναι και αναμενόμενο.

Ακολουθεί η παρουσίαση των χρονοσειρών  $q$  στο σχήμα 4.5

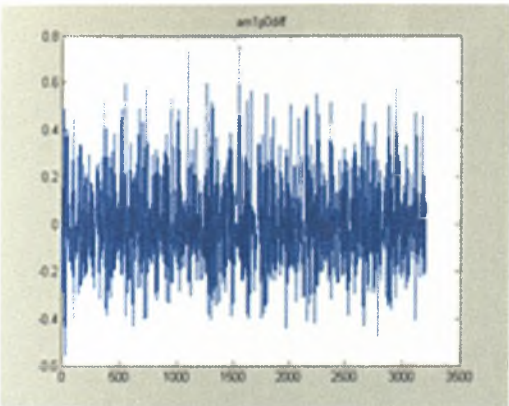
$q_1(x=-2,5)$



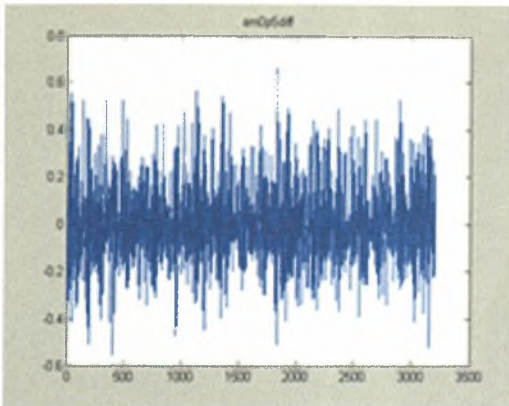
$q_2(x=-1,5)$



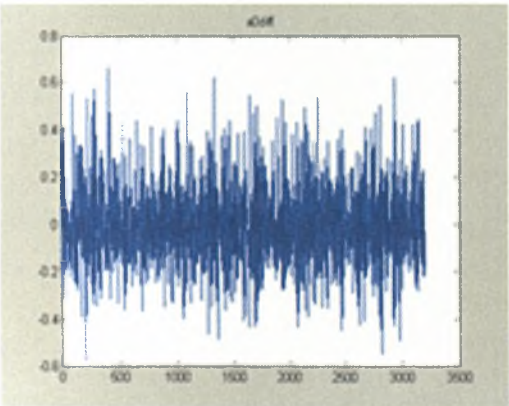
$q_3(x=-1,0)$



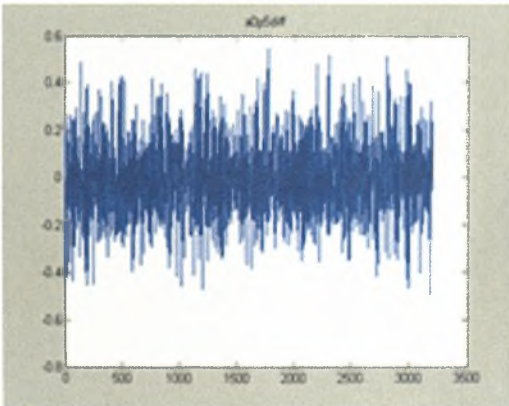
$q_4(x=-0,5)$



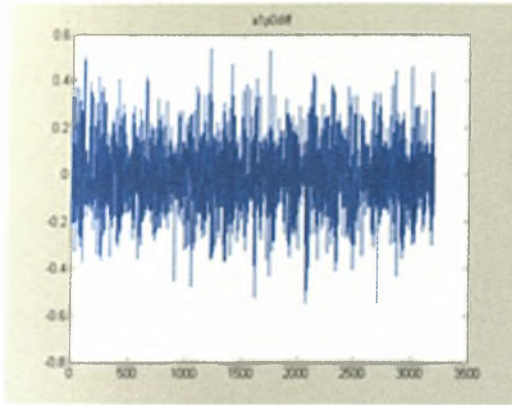
$q_5(x=0)$



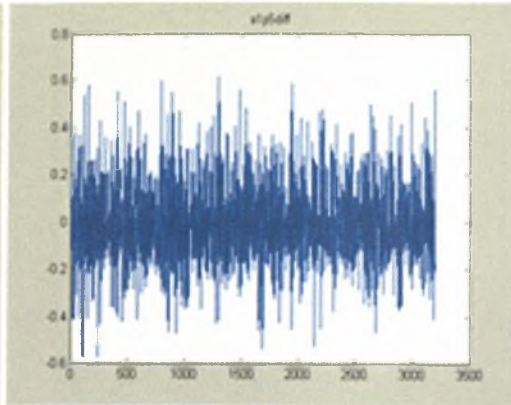
$q_6(x=0,5)$



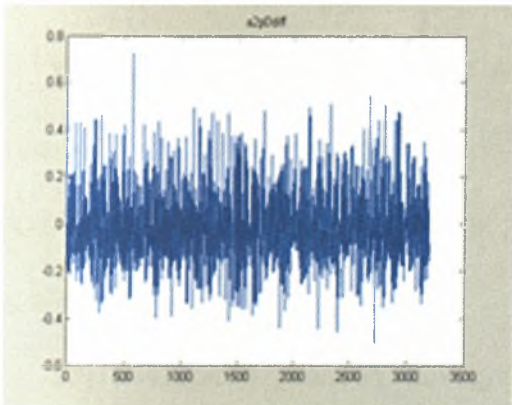
$q_7(x=1,0)$



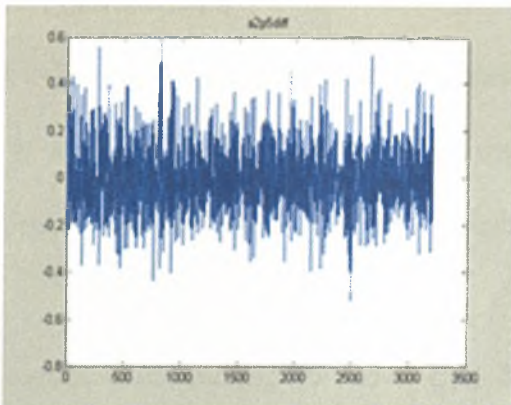
$q_8(x=1,5)$



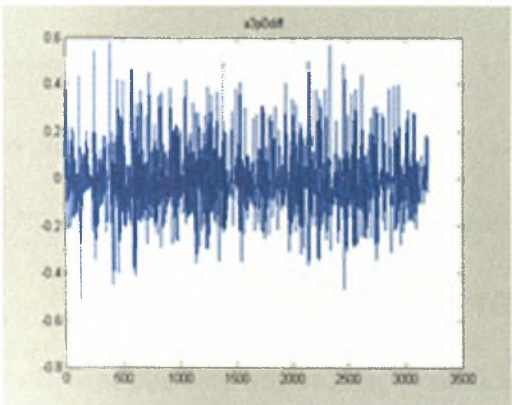
$q_9(x=2,0)$



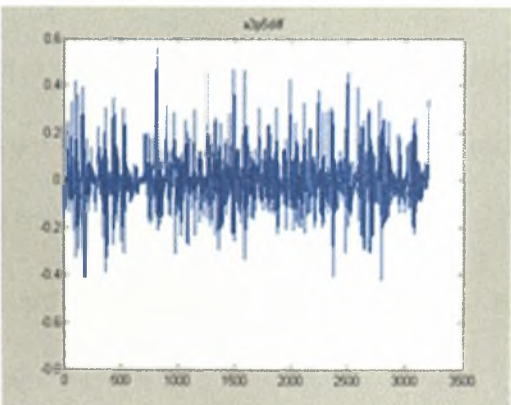
$q_{10}(x=2,5)$

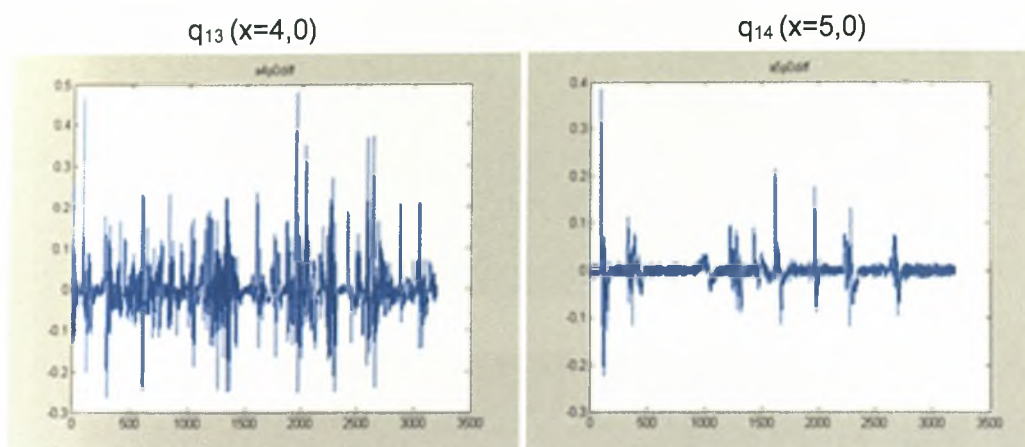


$q_{11}(x=3,0)$



$q_{12}(x=3,5)$



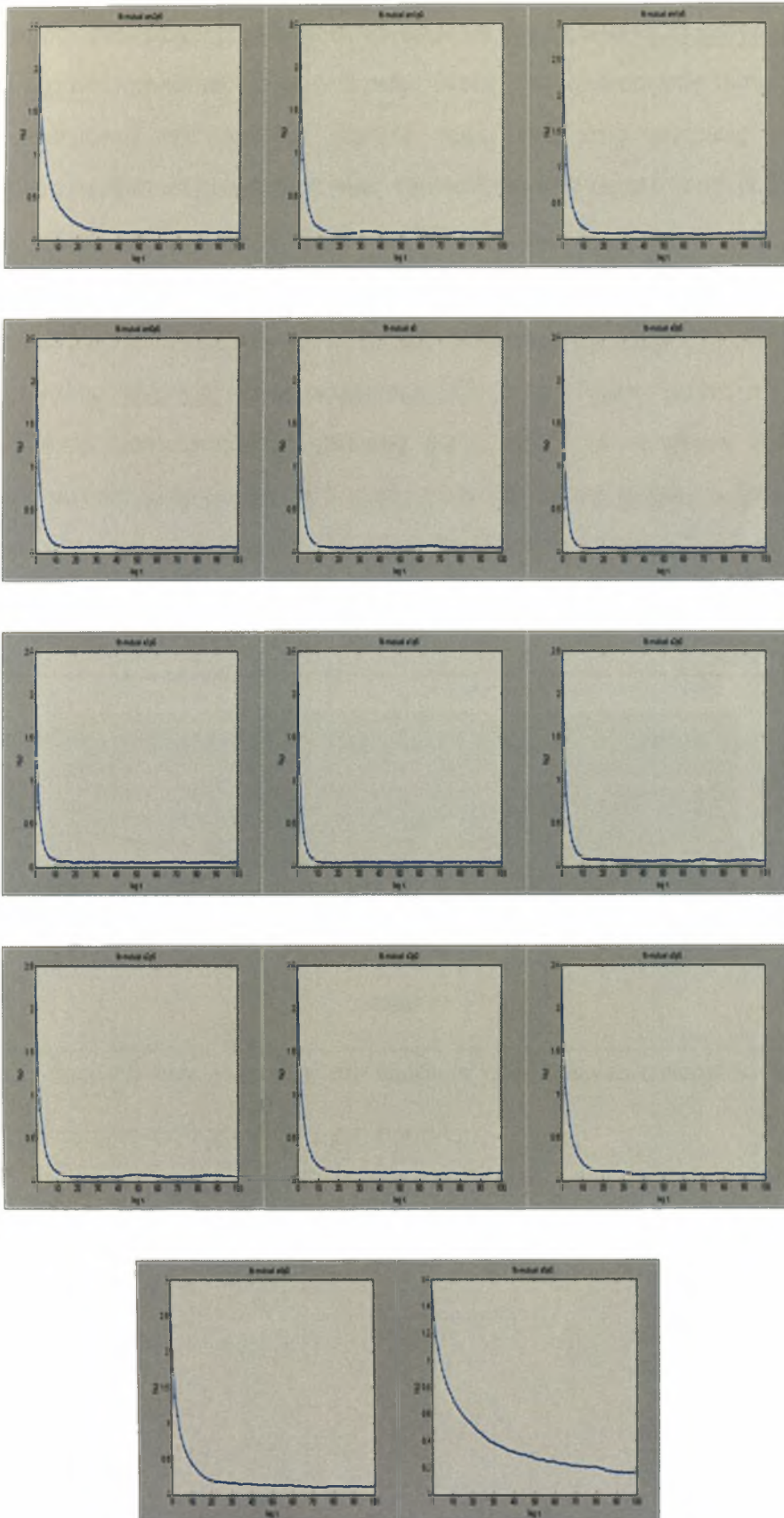


Σχήμα 4.5 : Απεικόνιση χρονοσειρών  $q$

Στις θέσεις  $x=-2.5$ ,  $x=3.5$ ,  $x=4.0$  και  $x=5.0$  τα διαγράμματα είναι διαφορετικά όπως και στις αντίστοιχες χρονοσειρές  $w$  και αυτό πρέπει να οφείλεται όπως προαναφέρθηκε στις μετρήσεις οι οποίες έχουν γίνει σε σημεία στην περιοχή εκτός της φλέβας.

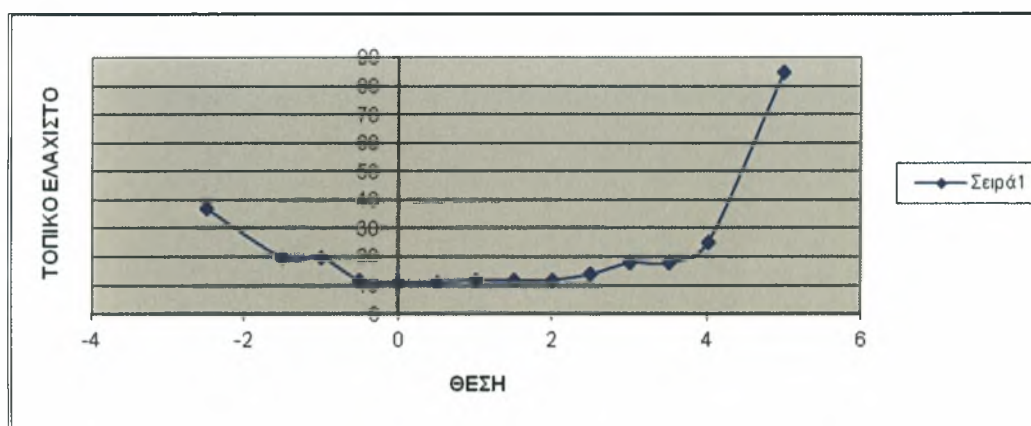
Στη συνέχεια η ανάλυση των χρονοσειρών θα αναφέρεται μόνο στις δυο χρονοσειρές, την  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης και την  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών. Η αρχική χρονοσειρά  $a$  έχει πρακτικά την ίδια συμπεριφορά με την  $w$ . Εάν κάπου παρατηρηθεί διαφορά στην συμπεριφορά θα αναφερθεί.

Παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας των προσαρμοσμένων αρχικών χρονοσειρών.



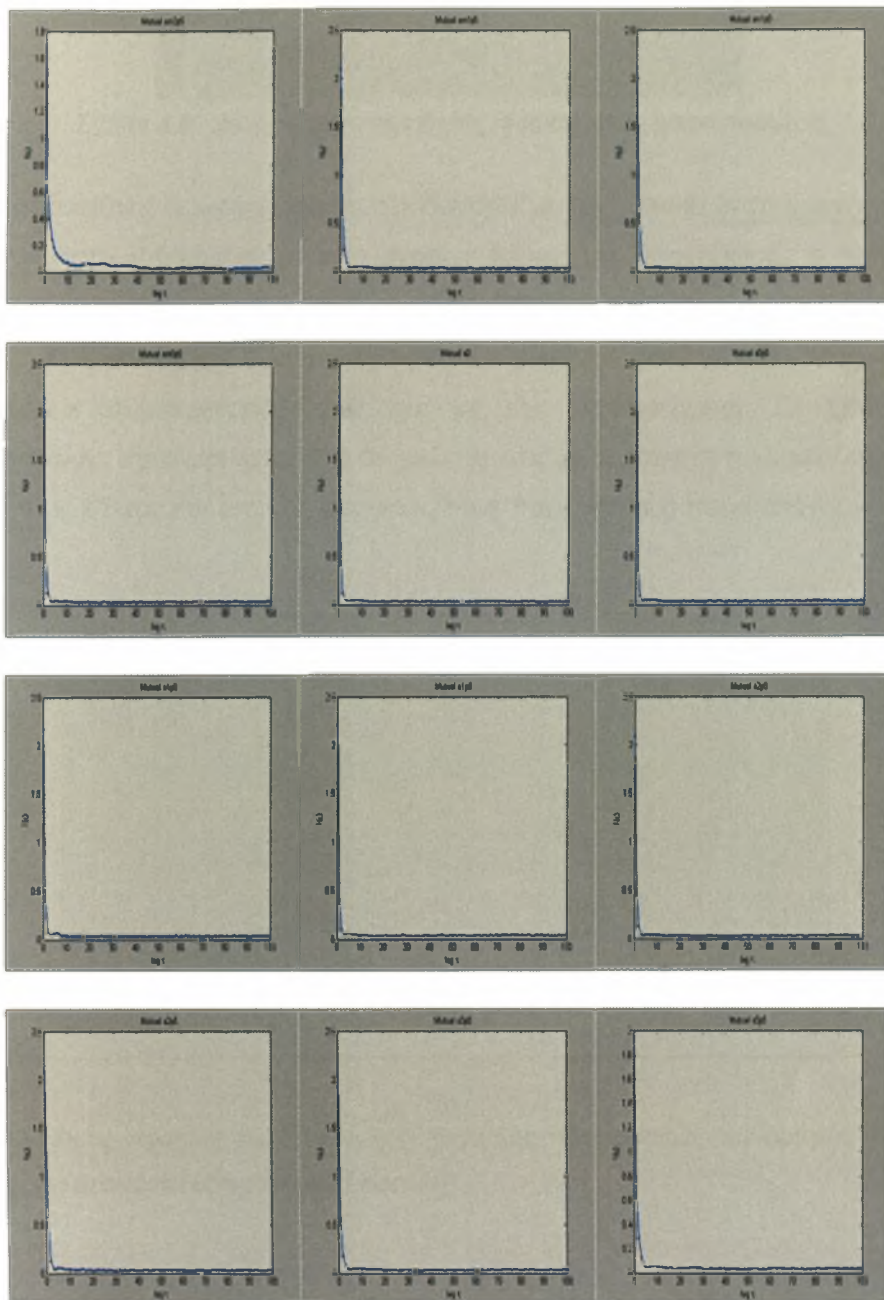
Σχήμα 4.6 : Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας χρονοσειρών  $w$

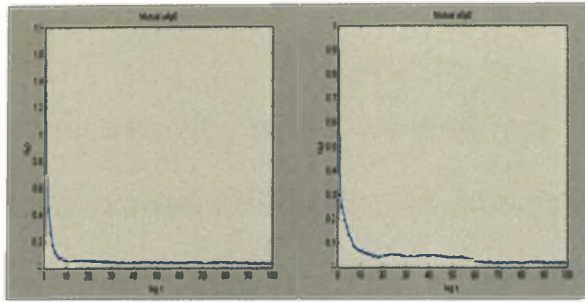
Από τα παραπάνω διαγράμματα σε συνδυασμό με τον πίνακα θέση χρονοσειράς- 1<sup>ο</sup> τοπικό ελάχιστο προκύπτει ότι στις ακραίες θέσεις της χρονοσειράς η τιμή του 1<sup>ου</sup> τοπικού ελαχίστου παρατηρούμε υψηλές τιμές, ενώ στις κεντρικές τιμές της χρονοσειράς παρατηρούμε χαμηλές τιμές και περίπου ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή στις κεντρικές τιμές υπάρχουν περισσότερες δίνες που αντιστοιχούν σε μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους, ενώ στις ακραίες τιμές επικρατούν δίνες με μεγαλύτερους χρόνους. Αυτό αποδίδεται στο γεγονός ότι κοντά στα όρια της φλέβας, η συμβολή των δομών μεγάλης κλίμακας είναι σημαντική. Οι δομές όμως αυτού του τύπου χαρακτηρίζονται από μεγάλους χρόνους ζωής και κατά συνέπεια προκαλούν επιδράσεις μακράς μνήμης. Αντίθετα κοντά στον άξονα της φλέβας οι μικρές δίνες είναι επικρατέστερες και δεδομένου ότι έχουν μικρότερους χρόνους ζωής οδηγούν σε επιδράσεις βραχείας μνήμης.



Σχήμα 4.7: Τιμές πρώτων ελαχίστων της αμοιβαίας πληροφορίας συναρτήσεως της θέσης μέτρησης (για αρχικές προσαρμοσμένες χρονοσειρές).

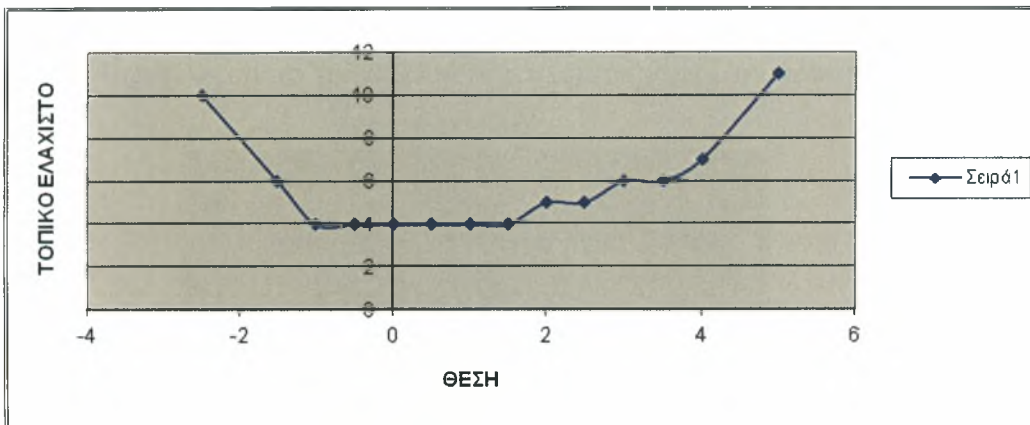
Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας των χρονοσειρών διαφορών.





Σχήμα 4.8 : Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας χρονοσειρών  $q$

Από τα παραπάνω διαγράμματα σε συνδυασμό με τον πίνακα θέση χρονοσειράς- 1<sup>ο</sup> τοπικό ελάχιστο προκύπτει ότι στις ακραίες θέσεις της χρονοσειράς η τιμή του 1<sup>ου</sup> τοπικού ελαχίστου αυξάνεται στις ακραίες θέσεις, ενώ στις κεντρικές τιμές της χρονοσειράς παρατηρούμε χαμηλές τιμές και περίπου ίσες μεταξύ τους. Και εδώ παρατηρούμε συμπεριφορά αντίστοιχη με την προηγούμενη. Οι χρόνοι είναι μικρότεροι αλλά αυτό οφείλεται στο ότι μελετάμε τις χρονοσειρές πρώτων διαφορών οι οποίες όπως είδαμε και από τις γραφικές τους παραστάσεις παρουσιάζουν ταχύτερη μεταβολή.



Σχήμα 4.9 Τιμές πρώτων ελαχίστων της αμοιβαίας πληροφορίας συναρτήσεως της θέσης μέτρησης (για χρονοσειρές πρώτων διαφορών).



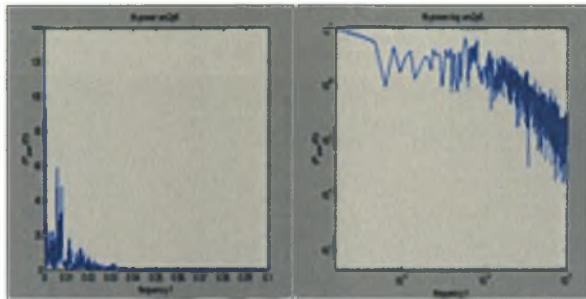
#### 4.4 ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ

Στο σχεδιασμό του φάσματος ισχύος υπολογίζονται οι συχνότητες στην κανονική μορφή της χρονοσειράς καθώς και στη λογαριθμική μορφή ώστε να διερευνηθεί η ύπαρξη τομών κλίμακας της μορφής  $P(f)=cf^\alpha$  με  $\alpha$  θετικό ή αρνητικό. Αξίζει ν' αναφερθεί ότι η ύπαρξη τομών κλίμακας σε φάσματα ισχύος έχει συνδεθεί με χασοτική συμπεριφορά (Mandelbrot, 2002 ) και με την ύπαρξη πολυπλοκότητας (Bak et. al, 1992).

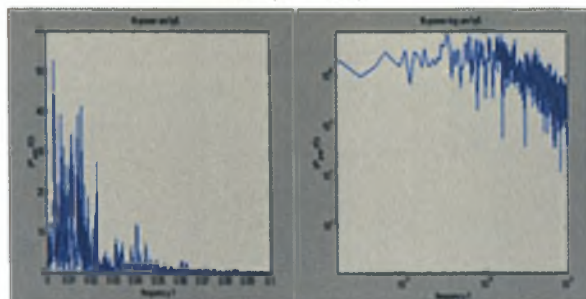
Παρακάτω παρατίθενται τα φάσματα ισχύος των χρονοσειρών  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης και  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές και στις δυο μορφές( κανονική-λογαριθμική).

##### Αρχικά Φάσματα ισχύος μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

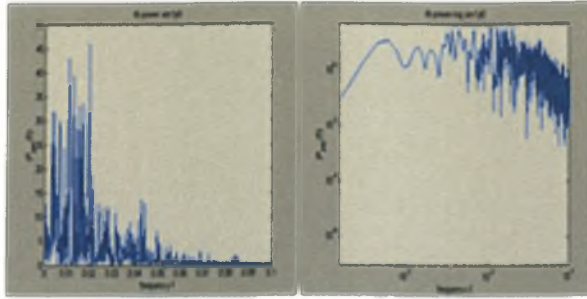
$$w_1(x=-2,5)$$



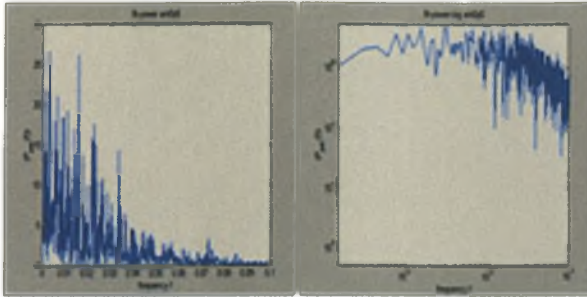
$$w_2(x=-1,5)$$



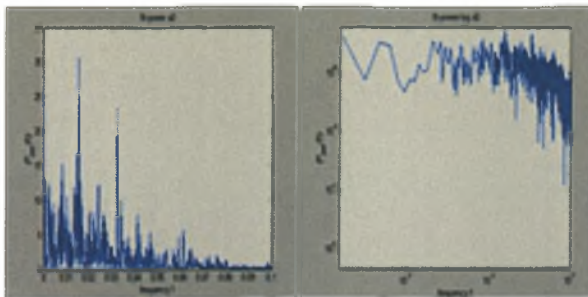
$$w_3(x=-1,0)$$



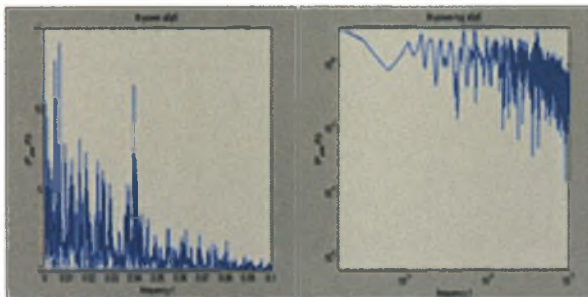
$w_4(x=-0,5)$



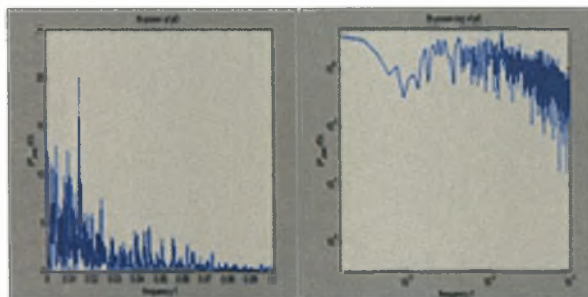
$w_5(x=0)$



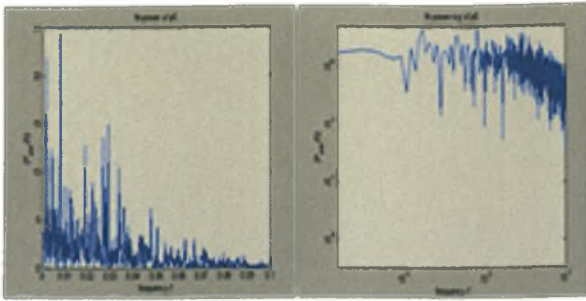
$w_6(x=0,5)$



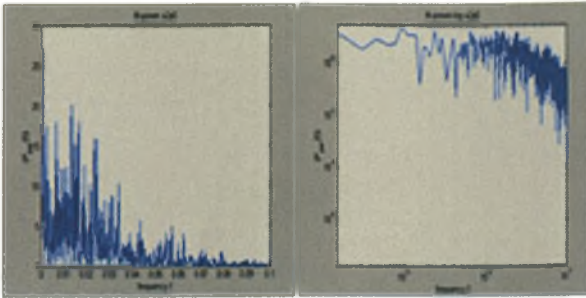
$w_7(x=1,0)$



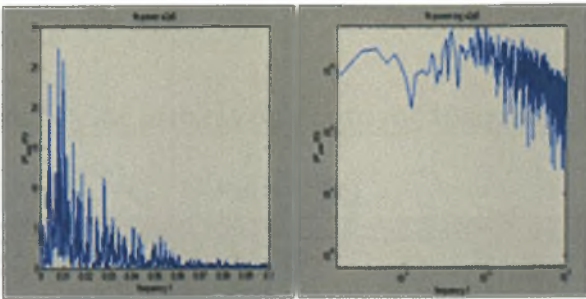
$w_8(x=1,5)$



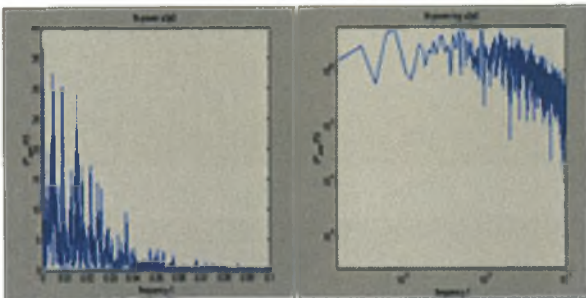
$w_9(x=2,0)$



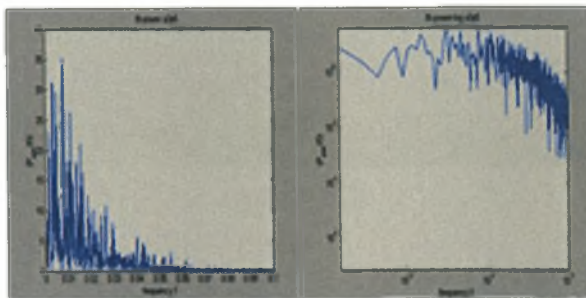
$w_{10}(x=2,5)$



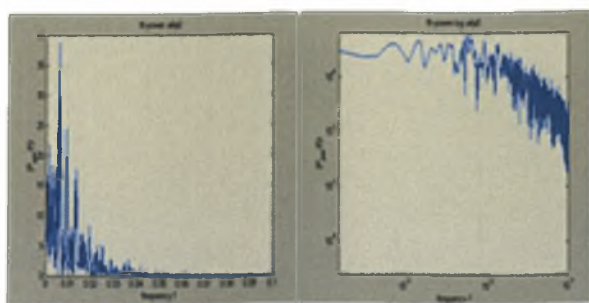
$w_{11}(x=3,0)$



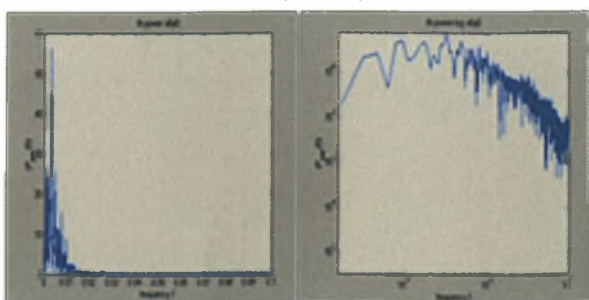
$w_{12}(x=3,5)$



$w_{13}(x=4,0)$



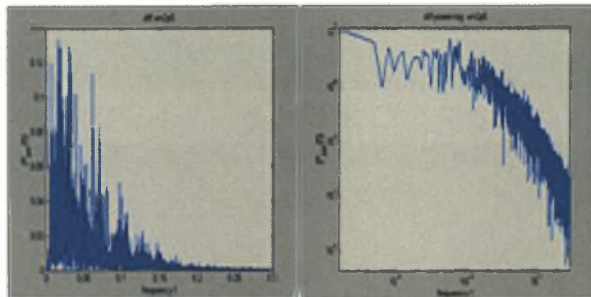
$w_{14}(x=5,0)$



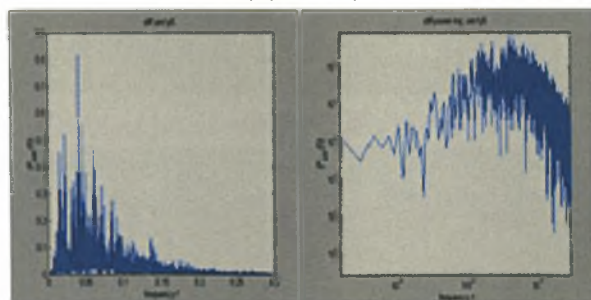
Σχήμα 4.10 : Φάσματα ισχύος χρονοσειρών  $w$

Αρχικά φάσματα ισχύος μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές

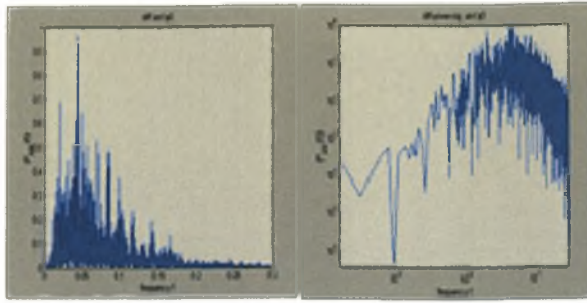
$q_1(x=-2,5)$



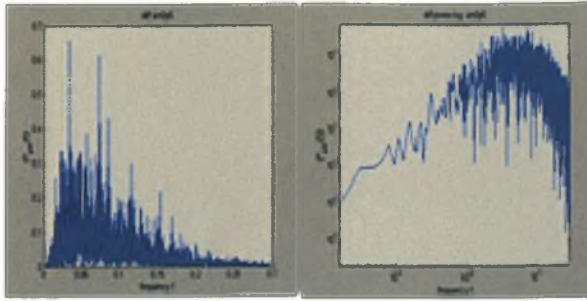
$q_2(x=-1,5)$



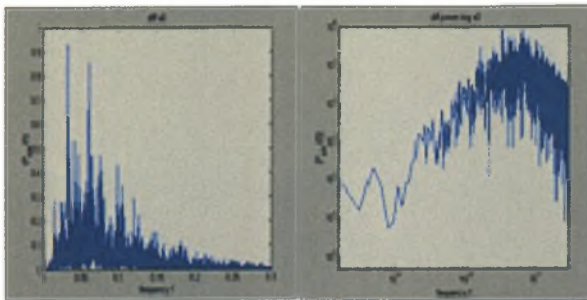
$q_3(x=-1,0)$



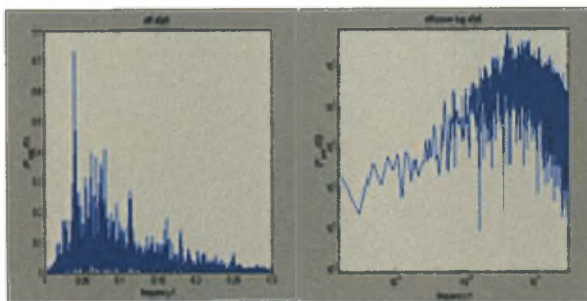
$q_4(x=-0,5)$



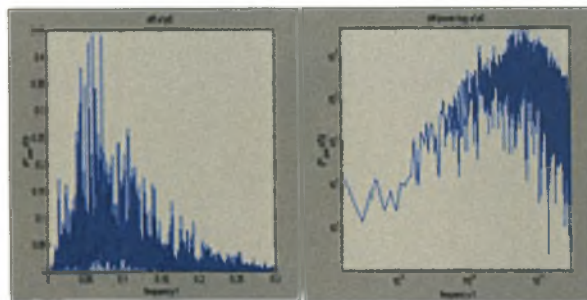
$q_5(x=0)$



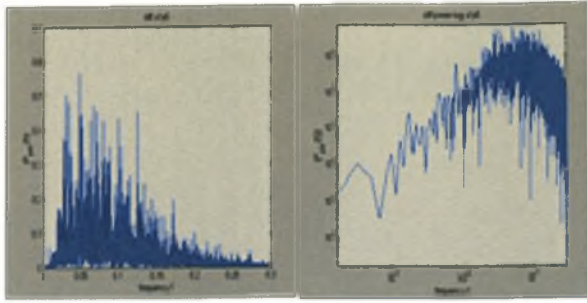
$q_6(x=0,5)$



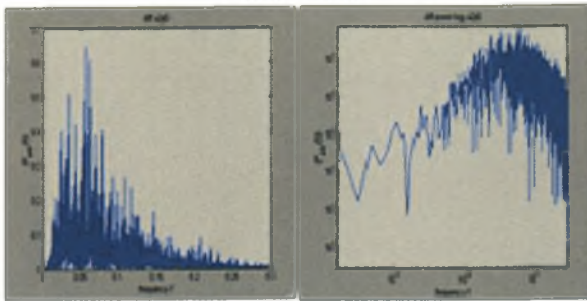
$q_7(x=1,0)$



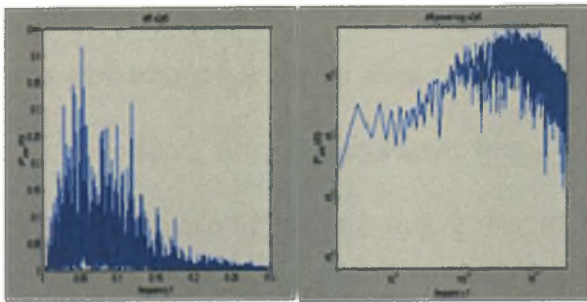
$q_8(x=1,5)$



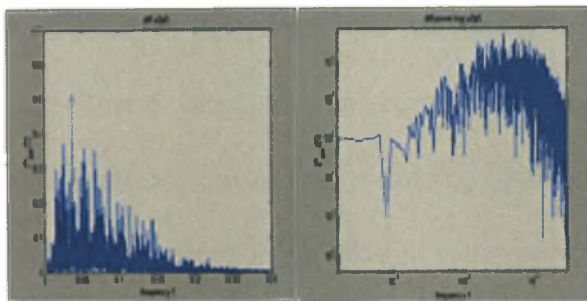
$q_9(x=2,0)$



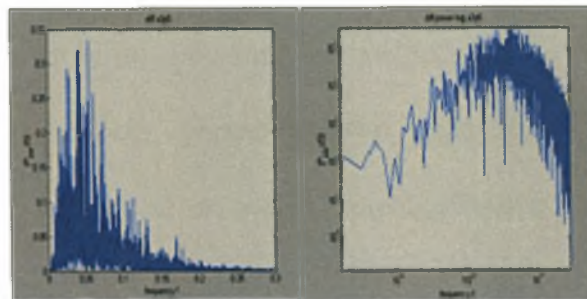
$q_{10}(x=2,5)$



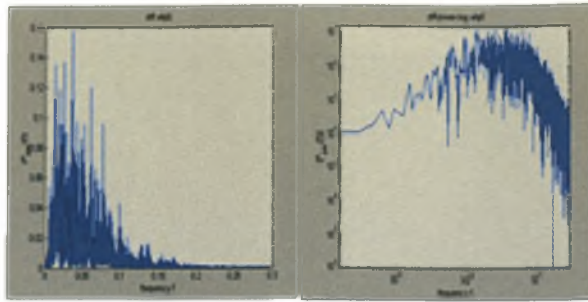
$q_{11}(x=3,0)$



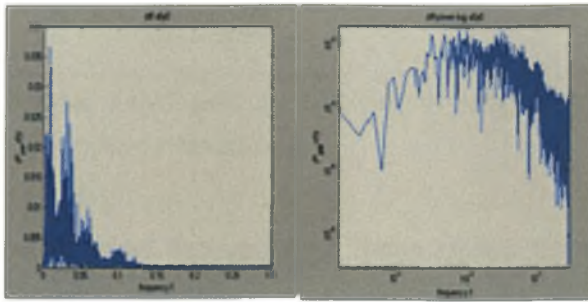
$q_{12}(x=3,5)$



$q_{13}(x=4,0)$

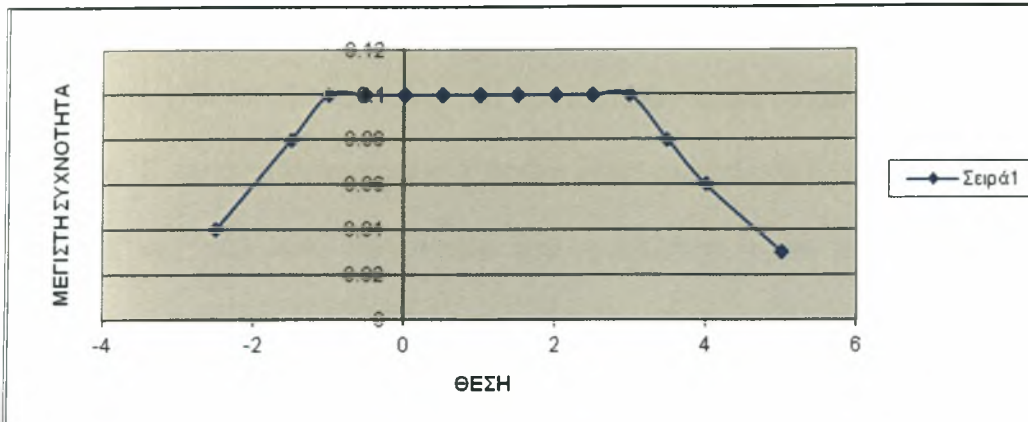


$q_{14} (x=5,0)$



Σχήμα 4.11 : Φάσματα ισχύος χρονοσειρών  $q$

Στα διαγράμματα αυτά παρατηρήσαμε ότι το άνω όριο των συχνοτήτων διαφέρει ανάλογα με τη θέση καταγραφής. Από το διάγραμμα θέσης- μέγιστης συχνότητας παρατηρούμε ότι στα ακραία σημεία δεν έχουμε συχνότητες σε όλο το εύρος από 0 έως  $0.1f_{max}$ , ενώ στα κεντρικά σημεία της χρονοσειράς εμφανίζονται σε όλο το εύρος από 0 έως  $0.1f_{max}$ , δηλαδή το διάγραμμα έχει πιο ομαλή κατανομή. Στα ακραία σημεία μέτρησης εμφανίζονται μικρότερες συχνότητες, ενώ στα κεντρικά σημεία μέτρησης σημειώνονται σταθερές συχνότητες οι οποίες έχουν την τιμή  $0.1f_{max}=8\text{Hz}$ . Αυτό σημαίνει ότι στην κεντρική περιοχή λαμβάνουν χώρα φαινόμενα με υψηλότερες συχνότητες δηλαδή μικρότερους χαρακτηριστικούς χρόνους. Αυτό μπορεί να συσχετιστεί με το γεγονός ότι στην τυρβώδη φλέβα στην κεντρική περιοχή έχουμε μικρότερες δίνες με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους, ενώ προς τα άκρα επικρατούν οι μεγάλες δίνες με μεγάλους χαρακτηριστικούς χρόνους και συνεπώς μικρές συχνότητες.



Σχήμα 4.12 : Τιμές μέγιστης συχνότητας της αμοιβαίας πληροφορίας συναρτήσεως της θέσης μέτρησης (για χρονοσειρές πρώτων διαφορών).

Με μια προσεκτική ματιά στα γραμμικά διαγράμματα παρατηρούμε ότι καθώς μετακινούμαστε από το σημείο  $x=-2.5$  έχουμε αύξηση των υψηλών συχνοτήτων (φαινομένων με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους) και ξανά περιορισμό αυτών των συχνοτήτων από το σημείο  $x=1.0$  όπου επικρατούν κυρίως χαμηλές συχνοτήτες.

Αυτό μπορεί να συσχετισθεί με το γεγονός ότι στα άκρα της φλέβας αναμένεται να επικρατούν πολύ μεγάλες δομές (με μεγάλους χαρακτηριστικούς χρόνους), οι οποίες ταξιδεύουν αργά και επηρεάζουν σε μεγάλους χρόνους (μικρές συχνοτήτες) τη θερμοκρασία.

Κοιτώντας τα λογαριθμικά διαγράμματα παρατηρούμε την ύπαρξη περισσότερων της μιας κλίσεων (φαίνεται να υπάρχουν τρεις κλίσεις στις χρονοσειρές με αφαίρεση γραμμικής τάσης και δυο στις χρονοσειρές με αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές). Η διαφορά στη χρονοσειρά πρώτων διαφορών οφείλεται μάλλον στο γεγονός ότι οι πρώτες διαφορές λειτουργούν και ως υψηλοπερατό φίλτρο και επίσης γνωρίζουμε ότι  $M\Phi(g') = \omega M\Phi(g)$ . Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε αντίστοιχη μεταβολή της μορφής των φασμάτων όπως και στην περίπτωση των γραμμικών, όπως άλλωστε είναι αναμενόμενο.



Στα λογαριθμικά διαγράμματα των χρονοσειρών  $w$  φαίνονται κάποιες συχνότητες ενώ στα διαγράμματα των χρονοσειρών  $q$  διαπιστώνεται η ύπαρξη δύο κλίσεων. Σ' αυτά τα διαγράμματα η πρώτη κλίση είναι ανοδική και εμφανίζεται στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων ενώ η δεύτερη κλίση είναι καθοδική και εμφανίζεται στην περιοχή υψηλών συχνοτήτων. Φαίνεται ότι υπάρχει διαφορετική συμπεριφορά στις χαμηλές από ότι στις υψηλές συχνότητες.

Έχουμε παρουσία μεγάλου εύρους συχνοτήτων από χαμηλές (μεγάλοι χρόνοι) ως υψηλές (μικροί χρόνοι) γεγονός που δείχνει την ύπαρξη μηχανισμών σε πολλές χρονικές κλίμακες με μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών χρόνων. Είναι άλλωστε και αναμενόμενο κοντά στον άξονα της φλέβας όπου περιμένουμε να έχουμε πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη. Κατά τη μετακίνηση  $q_9$  ( $x=2.0$ ),  $q_{10}$  ( $x=2.5$ ) και  $q_{11}$  ( $x=3.0$ ) παρατηρείται μείωση του εύρους των υψηλών συχνοτήτων. Αυτό σημαίνει μείωση της συμμετοχής του φαινομένου με μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους και πιθανόν παρουσία μικρού μεγέθους δινών. Στις χρονοσειρές  $q_{12}$  ( $x=3.5$ ),  $q_{13}$  ( $x=4.0$ ) και  $q_{14}$  ( $x=5.0$ ) παρατηρούμε μετατόπιση προς χαμηλές συχνότητες (μεγάλοι χρόνοι). Πιθανόν η συμπεριφορά αυτή να σχετίζεται με το γεγονός ότι βρισκόμαστε στα όρια της φλέβας όπου παρατηρούνται μεγάλες δομές που "ταξιδεύουν" αργά.

Δηλαδή τα αποτελέσματα έχουν στοιχεία ποιοτικής συμφωνίας και με τα αποτελέσματα της μέσης αμοιβαίας πληροφορίας, δεδομένου ότι στα σημεία κοντά στον άξονα όπου έχουμε μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους από την αμοιβαία πληροφορία, αντιστοιχούν και πιο υψηλότερα σήματα στο φάσμα ισχύος, ενώ αντίθετως παρατηρείται ενίσχυση χαμηλών συχνοτήτων και μείωση των υψηλών συχνοτήτων κοντά στα άκρα, στα σημεία δηλαδή που παρατηρήθηκαν μεγάλοι χρόνοι στην αμοιβαία πληροφορία.

## 4.5 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

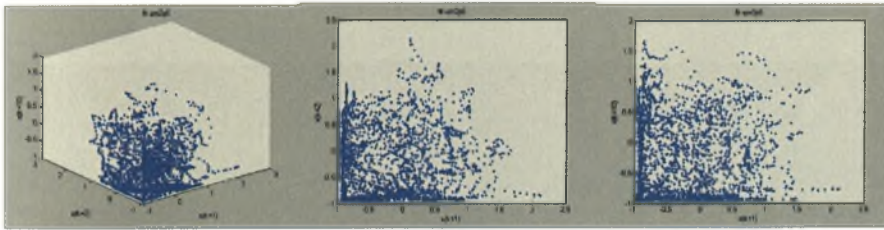
Για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων θα γίνει η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  και της διάστασης εμβύθισης  $m$ .

### 4.5.1 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων

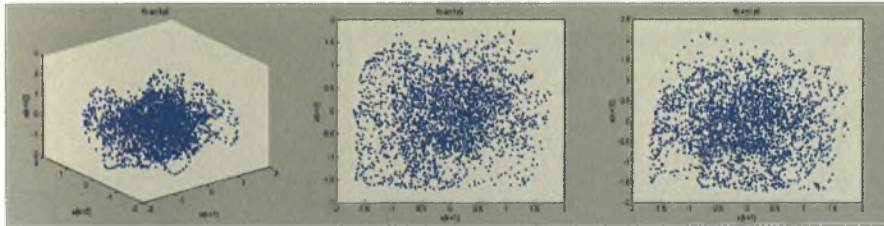
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα ανακατασκευής του χώρου των φάσεων για την αφαίρεση της γραμμικής τάσης και για την αφαίρεση τάσης με πρώτες διαφορές.

Ανακατασκευασμένος χώρος φάσεων μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

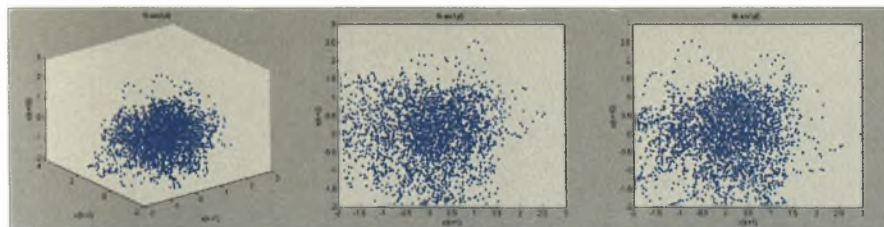
$$w_1(x=-2,5)$$



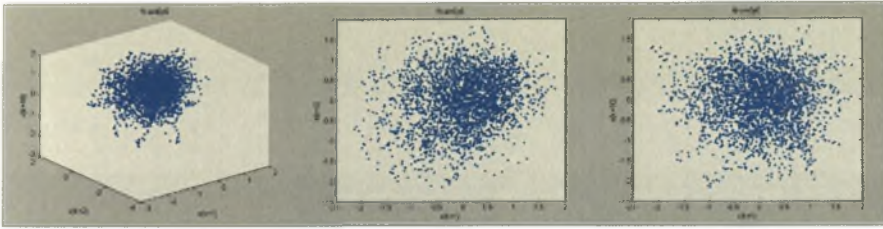
$$w_2(x=-1,5)$$



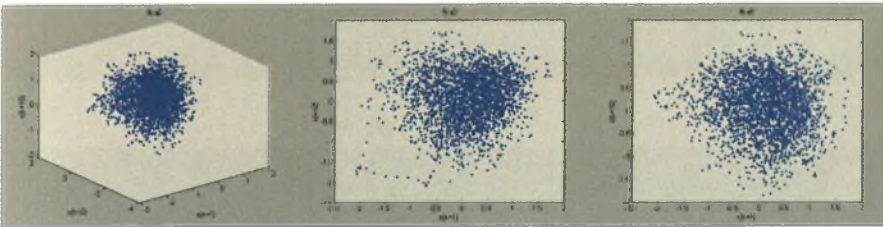
$$w_3(x=-1,0)$$



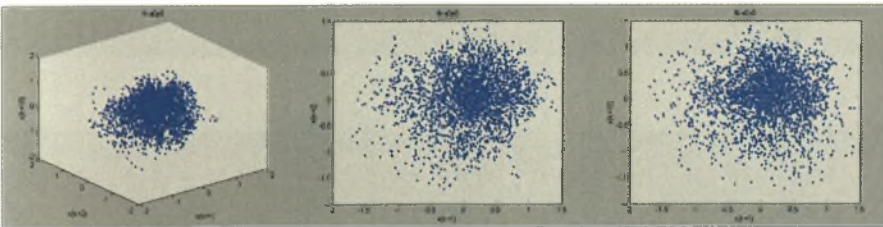
$w_4(x=-0,5)$



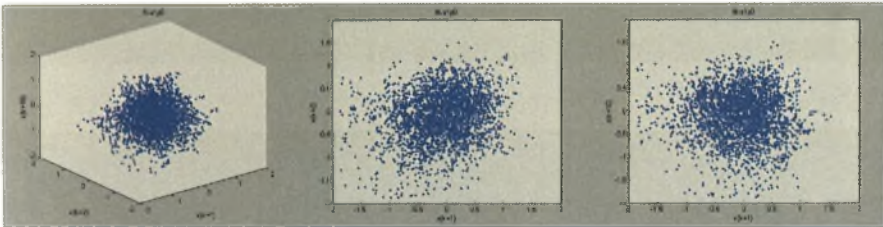
$w_5(x=0)$



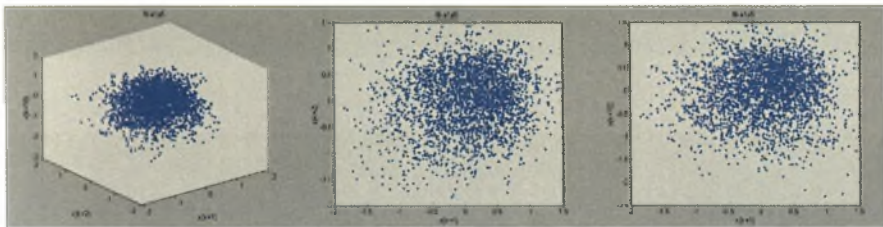
$w_6(x=0,5)$



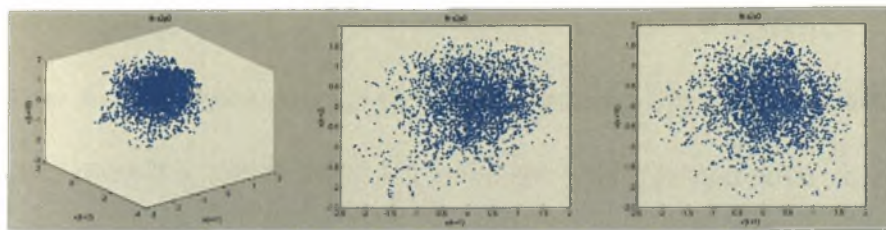
$w_7(x=1,0)$



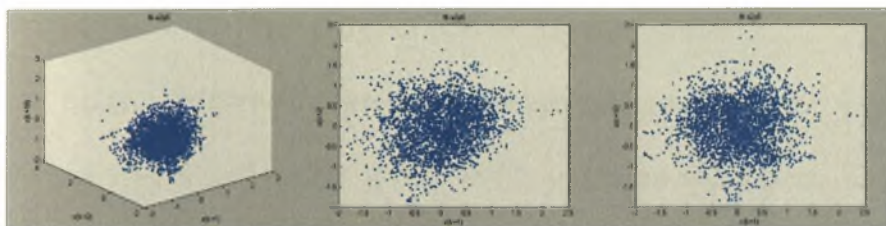
$w_8(x=1,5)$



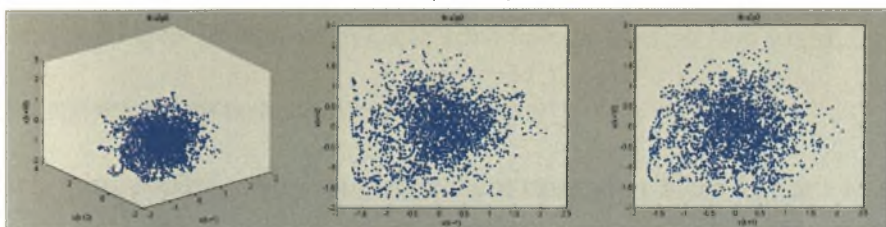
$w_9(x=2,0)$



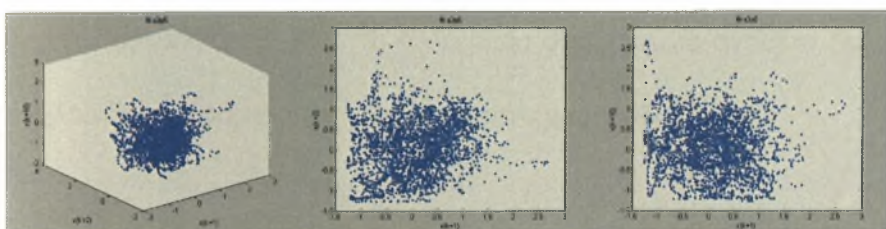
$w_{10}(x=2,5)$



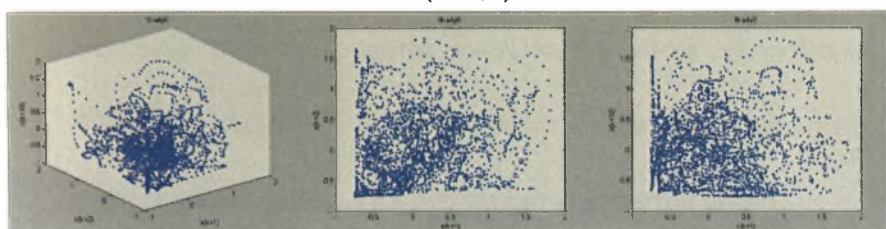
$w_{11}(x=3,0)$



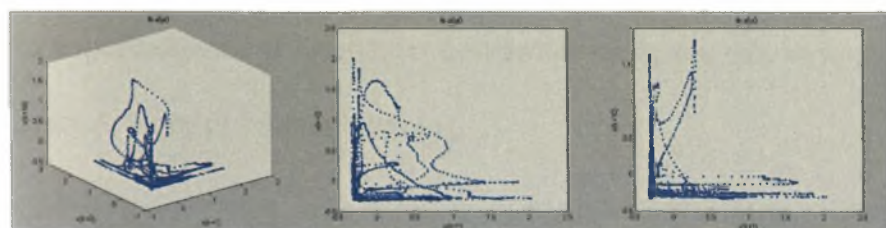
$w_{12}(x=3,5)$



$w_{13}(x=4,0)$



$w_{14}(x=5,0)$



Σχήμα 4.13 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $w$

Τα παραπάνω διαγράμματα μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες:

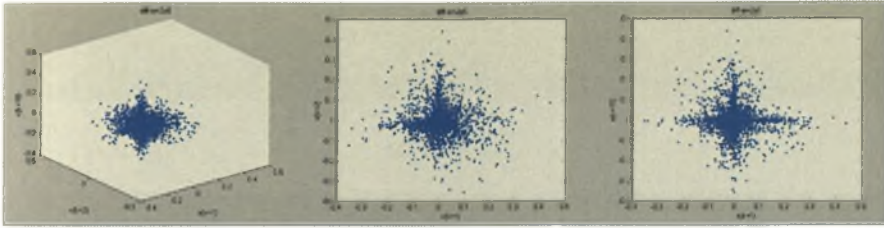
- Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές στα άκρα της φλέβας που είναι οι  $x=-2.5$ ,  $x=3.5$ ,  $x=4.0$ , και  $x=5.0$  όπου το σύστημα τείνει να καταλάβει την κάτω αριστερή γωνία του διαγράμματος. Η δομή μας δίνει γραμμές ή επίπεδα και το σύστημα φαίνεται να είναι χαμηλοδιάστατο.
- Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές στη μέση της φλέβας που είναι οι  $x=-0.5$ ,  $x=0$ ,  $x=0.5$ ,  $x=1.0$ ,  $x=1.5$ ,  $x=2.0$ , και  $x=2.5$  όπου το σύστημα τείνει να καταλάβει όλο τον διαθέσιμο χώρο στο χώρο των φάσεων. Η διασπορά είναι μεγάλη και η δομή φαίνεται σαν σφαίρα λίγο παραμορφωμένη. Το σύστημα είναι υψηλοδιάστατο.
- Στη τρίτη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές  $x=-1.5$ ,  $x=-1$ , και  $x=3.0$  σε μια μεταβατική περιοχή όπου το σύστημα στο ένα άκρο από χαμηλοδιάστατο γίνεται υψηλοδιάστατο και στο άλλο άκρο συμβαίνει το αντίθετο δηλαδή από υψηλοδιάστατο φαίνεται να γίνεται και πάλι χαμηλοδιάστατο.

Τα συμπεράσματα αυτά παρουσιάζουν ποιοτική συμφωνία με τα αποτελέσματα που έχουμε εξάγει από την χρονική ανάλυση (αμοιβαία πληροφορία, φάσμα ισχύος) όπου η συμμετοχή πιο πολλών δινών με μεγαλύτερο εύρος χαρακτηριστικών χρόνων ενισχύεται στα σημεία κοντά στον άξονα.

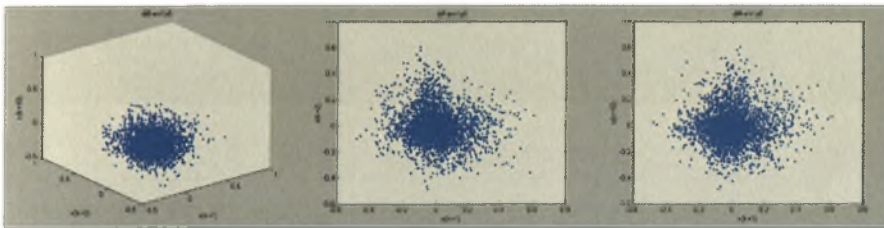
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα ανακατασκευής του χώρου των φάσεων για την αφαίρεση τάσης με πρώτες διαφορές.

Ανακατασκευασμένος χώρος φάσεων μετά την αφαίρεση τάσης με πρώτες διαφορές

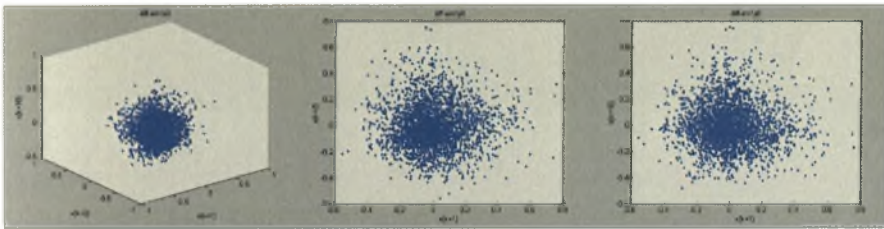
$q_1(x=-2,5)$



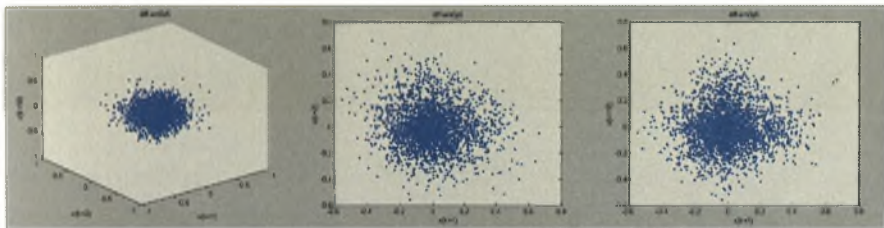
$q_2(x=-1,5)$



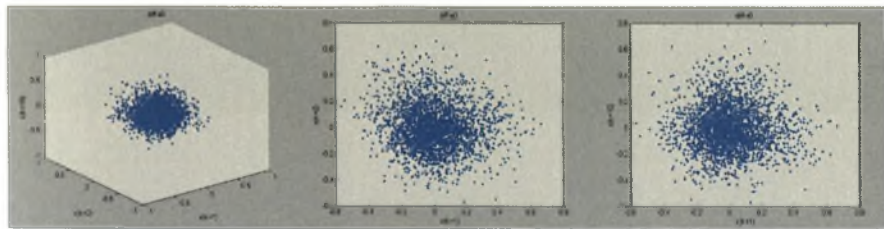
$q_3(x=-1,0)$



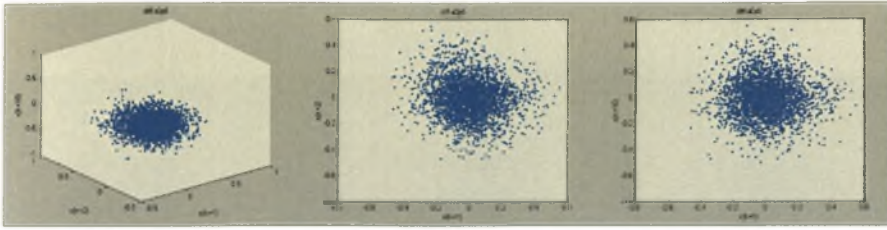
$q_4(x=-0,5)$



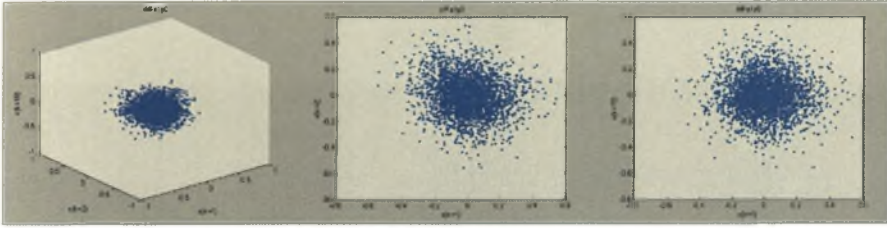
$q_5(x=0)$



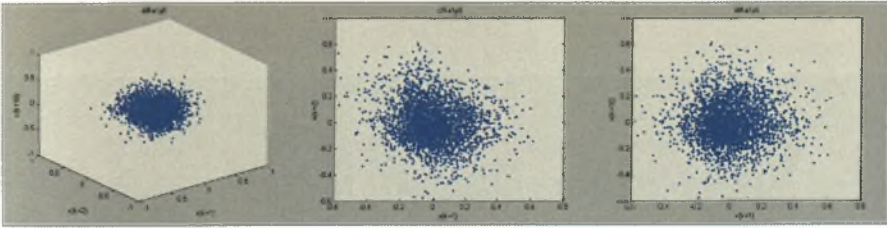
$q_6(x=0,5)$



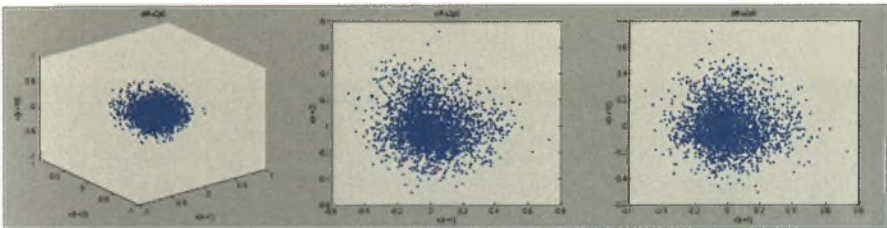
$q_7 (x=1,0)$



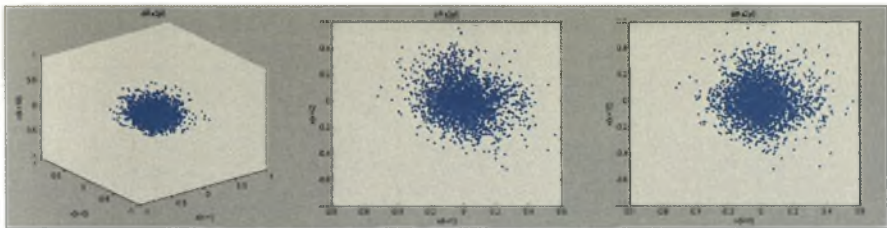
$q_8 (x=1,5)$



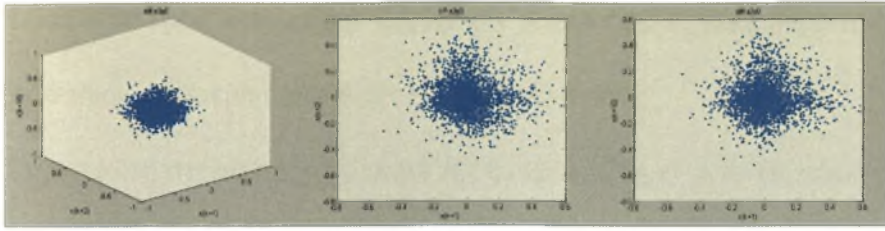
$q_9 (x=2,0)$



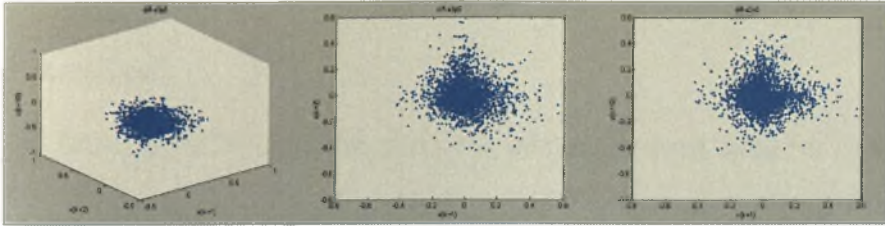
$q_{10} (x=2,5)$



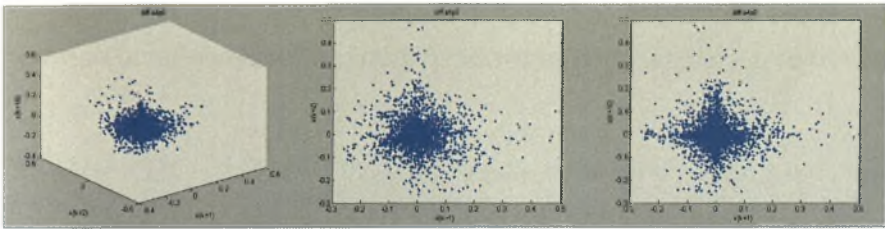
$q_{11}(x=3,0)$



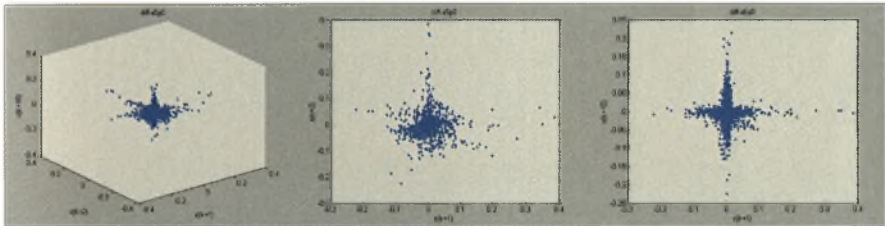
$q_{12}(x=3,5)$



$q_{13}(x=4,0)$



$q_{14}(x=5,0)$



Σχήμα 4.14 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $q$



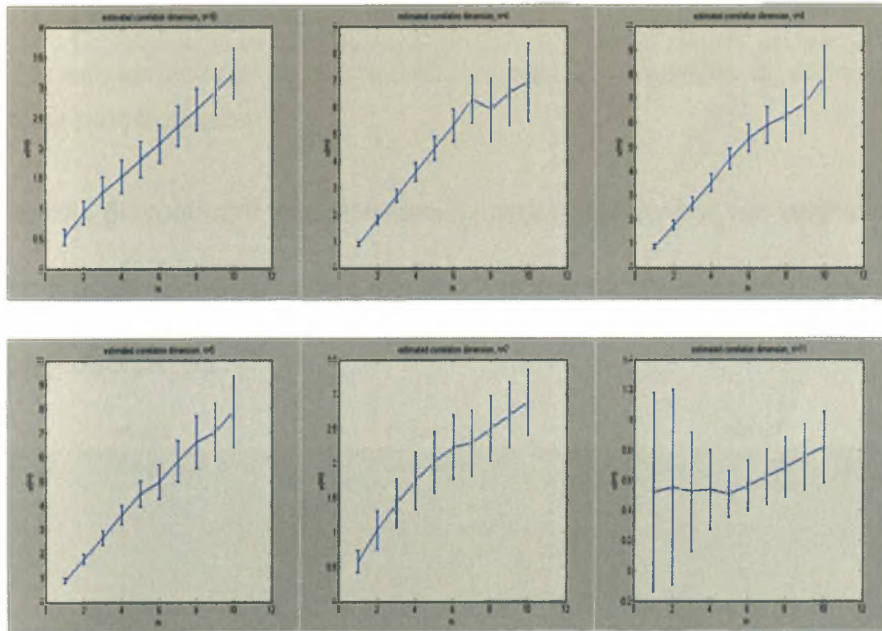
Και τα διαγράμματα της χρονοσειράς  $q$  μπορούν να χωριστούν όπως και της χρονοσειράς  $w$  σε τρεις κατηγορίες. Παρατηρούμε και εδώ τις ίδιες περιπτώσεις αλλά η διασπορά είναι μικρότερη και η δομή είναι πιο συμπαγής.

- Στην πρώτη περίπτωση στα άκρα της φλέβας η δομή τείνει να πάρει το σχήμα του σταυρού σε γραμμές ή επίπεδα και το σύστημα είναι χαμηλοδιάστατο. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ισχυρές χρονικές συσχετίσεις γεγονός που είναι αναμενόμενο.
- Στη δεύτερη περίπτωση στη μέση της φλέβας η δομή φαίνεται σαν σφαίρα λιγότερο παραμορφωμένη και το σύστημα είναι υψηλοδιάστατο.
- Ενώ στη τρίτη περίπτωση έχουμε και πάλι μια μεταβατική περιοχή όπου το σύστημα μεταβαίνει από τη χαμηλή διάσταση στην υψηλή και το αντίθετο.

Παρατηρούμε συνεπώς αντίστοιχα συμπεράσματα με αυτά των χρονοσειρών  $w$ .

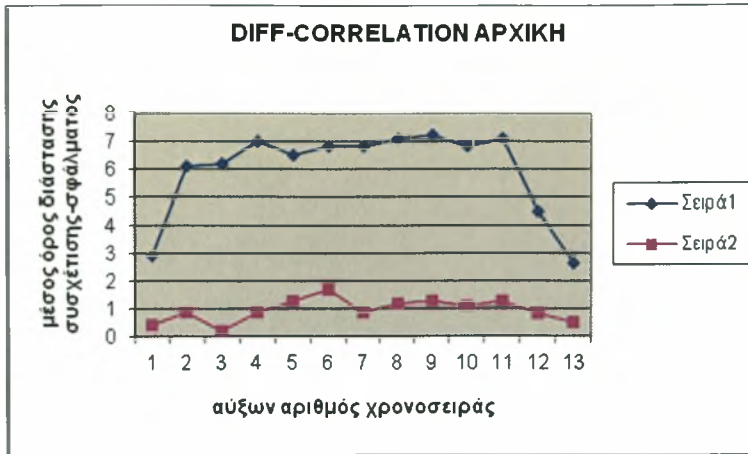
#### 4.6 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΑΡΧΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ

Στα παρακάτω διαγράμματα παρατίθεται ενδεικτικά η διάσταση συσχέτισης των αρχικών χρονοσειρών διαφορών και η γραφική παράσταση μέσου όρου διάστασης συσχέτισης- σφάλματος.



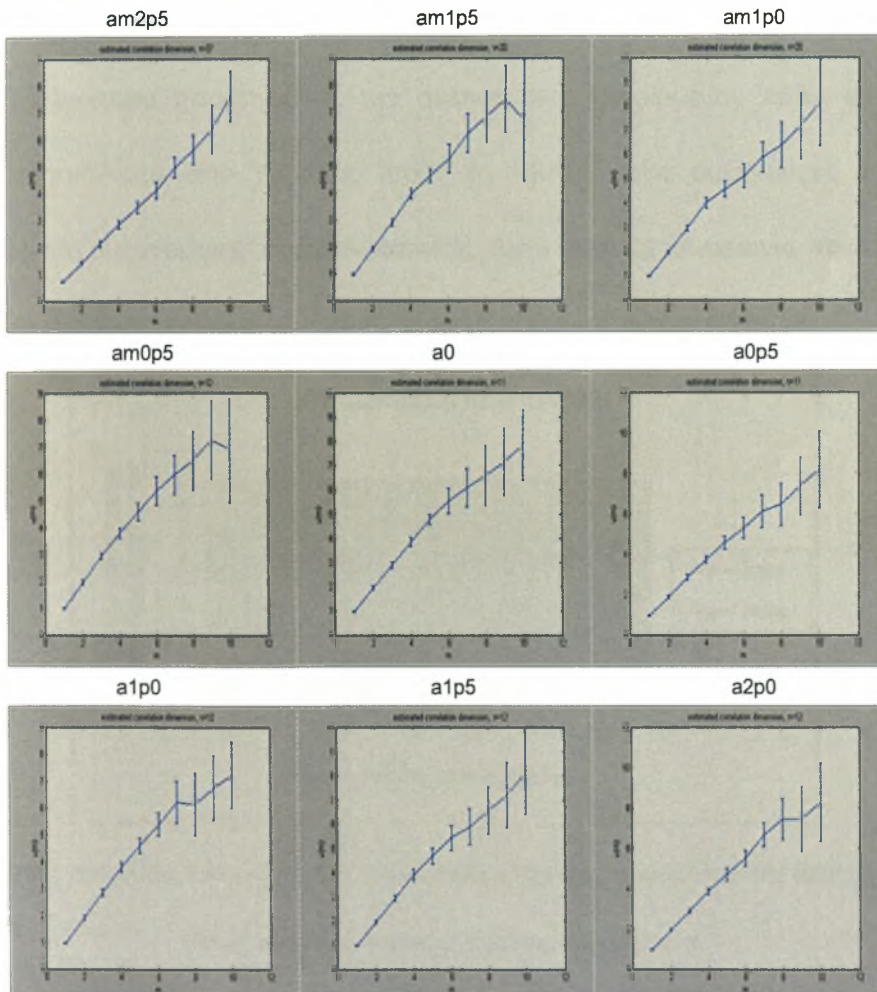
Σχήμα 4.15 : Διάσταση συσχέτισης αρχικών χρονοσειρών διαφορών

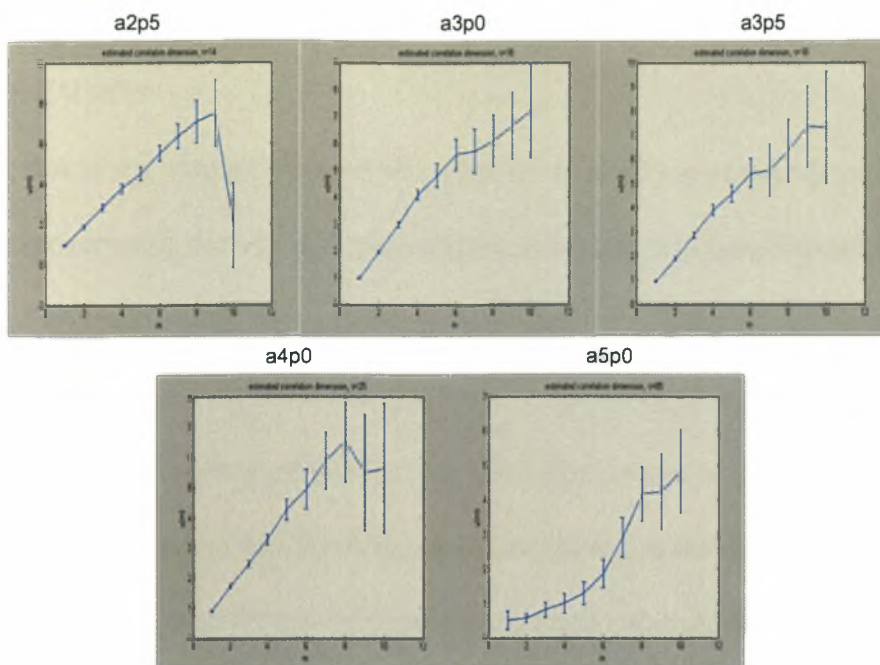
Είναι δύσκολη η σύγκλιση ίσως και λόγω του μικρού πλήθους δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας. Μπορούμε όμως να προβούμε σε μια εκτίμηση του κάτω φράγματος της διάστασης συσχέτισης. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα. Από το διάγραμμα παρατηρούμε μια αύξηση του εκτιμώμενου κάτω φράγματος καθώς πλησιάζουμε από τα άκρα προς το κέντρο. Μια αυξανόμενη τιμή είναι ενδεικτική της αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Αυτό είναι σε συμφωνία ποιοτικά τόσο με το φάσμα ισχύος, όσο και την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων.



Σχήμα 4.16 : Διάσταση συσχέτισης και το αντίστοιχο σφάλμα συναρτήσεως της θέσης μέτρησης για τις συναρτήσεις διαφορών.

Στα παρακάτω διαγράμματα παρατίθεται η διάσταση συσχέτισης των αρχικών προσαρμοσμένων χρονοσειρών και η γραφική παράσταση μέσου όρου διάστασης συσχέτισης- σφάλματος.

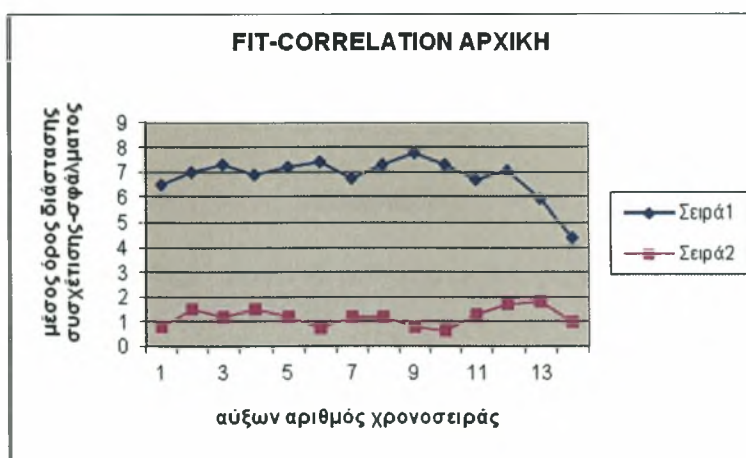




Σχήμα 4.17 : Διάσταση συσχέτισης αρχικών προσαρμοσμένων χρονοσειρών

Μπορούμε πάλι να προβούμε σε μια εκτίμηση του κάτω φράγματος της διάστασης συσχέτισης. Οι τιμές αυτές παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε μια αύξηση του εκτιμώμενου κάτω φράγματος καθώς πλησιάζουμε από τα άκρα προς το κέντρο. Μια αυξανόμενη τιμή είναι ενδεικτική της αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Αυτό είναι σε συμφωνία ποιοτικά τόσο με το φάσμα ισχύος, όσο και την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων.



Σχήμα 4.18 : Διάσταση συσχέτισης και το αντίστοιχο σφάλμα συναρτήσεως της θέσης μέτρησης για τις αρχικές προσαρμοσμένες συναρτήσεις.

## 5. ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ( ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΜΕΓΙΣΤΩΝ-ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ)

### 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πρωτοτυπία της παρούσας εργασίας είναι ότι η ανάλυση εφαρμόζεται τόσο στις αρχικές χρονοσειρές, όσο και στις χρονοσειρές ακραίων τιμών (μεγίστων-ελαχίστων) . Με τη διαδικασία αυτή οι αρχικές χρονοσειρές περιορίζονται σε χρονοσειρές ζευγαριών διαδοχικών μεγίστων και ελαχίστων τιμών. Στόχος της ανάλυσης είναι να διερευνηθεί το κατά πόσο είναι δυνατό μια χρονοσειρά ακραίων τιμών να αποκαλύψει δυναμικά χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου συστήματος, πιθανώς και καλύτερα από τις αρχικές χρονοσειρές. Τα αποτελέσματα είναι πολύ ενδιαφέροντα αφού μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι μπορούμε να μελετάμε καλύτερα τα δυναμικά συστήματα χρησιμοποιώντας μικρότερο αριθμό δεδομένων. Η μελέτη βασίστηκε στην εργασία Kugiumtzis et al (2004,2008). Σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει εάν οι γραμμικές και οι μη γραμμικές μέθοδοι όπως η αθροιστική πληροφορία μπορεί να αποδώσει την κατάσταση του συστήματος με την ανάλυση των λιγότερων δεδομένων αντί των δεδομένων της αρχικής χρονοσειράς.

Χρησιμοποιούμε ένα καινούριο μη γραμμικό μέτρο, την Αθροιστική αμοιβαία πληροφορία (cumulative mutual information) η οποία ορίζεται ως το άθροισμα της αμοιβαίας πληροφορίας  $I(\tau)$  για τον αριθμό υστέρησης.

$$M(\tau_{max})=EI(\tau)$$

Η ομαδοποίηση (clustering) αποτελεί μια σημαντική τεχνική η οποία εντάσσει σε ομάδες παρόμοια αριθμητικά δεδομένα.

Στη συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήσαμε αλγόριθμο ιεραρχικής ομαδοποίησης με σκοπό να συνδέσουμε τα δεδομένα μας. Οι τεχνικές ομαδοποίησης εφαρμόστηκαν τόσο στις αρχικές, όσο και στις ακραίες χρονοσειρές. Ένα από τα βασικά

πλεονεκτήματα της Ιεραρχικής Ομαδοποίησης είναι ότι παράγεται ένα διάγραμμα δέντρο (tree diagram) και με τον τρόπο αυτό αναδεικνύονται οι ομάδες μεταξύ ενός set δεδομένων. Τα βήματα είναι τα εξής:

A) υπολογίζουμε την Ευκλείδεια απόσταση  $y$  μεταξύ ζευγαριών αντικειμένων σε  $n \times p$  μητρώο δεδομένων  $X$ . Οι σειρές στο μητρώο αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις, ενώ οι στήλες αντιστοιχούν στις μεταβλητές.

B) δημιουργούμε ένα δέντρο ιεραρχίας  $z$  από το μητρώο δυσκαμψίας  $y$ .

Γ) στο τέλος ομαδοποιούμε τα δεδομένα σε ομάδες. Τα δεδομένα που έχουν τη μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ τους τοποθετούνται στην ίδια ομάδα.

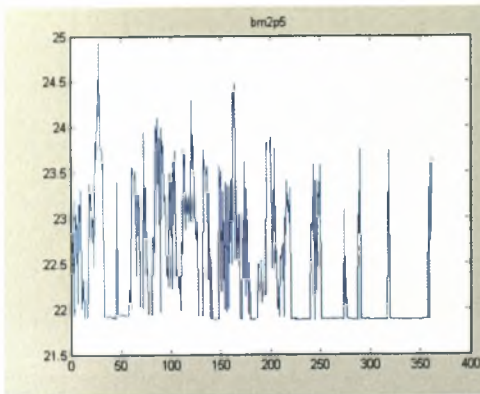
Η μεθοδολογία αυτή έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία στη μελέτη διαφόρων συστημάτων (Kugiumtzis et al 2004, 2008, Charakopoulos et al. 2011).

a/a Χρονοσειράς	Θέση μέτρησης	Ονομασία Χρονοσειράς	Αρχική χρονοσειρά	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης	Χρονοσειρά μετά την αφαίρεση της τάσης με πρώτες διαφορές
			(α)	(β)	(γ)
1	-2,5	bm2p5	b <sub>1</sub>	w <sub>1</sub> '	q <sub>1</sub> '
2	-1,5	bm1p5	b <sub>2</sub>	w <sub>2</sub> '	q <sub>2</sub> '
3	-1,0	bm1p0	b <sub>3</sub>	w <sub>3</sub> '	q <sub>3</sub> '
4	-0,5	bm0p5	b <sub>4</sub>	w <sub>4</sub> '	q <sub>4</sub> '
5	0	b0	b <sub>5</sub>	w <sub>5</sub> '	q <sub>5</sub> '
6	0,5	b0p5	b <sub>6</sub>	w <sub>6</sub> '	q <sub>6</sub> '
7	1,0	b1p0	b <sub>7</sub>	w <sub>7</sub> '	q <sub>7</sub> '
8	1,5	b1p5	b <sub>8</sub>	w <sub>8</sub> '	q <sub>8</sub> '
9	2,0	b2p0	b <sub>9</sub>	w <sub>9</sub> '	q <sub>9</sub> '
10	2,5	b2p5	b <sub>10</sub>	w <sub>10</sub> '	q <sub>10</sub> '
11	3,0	b3p0	b <sub>11</sub>	w <sub>11</sub> '	q <sub>11</sub> '
12	3,5	b3p5	b <sub>12</sub>	w <sub>12</sub> '	q <sub>12</sub> '
13	4,0	b4p0	b <sub>13</sub>	w <sub>13</sub> '	q <sub>13</sub> '
14	5,0	b5p0	b <sub>14</sub>	w <sub>14</sub> '	q <sub>14</sub> '

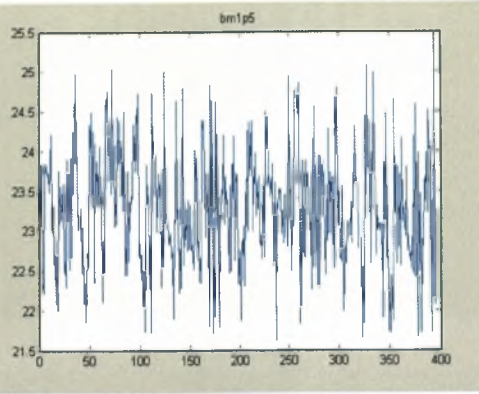
Πίνακας 5.1 : Χαρακτηριστικά χρονοσειρών ακροτάτων

## 5.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

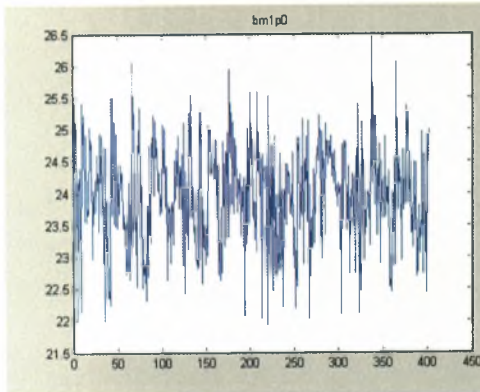
$b_1(x=-2,5)$



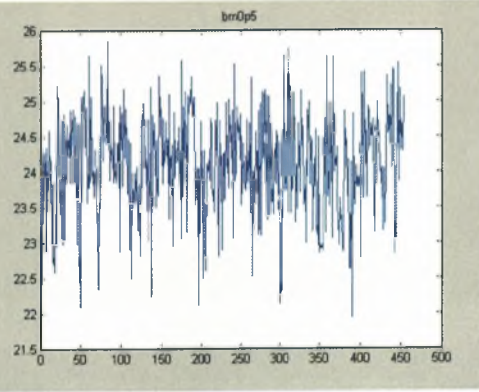
$b_2(x=-1,5)$



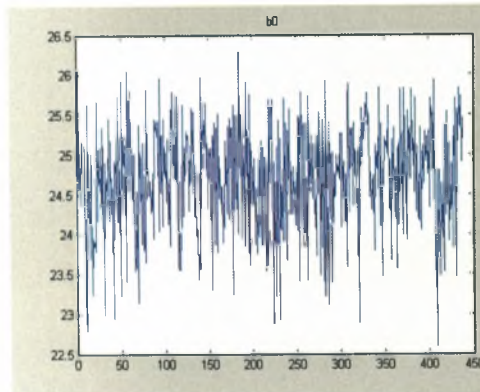
$b_3(x=-1,0)$



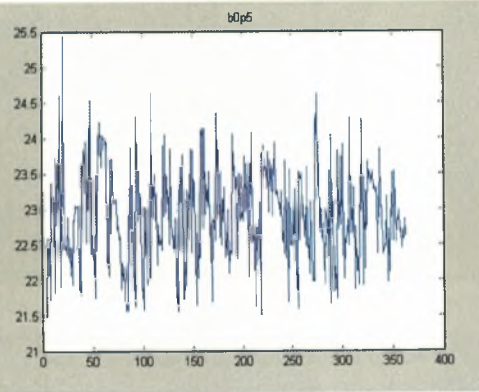
$b_4(x=-0,5)$



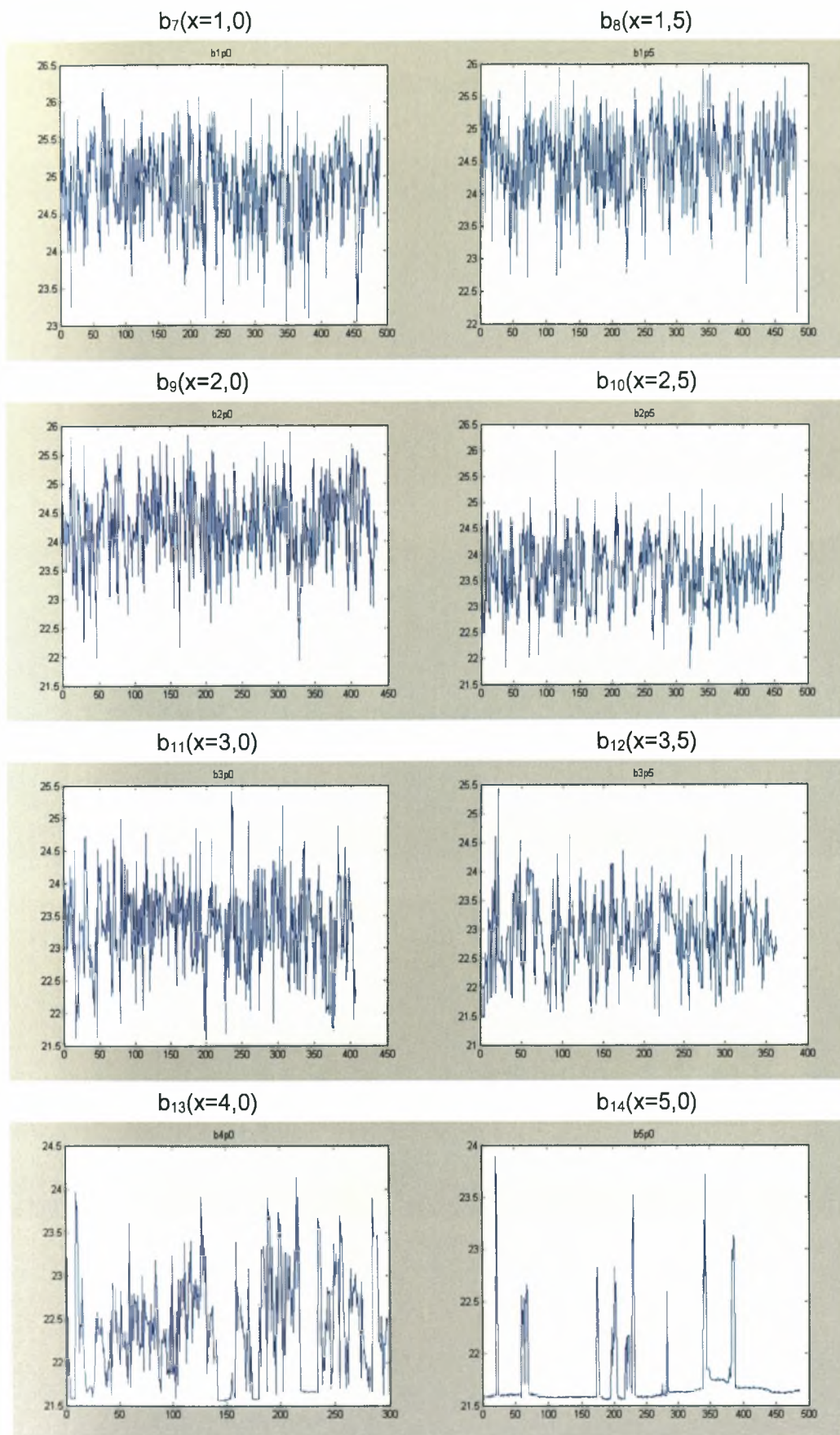
$b_5(x=0)$



$b_6(x=0,5)$





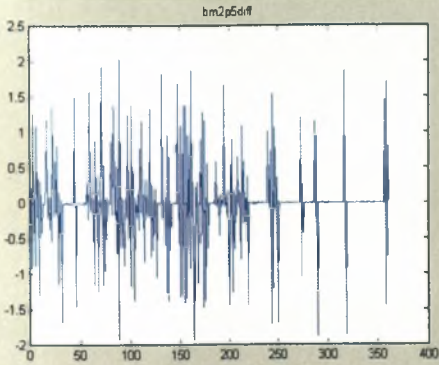


Σχήμα 5.1 : Απεικόνιση χρονοσειρών

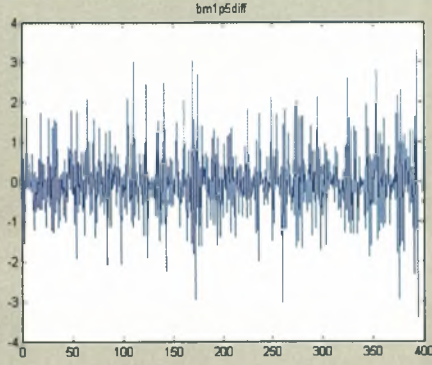
### 5.3 ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΤΑΣΗΣ

Στη συνέχεια έγινε αφαίρεση τάσης με τη μέθοδο πρώτων διαφορών.

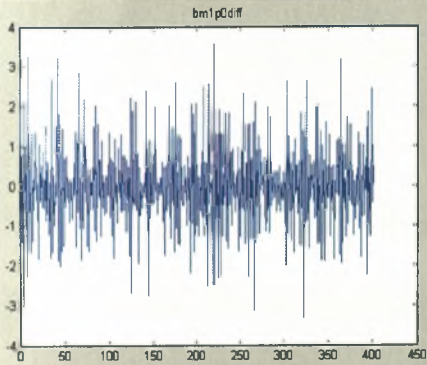
$q_1'(x=-2,5)$



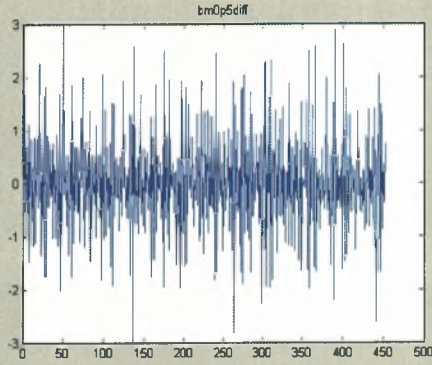
$q_2'(x=-1,5)$



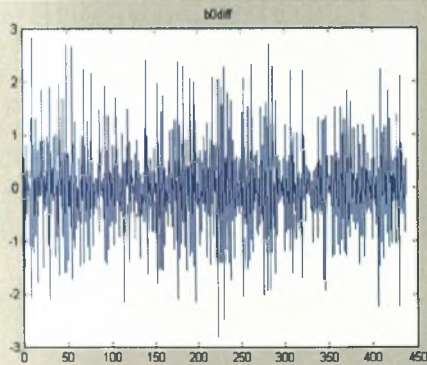
$q_3'(x=-1,0)$



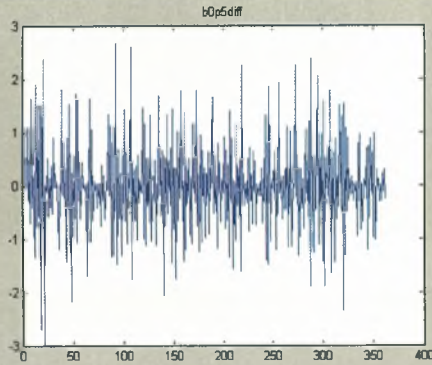
$q_4'(x=-0,5)$

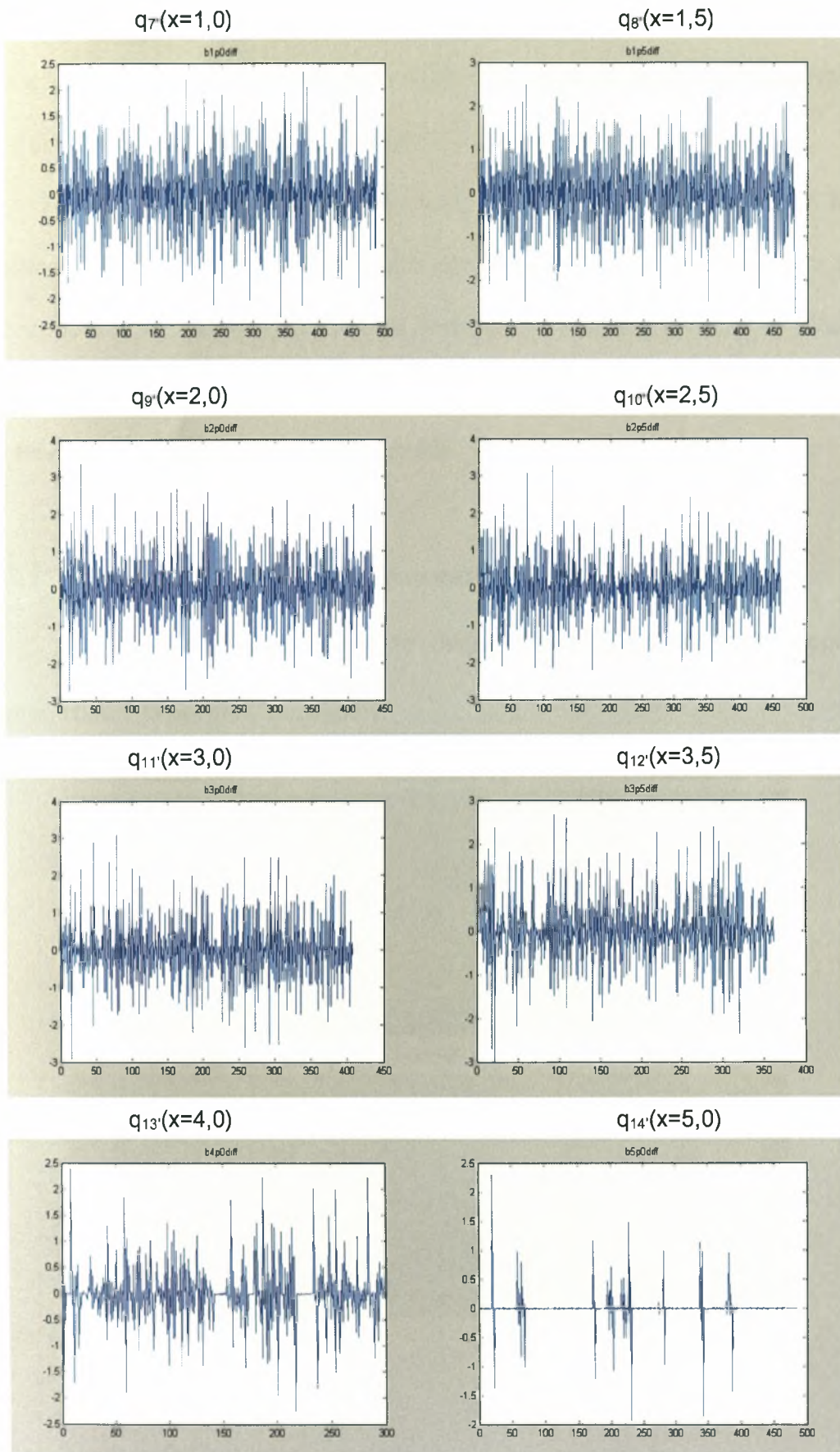


$q_5'(x=0)$



$q_6'(x=0,5)$





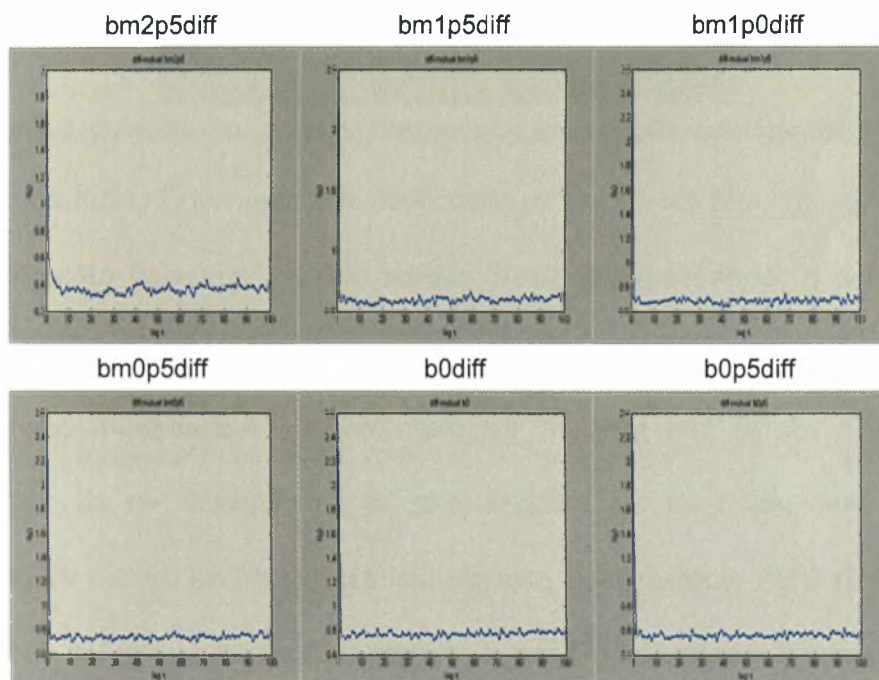
Σχήμα 5.2 : Απεικόνιση χρονοσειρών  $q'$

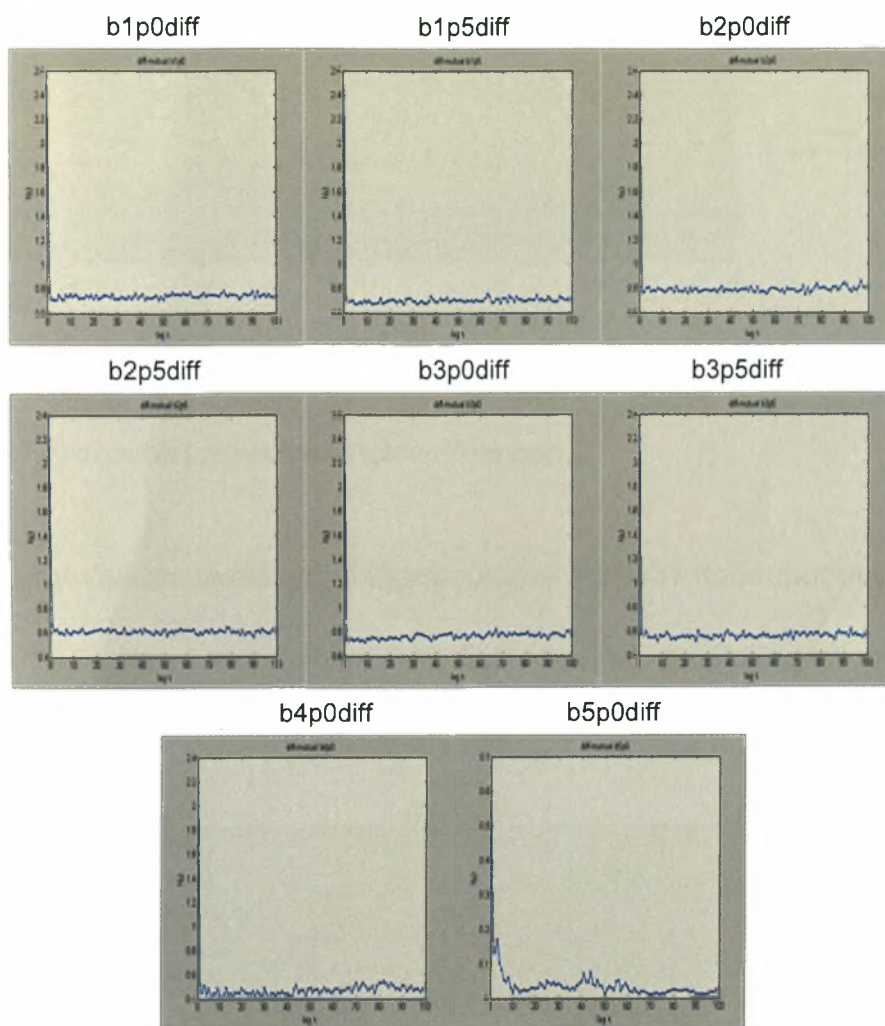
Στις θέσεις  $x=-2.5$ ,  $x=3.5$ ,  $x=4.0$  και  $x=5.0$  τα διαγράμματα είναι διαφορετικά όπως και στην χρονοσειρά  $w$  και αυτό πρέπει να οφείλεται όπως προαναφέρθηκε στις μετρήσεις οι οποίες έχουν γίνει σε σημεία στην περιοχή εκτός της φλέβας.

Στη συνέχεια η ανάλυση των χρονοσειρών θα αναφέρεται μόνο στις δυο χρονοσειρές, την  $w$  μετά την αφαίρεση της γραμμικής τάσης με τη μέθοδο της προσαρμογής της συνάρτησης και την  $q$  μετά την αφαίρεση της τάσης με τη μέθοδο των πρώτων διαφορών. Η χρονοσειρά  $b$  έχει πρακτικά την ίδια συμπεριφορά με την  $w$ . Εάν κάπου υπάρχει διαφορά θα αναφερθεί.

### 5.3.1 Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας ακροτάτων διαφορών.

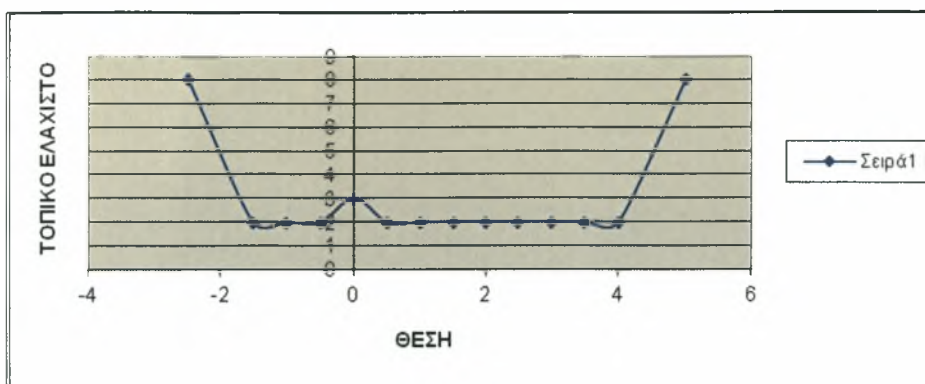
Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας χρονοσειρών ακροτάτων διαφορών.





Σχήμα 5.3 : Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας χρονοσειρών ακροτάτων διαφορών.

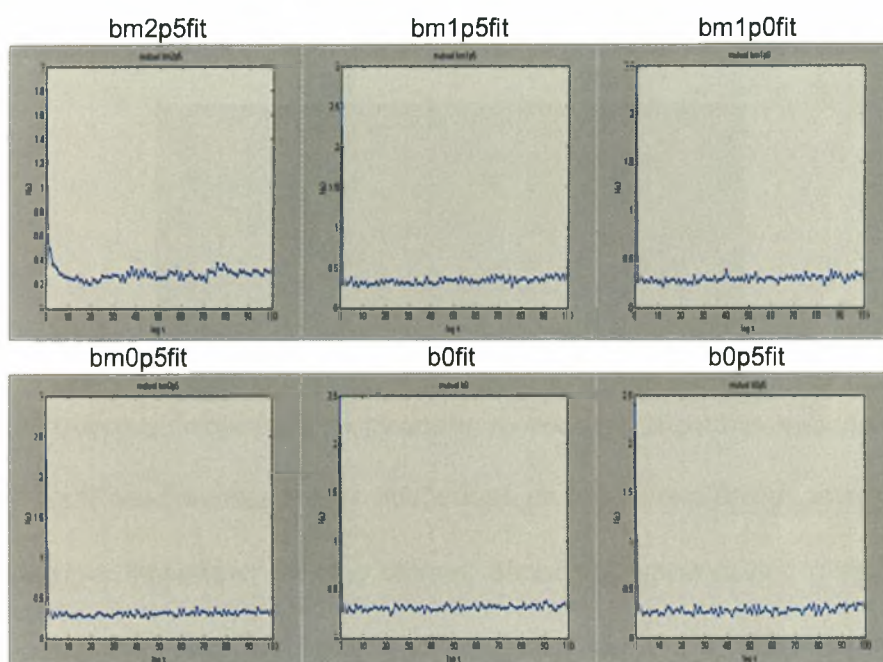
Από τα παραπάνω διαγράμματα σε συνδυασμό με τον πίνακα θέση χρονοσειράς- 1<sup>ο</sup> τοπικό ελάχιστο προκύπτει ότι στις ακραίες θέσεις της χρονοσειράς η τιμή του 1<sup>ου</sup> τοπικού ελαχίστου αυξάνεται στις ακραίες θέσεις, ενώ στις κεντρικές τιμές της χρονοσειράς παρατηρούμε χαμηλές τιμές και περίπου ίσες μεταξύ τους. Είναι ενδιαφέρον ότι αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τη χρήση των πλήρων χρονοσειρών έχουμε αντίστοιχη περίπου ποιοτική συμπεριφορά. Αυτό είναι αρκετά ενδιαφέρον δεδομένου ότι για την ανάλυση έχουν χρησιμοποιηθεί λιγότερα σημεία. Βέβαια η διάκριση της συμπεριφοράς διαφορετικών περιοχών της φλέβας είναι λιγότερο διακριτή( αν εξαιρέσουμε τις τιμές των άκρων). Αυτό οφείλεται προφανώς και στο μικρότερο πλήθος σημείων που έχουμε στη διάθεσή μας.

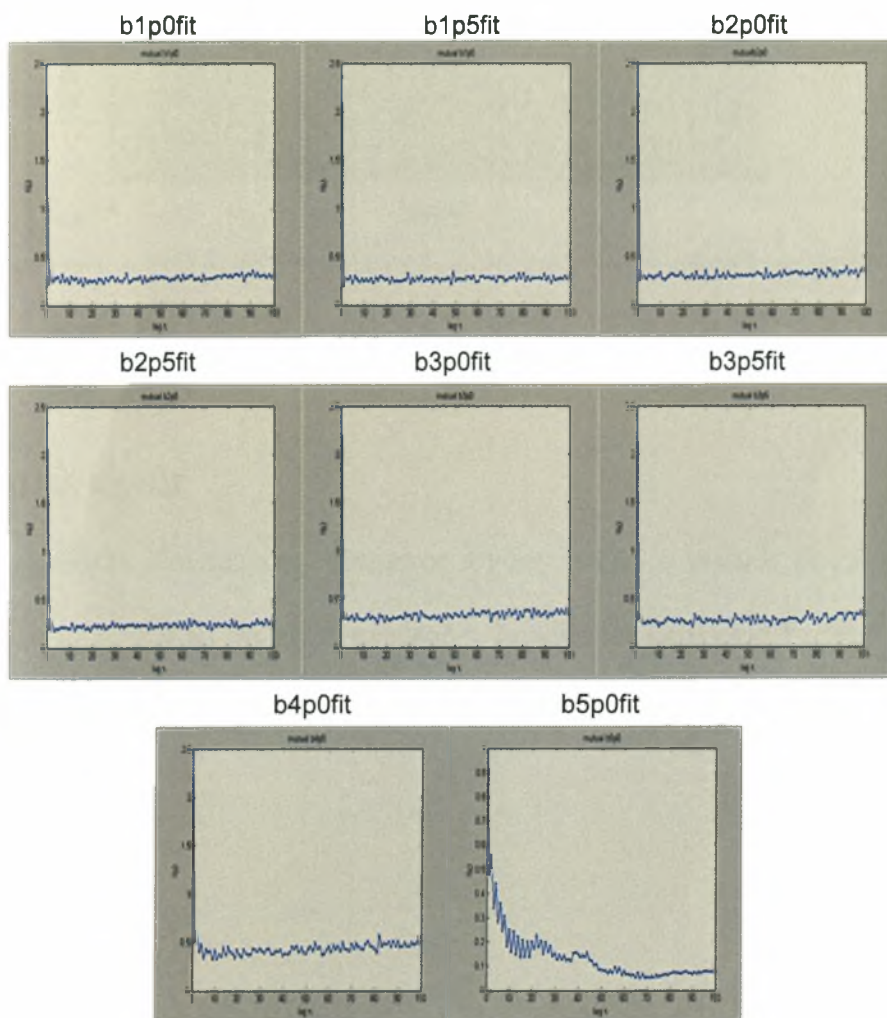


Σχήμα 5.4 : Τιμές μέγιστης συχνότητας της αμοιβαίας πληροφορίας συναρτήσεως της θέσης μέτρησης (για ακρότατες χρονοσειρές πρώτων διαφορών).

### 5.3.2 Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας ακροτάτων προσαρμοσμένων

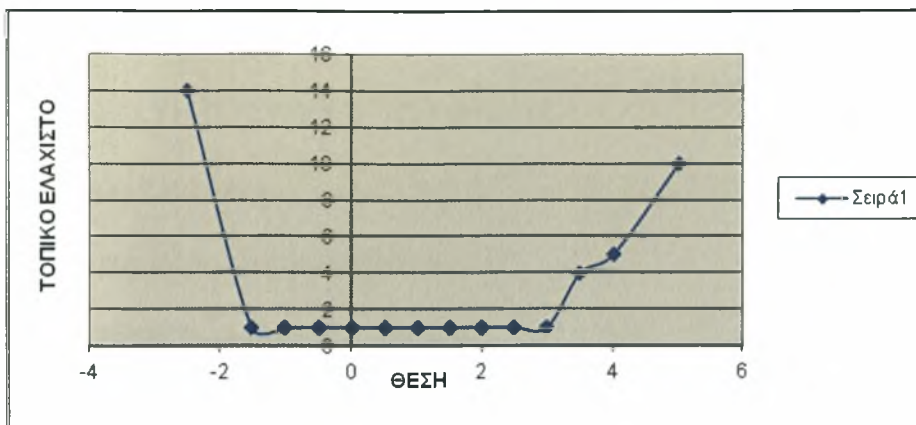
Στη συνέχεια παρατίθενται τα διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας χρονοσειρών ακροτάτων προσαρμοσμένων.





Σχήμα 5.5 : Διαγράμματα αμοιβαίας πληροφορίας χρονοσειρών ακροτάτων προσαρμοσμένων

Από τα παραπάνω διαγράμματα σε συνδυασμό με τον πίνακα θέση χρονοσειράς- 1<sup>ο</sup> τοπικό ελάχιστο προκύπτει ότι στις ακραίες θέσεις της χρονοσειράς η τιμή του 1<sup>ου</sup> τοπικού ελαχίστου αυξάνεται στις ακραίες θέσεις, ενώ στις κεντρικές τιμές της χρονοσειράς παρατηρούμε χαμηλές τιμές και περίπου ίσες μεταξύ τους. Από το παρακάτω διάγραμμα παρατηρούμε πάλι ότι στις κεντρικές τιμές υπάρχουν περισσότερες δίνες που αντιστοιχούν σε μικρούς χαρακτηριστικούς χρόνους, ενώ στις ακραίες τιμές επικρατούν δίνες με μεγαλύτερους χρόνους, σε ποιοτική συμφωνία με τα αποτελέσματα των πλήρων χρονοσειρών.



Σχήμα 5.6 : Τιμές μέγιστης συχνότητας της αμοιβαίας πληροφορίας συναρτήσει της θέσης μέτρησης (για ακρότατες χρονοσειρές προσαρμοσμένες).

#### 5.4 ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ

Δεν παρατίθενται διαγράμματα φάσματος ισχύος επειδή ο ρυθμός δειγματοληψίας των μετρήσεων πρέπει να είναι σταθερός. Δηλαδή οι μετρήσεις πρέπει να είναι ισαπέχουσες πράγμα το οποίο δε συμβαίνει για τις χρονοσειρές ελαχίστων- μεγίστων.



## 5.5 ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΦΑΣΕΩΝ

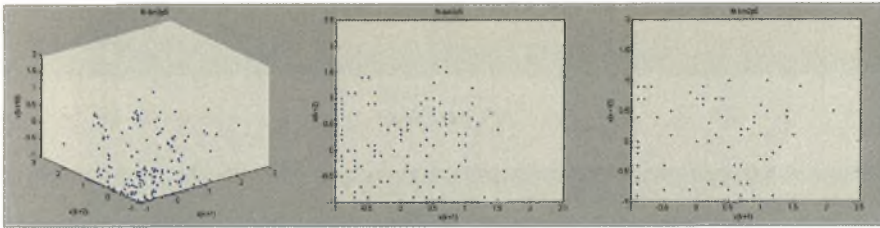
Για την ανακατασκευή του χώρου των φάσεων θα γίνει η επιλογή του χρόνου υστέρησης  $\tau$  και της διάστασης εμβύθισης  $m$ .

### 5.5.1 Ανακατασκευή του χώρου των φάσεων

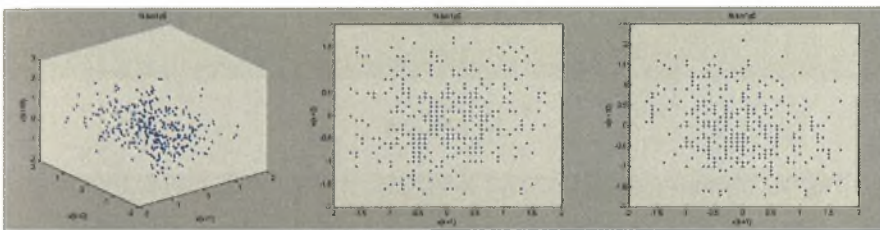
Στη συνέχεια παρατίθενται οι ανακατασκευασμένοι χώροι φάσεων για τις χρονοσειρές με αφαίρεση της γραμμικής τάσης.

Ανακατασκευασμένος χώρος των φάσεων μετά την αφαίρεση γραμμικής τάσης

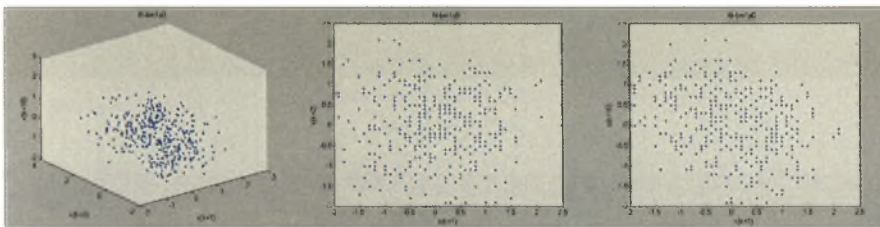
$$w_1(x=-2,5)$$



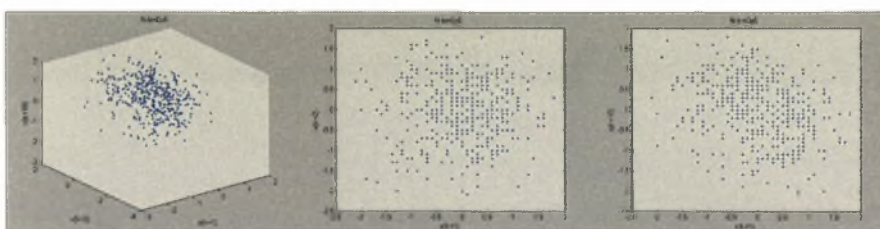
$$w_2(x=-1,5)$$



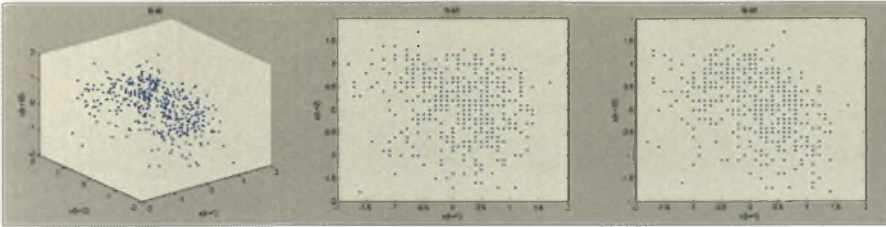
$$w_3(x=-1,0)$$



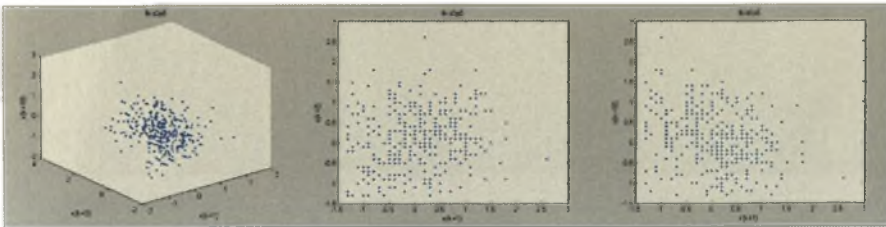
$$w_4(x=-0,5)$$



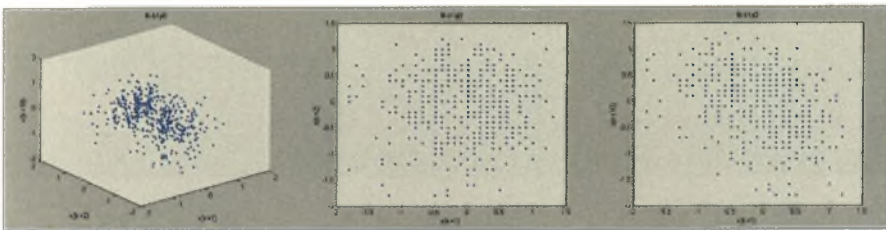
$w_5(x=0)$



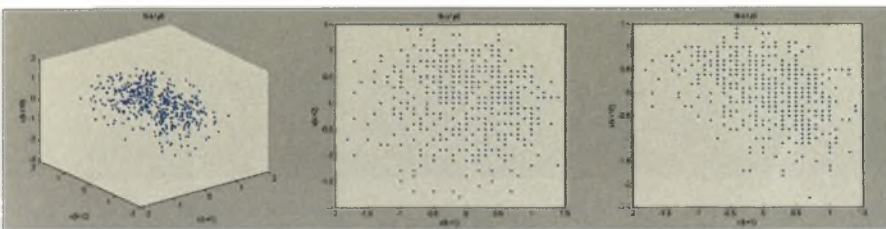
$w_6(x=0,5)$



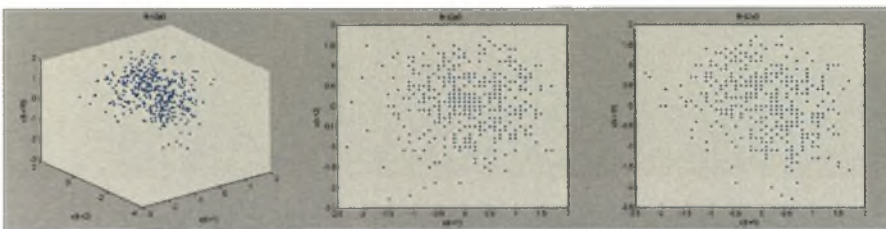
$w_7(x=1,0)$



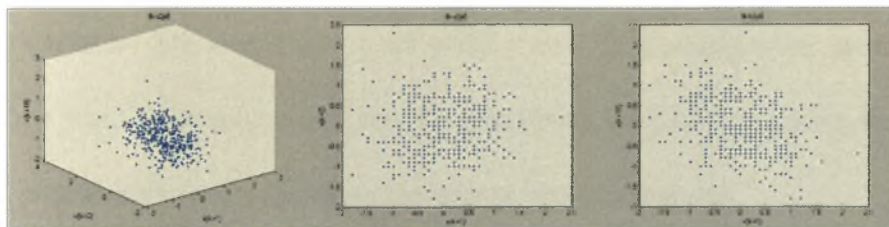
$w_8(x=1,5)$



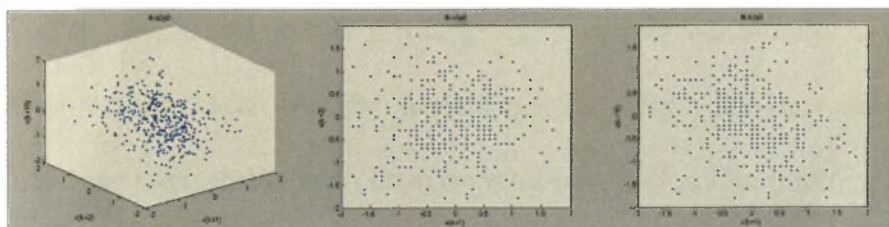
$w_9(x=2,0)$



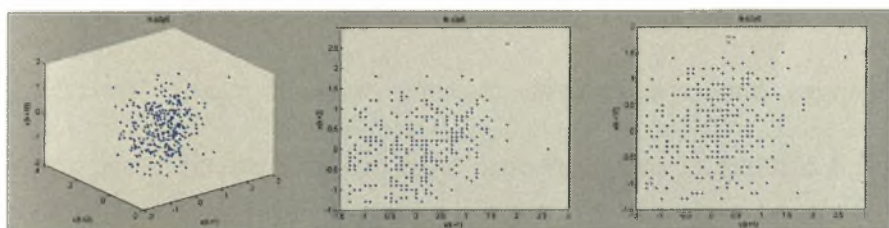
$$w_{10}(x=2,5)$$



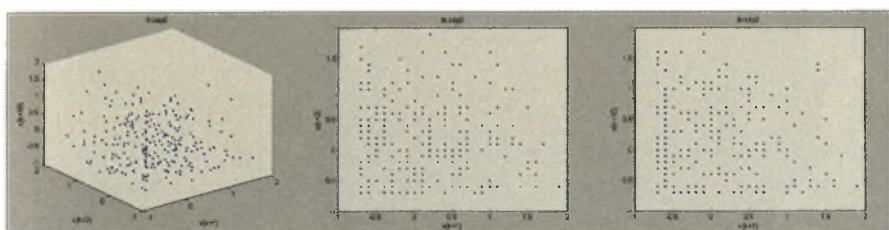
$$w_{11}(x=3,0)$$



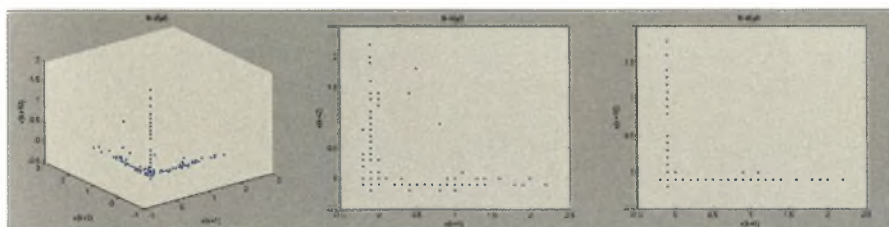
$$w_{12}(x=3,5)$$



$$w_{13}(x=4,0)$$



$$w_{14}(x=5,0)$$



Σχήμα 5.7 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $w'$

Τα παραπάνω διαγράμματα μπορούν να χωριστούν σε τρεις κατηγορίες:

- Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές στα άκρα της φλέβας που είναι οι  $x=-2,5$ ,  $x=3,5$ ,  $x=4,0$ , και  $x=5,0$  όπου το σύστημα τείνει να καταλάβει την κάτω αριστερή γωνία του διαγράμματος. Η δομή μας δίνει γραμμές ή επίπεδα και το σύστημα φαίνεται να είναι χαμηλοδιάστατο.
- Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές στη μέση της φλέβας που είναι οι  $x=-0,5$ ,  $x=0$ ,  $x=0,5$ ,  $x=1,0$ ,  $x=1,5$ ,  $x=2,0$ , και  $x=2,5$  όπου το σύστημα τείνει να καταλάβει όλο τον διαθέσιμο χώρο στο χώρο των φάσεων. Η διασπορά είναι μεγάλη και η δομή φαίνεται σαν σφαίρα λίγο παραμορφωμένη. Το σύστημα είναι υψηλοδιάστατο.
- Στη τρίτη περίπτωση έχουμε τις χρονοσειρές  $x=-1,5$ ,  $x=-1$ , και  $x=3,0$  σε μια μεταβατική περιοχή όπου το σύστημα στο ένα άκρο από χαμηλοδιάστατο γίνεται υψηλοδιάστατο και στο άλλο άκρο συμβαίνει το αντίθετο δηλαδή από υψηλοδιάστατο φαίνεται να γίνεται και πάλι χαμηλοδιάστατο.

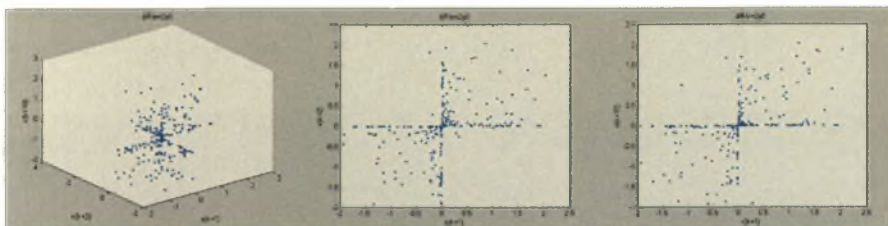
Τα αποτελέσματα είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αποτελέσματα των πλήρων χρονοσειρών.

Στη συνέχεια παρατίθενται οι ανακατασκευασμένοι χώροι φάσεων για τις χρονοσειρές με αφαίρεση της τάσης με τις πρώτες διαφορές.

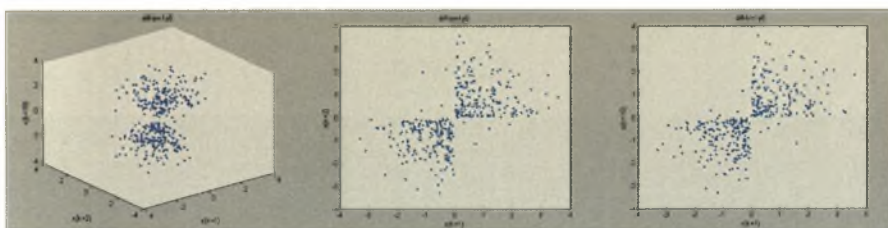
Ανακατασκευασμένος χώρος των φάσεων μετά την αφαίρεση τάσης με πρώτες

διαφορές

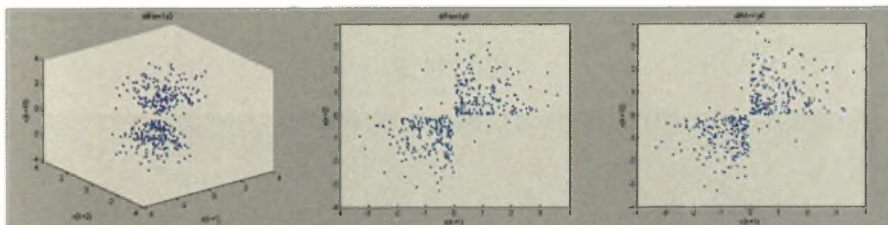
$q_1(x=-2,5)$



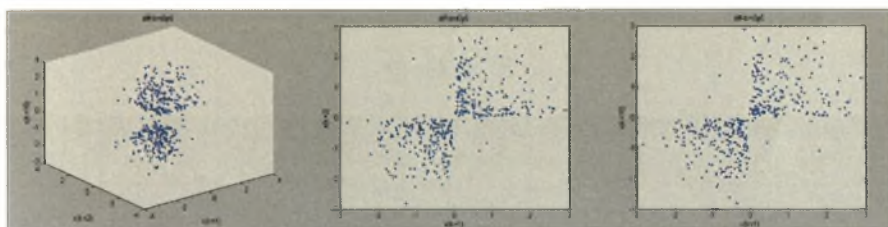
$q_2(x=-1,5)$



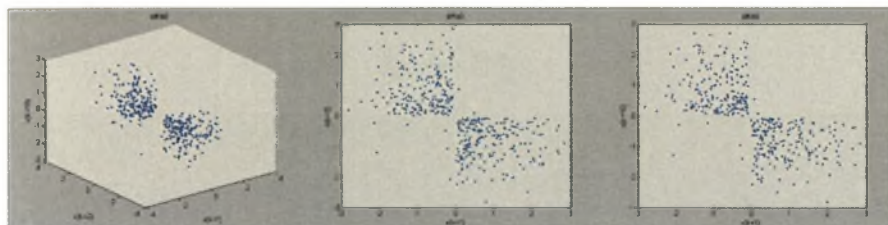
$q_3(x=-1,0)$



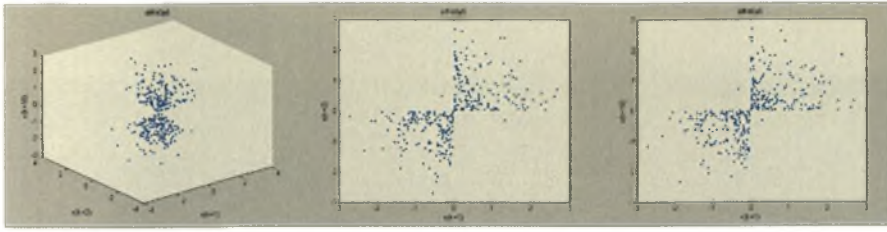
$q_4(x=-0,5)$



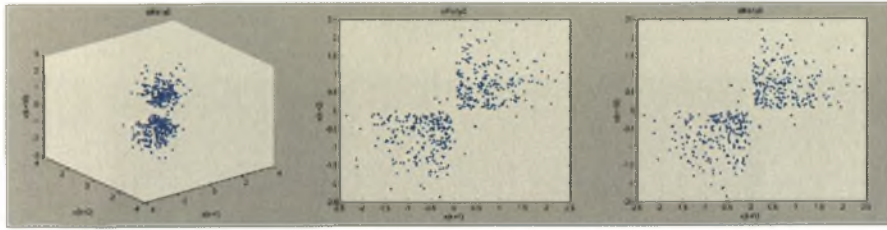
$q_5(x=0)$



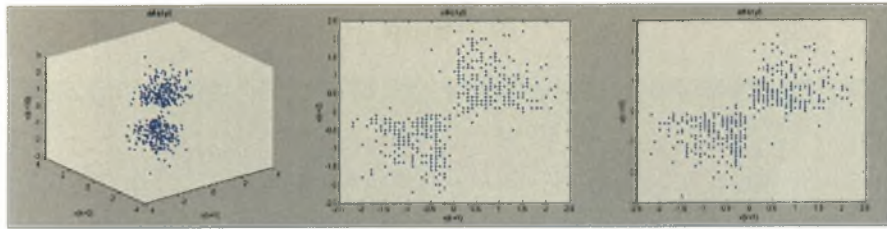
$q_6(x=0,5)$



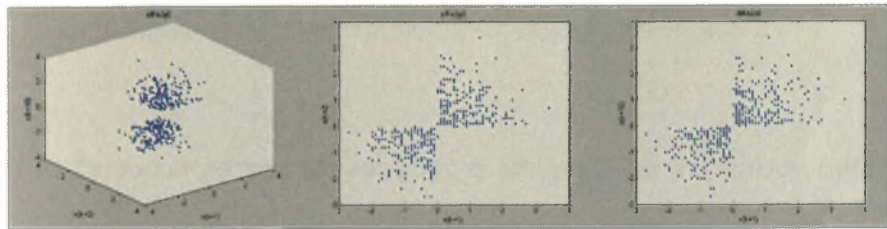
$q_7(x=1,0)$



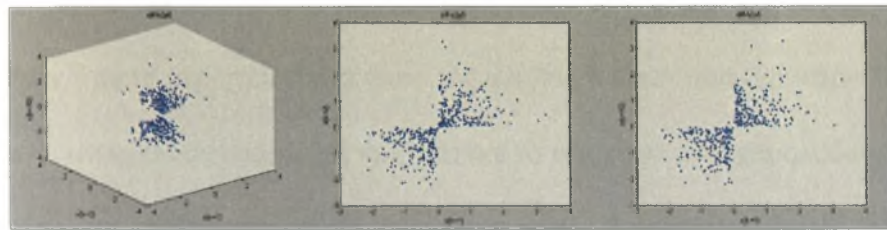
$q_8(x=1,5)$



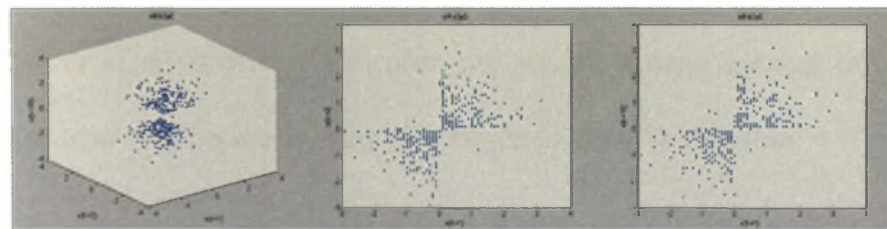
$q_9(x=2,0)$



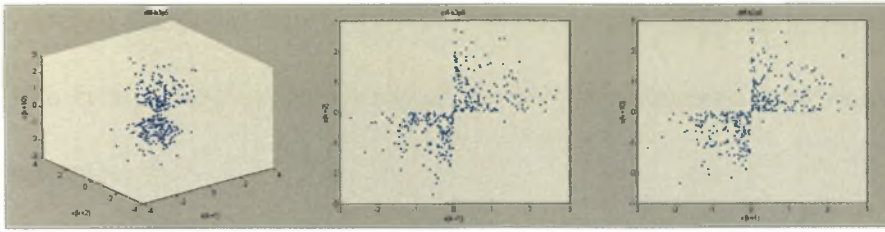
$q_{10}(x=2,5)$



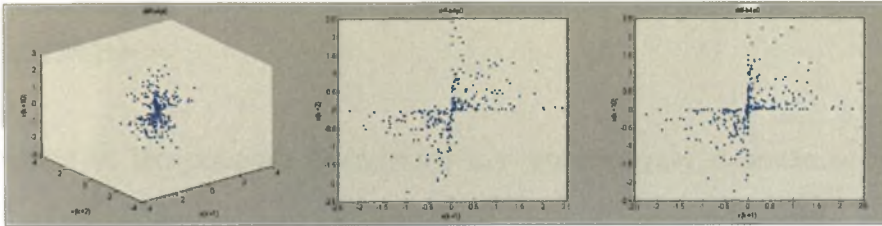
$q_{11}(x=3,0)$



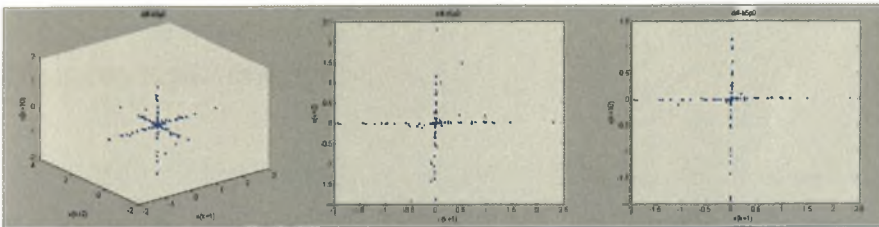
$q_{12}'(x=3,5)$



$q_{13}'(x=4,0)$



$q_{14}'(x=5,0)$



Σχήμα 5.8 : Ανακατασκευασμένος χώρος χρονοσειρών  $q'$

Και τα διαγράμματα της χρονοσειράς  $q'$  μπορούν να χωριστούν όπως και της χρονοσειράς  $w'$  σε τρεις κατηγορίες. Παρατηρούμε και εδώ τις ίδιες περιπτώσεις αλλά η διασπορά είναι μικρότερη και η δομή είναι πιο συμπαγής.

- Στην πρώτη περίπτωση στα άκρα της φλέβας η δομή τείνει να πάρει το σχήμα του σταυρού σε γραμμές ή επίπεδα και το σύστημα είναι χαμηλοδιάστατο. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ισχυρές χρονικές συσχετίσεις γεγονός που είναι αναμενόμενο.
- Στη δεύτερη περίπτωση στη μέση της φλέβας η δομή φαίνεται σαν σφαίρα λιγότερο παραμορφωμένη και το σύστημα είναι υψηλοδιάστατο.

- Ενώ στη τρίτη περίπτωση έχουμε και πάλι μια μεταβατική περιοχή όπου το σύστημα μεταβαίνει από τη χαμηλή διάσταση στην υψηλή και το αντίθετο.

Και εδώ έχουμε ποιοτική συμφωνία με τα αποτελέσματα ανάλυσης των πλήρων χρονοσειρών.

## **5.6 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ**

Όσον αφορά τα διαγράμματα συσχέτισης των χρονοσειρών ακροτάτων διαφορών λόγω του μικρού πλήθους των σημείων δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός της διασποράς συσχέτισης. Για το λόγο αυτό δεν παρατίθενται διαγράμματα διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών ακροτάτων.

## **5.7 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ**

Όσον αφορά τα διαγράμματα συσχέτισης των χρονοσειρών ακροτάτων προσαρμοσμένων λόγω του μικρού πλήθους των σημείων δεν είναι δυνατός ο προσδιορισμός της διασποράς συσχέτισης. Για το λόγο αυτό δεν παρατίθενται διαγράμματα διάστασης συσχέτισης χρονοσειρών προσαρμοσμένων.



## 5.8 ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ ΚΑΙ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΩΝ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε τα διαγράμματα τα οποία θα παρατεθούν παρακάτω κατασκευάζουμε τον πίνακα ο οποίος αντιστοιχεί τη θέση μέτρησης με τον οριζόντιο άξονα των δενδρογραμμάτων. Ο πίνακας ισχύει τόσο για τις αρχικές χρονοσειρές όσο και για τις χρονοσειρές ακροτάτων.

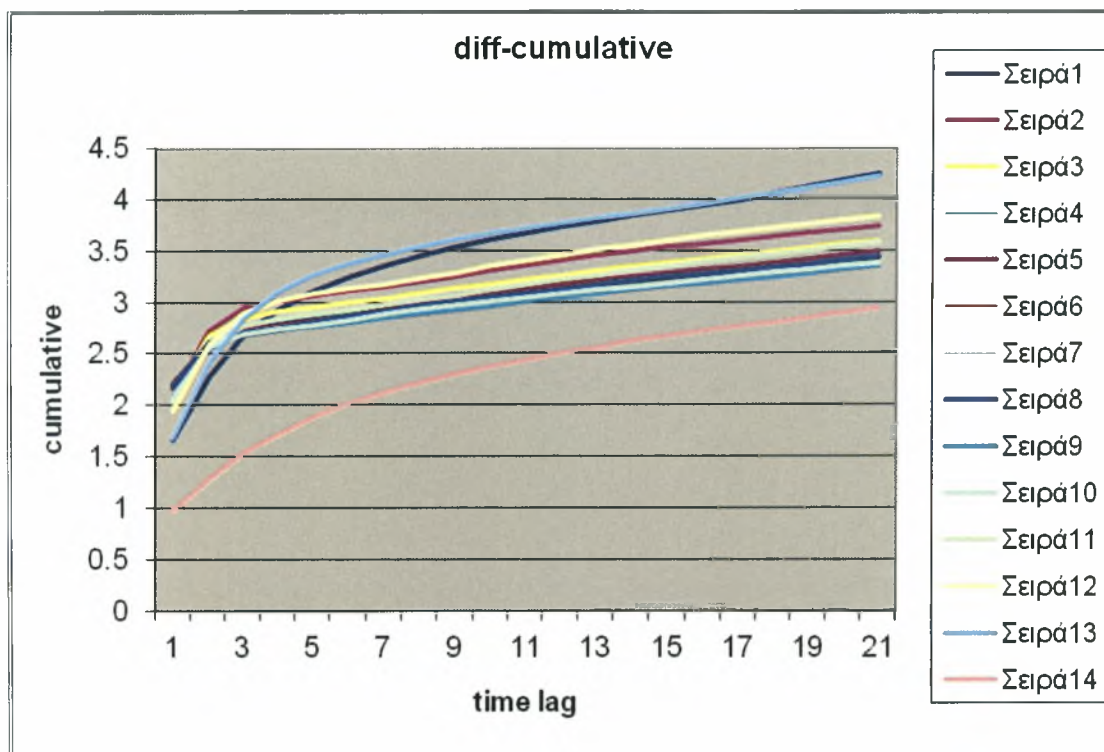
ΘΕΣΗ	Α/Α ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΑΣ
-2.5	1
-1.5	2
-1.0	3
-0.5	4
0	5
0.5	6
1.0	7
1.5	8
2.0	9
2.5	10
3.0	11
3.5	12
4.0	13
5.0	14

Μελετήθηκαν οι συναρτήσεις αθροιστικής αμοιβαίας πληροφορίας. Στη συνέχεια εφαρμόσαμε ομαδοποίηση των χρονοσειρών (αρχικών και ακροτάτων) με κατασκευή δένδροδιαγραμμάτων.

### 5.8.1 ΑΡΧΙΚΕΣ (ΠΛΗΡΕΙΣ) ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ

#### Χρονοσειρές πρώτων διαφορών

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία για τις αρχικές χρονοσειρές διαφορών που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά. Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται ο χρόνος υστέρησης (time lag) και στον κατακόρυφο η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.



Σχήμα 5.9 : Αθροιστική αμοιβαία πληροφορία αρχικών χρονοσειρών διαφορών συναρτήσει του χρόνου υστέρησης(time lag).

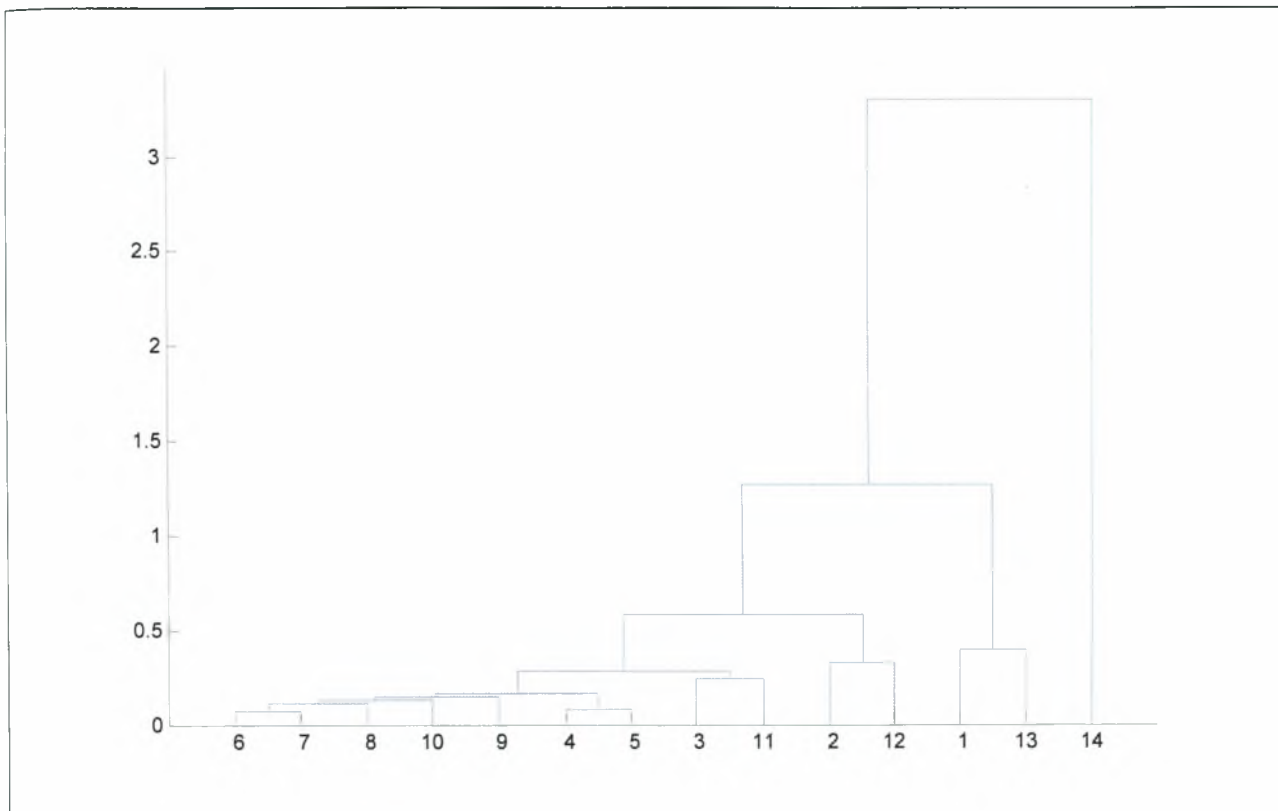
Παρατηρούμε οπτικά ότι υπάρχουν χρονοσειρές που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά. Έτσι φαίνεται ότι η χρονοσειρά 14 ( $x=5\text{cm}$ ) παρουσιάζει εντελώς διαφορετική συμπεριφορά από τις υπόλοιπες, οι οποίες ανήκουν σε μια μεγάλη ομάδα. Εντός της ομάδας αυτής φαίνονται οι σειρές 1 και 13 ( $x=-2.5\text{ cm}$  και  $x=4\text{cm}$ ) που σε περιοχές κοντά στα άκρα της φλέβας να σχηματίζουν μια υπο-ομάδα με

διαφορετική συμπεριφορά από τις υπόλοιπες. Σε επόμενο στάδιο υπάρχει η υποομάδα αποτελούμενη από τις 2 και 12 ( $x=-1.5\text{cm}$  και  $x=3.5\text{cm}$ ) και ακόμα μια υποομάδα 3-11 ( $x=-1.0\text{cm}$  και  $x=3\text{cm}$ ) που αντιστοιχούν σε περιοχές πιο απομακρυσμένες από τα άκρα και πιο κοντά στον άξονα της φλέβας. Οι υπολειπόμενες χρονοσειρές δεν φαίνεται ξεκάθαρα πως συσχετίζονται. Είναι ενδιαφέρον ότι οι χρονοσειρές αυτές βρίσκονται σε παρόμοιες αποστάσεις από τον άξονα της φλέβας.

Στη συνέχεια και προκειμένου να αποφύγουμε την υποκειμενική κατηγοριοποίηση προχωρήσαμε σε ομαδοποίηση με τη χρήση του Matlab των αρχικών χρονοσειρών διαφορών με βάση τα αποτελέσματα της αθροιστικής αμοιβαίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο δένδροδιάγραμμα που ακολουθεί στην επόμενη σελίδα.

Στον οριζόντιο άξονα τοποθετείται ο αύξων αριθμός της χρονοσειράς και στον κατακόρυφο

άξονα η τιμή της αμοιβαίας αθροιστικής πληροφορίας.



Σχήμα 5.10 : Δενδρόγραμμα αρχικών χρονοσειρών διαφορών με βάση την αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.

Παρατηρούμε οπτικά ότι υπάρχουν χρονοσειρές που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η χρονοσειρά 14 ( $x=5\text{cm}$ ) εμφανίζεται ως τελείως ανεξάρτητη από

τις υπόλοιπες χρονοσειρές και αντιστοιχεί στο ένα άκρο της φλέβας. Όλες οι υπόλοιπες

χρονοσειρές φαίνονται να σχετίζονται μεταξύ τους ανάλογα με το βαθμό ομοιότητας. Σε αρχικό

επίπεδο σχηματίζονται τα ζευγάρια 1-13 ( $x=-2.5\text{ cm}$  και  $x=4.0\text{cm}$ ), τα ζευγάρια 2-12 ( $x=-1.5\text{cm}$

και  $x=3.5\text{cm}$ ), τα ζευγάρια 3-11 ( $x=-1.0\text{cm}$  και  $x=3\text{cm}$ ). Αυτά τα ζευγάρια παρουσιάζουν

συμμετρία ως προς τη μέση της φλέβας. Επίσης σχηματίζονται τα ζευγάρια 4-5 ( $x=-0.5$  και

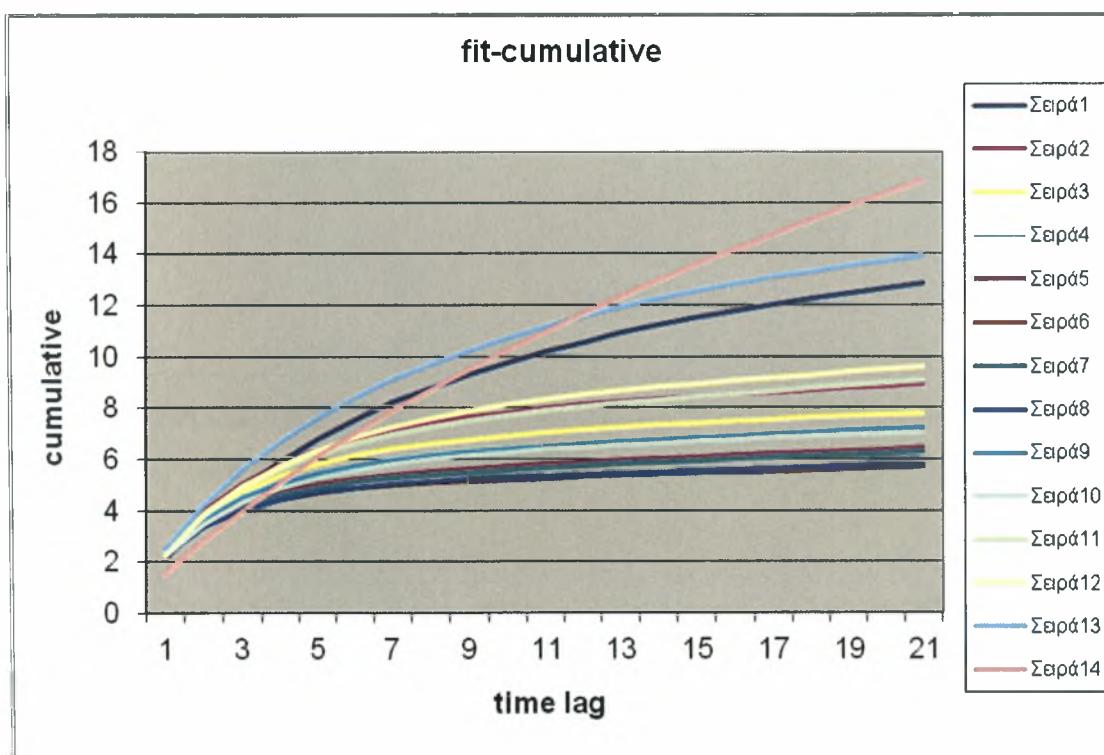
$x=0\text{cm}$ ) και 6-7 ( $x=0.5$ ,  $x=1\text{cm}$ ). Στο τέλος μένουν οι χρονοσειρές 8-9-10 ( $x=1.5$ ,  $2.0$ ,  $2.5\text{ cm}$ ).

Είναι ενδιαφέρον επίσης ότι για επίπεδο ομοιότητας  $0.25$  υπάρχουν δυο μεγάλες ομάδες:

14 ( $x=5\text{cm}$ ), 1-13 ( $x=-2.5\text{ cm}$  και  $x=4.0\text{cm}$ ), 2-12 ( $x=-1.5\text{cm}$  και  $x=3.5\text{cm}$ ), 3-11 ( $x=-1.0\text{cm}$  και  $x=3\text{cm}$ ) που αντιστοιχούν σε θέσεις πιο μακριά από τον άξονα και η ομάδα 4-5 ( $x=-0.5$  και  $x=0\text{cm}$ ), 6-7 ( $x=0.5$ ,  $x=1\text{cm}$ ), 8-9-10( $x=1.5$ ,  $2.0$ ,  $2.5\text{ cm}$ ) που αντιστοιχεί σε περιοχή κοντά στον άξονα. Είναι προφανές ότι μειώνοντας το επίπεδο ομοιότητας γίνεται πιο λεπτομερής ο διαχωρισμός .

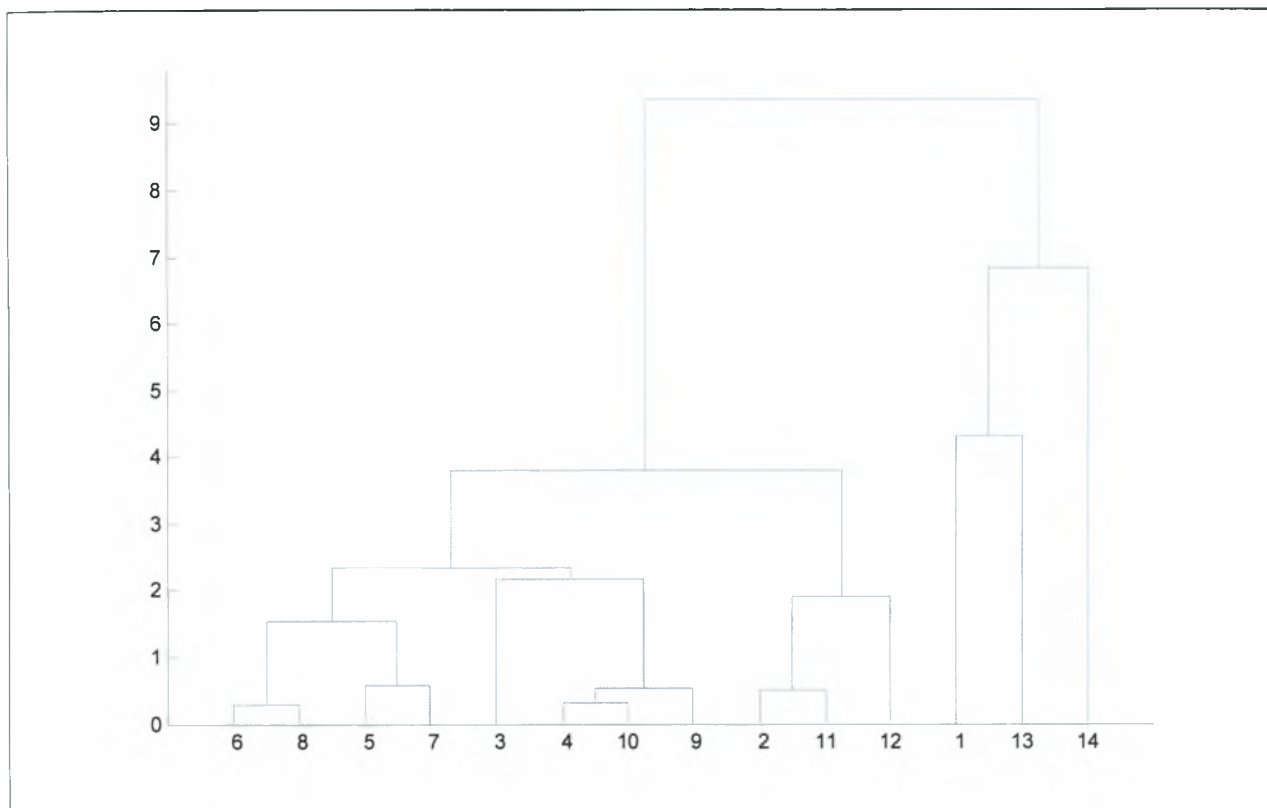
### Χρονοσειρές με αφαίρεση τάσης μετά από προσαρμογή καμπύλης

Στη συνέχεια στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία για τις αρχικές προσαρμοσμένες χρονοσειρές. Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται ο χρόνος υστέρησης (time lag) και στον κατακόρυφο η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.



Σχήμα 5.11: Αθροιστική αμοιβαία πληροφορία αρχικών προσαρμοσμένων χρονοσειρών συναρτήσει του χρόνου υστέρησης(time lag).

Παρατηρούμε οπτικά ότι υπάρχουν χρονοσειρές που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά. Προκειμένου να αποφύγουμε την υποκειμενική κατηγοριοποίηση προχωρήσαμε σε ομαδοποίηση με τη χρήση του Matlab των αρχικών χρονοσειρών με βάση τα αποτελέσματα της αθροιστικής αμοιβαίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο δένδροδιάγραμμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.12 : Δενδρόγραμμα αρχικών χρονοσειρών με αφαίρεση τάσης μετά από προσαρμογή καμπύλης με βάση την αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.

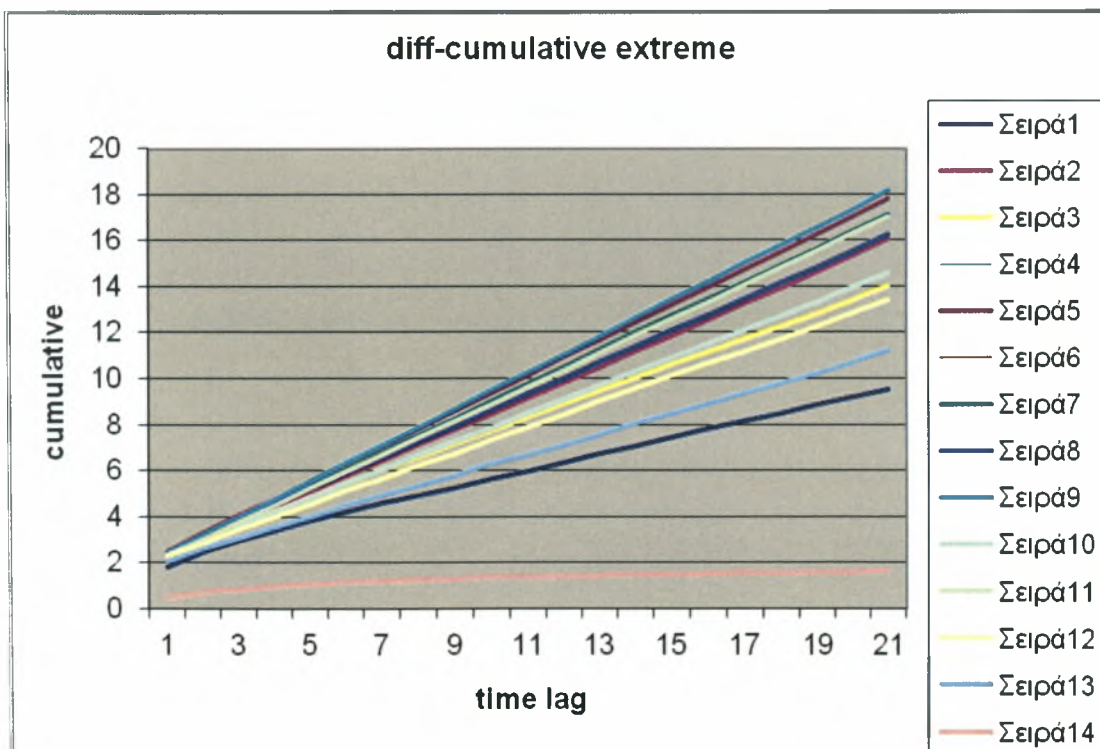
Από το παραπάνω διάγραμμα γίνεται σαφές ότι υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ συγκεκριμένων χρονοσειρών. Σε αρχικό επίπεδο σχηματίζονται τα ζευγάρια 1-13-14 ( $x=-2.5$  ,  $4.0\text{cm}$ ,  $5.0\text{cm}$ ) που αντιστοιχούν σε περιοχές πολύ κοντά στα άκρα της φλέβας. Βέβαια εξ' αυτών οι 1-13 ( $-2.5\text{cm}$ ,  $4\text{cm}$ ) παρουσιάζουν μεγαλύτερη σχέση μεταξύ τους. Τα υπόλοιπα ζευγάρια δείχνουν να ανήκουν σε μια μεγάλη ομάδα που περιέχει τις εξής υπο-ομάδες. 2-11-12 ( $x=-1.5$ ,  $x=3.0\text{cm}$ ,  $x=3.5\text{cm}$ ) (σημεία μεταξύ άξονα και άκρων) με μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ των 2-11 ( $x=-1.5$ ,

$x=3.0\text{cm}$ ), και 5-6-7-8 με μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ των 6-8 ( $x=0.5, x=1.5\text{cm}$ ) και 5-7 ( $x=0, x=1\text{cm}$ ) (σημεία κοντά στον άξονα). Στο τέλος μένουν οι χρονοσειρές 3-4-9-10 ( $x=-1, x=-0.5, x=2.0, x=2.5\text{cm}$ ). Εξ' αυτών μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ τους παρουσιάζουν οι 4-10 ( $x=-0.5, x=2.5\text{cm}$ ). Είναι ενδιαφέρον ότι και σε αυτή την περίπτωση ο άξονας περιλαμβάνεται σε μια ξεχωριστή ομάδα σε σχετικά πολύ μικρό βαθμό ομοιότητας αλλά αλλάζουν κάπως οι σχετικές συσχετίσεις με γειτονικές περιοχές.

### 5.8.2 ΧΡΟΝΟΣΕΙΡΕΣ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ

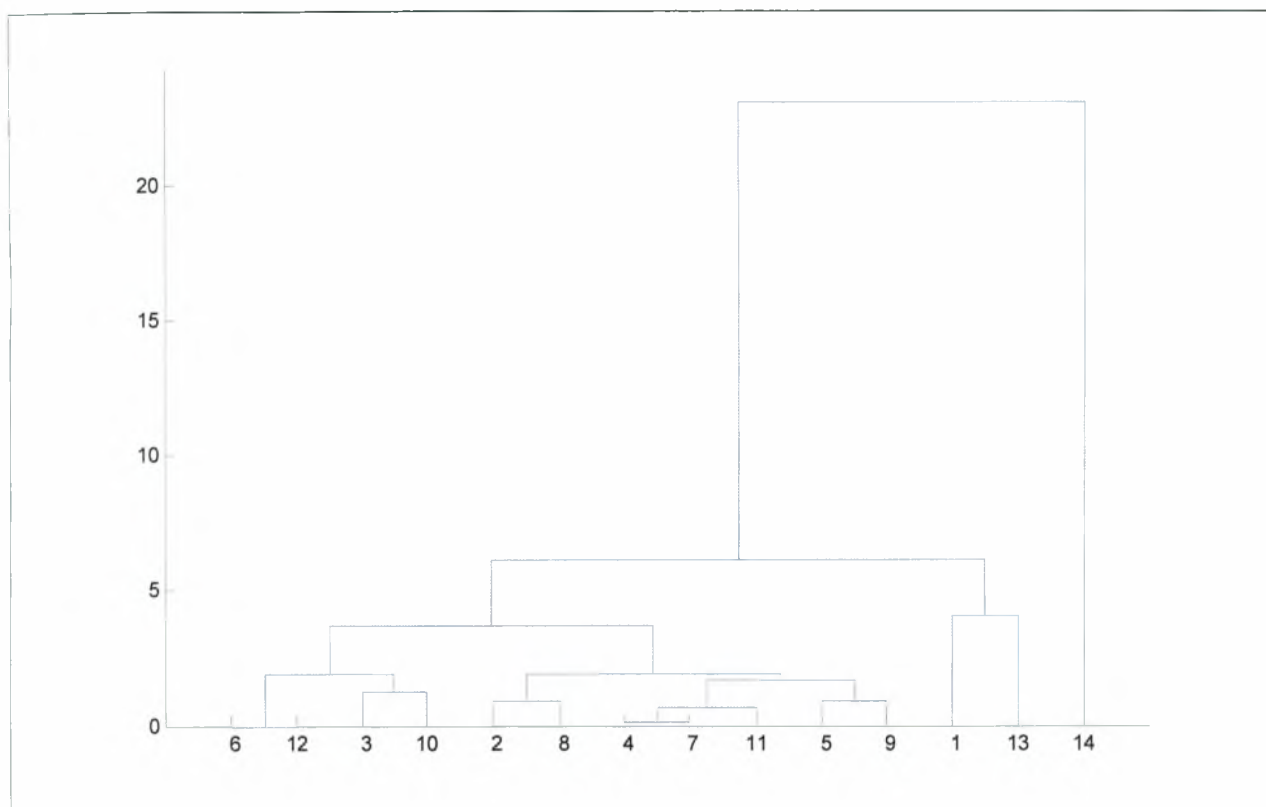
#### Χρονοσειρές πρώτων διαφορών

Στη συνέχεια στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία για τις χρονοσειρές ακροτάτων διαφορών που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά. Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται ο χρόνος υστέρησης (time lag) και στον κατακόρυφο η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.



Σχήμα 5.13 : Αθροιστική αμοιβαία πληροφορία χρονοσειρών ακροτάτων πρώτων διαφορών συναρτήσει του χρόνου υστέρησης(time lag).

Παρατηρούμε οπτικά ότι υπάρχουν χρονοσειρές που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά. Προκειμένου να αποφύγουμε την υποκειμενική κατηγοριοποίηση προχωρήσαμε σε ομαδοποίηση με τη χρήση του Matlab των αρχικών χρονοσειρών με βάση τα αποτελέσματα της αθροιστικής αμοιβαίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο δενδροδιάγραμμα που ακολουθεί.



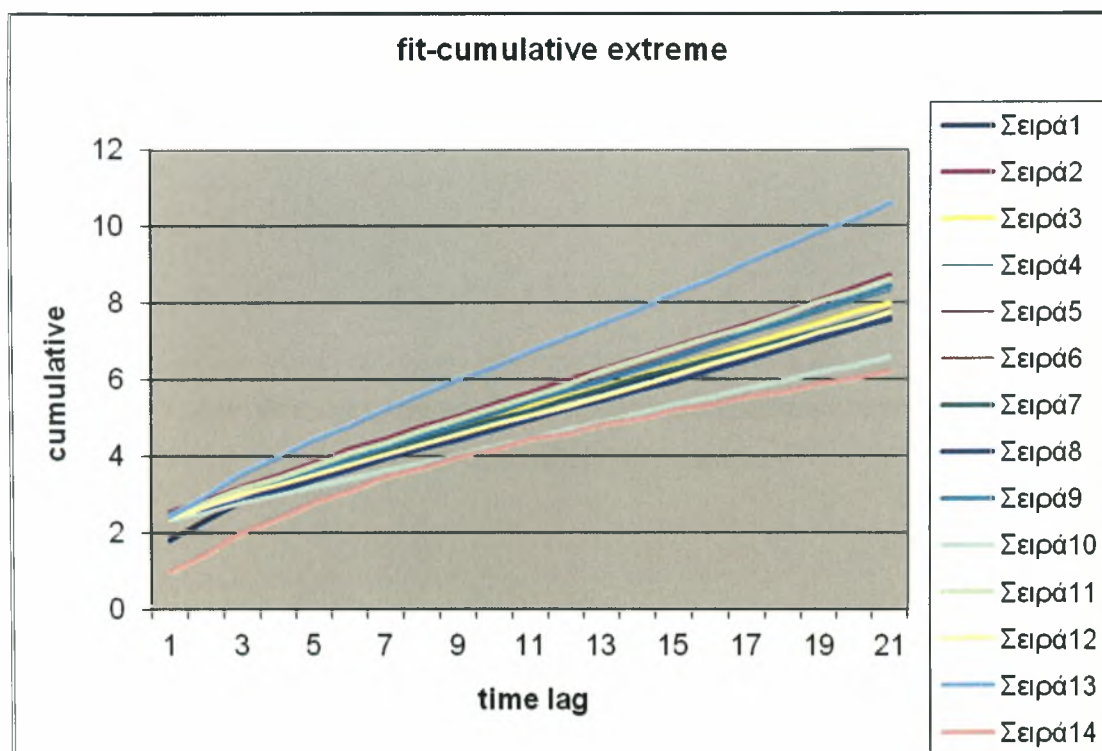
Σχήμα 5.14 : Δενδρογράμμα χρονοσειρών ακροτάτων διαφορών με βάση την αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.

Από το παραπάνω διάγραμμα γίνεται σαφές ότι υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ συγκεκριμένων χρονοσειρών ακροτάτων διαφορών. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η χρονοσειρά 14 ( $x=5.0\text{cm}$ ) (στο ένα άκρο της φλέβας) εμφανίζεται ως τελείως ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες χρονοσειρές. Όλες οι υπόλοιπες χρονοσειρές φαίνονται να σχετίζονται μεταξύ τους. Σε αρχικό επίπεδο σχηματίζονται τα ζευγάρια 1-13 ( $x=-2.5$  και  $x=4.0\text{cm}$ ) (περιοχές κοντά στα άκρα της φλέβας)



και σε μια μεγάλη ομάδα τα υπόλοιπα ζευγάρια. Εξ' αυτών προκύπτουν τα ζευγάρια 6-12 ( $x=0.5$  και  $x=3.5\text{cm}$ ), 3-10 ( $x=-1.0$  και  $x=2.5\text{cm}$ ), 2-8 ( $x=-1.5$  και  $x=1.5\text{cm}$ ) και 5-9 ( $x=0$  και  $x=2.0\text{cm}$ ). Στο τέλος μένουν οι χρονοσειρές 4-7-11 με μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ των 4-7 ( $x=-0.5$  και  $x=1.0\text{cm}$ ). Είναι ενδιαφέρον ότι και σε αυτή την περίπτωση ο άξονας κατατάσσεται σε ομάδα ξεχωριστή σε πολύ χαμηλό βαθμό ομοιότητας.

Στη συνέχεια στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία για τις χρονοσειρές ακροτάτων προσαρμοσμένων που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά. Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται ο χρόνος υστέρησης (time lag) και στον κατακόρυφο η αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.

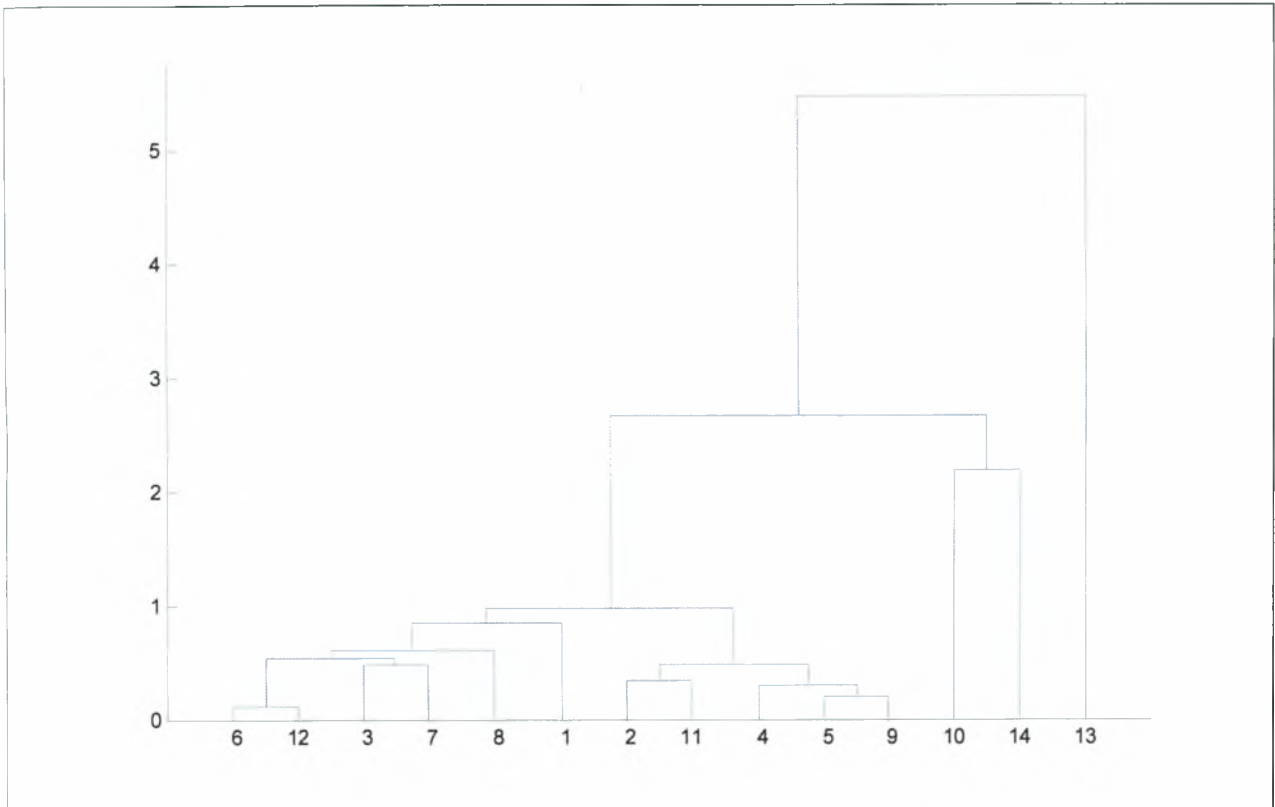


Σχήμα 5.15 : Αθροιστική αμοιβαία πληροφορία χρονοσειρών ακροτάτων προσαρμοσμένων συναρτήσεων του χρόνου υστέρησης(time lag).

Παρατηρούμε οπτικά ότι υπάρχουν χρονοσειρές που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά.

Προκειμένου να αποφύγουμε την υποκειμενική κατηγοριοποίηση προχωρήσαμε σε

ομαδοποίηση με τη χρήση του Matlab των αρχικών χρονοσειρών με βάση τα αποτελέσματα της αθροιστικής αμοιβαίας. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο δένδροδιάγραμμα που ακολουθεί.



Σχήμα 5.16 : Δενδροδιάγραμμα χρονοσειρών ακροτάτων προσαρμοσμένων με βάση την αθροιστική αμοιβαία πληροφορία.

Από το παραπάνω διάγραμμα γίνεται οπτικά σαφές ότι υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ συγκεκριμένων χρονοσειρών ακροτάτων. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η χρονοσειρά 13 ( $x=4cm$ ) εμφανίζεται ως τελείως ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες χρονοσειρές. Όλες οι υπόλοιπες χρονοσειρές φαίνονται να σχετίζονται μεταξύ τους. Σε αρχικό επίπεδο σχηματίζονται τα ζευγάρια 10-14 ( $x=2.5$  και  $x=5.0cm$ ) (περιοχές κοντά στα άκρα) και σε μια μεγάλη ομάδα τα υπόλοιπα ζευγάρια. Εξ' αυτών προκύπτουν τα ζευγάρια 6-12 ( $x=0.5$  και  $x=3.5cm$ ), 3-7 ( $x=-1$  και  $x=1.0cm$ ). Αυτά τα 2 ζευγάρια προκύπτουν με συσχέτιση από τη χρονοσειρά 8 ( $x=1.5cm$ ) η

οποία εμπεριέχεται στη χρονοσειρά 1 ( $x=-2.5\text{cm}$ ). Στο τέλος μένουν τα ζευγάρια 2-11 ( $x=-1.5$  και  $x=3\text{cm}$ ) και 4-5-9 με μεγαλύτερη συσχέτιση μεταξύ των 5-9 ( $x=0$  και  $x=2.0\text{cm}$ ). Είναι ενδιαφέρον ότι και σε αυτή την περίπτωση ο άξονας περιλαμβάνεται σε μια ξεχωριστή ομάδα σε σχετικά πολύ μικρό βαθμό ομοιότητας αλλά αλλάζουν κάπως οι σχετικές συσχετίσεις με γειτονικές περιοχές.

Ένα γενικό σχόλιο που είναι ενδιαφέρον είναι ότι η κατηγοριοποίηση αλλάζει καθώς χρησιμοποιούμε χρονοσειρές ακρότατων, γεγονός που είναι ως ένα σημείο αναμενόμενο καθώς χάνουμε κάποιες «λεπτές» μεταβολές μεταξύ των ακρότατων. Ενδιαφέρον όμως είναι ότι σε κάθε περίπτωση διακρίνονται οι περιοχές στα όρια και στην υπόλοιπη περιοχή, ενώ η περιοχή του άξονα είναι στην ομάδα που διατηρείται μέχρι τον μικρότερο βαθμό ομοιότητας.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται αρχικά η θεωρία των δυναμικών συστημάτων και των χρονοσειρών με μεγαλύτερη έμφαση στις μεθόδους ανάλυσης των χρονοσειρών. Η ανάλυση αφορά πειραματικά δεδομένα μεταβολής θερμοκρασίας σε οριζόντια κυκλική θερμαινόμενη τυρβώδη φλέβα και έγινε με Συνάρτηση Μέσης Αμοιβαίας Πληροφορίας, Φάσμα Ισχύος, Διάστασης συσχέτισης, ανακατασκευή χώρου φάσεων και αθροιστική αμοιβαία πληροφορία σε χρονοσειρές που αφορούν μετρήσεις κατά μήκος τριών οριζόντιων γραμμών σε τρία διαφορετικά ύψη. Επίσης μελετήθηκαν χρονοσειρές ακρότατων που προκύπτουν από τις αρχικές και κατά πόσο η πληροφορία που εξάγουμε διατηρείται στην χρονοσειρά ακρότατων.

Η ανάλυση μας δείχνει γενικώς την ύπαρξη δυο περιοχών στη δεξαμενή του νερού, γεγονός που οφείλεται στις μεταβάσεις της φυσικής κατάστασης του υγρού από πλήρως ανεπτυγμένη τύρβη κοντά στον άξονα της φλέβας (Περιοχή 1), και μακριά από αυτήν (Περιοχή 2). Κοντά στον άξονα η μνήμη χάνεται γρήγορα, σε αντίθεση με τις περιοχές κοντά στα όρια της φλέβας, όπου η μνήμη διαρκεί περισσότερο. Η μικρή μνήμη αντιστοιχεί σε δομές ροής μικρής διάρκειας που εμφανίζονται στην περιοχή πλήρους ανεπτυγμένης τύρβης (Περιοχή 1). Προχωρώντας προς τα όρια της φλέβας, κυριαρχούν οι μεγάλης κλίμακας δομές ροής, οι οποίες ζουν περισσότερο και χαρακτηρίζονται από μνήμη μακράς διάρκειας (Περιοχή 2). Η Συνάρτηση Αμοιβαίας Πληροφορίας καθώς και το φάσμα ισχύος δείχνουν την παρουσία μικρής διάρκειας δομών στο κέντρο της φλέβας και δομών μεγαλύτερης διάρκειας κοντά στα όρια της φλέβας. Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα αποτυπώνεται και στην ανακατασκευή του χώρου των φάσεων και τη διάσταση συσχέτισης.

Σε ότι αφορά τις χρονοσειρές ακρότατων είναι ενδιαφέρον ότι η αμοιβαία πληροφορία δείχνει αντίστοιχα αποτελέσματα όσο και η ανακατασκευή του χώρου των φάσεων. Λόγω του περιορισμένου αριθμού των σημείων στη χρονοσειρά ακρότατων (τουλάχιστον στην περίπτωση μας που οι αρχικές χρονοσειρές δεν έχουν πολύ μεγάλο μήκος) δεν ήταν δυνατόν να διερευνηθεί η συμπεριφορά.

Ενδιαφέρουσα είναι η συμπεριφορά της αθροιστικής αμοιβαίας πληροφορίας που σε συνδυασμό με ομαδοποίηση μας επιτρέπει να ομαδοποιήσουμε χρονοσειρές με βάση την απόσταση τους από τον άξονα της φλέβας. Το εργαλείο αυτό κρίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο και θα έχει ενδιαφέρον η μελλοντική εφαρμογή του σε χρονοσειρές μεγάλου μήκους καθώς θα μειώσει σημαντικά τον υπολογιστικό φόρτο. Είναι ενδιαφέρον είναι ότι η κατηγοριοποίηση των χρονοσειρών με βάση την αθροιστική αμοιβαία πληροφορία αλλάζει καθώς χρησιμοποιούμε χρονοσειρές ακρότατων, γεγονός που είναι ως ένα σημείο αναμενόμενο καθώς χάνουμε κάποιες «λεπτές» μεταβολές μεταξύ των ακρότατων. Ενδιαφέρον όμως είναι ότι σε κάθε περίπτωση διακρίνονται οι περιοχές στα όρια και στην υπόλοιπη περιοχή, ενώ η περιοχή του άξονα είναι στην ομάδα που διατηρείται μέχρι τον μικρότερο βαθμό ομοιότητας.

Μια πρόταση για μελλοντική έρευνα θα είναι να διερευνηθεί η λήψη και άλλων μέτρων όπως στατιστικό μέτρων (μέση τιμή, διασπορά κλπ) αλλά και ποσοτήτων από άλλες μεθόδους επεξεργασίας (μεγίστη συχνότητα φάσματος, διάσταση συσχέτισης κλπ) στην διαδικασία ομαδοποίησης των χρονοσειρών ακρότατων προκειμένου να βελτιωθεί η διακριτική τους ικανότητα της ομαδοποίησης και να αντισταθμιστεί ως ένα σημείο η απώλεια πληροφορίας που προκύπτει κατά την διαδικασία.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Borue V. and S.A. Orszag, (1996) Numerical study of three-dimensional Kolmogorov flow at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 306, 293-323.
- Bak, P. (1992), Self-organized criticality in non-conservative models, *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 191, pp. 41-46
- Charakopoulos A., Karakasidis T.E., Papanicolaou P., Detection Of Jet Axis In A Horizontal Turbulent Jet Via Nonlinear Analysis Of Minimum/Maximum Temperature Time Series, 4th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Agios Nikolaos, Crete, Greece, May 31 - June 3, 2011.
- Chatfield C., (2004) *The analysis of Time Series: An introduction*, 6th edition, Chapman & Hall/CRC.
- Euler, Daily & Harleman (1966)
- Grassberger P. Procaccia I. (1983) Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, Vol. 9, pp.189-208.
- Hegger R., H. Kantz, and T. Schreiber, (1999) Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package, *CHAOS* 9, 413.
- Islsker H., (2006) Σημειώσεις μαθήματος, ΑΠΘ.
- J.V. Shebalin and S.L. Woodruff, (1997) Kolmogorov flow in three dimensions, *Phys. Fluids.* 9, 164-170.
- Julien Clinton Sprott, (2003) *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press.
- Kugiumtzis D, Kehagias A and Aifantis E.C. Statistical Analysis of the extreme values of stress time series from Porvetin- Le Chatelier effect. *Physical Review E*.70, 036110, 2004.
- Kugiumtzis D. and Vlachos I. Turning point prediction of oscillating time series using local dynamic regression models arXiv : 08092229v1, 12 Sep 2008.
- Kantz H and Schreiber T, (2003) *Nonlinear Time Series Analysis*, 2<sup>nd</sup> edition, Cambridge.
- Kantz H., (1994) A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Physics Letters A*, Vol 185, pp 77.
- Karakasidis T.E., A. Liakopoulos, A. Fragkou, P. Papanicolaou, ((2009) "Recurrence Quantification Analysis of Temperature Fluctuations in a Horizontal Round Heated Jet", *International Journal of Bifurcation and Chaos* 19, 2487).
- Lillekjendlie, B and Kugiumtzis D. and Christofersen, N. Chaotic time series, part I: estimation of some invariant in state space properties *Modelling Identification and Control* , February 1995.

- Lorenz E.N. (1963) Deterministic nonperiodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130-41.
- Mandelbrot B.B (2002) *Gaussian self-affinity and fractals*, Springer New York.
- Michas Spyros N., Panos N. Papanicolaou, (2009) Horizontal round heated jets into calm uniform ambient, *Desalination* 248 803–815.
- Packard et al (1980)
- Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld , (1988) Self-organized criticality, *Phys. Rev. A* 38, 364–374.
- Rosenstein M.T., Collins J.J. and De Luca C.J., (1993) “A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets”, *Physica D*, Vol 65, pp 117.
- Sarris, I. E., H. Jeanmart, D. Carati and G. S. Winckelmans, ‘Box-size dependency and breaking of translational invariance in the velocity statistics computed from three-dimensional turbulent Kolmogorov flows’, *Physics of Fluids*, vol. 19, 095101, 2007.
- Sauer, T., J., A. Yorke, M. Casdagli (1991), *Embedology. Journal of Statistical Physics* 65(3/4). 579-616
- Schreiber T and Schmit A. (2001) *Surrogate time series*.
- Schreiber T, Kantz H, Hegger R. (1998) *Practical implementation of nonlinear time series methods : The TISEAN package*.
- Takens F. (1981) *Detecting strange attractors in turbulence*, *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwinc 1980, *Lecture Notes in Mathematics* 898, editors: Rand D. A. and Young L.-S., Springer, Berlin, pp. 361-381.
- Theiler J. (1990) *Estimating fractal dimension*, *Optical Society of America A*, Vol 7, pp. 1055-1073.
- Tsonis A.A. (1992) *Chaos: from theory to applications*, Plenum, New York.
- Κόλυβα Φ. και Μπόρα Ε. (1998) *Στατιστική Θεωρία και Εφαρμογές*, ΖΗΤΗ.
- Κουγιουμτζής Δ., (2005) *Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών*, Πρακτικά 18ου Θερινού Σχολείου και Πανελληνίου Συνεδρίου στη Μη-γραμμική επιστήμη και Πολυπλοκότητα.
- Κουγιουμτζής Δημήτρης, (2006) *Σημειώσεις «Μη γραμμική Ανάλυση Χρονοσειρών»*, ΑΠΘ.
- Μιμίκου Μ., (1994 Κεφάλαιο 4, *Ανάλυση Υδρολογικών Σειρών*, Στο *Τεχνολογία Υδατικών Πόρων*, β' έκδοση, Παπασωτηρίου).
- Μίχας Σπυρίδων, *Διδακτορική διατριβή*, (Ιούλιος 2008) «ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ

ΑΝΩΣΤΙΚΩΝ ΦΛΕΒΩΝ, ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΗ ΑΚΙΝΗΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΗ», Επιβλέπων:  
Παναγιώτης Παπανικολάου.

Παπαϊωάννου Γ., (1999) Χαστικές Χρονοσειρές, Θεωρία και Πράξη, , Leader Books,.

Συριόπουλος Κ. και Λεοντίσης Α., (2000) Χάος, Ανάλυση και πρόβλεψη  
χρονοσειρών, Εκδόσεις Ανικούλα, Θεσσαλονίκη.



