

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΙΞΩΔΟΜΕΤΡΟΥ COUETTE ΜΕΣΩ ΤΟΥ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ OPENFOAM**

υπό

**ΓΡΗΓΟΡΙΟΥ ΦΡΑΓΚΟΥ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2013



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 11654/1  
Ημερ. Εισ.: 04-06-2013  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ  
2013  
ΦΡΑ



© 2013 Γρηγόρης Φράγκος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Αθανάσιος Παπαθανασίου  
(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γάσος Σταματέλλος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος κ. Αθανάσιο Παπαθανασίου, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του, για την παροχή συμβουλών σε δυσκολίες που αντιμετώπισα, για την υπομονή που υπέδειξε και τις πολύτιμες ώρες που αφιέρωσε κατά τη διάρκεια της εργασίας μου. Επίσης είμαι ευγνώμων και στα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής που είχα την τιμή να τους έχω καθηγητές στη διάρκεια των προπτυχιακών σπουδών μου.

Ευχαριστώ θερμά τους φίλους μου Χαράλαμπο Δημητρόπουλο, Μάνο Ευαγγελίδη και Βαρβάρα Τσούγγου για τη συμπαράστασή τους.

Πάνω απ' όλα είμαι ευγνώμων στην οικογένεια μου για τη στήριξη και την αγάπη τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στον πατέρα μου και τη μητέρα μου.

Γρηγόρης Φράγκος

# ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΙΞΩΔΟΜΕΤΡΟΥ COUETTE ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ OPENFOAM

Γρηγόρης Φράγκος

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών 2012

**Επιβλέπων Καθηγητής:** Δρ. Αθανάσιος Παπαθανασίου, Αναπληρωτής Καθηγητής,  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να προσομοιώσει τα φαινόμενα ροής και μεταφοράς θερμότητας που λαμβάνουν χώρα κατά τη λειτουργία του ιξωδομέτρου Couette μέσω της χρήσης του προγράμματος μοντελοποίησης openfoam.

Αρχικά μοντελοποιήθηκε η γεωμετρία του ιξωδομέτρου και ορίστηκαν οι εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες που διέπουν τη λειτουργία του. Έπειτα επιλέχθηκαν διάφορα ρευστά, που βρίσκουν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή αλλά και στην τεχνολογία, όπως πολυμερή, τρόφιμα και συντηρητικά. Σε όλα τα παραπάνω θεωρήθηκε ότι οι ρεολογικές ιδιότητες εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τη θερμοκρασία.

Στη συνέχεια αναλύθηκαν τα διάφορα αποτελέσματα που προέκυψαν, όσον αφορά τον υπολογιστικό προσδιορισμό της ροπής του ιξωδομέτρου (η οποία είναι σημαντική, γιατί μέσω αυτής γίνεται ο υπολογισμός του ιξώδους), της μεταβολής της ταχύτητας, της θερμοκρασίας, της ιξώδους θερμότητας και διατυπώθηκαν κάποια συμπεράσματα. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στη σύγκριση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων με αναλυτικές λύσεις, τόσο για ρευστά σταθερού ιξώδους, όσο και για ρευστά των οποίων το ιξώδες είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας. Τέλος ελέγχθηκε η

επίδραση συνήθων απλουστεύσεων όσον αφορά τη γεωμετρία και τις συνοριακές συνθήκες στην υπολογιζόμενη ροπή και στα προφίλ ταχυτήτων και θερμοκρασιών.

## Πίνακας Περιεχομένων

<b>Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή</b>	10
1.1 Ανάλυση Βασικών Εννοιών	11
1.2 Χρήση Ιξωδομέτρων και Ανάλυση της Αρχής Λειτουργίας τους	13
<b>Κεφάλαιο 2 Θεωρία</b>	15
2.1 Συνθήκες και Εξισώσεις Προβλήματος	15
2.2 Επίλυση των Εξισώσεων Κίνησης Νευτωνικού Ρευστού σε Ιξωδόμετρο Couette	19
2.3 Επίλυση των Εξισώσεων Κίνησης Μη-Νευτωνικού Ρευστού σε Ιξωδόμετρο Couette	20
2.3.1 Ψευδοπλαστική Συμπεριφορά (Power-Law)	20
2.4 Συνθήκες και Εξισώσεις Προβλήματος με Παραγωγή Θερμότητας	22
2.5 Επίλυση Εξισώσεων Κίνησης και Ενέργειας	23
2.5.1 Σταθερή Θερμοκρασία στον Εξωτερικό Κύλινδρο ( $T_o$ ) και στον Εσωτερικό Κύλινδρο ( $T_i$ )	23
2.5.2 Θερμομονωμένος Εσωτερικός Κύλινδρος και Σταθερή Θερμοκρασία στον Εξωτερικό Κύλινδρο ( $T_o$ )	24
2.5.2.1 Θερμοκρασιακό Προφίλ με το Δυναμικό Ιξώδες Ανεξάρτητο από τη Θερμοκρασία	25
2.5.2.2 Θερμοκρασιακό Προφίλ και Προφίλ Ταχύτητας όπου το Δυναμικό Ιξώδες Εκφράζεται με τη Σχέση $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$	26
2.5.2.3 Θερμοκρασιακό Προφίλ όπου το Δυναμικό Ιξώδες	

$$\text{Εκφράζεται με τη Σχέση } \mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2} \quad 27$$

### **Κεφάλαιο 3 Προσομοίωση μέσω Υπολογιστικού Πακέτου**

#### **Openfoam** 29

- 3.1 Χρήση Εξισώσεων από το Openfoam 29
- 3.2 Ιδιαιτερότητες Openfoam 30
- 3.3 Μονάδες στο Openfoam 31
- 3.4 Γεωμετρία 32
- 3.5 Συνοριακές Συνθήκες 34
- 3.6 Λύτες Openfoam 39
- 3.7 Μοντελοποίηση Επαληθεύσεων και Αποτελεσμάτων 39

#### **Κεφάλαιο 4 Επαληθεύσεις-Αποτελέσματα** 50

- 4.1 Επαλήθευση Προφίλ Ταχύτητας για Ισοθερμοκρασιακή Ροή και Έλεγχος των Αριθμητικών Αποτελεσμάτων Τριών Διαφορετικών Πλεγμάτων 51
- 4.2 Επαλήθευση Μοντέλου Power-Law 53
- 4.3 Επαλήθευση Θερμοκρασιακού Προφίλ με το Δυναμικό Ιξώδες Ανεξάρτητο από τη Θερμοκρασία 56
  - 4.3.1 Σταθερή Θερμοκρασία στον Εξωτερικό Κύλινδρο ( $T_o$ ) και στον Εσωτερικό Κύλινδρο ( $T_i$ ) 57
  - 4.3.2 Θερμομονωμένος Εσωτερικός Κύλινδρος και Σταθερή Θερμοκρασία στον Εξωτερικό Κύλινδρο ( $T_o$ ) 58
    - 4.3.2.1 Θερμοκρασιακό Προφίλ όπου το Δυναμικό Ιξώδες είναι Ανεξάρτητο της Θερμοκρασίας 58

4.3.2.2	Θερμοκρασιακό Προφίλ και Προφίλ Ταχύτητας όπου το Δυναμικό Ιξώδες Εκφράζεται με τη Σχέση $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$	59
4.3.2.3	Θερμοκρασιακό Προφίλ όπου το Δυναμικό Ιξώδες Εκφράζεται με τη Σχέση $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$	61
4.4	Ανάλυση Ποσοστού Απόκλισης Ανάμεσα σε Αποτελέσματα Υπολογιστικού Μοντέλου Openfoam και προβλέψεων Αναλυτικών Λύσεων	63
4.5	Σύγκριση Ιδανικής Γεωμετρίας με Πραγματική στο Κώδικα SimpleFoam	68
4.6	Σύγκριση Κώδικα χωρίς την Εξίσωση της Ενέργειας Με Κώδικα με την Εξίσωση της Ενέργειας	72
4.7	Σύγκριση Νευτωνικού Με Μη-Νευτωνικού Ρευστού	75
4.8	Χρήση Μοντέλου Μεταβλητού Ιξώδους	80
4.9	Ανάλυση Πραγματικής Γεωμετρίας στο κώδικα με την Εξίσωση Ενέργειας με τη Χρήση Τήγματος PVC	82
	<b>Κεφάλαιο 5 Επίλογος</b>	86
	<b>Κεφάλαιο 6 Βελτιώσεις Και Προσθήκες</b>	88
	<b>Παράρτημα Α</b>	89
	<b>Παράρτημα Β</b>	90
	<b>Βιβλιογραφικές Αναφορές</b>	91



## Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να εισάγει τον αναγνώστη στις στοιχειώδεις γνώσεις και την ορολογία της ρεολογίας και να δώσει τα κατάλληλα εργαλεία, ώστε μέσω των υπολογιστικών και πειραματικών τιμών να βρεθούν οι ρεολογικές ιδιότητες των υλικών. Ο αναγνώστης θα πρέπει να κατανοήσει τα εξής:

- Τι είναι ρεολογία;
- Τι σημαίνει ιξώδες;
- Τι είναι διάτμηση;
- Τι είναι Νευτώνικό και μη-Νευτώνικό ρευστό;
- Τι είναι ιξώδης θερμότητα;

Είναι πολύ σημαντικό να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω, γιατί αρκετά ρευστά χρησιμοποιούνται σε διάφορες διεργασίες στη βιομηχανία. Επίσης είναι αναγκαίο ο μηχανικός να γνωρίζει τις ρεολογικές ιδιότητες του κάθε ρευστού, για να ορίσει και τις κατάλληλες συνθήκες που θα πρέπει να διέπουν τις διεργασίες αυτές. Κάποιες από τις βιομηχανίες, όπου η ρεολογία έχει ένα σημαντικό ρόλο, είναι οι βιομηχανίες τροφίμων, οι φαρμακοβιομηχανίες και οι βιομηχανίες στις οποίες γίνεται χρήση πολυμερών τηγμάτων.

Ο προσδιορισμός του ιξώδους επιτυγχάνεται με τα λεγόμενα ιξωδόμετρα. Υπάρχουν πολλών ειδών, το καθένα λειτουργεί διαφορετικά από το άλλο και για αυτό χρησιμοποιούνται σε διαφορετικές εφαρμογές.

Παρακάτω παρατίθενται κάποια από αυτά:

- Το τριχοειδές ιξωδόμετρο
- Το ιξωδόμετρο κώνου-πλάκας
- Το ιξωδόμετρο Couette
- Το ιξωδόμετρο παράλληλων πλακών

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στα περιστροφικά ρεόμετρα και συγκεκριμένα στη προσομοίωση του ιξωδομέτρου των συναξονικών κυλίνδρων το οποίο στηρίζεται στο μαθηματικό φυσικό μοντέλο της ροής Couette.

Η όλη προσπάθεια περιγράφεται επιγραμματικά ως εξής:

- Αναλυτική περιγραφή των ερωτημάτων που τέθηκαν και άλλων βασικών εννοιών, σημαντικών για την κατανόηση της διπλωματικής εργασίας.
- Παρουσίαση των αναλυτικών λύσεων οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για επαλήθευση των υπολογιστικών αποτελεσμάτων.
  - Ανάλυση της διαδικασίας προσομοίωσης και των μοντέλων που χρησιμοποιεί το λειτουργικό του openfoam. Αυτό παρουσιάζεται στο τρίτο κεφάλαιο.
  - Έλεγχος ορθότητας του simplefoam τόσο για τη Νευτωνική περιοχή όσο και για τη μη-Νευτωνική. Εισαγωγή της εξίσωσης της ενέργειας στο πρωταρχικό κώδικα simplefoam και έλεγχος της ορθότητας των αποτελεσμάτων του για τις δύο περιπτώσεις, σταθερού και μεταβλητού ιξώδους .
- Ανάλυση τεσσάρων ζητημάτων:
  - Διαφορές ανάμεσα στις υπολογιστικές και αναλυτικές λύσεις όσον αφορά την ιξώδη θερμότητα.
  - Πώς μεταβάλλεται η ροπή, αν το ρευστό είναι Νευτωνικό ή μη.
  - Πώς η ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου και το ύψος του ρευστού επηρεάζει τη ροπή.
  - Πώς το ιξώδες μεταβάλλεται (γραμμικά, πολυωνυμικά, εκθετικά) σε σχέση με τη θερμοκρασία και πόσο αυξάνεται η θερμοκρασία από την ιξώδη θερμότητα.
- Εξαγωγή αποτελεσμάτων και συζήτησή τους.

## 1.1 Ανάλυση Βασικών Εννοιών

Η ρεολογία είναι η επιστήμη που περιγράφει την παραμόρφωση ενός στερεού, υγρού ή αερίου σώματος υποκειμένου στην επίδραση τάσεων. Σε αυτή γίνεται συνεχή χρήση του ρυθμού παραμόρφωσης ή αλλιώς του ρυθμού διάτμησης (shear rate), δηλαδή της μεταβολής της παραμόρφωσης με το χρόνο [4].

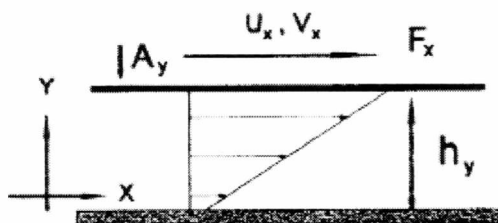
Η φυσική ιδιότητα που χαρακτηρίζει όλα τα ρευστά, είναι η αντίσταση τους στην κίνηση, δηλαδή το ιξώδες. Ο καθένας στη ζωή του θα έχει παρατηρήσει ότι η μαγιονέζα ή το ketchup είναι πιο παχύρρευστα από ότι το νερό.

Είναι εύκολο να οριστούν τα υλικά ανάλογα με το πως συμπεριφέρονται σε σχέση με τη δύναμη που τους ασκείται. Αν ένα ρευστό περιέχεται ανάμεσα σε δύο πλάκες εκ των οποίων η κάτω πλάκα μένει ακίνητη, ενώ η άλλη κινείται με μια σταθερή ταχύτητα, μπορεί το ρευστό αυτό να κατηγοριοποιηθεί, ανάλογα με τη δύναμη που απαιτείται για να διατηρηθεί μια σχετική ταχύτητα μεταξύ των πλακών.

Η συμπεριφορά του υλικού μπορεί να εκφραστεί είτε με το ρυθμό διάτμησης είτε με τη διατμητική τάση, οι οποίες ορίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις 1 και 2:

$$\gamma_{yx} = \frac{V_x}{h_y} = \frac{du_x}{dy} \quad (1)$$

$$\tau_{yx} = \mu * \gamma_{yx} \quad (2)$$



Σχήμα 1: Παραμόρφωση ρευστού ανάμεσα σε 2 πλάκες απείρου μήκους εκ των οποίων η μια κινείται και η άλλη είναι σταθερή

Αν παραδείγματος χάρη η πάνω πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα και η δύναμη είναι γραμμικά ανάλογη με το σχετικό ρυθμό κίνησης (ρυθμό διάτμησης), τότε το ρευστό είναι Νευτώνικό [5].

Επίσης, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι με το φαινόμενο της διάτμησης, συνεπάγεται παραγωγή ιξώδους θερμότητας (viscous energy dissipation). Με την αύξηση της θερμοκρασίας τα μόρια του ρευστού αρχίζουν να κινούνται όλο και πιο γρήγορα, μειώνοντας τις ενδομοριακές δυνάμεις της υγρής φάσης, με αποτέλεσμα τη μείωση του ιξώδους (ακριβώς το αντίθετο γίνεται στα αέρια) [5].

Αν δεν ληφθούν μέτρα για την απαγωγή αυτής της θερμότητας, η θερμοκρασία του ρευστού θα αυξάνεται, οδηγώντας συχνά σε αναντιστρεπτή αλλοίωση του ρευστού, άρα και στην εξαγωγή μη ορθών αποτελεσμάτων από τη ρεολογική μέτρηση.

Η ιξώδης θερμότητα εμφανίζεται στις εξής εφαρμογές:

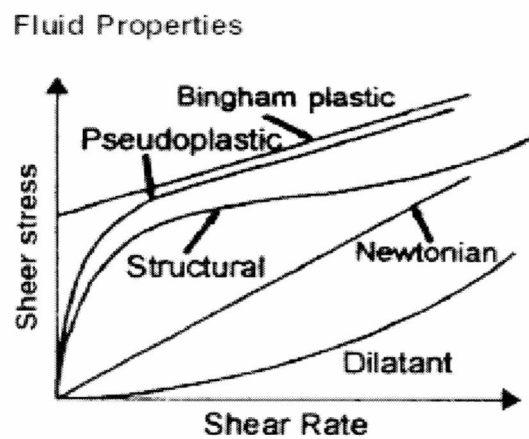
- Ροή λιπαντικού σε κινούμενα μέρη μηχανών
- Εκβολή πολυμερών
- Ιξωδόμετρα ρευστών υψηλού ιξώδους και υψηλών ταχυτήτων

Ανεξάρτητα από την εξάρτηση ή μη του ιξώδους από τη θερμοκρασία, στη ρεολογία διακρίνουμε δύο είδη ρευστών:

- Τα Νευτωνικά ρευστά
- Τα μη-Νευτωνικά ρευστά

Τα μη Νευτωνικά ρευστά χαρακτηρίζονται από ιξώδες που είναι συνάρτηση του ρυθμού διάτμησης και χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Τα ψευδοπλαστικά
- Τα διασταλτικά



Σχήμα 2: Διατμητική τάση ως συνάρτηση ρυθμού διάτμησης για διάφορα ρευστά

## 1.2 Χρήση Ιξωδομέτρων και Ανάλυση της Αρχής Λειτουργίας τους

Η ρεολογία χρησιμοποιεί τα ιξωδόμετρα για τη μέτρηση του ιξώδους. Τα όργανα αυτά μπορούν να υπολογίσουν το ιξώδες μετρώντας την αντίσταση του ρευστού κατά την κίνηση. Χρησιμοποιούνται ευρέως για να μελετήσουν είτε τη συμπεριφορά των Νευτωνικών είτε των μη-Νευτωνικών ρευστών. Συγκεκριμένα στα περιστροφικά

ρεόμετρα μέσω της τάσης μπορεί να υπολογιστεί η ροπή και μετέπειτα το ιξώδες. Όσον αφορά τον υπολογισμό της αύξησης της θερμοκρασίας, έχουν τους κατάλληλους αισθητήρες, έτσι μπορούν να προβλέπουν ανά πάσα στιγμή την αλλαγή της θερμοκρασίας, ώστε να καταλήγουν σε σωστούς υπολογισμούς. Στη περίπτωση του ιξωδομέτρου συναξονικών κυλίνδρων, το οποίο θα μας απασχολήσει σε αυτή την εργασία, συνήθως περιστρέφεται ο εξωτερικός κύλινδρος, για να αποφευχθούν οι δίνες Taylor. Το φυσικό μοντέλο που τα διέπει είναι η ροή Couette [2].

Η ροή Couette είναι η ροή ενός ασυμπίεστου Νευτωνικού ρευστού που περιέχεται και υφίσταται διάτμηση ανάμεσα σε δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους. Συνήθως εξετάζεται η περιστροφή μόνο του εξωτερικού κυλίνδρου με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ , η οποία μπορεί να είναι σχετικά μικρή (στρωτή ροή) ή σχετικά μεγάλη (τυρβώδης ροή). Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να περιστρέφεται και ο εσωτερικός κύλινδρος ή ακόμα και οι δύο μαζί.

Πρέπει να τονιστεί ότι η ροή ανάμεσα σε δύο συναξονικούς κυλίνδρους συναντάται σε ποικίλες εφαρμογές μερικές από τις οποίες είναι :

- Λίπανση αξόνων που κινούνται γρήγορα
- Μέτρηση του ιξώδους ενός υγρού
- Ροή τηγμένων πολυμερών

Γενικά το ιξωδόμετρο Couette δεν ενδείκνυται για πολυμερή τήγματα, γιατί είναι δύσκολο να καθαριστεί το στερεοποιημένο τήγμα από το πάτο του μετά το πέρας του πειράματος.

## Κεφάλαιο 2 Θεωρία

Η συμπεριφορά ενός ιξώδους ρευστού σε κίνηση μπορεί να περιγραφεί με βάση τις τρεις κλασικές εξισώσεις των φαινομένων μεταφοράς, δηλαδή τις εξισώσεις συνέχειας, κίνησης και ενέργειας.

Το ρευστό είναι ασυμπίεστο και μελετάται για μόνιμες καταστάσεις, δηλαδή δεν υπάρχει μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού από το χρόνο. Η μόνη μη μηδενική ταχύτητα είναι η εφαπτομενική που εξαρτάται από την ακτίνα  $r$ . Το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό και μονοδιάστατο. Τέλος υπάρχει έλλειψη βαρύτητας και η πτώση πίεσης στη  $\theta$ -διεύθυνση είναι μηδέν [1].

### 2.1 Συνθήκες και Εξισώσεις Προβλήματος

Παρακάτω δίνονται οι μαθηματικές σχέσεις που ορίζουν το πρόβλημα, οι ορισμοί των διατμητικών τάσεων και ακολουθούν οι εξισώσεις συνέχειας και κίνησης. Σκοπός είναι η αντικατάσταση των συνθηκών στις εξισώσεις, ώστε να βρεθούν οι τελικές σχέσεις που ορίζουν το πρόβλημα.

**Συνθήκες Προβλήματος:**

$$\frac{D\rho}{dt} = 0 \text{ (ασυμπίεστο ρευστό)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial(u_\theta)}{\partial\theta} = 0 \text{ (αξονοσυμμετρικό πρόβλημα)} \quad (4)$$

$$\rho * g = 0 \text{ (μη ύπαρξη βαρύτητας)} \quad (5)$$

$$u_r = 0 \quad (6)$$

$$u_\theta(r) \neq 0 \quad (7)$$

$$u_z = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial\theta} = 0 \quad (9)$$

### Διατηρητικές Τόσεις

$$\tau_{zz} = -2 * \mu * \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

$$\tau_{rr} = -2 * \mu * \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad (11)$$

$$\tau_{\theta\theta} = -2 * \mu * \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right] = 0 \quad (12)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu * \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] = -\mu * r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu * \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = 0 \quad (14)$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu * \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] = 0 \quad (15)$$

### Εξίσωση Συνέχειας:

$$\frac{D\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho * u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho * r * u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho * u_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{D\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho * u_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho * r * u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho * u_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$\underbrace{\frac{\partial(\rho * u_z)}{\partial z}}_{\text{μονοδιάστατο}}$ 
 $\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho * u_\theta)}{\partial \theta}}_{\text{αξονοσυμμετρικό}}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho * r * u_r)}{\partial r} = 0 \quad (17)$$

### Εξισώσεις Κίνησης

1. r-διεύθυνση :

$$\rho * \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r \quad (18)$$

$$\rho * \left( \underbrace{\frac{\partial u_r}{\partial t}}_{\text{μόνιμη κατάσταση}} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] + \rho g_r$$

$$-\frac{\rho * u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (19)$$

2. θ-διεύθυνση:

$$\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r * u_\theta}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} \right] + \rho g_\theta \quad (20)$$

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u_\theta}{\partial t}}_{\text{μόνιμη κατάσταση}} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r * u_\theta}{r} \right)$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{z\theta} \right] + \rho g_\theta$$



$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} * \frac{d}{dr} (r * u_\theta) \right) = 0 \quad (21)$$

3. z-διεύθυνση:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] + \rho g_z \\ & -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Έτσι οι εξισώσεις της κίνησης στην τελική μορφή τους είναι οι εξής και είναι πανομοιότυπες με τις αναλυτικές λύσεις των Bird, Stewart και Lightfoot [2]:

- r-διεύθυνση :  $-\rho * \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$  (24)

- θ-διεύθυνση :  $\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} * \frac{d}{dr} (r * u_\theta) \right) = 0$  (25)

- z-διεύθυνση:  $-\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  (26)

Από την εξίσωση 24 φαίνεται ότι η πίεση επηρεάζεται μόνο από τη φυγόκεντρο δύναμη. Η εξίσωση 25 δίνει το προφίλ ταχύτητας και η εξίσωση 26 την εξάρτηση της πίεσης από τη βαρύτητα, η οποία είναι μηδενική. Όμως στην παρούσα πτυχιακή και στα

παρακάτω κεφάλαια γίνεται αναφορά για τη θ-διεύθυνση. Στο Παράρτημα Α αποδεικνύεται ότι η εξίσωση  $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} * \frac{d}{dr}(r * u_\theta)\right) = 0$  ισούται με  $-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta})$ .

## 2.2 Επίλυση των Εξισώσεων Κίνησης Νευτωνικού Ρευστού σε Ιξωδόμετρο Couette

Με βάση τα παραπάνω θα γίνει προσπάθεια να λυθεί η γεωμετρία του ιξωδομέτρου Couette το οποίο αποτελείται από δύο κυλίνδρους με ένα κενό (gap) μεταξύ τους. Το κενό συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα κ. Ο εσωτερικός κύλινδρος με την ονομασία bob έχει ακτίνα κR και ο εξωτερικός με την ονομασία cup έχει ακτίνα R. Ο εσωτερικός είναι ακίνητος, ενώ ο εξωτερικός κινείται με μια γωνιακή ταχύτητα  $\Omega_0$ . Το πρόβλημα τίθεται σε μονοδιάστατη μορφή.

Η διαφορική εξίσωση, αν ολοκληρωθεί δύο φορές, μετατρέπεται στη μορφή της εξίσωσης 30 η οποία με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (εξισώσεις 31 και 32) δίνει το προφίλ της ταχύτητας (εξίσωση 33), το οποίο θα χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο σύγκρισης στο κεφάλαιο 4:

$$\frac{1}{r} * \frac{d}{dr}(r * u_\theta) = C_1 \quad (27)$$

$$\frac{d}{dr}(r * u_\theta) = C_1 * r \quad (28)$$

$$r * u_\theta = \frac{1}{2} * C_1 * r^2 + C_2 * r \quad (29)$$

$$u_\theta = \frac{1}{2} * C_1 * r + C_2 \quad (30)$$

Με συνοριακές συνθήκες τις παρακάτω:

$$\Sigma. \Sigma. 1 \text{ για } x = \kappa * R \quad u_\theta = 0 \quad (31)$$

$$\Sigma. \Sigma. 2 \text{ για } x = R \quad u_\theta = \Omega * R \quad (32)$$

$$u_\theta = \Omega_0 * R * \frac{\left(\frac{r}{\kappa * R} - \frac{\kappa * R}{r}\right)}{\left(\frac{1}{\kappa} - \kappa\right)} \quad (33)$$

Αν η εξίσωση 33 αντικατασταθεί στην εξίσωση 12 προκύπτει :

$$\tau_{r\theta} = -\mu * \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] = -2 * \mu * \Omega_o * \left( \frac{R}{r} \right)^2 * \left( \frac{\kappa^2}{1 - \kappa^2} \right) \quad (34)$$

Η διατμητική τάση επί το γινόμενο της επιφάνειας και το ύψος του εσωτερικού κυλίνδρου δίνει τη ροπή του ιξωδομέτρου, μέσω της οποίας τα κανονικά ιξωδόμετρα υπολογίζουν το ιξώδες. Ουσιαστικά η αρχή λειτουργίας βασίζεται στο ότι μέσω της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής παραμόρφωσης υπολογίζεται το ιξώδες.

$$T_{bob} = (-\tau_{r\theta})|_{r=\kappa*R} * 2\pi\kappa RL * \kappa R \quad (35)$$

### 2.3 Επίλυση των Εξισώσεων Κίνησης Μη-Νευτωνικού Ρευστού σε Ιξωδόμετρο Couette

Ένα σύνηθες μοντέλο που χρησιμοποιείται στα μη-Νευτωνικά ρευστά για να βρεθεί το ιξώδες τους είναι το μοντέλο power-law. Όπως προαναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, αυτό που είναι σημαντικό να βρεθεί σε ένα εμπορικό ιξωδόμετρο είναι η ροπή του bob. Η ροπή στο μοντέλο power-law εκφράζεται σύμφωνα με την εξίσωση 36. Με αντικατάσταση της εξίσωσης 37 στην 36 προκύπτει η εξίσωση 38 [3], η οποία θα χρησιμοποιηθεί και αυτή στο κεφάλαιο 4 ως επαλήθευση.

$$\tau = K * \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad \text{όπου } K = \text{δείκτης συνέπειας, } n = \text{δείκτης συμπεριφοράς ροής} \quad (36)$$

$$\gamma = \frac{2 * \Omega}{n} * \left( \frac{a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}} - 1} \right) * \frac{\kappa * R^{\frac{2}{n}}}{r^{\frac{2}{n}}} \quad (37)$$

$$\tau_b = K(\dot{\gamma}_b)^n = \Omega^n * \left( K^{\frac{1}{n}} * \left( \frac{2}{n} \right) * \left[ \frac{a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}} - 1} \right] \right)^n \quad (38)$$

Μια πιο λεπτομερή αναφορά στο μοντέλο power-law γίνεται παρακάτω.

#### 2.3.1 Ψευδοπλαστική Συμπεριφορά (Power-Law)

Ο νόμος του Νεύτωνα για το ιξώδες γράφεται με την εξίσωση 39:

$$\mu = \frac{\tau}{\left(\frac{du}{dy}\right)} = \frac{\text{διατμητική τάση (Pa)}}{\text{ρυθμός διάτμησης } \left(\frac{1}{s}\right)} \quad \mu \rightarrow [Pa * s] \quad (39)$$

Το ιξώδες αντιπροσωπεύει αντίσταση στη ροή. Για Νευτωνικά ρευστά αποτελεί σταθερά (ανεξάρτητη από το ρυθμό διάτμησης). Για πολυμερικά διαλύματα και τήγματα το ιξώδες μειώνεται με την αύξηση του ρυθμού διάτμησης. Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται διατμητική λέπτυνση και οφείλεται σε ευθυγράμμιση και αποπερίελιξη των μακρών πολυμερικών αλυσίδων, όταν υπόκεινται σε διάτμηση. Για τα πολυμερή δεν γίνεται λόγος για σταθερό ιξώδες  $\mu$  αλλά μάλλον για μεταβλητό ιξώδες.

Ένας απλός τρόπος για την προσαρμογή δεδομένων «ιξώδους» για πολυμερικά τήγματα είναι ο εκθετικός νόμος των Ostwald-de Waele.

$$\tau = K * \dot{\gamma}^n \quad \text{ή} \quad n_{\phi} = K * \dot{\gamma}^{n-1} \quad \text{με} \quad K \rightarrow [Pa * s^n] \quad \text{και} \quad n \rightarrow \text{αδιάστατη σταθερά} \quad (40)$$

Ο συντελεστής  $K$  ονομάζεται δείκτης συνέπειας (όσο μεγαλύτερο το  $K$  τόσο πιο ιξώδες το τήγμα) και ο εκθέτης  $n$  ονομάζεται δείκτης ρεολογικής συμπεριφοράς και δείχνει το βαθμό μη Νευτωνικής συμπεριφοράς του ρευστού ( $n = 1$  σημαίνει Νευτωνικό ρευστό, ενώ για πολυμερή με συμπεριφορά διατμητική λέπτυνση,  $n < 1$ ).

- Ο εκθετικός νόμος δίνει:  $\log \mu = \log K + (n - 1) * \log \dot{\gamma}$
- Ο δείκτης συνέπειας  $K$  ισούται με το ιξώδες  $\mu$ , όταν  $\dot{\gamma} \rightarrow s^{-1}$
- Σε διάγραμμα  $\log \mu - \log \dot{\gamma}$  δίνει ευθεία με κλίση  $(n-1)$ .
- Ο εκθετικός νόμος επιτρέπει καλή προσαρμογή δεδομένων ιξώδους για μεγάλους ρυθμούς διάτμησης, αλλά για χαμηλούς ρυθμούς διάτμησης τα πολυμερή και διάφορα άλλα ψευδοπλαστικά ρευστά συμπεριφέρονται σαν Νευτωνικά ρευστά με σταθερό ιξώδες (παραδείγματος χάρη για τιμές ρυθμού διάτμησης  $\dot{\gamma} < 3s^{-1}$ ).
- Ο εκθετικός νόμος ισχύει και δίνει καλά αποτελέσματα για τις περισσότερες διεργασίες ψευδοπλαστικών, επειδή τα  $\dot{\gamma}$  είναι συνήθως μεταξύ  $100 s^{-1}$  και  $5000 s^{-1}$ .

## 2.4 Συνθήκες και Εξισώσεις Προβλήματος με Παραγωγή Θερμότητας

### Συνθήκες Προβλήματος

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ μόνιμες συνθήκες} \quad (41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \neq 0 \quad (42)$$

$$u_r = 0 \quad (43)$$

$$u_\theta(r) \neq 0 \quad (44)$$

$$u_z = 0 \quad (45)$$

### Εξίσωση Ενέργειας:

$$\rho * c_p * \frac{DT}{dt} = k * \nabla^2 T + \mu * \Phi \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \rho * c_p * \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ & = k * \left[ \frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial r} \left( r * \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} * \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \mu * \Phi \end{aligned} \quad (47)$$

Παρατηρείται ότι στην εξίσωση της ενέργειας η θερμοκρασία εξαρτάται από την πυκνότητα του υλικού ( $\rho$ ), την ειδική θερμότητα ( $c_p$ ), τη θερμική αγωγιμότητα ( $k$ ) και τη διάτμηση. Όπως έχει προαναφερθεί η διάτμηση του ρευστού παράγει ιξώδης θερμότητα, η οποία συμβολίζεται με  $\Phi$  στην εξίσωση της ενέργειας και ισούται με:

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 * \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ r * \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 \\ & + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^2 - \frac{2}{3} * \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Άρα η εξίσωση της ενέργειας μπορεί να γραφτεί και στη μορφή της εξίσωσης 49:

$$\rho * c_p * \left( \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} \\ \text{μόνιμη κατάσταση} \\ \nearrow 0 \end{array} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \nearrow 0$$

$$\begin{aligned}
&= k * \left[ \frac{1}{r} * \frac{\partial}{\partial r} \left( r * \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} * \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\
&+ \mu * 2 * \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ r * \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]^2 \\
&+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right]^2 - \frac{2}{3} * \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]^2 \\
&k * \frac{1}{r} * \frac{d}{dr} \left( r * \frac{dT}{dr} \right) + \mu * \left[ r * \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right]^2 = 0 \tag{49}
\end{aligned}$$

## 2.5 Επίλυση Εξισώσεων Κίνησης και Ενέργειας

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας αναφέρονται οι αναλυτικές λύσεις των Bird, Stewart και Lightfoot [2] και των Parathanasiou, Caridis και Bijeljic [1] για να χρησιμοποιηθούν μετέπειτα στο κεφάλαιο 4 ως μέτρο σύγκρισης ότι ο υπολογιστικός κώδικας με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες δίνει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με αυτές.

### 2.5.1 Σταθερή Θερμοκρασία στο Εξωτερικό Κύλινδρο (T<sub>o</sub>) και τον Εσωτερικό Κύλινδρο (T<sub>i</sub>)

Αν στην εξίσωση 49 γίνει αδιαστατοποίηση των μονάδων της (εξισώσεις 50, 51, 52 και 53) και αντικατασταθεί η  $u_\theta$  (εξίσωση 33), προκύπτει η αδιαστατοποιημένη εξίσωση της ενέργειας (εξίσωση 54). Με την κατάλληλη ολοκλήρωση και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες θα δώσει το θερμοκρασιακό προφίλ (εξίσωση 58). Παρακάτω παρατίθενται οι αδιαστατοποιημένες μονάδες της θερμοκρασίας, της απόστασης και της ταχύτητας (εξισώσεις 50, 51, 52).

$$\theta = \frac{T - T_{innercylin}}{T_{outercylin} - T_{innercylin}}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad u = \frac{u_\theta}{\Omega_o * R} \quad (50, 51, 52)$$

$$N = \frac{\mu_o * (\Omega * R)^2}{k * (T_i - T_o)} * \frac{\kappa}{(1 - \kappa^2)^2} \quad (53)$$

$$\frac{1}{\xi} * \frac{d}{d\xi} \left( \xi * \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -4 * N * \frac{1}{\xi^4} \quad (54)$$

Με ολοκλήρωση της παραπάνω εξίσωσης προκύπτει η εξίσωση 55, η οποία αν αντικατασταθεί με τις συνοριακές συνθήκες θα δώσει το θερμοκρασιακό προφίλ (εξίσωση 58).

$$\theta = -N * \frac{1}{\xi^2} + C_1 * \ln\xi + C_2 \quad (55)$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$\Sigma.\Sigma. 1 \quad \text{για } \xi = \kappa \quad \theta = 0 \quad (56)$$

$$\Sigma.\Sigma. 2 \quad \text{για } \xi = 1 \quad \theta = 1 \quad (57)$$

$$\theta = \left( 1 - \frac{\ln\xi}{\ln\kappa} \right) + N * \left[ \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) * \frac{\ln\xi}{\ln\kappa} \right] \quad (58)$$

## 2.5.2 Θερμομονωμένος Εσωτερικός Κύλινδρος και Σταθερή Θερμοκρασία στον Εξωτερικό Κύλινδρο (T<sub>o</sub>).

Στις περισσότερες ροές η ιξώδης θερμότητα δεν είναι σημαντική. Αν όμως τα διανύσματα των ταχυτήτων είναι αρκετά υψηλά, τότε δεν μπορεί να αγνοηθεί. Η ιξώδης θερμότητα εκφράζεται κυρίως με τον αριθμό Brinkman

$$Br = \frac{\dot{q}_g * b^2}{k * (T_1 - T_o)} = \frac{\mu * \frac{u_b^2}{b^2} * b^2}{k * (T_1 - T_o)} = \frac{\left( \mu * \frac{u_b^2}{b^2} \right) * (b * W * L)}{k * \frac{(T_1 - T_o)}{b} * (W * L)} \quad (59)$$

$$Br = \frac{[\text{Παραγ. θερμ. λόγω ιξώδους}]}{[\text{Μεταφορά θερμ. με αγωγή}]} \quad (59)$$

Εάν ο  $Br \ll 1$  τότε η παραγωγή θερμότητας λόγω τριβής είναι αμελητέα, ενώ εάν  $Br \gg 2$  τότε η παραγωγή θερμότητας είναι σημαντική [13]. Άρα είναι σωστό να θεωρήσει

κάποιος ότι το ιξώδες παραμένει το ίδιο και δεν επηρεάζεται από τη θερμοκρασία; Πώς επηρεάζεται η θερμοκρασία αν το ιξώδες είναι μεταβλητό; Στις παρακάτω τρεις υποενότητες θα δοθούν οι αναλυτικές λύσεις των προφίλ των θερμοκρασιών για τις εξής περιπτώσεις:

- Σταθερό Ιξώδες
- Μεταβλητό Ιξώδες της μορφής  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$  όπου  $\beta_1$  σταθερά
- Μεταβλητό Ιξώδες της μορφής όπου  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$   $\beta_1, \beta_2$

σταθερές

Η γενική αναλυτική λύση που ισχύει είναι η αδιαστατοποιημένη εξίσωση 60 και ακριβώς πιο κάτω αναφέρονται τα αδιάστατα μεγέθη (εξισώσεις 61, 62, 63, 64) και με συνοριακές συνθήκες τις εξισώσεις 65 και 66 [1].

$$\frac{1}{x} * \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k}{k_0} * x * \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} + Br * \frac{\mu}{\mu_0} \left[ x * \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{x} \right) \right]^2 = 0 \quad (60)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad u = \frac{u_\theta}{\Omega_0 * R}, \quad Br = \frac{\mu_0 * (\Omega * R)^2}{k * T_0} \quad (61,62,63,64)$$

Με συνοριακές συνθήκες

$$\Sigma.\Sigma. 1 \quad \text{για } x = \kappa \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (65)$$

$$\Sigma.\Sigma. 2 \quad \text{για } x = 1 \quad \theta = 0 \quad (66)$$

### 2.5.2.1 Θερμοκρασιακό Προφίλ με το Δυναμικό Ιξώδες Ανεξάρτητο από τη Θερμοκρασία

Η εξίσωση 68 αποτελείται από τους εξής όρους, την αριθμοσειρά 1<sup>ου</sup> βαθμού  $\Theta_1(x)$  πολλαπλασιαζόμενη επί τον αριθμό Brinkman. Το  $C_0$  είναι μια σταθερά και η μεταβλητή  $x$  είναι η αδιάστατη απόσταση.

$$\Theta_1(x) = \left[ -\frac{1}{4} * \frac{(2\ln(x) - \kappa^2)}{\kappa^2} - \frac{1}{(4 * x^2)} \right] * C_0^2, \quad \text{όπου } C_0 = \frac{2\kappa^2}{1 - \kappa^2} \quad (67)$$

$$\theta(x) = \Theta_1(x) * Br \quad (68)$$



### 2.5.2.2 Θερμοκρασιακό Προφίλ και Προφίλ Ταχύτητας όπου το Δυναμικό Ιξώδες

$$\text{Εκφράζεται με τη Σχέση } \mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \theta}$$

Σε αυτή την ενότητα μελετάται πώς επηρεάζεται το θερμοκρασιακό προφίλ και το προφίλ ταχύτητας, όταν το ιξώδες εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Η μεταβλητή  $\Theta_2(x)$  είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού αριθμοσειρά, η οποία δείχνει την αλλαγή της θερμοκρασίας με το ιξώδες. Το ολικό θερμοκρασιακό προφίλ προκύπτει από το συνδυασμό της 2<sup>ου</sup> βαθμού και 1<sup>ου</sup> βαθμού αριθμοσειράς (εξίσωση 73).

$$\Theta_2(x) = F_1 * \ln(x^2) + F_2(x) * \ln(x) + F_3(x) \quad (69)$$

Όπου  $F_1, F_2(x), F_3(x)$  σταθερές.

$$F_1 = -\frac{1}{8} * \frac{a_1}{\kappa^4} * C_0^4 = 0 \text{ λόγω ότι } k = \frac{k_0}{1 + \alpha_1 * \theta} = k_0. \text{ Άρα } \alpha_1 \rightarrow 0 \quad (70)$$

$$F_2(x) = \frac{C_0^4 \left( \left[ (4 \ln(\kappa) + 4 \ln(\kappa) \kappa^2 - 3 \kappa^2 + 3) \beta_1 - 2 \alpha_1 \kappa^2 (1 - \kappa^2) \right] x^2 + 2 \kappa^2 (\kappa^2 - 1) (\beta_1 - \alpha_1) \right)}{16 \kappa^4 * x^2 * (-1 + \kappa^2)} \quad (71)$$

$$F_3(x) = C_0^4 * \left( \frac{x^2 - 1}{\kappa^2 - 1} \right) * \frac{\left( (4x^2 - 5x^2 \kappa^2 + x^2 \kappa^4 + 16x^2 \ln(\kappa) - \kappa^2 + \kappa^4) \beta_1 + 2 \alpha_1 \kappa^2 (-1 + \kappa^2) (x^2 - 1) \right)}{-64 \kappa^2 x^4} \quad (72)$$

$$\Theta(x) = \Theta_1(x) * Br + \Theta_2(x) * Br^2 \quad (73)$$

Το προφίλ ταχύτητας για μεταβλητό ιξώδες (εξίσωση 74) αποτελείται από τη μηδενική βαθμού σειρά ταχύτητας  $u_0$ , η οποία προσομοιάζει την απλή ροή Couette, και την αριθμοσειρά πρώτου βαθμού  $u_1$ , η οποία φανερώνει την αλλαγή της ταχύτητας συναρτήσει του ιξώδους.

$$u(x) = u_0 * x + u_1(x) * Br \quad (74)$$

$$u_0(x) = \frac{(\kappa^2 - x^2)}{(-1 + \kappa^2) * x^2} \quad (75)$$

$$u_1(x) = \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{[-1 + \kappa^4 - 4 \ln(\kappa) + 4 \ln(x) - 4 \ln(x) \kappa^2]}{\kappa^2 (\kappa^2 - 1)} \right] \frac{\beta_1 C_0^3}{16 x^2} + U_1 \quad (76)$$

$$U_1 = \frac{1}{16} \beta_1 C_o^3 \frac{(\kappa^2 - 1 - 4\ln(\kappa))}{\kappa^2(-1 + \kappa^2)} \quad (77)$$

### 2.5.2.3 Θερμοκρασιακό Προφίλ όπου το Δυναμικό Ιξώδες Εκφράζεται με τη Σχέση

$$\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$$

Στη τελευταία ενότητα θα γίνει λόγος μόνο για το θερμοκρασιακό προφίλ με τη μορφή του ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  που προσομοιάζει καλύτερα τα πραγματικά

ρευστά. Το προφίλ ταχύτητας δε θα αναλυθεί, γιατί το μεταβλητό ιξώδες της μορφής

$\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  συμπίπτει σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό με το προφίλ ταχύτητας

με μεταβλητό ιξώδες της μορφής  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$ . Λόγω του γεγονότος ότι οι εξισώσεις

είναι πολύπλοκες, αυτό που πρέπει να προσέξει κάποιος είναι η εξίσωση 99 που προκύπτει από το συνδυασμό της αριθμοσειράς 3<sup>ου</sup> βαθμού (εξίσωση 78), 2<sup>ου</sup> βαθμού και 1<sup>ου</sup> βαθμού αντίστοιχα. Όσο ανεβαίνει η τάξη της αριθμοσειράς, το ίδιο αντίστοιχα συμβαίνει και στην τάξη του αριθμού Brinkman [1].

$$\Theta_3(x) = L_2(x) * \ln(x)^2 + L_1(x) * \ln(x) + L_o(x) \quad (78)$$

$$L_o(x) = L_{oa} * \left(\frac{1}{x^2}\right) + L_{ob} * \left(\frac{1}{x^4}\right) + L_{oy} * \left(\frac{1}{x^6}\right) + L_{od} \quad (79)$$

$$L_{oa} = \left[ \frac{1}{256 \kappa^4 * (-1 + \kappa^2)} \frac{L_{oa1}}{(-1 + \kappa^2)} - \frac{\beta_1^2 (3 + 4 * \ln(\kappa) - 4 * \kappa^2 + \kappa^4)^2}{256 \kappa^4 * (-1 + \kappa^2)^2} - \frac{1}{2} C_2 \right] * C_o^6 \quad (80)$$

$$C_2 = (-2 * \beta_2) * C_{2\beta} + C_{2a} * \beta_1^2 \quad (81)$$

$$C_{2a} = \frac{(48(\kappa^2 + 2)\ln(\kappa)^2 + 24(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 6)\ln(\kappa) + 5\kappa^8 - 38\kappa^6 + 108\kappa^4 - 122\kappa^2 + 47)}{192\kappa^4 * (-1 + \kappa^2)^2} \quad (82)$$

$$C_{2\beta} = \frac{-15\kappa^4 + 2\kappa^6 - 36\ln(\kappa) + 30\kappa^2 + 24\ln(\kappa) \kappa^2 - 24\ln(\kappa)^2 - 17}{192\kappa^4(\kappa^2 - 1)} \quad (83)$$

$$L_{oa1} = (-40\kappa^2 + 20\kappa^4 + 24 - 4\kappa^6)\beta_2 + [5\kappa^6 - 29\kappa^4 + (60 + 16\ln(\kappa))\kappa^2 - 48\ln(\kappa) - 36]\beta_1^2 \quad (84)$$

$$L_{ob} = \frac{1}{256 \kappa^2(-1 + \kappa^2)} \frac{L_{ob1}}{C_o^6} \quad (85)$$

$$L_{o\beta_1} = 2(\kappa^2 - 1)(\beta_2\kappa^2 - \beta_2) + (-\kappa^4 - 3 - 8\ln(\kappa) + 4\kappa^2)\beta_1^2 \quad (86)$$

$$L_{o\gamma} = \frac{-C_o^6}{2304} (+4\beta_2 + \beta_1^2) \quad (87)$$

$$L_{o\delta} = \left(J_1 + \frac{1}{2}C_2\right)C_o^6 \quad (88)$$

$$J_1 = \frac{1}{2304\kappa^4(-1 + \kappa^2)^2} J_{1a} \quad (89)$$

$$J_{1a} = (216\kappa^2 \ln(\kappa) + 621\kappa^2 - 216\ln(\kappa) - 539\kappa^4 - 26\kappa^8 + 144\ln(\kappa)^2 + 187\kappa^6 - 243)\beta_1^2 + (22\kappa^4 - 126\kappa^2 + 216)(\kappa^2 - 1)^2\beta_2 \quad (90)$$

$$L_1(x) = \left[ L_{1\beta} + \frac{L_{1a}}{x^2} + \frac{1}{128} \frac{(-2\beta_2 - \beta_1^2)}{\kappa^4 x^4} C_o^6 \right] \quad (91)$$

$$L_{1a} = -\frac{1}{64\kappa^4(\kappa^2 - 1)} L_{1a1} \quad (92)$$

$$L_{1a1} = 2(\kappa^2 - 1)(-2\beta_2\kappa^2 + 4\beta_2) + (12\ln(\kappa) - 11\kappa^2 + 9 + 4\ln(\kappa)\kappa^2 + 2\kappa^4)\beta_1^2 \quad (93)$$

$$L_{1\beta} = \frac{1}{128(-1 + \kappa^2)\kappa^4} L_{1\beta_1} + H \mu\varepsilon L_{1\beta_1} = 0 \quad (94)$$

$$H = \frac{1}{6}(-2\beta_2)H_2 + \frac{1}{6}H_1\beta_1^2 \quad (95)$$

$$H_1 = \frac{1}{64} \frac{[(-48\kappa^4 - 192\kappa^2 - 96)\ln(\kappa)^2 - 24(\kappa^4 - 1)(\kappa^2 - 6)\ln(\kappa) - 47 + 4\kappa^6 - 61\kappa^4 + 2\kappa^8 + 102\kappa^2]}{(-1 + \kappa^2)^2\kappa^6} \quad (96)$$

$$H_2 = \frac{1}{64} \frac{[24\ln(\kappa)^2 + 24\ln(\kappa)^2\kappa^2 + 12\ln(\kappa)\kappa^2 - 24\ln(\kappa)\kappa^4 + 36\ln(\kappa) + 6\kappa^4 + 2\kappa^6 + 17 - 25\kappa^2]}{(-1 + \kappa^2)\kappa^6} \quad (97)$$

$$L_2(x) = \left[ L_{2a} + \frac{1 - 2\beta_2}{32\kappa^4 x^2} \right] C_o^6 \quad \mu\varepsilon L_{2a} = 0 \quad (98)$$

$$\Theta(x) = \Theta_1(x) * \text{Br} + \Theta_2(x) * \text{Br}^2 + \Theta_3(x) * \text{Br}^3 \quad (99)$$

## Κεφάλαιο 3 Προσομοίωση μέσω Υπολογιστικού Πακέτου

### Openfoam

Σύμφωνα με την αναλυτική μονοδιάστατη λύση σε κυλινδρικές συντεταγμένες υπάρχουν δύο κύλινδροι ο ένας μέσα στον άλλο [1]. Ο εσωτερικός κύλινδρος με την ονομασία bob έχει ακτίνα κR και ο εξωτερικός με την ονομασία cup έχει ακτίνα R. Ο εσωτερικός είναι ακίνητος, ενώ ο εξωτερικός κινείται με μια γωνιακή ταχύτητα  $\Omega_0$ . Ταχύτητα υπάρχει μόνο στην διεύθυνση της γωνίας  $\theta$ , δεν υπάρχει βαρύτητα και δεν υπάρχει πτώση πίεσης εφαπτομενικά. Η ροή είναι μόνιμης κατάστασης και ασυμπίεστη.

Το πρόγραμμα μοντελοποίησης openfoam, χρησιμοποιεί διάφορους solvers. Επιλέχθηκε ο solver simplefoam, ο οποίος είναι κατάλληλος για προβλήματα ασυμπίεστων και μόνιμης κατάστασης ροών.

Ο κώδικας του openfoam και πιο ειδικά το simplefoam είναι προγραμματισμένος να λύνει τη γενική μορφή των εξισώσεων και με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες να λύνει την τρισδιάστατη μορφή του προβλήματος, όμως αν διαταχτεί κατάλληλα, μπορεί να λύσει και τη δυσδιάστατη μορφή του προβλήματος. Πρέπει να τονιστεί ότι λειτουργεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες .

#### 3.1 Χρήση Εξισώσεων από το Openfoam

Το openfoam και συγκεκριμένα ο λύτης simplefoam χρησιμοποιεί τις εξισώσεις κίνησης (εξίσωση 101) και συνέχειας (εξίσωση 100) εκφρασμένες σε διανυσματική μορφή. Πάνω σε αυτόν το λύτη προστέθηκε σε διανυσματική μορφή η εξίσωση της ενέργειας βασισόμενη στη δουλειά του Winter [8].

$$\nabla(\rho u) = 0 \quad (100)$$

$$\rho * \frac{Du}{dt} = -\nabla p + \mu * \nabla^2 u \quad (101)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{dt} = k \nabla^2 T + \frac{1}{2} \mu \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \text{ όπου } \dot{\gamma} = \nabla u + \nabla u^T \quad (102)$$

Στο παράρτημα Β αποδεικνύεται ότι ο όρος  $\frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{\gamma} : \dot{\gamma}$  ισούται με τον όρο  $\mu^* \Phi$  της εξίσωσης 46.

### 3.2 Ιδιαιτερότητες openfoam

Αναφέρονται πρώτα οι ιδιαιτερότητες του openfoam που αφορούν κυρίως τα ρεολογικά μοντέλα:

- Το openfoam λειτουργεί με το κινηματικό ιξώδες και όχι με το δυναμικό.
- Τα ρεολογικά μοντέλα του openfoam κάνουν χρήση του τύπου της τετραγωνικής ρίζας της δεύτερης αναλλοίωτης του τανυστή του ρυθμού παραμόρφωσης εξίσωση 103 και όχι του απλοποιημένου τύπου  $\dot{\gamma} = \frac{du_x}{dy}$ .

$$\dot{\gamma}_{gen} = \sqrt{\frac{1}{2} II} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} II = 2 * & \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right]^2 \\ & + \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \right]^2 + \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (104)$$

- Η διατμητική τάση εκφράζεται συναρτήσει του κινηματικού ιξώδους. Άρα για να συγκριθούν τα υπολογιστικά με τα αναλυτικά μοντέλα πρέπει η διατμητική τάση του openfoam να πολλαπλασιάζεται με την πυκνότητα του ρευστού.

- Το openfoam δεν υπολογίζει την ροπή αλλά τη διατμητική τάση στα τοιχώματα. Η διατμητική τάση εκφράζεται συναρτήσει του κινηματικού ιξώδους. Άρα η μετατροπή των αποτελεσμάτων γίνεται βάση του τύπου 105, όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $\kappa R$  είναι ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου,  $L$  το μήκος εσωτερικού κυλίνδρου (bob) και  $\sigma_b$  η διατμητική τάση συναρτήσει του κινηματικού ιξώδους.

$$Ροπή = \sigma_b * 2 * \pi * (\kappa R)^2 * L * \rho \quad (105)$$

### 3.3 Μονάδες στο openfoam

Το πρόγραμμα χρησιμοποιεί επτά βασικές μονάδες στο σύστημα SI, οι οποίες μπορούν να δημιουργήσουν οποιαδήποτε άλλο μέγεθος [6]. Αυτές είναι οι εξής:

Νούμερο	Ιδιότητα	Μονάδα	Σύμβολο
1	Μάζα	Kilogram	K
2	Μήκος	Length	m
3	Χρόνος	Second	s
4	Θερμοκρασία	Kelvin	K
5	Ποσότητα	Moles	mol
6	Ρεύμα	Ampere	A
7	Ένταση φωτός	Candela	cd

Πίνακας 1: Βασικές μονάδες του openfoam

Για παράδειγμα το Pascal έχει μονάδες  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Άρα από τα επτά (7) σύμβολα, η μονάδα αυτή περιέχει τα πρώτα τρία υψωμένα στην 1 και τα δευτερόλεπτα υψωμένα στην -2. Άρα για τη μάζα θα μπει ο δείκτης 1, για τα μέτρα ο δείκτης 1, για τα δευτερόλεπτα ο δείκτης -2 και για τις υπόλοιπες μονάδες που δεν υπάρχουν ο δείκτης 0. Άρα στο openfoam το Pascal θα γραφτεί στη μορφή (1 1 -2 0 0 0 0). Με παρόμοιο τρόπο συμβολίζονται οι άλλες μονάδες, οι οποίες απορρέουν από τον συνδυασμό των επτά (7) βασικών μονάδων.

Παρακάτω θα αναλυθούν οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στα μοντέλα του ιξώδους και της ενέργειας:

- Η θερμική αγωγιμότητα ( $k$ ) ενός υλικού αποτελεί το μέτρο της ικανότητας αυτού να άγει τη θερμότητα. Οι μονάδες της είναι  $M^1L^1T^{-3}\theta^{-1}$  ή στο SI  $\frac{W}{mK}$ . Τα υλικά με χαμηλή θερμική αγωγιμότητα χρησιμοποιούνται ως μονωτικά.
- Επίσης υπάρχει και η θερμική διαχυτότητα  $a = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$ , η οποία αναπαριστάνει το πόσο γρήγορα μεταφέρεται η θερμότητα διαμέσου ενός υλικού.

- Η ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση ορίζεται ως η ενέργεια που απαιτείται για την αύξηση της θερμοκρασίας της μονάδας της μάζας μια ουσίας κατά ένα βαθμό. Οι μονάδες της είναι  $L^2T^{-2}\theta^{-1}$  ή στο SI  $\frac{kJ}{kgK}$ .
- Η πυκνότητα ορίζεται ως η μάζα ανά μονάδα όγκου και έχει μονάδες  $M^1L^{-3}$  ή στο SI  $\frac{kg}{m^3}$ .
- Το κινηματικό ιξώδες έχει μονάδες  $M^2T^{-1}$  ή στο SI  $\frac{m^2}{s}$ .
- Το δυναμικό ιξώδες έχει μονάδες  $L^1M^1T^{-1}$  ή στο SI  $Pa * s = \frac{kg*m}{s}$ .
- Ο δείκτης ρεολογικής συμπεριφοράς, ανάλογα με την τιμή του ( $n < 1$ ,  $n = 1$ ,  $n > 1$ ) φανερώνει αν το ρευστό είναι ψευδοπλαστικό, Νευτωνικό ή διασταλτικό και είναι αδιάστατο μέγεθος.
- Ο δείκτης  $K$  ή αλλιώς δείκτης συνέπειας, χρησιμοποιείται στο μοντέλο power-law και αφορά μόνο μη-Νευτωνικά ρευστά και οι μονάδες του είναι  $SI Pa * s = \frac{kg*m}{s}$ .

### 3.4 Γεωμετρία

Η γεωμετρία που δημιουργήθηκε αφορά το ρευστό που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους. Ο αρχικός σκοπός ήταν να κατασκευαστεί ένας τρισεδιάστατος δακτύλιος, ο οποίος θα προσομοίαζε την ιδανική περίπτωση των αναλυτικών λύσεων. Η αρχή των αξόνων ήταν το σημείο  $O(0, 0, 0)$ . Ορίστηκαν δεκαέξι (16) σημεία.

- 0° σημείο (0.5 0 0)
- 1° σημείο (0 0.5 0)
- 2° σημείο (-0,5 0 0)
- 3° σημείο (0 -0.5 0)
- 4° σημείο (1 0 0)
- 5° σημείο (0 1 0)
- 6° σημείο (-1 0 0)
- 7° σημείο (0 -1 0)
- 8° σημείο (0.5 0 1.5)

- 9<sup>ο</sup> σημείο (0 0.5 1.5)
- 10<sup>ο</sup> σημείο (-0,5 0 1.5)
- 11<sup>ο</sup> σημείο (0 -0.5 1.5)
- 12<sup>ο</sup> σημείο (1 0 1.5)
- 13<sup>ο</sup> σημείο (0 1 1.5)
- 14<sup>ο</sup> σημείο (-1 0 1.5)
- 15<sup>ο</sup> σημείο (0 -1 1.5)

Τα πρώτα τέσσερα σημεία ορίστηκαν για να προσομοιάσουν τον εσωτερικό κύλινδρο και τα επόμενα τέσσερα τον εξωτερικό. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 3. Τα υπόλοιπα οκτώ σημεία ήταν τα αντισυμμετρικά τους στη διεύθυνση z. Το επόμενο βήμα ήταν να δημιουργηθούν τέσσερα hex. Ένα hex, για παράδειγμα, ήταν το (0 4 5 1 8 12 13 9). Τα σημεία έχουν αυτή τη σειρά, γιατί έπρεπε να ληφθεί υπόψη ότι το hex είναι τρισδιάστατη γεωμετρία, άρα τα πάνω σημεία του hex, δηλαδή η πλευρά (0 4 5 1), έπρεπε να ενωθεί με την άλλη πλευρά (8 12 13 9). Το κάθε hex με την εντολή arc πήρε το σχήμα τεταρτημορίου. Τα τεταρτημόρια ενώθηκαν και δημιουργήθηκε ο δακτύλιος, ο οποίος προσομοίαζε το ρευστό που περιέχεται μέσα στο ιξωδόμετρο. Σημαντικό ήταν να οριστούν οι πλευρές της γεωμετρίας για να καθοριστούν συνεπώς και οι συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα η κάτω πλευρά της γεωμετρίας ορίστηκε ως εξής:

```
bottom
{
type patch;
faces
(
(0 4 5 1)
(1 5 6 2)
(2 6 7 3)
(3 7 4 0)
);
```

Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τις άλλες πλευρές. Παραδείγματος χάρη για την εξωτερική πλευρά που προσομοιάζει το όριο του ρευστού σε επαφή με τον εξωτερικό κύλινδρο η εντολή ήταν ως εξής:

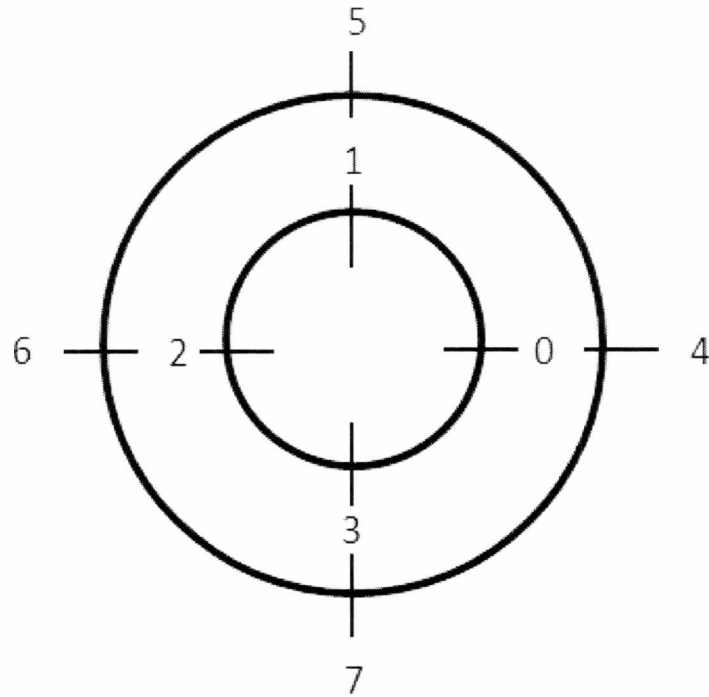
```
wall
{
type patch;
```



```

faces
(
(4 5 13 12)
(5 6 14 13)
(6 7 15 14)
(7 4 12 15)
);

```



Σχήμα 3: Κάτοψη δακτυλίου και ορισμός σημείων και hex

### 3.5 Συνοριακές Συνθήκες

Ένα πρόβλημα στο λύτη `simplefoam` ορίζεται με τις συνοριακές συνθήκες πίεσης και ταχύτητας. Η γεωμετρία είχε τέσσερις πλευρές, άρα τέσσερις συνοριακές συνθήκες έπρεπε να διέπουν το πρόβλημα. Όμως στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο έχει γίνει αναφορά για δύο συνοριακές συνθήκες, την επαφή του ρευστού με τον `bob` και `cup` αντίστοιχα. Για να προσομοιαστεί και να ελεγχθεί, αν οι λύσεις αυτές επαληθεύονται με το υπολογιστικό κομμάτι, στη πάνω πλευρά και στην κάτω πλευρά ορίστηκαν συνοριακές συνθήκες, οι οποίες απλοποιούσαν το πρόβλημα από τρισδιάστατο σε δυσδιάστατο. Το αποτέλεσμα

ήταν το προφίλ ταχύτητας κατά τη z διεύθυνση να μην αλλάζει, δηλαδή κάθε απειροστή φέτα του κυλίνδρου να είναι πανομοιότυπη με την άλλη, πάντα στην z διεύθυνση.

### Συνοριακές Συνθήκες Ταχύτητας

Το εσωτερικό (internal mesh) θεωρείται σταθερό και έχει τιμή αναφοράς 0.

```
internalField uniform (0 0 0);
```

Ο εξωτερικός κύλινδρος ορίστηκε να γυρίζει περιστροφικά με γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s και με άξονα περιστροφής το z.

```
wall
{
type rotatingWallVelocity;
origin (0 0 0);
axis (0 0 1);
omega constant 5;
```

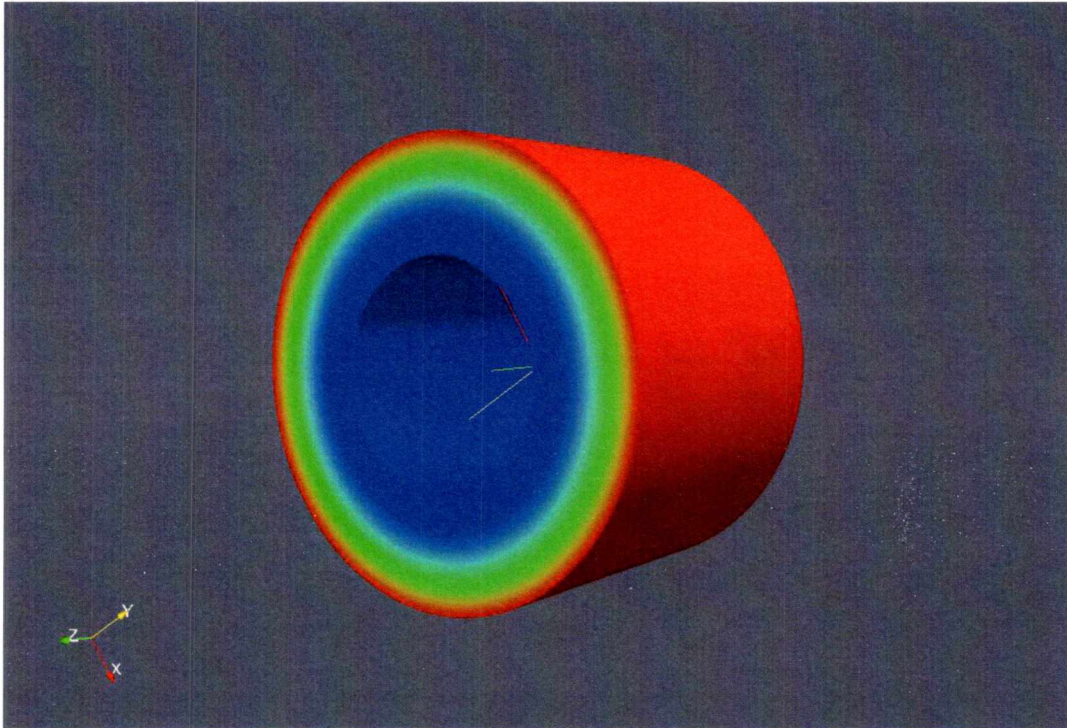
Ο εσωτερικός κύλινδρος ορίστηκε να έχει μηδενική ταχύτητα.

```
hole
{
type fixedValue;
value uniform (0 0 0);
}
```

Το πάνω μέρος του ιξωδομέτρου ορίστηκε να έχει την παράγωγο της ταχύτητας ίση με 0 ( $\text{grad}U=0 \Rightarrow U=\text{constant}$ ). Άρα, θεωρείται αυτόματα ότι η ταχύτητα κάθετα αυτής της πλευράς είναι σταθερή. Το ίδιο ισχύει ακριβώς και για το πάτο του ιξωδομέτρου. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να μη μεταβάλλεται η ταχύτητα στην z-κατεύθυνση.

```
top
{
type zeroGradient;
}
bottom
{
type zeroGradient;
```

}



Σχήμα 4: Μοντέλου ιδανικής ροής Couette απείρου μήκους. Με τη χρήση των συνοριακών συνθηκών ταχύτητας zeroGradient στο πάνω και κάτω μέρος του δακτυλίου, επιτυγχάνεται ο τρισδιάστατος δακτύλιος περιορισμένου μήκους κατά τη z διεύθυνση να έχει το ίδιο προφίλ .

### Συνοριακές συνθήκες για την Πίεση

Ορίστηκαν και στις τέσσερις πλευρές η παράγωγος της πίεσης να είναι ίση με το 0. Αυτό σημαίνει ότι σε όλη τη γεωμετρία δεν υπάρχει πτώση πίεσης.

```
internalField uniform 0;  
boundaryField  
{  
top  
{  
type zeroGradient;  
}  
bottom  
{
```

```

type          zeroGradient;
}
hole
{
type          zeroGradient;
}
wall
{
type          zeroGradient;
}
}

```

### **Συνοριακές Συνθήκες για τη Θερμοκρασία**

Ο λύτης simplefoam παραλλάχθηκε, ώστε να δίνει λύσεις μέσω της εξίσωσης της ενέργειας για τη θερμοκρασία. Έτσι έπρεπε εκτός από τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες να οριστούν και οι συνθήκες της θερμοκρασίας. Προσομοιάστηκαν δύο είδους προβλήματα:

#### **1<sup>η</sup> Περίπτωση**

Η εσωτερική γεωμετρία είχε θερμοκρασία αναφοράς, η οποία ήταν 300K.

```
internalField  uniform 300;
```

Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε θερμοκρασία 350 K.

```

wall
{
type          fixedValue;
value uniform 350;
}

```

Ο εσωτερικός κύλινδρος είχε θερμοκρασία 300 K.

```

hole
{
type          fixedValue;
value uniform 300;
}

```

```

top
{
type      zeroGradient;
}
bottom
{
type      zeroGradient;
}

```

Το πάνω μέρος και το κάτω μέρος του δακτυλίου ορίστηκε να έχει την παράγωγο της θερμοκρασίας ίση με 0 ( $\text{grad}T=0 \Rightarrow T=\text{constant}$ ). Με τον ορισμό των δύο αυτών συνθηκών, το τρισδιάστατο πρόβλημα απλοποιείται σε δυσδιάστατο.

## 2<sup>η</sup> Περίπτωση

Στη δεύτερη περίπτωση η συνθήκη του ρευστού σε επαφή με το bob είναι αδιαβατική, δηλαδή ο κύλινδρος είναι θερμομονωμένος. Στο κώδικα των συνοριακών συνθηκών, καταχωρήθηκε η συνθήκη zeroGradient. Δε σημαίνει ότι η συγκεκριμένη συνθήκη είναι ίδια με τις άλλες δύο (top και bottom). Απέναντι της δεν έχει συνθήκη zeroGradient, αλλά μια ορισμένη συνοριακή συνθήκη με σταθερή θερμοκρασία 300K. Άρα κατά τη διεύθυνση αυτή δεν γνωρίζει κανένας πώς θα μεταβληθεί η θερμοκρασία. Για το πάτο και το πάνω μέρος ισχύει ότι προαναφέρθηκε στην 1<sup>η</sup> περίπτωση, δηλαδή το προφίλ της θερμοκρασίας δε μεταβάλλεται κατά τη z διεύθυνση.

```

internalField    uniform 300;
top
{
type      zeroGradient;
}
bottom
{
type      zeroGradient;
}
hole
{

```

```

type      zeroGradient;
}
wall
{
type      fixedValue;
value uniform 300;
}

```

### 3.6 Λύτες Openfoam

Το openfoam έχει πέντε βασικούς γραμμικούς λύτες συστημάτων (linear system solver), οι οποίοι είναι οι εξής [6]:

- PBiCG
- PCG
- GAMG
- Smoothsolver
- DiagonalSolver

Για τη λύση των συνοριακών συνθηκών της πίεσης χρησιμοποιήθηκε ο solver GAMG, ο οποίος είναι συνήθως μια βέλτιστη λύση για να λυθεί η εξίσωση της πίεσης. Ο solver GAMG είναι μια γρήγορη λύση για πολύπλοκες εξισώσεις, όπως οι εξισώσεις κίνησης. Η αρχή λειτουργίας του δε θα αναλυθεί. Στην εξίσωση της ταχύτητας και της θερμοκρασίας χρησιμοποιήθηκε ο smoother solver Gauss-Seidel. Η μέθοδος Gauss-Seidel είναι μια βελτιωμένη μέθοδος της Jacobi και δουλεύει με πίνακες με διαγώνια στοιχεία μη μηδενικά. Η σύγκλιση του κώδικα επιτυγχάνεται μόνο, όταν τα στοιχεία του πίνακα επαληθεύουν αυτή τη σχέση.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ για όλα τα } i \quad (106)$$

### 3.7 Μοντελοποίηση Επαληθεύσεων και Αποτελεσμάτων

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο κεντρικούς άξονες. Τη μοντελοποίηση των επαληθεύσεων ανάμεσα στις αναλυτικές λύσεις με τις υπολογιστικές (υποενότητες 4.1

έως 4.4) και τη μοντελοποίηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν για διάφορες παραμέτρους της πραγματικής γεωμετρίας (υποενότητες 4.5-4.9). Σε κάποια από αυτά τα υποκεφάλαια έγιναν και συγκρίσεις ανάμεσα στην πραγματική και την ιδανική γεωμετρία για να βρεθούν τυχόν διαφορές.

Αρχικά ορίστηκαν το πλέγμα και οι διαστάσεις του αντικειμένου (υποενότητα 4.1). Για τον ορισμό των διαστάσεων έγινε χρήση της εντολής `convert to meters 0.01`, η οποία πολλαπλασιάζει την κάθε διεύθυνση με τον αριθμό 0.01, που ισοδυναμεί με 1 εκατοστό. Για παράδειγμα το σημείο (1 0 0) γίνεται (0.01 0 0). Έτσι για την επαλήθευση των αναλυτικών λύσεων με των υπολογιστικών, η γεωμετρία ιδανικής ροής είχε τα εξής χαρακτηριστικά:

- Ακτίνα εξωτερικού κυλίνδρου  $R=0.01$  m
- Ακτίνα εσωτερικού κυλίνδρου  $\kappa R=0.005$  m
- Ύψος ιξωδομέτρου  $L=0.015$  m

Αρχικά δημιουργήθηκαν τρία πλέγματα για να ελεγχθεί, αν το μέγεθος του πλέγματος επηρεάζει τη λύση. Στον κώδικα του `openfoam`, το πλέγμα ορίζεται δίπλα από το κάθε `hex` (0 4 5 1 8 12 13 9) (8 10 8). Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διεύθυνση  $x$  υπάρχουν 8 κελιά, κατά τη διεύθυνση  $y$  10 κελιά και κατά την  $z$  8 κελιά. Άρα το `hex` έχει  $8*10*8=640$  σημεία. Αφού η γεωμετρία είχε τέσσερα `hex`, άρα το πρώτο πλέγμα είχε 2560 σημεία. Το δεύτερο πλέγμα αποτελείτο από 24860 σημεία με διαστάσεις του πλέγματος (17 21 17). Το τρίτο και το τελευταίο πλέγμα αποτελείτο από 248000 σημεία με διαστάσεις (38 43 38).

Ο σκοπός που ορίστηκαν έτσι τα σημεία στη  $x$ ,  $y$ ,  $z$  διεύθυνση ήταν για να υπάρχει ένα καλό `aspect ratio` μικρότερο του 10, αφού το πρόβλημα δεν ήταν μια πολύ σύνθετη γεωμετρία.

Έτσι με τα χαρακτηριστικά αυτών των γεωμετριών και με τις συνοριακές συνθήκες που ειπώθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, έγινε η επαλήθευση των υπολογιστικών με τις αναλυτικές λύσεις για Νευτώνικό ρευστό.

- Ομοιόμορφη πίεση
- Ταχύτητα ρευστού σε επαφή με `cup` 5 rad/s
- Ταχύτητα ρευστού σε επαφή με `bob` 0 rad/s

Για την περίπτωση του μη-Νευτωνικού ρευστού χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο power-law (υποενότητα 4.2). Το υλικό που επιλέχθηκε ήταν ψευδοπλαστικό. Οι συνοριακές συνθήκες έμειναν οι ίδιες. Το μόνο που άλλαξε ήταν η πρόσθεση της βιβλιοθήκης του κώδικα για μεταβλητό ιξώδες. Ο τρόπος με τον οποίο εισήχθη παρουσιάζεται στη συνέχεια:

```
transportModel powerLaw;
nu nu [0 2 -1 0 0 0 0] 1e-05;
powerLawCoeffs
{
k k [0 2 -1 0 0 0 0] 1e-05;
n n [0 0 0 0 0 0 0] 0.5;
nuMin nuMin [0 2 -1 0 0 0 0] 1e-06;
nuMax nuMax [0 2 -1 0 0 0 0] 1e-05;
}
```

Το nuMin και το nuMax είναι απλώς συνθήκες για να σταματήσει ο κώδικας, αν το υπολογισμένο κινηματικό ιξώδες περάσει αυτές τις τιμές.

Στην υποενότητα 4.3, με την εισαγωγή των μεταβλητών θερμοκρασίας, ειδικής θερμοχωρητικότητας, πυκνότητας και κατά επέκταση του κώδικα της ενέργειας με τη παραγωγή ιξώδους θερμότητας σύμφωνα με τον οδηγό προγραμματισμού του Openfoam [7], ορίστηκαν οι συνοριακές συνθήκες όπου το ρευστό σε επαφή με το cup και το bob έχουν ορισμένες θερμοκρασίες, 350 K και 300 K αντίστοιχα. Έτσι έγινε η επαλήθευση με τις αναλυτικές λύσεις των Bird, Stewart and Lightfool [2]. Δεν αναλύθηκε καθόλου πώς το ιξώδες επηρεάζεται από την πίεση και θεωρήθηκε ότι ο όρος της πυκνότητας και της θερμικής αγωγιμότητας είναι σταθεροί και δεν επηρεάζονται από τη θερμοκρασία.

Στη συνέχεια μοντελοποιήθηκε η 2<sup>η</sup> περίπτωση, δηλαδή σταθερή θερμοκρασία στον εξωτερικό κύλινδρο και αδιαβατική θερμοκρασία στον εσωτερικό. Το υπολογιστικό μοντέλο χωρίστηκε σε δύο ενότητες:

- Σταθερό Ιξώδες
- Μεταβλητό Ιξώδες συναρτήσει της θερμοκρασίας  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$  και

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2} \text{ αντίστοιχα.}$$



Το σταθερό ιξώδες είναι το γνωστό Νευτωνικό ρευστό το οποίο υπάρχει στο κώδικα του `openfoam`. Για το μεταβλητό ιξώδες δημιουργήθηκε εκ νέου μια βιβλιοθήκη που με βάση τη θερμοκρασία έβρισκε το ιξώδες. Πολύτιμη βοήθεια ήταν οι οδηγίες από τους χρήστες του CFD Online Forum.

Παρατίθενται πιο κάτω ενδεικτικά οι εντολές για το μεταβλητό ιξώδες με  $\beta_1=1$ :

```
transportModel polyonimal;

nu nu [0 2 -1 0 0 0 0] 10.87;
k k [1 1 -3 -1 0 0 0] 0.166;
Cp Cp [0 2 -2 -1 0 0 0] 1530.0;
r r [1 -3 0 0 0 0 0] 1380.0;
polyonimal
{
n n [0 0 0 0 0 0 0] 0.0;
nu0 nu0 [0 2 -1 0 0 0 0] 10.87;
m m [0 0 0 0 0 0 0] 1;
T T [0 0 0 1 0 0 0] 300;
```

Αφού αποδείχθηκε ότι τα υπολογιστικά μοντέλα λειτουργούν και επαληθεύονται πλήρως, στην υποενότητα 4.4 αναλύθηκαν οι διαφορές ανάμεσα στο υπολογιστικό

μοντέλο με μεταβλητό ιξώδες  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  σε σχέση με τις αναλυτικές λύσεις

των Parathanasiou, Caridis και Bijeljic [1].

Στην υποενότητα 4.5 συγκρίθηκε η ιδανική ροή με την πραγματική ροή, στο πρωταρχικό κώδικα του `simplefoam`, για να εντοπιστούν τυχόν διαφορές μεταξύ τους ως προς το προφίλ των ταχυτήτων και τις ροπές τους. Η ιδανική περίπτωση ήταν ακριβώς η ίδια που χρησιμοποιήθηκε στις επαληθεύσεις. Η πραγματική περίπτωση (εμπορικό ιξωδόμετρο), είχε τη γεωμετρία του σχήματος 7. Η διαφορά από την ιδανική περίπτωση ήταν ότι υπήρχε ένα κενό ανάμεσα στον πάτο του εσωτερικού με τον πάτο του εξωτερικού. Στον πάτο του `cup` και του `bob`, επειδή υπήρχε το πρόβλημα ότι προέκυπτε μη ορθογωνιότητα, χρησιμοποιήθηκε το τέχνασμα της ύπαρξης ενός κύβου μέσα στο κύλινδρο (σχήμα 6). Οι γεωμετρίες είχαν διάκενο (`gap`) 0.8 αντί για 0.5, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για τις επαληθεύσεις. Αυτή η αλλαγή στηρίχθηκε στο ότι τα

περισσότερα ιξωδόμετρα στην πράξη έχουν σχετικά μικρό διάκενο [11], για να ισχύει η συνθήκη, ότι, όταν ο ρυθμός διάτμησης και η διατμητική τάση είναι ομοιόμορφα καταναμημένα στο gap, δε χρειάζονται πολύπλοκοι υπολογισμοί για το ιξώδες και την ροπή [9].

Οι συνοριακές συνθήκες της ιδανικής γεωμετρίας ήταν οι εξής (παρουσιάζονται μόνο οι συνθήκες της ταχύτητας):

```
internalField    uniform (0 0 0);
wall
{
type rotatingWallVelocity;
origin (0 0 0);
axis (0 0 1);
omega constant 5;
hole
{
type fixedValue;
value uniform (0 0 0);
}
top
{
type          zeroGradient;
}
bottom
{
type          zeroGradient;
}
```

Οι συνοριακές συνθήκες της πραγματικής γεωμετρίας ήταν οι εξής:

```
dimensions      [0 1 -1 0 0 0 0];

internalField    uniform (0 0 0);

boundaryField
{
wall
{
type rotatingWallVelocity;
origin (0 0 0);
```

```

axis (0 0 1);
omega constant 5;

}
hole
{

type fixedValue;
value uniform (0 0 0);

}
top
{
type          zeroGradient;
}

bottom
{
type rotatingWallVelocity;
origin (0 0 0);
axis (0 0 1);
omega constant 5;
}
}

```

Έπειτα εξετάστηκε, αν το κενό ανάμεσα στους πάτους επηρεάζει τα αποτελέσματα της ροπής. Εξετάστηκαν οι εξής περιπτώσεις:

- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και κενό 2 mm
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και κενό 5 mm
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και κενό 10 mm
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και κενό 20 mm

Στη συνέχεια εξετάστηκε η ροπή σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα και το ύψος του υγρού, εξετάζοντας πλέον μόνο την πραγματική γεωμετρία. Οι μετρήσεις έγιναν για τρεις διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες:

- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και 5 rad/s
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και 10 rad/s
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και 15 rad/s

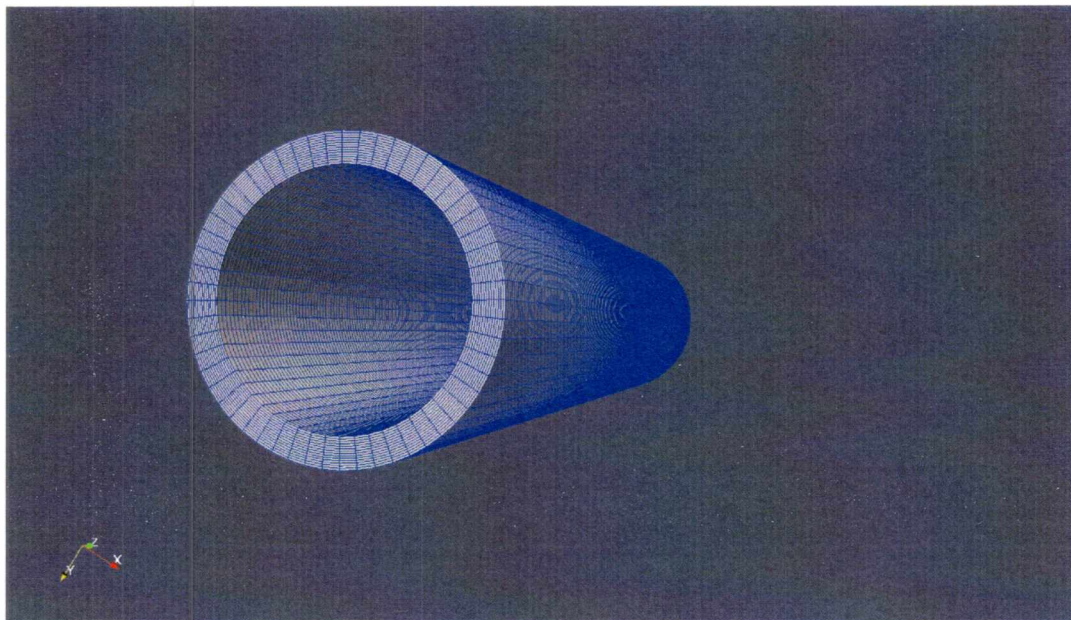
Επίσης μετρήσεις έγιναν για τρία διαφορετικά ύψη ρευστού σε δύο διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες:

- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 5cm και 5 rad/s
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 9.5cm και 5 rad/s

- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και 5 rad/s
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 5cm και 10 rad/s
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 9.5cm και 10 rad/s
- Πραγματικό Ιξωδόμετρο με ύψος 10cm και 10 rad/s

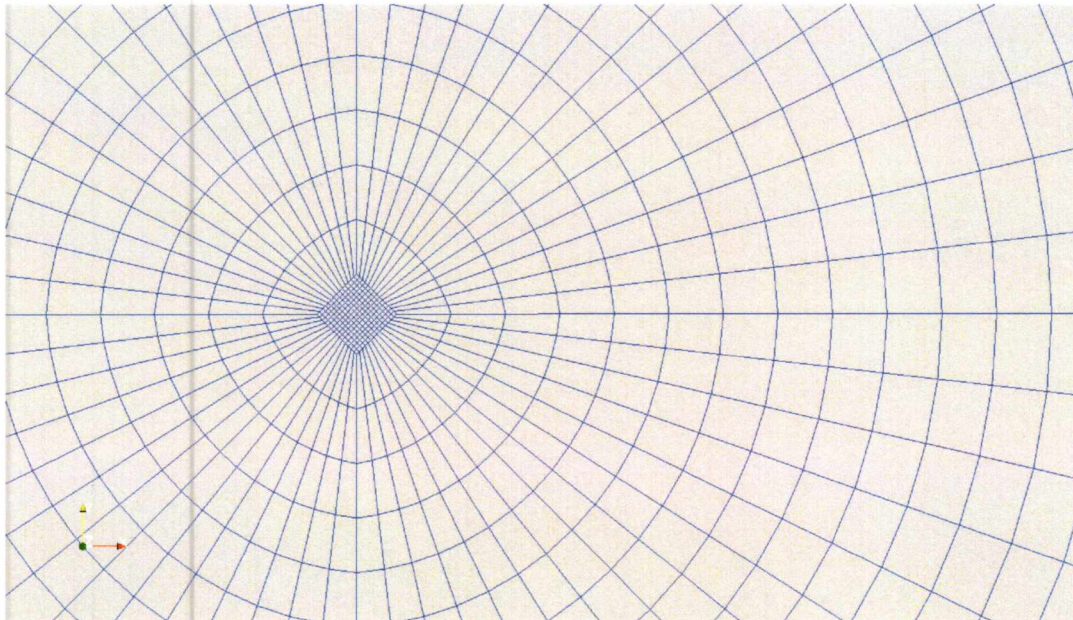
Επιλέχθηκαν οι τρεις αυτές γωνιακές ταχύτητες, γιατί τα συνήθη ιξωδόμετρα φτάνουν έως 300 rpm. Υπάρχουν τα επιστημονικά περιστροφικά ρεόμετρα που μπορούν να φτάσουν έως 600 rpm [11], [12]. Το openfoam δε λειτουργεί με rpm. Τα rad/s μπορούν να μετατραπούν σε rpm με τη σχέση 107. Άρα οι ταχύτητες αντιστοίχως ήταν 47.77 rpm, 95.54 rpm και 143.3 rpm.

$$rpm = \frac{rad/s}{2 * \pi} * \frac{60s}{min} \quad (107)$$

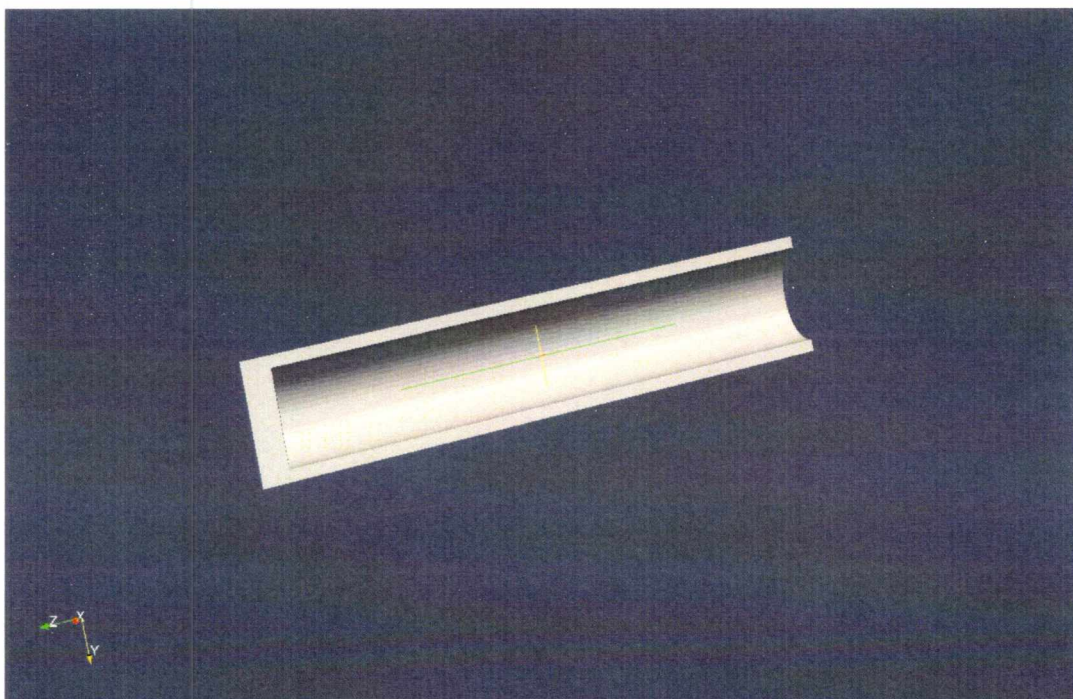


Σχήμα 5: Πλέγμα Κανονικού Ιξωδομέτρου Ύψους 10 cm





Σχήμα 6: Εξάλειψη μη Ορθογωνιότητας



Σχήμα 7: Τομή Κανονικού Ιξοδομέτρου Ύψους 10cm

Στην υποενότητα 4.6 συγκρίθηκε ο κώδικας `simplefoam` με το βελτιωμένο κώδικα `simplefoam`, που περιείχε την εξίσωση της ενέργειας, για να ελεγχθεί αν σε ισοθερμοκρασιακό προφίλ, δηλαδή ίδια σταθερή θερμοκρασία στο `cup` και `bob`, τα αποτελέσματα του `simplefoam` με το βελτιωμένο κώδικα ταιριάζουν, το οποίο αποδείχθηκε. Παρακάτω παρατίθενται οι συνοριακές συνθήκες της θερμοκρασίας:

```
dimensions      [0 0 0 1 0 0 0];

internalField   uniform 300;

boundaryField
{
  top
  {
    type        zeroGradient;
  }

  hole
  {
    type        fixedValue;
    value uniform 300;
  }

  wall
  {
    type        fixedValue;
    value uniform 300;
  }
}
```

Στην υποενότητα 4.7 ελέγχθηκε η ροπή ενός ρευστού σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα και το ύψος του, ανάλογα αν είναι Νευτωνικό ή μη.

Στην υποενότητα 4.8 θεωρήθηκε ότι ο εξωτερικός και ο εσωτερικός κύλινδρος έχουν μια δεδομένη θερμοκρασία 350K και 300K αντίστοιχα και ότι το ιξώδες μεταβάλλεται. Ο σκοπός ήταν, ότι αν είναι γνωστοί οι συντελεστές του πολυωνύμου, τότε το υπολογιστικό μοντέλο θα βγάλει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με τα πειραματικά δεδομένα. Παρακάτω παρατίθενται οι συνοριακές συνθήκες της θερμοκρασίας.

```
dimensions      [0 0 0 1 0 0 0];
internalField   uniform 300;
boundaryField
```

```

{
top
{
type          zeroGradient;
}
hole
{
type          fixedValue;
value uniform 300;
}
wall
{
type          fixedValue;
value uniform 350;
}
}

```

Οι «συνοριακές συνθήκες» του ιξώδους ήταν οι εξής :

```

transportModel polyonimal;

nu nu [0 2 -1 0 0 0 0] 10.87;
k k [1 1 -3 -1 0 0 0] 0.166;
Cp Cp [0 2 -2 -1 0 0 0] 1530.0;
r r [1 -3 0 0 0 0 0] 1380.0;
polyonimal
{
n n [0 0 0 0 0 0 0] 0.5;
nu0 nu0 [0 2 -1 0 0 0 0] 10.87;
m m [0 0 0 0 0 0 0] 1;
T T [0 0 0 1 0 0 0] 300;

```

Στο τελευταίο μέρος χρησιμοποιήθηκε ένα Νευτωνικό πολυμερές τήγμα για να δειχθεί καλύτερα πώς ένα υλικό με υψηλό ιξώδες (high-viscosity material) μπορεί να προκαλέσει προβλήματα όσον αφορά το ιξώδες του αλλά και τις θερμοκρασίες που μπορεί να αναπτύξει λόγω της ιξώδους θερμότητας. Φυσικά ερευνήθηκε και σε αυτή την περίπτωση πώς η ροπή εξαρτάται από τη γωνιακή ταχύτητα και το ύψος του ρευστού. Οι συνοριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν η σταθερή θερμοκρασία στον εξωτερικό κύλινδρο και ο εσωτερικός κύλινδρος ήταν θερμομονωμένος.

Χρησιμοποιήθηκε το μεταβλητό ιξώδες  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$ .

```

dimensions          [0 0 0 1 0 0 0];
internalField       uniform 300;
boundaryField
{
top
{

```

```
type      zeroGradient;
}
hole
{
type      zeroGradient;
}
wall
{
type      fixedValue;
value uniform 300;
}
}
```



## Κεφάλαιο 4 Επαληθεύσεις - Αποτελέσματα

Όπως έχει προαναφερθεί στο κεφάλαιο 3 τα αποτελέσματα του openfoam είναι σε καρτεσιανές συντεταγμένες, άρα όλα τα διανύσματα και οι τένσορες έπρεπε να μετατραπούν σε κυλινδρικές συντεταγμένες, ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση με τις αναλυτικές λύσεις. Παρακάτω παρατίθενται οι σχέσεις μετατροπής για τη θέση και την ταχύτητα [2].

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (108)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (109)$$

$$u_r = u_x * \cos \theta + u_y * \sin \theta \quad (110)$$

$$u_\theta = -u_x * \sin \theta + u_y * \cos \theta \quad (111)$$

Επίσης έπρεπε να γίνει μετατροπή των διατμητικών τάσεων από τις καρτεσιανές συντεταγμένες στις κυλινδρικές. Χρησιμοποιήθηκαν οι εξής σχέσεις βάσει του γενικού πίνακα μετασχηματισμού (εξίσωση 112) [14].

$$\begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (112)$$

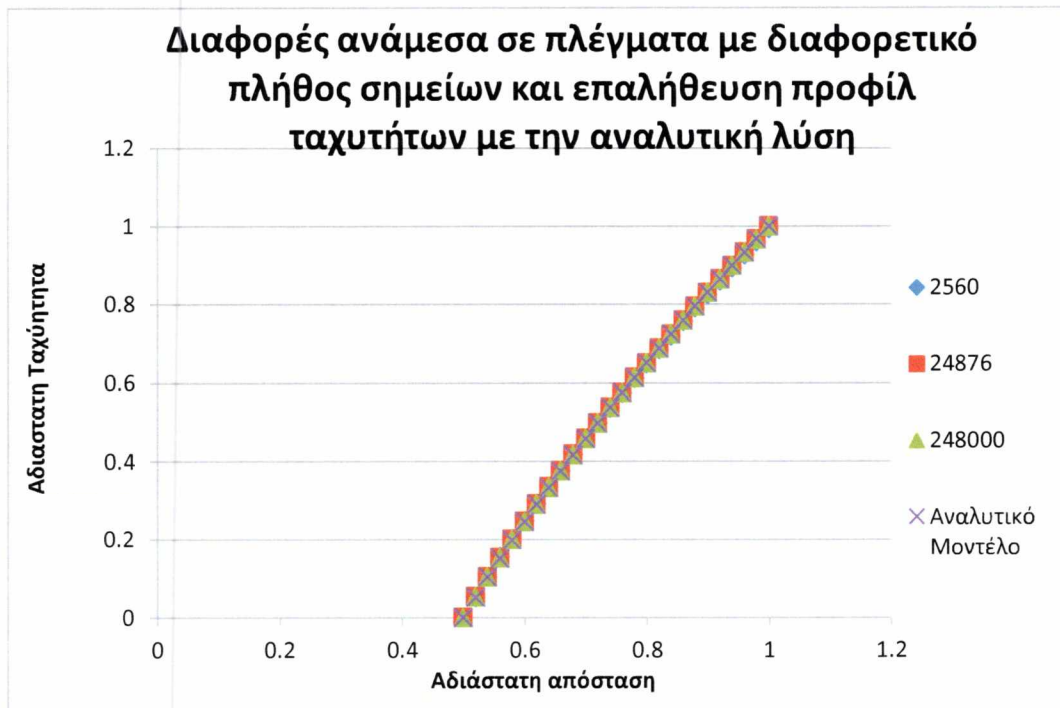
Από το οποίο προκύπτει ότι:

$$\tau_{r\theta} = \sin^2 \theta * \tau_{xx} + \cos^2 \theta * \tau_{yy} \quad (113)$$

Παρακάτω, στις υποενότητες 4.1 έως 4.4 παρουσιάζονται οι επαληθεύσεις και οι συγκρίσεις των υπολογιστικών λύσεων με τις αναλυτικές λύσεις και μετέπειτα στις υπόλοιπες υποενότητες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν για διάφορες παραμέτρους της πραγματικής γεωμετρίας.

#### 4.1 Επαλήθευση Προφίλ Ταχύτητας για Ισοθερμοκρασιακή ροή και Έλεγχος των Αριθμητικών Αποτελεσμάτων Τριών Διαφορετικών Πλεγμάτων

Η πρώτη επαλήθευση η οποία πραγματοποιήθηκε ήταν στον πρωταρχικό κώδικα simplefoam, για απλό νευτωνικό ρευστό χωρίς εξάρτηση από τη θερμοκρασία. Δημιουργήθηκαν τρία πλέγματα για να βρεθεί αν το μέγεθος του πλέγματος επηρεάζει τα αποτελέσματα. Από το σχήμα 8 και τον πίνακα 2, ο οποίος περιέχει τις μη αδιαστατοποιημένες μονάδες, παρατηρείται ότι το αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από το πλήθος των σημείων του υπολογιστικού πλέγματος. Παρόλα αυτά για τις υπόλοιπες επαληθεύσεις χρησιμοποιήθηκε το μεγαλύτερο πλέγμα. Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε είχε δυναμικό ιξώδες 0.01 Pa\*s.



Σχήμα 8: Διάγραμμα παρουσίασης προφίλ ταχυτήτων υπολογιστικών και αναλυτικών μοντέλων. Ως

αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$  και ως αδιάστατη ταχύτητα η  $u = \frac{u_\theta}{\Omega * R}$ , όπου  $u_\theta$  το προφίλ της ταχύτητας εξίσωσης 33.

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\kappa * R$	$R$	$\kappa$	$\Omega$	$\theta$	$u_{\theta 2500}$	$u_{\theta 25000}$	$u_{\theta 250000}$	$u_{\theta analytical}$
0.01	0.005	0.01	0.5	5	0	0.049692	0.04993	0.049983	0.05
0.0098	0.005	0.01	0.5	5	0	0.048014	0.048263	0.048312	0.048327
0.0096	0.005	0.01	0.5	5	0	0.046336	0.046581	0.046626	0.046639
0.0094	0.005	0.01	0.5	5	0	0.044659	0.044886	0.044924	0.044936
0.0092	0.005	0.01	0.5	5	0	0.042947	0.043169	0.043207	0.043217
0.009	0.005	0.01	0.5	5	0	0.04123	0.041436	0.041471	0.041481
0.0088	0.005	0.01	0.5	5	0	0.039513	0.03969	0.039718	0.039727
0.0086	0.005	0.01	0.5	5	0	0.03775	0.037918	0.037945	0.037953
0.0084	0.005	0.01	0.5	5	0	0.035972	0.036126	0.036151	0.036159
0.0082	0.005	0.01	0.5	5	0	0.034193	0.034317	0.034335	0.034341
0.008	0.005	0.01	0.5	5	0	0.032367	0.032478	0.032495	0.0325
0.0078	0.005	0.01	0.5	5	0	0.030511	0.030612	0.030628	0.030632
0.0076	0.005	0.01	0.5	5	0	0.028656	0.028725	0.028733	0.028737
0.0074	0.005	0.01	0.5	5	0	0.026751	0.026804	0.026808	0.026811
0.0072	0.005	0.01	0.5	5	0	0.024798	0.024845	0.02485	0.024852
0.007	0.005	0.01	0.5	5	0	0.022845	0.022859	0.022857	0.022857
0.0068	0.005	0.01	0.5	5	0	0.020845	0.020833	0.020824	0.020824
0.0066	0.005	0.01	0.5	5	0	0.018765	0.018755	0.018749	0.018747
0.0064	0.005	0.01	0.5	5	0	0.016686	0.016641	0.016627	0.016625
0.0062	0.005	0.01	0.5	5	0	0.014564	0.014479	0.014456	0.014452
0.006	0.005	0.01	0.5	5	0	0.012317	0.012245	0.012226	0.012222
0.0058	0.005	0.01	0.5	5	0	0.010069	0.009961	0.009939	0.009931
0.0056	0.005	0.01	0.5	5	0	0.007778	0.007621	0.007577	0.007571
0.0054	0.005	0.01	0.5	5	0	0.005185	0.005176	0.005147	0.005136
0.0052	0.005	0.01	0.5	5	0	0.002593	0.002637	0.002624	0.002615
0.005	0.005	0.01	0.5	5	0	0	0	0	0

Πίνακας 2: Αναλυτική παρουσίαση των τιμών του σχήματος 8. Οι τιμές δεν έχουν αδιαστατοποιηθεί και η  $u_{\theta analytical}$  είναι το προφίλ της ταχύτητας (εξίσωσης 33) στην ενότητα 2.2. Το διάκενο ανάμεσα στους κυλίνδρους είναι 0.5 και η γωνιακή ταχύτητα ( $\Omega$ ) είναι 5 rad/s.

Επίσης έγινε επαλήθευση των διατμητικών τάσεων στα τοιχώματα του bob και του cup. Αυτό έγινε γιατί η διατμητική τάση στο τοίχωμα του bob, είναι σημαντική για τον υπολογισμό της ροπής του ιξωδομέτρου.

	$\tau_{wall\ cup}$	$\tau_{wall\ bob}$
Πλέγμα 248000	0,0336	0,13326
Analytical Solution	0,0333	0,13333

Πίνακας 3: Σύγκριση ανάμεσα στις διατμητικές τάσεις του αναλυτικού μοντέλου της εξίσωσης 34 και του υπολογιστικού μοντέλου.

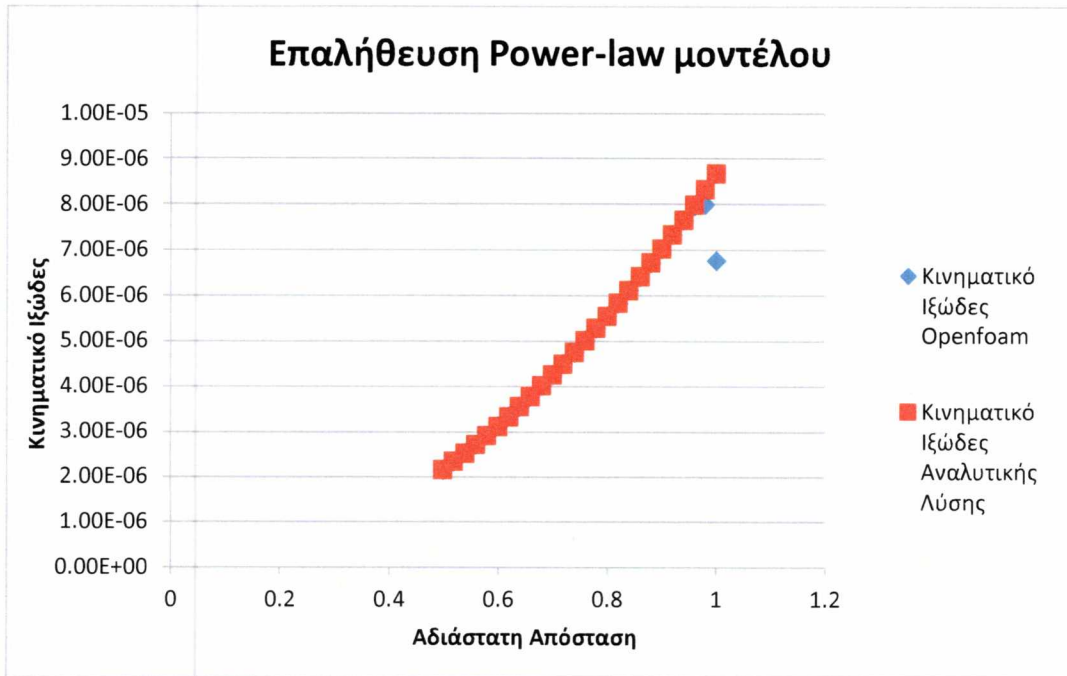
#### 4.2 Επαλήθευση Μοντέλου Power-Law

Κατόπιν εξετάστηκε η βιβλιοθήκη του μοντέλου power-law, το οποίο έβρισκε το κινηματικό ιξώδες μέσω του εκθετικού νόμου των Ostwald-de Waele ( $n_{\phi} = K * \dot{\gamma}^{n-1}$ ), αν συμφωνεί με τις αναλυτικές εξισώσεις. Το μοντέλο ελέγχθηκε για δύο περιπτώσεις διακένων. Το πρώτο ήταν το σχετικά μεγάλο διάκενο  $\kappa=0.5$  όπου ισχύει ότι ο ρυθμός διάτμησης, σύμφωνα με την εξίσωση 37, εξαρτάται από τη ρεολογική συμπεριφορά του ρευστού. Άρα με αντικατάσταση του ρυθμού διάτμησης στον εκθετικό νόμο, γνωρίζοντας φυσικά το δείκτη συνέπειας και το δείκτη ρεολογικής συμπεριφοράς, προκύπτει το ιξώδες, το οποίο μετέπειτα συγκρίθηκε με τις υπολογιστικές λύσεις. Η δεύτερη περίπτωση ήταν ένα πολύ μικρό κενό  $\kappa=0.95$ , όπου ο ρυθμός διάτμησης μπορεί να θεωρηθεί σταθερός ( $\dot{\gamma} = \frac{\Omega * R}{R - \kappa * R}$ ), γιατί οι κυρτώσεις μπορούν να αγνοηθούν και να θεωρηθεί το σύστημα απλής διάτμησης. Άρα το ιξώδες μπορεί να θεωρηθεί σταθερό. Για την αναλυτική περίπτωση ο ρυθμός διάτμησης ισούται  $\dot{\gamma}=166\ s^{-1}$  και το κινηματικό ιξώδες με  $7.76 * 10^{-7}\ m^2/s$ .

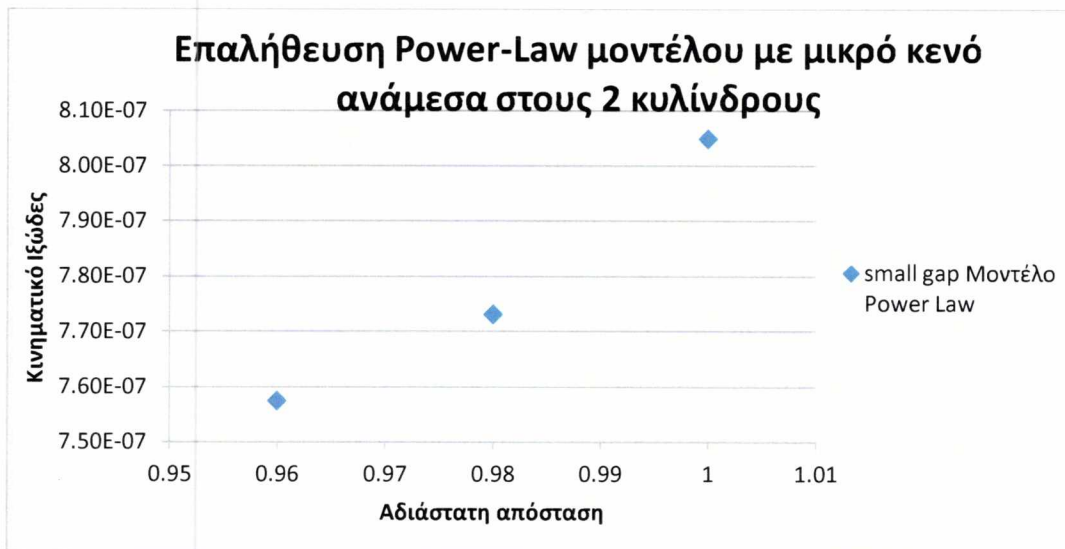
Το σχήμα 9 και ο πίνακας 4 παρουσιάζουν τις λύσεις για την επαλήθευση για το μεγάλο κενό, ενώ το σχήμα 10 παρουσιάζει τα αποτελέσματα για το μικρό κενό. Ο δείκτης συνέπειας του υλικού θεωρήθηκε  $0.01\ Pa*s$  ή  $0.00001\ m^2/s$  και ο δείκτης ρεολογικής συμπεριφοράς είχε την τιμή  $n=0.5$  (ψευδοπλαστικό υλικό).

r	x	K	Kr	r	k	$\Omega$	n	$\gamma$	nu analytical	nu openfoam
0.01	1	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	1.333333	8.66025E-06	6.76E-06
0.0098	0.98	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	1.445554	8.31731E-06	7.99E-06
0.0096	0.96	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	1.569834	7.98129E-06	7.96E-06
0.0094	0.94	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	1.707762	7.6522E-06	7.65E-06
0.0092	0.92	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	1.861176	7.33004E-06	7.33E-06
0.009	0.9	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	2.032211	7.01481E-06	7.02E-06
0.0088	0.88	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	2.223351	6.7065E-06	6.71E-06
0.0086	0.86	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	2.437502	6.40512E-06	6.41E-06
0.0084	0.84	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	2.678068	6.11068E-06	6.12E-06
0.0082	0.82	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	2.949058	5.82315E-06	5.83E-06
0.008	0.8	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	3.255208	5.54256E-06	5.55E-06
0.0078	0.78	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	3.602138	5.2689E-06	5.27E-06
0.0076	0.76	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	3.996542	5.00216E-06	5.01E-06
0.0074	0.74	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	4.446434	4.74236E-06	4.75E-06
0.0072	0.72	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	4.961452	4.48948E-06	4.49E-06
0.007	0.7	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	5.553242	4.24352E-06	4.25E-06
0.0068	0.68	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	6.235957	4.0045E-06	4.01E-06
0.0066	0.66	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	7.026887	3.77241E-06	3.78E-06
0.0064	0.64	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	7.947286	3.54724E-06	3.55E-06
0.0062	0.62	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	9.023437	3.329E-06	3.33E-06
0.006	0.6	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	10.28807	3.11769E-06	3.12E-06
0.0058	0.58	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	11.78221	2.91331E-06	2.92E-06
0.0056	0.56	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	13.55772	2.71586E-06	2.72E-06
0.0054	0.54	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	15.68064	2.52533E-06	2.53E-06
0.0052	0.52	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	18.23582	2.34173E-06	2.34E-06
0.005	0.5	0.00001	0.005	0.01	0.5	5	0.5	21.33333	2.16506E-06	2.17E-06

Πίνακας 4: Αναλυτική παρουσίαση των τιμών του σχήματος 9. Η γωνιακή ταχύτητα συμβολίζεται με  $\Omega$  και ισούται με 5 rad/s. Επίσης παρουσιάζεται η αλλαγή του ρυθμού διάτμησης και η αλλαγή του κινηματικού ιξώδους (συμβολισμός nu του openfoam) καθόλη την ακτινική απόσταση.



Σχήμα 9: Διάγραμμα επαλήθευσης για μεγάλο διάκενο 0.5 ανάμεσα σε αναλυτικό και υπολογιστικό μοντέλο.



Σχήμα 10: Διάγραμμα επαλήθευσης για μικρό διάκενο  $\kappa=0.95$  ανάμεσα σε αναλυτικό και υπολογιστικό μοντέλο. Η αναλυτική λύση θεωρείται ότι είναι σταθερή ( $7.76 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ) σε όλη τη ροή με σταθερό ρυθμό διάτμησης και ιξώδες.

Από τα σχήματα 9 και 10 παρατηρεί κανείς ότι τα αποτελέσματα ταυτίζονται. Στο μικρό διάκενο υπάρχει μια διακύμανση στο υπολογιστικό κομμάτι από  $7.57 \cdot 10^{-7}$  έως  $8.05 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  αλλά μπορεί να θεωρηθεί ότι η διακύμανση είναι πολύ μικρή και ότι μπορεί να συγκριθεί με το αναλυτικό μοντέλο του οποίου το κινηματικό ιξώδες είναι  $7.76 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Επίσης με τη χρήση της εξίσωσης 38 έγινε και επαλήθευση των τιμών της διατμητικής τάσης σε μη-νευτωνικό ρευστό.

	$\tau_{wall\ cup}$	$\tau_{wall\ bob}$
Πλέγμα 248000	0,01559	0,04611
Analytical Solution	-	0,04618

Πίνακας 5: Σύγκριση Ανάμεσα στις διατμητικές τάσεις του αναλυτικού μοντέλου της εξίσωσης 38 και του υπολογιστικού μοντέλου.

Το επόμενο βήμα ήταν η επαλήθευση του παραλλαγμένου κώδικα simplefoam με την εξίσωση της ενέργειας.

#### **4.3 Επαλήθευση Θερμοκρασιακού Προφίλ με το Δυναμικό Ιξώδες Ανεξάρτητο από τη Θερμοκρασία**

Αφού εισήχθη ο κώδικας της ενέργειας έπρεπε να διαπιστωθεί αν δούλευε και λειτουργούσε σωστά. Έγιναν δύο επαληθεύσεις με δύο διαφορετικά προβλήματα. Η πρώτη επαλήθευση στηρίχθηκε στη δουλειά των Bird, Stewart και Lightfoot[2], ενώ η δεύτερη στηρίχθηκε στη δουλειά των Parathanasiou, Caridis και Bijeljic [1].

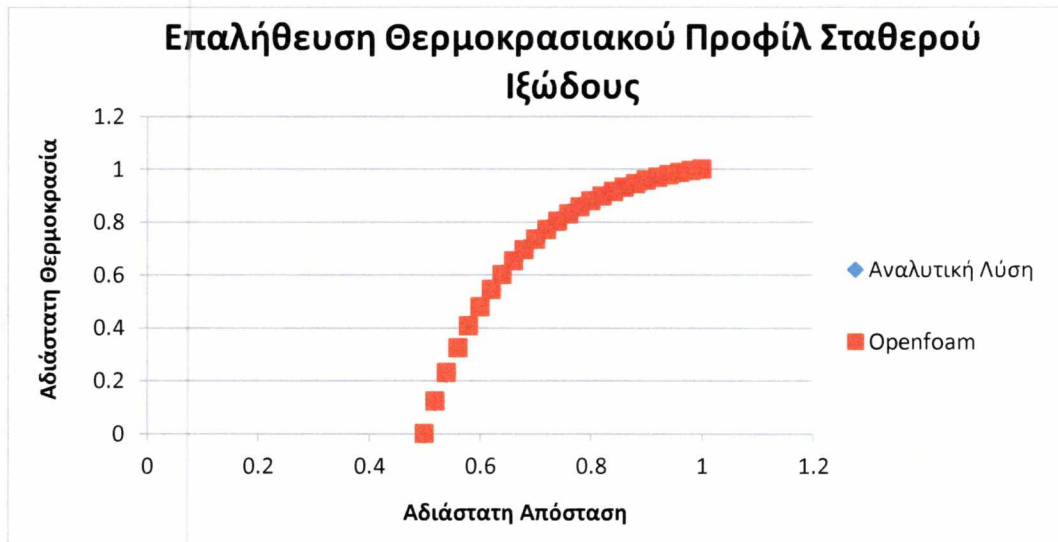
Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένα Νευτωνικό πολυμερές τήγμα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Πυκνότητα:  $1380 \text{ kg/m}^3$
- Ειδική Θερμότητα:  $1530 \text{ J/kgK}$

- Θερμική Αγωγιμότητα: 0.166 W/mK
- Δυναμικό Ιξώδες: 15000 Pa\*s
- Δείκτες Μεταβλητού Ιξώδες:  $\beta_1=1$  και  $\beta_2=0.5$  του πολυωνύμου  $1 + \beta_1 * \theta + \beta_2 * \theta^2$

#### 4.3.1 Σταθερή Θερμοκρασία στο Εξωτερικό Κύλινδρο ( $T_o$ ) και τον Εσωτερικό Κύλινδρο ( $T_i$ )

Η σύγκριση ανάμεσα στο υπολογιστικό μοντέλο και το αναλυτικό μοντέλο, έγινε με τη χρήση της εξίσωσης 58.



Σχήμα 11: Διάγραμμα απεικόνισης σύγκλισης αναλυτικής λύσης με υπολογιστικής λύσης. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 350 K ( $T_o$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν

ακίνητος με θερμοκρασία 300K ( $T_i$ ). Ως αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$  και ως αδιάστατη

θερμοκρασία η  $\theta = \frac{T - T_i}{T_o - T_i}$ .



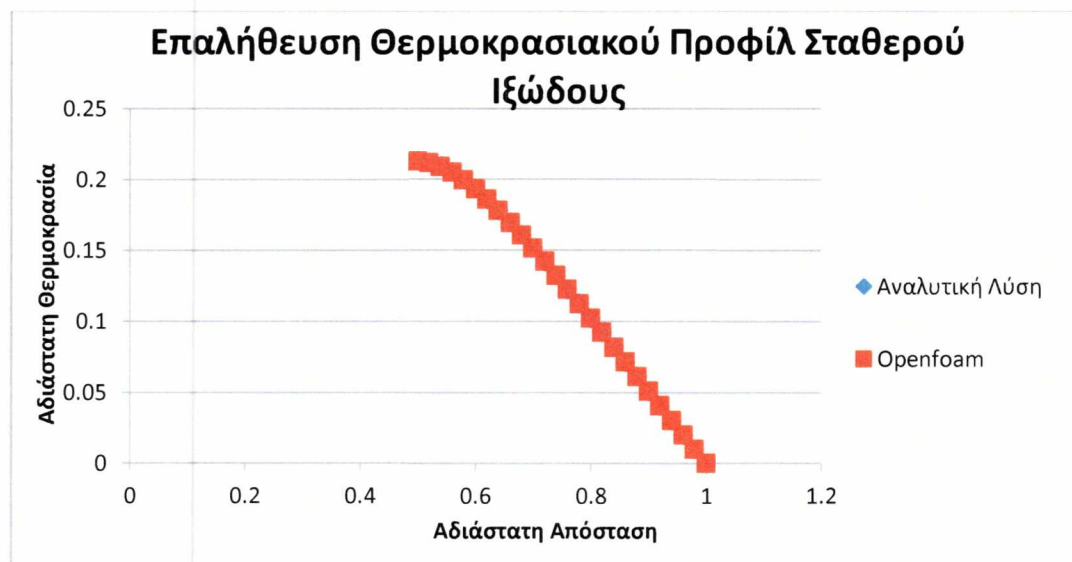
#### 4.3.2 Θερμομονωμένος Εσωτερικός Κύλινδρος και Σταθερή Θερμοκρασία στον Εξωτερικό Κύλινδρο ( $T_o$ )

Με βάση τις συνοριακές συνθήκες οι οποίες αναφέρονται στον τίτλο μελετούνται τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις, το σταθερό ιξώδες και το μεταβλητό ιξώδες  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$

και  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  αντίστοιχα (υποενότητες 4.3.2.1, 4.3.2.2, 4.3.2.3).

##### 4.3.2.1 Θερμοκρασιακό Προφίλ με το Δυναμικό Ιξώδες Ανεξάρτητο της Θερμοκρασίας

Η σύγκριση ανάμεσα στο υπολογιστικό μοντέλο και το αναλυτικό μοντέλο, έγινε με τη χρήση της εξίσωσης 68.



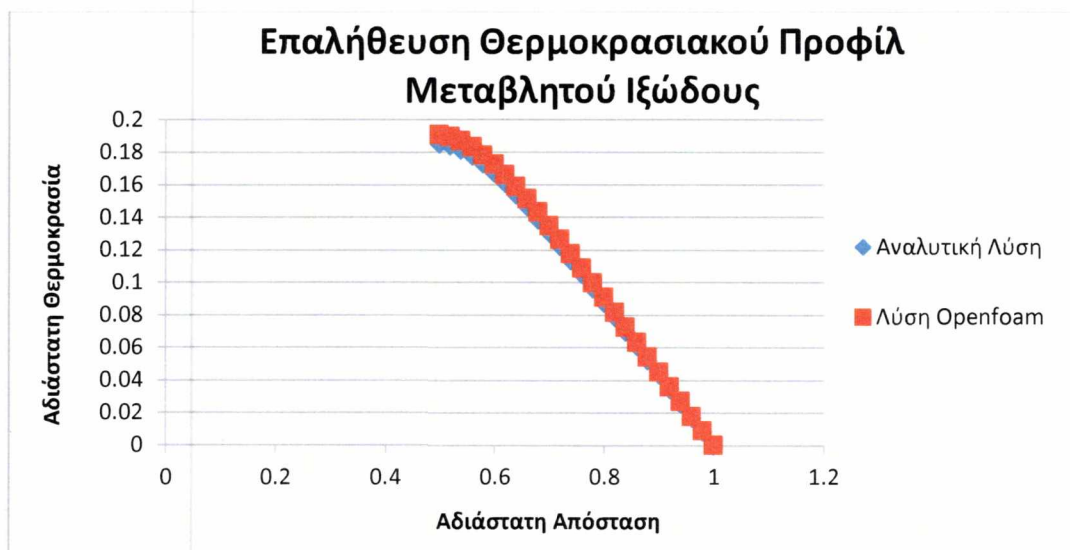
Σχήμα 12: Διάγραμμα απεικόνισης σύγκλισης αναλυτικής λύσης με υπολογιστικής λύσης. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_o$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος. Ως αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$  και ως αδιάστατη

θερμοκρασία η  $\Theta = \frac{T - T_o}{T_o}$ .

#### 4.3.2.2 Θερμοκρασιακό Προφίλ και Προφίλ Ταχύτητας όπου το Δυναμικό Ιξώδες

Εκφράζεται με τη Σχέση  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$

Αφού διαπιστώθηκε ότι τα υπολογιστικά μοντέλα λειτουργούν με την εξίσωση της ενέργειας και βγάζουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με τα αναλυτικά, η διαδικασία συνεχίστηκε για να βρεθεί αν η βιβλιοθήκη που δημιουργήθηκε για το μεταβλητό ιξώδες λειτουργεί. Για το μεταβλητό ιξώδες της μορφής  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$  έγινε ανάλυση και επαλήθευση στο θερμοκρασιακό προφίλ αλλά και στο προφίλ ταχυτήτων. Οι συνοριακές συνθήκες ήταν οι ίδιες. Ως αναλυτική βάση για το θερμοκρασιακό προφίλ χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση 73 και για το προφίλ ταχύτητας η εξίσωση 74. Από τα σχήματα 13, 14, 15 διαπιστώθηκε ότι τα αποτελέσματα συγκλίνουν με τις αναλυτικές λύσεις.

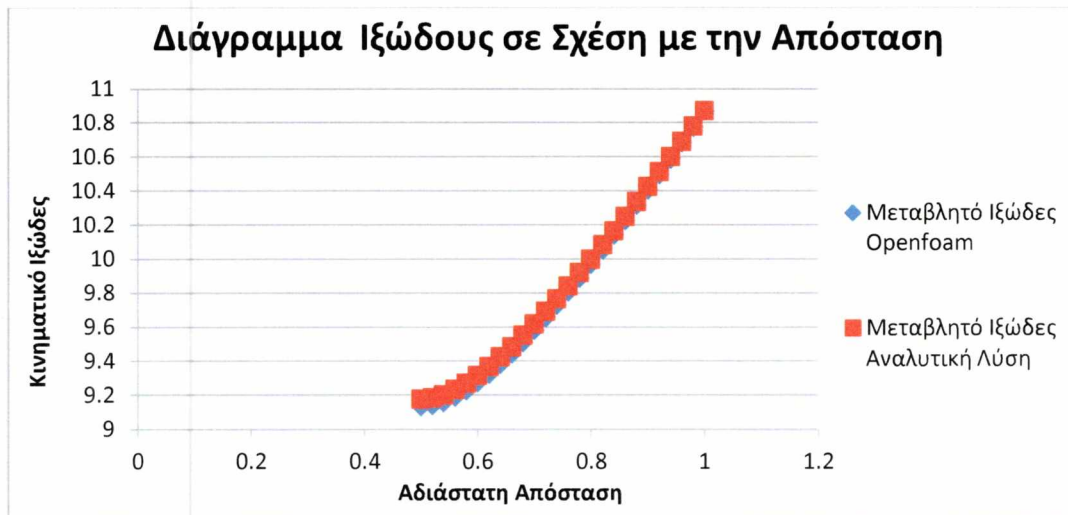


Σχήμα 13: Διάγραμμα απεικόνισης σύγκλισης θερμοκρασιακού προφίλ αναλυτικής λύσης με

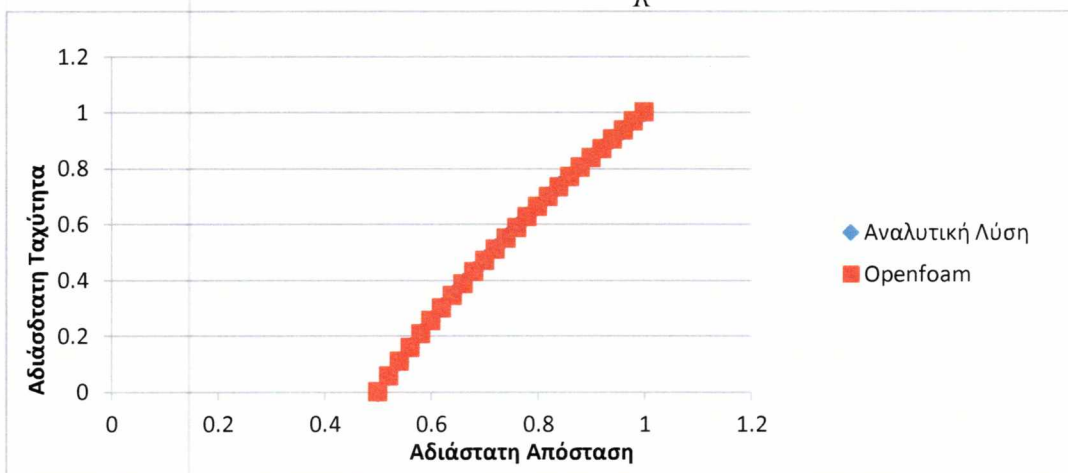
υπολογιστικής λύσης ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$ . Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5

rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_0$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος. Ως

αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$  και ως αδιάστατη θερμοκρασία η  $\Theta = \frac{T - T_0}{T_0}$ .

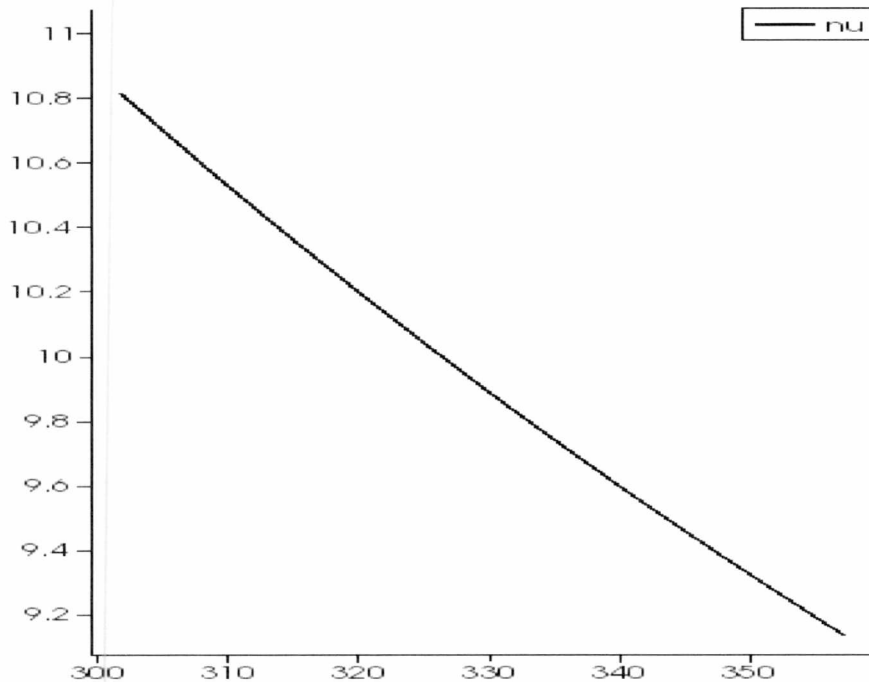


Σχήμα 14: Διάγραμμα πρόβλεψης και σύγκρισης της εξίσωσης ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_l * \Theta}$  όπου  $\Theta$  υπολογίζεται από την αναλυτική και την υπολογιστική λύση αντίστοιχα. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_o$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος. Ως αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$ .



Σχήμα 15: Διάγραμμα σύγκρισης προφίλ ταχυτήτων αναλυτικής λύσης με υπολογιστικής λύσης μεταβλητού ιξώδες  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_l * \Theta}$ . Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_o$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος. Ως αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$  και ως αδιάστατη ταχύτητα η  $u = \frac{u_o}{\Omega * R}$  όπου  $u_o$  το προφίλ της ταχύτητας εξίσωσης 74.

Επίσης στο σχήμα 16 παρουσιάζεται πως το ιξώδες μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία..



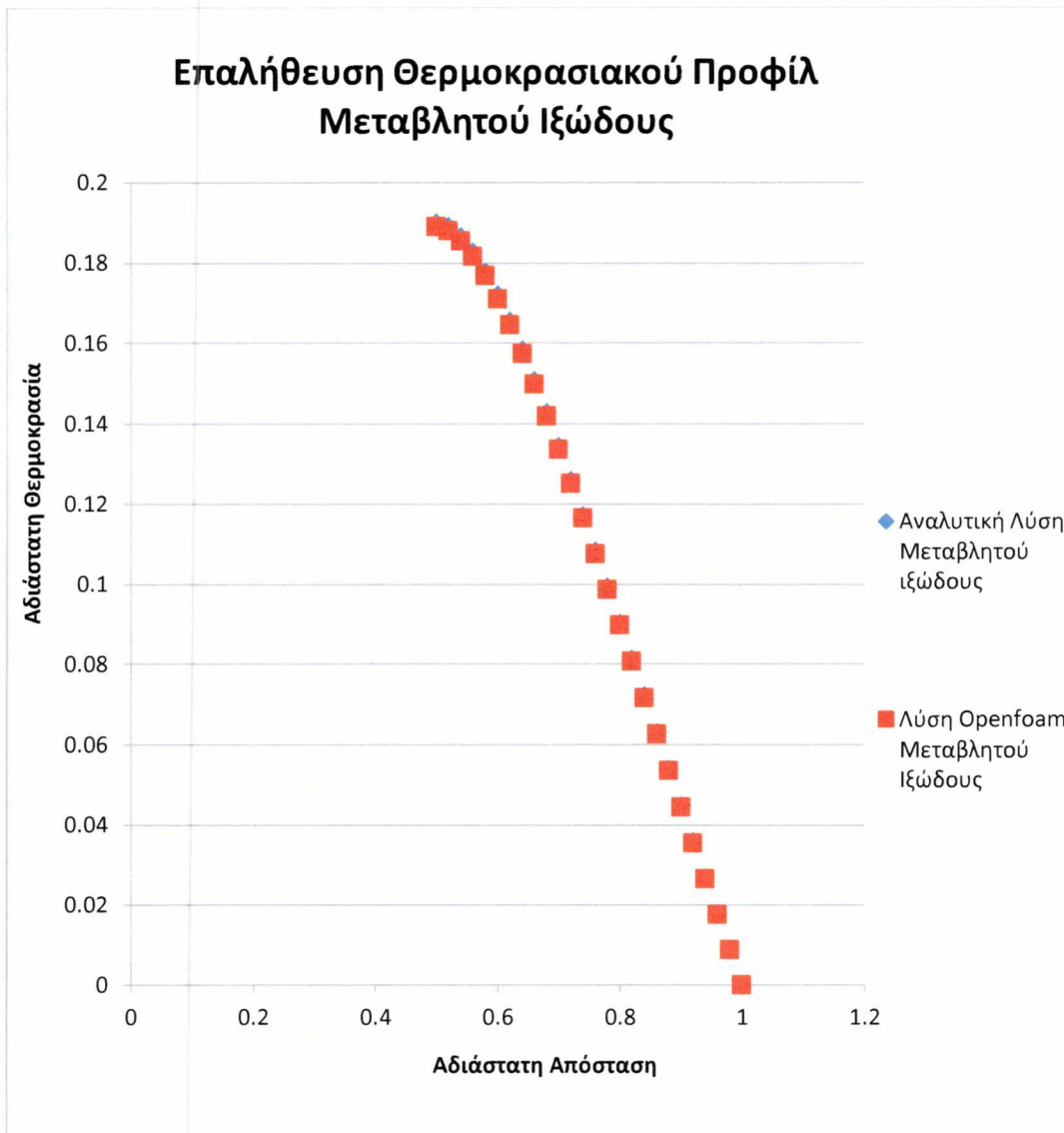
Σχήμα 16: Διάγραμμα ιξώδους σε σχέση με τη θερμοκρασία από το openfoam. Ο οριζόντιος άξονας είναι η θερμοκρασία (K) και ο κατακόρυφος άξονας είναι το κινηματικό ιξώδες (m<sup>2</sup>/s), συμβολίζεται και ως nu.

#### 4.3.2.3 Θερμοκρασιακό Προφίλ όπου το Δυναμικό Ιξώδες Εκφράζεται με τη Σχέση

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 \cdot \theta + \beta_2 \cdot \theta^2}$$

Τέλος έγινε η επαλήθευση του θερμοκρασιακού προφίλ για μεταβλητό ιξώδες

$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 \cdot \theta + \beta_2 \cdot \theta^2}$  βάσει της εξίσωσης 99. Διαπιστώθηκε ότι υπάρχει ταύτιση των αποτελεσμάτων (σχήμα 17). Άρα όλα τα υπολογιστικά μοντέλα λειτουργούν σωστά.



Σχήμα 17: Διάγραμμα σύγκρισης θερμοκρασιακού προφίλ αναλυτικής λύσης με υπολογιστική λύση όταν

το ιξώδες δίνεται από  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$ . Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε

με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_o$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος. Ως

αδιάστατη απόσταση θεωρήθηκε η  $x = \frac{r}{R}$  και ως αδιάστατη θερμοκρασία η  $\Theta = \frac{T - T_o}{T_o}$ .

#### 4.4 Ανάλυση Ποσοστού Απόκλισης Ανάμεσα σε Αποτελέσματα Υπολογιστικού Μοντέλου Openfoam και Προβλέψεων Αναλυτικών Λύσεων

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας εξετάστηκε η ακρίβεια του υπολογιστικού μοντέλου μεταβλητού ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  (ανταποκρίνεται καλύτερα στη συμπεριφορά του ιξώδους σε ένα πραγματικό ρευστό) με αντιπαραβολή τις αναλυτικές λύσεις των Parathanasiou, Caridis και Bijeljic [1]. Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν το Νευτωνικό πολυμερές τήγμα που χρησιμοποιήθηκε για τις επαληθεύσεις.

Παρακάτω γίνεται επεξήγηση των λεζάντων των σχημάτων και των αδιάστατων μονάδων :

- Ετικέτα 1: Υπολογιστικό Μοντέλο Openfoam Μεταβλητού Ιξώδους

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$$

- Ετικέτα 2: Υπολογιστικό Μοντέλο Openfoam Μεταβλητού Ιξώδους

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$$

- 

- Ετικέτα 3: Αναλυτικό Μοντέλο Μεταβλητού Ιξώδους

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$$

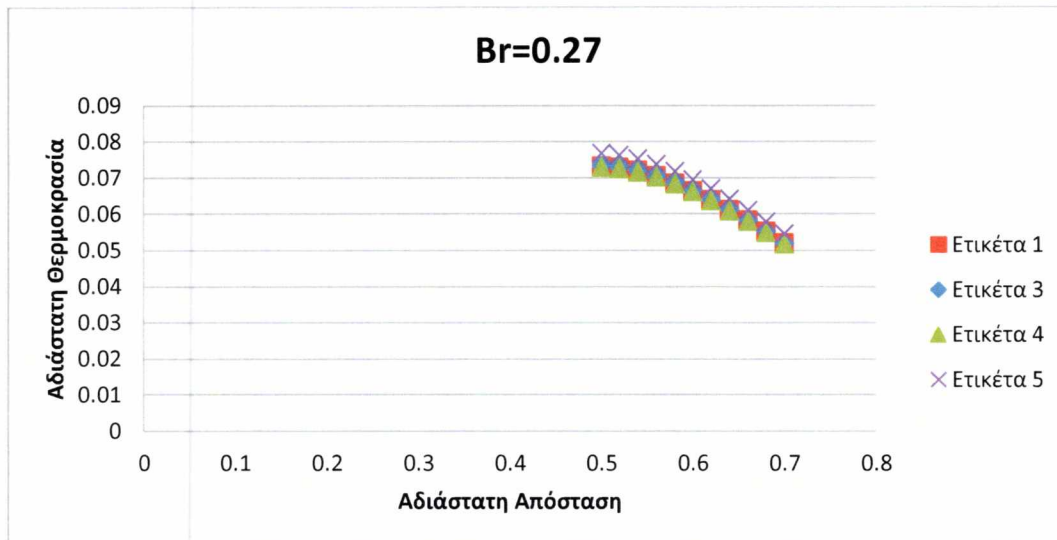
- Ετικέτα 4: Αναλυτικό Μοντέλο Μεταβλητού Ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$

- Ετικέτα 5: Αναλυτικό Μοντέλο Σταθερού Ιξώδους

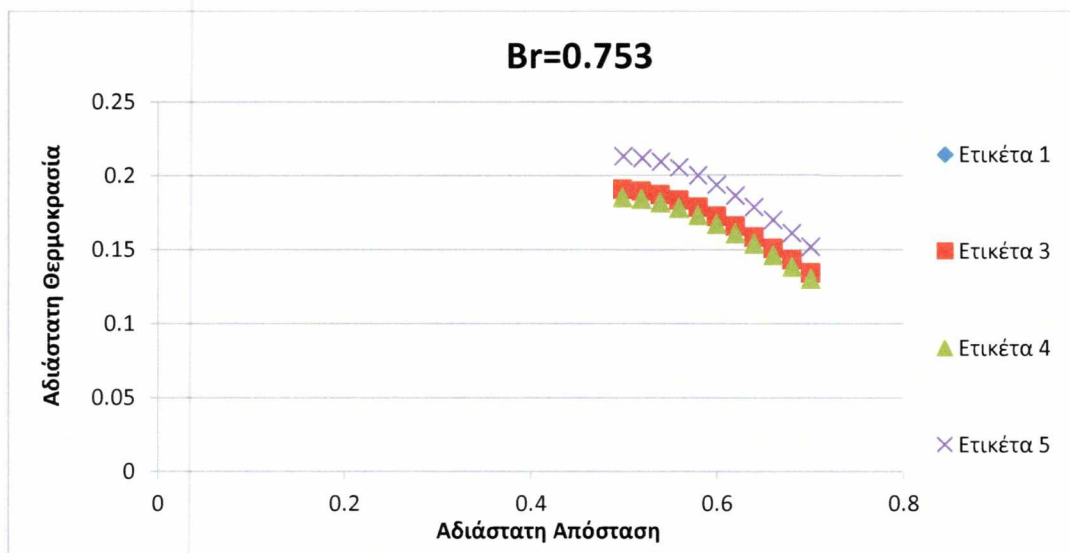
- Αδιάστατη Θερμοκρασία:  $\Theta = \frac{T - T_0}{T_0}$

- Αδιάστατη Απόσταση:  $x = \frac{r}{R}$

- Αδιάστατη Ταχύτητα:  $u = \frac{u_0}{\Omega * R}$

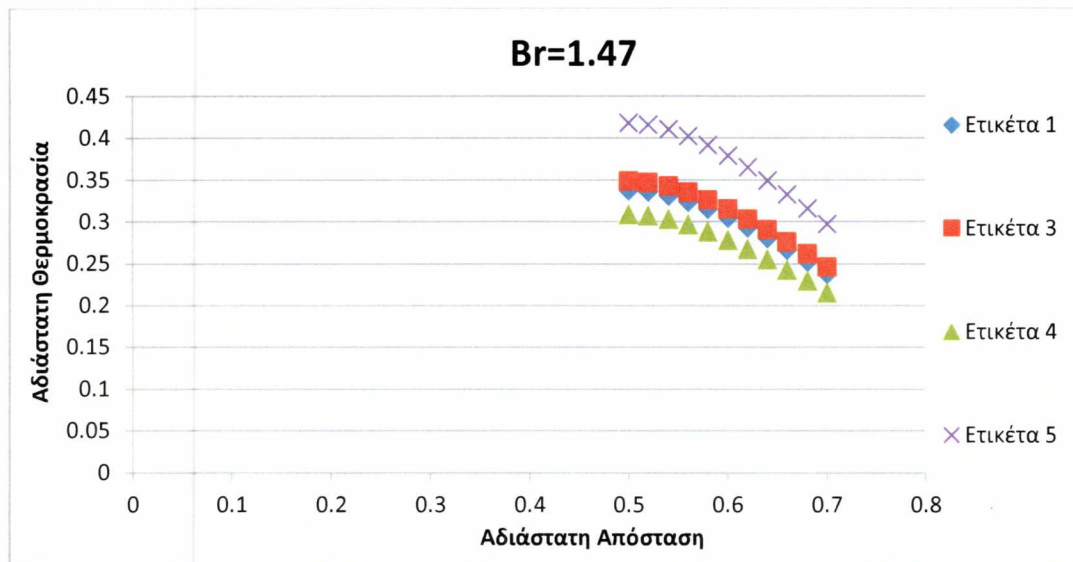


Σχήμα 18: Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ μεταξύ υπολογιστικού μοντέλου και αναλυτικών λύσεων, για αριθμό Brinkman 0.27, στην αδιάστατη περιοχή 0.5 έως 0.7, όπου τα μοντέλα παρουσιάζουν την μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ τους. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 3 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_0$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος.

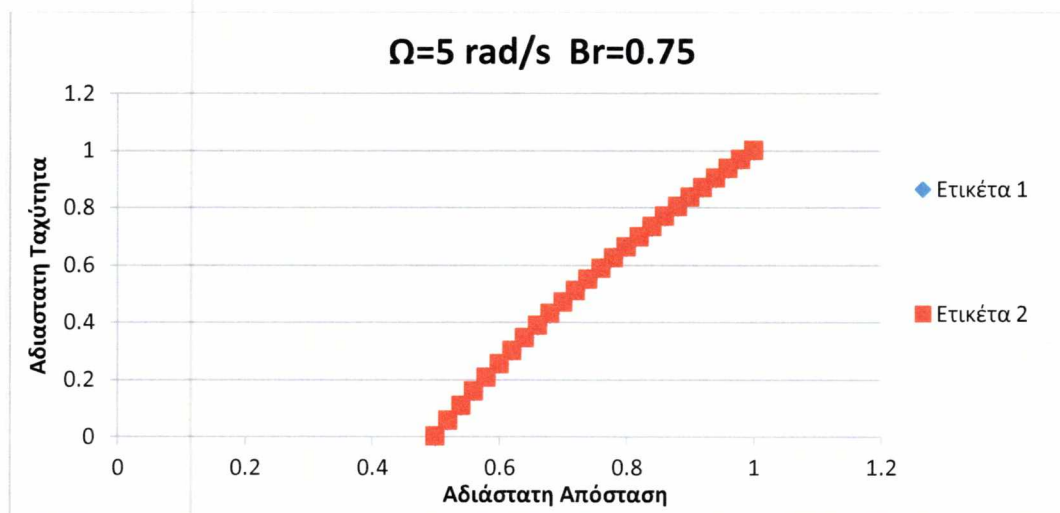


Σχήμα 19: Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ μεταξύ υπολογιστικού μοντέλου και αναλυτικών λύσεων, για αριθμό Brinkman 0.753, στην αδιάστατη περιοχή 0.5 έως 0.7, όπου τα μοντέλα παρουσιάζουν την μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ τους. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_0$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος.





Σχήμα 20 : Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ μεταξύ υπολογιστικού μοντέλου και αναλυτικών λύσεων, για αριθμό Brinkman 1.47, στην αδιάστατη περιοχή 0.5 έως 0.7, όπου τα μοντέλα παρουσιάζουν την μεγαλύτερη απόκλιση μεταξύ τους. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 7 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_0$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος.

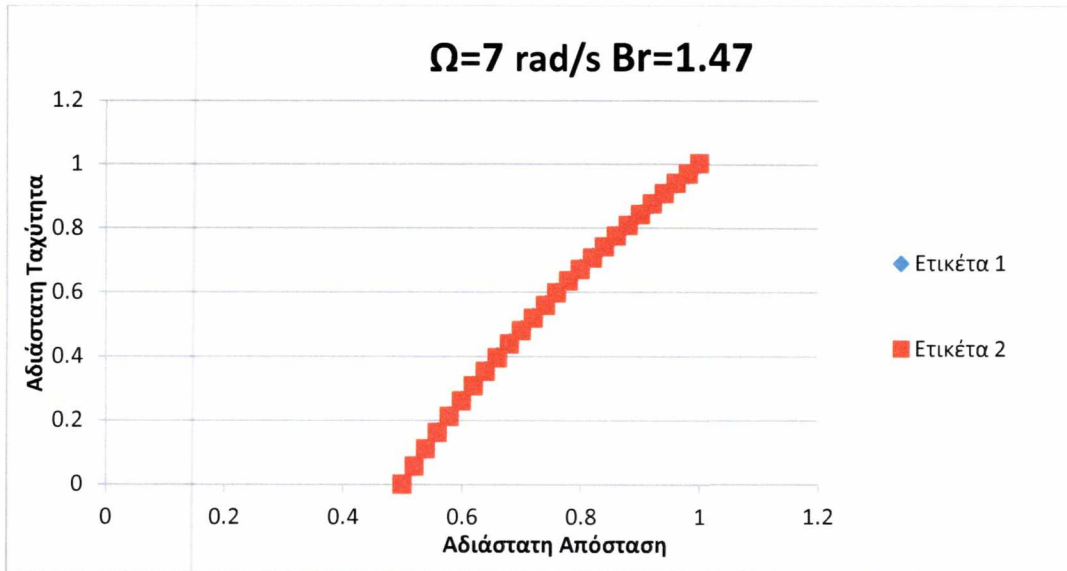


Σχήμα 21: Σύγκριση προφίλ ταχυτήτων μεταξύ υπολογιστικών μοντέλων μεταβλητού ιξώδους

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta} \quad \text{και} \quad \mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$$

. Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_0$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος.





Σχήμα 22: Σύγκριση προφίλ ταχυτήτων μεταξύ υπολογιστικών μοντέλων μεταβλητού ιξώδους

$\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$  και  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$ . Το διάκενο ήταν 0.5, ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 7 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_o$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος

Από τα σχήμα 18, 19 και 20 προκύπτει ότι τα αναλυτικά μοντέλα που στηρίζονται στις αριθμοσειρές συγκλίνουν με το υπολογιστικό μοντέλο, καθώς ο αριθμός Brinkman τείνει προς το 0. Το ποσοστό απόκλισης ανάμεσα στο αναλυτικό μοντέλο

$\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  και το υπολογιστικό του openfoam, όταν ο αριθμός Brinkman

είναι 0.75, είναι ελάχιστο (0.5% στο θερμομονωμένο τοίχωμα), ενώ σε διπλασιασμό του Brinkman γίνεται αισθητό (3.33% στο θερμομονωμένο τοίχωμα). Μια άλλη παρατήρηση είναι ότι η μεγαλύτερη απόκλιση παρουσιάζεται στη μέγιστη θερμοκρασία. Για τα

αναλυτικά μοντέλα σταθερού και ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$  παρατηρείται ότι, αν

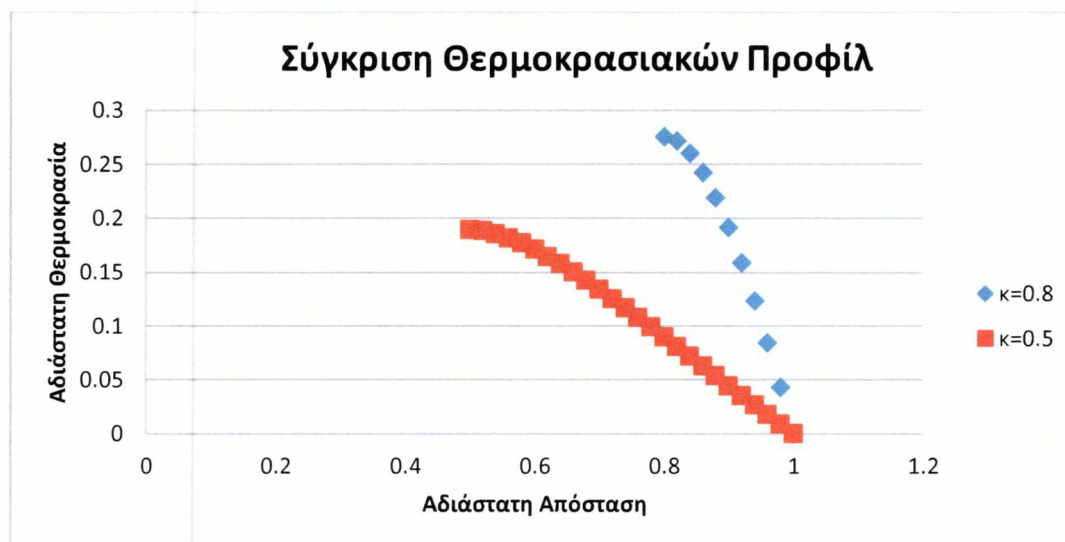
χρησιμοποιηθούν σε μια πραγματική διεργασία, οι εκτιμήσεις θα είναι τελείως λάθος για οποιαδήποτε σημαντική επίδραση της ιξώδους θερμότητας. Για παράδειγμα για  $Br=1.47$

ανάμεσα στο αναλυτικό μοντέλο όπου το ιξώδες είναι της μορφής  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta}$  και στο

υπολογιστικό του openfoam, το ποσοστό λάθους φτάνει έως το 8.4%.

Όσο για την ταχύτητα πρέπει να τονιστεί ότι έχει γίνει επαλήθευση μόνο για το προφίλ ταχύτητας μεταβλητού ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$ , γιατί από τα σχήματα 21 και 22 παρατηρείται ότι τα δεδομένα ανάμεσα στα προφίλ ταχύτητας μεταβλητού ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  και  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta}$  αντίστοιχα είναι ακριβώς ίδια, ακόμα και στην αύξηση του αριθμού Brinkman. Για αυτό το λόγο δεν χρειάστηκε να γίνει επαλήθευση με τα πολύπλοκα αναλυτικά μοντέλα (εξισώσεις 78-99) για το μεταβλητό ιξώδες  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$ .

Τέλος παρατηρείται ότι όσο πιο μικρό είναι το διάκενο ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους, τόσο μεγαλύτερες θερμοκρασίες αναπτύσσονται στη ροή couette, το οποίο συμφωνεί με την εργασία των Parathanasiou, Caridis και Bijeljic [1].



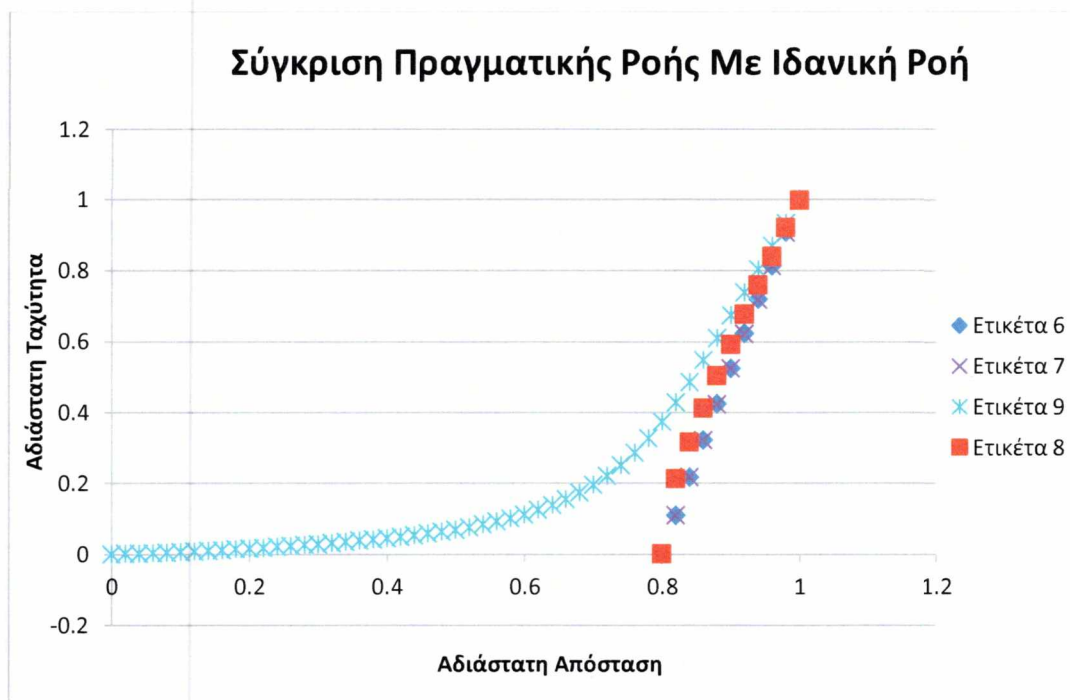
Σχήμα 23: Σύγκριση θερμοκρασιακών προφίλ μεταξύ υπολογιστικών μοντέλων μεταβλητού ιξώδους

$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  με διάκενο  $\kappa=0.5$  και  $\kappa=0.8$  αντίστοιχα ( $\kappa=R_c/R_b$ ). Ο εξωτερικός κύλινδρος γύριζε με 5 rad/s και είχε θερμοκρασία 300 K ( $T_0$ ), ενώ ο εσωτερικός ήταν ακίνητος και θερμομονωμένος

#### 4.5 Σύγκριση Ιδανικής Γεωμετρίας με Πραγματική στο Κώδικα SimpleFoam

Σε αυτή την υποενότητα συγκρίθηκε η πραγματική γεωμετρία με την ιδανική για να βρεθούν τυχόν διαφορές και αποκλίσεις στα προφίλ των ταχυτήτων και τη ροπή κατά επέκταση. Το Νευτώνικό υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν η γλυκερίνη με δυναμικό ιξώδες  $0,71 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$  ή κινηματικό ιξώδες  $0,000563288 \text{ m/s}^2$ . Παρακάτω παρατίθενται οι λεζάντες:

- Ετικέτα 6: Ιξωδόμετρο Ιδανικής ροής απείρου μήκους
- Ετικέτα 7: Πραγματικό Ιξωδόμετρο, προφίλ ταχύτητας μακριά από Non-Couette Περιοχή
- Ετικέτα 8: Πραγματικό Ιξωδόμετρο προφίλ ταχύτητας ακριβώς στο πάτο του εσωτερικού κυλίνδρου
- Ετικέτα 9: Πραγματικό Ιξωδόμετρο προφίλ ταχύτητας ακριβώς στην Non-Couette περιοχή



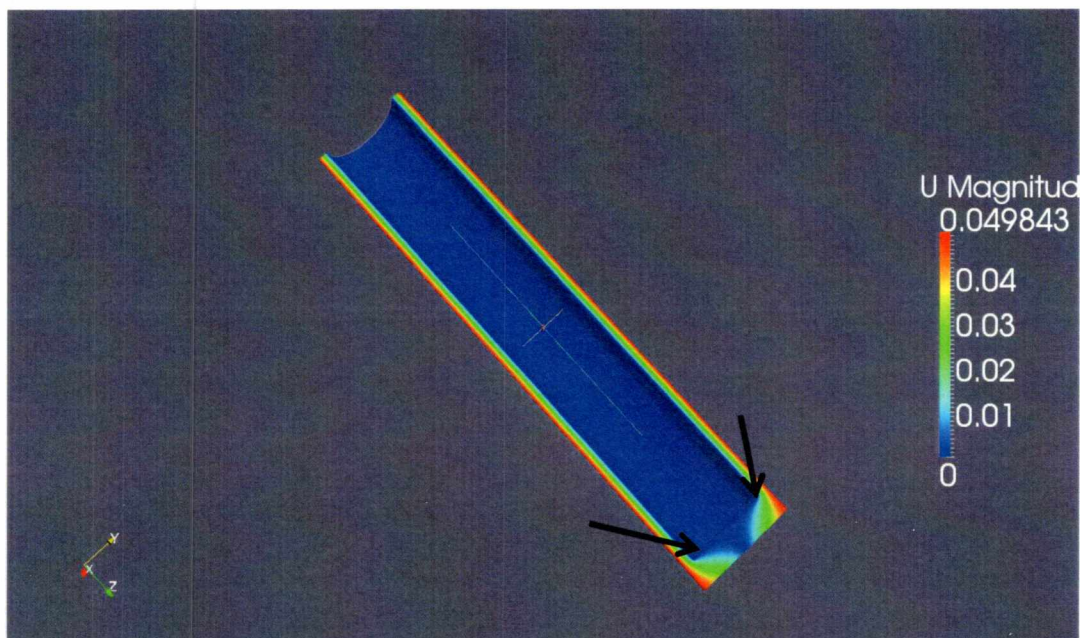
Σχήμα 24: Σύγκριση προφίλ ταχυτήτων πραγματικής και ιδανικής ροής για δυναμικό ιξώδες  $0,71 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$  και γωνιακή ταχύτητα  $5 \text{ rad/s}$ .

Στο σχήμα 24 παρατηρείται ότι μακριά από την non-couette περιοχή και τον πάτο του εσωτερικού κυλίνδρου οι λύσεις του πραγματικού ιξωδομέτρου (εξίσωση 7) συμπίπτουν με τις ιδανική περίπτωση (εξίσωση 6), δηλαδή με τις αναλυτικές λύσεις. Όμως από την εξίσωση 8, που δείχνει το προφίλ της ταχύτητας ακριβώς στον πάτο του εσωτερικού κυλίνδρου, παρατηρείται ότι το προφίλ της ταχύτητας δε συμπίπτει ακριβώς με το ιδανικό, αλλά τα σημεία της ταχύτητας αποκλίνουν από το ιδανικό όσο πλησιάζει κανείς τον εσωτερικό κύλινδρο. Αυτό συμβαίνει, γιατί ακριβώς μετά υπάρχει η non-couette περιοχή, όπως φαίνεται και από το σχήμα 25, η οποία επηρεάζει τα αποτελέσματα και συμβάλλει στην αύξηση των ταχυτήτων ακριβώς στην επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου κατά 25% από τις ιδανικές, λόγω του γεγονότος ότι το προφίλ των ταχυτήτων στην z κατεύθυνση μεταβάλλεται. Τα πραγματικά ιξωδόμετρα υπολογίζουν το ιξώδες μέσω της ροπής, άρα στην πράξη υπάρχει αλλοίωση των αποτελεσμάτων, η οποία είναι σχετικά μικρή, όπως φαίνεται από τον πίνακα 6. Στο ενδιάμεσο κενό ανάμεσα στον πάτο του bob και του cup φαίνεται ότι οι εξισώσεις δεν αρκούν να περιγράψουν το φαινόμενο. Δεν υπάρχει πλέον ροή couette. Επίσης ο αριθμός Reynolds είναι σχετικά μικρός ( $Re=0.666$ ), άρα η ροή είναι στρωτή και δεν υπάρχουν προβλήματα με δίνες Taylor, όπως φαίνεται και από το σχήμα 25.

	Άπειρο ιξωδόμετρο	Κανονικό Ιξωδόμετρο
Ροπή για 5 rad/s	0.0793	0.1062028

Πίνακας 6: Σύγκριση Ροπών ( $N \cdot cm$ ) ανάμεσα σε Ιδανική Περίπτωση και Πραγματική Περίπτωση





Σχήμα 25: Τομή Κανονικού Ιξωδομέτρου που περιέχει γλυκερίνη με γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s. Στον πάτο του φαίνεται η non-couette περιοχή, η οποία όπως φαίνεται κατά μήκος της z διεύθυνσης έχει αλλαγές στα προφίλ των ταχυτήτων. Τα βέλη δείχνουν τα σημεία-γωνίες του εσωτερικού κυλίνδρου στα οποία μετριέται η ροπή η οποία επηρεάζεται από μια ταχύτητα του ενδιάμεσου κενού μεταξύ των τιμών 3-4 rad/s.

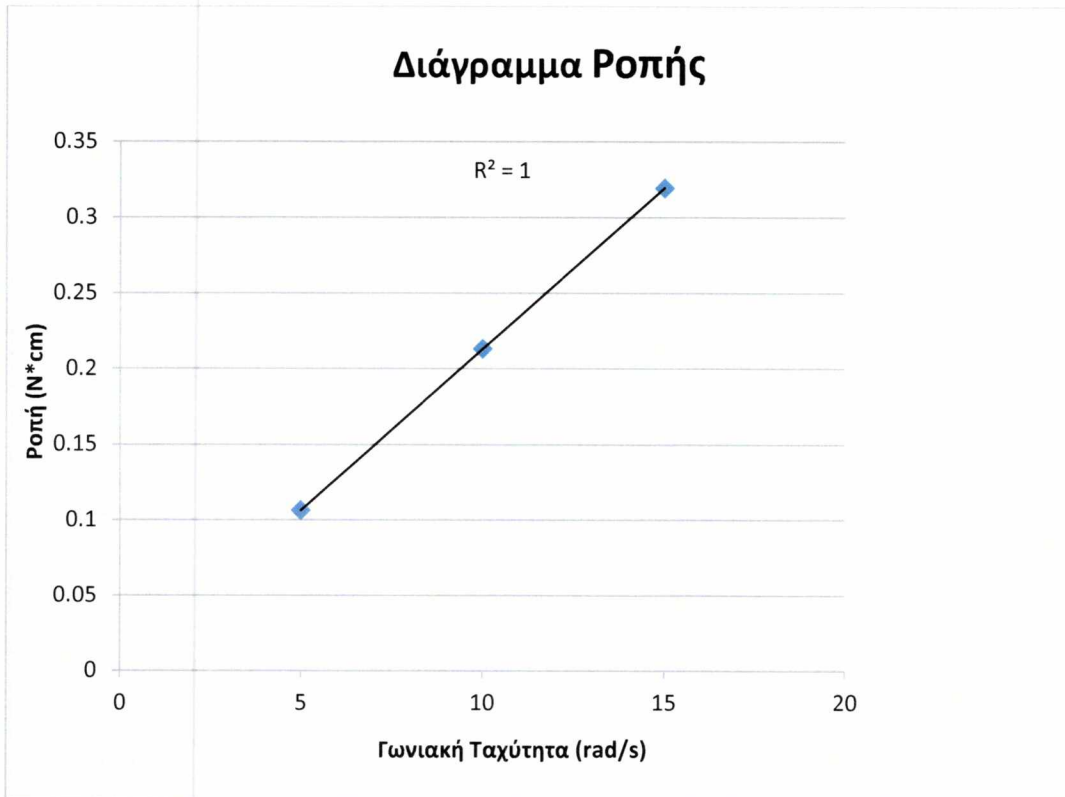
Στο 2<sup>ο</sup> στάδιοερευνήθηκε αν το κενό ανάμεσα στον πάτο του bob και του cup επηρεάζει τα αποτελέσματα της ροπής.

κενό 2 χιλιοστών	κενό 5 χιλιοστών	κενό 10 χιλιοστών	κενό 20 χιλιοστών
0.121969	0.1062028	0.108862	0.110305

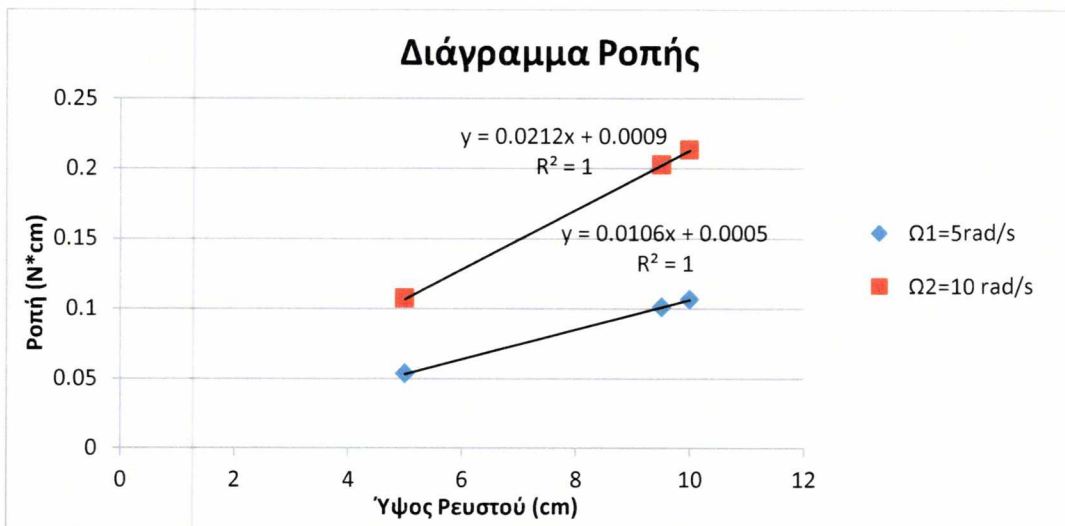
Πίνακας 7: Ροπές πραγματικών ιξωδομέτρων (N\*cm) σε διαφορετικά ύψη κενού ανάμεσα στον πάτο του bob και το πάτο του cup.

Διαπιστώθηκε, από τον πίνακα 7, ότι όταν το κενό είναι πολύ μικρό υπάρχει αύξηση της ροπής λόγω τριβών, ενώ όταν το κενό μεγαλώνει το προφίλ ταχυτήτων γίνεται ομοιόμορφο και οι τριβές σταθεροποιούνται. Τα παραδείγματα προτιμήθηκε να γίνονται με κενό 5 χιλιοστών.

Στο 3<sup>ο</sup> στάδιο ερευνήθηκε η ροπή σε σχέση με τη γωνιακή ταχύτητα και το ύψος του ρευστού που υπάρχει μέσα στο ιξωδόμετρο.



Σχήμα 26: Διάγραμμα ροπής πραγματικού ιξωδομέτρου στο οποίο απεικονίζεται η γραμμικότητα ανάμεσα στη γωνιακή ταχύτητα και τη ροπή. Το ιξωδόμετρο περιέχει Νευτωνική γλυκερίνη, με δυναμικό ιξώδες  $0.71 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}$ , με τον εξωτερικό κύλινδρο να περιστρέφεται σε τρεις διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες (5, 10 και 15 rad/s).



Σχήμα 27: Διάγραμμα ροπής πραγματικού ιξωδομέτρου στο οποίο απεικονίζεται η γραμμικότητα ανάμεσα στη ροπή και το ύψος του ρευστού σε δύο διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες. Το ιξωδομέτρο περιέχει Νευτωνική γλυκερίνη, ύψους 5, 9.5 και 10 cm αντίστοιχα με δυναμικό ιξώδες 0.71 kg\*m/s, με τον εξωτερικό κύλινδρο να περιστρέφεται σε δύο διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες (5 και 10 rad/s).

Διαπιστώθηκε ότι η ροπή είναι ανάλογη με τη γωνιακή ταχύτητα, δηλαδή όταν διπλασιάζεται η γωνιακή ταχύτητα διπλασιάζεται και η ροπή (σχήμα 26). Ακριβώς το ίδιο ισχύει για το ύψος του ρευστού (σχήμα 27). Στο διάγραμμα αυτό παρουσιάζεται και η διαδικασία διόρθωσης σφάλματος που συμβαίνει στα εμπορικά ιξωδομέτρα [3]. Στην πραγματικότητα τα εμπορικά ιξωδομέτρα εμφανίζουν ατέλειες στη γεωμετρία τους με αποτέλεσμα να μην μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια το ιξώδες. Αυτό έχει ως συνέπεια να γίνονται διορθώσεις κάνοντας μετρήσεις με διαφορετικά ύψη και χρησιμοποιώντας

την εξής σχέση  $\sigma_b = \frac{M - M_e}{2 * \pi * h * R_b^2}$ . Έτσι βρίσκεται η διορθωμένη διατμητική τάση και

αντίστοιχα και η ροπή. Το  $M_e$  βρίσκεται αν προεκτείνει κανείς τη γραμμή που προκύπτει από τα ύψη του ρευστού έως ότου να τέμνει τον άξονα y. Αυτή η τιμή είναι και η διόρθωση σφάλματος. Για αυτό το λόγο στην πράξη τα συναξονικά ιξωδομέτρα έχουν πιο περίπλοκες γεωμετρίες, όπως το ιξωδομέτρο mooney-couette, του οποίου ο πάτος του bob είναι κωνικός. Στις υπολογιστικές λύσεις το σφάλμα είναι αμελητέο. Πρέπει να τονιστεί ότι όσο πιο μακριά από τη non-couette περιοχή γίνονται οι μετρήσεις τόσο τα αποτελέσματα συμπίπτουν με τα ιδανικά.

#### **4.6 Σύγκριση Κώδικα χωρίς την Εξίσωση της Ενέργειας Με κώδικα με την Εξίσωση της Ενέργειας**

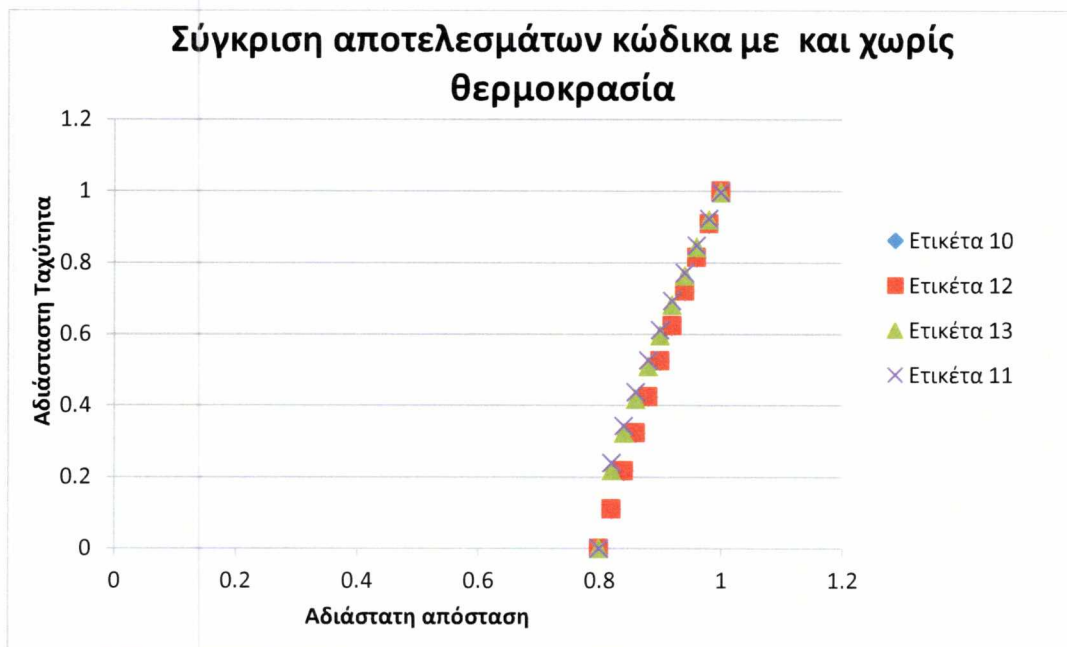
Σε αυτό το στάδιο ελέγχθηκε αν ο παραλλαγμένος κώδικας με συνοριακές συνθήκες ισοθερμοκρασιακού προφίλ, θα δώσει τα ίδια αποτελέσματα στα προφίλ των ταχυτήτων και των ροπών της ενότητας 4.5. Πράγματι στα σχήματα 28, 29, και 30 παρατηρούνται ότι οι ροπές και τα προφίλ των ταχυτήτων είναι σχεδόν ίδια.

Στην εξίσωση της ενέργειας πρέπει να δηλωθούν άλλες τρεις μεταβλητές εκτός από το ιξώδες το οποίο είναι 0,71 kg\*m/s στους 300K.

- Πυκνότητα:  $1261 \text{ kg/m}^3$
- Ειδική Θερμότητα:  $2430 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$
- Θερμική Αγωγιμότητα:  $0.29 \text{ W/mK}$

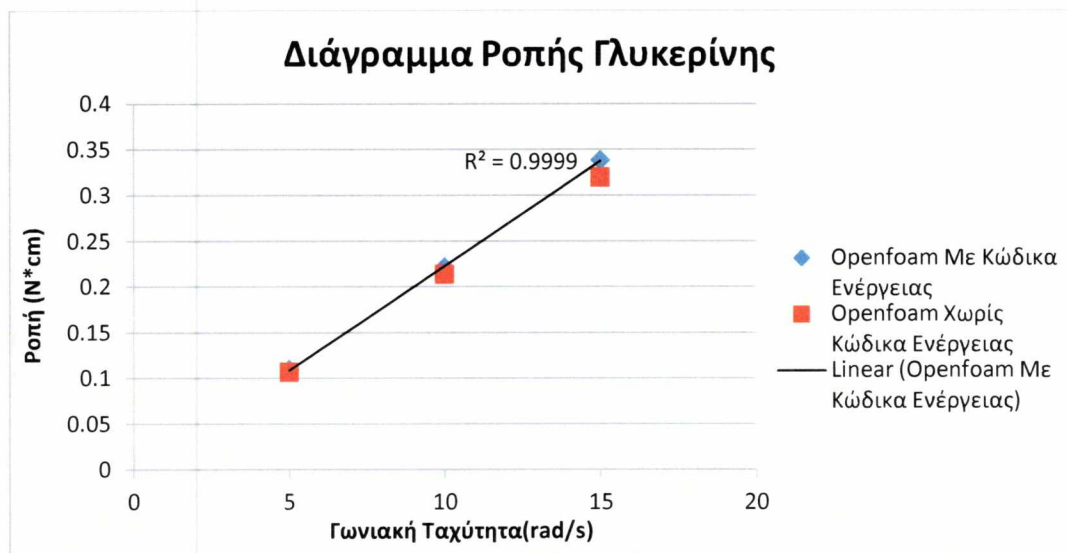
Παρακάτω παρατίθενται τα ονόματα των λεζάντων :

- Ετικέτα 10: Ιξωδόμετρο Ιδανικής ροής απείρου μήκους
- Ετικέτα 11: Πραγματικό Ιξωδόμετρο προφίλ ταχύτητας ακριβώς στο πάτο του bob
- Ετικέτα 12: Ιξωδόμετρο Ιδανικής ροής απείρου μήκους με κώδικα ενέργειας
- Ετικέτα 13: Πραγματικό Ιξωδόμετρο προφίλ ταχύτητας ακριβώς στο πάτο του bob με κώδικα ενέργειας

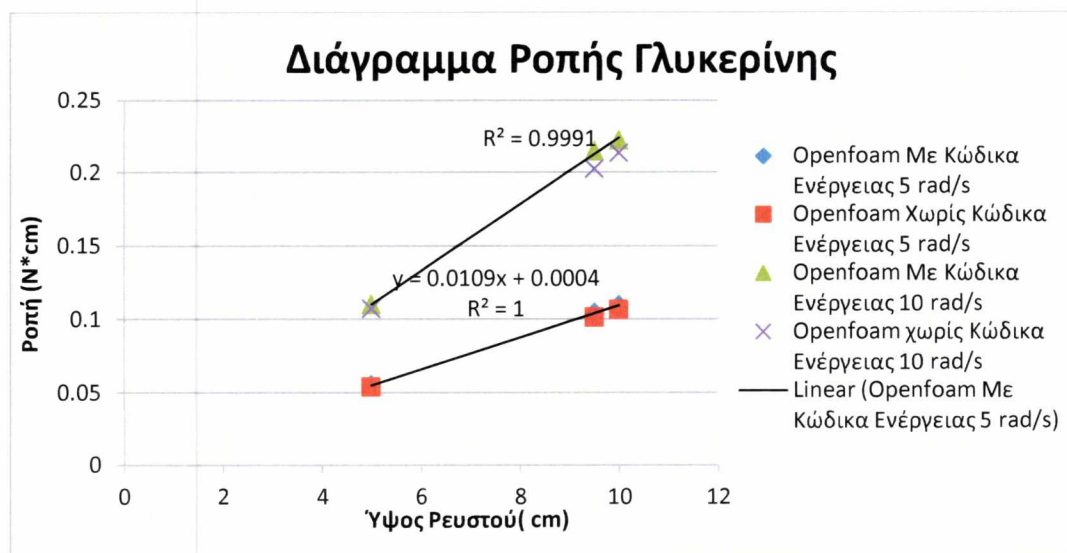


Σχήμα 28: Προφίλ ταχυτήτων κώδικα με και χωρίς την εξίσωση της ενέργειας με χρήση γλυκερίνης και γωνιακή ταχύτητα εξωτερικού κυλίνδρου  $5 \text{ rad/s}$ . Ο κώδικας της ενέργειας είχε ως συνοριακές συνθήκες σταθερή θερμοκρασία ( $300\text{K}$ ) και στα δύο τοιχώματα του ιξωδομέτρου.

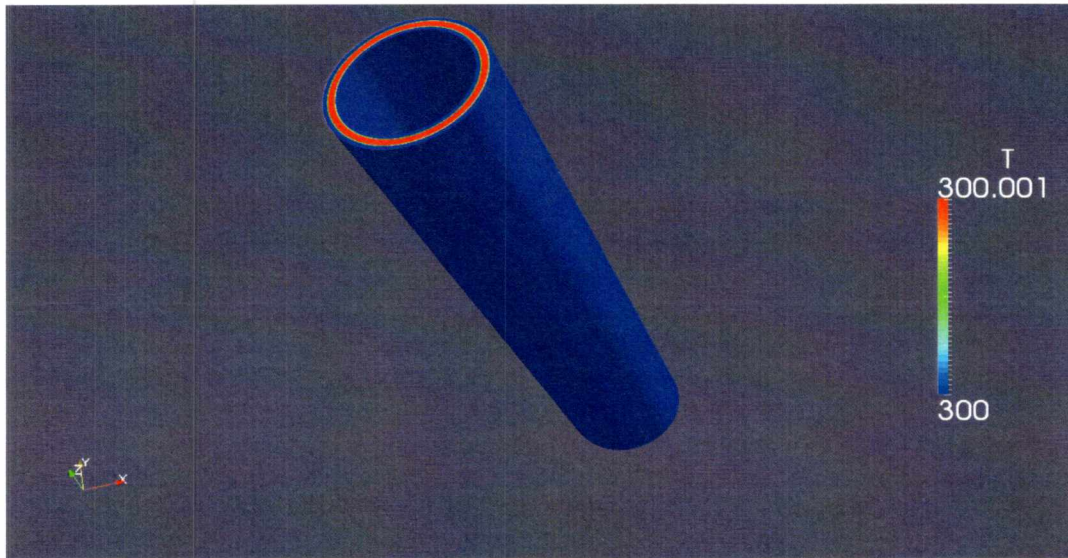




Σχήμα 29: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει γωνιακής ταχύτητας πραγματικού ιξωδομέτρου και σύγκριση αποτελεσμάτων του simplefoam και του simplefoam με εξίσωση ενέργειας. Ο κώδικας της ενέργειας είχε ως συνοριακές συνθήκες σταθερή θερμοκρασία (300K) και στα δύο τοιχώματα του ιξωδομέτρου.



Σχήμα 30: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει ύψος ρευστού πραγματικού ιξωδομέτρου και σύγκριση αποτελεσμάτων του simplefoam και του simplefoam με εξίσωση ενέργειας. Ο κώδικας της ενέργειας είχε ως συνοριακές συνθήκες σταθερή θερμοκρασία (300K) και στα δύο τοιχώματα του ιξωδομέτρου.



Σχήμα 31: Θερμοκρασία ιδανικής ροής γλυκερίνης με τον εξωτερικό κύλινδρο να περιστρέφεται με 5 rad/s και τον εσωτερικό ακίνητο. Τα δύο τοιχώματα διατηρούνται στην ίδια θερμοκρασία των 300 K. Τα χρώματα απεικονίζουν διαφορετικές θερμοκρασίες όπως φαίνεται από το δείκτη.

Ο αριθμός Brinkman είναι της τάξεως  $10^{-4}$ . Άρα αυτό σημαίνει αμελητέα παραγωγή θερμότητας (σχήμα 31).

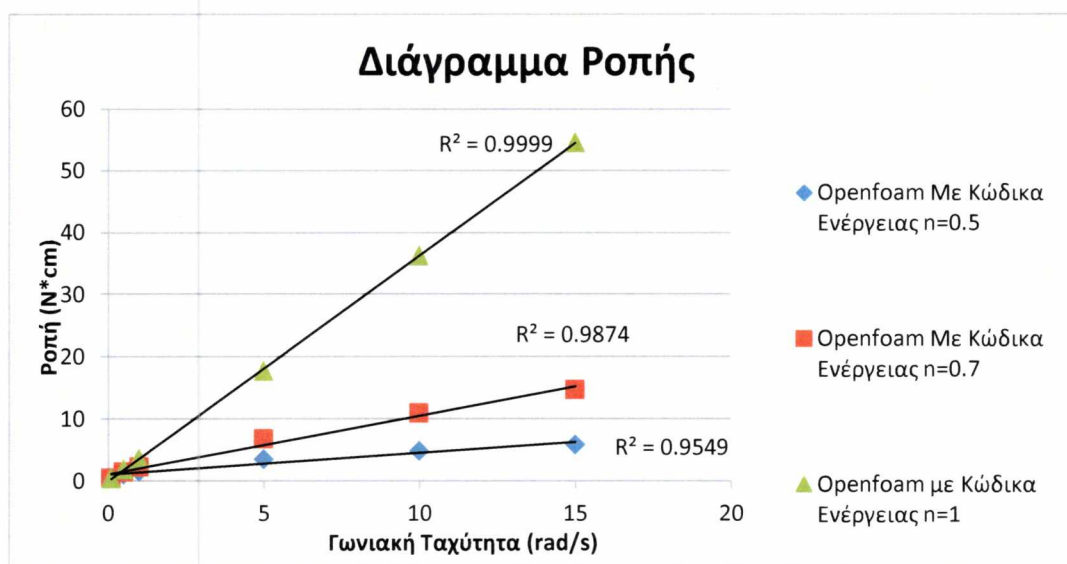
#### 4.7 Σύγκριση Νευτωνικού Με Μη-Νευτωνικού Ρευστού

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας, αναλύθηκε αν η σχέση ανάμεσα σε ροπή, γωνιακή ταχύτητα και ύψος ρευστού επηρεάζεται με το αν το ρευστό είναι Νευτωνικό ή μη. Το υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν ένα ρευστό με δείκτη συνέπειας 126 Pa\*s. Στην πρώτη περίπτωση θεωρήθηκε Νευτωνικό ( $n=1$ ) και στις άλλες δύο περιπτώσεις ψευδοπλαστικό (με  $n=0.7$  και  $0.5$  αντίστοιχα). Παρακάτω παρατίθενται τα υπόλοιπα στοιχεία του υλικού :

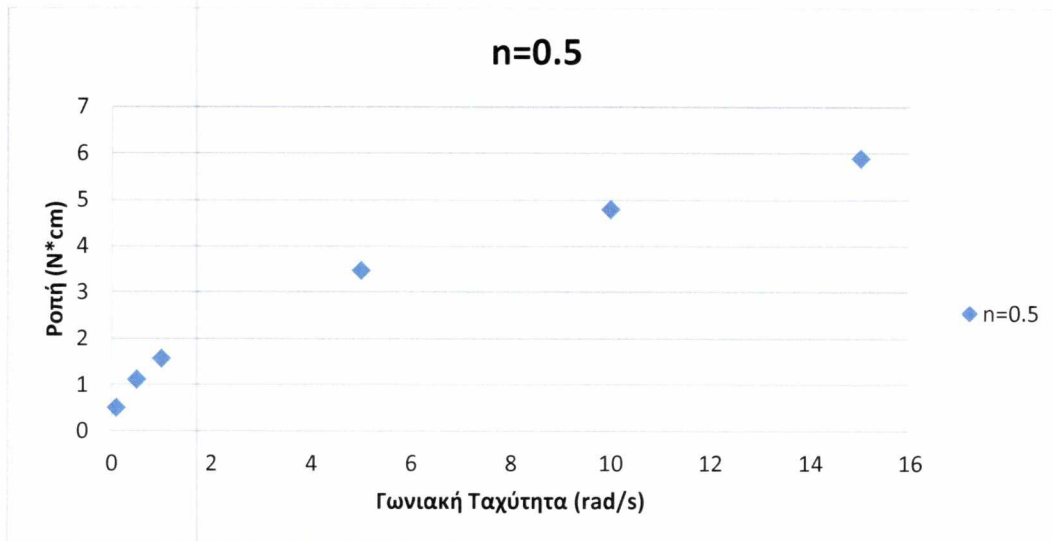
- Πυκνότητα: 1406 kg/m<sup>3</sup>
- Ειδική Θερμότητα: 2300 J/kg\*K
- Θερμική Αγωγιμότητα: 0.11 W/mK

Από το σχήμα 32 φαίνεται ότι η γραμμικότητα ανάμεσα σε ροπή και γωνιακή ταχύτητα δεν ισχύει για τα μη-Νευτωνικά ρευστά. Παρατηρείται ότι όσο ο δείκτης της

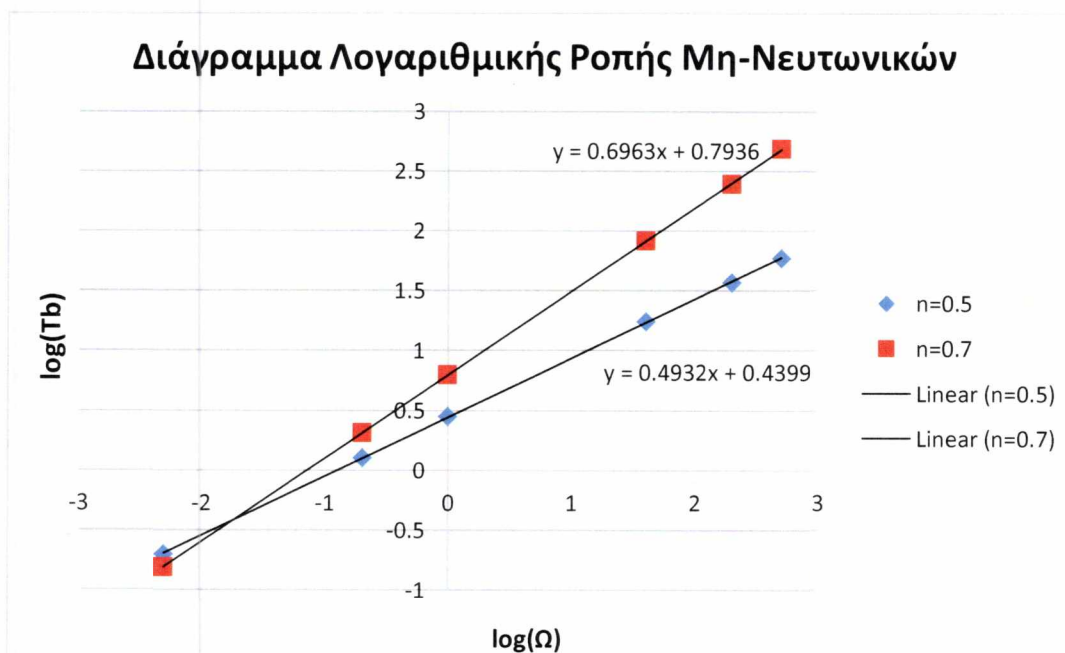
ρεολογικής συμπεριφοράς τείνει προς το νευτωνικό ρευστό τόσο πιο γραμμικό είναι το προφίλ της ροπής. Επίσης αν λογαριθμιστούν οι άξονες της γωνιακής ταχύτητας και της ροπής, από την κλίση της ευθείας της επαληθεύεται ο δείκτης ρεολογικής συμπεριφοράς του ρευστού (σχήμα 34). Η σχέση ανάμεσα στο ύψος του ρευστού και τη ροπή παραμένει γραμμική, ανεξαρτήτως τι είδους είναι το ρευστό (σχήμα 35). Πρέπει να διασαφηνιστεί ότι τα απλά εμπορικά ιξωδόμετρα μπορούν να μετρήσουν ροπές μέχρι 2 N\*cm και τα επιστημονικά μέχρι 10 N\*cm [12]. Για αυτό το λόγο το ύψος του εσωτερικού κυλίνδρου στα εμπορικά ιξωδόμετρα δεν ξεπερνάει τα 3.8 cm. Στην εργασία αυτή, το ύψος του ρευστού ξεπερνούσε τα 3.8 cm και κατά συνέπεια οι τιμές των ροπών ξεπερνούσαν τα 10 N\*cm.



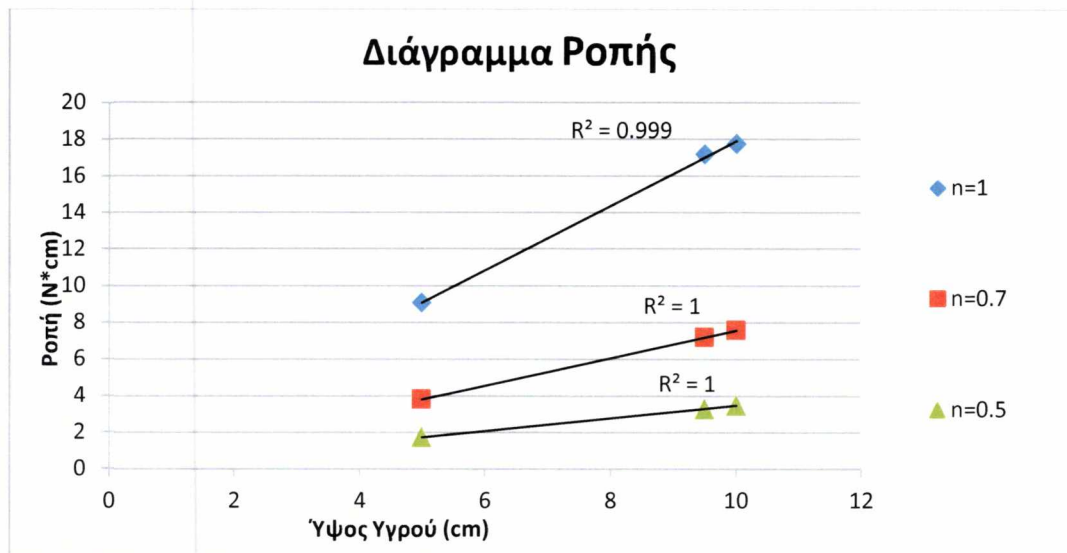
Σχήμα 32: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει γωνιακής ταχύτητας πραγματικού ιξωδομέτρου και σύγκριση αποτελεσμάτων ανάμεσα σε Νευτωνικό (n=1) και μη-Νευτωνικό ρευστό (n=0.7 και n=0.5). Το ιξωδόμετρο περιστρεφόταν σε 6 διαφορετικές ταχύτητες 0.1, 0.5, 1, 5, 10 και 15 rad/s αντίστοιχα. Ο εξωτερικός και εσωτερικός κύλινδρος είχαν σταθερή θερμοκρασία 300K.



Σχήμα 33: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει γωνιακής ταχύτητας πραγματικού ιξωδομέτρου, μη-Νευτωνικού ρευστού με δείκτη ρεολογικής συμπεριφοράς  $n=0.5$  για να είναι πιο ευδιάκριτο το μη γραμμικό προφίλ σε σύγκριση με το σχήμα 32.



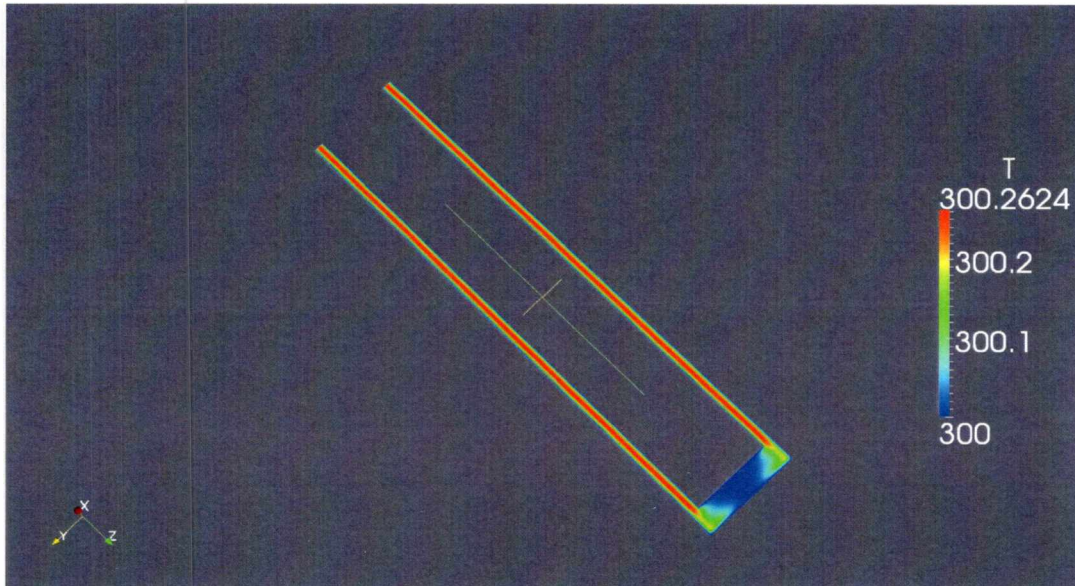
Σχήμα 34: Διάγραμμα λογαριθμικής ροπής συναρτήσει λογαριθμικής γωνιακής ταχύτητας. Το ιξωδόμετρο περιστρεφόταν σε 6 διαφορετικές ταχύτητες 0.1, 0.5, 1, 5, 10 και 15 rad/s αντίστοιχα. Ο εξωτερικός και εσωτερικός κύλινδρος είχαν σταθερή θερμοκρασία 300K.



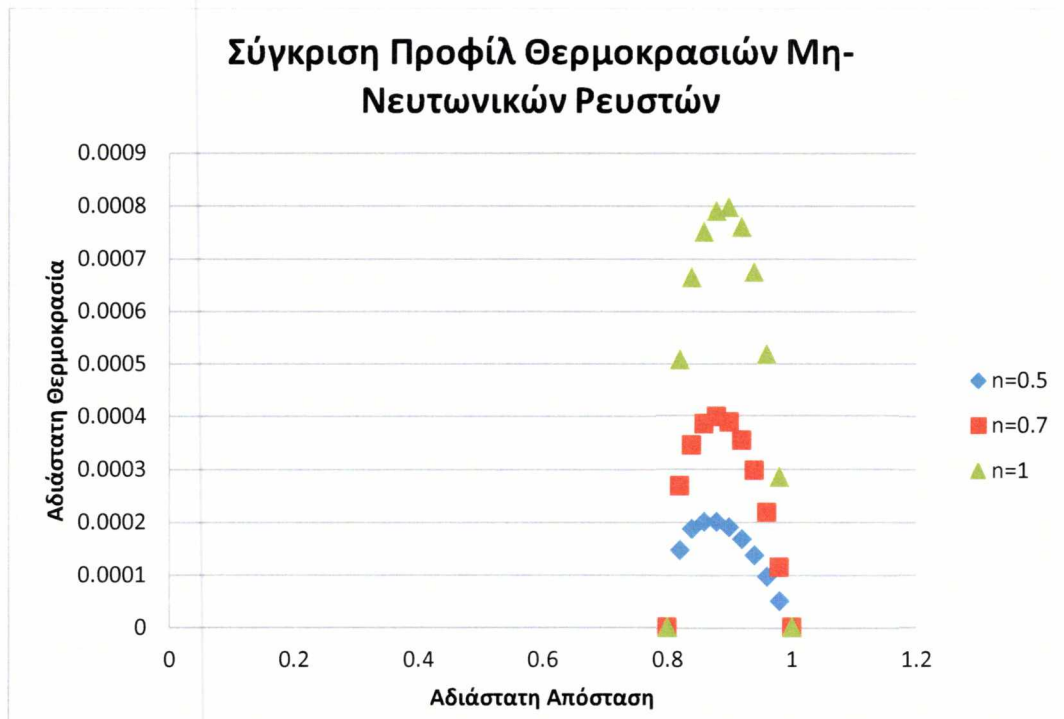
Σχήμα 35: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει ύψος ρευστού πραγματικού ιξωδομέτρου και σύγκριση αποτελεσμάτων ανάμεσα σε νευτώνικό και μη νευτώνικό ρευστό. Οι μετρήσεις έγιναν για 5, 9.5 και 10 cm αντίστοιχα με τον εξωτερικό κύλινδρο να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s και τα τοιχώματα του ιξωδομέτρου να έχουν σταθερή θερμοκρασία 300 K.

Επίσης το μοντέλο αυτό ελέγχθηκε και ως προς τη θερμοκρασία. Παρατηρήθηκε ότι η ιξώδης θερμότητα ήταν πολύ μικρή. Ο αριθμός Brinkman ήταν της τάξης  $10^{-2}$ . Αυτό προκύπτει και από το σχήμα 36 και από το σχήμα 37. Από το σχήμα 37 μπορεί κάποιος να εξάγει περισσότερα συμπεράσματα. Πρώτα η μεγαλύτερη αύξηση θερμοκρασίας παρατηρήθηκε στο μέσο του κυλίνδρου, που ήταν λογικό, γιατί και τα δύο τοιχώματα είχαν την ίδια θερμοκρασία. Το δεύτερο ήταν ότι το Νευτώνικό ρευστό παρουσιάζει μεγαλύτερη αύξηση της θερμοκρασίας, από ότι τα αντίστοιχα μη-Νευτώνικά. Αυτό οφείλεται στο ότι το ιξώδες πέφτει με το ρυθμό διάτμησης όταν το  $n < 1$ .





Σχήμα 36: Τομή Κανονικού Ιξωδομέτρου που περιείχε το ρευστό που έχει προαναφερθεί πιο πάνω με γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s. Τα χρώματα απεικονίζουν διαφορετικές θερμοκρασίες όπως φαίνεται στο δείκτη δεξιά.



Σχήμα 37: Διάγραμμα προφίλ θερμοκρασιών για δείκτη ρεολογικής συμπεριφοράς  $n=1$ ,  $n=0.7$  και  $n=0.5$  και σύγκρισή τους. Το ιξωδόμετρο περιστρέφεται με 5 rads και ο εσωτερικός και εξωτερικός κύλινδρος έχουν σταθερή θερμοκρασία 300 K.

#### 4.8 Χρήση Μοντέλου Μεταβλητού Ιξώδους

Στο τμήμα αυτό έγινε χρήση του μεταβλητού ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$  για

την επαλήθευση υπολογιστικών με πειραματικά δεδομένα.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία της γλυκερίνης [10] και ο κώδικας της mathematica για να βρεθούν οι συντελεστές του πολυωνύμου  $1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2$ .

	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C	80°C
glycerin 100%	612	284	142	81.3	50.6	31.9

Πίνακας 8 : Στοιχεία γλυκερίνης δυναμικού ιξώδες (cp) συναρτήσει της θερμοκρασίας

Με τη χρήση των εξής τύπων  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  και  $\Theta = \frac{T - T_0}{T_0}$  με  $T_0 = 30^\circ \text{C}$  για την αλλαγή

των στοιχείων ως προς τη χρήση του openfoam, ο παραπάνω πίνακας μετατρέπεται στον πίνακα 9.

Πίνακας τιμών Κινηματικού ιξώδους(m <sup>2</sup> /s) vs αδιάστατες Θερμοκρασίες						
	0	0.033	0.066	0.099	0.132	0.165
μ	0.000485	0.000225	0.000113	6.45E-05	4.01E-05	2.53E-05

Πίνακας 9 : Στοιχεία γλυκερίνης κινηματικού ιξώδες (m<sup>2</sup>/s) συναρτήσει της αδιάστατης θερμοκρασίας

Οι τιμές αυτές καταχωρήθηκαν στο mathematica [15] ώστε να βρεθούν οι συντελεστές  $\beta_1, \beta_2$ . Παρατίθεται ο κώδικας της Mathematica :

```
data={{0,0.000485329},{0.033,0.000225218},{0.066,0.000112609},
{0.099,0.0000644726},{0.132,0.0000401268},{0.165,0.000025297}};
```

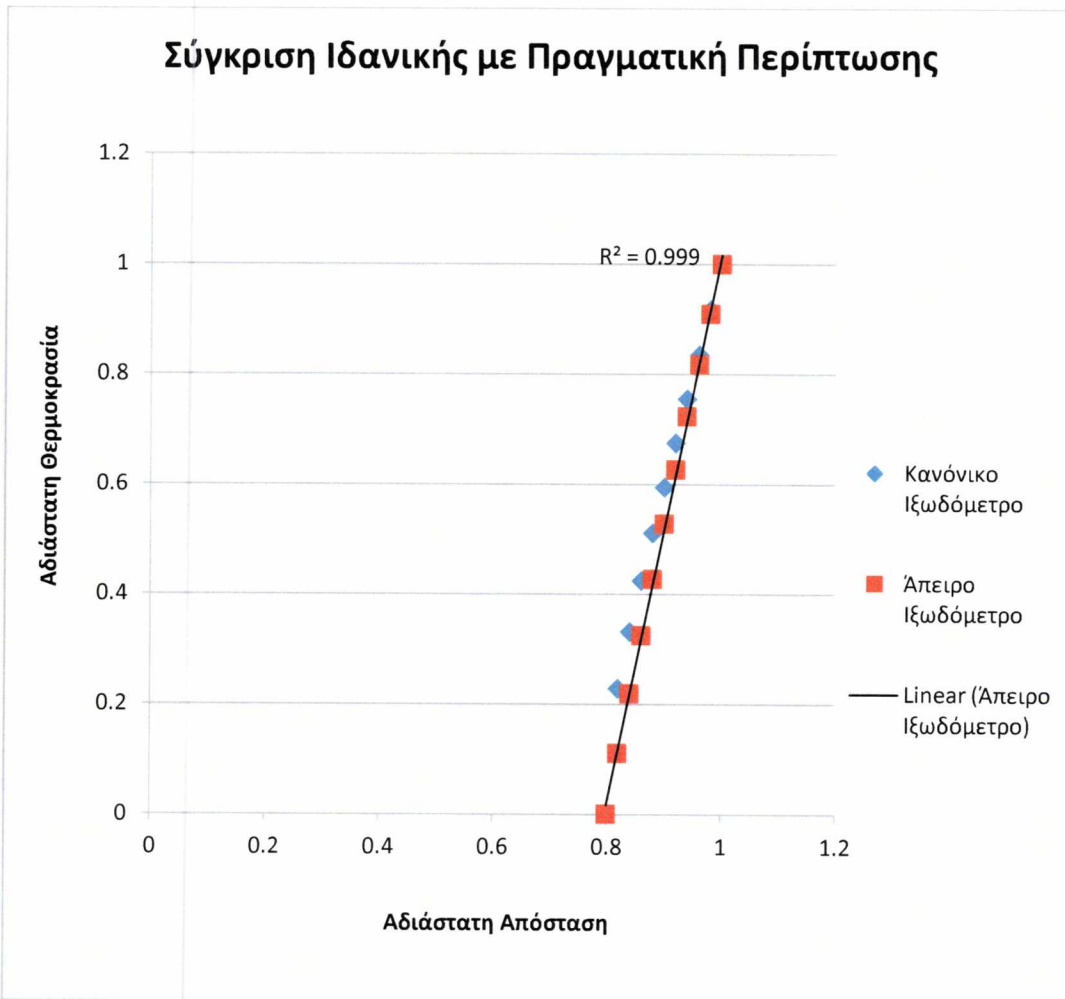
```
model=0.000485329/(1+b1 x+b2*x^2)
```

```
fit=FindFit[data,model,{b1,b2},x]
```

```
{b1→18.7931,b2→486.286}
```

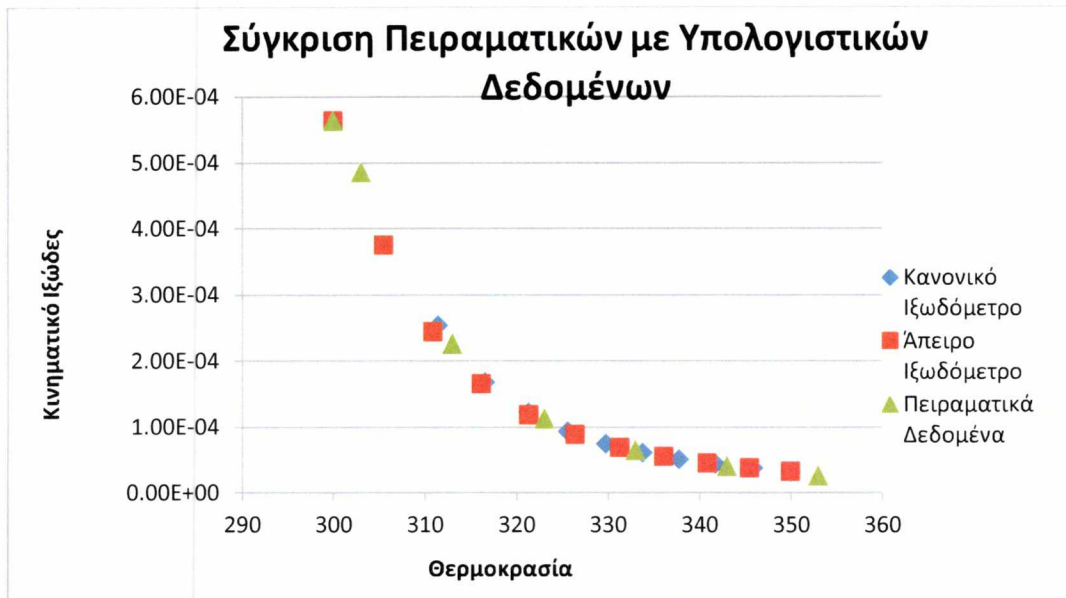
Με βάση αυτό το μοντέλο προέκυψε ότι το κινηματικό ιξώδες στους 270C, δηλαδή στους 300 K, είναι  $\mu=0,000563288 \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

Παρατηρήθηκε ότι ο αριθμός Brinkman της γλυκερίνης είναι σχετικά πολύ μικρός (της τάξεως  $10^{-2}$ ) και δεν υπάρχει ιξώδης θερμότητα. Το προφίλ της θερμοκρασίας είναι τελείως γραμμικό χωρίς καμία κύρτωση που να υποδηλώνει αύξηση της θερμοκρασίας (σχήμα 38). Το ιξώδες μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας και η μεταβολή του είναι πανομοιότυπη με τα πειραματικά στοιχεία του πίνακα 8 (σχήμα 39).



Σχήμα 38: Διάγραμμα προφίλ θερμοκρασιών ανάμεσα σε πραγματική και ιδανική γεωμετρία. Δεν παρατηρείται πουθενά ιξώδης θερμότητα και το προφίλ είναι τελείως γραμμικό. Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε θερμοκρασία 350 K και περιστρεφόταν με γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s, ενώ ο εσωτερικός κύλινδρος είχε θερμοκρασία 300 K και ήταν ακίνητος. Το ιξώδες μεταβαλλόταν σε σχέση με τη θερμοκρασία.





Σχήμα 39: Πρόβλεψη και σύγκριση πειραματικών δεδομένων με υπολογιστικών δεδομένων κινηματικού ιξώδους. Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε θερμοκρασία 350 K και περιστρεφόταν με γωνιακή ταχύτητα 5 rad/s, ενώ ο εσωτερικός κύλινδρος είχε θερμοκρασία 300 K και ήταν ακίνητος.

#### 4.9 Ανάλυση Πραγματικής Γεωμετρίας στο κώδικα με Την Εξίσωση Ενέργειας με τη Χρήση Πολυμερού Τήγματος

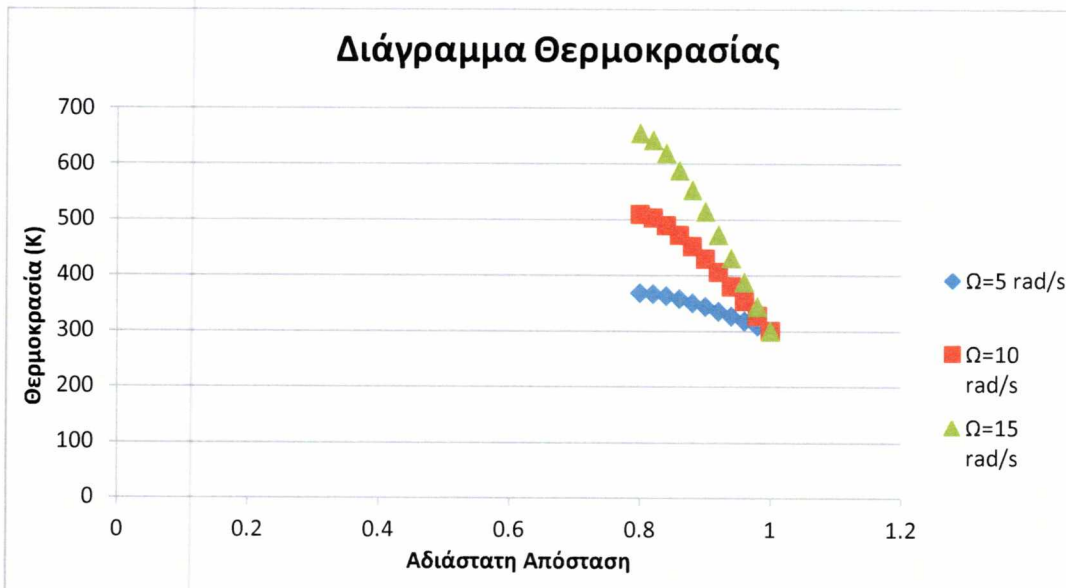
Το συμπέρασμα που προκύπτει από όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι ότι η ιξώδης θερμότητα παρατηρείται πολύ εύκολα σε πολυμερή τήγματα, όπως το Νευτωνικό πολυμερές τήγμα, το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την επαλήθευση των υπολογιστικών με τις αναλυτικές λύσεις.

Το υλικό είχε τα εξής χαρακτηριστικά:

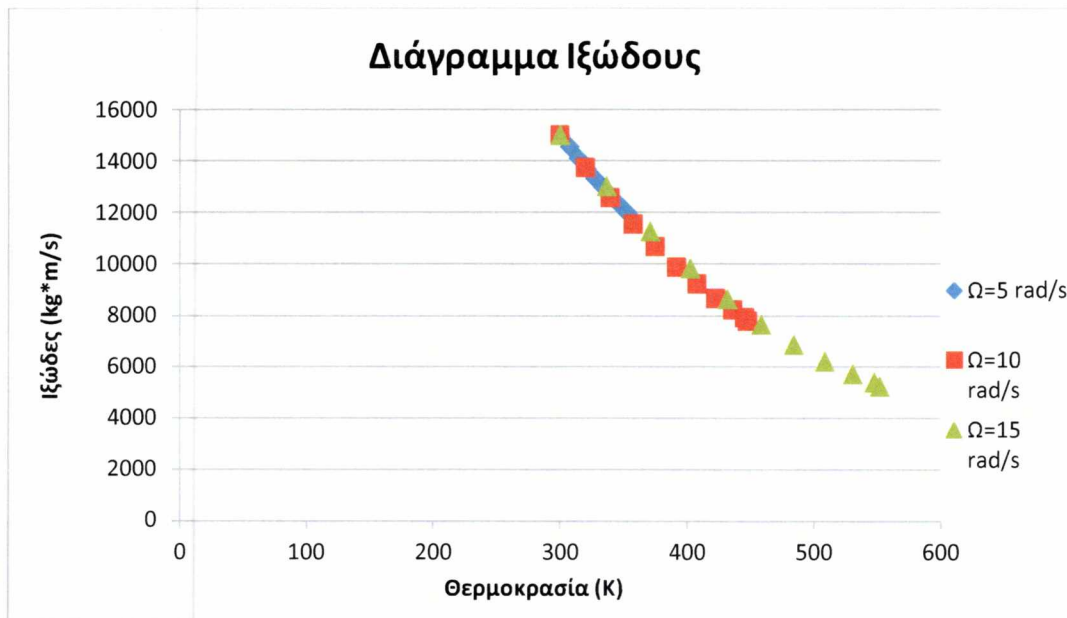
- Πυκνότητα: 1380 kg/m<sup>3</sup>
- Ειδική Θερμότητα: 1530 J/kgK
- Θερμική Αγωγιμότητα: 0.166 W/mK
- Δυναμικό Ιξώδες: 15000 Pa\*s
- Δείκτες Μεταβλητού Ιξώδες:  $\beta_1=1$  και  $\beta_2=0.5$  του πολωνόμου  

$$1 + \beta_1 * \theta + \beta_2 * \theta^2$$

Στο τελευταίο μέρος θα παρουσιαστεί η ιξώδης θερμότητα και η επιρροή της στη ροπή. Το πρώτο πράγμα που παρατηρείται είναι ότι τώρα που ο αριθμός Brinkman είναι στην περιοχή 0.75 έως 6.77 επηρεάζει πολύ τη θερμοκρασία με αποτέλεσμα τον διπλασιασμό της από την αρχική της τιμή, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς από το σχήμα 40 [13]. Άρα σε διεργασίες υψηλού-ιξώδους με εκβολείς πολυμερών τηγμάτων πρέπει να λαμβάνεται σημαντικά υπόψη και η θερμοκρασία και το ιξώδες. Όσο αφορά τη ροπή προκύπτει ότι ισχύει η γραμμικότητα ανάμεσα στο ύψος του υγρού και τη ροπή αλλά όχι ανάμεσα στη ροπή και τη γωνιακή ταχύτητα, όπου παρατηρείται μια κύρτωση στην καμπύλη παρά γραμμικότητα (σχήματα 43 και 42 αντίστοιχα). Άρα όταν υπάρχει ιξώδης θερμότητα η ροπή δεν αυξάνεται γραμμικά με τη γωνιακή ταχύτητα.



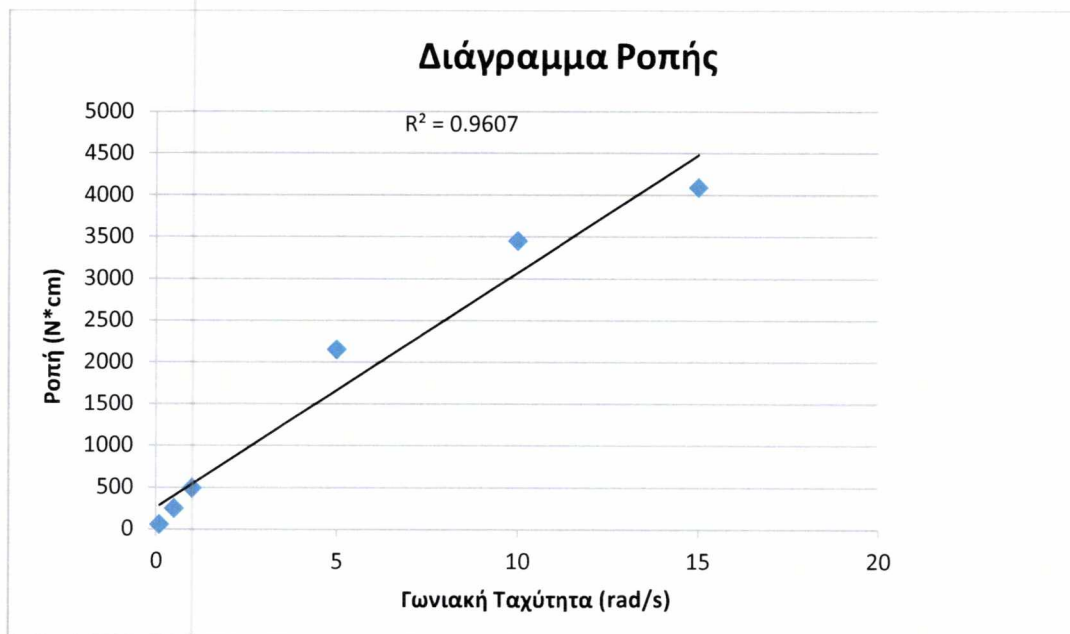
Σχήμα 40: Προφίλ. Θερμοκρασιών σε διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες. Η ιξώδης θερμότητα αρχίζει και γίνεται αισθητή όταν ο  $Br > 2$ . Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε σταθερή θερμοκρασία 300 K και ο εσωτερικός ήταν θερμομονωμένος.



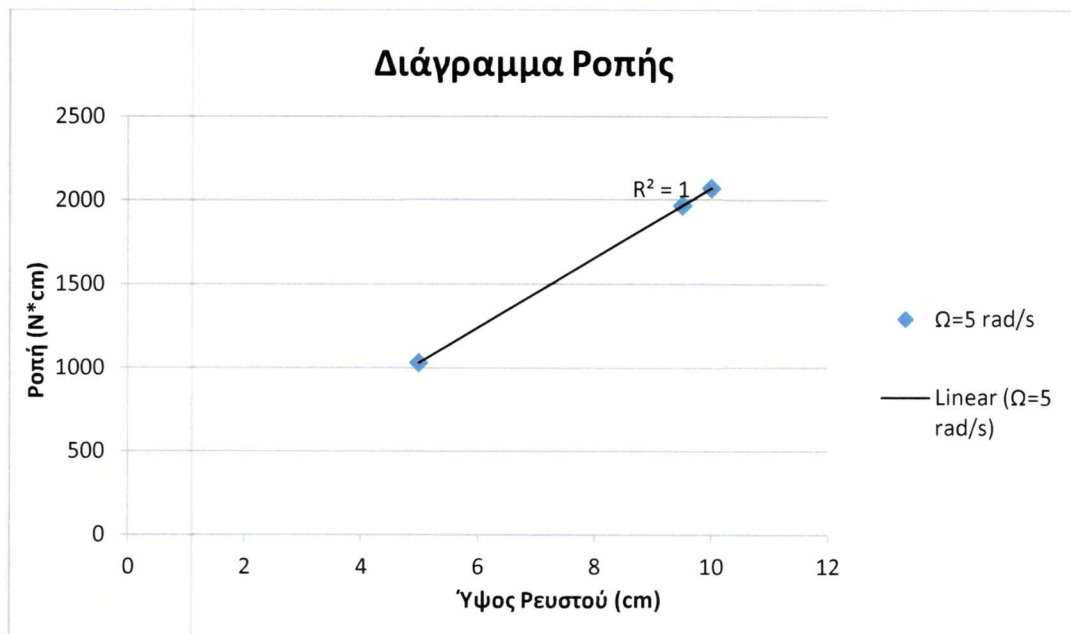
Σχήμα 41: Πρόβλεψη ιξώδους ως συνάρτηση της θερμοκρασίας σύμφωνα με το μοντέλο μεταβλητού

ιξώδους  $\mu = \frac{\mu_o}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$ . Παρατηρείται πτώση του ιξώδους με την αύξηση της θερμοκρασίας.

Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε σταθερή θερμοκρασία 300 K και ο εσωτερικός ήταν θερμομονωμένος.



Σχήμα 42: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει γωνιακής ταχύτητας πραγματικού ιξωδομέτρου. Το ιξωδομέτρο περιστρεφόταν σε 6 διαφορετικές ταχύτητες 0,1, 0,5, 1, 5 ,10 και 15 rad/s αντίστοιχα. Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε σταθερή θερμοκρασία 300 K και ο εσωτερικός ήταν θερμομονωμένος.



Σχήμα 43: Διάγραμμα ροπής συναρτήσει ύψος ρευστού γωνιακής ταχύτητας 5 rad/s πραγματικού ιξωδομέτρου. Ο εξωτερικός κύλινδρος είχε σταθερή θερμοκρασία 300 K και ο εσωτερικός ήταν θερμομονωμένος. Το ρευστό μετρήθηκε σε τρία διαφορετικά ύψη 5, 9.5, 10 cm.

## Κεφάλαιο 5 Επίλογος

Από τα αποτελέσματα μπορεί κάποιος να συγκρατήσει και να δώσει προσοχή στα εξής:

- Υπήρχε πλήρης ταύτιση των υπολογιστικών λύσεων με τις αναλυτικές λύσεις.

- Τα υπολογιστικά μοντέλα και ιδιαίτερα του ιξώδους της μορφής

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \beta_1 * \Theta + \beta_2 * \Theta^2}$$
 προσομοιάζουν σε μεγάλο βαθμό την πραγματικότητα.

- Πρέπει να τονιστεί ότι σε πραγματικές διεργασίες το ιξώδες μεταβάλλεται με τη θερμοκρασία. Όσο μεγαλύτερη η θερμοκρασία τόσο μικρότερο το ιξώδες από την αρχική του τιμή. Άρα είναι λάθος κανείς να θεωρήσει για περιπτώσεις όπου έχουμε διαφορετικές θερμοκρασίες στα τοιχώματα ότι το ιξώδες είναι σταθερό.

- Ιξώδης θερμότητα αναπτύσσεται μόνο όταν ο αριθμός Brinkman είναι κοντά ή μεγαλύτερος από τη μονάδα. Οι περιπτώσεις όπου πρέπει να ληφθεί υπόψη αυτού του είδους η θερμότητα είναι σε διεργασίες με πολυμερή τήγματα.

- Η μέγιστη θερμοκρασία που μπορεί να αναπτυχθεί στο θερμομονωμένο εσωτερικό κύλινδρο επηρεάζεται από το διάκενο των κυλίνδρων. Όσο πιο μικρό τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αύξηση της θερμοκρασίας.

- Σε όλες τις περιπτώσεις η ροπή είναι ανάλογη του ύψους του ρευστού που βρίσκεται μέσα στο ιξωδόμετρο.

- Η ροπή στα Νευτωνικά ρευστά είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας ενώ στα μη-Νευτωνικά ρευστά εξαρτάται από τη ρεολογική συμπεριφορά του ρευστού.

- Το ιδανικό ιξωδόμετρο με το πραγματικό ιξωδόμετρο έχουν μια σημαντική απόκλιση στα αποτελέσματα. Για αυτό πρέπει στην πραγματική γεωμετρία να μετρηθεί το ίδιο ρευστό σε διαφορετικά ύψη για να βρεθεί ένας συντελεστής διόρθωσης.

- Το ύψος του πάτου στις πραγματικές γεωμετρίες παίζει σημαντικό ρόλο. Ο πολύ μικρός πάτος μπορεί να αναπτύξει μεγάλες ροπές λόγω των τριβών. Το

ιδανικό θα ήταν να μην υπήρχε καθόλου πάτος αλλά αυτό δεν μπορεί να γίνει. Μια λύση είναι το λεγόμενο ιξωδόμετρο mooney-couette, που έχει κωνικό εσωτερικό πάτο.

## Κεφάλαιο 6 Βελτιώσεις και Προσθήκες

Θα μπορούσαν να γίνουν στο μέλλον οι εξής προσθήκες ή αλλαγές:

- Να γίνει ένωση ανάμεσα στο power law μοντέλο και το πολυώνυμο της θερμοκρασίας για να βρίσκεται πώς μεταβάλλεται το ιξώδες μέσω της θερμοκρασίας και του δείκτη ρεολογικής συμπεριφοράς σε ένα μη-Νευτωνικό ρευστό.
- Να γίνει προσομοίωση του ιξωδομέτρου mooney couette για να αναλυθεί πόσο βελτιώνεται η απόκλιση από την ιδανική γεωμετρία.
- Να παραληφθεί ο κώδικας της πίεσης γιατί στο πρόβλημα μας ορίζεται ότι παντού η πίεση είναι σταθερή.
- Να γίνει καλύτερη μελέτη στους solvers της θερμοκρασίας, πίεσης και ταχύτητας και στα υπολογιστικά σχήματα όπου προκύπτουν οι αριθμητικές τιμές.

## Παράρτημα Α

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 * \tau_{r\theta})}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \left( r^2 * \mu * r * \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right)}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \quad (A1)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 * \tau_{r\theta})}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left[ 3r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + r^3 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \right] \quad (A2)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 * \tau_{r\theta})}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left[ -\frac{3r^2}{r^2} u_\theta + 3r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + r^3 \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right) \right] \quad (A3)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 * \tau_{r\theta})}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} \left[ -\frac{3r^2}{r^2} u_\theta + 3r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + 2u_\theta - r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - r \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right] \quad (A4)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 * \tau_{r\theta})}{\partial r} = \frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = 0 \quad (A5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * u_\theta) \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r * u_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r * u_\theta) \quad (A6)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * u_\theta) \right) = -\frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( u_\theta + r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \right) \quad (A7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * u_\theta) \right) = -\frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \quad (A8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * u_\theta) \right) = -\left( \frac{1}{r^2} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (A9)$$

Άρα η εξίσωση A5 ισούται με την εξίσωση A9.

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 * \tau_{r\theta})}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r * u_\theta) \right) \quad (A10)$$



## Παράρτημα Β

Η ιξώδης θερμότητα ισούται με την εξίσωση B1.

$$\Phi = \mu * \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (B1)$$

Η διατμητική τάση ισούται με την εξίσωση B2 και με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς προκύπτει ότι τα 2 μέρη  $\frac{1}{2} \mu \dot{\gamma} : \dot{\gamma}$  και  $\mu * \Phi$  είναι ακριβώς το ίδιο.

$$\dot{\gamma} = \nabla u + \nabla u^T \quad (B2)$$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (B3)$$

$$\nabla u^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (B4)$$

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 * \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} & 2 * \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} & 2 * \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (B5)$$

$$\frac{\mu}{2} \dot{\gamma} : \dot{\gamma} = \frac{\mu}{2} * \left\{ 4 * \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + 4 * \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + 4 * \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} = \mu * \Phi \quad (B6)$$

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. T. D. Papathanasiou, K. A. Caridis and B. Bijeljic, Thermomechanical Coupling in Frictionally Heated Circular Couette Flow, *International Journal of Thermophysics*, Vol 18, No3, 1997
2. R. B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley and Sons.Inc, New York, 2002
3. J. F. Steffe, *Rheological Methods in Food Processing Engineering*, 2<sup>nd</sup> edition, Michigan State University, USA ,1996
4. Κ. Παναγιώτου, *Επιστήμη και Τεχνολογία Πολυμερών*, 2<sup>η</sup> έκδοση, Εκδόσεις Πήγασος, Θεσσαλονίκη , 2000
5. R. Darby, *Chemical Engineering Fluid Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Marcel Dekker.Inc, New York, 2001
6. Openfoam User Guide, Openfoam Foundation, Version 2.1.2 , 2012
7. Openfoam Programmer's Guide, Openfoam Foundation, Version 2.1.2 , 2012
8. H. H. Winter, Viscous Dissipation Term in Energy Equations, University of Massachusetts, 1987
9. M. Chatzimina, G. Georgiou and A. Alexandrou, Wall Shear Rates in Circular Couette Flow of a Herschel-Bulkley Fluid, *Applied Rheology*, Vol. 19, Issue 3, 2009
10. J. B. Segur and H. E. Oberstar, Viscosity of Glycerol and Its Aqueous Solutions, *Industrial and Engineering Chemistry* ,1951
11. Model 35 Viscometer Instruction Manual, Fann Instrument Company, USA, 2012
12. Thermo Scientific Viscometers, Thermo Fisher Scientific
13. C. Rauwendaal, *Polymer Extrusion*, 4<sup>th</sup> edition, Hanser Gardner Publications. Inc, USA , 2001
14. A. F. Bower, *Applied Mechanics of Solids*, 1<sup>st</sup> edition, CRC Press, New York, 2010
15. Κ. Παπαδάκης, *Εισαγωγή στο Mathematica*, 2<sup>η</sup> έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2003



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000049190