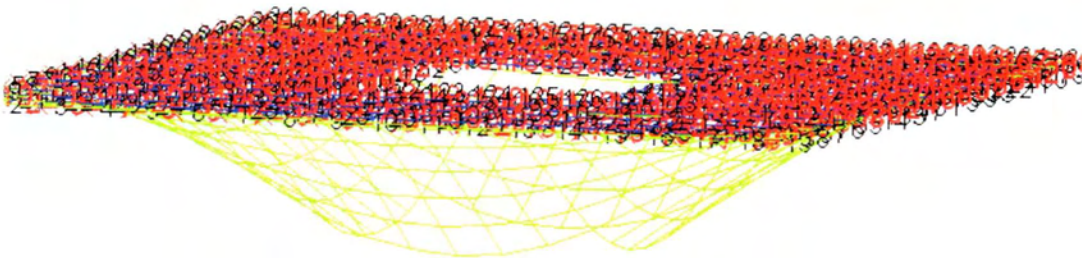




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

# ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ



ΕΚΠΟΝΗΤΗΣ

ΜΟΥΣΑΦΕΙΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΦΡΑΓΚΙΑΔΑΚΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

ΒΟΛΟΣ 2011



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 9975/1  
Ημερ. Εισ.: 26-10-2011  
Δωρεά: Συγγραφέας  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΠΜ  
2011  
ΜΟΥ

## ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Κύριος στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο προγραμματισμός στο MATLAB ενός κώδικα, που ονομάσαμε A.S.D.A.P (Advanced Static Dynamic Analysis Program), πεπερασμένων στοιχείων που επιλύει προβλήματα πλακών, σε διάφορες καταστάσεις φόρτισης και στήριξης. Αρχικά, μελετήθηκε η θεωρία των πλακών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Έπειτα αξιοποιήθηκαν οι δυνατότητες που παρέχει στον χρήστη το MATLAB και προγραμματίστηκε ο κώδικας των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση πλακών. Για την αξιοπιστία του κώδικα A.S.D.A.P επιλύθηκαν χαρακτηριστικές εφαρμογές πλακών και τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με αυτά που πήραμε από ένα ήδη υπάρχων πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων που επιλύει και προβλήματα πλακών το SAP2000. Καθώς επίσης και από τα αποτελέσματα εφαρμογών σε βιβλία αναφερόμενα στην επίλυση πλακών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	i
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	ii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
1.1 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ- ΠΛΑΚΕΣ	5
1.2 ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ	6
1.3 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	8
1.4 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ	9
1.4.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ	9
1.4.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΝΤΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ	10
1.4.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΡΟΠΩΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΩΝ	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	14
2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	14
2.1.1 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΠΛΑΚΑΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ	17
2.1.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ	20
2.1.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ	21
2.1.4 ΜΗΤΡΩΟ ΤΑΣΕΩΝ	21
2.1.5 ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ	22
2.1.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ	22
2.2 ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ	24
2.2.1 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ.	24

2.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ	26
2.2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ	29
2.2.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Ο ΚΩΔΙΚΑΣ A.S.D.A.P	32
3.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ	32
3.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ A.S.D.A.P	35
4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ	35
4.2 ΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΑ ΤΡΥΠΑ ΣΤΗΝ ΜΕΣΗ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ	43
4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ	50
4.3.1 ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΣΤΙΣ 4 ΠΛΕΥΡΕΣ	50
4.3.2 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΗΣ	59
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	70
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι - ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΤΗ	71
Π.1 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΑΡΧΕΙΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	71
Π.1.2 ΕΝΤΟΛΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ	72
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ - ΑΡΧΕΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (Input Files)	78
1) ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ	78
2) ΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΑ ΤΡΥΠΑ ΣΤΗΝ ΜΕΣΗ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ	79

3) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΣΤΙΣ 4 ΠΛΕΥΡΕΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ  
ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ 80

4) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΣΤΙΣ 4 ΠΛΕΥΡΕΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ  
ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ 81

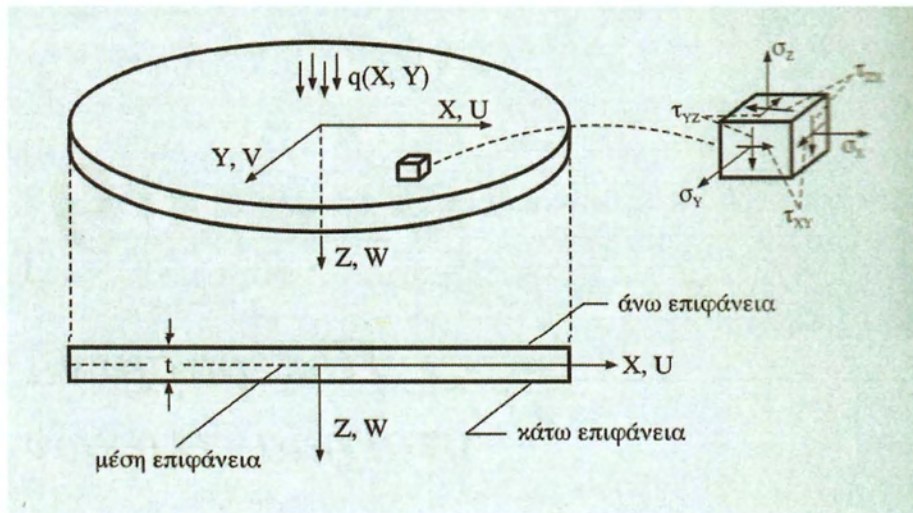
5) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ  
ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ. 82

6) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ  
ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ  
ΠΛΑΚΑΣ. 83

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΟΙ ΦΟΡΕΙΣ- ΠΛΑΚΕΣ

Πλάκα θεωρείται ο ολόσωμος φορέας ο οποίος εκτείνεται σε δύο διαστάσεις  $X$  και  $Y$ , ενώ η τρίτη διάσταση ως προς τον άξονα  $Z$  είναι μικρή συγκριτικά με τις άλλες δύο και τα φορτία που ασκούνται είναι παράλληλα προς τον άξονα  $Z$ . Η πλάκα περιέχεται μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων, της άνω και κάτω επιφάνειας, και η απόσταση των δύο επιφανειών ορίζει το πάχος  $t$  στο Σχήμα 1-1 παριστάνεται μια πλάκα στην οποία η μέση επιφάνεια ταυτίζεται με το επίπεδο  $XY$



Σχήμα 1-1: Πλάκα τυχαίου σχήματος με το στοιχειώδες στερεό των τάσεων

Η γεωμετρία του φορέα-πλάκα συμπίπτει με τη γεωμετρία του φορέα στον οποίο επικρατούν συνθήκες επίπεδης έντασης. Η διαφορά έγκειται στο είδος της φόρτισης η οποία καταπονεί τους δύο φορείς. Στην πρώτη περίπτωση τα φορτία ασκούνται κάθετα προς τη μέση επιφάνεια του φορέα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα φορτία ασκούνται επί του επιπέδου. Από αυτήν την άποψη οι ομοιότητες και διαφορές μεταξύ του επίπεδου πλαισίου και της εσχάρας μπορούν να παραλληλιστούν με τους φορείς επίπεδης έντασης και πλάκας αντίστοιχα. Τα φορτία στην πλάκα προκαλούν κάμψη της πλάκας η οποία προκαλεί βύθιση κατά τον άξονα  $Z$ .

Οι πλάκες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

**Χονδρές πλάκες** (thick plate) όπου κατά την καταπόνηση τους σε τριαξονική ένταση μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων και των τριών διαστάσεων της ελαστικής θεωρίας. Η κατηγορία αυτή αναφέρεται σε πλάκες όπου ο λόγος του πάχους  $t$  της πλάκας με την μικρότερη από τις δυο διαστάσεις της δεν ξεπερνά την τιμή  $1/10$ .

**Λεπτές πλάκες** (thin plate) με μικρές αποκλίσεις κατά την παραμόρφωση λόγω των εγκάρσιων φορτίων. Η κατηγορία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από πλάκες στις οποίες η σχέση πάχους με την μικρότερη διάσταση της πλάκας δεν υπερβαίνει το 1/10 και οι μέγιστες βυθίσεις ( $w$ ) κυμαίνονται από  $h/10$  έως  $h/5$ .

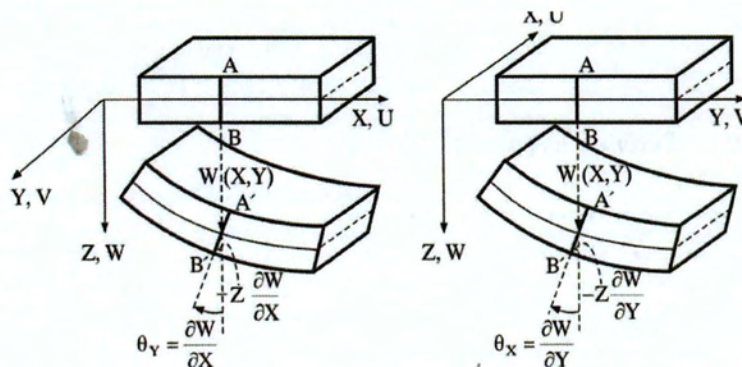
**Λεπτές πλάκες** (thin plate) που χαρακτηρίζονται από μεγάλες παραμορφώσεις λόγω του ότι οι καμπτικές εντάσεις συνοδεύονται με σχετικά μεγάλες εφελκυστικές ή θλιπτικές εντάσεις στη μέση επιφάνεια της πλάκας επηρεάζοντας σημαντικά και τις ροπές κάμψης που αναπτύσσονται στην πλάκα.

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις της πλάκας προκύπτουν από τις εξισώσεις της τρισδιάστατης ελαστικότητας με τη θεώρηση ορισμένων παραδοχών. Οι παραδοχές αυτές απλοποιούν σημαντικά το πρόβλημα της ανάλυσης των πλακών, αλλά την ίδια στιγμή οδηγούν και σε προσεγγίσεις που προκαλούν και ορισμένα παράδοξα φαινόμενα. Από την άποψη αυτήν η θεωρία των πλακών δεν είναι ακριβής όπως είναι η θεωρία ελαστικότητας. Παρ όλα αυτά όμως για μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων η θεώρηση αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.

## 1.2 ΘΕΩΡΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΛΕΠΤΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Η κλασική θεωρία πλακών που ονομάζεται και θεωρία Kirchhoff, είναι αντίστοιχη της θεωρίας Euler-Bernoulli των δοκών, αποτελεί την πλέον αποδεκτή θεωρία των λεπτών πλακών (thin plates) και βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές.

- Το πάχος της πλάκας είναι μικρό σε σύγκριση με τις διαστάσεις της επιφάνειας της.
- Η βύθιση  $w$  της πλάκας είναι μικρή σε σύγκριση με το πάχος της  $t$ , ενώ οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι μικρές συγκριτικά με τη μονάδα.
- Επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση και κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια.
- Στη μέση επιφάνεια της πλάκας ( $Z=0$ ) οι τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  είναι μηδενικές.



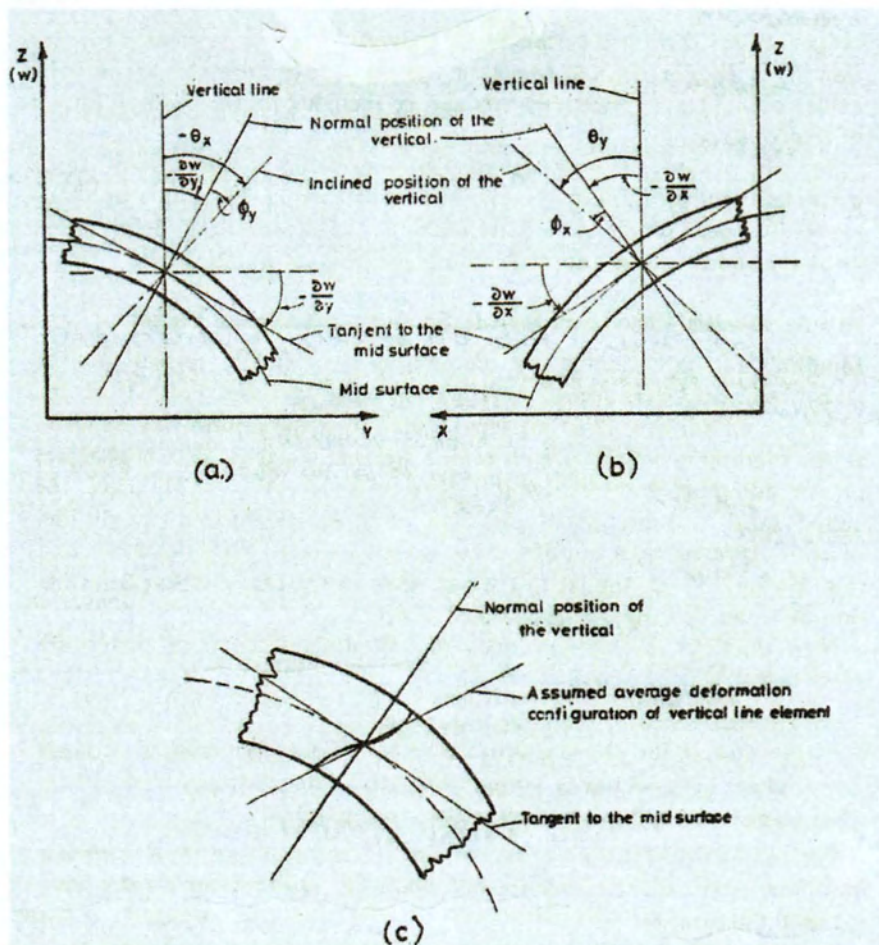
**Σχήμα 1-2:** Κάμψη της πλάκας κατά την κλασική θεωρία Kirchhoff



Επίσης η διατμητική παραμόρφωση των πλακών μπορεί να περιγραφεί και από τη θεωρία Mindlin. Η προσέγγιση που κάνει η θεωρία του Mindlin είναι ότι οι επίπεδες επιφάνειες που είναι αρχικά κάθετες προς την μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση, παραμένουν επίπεδες αλλά όχι κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της πλάκας. Οι τρεις παραδοχές που γίνονται στην θεωρία του Mindlin είναι:

- Οι παραμορφώσεις της πλάκας  $w$  είναι πολύ μικρές.
- Οι επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση αλλά όχι απαραίτητα κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια.
- Στη μέση επιφάνεια της πλάκας οι τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  είναι μηδενικές.

Η δεύτερη παραδοχή γίνεται έτσι ώστε να ληφθεί υπ' όψιν η διατμητική παραμόρφωση. Είναι η μοναδική παραδοχή που διαφέρει από αυτές του που γίνονται στην θεωρία του Kirchhoff.



Σχήμα 1-3: Στροφή των αξόνων  $x$  και  $y$  λόγω διατμητικής παραμόρφωσης.

### 1.3 ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Η παραμόρφωση μιας πλάκας στα επίπεδα XY και YZ σύμφωνα με την κλασική θεωρία φαίνεται στο Σχήμα 1-2. Η πρώτη παραδοχή της κλασικής θεωρίας (θεωρία Kirchhoff), ότι το πάχος της πλάκας είναι μικρό σε σύγκριση με τις άλλες δυο διαστάσεις της, μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι οι κατακόρυφες βυθίσεις των σημείων μιας ευθείας κάθετης στη μέση επιφάνεια είναι ίσες μεταξύ τους

$$W(X,Y,Z) = W(X,Y) \quad (1.1)$$

Όπου  $W(X,Y)$  είναι η βύθιση της μέσης επιφάνειας της πλάκας στο σημείο με συντεταγμένες X, Y. Η δεύτερη παραδοχή, το ότι οι βυθίσεις της πλάκας είναι μικρότερες σε σχέση με το πάχος της και οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι αρκετά μικρότερες της μονάδας, μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις εξισώσεις της πλάκας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία. Από το Σχήμα 1-2 προκύπτει ότι οι μετατοπίσεις ενός επιπέδου της πλάκας κάθετου στον άξονα X δίνονται από την σχέση:

$$U(X,Y,Z) = -Z \frac{\partial W}{\partial X}(X,Y) \quad (1.2)$$

και αντίστοιχα ενός επιπέδου κάθετου στον άξονα Y από τη σχέση:

$$V(X,Y,Z) = -Z \frac{\partial W}{\partial Y}(X,Y) \quad (1.3)$$

Οι εξισώσεις των τριών παραπάνω σχέσεων συνιστούν τις τρεις εξισώσεις του πεδίου των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της πλάκας με βύθιση  $W(X,Y)$ .

Οι σχέσεις των ανηγμένων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων της τρισδιάστατης ελαστικότητας διατυπώνονται τώρα συναρτήσει της βύθισης W της πλάκας ως εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial X} = -Z \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = -2Z \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial Y} = -Z \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 & \gamma_{zx} &= \frac{\partial U}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Οι τρεις μη μηδενικές ανηγμένες παραμορφώσεις συμπίπτουν με τις ανηγμένες παραμορφώσεις που υπάρχουν και στην επίπεδη ελαστικότητα σε συνθήκες επίπεδης έντασης.

## 1.4 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

### 1.4.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Το μητρώο ελαστικότητας  $E$  της πλάκας προκύπτει από τις σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων της τρισδιάστατης ελαστικότητας με την αντικατάσταση  $\epsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$  και λύνοντας ως προς  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

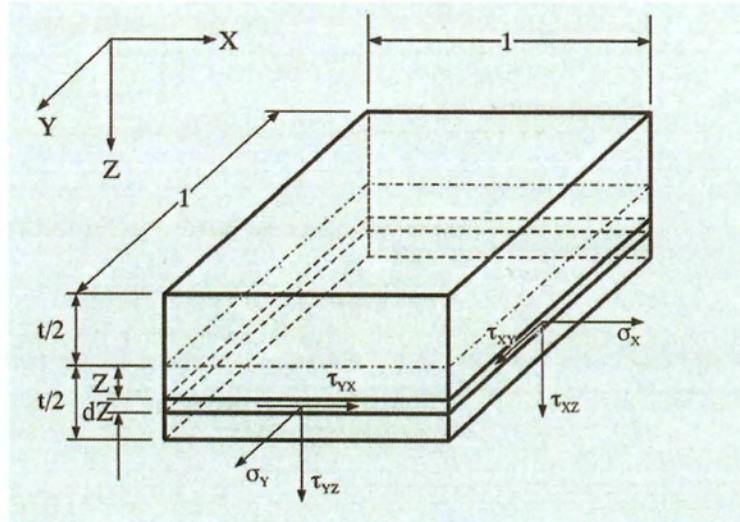
το οποίο συμπίπτει με εκείνο της επίπεδης έντασης. Αυτό σημαίνει ότι οι λεπτές στρώσεις της πλάκας πάχους  $dZ$  βρίσκονται σε συνθήκες επίπεδης έντασης.

Από τη σχέση (1.5) προκύπτουν οι τάσεις συναρτήσει της βύθισης  $W$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} Z \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} Z \left( \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} Z \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Γενικότερα στη θεωρία των πλακών προκύπτουν ορισμένα παράδοξα όπως είναι το γεγονός ότι παρά τον μηδενισμό της  $\epsilon_z$ , λόγω της πρώτης παραδοχής της κλασικής θεωρίας των πλακών, η αντίστοιχη τάση  $\sigma_z$  είναι μη μηδενική αν και κατά πολύ μικρότερη των  $\sigma_x, \sigma_y$ . Παρατηρούμε επίσης ότι οι διατμητικές ανηγμένες παραμορφώσεις  $\gamma_{yz}$  και  $\gamma_{zx}$  μηδενίζονται λόγω της παραδοχής της καθετότητα των διατομών στη μέση παραμορφωμένη επιφάνεια της πλάκας. Κατά συνέπεια  $\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0$  και  $\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 0$ . Αυτός ο μηδενισμός των διατμητικών τάσεων δημιουργεί το παράδοξο της κλασικής θεωρίας πλακών. Ενώ σύμφωνα με τις κινηματικές σχέσεις οι τάσεις είναι μηδενικές, εν τούτοις είναι απαραίτητες για την ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας της πλάκας προκειμένου να ισορροπήσουν με τα κατακόρυφα εξωτερικά φορτία.

### 1.4.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΕΝΤΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

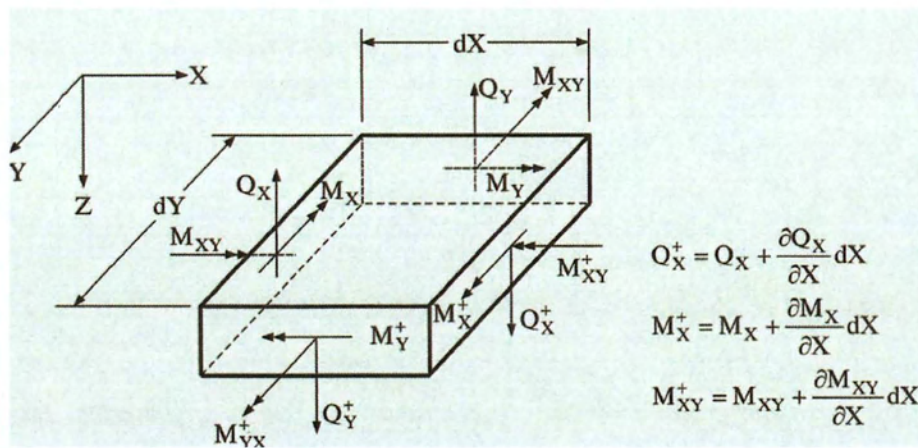


Σχήμα 1-4: Τάσεις που ασκούνται σε ένα λεπτό στρώμα πλάκας

Από το σχήμα προκύπτουν τα εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους της πλάκας.

$$\begin{aligned}
 M_X &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_X Z dZ \\
 M_Y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_Y Z dZ \\
 M_{XY} &= M_{YX} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{XY} Z dZ \\
 Q_X &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{ZX} dZ \\
 Q_Y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{YZ} dZ
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Οι ροπές  $M_{XY}$ ,  $M_{YX}$  ονομάζονται ροπές συστροφής ενώ οι τέμνουσες δυνάμεις  $Q_X$ ,  $Q_Y$  δεν μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις αυτές λόγω της παραδοχής ότι  $\tau_{ZX} = \tau_{YZ} = 0$ . Οι δυνάμεις  $Q_X$ ,  $Q_Y$  υπολογίζονται από την ισορροπία των εντατικών μεγεθών. Στο Σχήμα 1-5 έχουν σχεδιαστεί τα εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους της πλάκας. Παρατηρούμε ότι οι ροπές στη θεωρία πλακών συμβολίζονται ανορθόδοξα. Οι ροπές  $M_X$ ,  $M_Y$  ασκούνται στα επίπεδα  $YZ$   $XZ$  ενώ τα διανύσματα τους συμπίπτουν με τους άξονες  $Y$  και  $X$ , αντίστοιχα, και η θετική φορά της  $M_Y$  είναι αντίθετη προς τη θετική φορά του άξονα  $X$ .



**Σχήμα1-5:** Εντατικά μεγέθη σε στοιχειώδες τμήμα της πλάκας.

Οι διατμητικές δυνάμεις προκύπτουν από την ισορροπία ροπών του στερεού του σχήματος Σχήμα1-5.

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial X} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} \\ Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial M_y}{\partial Y} \end{aligned} \quad (1.8)$$

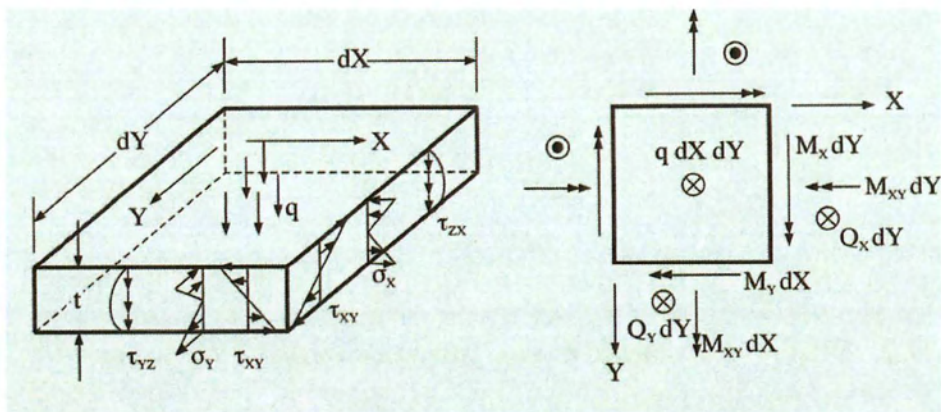
Ο συνδυασμός των σχέσεων (1-6) και (1-7) δίνει τις ροπές συναρτήσει της βύθισης  $W$

$$\begin{aligned} M_x &= -D_\kappa \left( \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\ M_y &= -D_\kappa \left( \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \\ M_{xy} &= -D_\kappa (1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \end{aligned} \quad (1.9)$$

όπου η ποσότητα  $D_\kappa$  ονομάζεται καμπτική στιβαρότητα της πλάκας και είναι αντίστοιχη με την καμπτική στιβαρότητα της  $EI$  της δοκού και ισούται με

$$D_\kappa = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} Z^2 dZ = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.10)$$

Κάνοντας ισορροπία δυνάμεων του στοιχειώδους τμήματος της πλάκας Σχήμα1-6



**Σχήμα 1-6:** Στοιχειώδες στερεό με την κατανομή των τάσεων κατά το πάχος της πλάκας.

Προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial X \partial Y} = -q(X, Y) \quad (1.11)$$

και με αντικατάσταση των σχέσεων (1.9) στη σχέση (1.11) παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση της πλάκας.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = -\frac{q(X, Y)}{D_k} \quad (1.12)$$

Η οποία δεν είναι απαραίτητο να διατυπωθεί για την ανάλυση της πλάκας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αξίζει να επισημανθεί ότι η διαφορική εξίσωση της πλάκας είναι τετάρτου βαθμού ως προς τις μετατοπίσεις, ενώ οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις της δισδιάστατης ή τρισδιάστατης ελαστικότητας είναι δευτέρου βαθμού. Αυτό οφείλεται στις παραδοχές που έχουμε εισάγει για τη μετατροπή ενός προβλήματος τρισδιάστατης ελαστικότητας στην ειδική περίπτωση της δισδιάστατης ελαστικότητας της πλάκας.

### 1.4.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΡΟΠΩΝ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΩΝ

Η σχέση εντατικών μεγεθών-καμπυλοτήτων προκύπτει από τη σχέση (1.9) εάν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 k_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

όπου  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$  είναι συνιστώσες της καμπυλότητας της πλάκας. Έτσι προκύπτει η σχέση:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D_\kappa \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}
 \tag{1.14}$$

$$\{M\} = [E_\kappa] \{\kappa\}
 \tag{1.15}$$

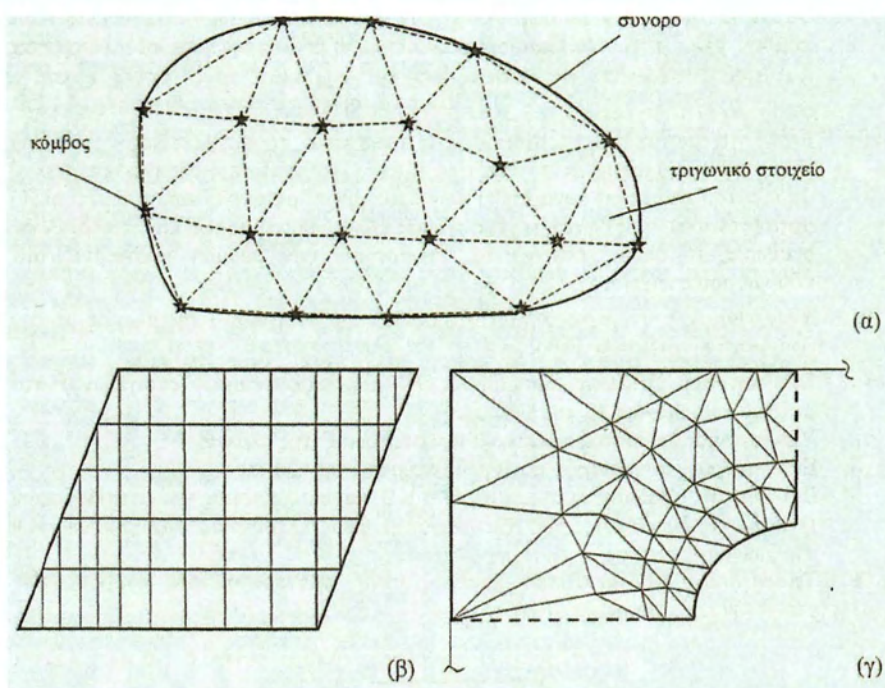
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

### 2.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι σήμερα η πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενη αριθμητική μέθοδος. Σύμφωνα με αυτή, το σώμα που αναλύεται χωρίζεται σε στοιχεία πεπερασμένων διαστάσεων (finite elements). Κάθε ένα από αυτά εκφράζει κατά προσέγγιση τη συμπεριφορά μίας μικρής περιοχής του σώματος την οποία και αναπαριστάει, ενώ επιβάλλονται συνθήκες συνέχειας μεταξύ των στοιχείων αυτών. Ένα από τα αδύνατα σημεία της μεθόδου είναι η διακεκριμένοποίηση σε στοιχεία ολοκλήρου του εξεταζόμενου σώματος, γεγονός που αναπόφευκτα οδηγεί σε πολύ μεγάλο αριθμό πεπερασμένων στοιχείων, ιδιαίτερα σε τρισδιάστατα προβλήματα με διεπιφάνειες, όπου γνωστές ή άγνωστες συναρτήσεις του προβλήματος μεταβάλλονται ασυνεχώς.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων στους επιφανειακούς φορείς μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της μεθόδου άμεσης δυσκαμψίας των ραβδωτών φορέων. Έτσι τα βήματα που ακολουθούνται για την επίλυση ενός επιφανειακού φορέα (πλάκα) είναι τα ίδια με αυτά των ραβδωτών φορέων.

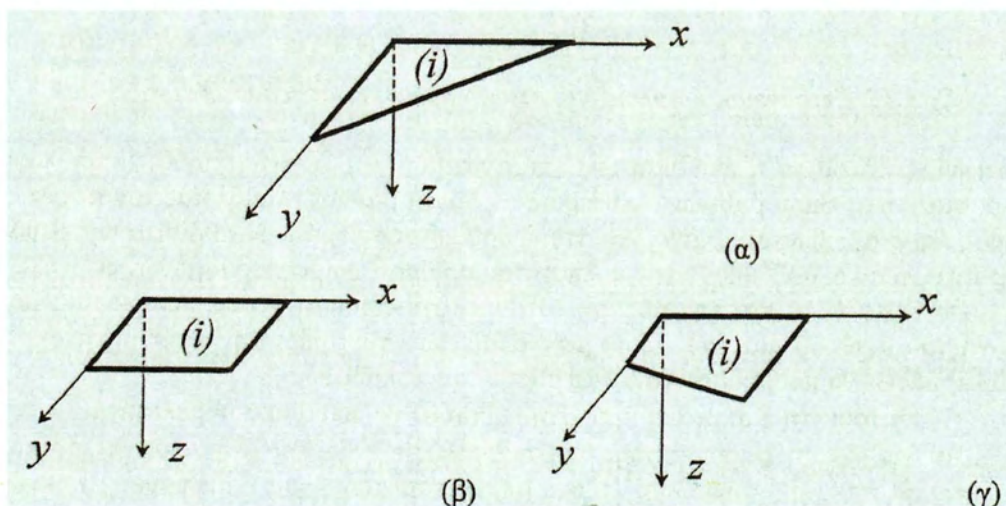
Στους επιφανειακούς φορείς η διακριτοποίηση γίνεται με ευθείες ή καμπύλες, οι οποίες διαχωρίζουν το φορέα σε πεπερασμένα στοιχεία τριγωνικά, ορθογωνικά, τετραπλευρικά, σε συνδυασμό των μορφών αυτών ή και σε στοιχεία άλλων γεωμετρικών μορφών.



Σχήμα2-1: Επιφανειακοί φορείς διακριτοποιημένοι σε πεπερασμένα στοιχεία.



Οι σύνηθες μορφές στοιχείων πλάκας που χρησιμοποιούνται ευρέως είναι τα ορθογωνικά στοιχεία, τα οποία μελετούμε σε αυτήν την εργασία, τα τετραπλευρικά και τριγωνικά στοιχεία. Όπου η εξερεύνηση των τετραπλευρικών και τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων πλάκας έγινε λόγω της αδυναμίας των ορθογωνικών πεπερασμένων στοιχείων να προσομοιάσουν επαρκώς μη ορθογωνικές πλάκες. Αλλά στο πλαίσιο αυτής της εργασίας ασχολούμαστε αποκλειστικά με ορθογωνικά πεπερασμένα στοιχεία.



**Σχήμα2-2:** Μορφές πεπερασμένων στοιχείων: (α) τριγωνικό, (β) ορθογωνικό, (γ) τετραπλευρικό.

Οι βαθμοί ελευθερίας του κάθε στοιχείου αφορούν μετακινήσεις των κορυφών ή και άλλων επιλεγμένων σημείων του στοιχείου (κόμβοι στοιχείου), ενώ οι βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι το σύνολο των βαθμών ελευθερίας των κόμβων του. Ανά δυο τα πεπερασμένα στοιχεία έχουν μια κοινή πλευρά. Στις κοινές αυτές πλευρές πρέπει να ισχύουν συνθήκες συνέχειας. Η θεώρηση όμως τέτοιων συνθηκών οδηγεί πολλές φορές σε πολύπλοκη ανάλυση. Για το λόγο αυτό δεχόμαστε ότι τα στοιχεία ενώνονται μεταξύ τους μόνο στους κόμβους οπότε η θεώρηση των συνθηκών συνέχειας απλοποιείται.

Με τη διακριτοποίηση η ανάλυση του επιφανειακού φορέα ανάγεται στον υπολογισμό πεπερασμένου αριθμού βαθμών ελευθερίας αν και οι βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι άπειροι, όπως ακριβώς συμβαίνει και στους ραβδωτούς φορείς. Η ακρίβεια της μεθόδου, όπως είναι φυσικό, αυξάνει με την αύξηση του αριθμού των πεπερασμένων στοιχείων με άμεση συνέπεια όμως και την αύξηση του υπολογιστικού κόστους. Αναφορικά με την επιλογή του αριθμού και του είδους των στοιχείων που δίδει την επιθυμητή ακρίβεια αποτελεσμάτων θα μπορούσαν να αναφερθούν τα ακόλουθα

- Η απαιτούμενη διακριτοποίηση στηρίζεται στην εμπειρία του μελετητή.
- Αν για πρώτη φορά επιχειρείται η ανάλυση ενός προβλήματος θα πρέπει να εξετάζεται η σύγκλιση των αποτελεσμάτων για διάφορες πυκνώσεις

πεπερασμένων στοιχείων και στη συνέχεια να επιλέγεται η απαιτούμενη διακριτοποίηση.

- Σε περιοχές του φορέα με μεγάλη συγκέντρωση τάσεων θα πρέπει να επιλέγεται πυκνότερο δίκτυο στοιχείων.
- Η επιλογή του σχήματος των στοιχείων εξαρτάται από το σχήμα του συνόρου του φορέα, το οποίο θα πρέπει να προσεγγίζεται κατά το δυνατόν ακριβέστερα.

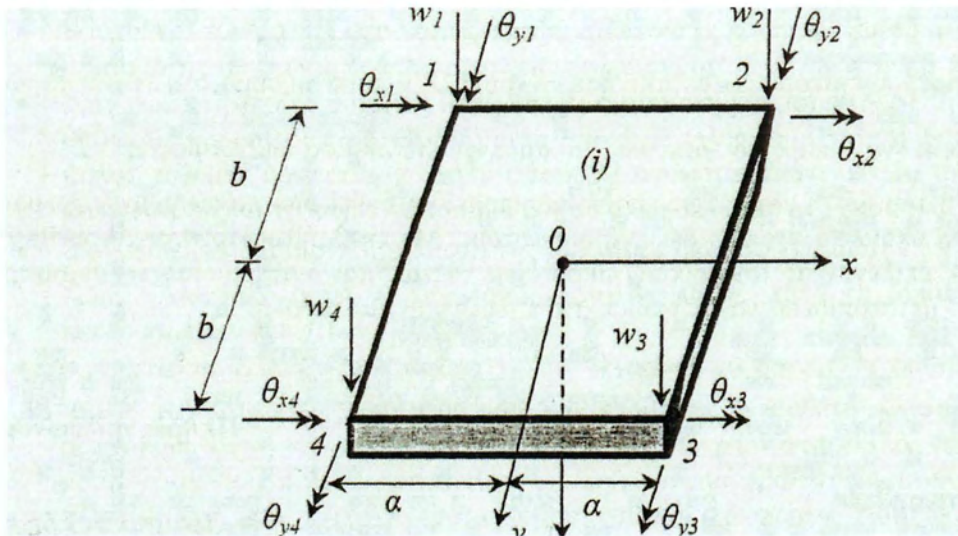
Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα υπολογιστικά βήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στους επιφανειακούς φορείς είναι

- Διακριτοποίηση του φορέα σε επιφανειακά στοιχεία.
- Καθορισμός των σημείων των στοιχείων που θα αποτελέσουν τους κόμβους του φορέα και των βαθμών ελευθερίας των κόμβων. Οι βαθμοί ελευθερίας κάθε κόμβου είναι τρεις και πιο συγκεκριμένα, η βύθιση  $w$  και οι κλίσεις της ελαστικής επιφάνειας της πλάκας  $\varphi_x$  και  $\varphi_y$ , κατά τους άξονες  $X$  και  $Y$ , αντίστοιχα
- Επιλογή του πεδίου μετατοπίσεων, το οποίο προσεγγίζει την εγκάρσια μετατόπιση της μέσης επιφάνειας της πλάκας (βύθιση) σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του στοιχείου συναρτήσει των επικόμβιων μετακινήσεων του. Το πεδίο αυτό (συνάρτηση σχήματος) έχει συνήθως πολυωνυμική μορφή και περιλαμβάνει σταθερές, οι οποίες εκφράζονται συναρτήσει των βαθμών ελευθερίας των κόμβων του στοιχείου.
- Υπολογισμός του μητρώου δυσκαμψίας  $K_i$  του στοιχείου  $i$  της πλάκας με την εφαρμογή ενεργειακών μεθόδων.
- Σύνθεση των μητρώων δυσκαμψίας  $K_i$  των επιφανειακών στοιχείων  $i$  στο μητρώο δυσκαμψίας  $K$  της πλάκας.
- Υπολογισμός του μητρώου επικόμβιων φορτίων  $P$  της πλάκας.
- Εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών στήριξης της πλάκας.
- Επίλυση της εξίσωσης δυσκαμψίας  $P=K \times D$  και υπολογισμός των μετακινήσεων  $D$  κατά τις διευθύνσεις των ελεύθερων βαθμών ελευθερίας των κόμβων των στοιχείων της πλάκας.
- Υπολογισμός των εντατικών μεγεθών στους προεπιλεγμένους κόμβους των στοιχείων της πλάκας.

Τα προαναφερθέντα βήματα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων διαχωρίζονται σε δυο στάδια. Το πρώτο στάδιο περιλαμβάνει την επιλογή του πεδίου μετατοπίσεων και τον προσδιορισμό του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου ενώ το δεύτερο τη διατύπωση του καθολικού μητρώου δυσκαμψίας και την επίλυση της εξίσωσης δυσκαμψίας.

### 2.1.1 ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΠΛΑΚΑΣ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

Θεωρούμε το ορθογωνικό στοιχείο του Σχήμα2-3 με τέσσερις κόμβους στις κορυφές του. Η αρχή του συστήματος των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο βάρους του ορθογωνίου χωρίς αυτό να είναι δεσμευτικό. Το μέσο επίπεδο του συμπίπτει με το επίπεδο  $\theta_{xy}$ .



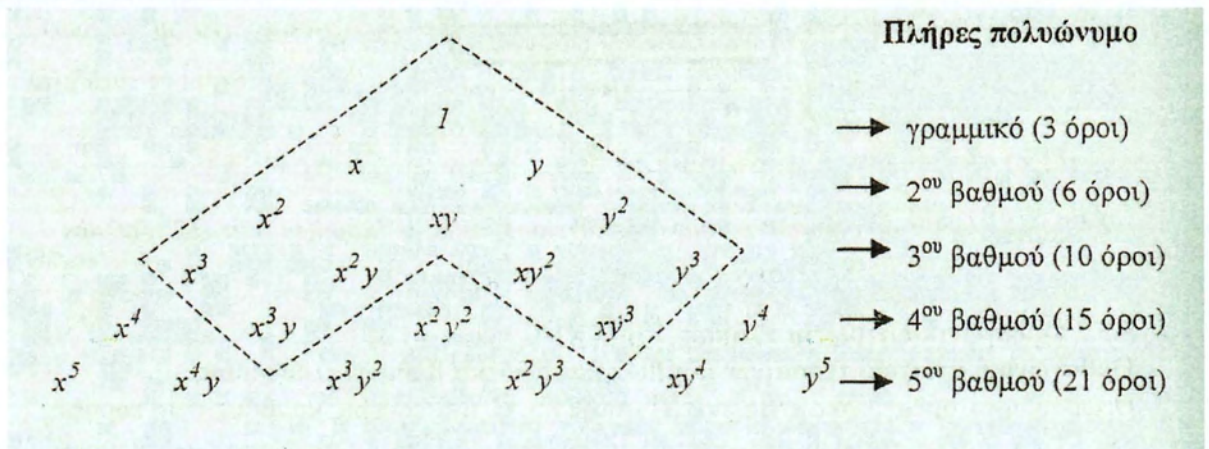
Σχήμα2-3: Ορθογωνικό πεπερασμένο στοιχείο πλάκας 4 κόμβων και 12 βαθμών ελευθερίας.

Θεωρώντας ως βαθμούς ελευθερίας κάθε κόμβου το βέλος κάμψεως  $w_k$  και τις δυο στροφές  $\theta_{xk}$  και  $\theta_{yk}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  (κλίσεις ελαστικής επιφάνειας), το ολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων και το ολικό διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του στοιχείου αυτού γράφονται :

$$[D^i] = \begin{bmatrix} w_1^i \\ \theta_{x1}^i \\ \theta_{y1}^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_4^i \\ \theta_{x4}^i \\ \theta_{y4}^i \end{bmatrix} \quad [P^i] = \begin{bmatrix} F_1^i \\ M_{x1}^i \\ M_{y1}^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_4^i \\ M_{x4}^i \\ M_{y4}^i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Όπου  $\theta_x$  και  $\theta_y$  είναι στροφές κατά τους άξονες  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα σε αντίθεση με τους ορισμούς των κλίσεων της ελαστικής επιφάνειας της θεωρίας λεπτών πλακών, όπου  $\varphi_x$  και  $\varphi_y$  ( $\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}$  και  $\varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}$ ) οι κλίσεις της ελαστικής επιφάνειας. Το ίδιο

ισχύει και για τις επικόμβιες συγκεντρωμένες ροπές του μητρώου  $P_i$ , οι οποίες εκφράζουν επικόμβιες ροπές στον κόμβο  $i$  και όχι ροπές ανά μονάδα μήκους της θεωρίας λεπτών πλακών. Οι θετικές φορές των στροφών και των επικόμβιων ροπών παρουσιάζονται στο Σχήμα1-5. Για την επιλογή της πολυωνυμικής έκφρασης η οποία προσεγγίζει το πεδίο μετατοπίσεων στο εσωτερικό του στοιχείου  $i$  συναρτήσει των επικόμβιων μετακινήσεων του  $Di$  παρατηρούμε ότι στην έκφραση αυτή μπορεί να υπάρχουν δώδεκα παράμετροι. Η συνάρτηση του βέλους κάμψης επομένως μπορεί να δοθεί από πολυωνυμική έκφραση των  $x, y$ , η οποία να περιέχει δώδεκα αγνώστους. Με τη βοήθεια του τριγώνου Pascal(Σχήμα2-4) επιλέγοντας τους όρους μικρότερης τάξεως και διατηρώντας τη συμμετρία του πεδίου μετατοπίσεων καταλήγουμε στο πολύωνυμο παρεμβολής.



Σχήμα 2-4: Τρίγωνο Pascal

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.2) για τους τέσσερις κόμβους του στοιχείου ( $x=\pm a, y=\pm b$ ) μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ , οι οποίοι ονομάζονται γενικευμένες μετατοπίσεις, από την σχέση:

$$\begin{bmatrix} w_1^j \\ \theta_{x1}^j \\ \theta_{x2}^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_4^j \\ \theta_{x4}^j \\ \theta_{y4}^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & a^2 & ab & b^2 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & -a^3 & -3a^2b \\ 0 & 1 & 0 & -2a & -b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ 1 & a & -b & a^2 & -ab & b^2 & a^3 & -a^2b & ab & -b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Επιλύοντας την σχέση (2.3) ως προς τους άγνωστους συντελεστές  $a$  λαμβάνουμε:

$$\{a\} = [A]^{-1} \{d\} \quad (2.4)$$

Όπου το μητρώο  $[A]^{-1}$  αποδεικνύεται ότι υπάρχει πάντα και δίδεται από τη σχέση:

$$[A]^{-1} = \frac{1}{8a^3b^3} \begin{bmatrix} 2a^3b^3 & a^3b^4 & a^4b^3 & 2a^3b^3 & a^3b^4 & -a^4b^3 & 2a^3b^3 & -a^3b^4 & -a^4b^3 & 2a^3b^3 & -a^3b^4 & a^4b^3 \\ -3a^2b^3 & -a^2b^4 & -a^3b^3 & 3a^2b^3 & a^2b^4 & -a^3b^3 & 3a^2b^3 & -a^2b^4 & -a^3b^3 & -3a^2b^3 & a^2b^4 & -a^3b^3 \\ -3a^3b^2 & -a^3b^3 & -a^4b^2 & -3a^3b^2 & -a^3b^3 & a^4b^2 & 3a^3b^2 & -a^3b^3 & -a^4b^2 & 3a^3b^2 & -a^3b^3 & a^4b^2 \\ 0 & 0 & -a^2b^3 & 0 & 0 & a^2b^3 & 0 & 0 & a^2b^3 & 0 & 0 & -a^2b^3 \\ 4a^2b^2 & a^2b^3 & a^3b^2 & -4a^2b^2 & -a^2b^3 & a^3b^2 & 4a^2b^2 & -a^2b^3 & -a^3b^2 & -4a^2b^2 & a^2b^3 & -a^3b^2 \\ 0 & -a^3b^2 & 0 & 0 & -a^3b^2 & 0 & 0 & a^3b^2 & 0 & 0 & a^3b^2 & 0 \\ b^3 & 0 & ab^3 & -b^3 & 0 & ab^3 & -b^3 & 0 & ab^3 & b^3 & 0 & ab^3 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 \\ 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ a^3 & a^3b^2 & 0 & a^3 & a^3b & 0 & -a^3 & a^3b & 0 & -a^3 & a^3b & 0 \\ -b^2 & 0 & -ab^2 & b^2 & 0 & -ab^2 & -b^2 & 0 & ab^2 & b^2 & 0 & ab^2 \\ -a^2 & -a^2b & 0 & a^2 & a^2b & 0 & -a^2 & a^2b & 0 & a^2 & -a^2b & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

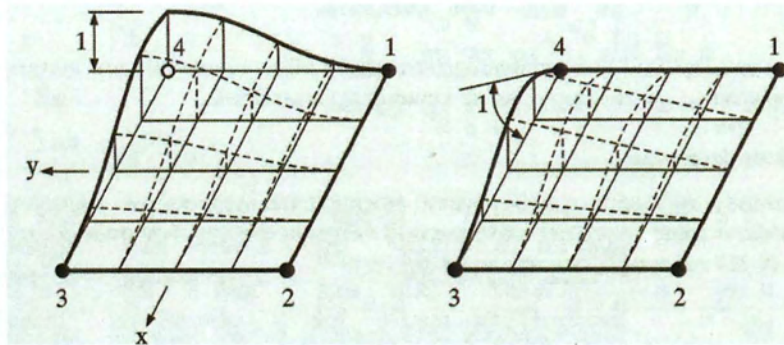
Με την κατάλληλη αντικατάσταση λαμβάνουμε την σχέση:

$$[u] = [x][A]^{-1} \{d\} \quad (2.6)$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$[N^j] = [x][A]^{-1} \quad (2.7)$$

Όπου  $N_i$  είναι μητρώο που περιλαμβάνει τις συναρτήσεις σχήματος για τη βύθιση  $w$  για το ορθογωνικό στοιχείο  $i$ . Οι γραφικές παραστάσεις δυο χαρακτηριστικών συναρτήσεων σχήματος φαίνονται στο Σχήμα2-5



Σχήμα2-5: Συναρτήσεις σχήματος ορθογωνικού στοιχείου πλάκας τεσσάρων κόμβων.

### 2.1.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ

Η σχέση εντατικών μεγεθών καμπυλοτήτων προκύπτουν από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} M_x &= -D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D_k (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις

$$\begin{aligned} k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.9)$$

όπου  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_{xy}$  είναι οι συνιστώσες της καμπυλότητας της πλάκας. Έτσι προκύπτει το διάνυσμα των καμπυλοτήτων

$$\{k\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Όπου η σχέση (2.10) σε συνδυασμό με τη σχέση (2.4) δίνει τη σχέση

$$\{k\} = [\beta][A]^{-1}\{d\} \quad (2.11)$$

ή

$$\{k\} = [B_k]\{d\}$$

Απ' όπου υπολογίζεται ένα τροποποιημένο μητρώο παραμορφώσεως του στοιχείου το οποίο συνδέει τις καμπυλότητες με τις επικόμβιες μετατοπίσεις.

### 2.1.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Τέλος το μητρώο στιβαρότητας ορθογωνικού στοιχείου πλάκας τεσσάρων κόμβων και 12 βαθμών ελευθερίας προκύπτει από την γενική έκφραση του μητρώου στιβαρότητας της σχέσης

$$\frac{\partial w}{\partial x} = [N_x]\{d\} \quad (2.12)$$

και εκφράζεται από τη σχέση

$$[k] = \int_b^b \int_a^a [B_k]^T [E_k] [B_k] dx dy \quad (2.13)$$

### 2.1.4 ΜΗΤΡΩΟ ΤΑΣΕΩΝ

Το μητρώο των τάσεων  $[S]=[E] \times [B]$  συνδέει τις τάσεις με τις επικόμβιες μετατοπίσεις  $\{\sigma\}=[S] \times \{d\}$ . Στην περίπτωση της πλάκας, το διάνυσμα  $\{M\}$  των ροπών ανά μονάδα μήκους της πλάκας μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων όπως φαίνεται από τη σχέση

$$\{M\} = [E_k][B_k]\{d\}$$

ή

$$\{M\} = [S_k] \{d\} \quad (2.14)$$

$$(3 \times 1) \quad (3 \times 12) \quad (12 \times 1)$$

### 2.1.5 ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ

Το διάνυσμα των ισοδύναμων δράσεων δίνεται από τη σχέση:

$$[r] = \int_{A_e} [N]^T q(x, y) dA_e \quad (2.15)$$

Σε συνδυασμό με τις συναρτήσεις σχήματος και με την αντικατάσταση του μητρώου-γραμμής των συναρτήσεων σχήματος  $N$  της σχέσης

$$[N] = [x][A]^{-1} \quad (2.16)$$

Στη σχέση (2.15) προκύπτει η έκφραση του διανύσματος των ισοδύναμων επικόμβιων δράσεων του στοιχείου για κατανεμημένο φορτίο  $q(x, y)$

$$\{r\} = [A]^{-T} \int_b^a \int_a^b [x]^T q(x, y) dx dy \quad (2.17)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία το φορτίο  $q$  είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο τότε οι ισοδύναμες δράσεις εκφράζονται από τη σχέση

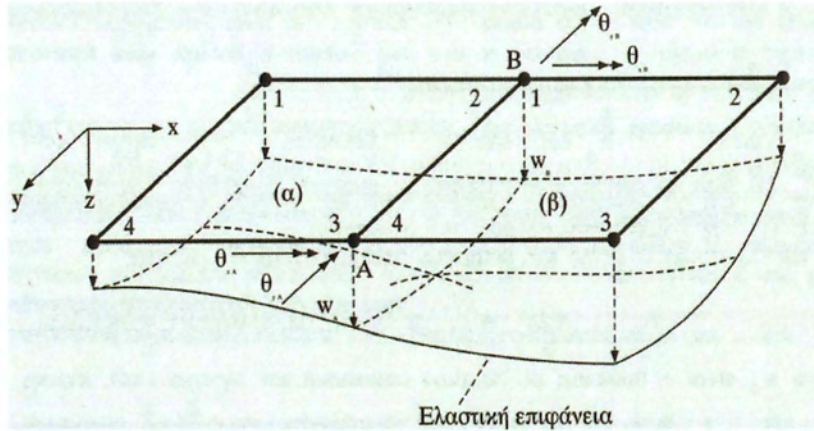
$$\{r\} = qab \left[ 1 \quad \frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad 1 \quad \frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \right]^T \quad (2.18)$$

Παρατηρούμε στην παραπάνω σχέση την ύπαρξη μη μηδενικών ροπών στο διάνυσμα των ισοδύναμων δράσεων του στοιχείου. Η στατικά ισοδύναμη κατανομή του φορτίου, με βάση τις συνθήκες ισορροπίας, αμελεί την ύπαρξη των ροπών και κατανέμει το φορτίο κατά την ποσότητα  $q \times a \times b$  σε κάθε κόμβο.

### 2.1.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ

Η ικανοποίηση της συνθήκης του συμβιβαστού του πεδίου των μετατοπίσεων στις διεπιφάνειες των στοιχείων ελέγχεται με την εξέταση των εκφράσεων των μετατοπίσεων κατά μήκος αυτών των διεπιφανειών. Στο Σχήμα 2-6 απεικονίζεται η ελαστική επιφάνεια δύο γειτονικών στοιχείων  $\alpha$  και  $\beta$





**Σχήμα 2-6:** Ασυμβατότητα κλίσεων ορθογωνικού στοιχείου τεσσάρων κόμβων και 12 β.ε)

Λόγου του συμβιβαστού των επικόμβιων μετατοπίσεων θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 w_3^{(\alpha)} &= w_4^{(\beta)} = w_A \\
 w_2^{(\alpha)} &= w_1^{(\beta)} = w_B \\
 \theta_{x3}^{(\alpha)} &= \theta_{x4}^{(\beta)} = \theta_{xA} \\
 \theta_{x2}^{(\alpha)} &= \theta_{x1}^{(\beta)} = \theta_{xB} \\
 \theta_{y3}^{(\alpha)} &= \theta_{y4}^{(\beta)} = \theta_{yA} \\
 \theta_{y2}^{(\alpha)} &= \theta_{y1}^{(\beta)} = \theta_{yB}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Κατά μήκος της πλευράς AB ( $x$ =σταθερό) οι βυθίσεις  $w$  και οι κλίσεις  $\theta_x$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$w = a'_1 + a'_3 y + a'_6 y^2 + a'_{10} y^3 \tag{2.20}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = a'_3 + 2a'_6 y + 3a'_{10} y^2 \tag{2.21}$$

Οι συντελεστές  $a'_1, a'_3, a'_6, a'_{10}$  προσδιορίζονται πλήρως από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες των μετατοπίσεων  $w_A, \theta_{xA}, w_B, \theta_{xB}$  στα άκρα της πλευράς AB. Επομένως υπάρχει συνέχεια τόσο των βυθίσεων όσο και των κλίσεων  $\frac{\partial w}{\partial y}$  κατά μήκος των διεπιφανειών των στοιχείων με σταθερό  $x$ . Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τις κλίσεις  $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$  οι οποίες δίνονται από τη σχέση:

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = a'_2 + a'_5 y + a'_9 y^2 + a'_{12} y^3 \quad (2.22)$$

Όπου οι συντελεστές  $a'_2, a'_5, a'_9, a'_{12}$  δεν μπορούν να προσδιοριστούν από τις δύο μόνο συνοριακές συνθήκες  $\theta_{yA}, \theta_{yB}$  που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά μήκος της πλευράς AB. Κατά συνέπεια το στοιχείο αυτό δεν είναι σύμφоро αφού δεν εξασφαλίζεται η συνέχεια όλων των συνιστωσών της μετατόπισης κατά μήκος των διεπιφανειών των στοιχείων.

Παρά το γεγονός ότι το στοιχείο αυτό δεν είναι σύμφоро χαρακτηρίζεται από απλότητα στον σχηματισμό των συναρτήσεων σχήματος και του μητρώου παραμορφώσεως, ενώ τόσο το μητρώο στιβαρότητας όσο και το διάνυσμα των εντατικών μεγεθών υπολογίζονται αναλυτικά. Γενικώς το στοιχείο αυτό παρουσιάζει καλή συμπεριφορά και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε πολλές κατηγορίες προβλημάτων πλακών.

## 2.2 ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ

Η ισοπαραμετρική θεώρηση βασίζεται στη χρήση ενός δευτέρου συστήματος συντεταγμένων, το οποίο ορίζεται στο Καρτεσιανό σύστημα μέσω μιας απεικόνισης και ονομάζεται φυσικό σύστημα. Για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας καταφεύγουμε σε αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος από το οποίο προκύπτει το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου, αφού ο αναλυτικός υπολογισμός είναι εφικτός μόνο σε ειδικές περιπτώσεις, ενώ απαιτείται ο υπολογισμός ενός μητρώου μετασχηματισμού  $J$  το οποίο εκφράζει την Ιακωβιανή της απεικόνισης. Ο όρος ισοπαραμετρικός εξηγείται από το γεγονός ότι τόσο οι συνιστώσες της μετατόπισης  $u, v, w$  όσο και οι Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$  εκφράζονται ως προς τις αντίστοιχες επικόμβιες ποσότητες, με τις ίδιες συναρτήσεις παρεμβολής ή συναρτήσεις σχήματος.

### 2.2.1 ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΙΚΑ ΙΣΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ.

Η γεωμετρία, οι βυθίσεις  $w$  και οι στροφές  $\theta_x, \theta_y$  ενός τετραπλευρικού ισοπαραμετρικού στοιχείου πλάκας προκύπτουν με τη βοήθεια των συναρτήσεων σχήματος.

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

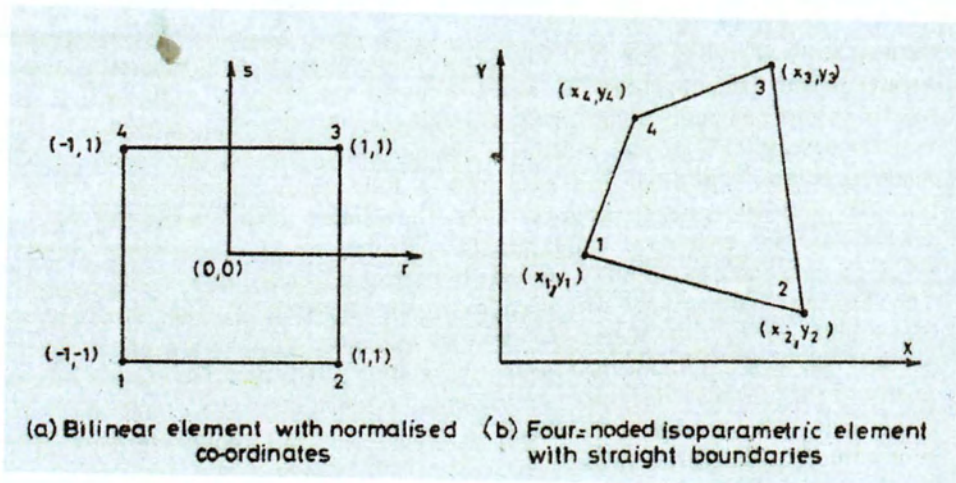
$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

$$w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i$$

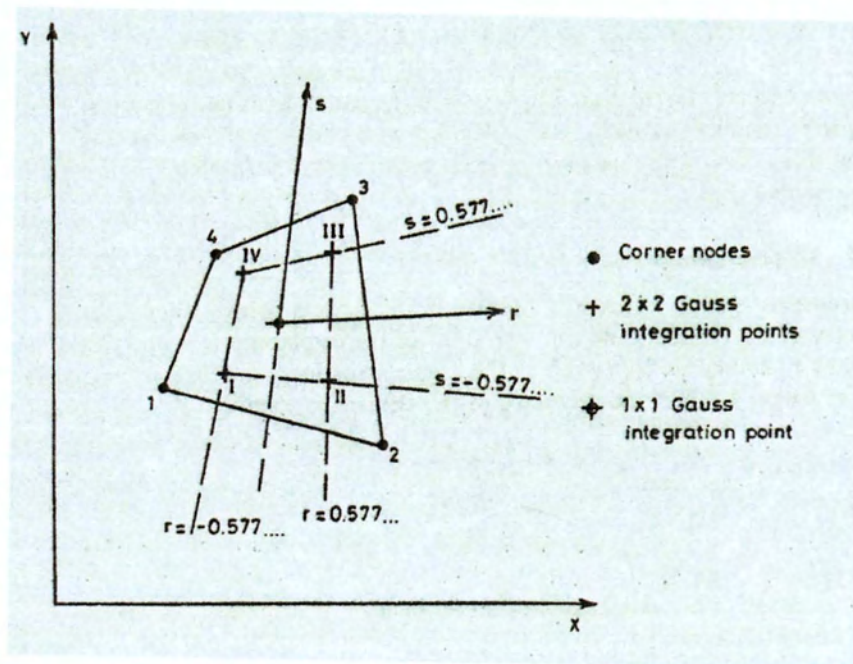
$$\theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi}$$

(2.23)



Σχήμα 2-7: Τετραπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεί πλάκας 4 κόμβων.



Σχήμα 2-8: Σχηματική παράσταση των θέσεων σημείων Gauss στο τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο  $n=2$  (βαθμός ακριβείας 3).

Οι συναρτήσεις σχήματος  $N_i$  των εξισώσεων δίνονται από τη σχέση:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + rri)(1 + ssi) \quad (2.24)$$

Όπου  $r_i$  και  $s_i$  είναι οι τοπικές συντεταγμένες  $r$  και  $s$  του κόμβου  $i$  και  $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$  είναι οι τιμές των  $w, \theta_x, \theta_y$  του κόμβου  $i$ .

Το μητρώο των επικόμβιων μετατοπίσεων του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$\{d\}^T = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}] \quad (2.25)$$

Το Ιακωβιανό μητρώο  $J$  σε σχέση με τις παράγωγους των συναρτήσεων σχήματος ως προς τις τοπικές συντεταγμένες  $r, s$  ( $\frac{\partial N_i}{\partial r}, \frac{\partial N_i}{\partial s}$ ) του φυσικού συστήματος, και τις συντεταγμένες  $x$  και  $y$  του Καρτεσιανού συστήματος περιγράφεται από την σχέση:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

### 2.2.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΣ

Οι καμπυλότητες  $k_x, k_y, k_{xy}$  η διατμητική παραμόρφωση  $\{\varepsilon\}_p$  και οι επικόμβιες μετατοπίσεις συνδέονται με την σχέση:

$$\{\varepsilon_p\} = [B]\{d\} \quad (2.27)$$

Για να υπολογίσουμε το μητρώο  $B$  παίρνουμε τις σχέσεις (2.26) και (2.28)

$$\begin{aligned}
k_x &= \sum_{i=1}^4 \theta_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\
k_y &= \sum_{i=1}^4 -\theta_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\
k_{xy} &= \sum_{i=1}^4 \theta_{yi} \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sum_{i=1}^4 \theta_{xi} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\
\varphi_x &= \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + \sum_{i=1}^4 \theta_{yi} N_i \\
\varphi_y &= \sum_{i=1}^4 w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} - \sum_{i=1}^4 \theta_{xi} N_i
\end{aligned} \tag{2.28}$$

και παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\{\varepsilon_p\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

$$\{\varepsilon_p\} = \sum_{i=1}^4 [B_i] \{d_i\} \tag{2.30}$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix}_{i=1,2,3,4} \tag{2.31}$$

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Οι τάσεις  $\{\sigma\}_p$  μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων αντικαθιστώντας την  $\{\varepsilon\}_p$  με την σχέση (2.30)

$$\{\sigma_p\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = [C_p]\{\varepsilon_p\} = [C_p] \sum_{i=1}^4 [B_i]\{d_i\} \quad (2.33)$$

ή

$$\{\sigma_p\} = [C_p][B]\{d\} \quad (2.34)$$

Όπου  $[B] = \sum_{i=1}^4 [B_i]$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & N_1 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & N_2 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & N_3 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & N_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & -N_1 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & -N_2 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & -N_3 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & -N_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Το γινόμενο των εκφράσεων  $[C]_p$  και  $[B]_i$  μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$[C_p][B] = [C_p] \sum_{i=1}^4 [B_i] = [[CB_1][CB_2][CB_3][CB_4]] \quad (2.36)$$

Όπου οι υποπίνακες  $[CB_i]$   $i=1, 2, 3, 4$  δίνονται από τη σχέση:

$$[CB_i] = \frac{Eh}{12(1+\mu)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\mu h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & \frac{h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) \\ 0 & \frac{-h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & \frac{\mu h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) \\ 0 & -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) & \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) \\ 6a \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) & 0 & 6aN_i \\ 6a \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & -6aN_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Χωρίζοντας σε κάμψη και διάτμηση παίρνουμε την σχέση:

$$[CB_i] = \frac{Eh}{12(1+\mu)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\mu h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & \frac{h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) \\ 0 & \frac{-h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & \frac{\mu h^2}{1-\mu} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) \\ 0 & -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) & \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) \\ 6a \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right) & 0 & 6aN_i \\ 6a \left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right) & -6aN_i & 0 \end{bmatrix} + 6a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & N_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$[CB_i] = [CB_i]_b + [CB_i]_s \quad (2.39)$$

Όπου η έκφραση  $[CB_i]_b$  αναφέρεται στην καμπτική ενώ η  $[CB_i]_s$  στην διατμητική καταπόνηση.

### 2.2.3 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ

Το μητρώο ακαμψίας ενός ορθογωνικού στοιχείου πλάκας τεσσάρων κόμβων και δώδεκα βαθμών ελευθερίας βάση της ισοπαραμετρικής θεώρησης δίνεται από την έκφραση:

$$[k] = \iint [B]^T [C_p] [B] dx dy \quad (2.40)$$

Η παραπάνω έκφραση σε τοπικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση:

$$[k] = \iint [B]^T [C_p] [B] |J| dr ds \quad (2.41)$$

$$[k] = [B]^T [C_p] [B] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] & [k_{14}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] & [k_{24}] \\ [k_{31}] & [k_{32}] & [k_{33}] & [k_{34}] \\ [k_{41}] & [k_{42}] & [k_{43}] & [k_{44}] \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Όπου

$$[k_{ij}] = \frac{Eh}{12(1+\mu)} \begin{bmatrix} 6a \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] & -6a \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & 6a \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \\ -6aN_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{h^2}{1-\mu} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + 6aN_i N_j & -\frac{\mu h^2}{1-\mu} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) - \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \\ 6aN_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & -\frac{\mu h^2}{1-\mu} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] & \frac{h^2}{1-\mu} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] + 6aN_i N_j \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Χωρίζοντας σε καμπτικό και διατμητικό κομμάτι προκύπτει το μητρώο:

$$[k_{ij}] = \frac{Eh}{12(1+\mu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{1-\mu} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] & -\frac{\mu h^2}{1-\mu} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) - \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \\ 0 & -\frac{\mu h^2}{1-\mu} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) - \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] & \frac{h^2}{1-\mu} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \end{bmatrix} + 6a \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] & -\frac{\partial N_i}{\partial y} N_j & \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \\ -N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & N_i N_j & 0 \\ N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & N_i N_j \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

## 2.2.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

Ο υπολογισμός των επικόμβιων φορτίων του στοιχείου στην περίπτωση ομοιόμορφης κατανεμημένης φόρτισης με φορτίο  $q$  για τον κόμβο  $i$  δίνεται από τη σχέση:

$$\{Q_i\} = \begin{Bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \iint N_i \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} |J| dr ds \quad (2.45)$$

Υπολογίζοντας τα επικόμβια φορτία του στοιχείου με την παραπάνω σχέση, μπορούν να υπολογιστούν και οι ισοδύναμες δράσεις του στοιχείου ως εξής:



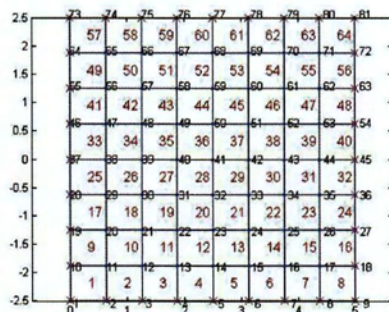
$$\{Q\} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{pmatrix} = q \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j |J| \begin{pmatrix} N_1 \\ 0 \\ 0 \\ N_2 \\ 0 \\ 0 \\ N_3 \\ 0 \\ 0 \\ N_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - Ο ΚΩΔΙΚΑΣ A.S.D.A.P

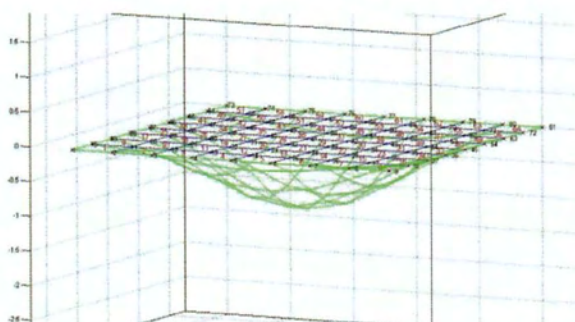
### 3.1 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Ο κώδικας A.S.D.A.P (Advanced Static Dynamic Analysis Programm) είναι μια χρήσιμη εργαλειοθήκη του MATLAB για την επίλυση προβλημάτων πεπερασμένων στοιχείων. Το αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας εστιάζεται κυρίως στην επίλυση πλακών βάσει της θεωρίας Mindlin.

Κατά τον προγραμματισμό του κώδικα χρησιμοποιήθηκαν πολλές εφαρμογές του MATLAB οι οποίες επιτρέπουν την δημιουργία ενός αξιόπιστου προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων. Ολόκληρος ο κώδικας αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό υπορουτινών που βρίσκονται σε αρχεία *.m* του MATLAB γνωστά και ως *m-files*. Όπου μέσα εκεί εκτελούνται όλες οι διαδικασίες που απαιτεί η επίλυση της πλάκας, με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, για να πάρουμε τα αποτελέσματα τα οποία εμφανίζονται στο Command Window. Μέσα στα *m-files* κυρίως χρησιμοποιήθηκαν οι εφαρμογές πινάκων όπως είναι το άθροισμα, ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση πινάκων. Ιδιαίτερα σημαντικό κατά τον προγραμματισμό ήταν η χρήση διαδικασιών επανάληψης (loops). Επίσης με την εντολή σχεδίασης (plot) αλλά και για τις τρεις διαστάσεις (3d plot) του MATLAB προκύπτει και σχεδιαστικά το πρόβλημα μας (πλάκα) δίνοντας καλύτερη αντίληψη του προβλήματος αλλά και των αποτελεσμάτων στον χρήστη. Όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 3-1: Κάναβος μιας πλάκας.



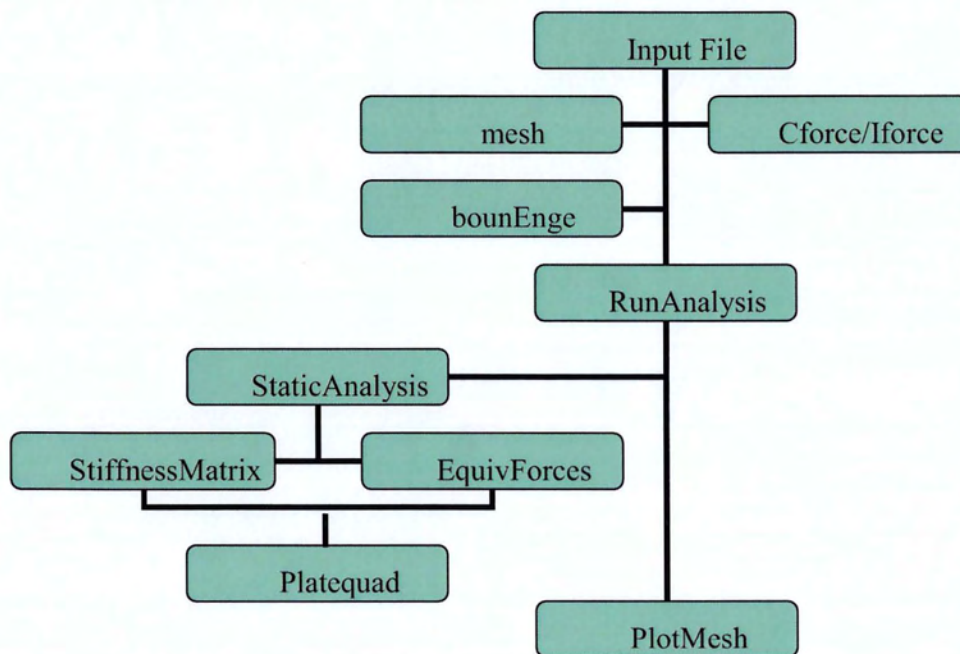
Σχήμα 3-2: Παραμορφωμένη πλάκα.

Σε σχέση με τα άλλα προγράμματα πεπερασμένων στοιχείων για πλάκες μπορούμε να πούμε ότι παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με άλλα προγράμματα που δεν διαθέτουν γραφικό περιβάλλον όπως το feap (finite elements analysis program). Και στα δύο αυτά προγράμματα ο χρήστης εισάγει το πρόβλημα κάθε φορά δημιουργώντας ένα καινούριο *Input File* μέσα από μια διαδοχική σειρά εντολών. Σε αντίθεση με το SAP2000 και άλλων προγραμμάτων που διαθέτουν γραφικό περιβάλλον και ο χρήστης καλείται να σχεδιάζει το πρόβλημα του με τη βοήθεια του ποντικιού.

### 3.2 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΡΟΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Αρχικά ο χρήστης μπαίνει στο Input File (ή δημιουργεί ένα ο ίδιος) όπου εκεί θα πρέπει να βάλει τα δεδομένα του προβλήματος έτσι ώστε να στήσει το δικό του πρόβλημα. Καλείται να βάλει τις διαστάσεις της πλάκας του τις ιδιότητες της και τα χαρακτηριστικά του υλικού της. Όπως π.χ το μέτρο ελαστικότητας  $E$ , τον συντελεστή Poisson ( $\nu$ )  $\mu$ , το πάχος  $t$  της πλάκας. Επίσης μπορεί να βάλει τον αριθμό των στοιχείων που επιθυμεί να έχει το πρόβλημα του κάνοντας ανάλογα τη διακριτοποίηση στον φορέα του τοποθετώντας όσα στοιχεία επιθυμεί σε κάθε διεύθυνση  $x, y$ . Καθώς επίσης έχει τη δυνατότητα να επιλέξει και το είδος φόρτισης στο πρόβλημα του, όπως της ομοιόμορφης κατανεμημένης φόρτισης, συγκεντρωμένης φόρτισης ή και τον συνδυασμό τους. Τέλος θα πρέπει να βάλει τις συνοριακές συνθήκες (συνθήκες έδρασης) της πλάκας και να τρέξει τον κώδικα (Run) και το MATLAB θα εμφανίσει τα αποτελέσματα στο command window αλλά και τα γραφήματα (plots) δίνοντας μια πιο κατανοητή παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

Η σειρά με την οποία εκτελούνται οι υπορουτίνες για το στήσιμο αλλά και την επίλυση του προβλήματος της πλάκας αφού πρώτα ο χρήστης έχει βάλει στο Input File του όλα τα δεδομένα του προβλήματος του είναι η εξής.



Σχήμα 3-3: Διάγραμμα ροής του προγράμματος.

- Αρχικά εκτελείται η *mesh*. Όπου αναλόγως με τον αριθμό των στοιχείων που έχει τοποθετήσει ο χρήστης για κάθε διεύθυνση x, y δημιουργεί τον κάναβο της πλάκας με αριθμημένους κόμβους και στοιχεία. Η αρίθμηση των κόμβων γίνεται με την αντιστοίχια φορά.
- Οι *cforce*, *Iforce* είναι οι υπορουτίνες για τη φόρτιση της πλάκας. Η πρώτη τοποθετεί συγκεντρωμένη δύναμη σε οποιοδήποτε σημείο της πλάκας ενώ η δεύτερη κατανέμει στους κόμβους, που έχουν ως χαρακτηριστικό μια συντεταγμένη κοινή (π.χ  $y=0$ ), την τιμή της συγκεντρωμένης δύναμης.
- Η *bounEdge* η οποία είναι αυτή που τοποθετεί τις συνθήκες έδρασης του προβλήματος.
- *PlotMesh* η οποία μας δίνει το πρώτο γράφημα που απεικονίζεται ο κάναβος της πλάκας με αριθμημένους κόμβους και στοιχεία.

Έπειτα ακολουθεί η εντολή *RunAnalysis* μέσα από την οποία εκτελούνται μια σειρά από υπορουτίνες που οδηγούν στην στατική επίλυση του προβλήματος. Η σειρά των υπορουτινών είναι:

- *Platequad* είναι μια υπορουτίνα από όπου υπολογίζονται αρχικά οι ασκούμενες δράσεις στον φορέα μας (*AppliesForces*) σε περίπτωση συγκεντρωμένης φόρτισης, αλλά και ο υπολογισμός του τοπικού μητρώου ακαμψίας του στοιχείου πλάκας, όπως επίσης γίνεται και ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών των ροπών αλλά και των τάσεων σε κάθε κόμβο του στοιχείου.
- Η *StiffnessMatrix* μέσω της οποίας υπολογίζεται το καθολικό μητρώο ακαμψίας της πλάκας
- *StaticAnalysis* υπολογίζει τις επικόμβιες μετατοπίσεις στο καθολικό σύστημα.
- *EquivForces* η οποία με τη βοήθεια των δεδομένων που παρέχει η *Platequad* υπολογίζει τις ισοδύναμες δράσεις του κάθε στοιχείου της πλάκας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ A.S.D.A.P

Για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων του κώδικα A.S.D.A.P συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα από μια σειρά χαρακτηριστικών εφαρμογών πάνω στις πλάκες με αυτά που προέκυψαν από το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων SAP-2000 καθώς επίσης και από βιβλία που περιείχαν εφαρμογές πάνω στις πλάκες. Από την σύγκριση που έγινε παρατηρήθηκε ότι ο κώδικας A.S.D.A.P παρουσιάζει μικρά σφάλματα στα αποτελέσματα του, τόσο στον υπολογισμό των βυθίσεων  $w$  και των στροφών  $\theta_x, \theta_y$  όσο και στις ροπές  $M_x, M_y, M_{xy}$ . Όπου τα σφάλματα αυτά τείνουν στο μηδέν όσο αυξάνεται η πύκνωση του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων.

### 4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

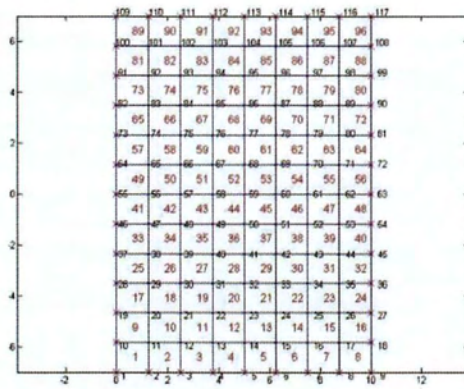
Πακτωμένη περιμετρικά ορθογωνική πλάκα που φέρει ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο  $q(x,y)$  σε ολόκληρη την επιφάνεια της. Υπολογίζεται το μέγιστο βέλος κάμψεως καθώς και οι τιμές των καμπτικών ροπών  $M_x, M_y, M_{xy}$  στο κέντρο της πλάκας.

Κάνοντας την επίλυση αυτής της εφαρμογής στον κώδικα A.S.D.A.P για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των  $w, \theta_x, \theta_y, M_x, M_y, M_{xy}$  που παίρνουμε για το κέντρο της πλάκας είναι:

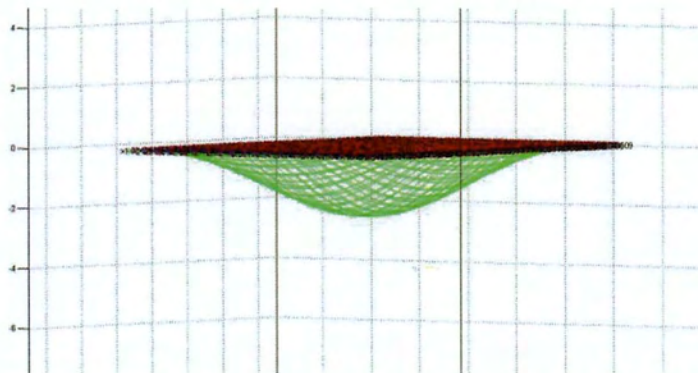
	ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ			
	4×8	8×12	10×14	20×28
$w$	-2.3662	-2.2977	-2.2859	-2.2653
$\theta_x$	0	0	0	0
$\theta_y$	0	0	0	0
$M_x$	404.0695	364.3804	359.3974	352.1394
$M_y$	231.0302	218.0665	216.3083	213.5702
$M_{xy}$	13.3531	4.8944	3.3851	0.8534

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα από το A.S.D.A.P για διάφορους κανάβους

Τα γραφήματα του κανάβου και της παραμορφωμένης πλάκας που εμφανίζει ο κώδικας για πύκνωση κανάβου 8×12 όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η παραμόρφωση του φορέα δίνεται από τα παρακάτω σχήματα:

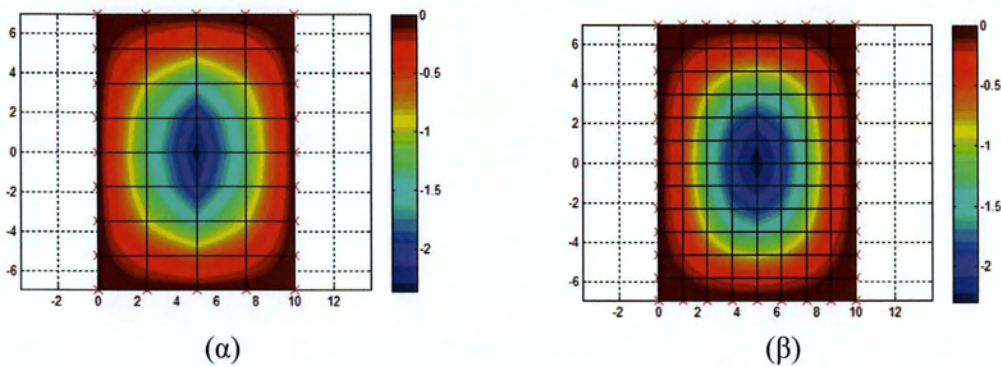


Σχήμα 4-1: Κανάβος πλάκας (8×12).



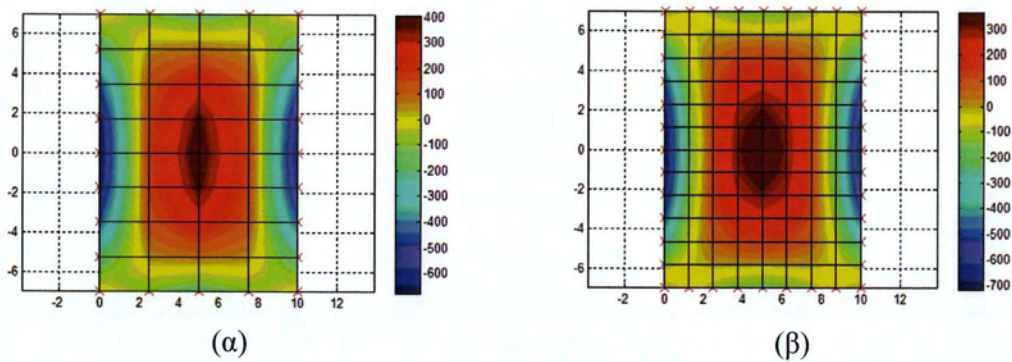
Σχήμα 4-2: Τρισδιάστατη απεικόνιση του παραμορφωμένου φορέα.

Για τις βυθίσεις  $w$  για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου παίρνουμε τα ακόλουθα γραφήματα

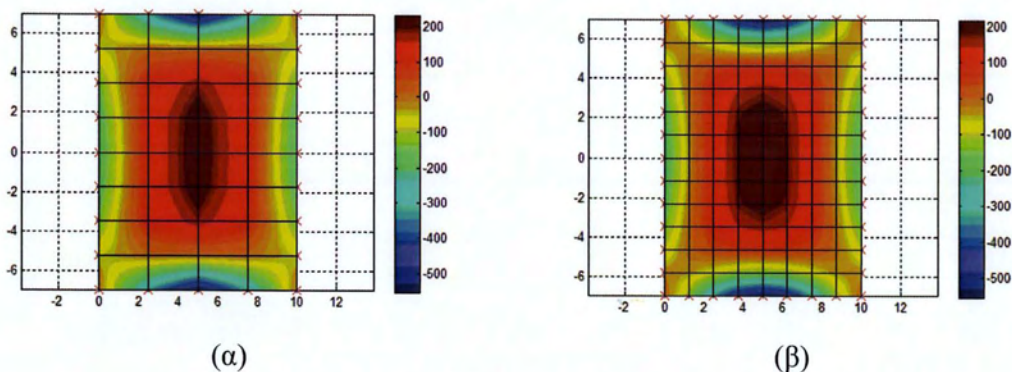


Σχήμα 4-3: Βυθίσεις για πυκνωση κανάβου, (α) (4×8) και (β) (8×12).

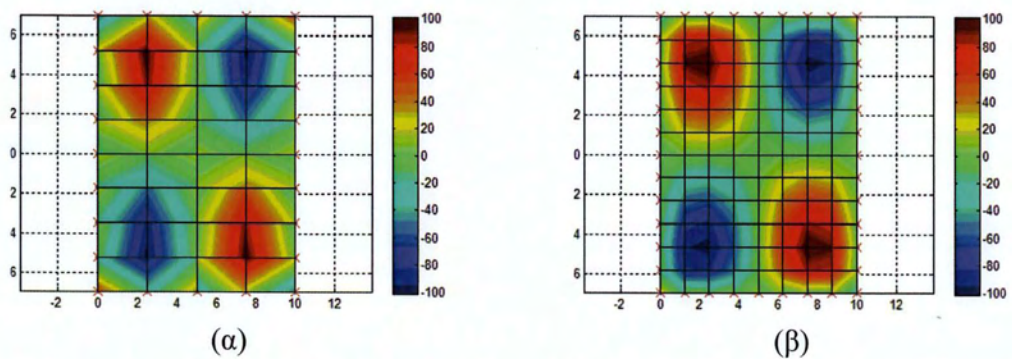
Οι ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  απεικονίζονται αντίστοιχα στα παρακάτω γραφήματα:



Σχήμα 4-4: Απεικόνιση των ροπών  $M_x$  για πύκνωση κανάβου, (α) (4×8), και (β) (8×12).



Σχήμα 4-5: Απεικόνιση των ροπών  $M_y$  για πύκνωση κανάβου (α) (4×8) και (β) (8×12).



Σχήμα 4-6: Απεικόνιση των ροπών  $M_{xy}$  για πύκνωση κανάβου (α) (4×8) και (β) (8×12).

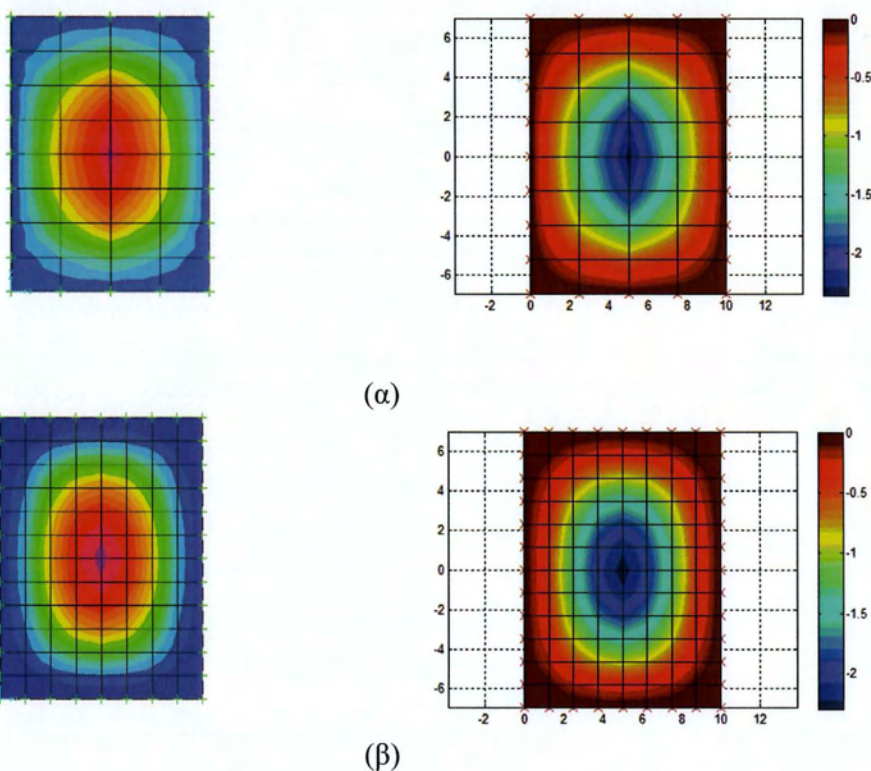
Κάνοντας την επίλυση της εφαρμογής στο SAP2000 για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που παίρνουμε για το κέντρο της πλάκας είναι:



	ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ			
	4×8	8×12	10×14	20×28
w	-2.177	-2.314	-2.2969	-2.2681
$\theta_x$	0	0	0	0
$\theta_y$	0	0	0	0
$M_x$	412.3578	366.95639	361.133226	352.5786
$M_y$	235.962252	219.459	217.206446	213.7595 -
$M_{xy}$	0	0	0	0

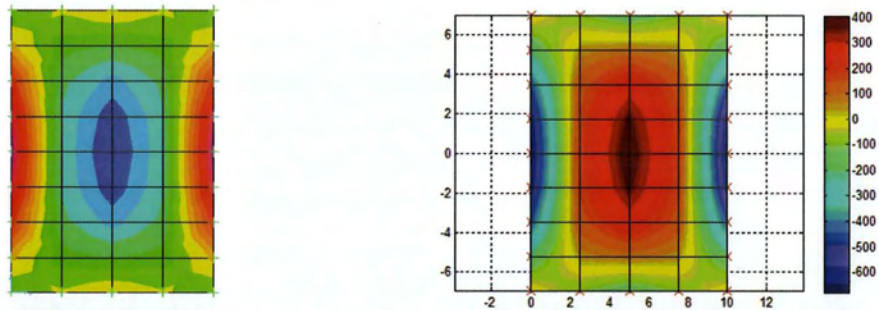
**Πίνακας 4.2:** Αποτελέσματα από το SAP2000 για διάφορους κανάβους.

Τα αντίστοιχα γραφήματα για τις βυθίσεις  $w$  και τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που προκύπτουν από το SAP2000 για πυκνώσεις κανάβου (4×8) και (8×12) φαίνονται στους παρακάτω πίνακες σε παράθεση με αυτά του A.S.D.A.P

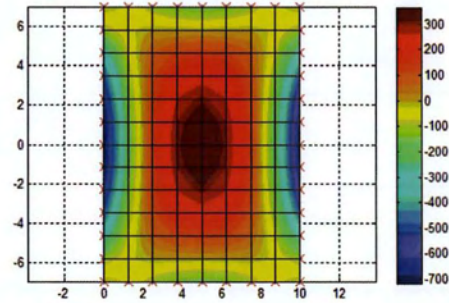
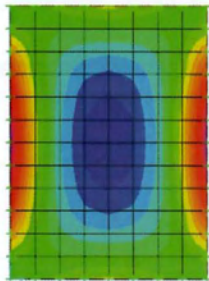


**Σχήμα 4-7:** Σύγκριση γραφημάτων βυθίσεων για πυκνωση κανάβου (α) (4×8) και (β) (8×12). Αριστερή στήλη SAP2000 δεξιά στήλη A.S.D.A.P.



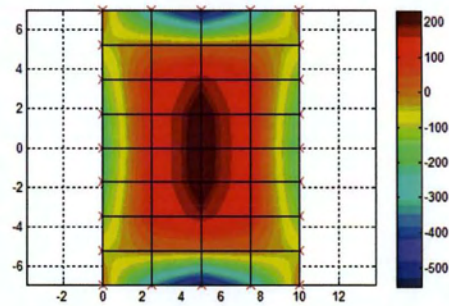
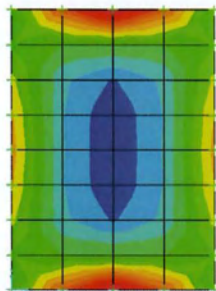


(α)

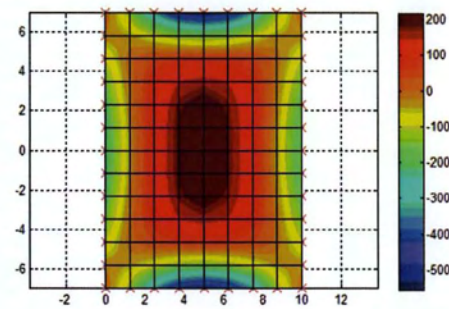
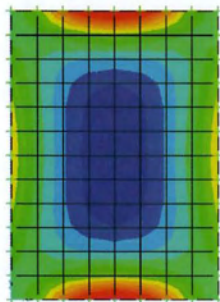


(β)

**Σχήμα 4-8:** Σύγκριση γραφημάτων των ροπών  $M_x$  για πύκνωση κανάβου (α) (4×8) και (β) (8×12). Αριστερή στήλη SAP2000 δεξιά στήλη A.S.D.A.P.

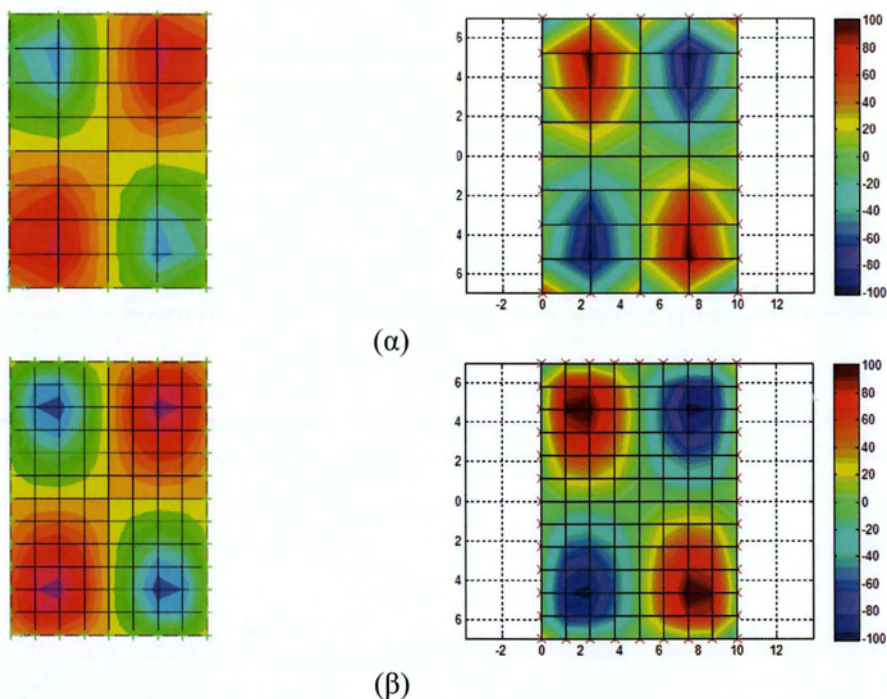


(α)



(β)

**Σχήμα 4-9:** Σύγκριση γραφημάτων των ροπών  $M_y$  για πύκνωση κανάβου (α) (4×8) και (β) (8×12). Αριστερή στήλη SAP2000 δεξιά στήλη A.S.D.A.P.



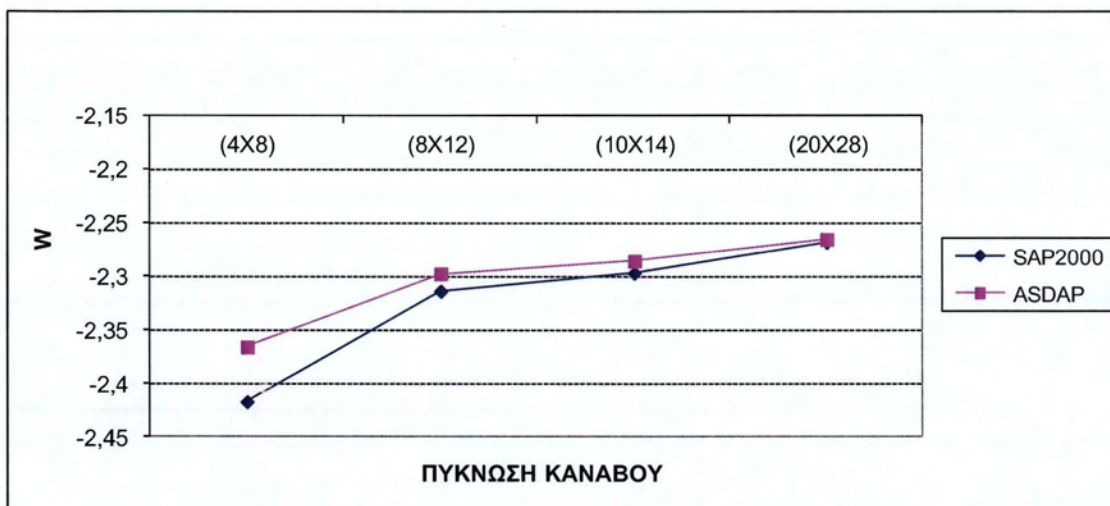
**Σχήμα 4-10:** Σύγκριση γραφημάτων των ροπών  $M_{xy}$  για πύκνωση κανάβου (α) (4×8) και (β) (8×12). Αριστερή στήλη SAP2000 δεξιά στήλη A.S.D.A.P.

Με τη βοήθεια του προγράμματος excel απεικονίζονται με γραφήματα οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων των δυο προγραμμάτων A.S.D.P-SAP2000. Οι τιμές αφορούν το μέσον της πλάκας και στα δυο προγράμματα για τις διάφορες διακριτοποιήσεις.

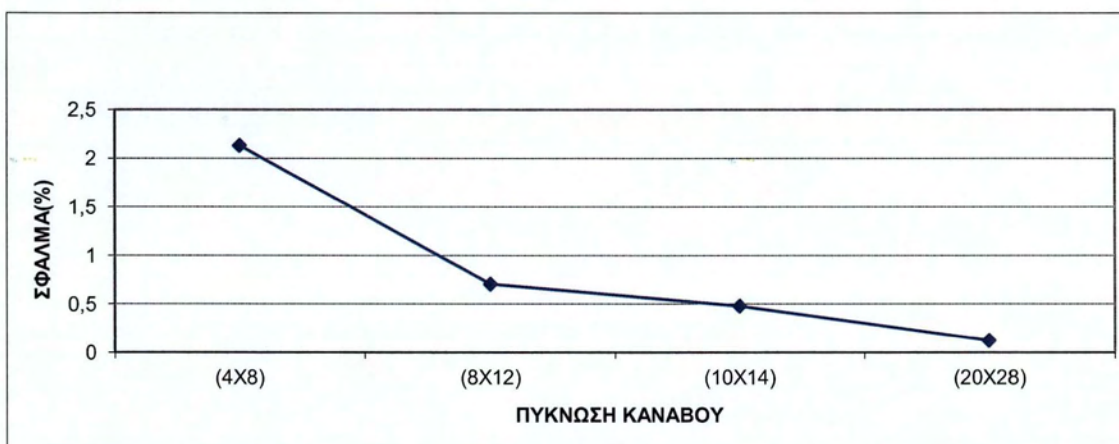
Για τις βυθίσεις  $w$  έχουμε:

ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	SAP 2000	ΣΦΑΛΜΑ (%)
4×8	-2.3662	-2.4177	2.13
8×12	-2.2977	-2.314	0.704
10×14	-2.2859	-2.2969	0.478
20×28	-2.2653	-2.2681	0.1234

**Πίνακας 4.3:** Σύγκριση βυθίσεων A.S.D.A.P-SAP2000.



Σχήμα 4-11: Διάγραμμα για τις βυθίσεις των δύο προγραμμάτων.



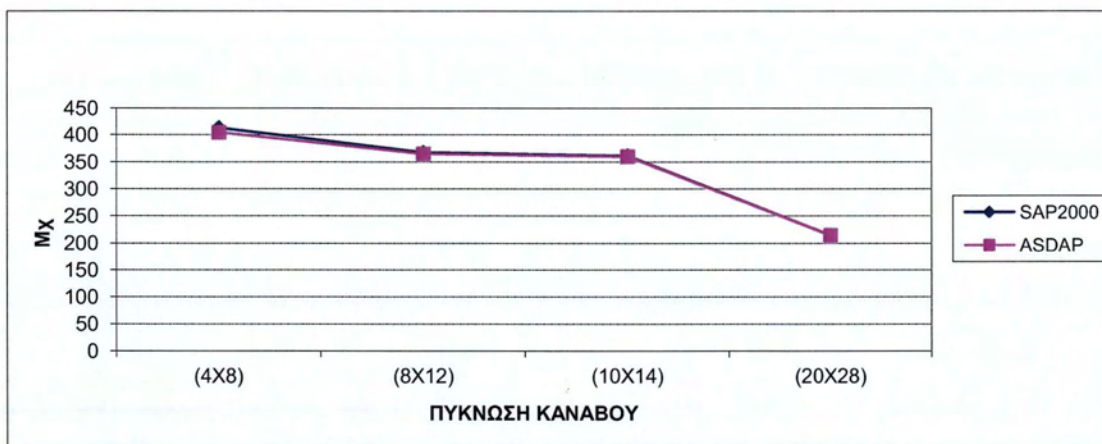
Σχήμα 4-12: Διάγραμμα σφάλματος βυθίσεων που παίρνουμε από το A.S.D.A.P σε σχέση με το SAP2000.

Όπως φαίνεται στα σχήματα Σχήμα 4-11 και Σχήμα 4-12 με την αύξηση των αριθμών των στοιχείων τα αποτελέσματα των βυθίσεων στα δυο προγράμματα τείνουν να ταυτιστούν και το σφάλμα να μηδενιστεί.

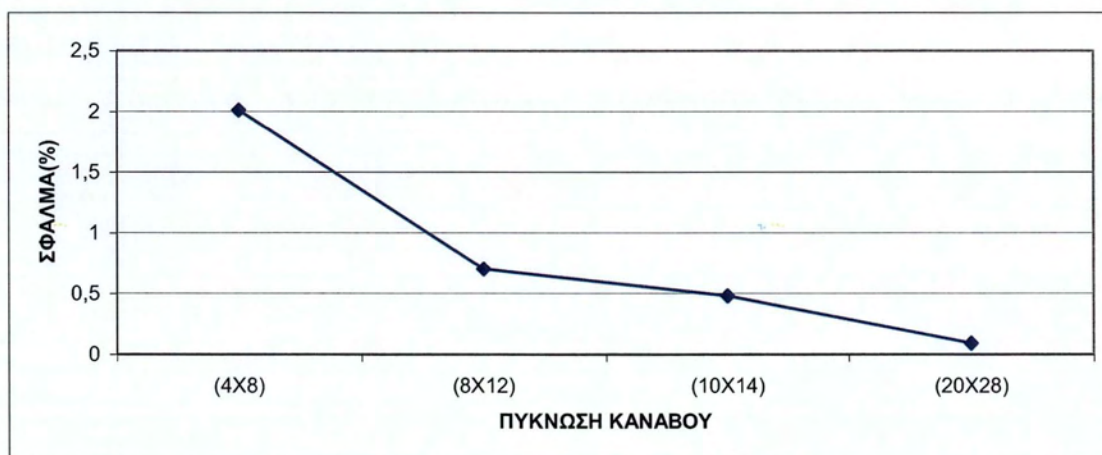
Για τις ροπές  $M_x$  έχουμε:

ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	SAP2000	ΣΦΑΛΜΑ(%)
4×8	404.0695	412.3579	2.01
8×12	364.3804	366.9564	0.7019
10×14	359.3974	361.1332	0.48
20×28	213.5702	213.7595	0.0885

Πίνακας 4.4: Σύγκριση ροπών  $M_x$  A.S.D.A.P-SAP2000.



Σχήμα 4-13: Διάγραμμα για τις ροπές  $M_x$  των δύο προγραμμάτων.



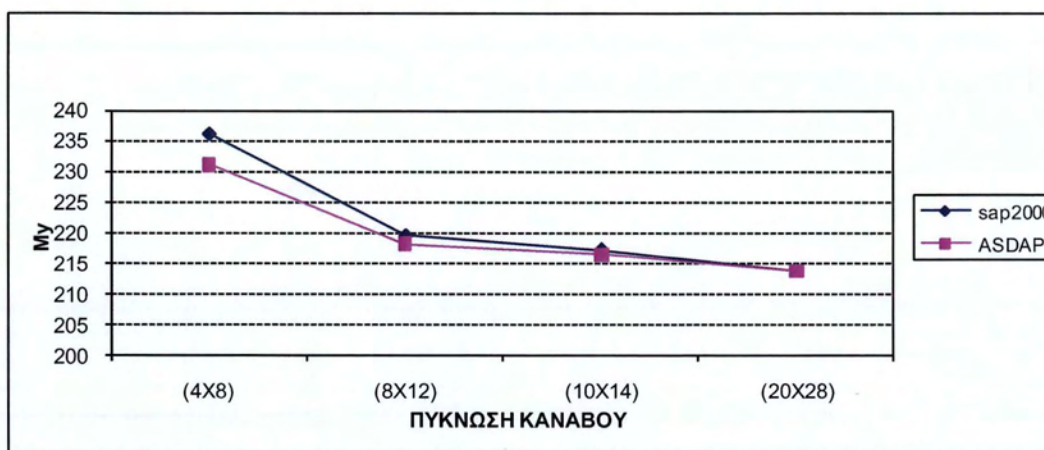
Σχήμα 4-14: Διάγραμμα σφάλματος των ροπών  $M_x$  του A.S.D.A.P σε σχέση με το SAP2000.

Από τα σχήματα Σχήμα 4-13 και Σχήμα 4-14 βλέπουμε ότι οι ροπές  $M_x$  είναι σχεδόν ίδιες με ελάχιστες αποκλίσεις για τα δύο προγράμματα.

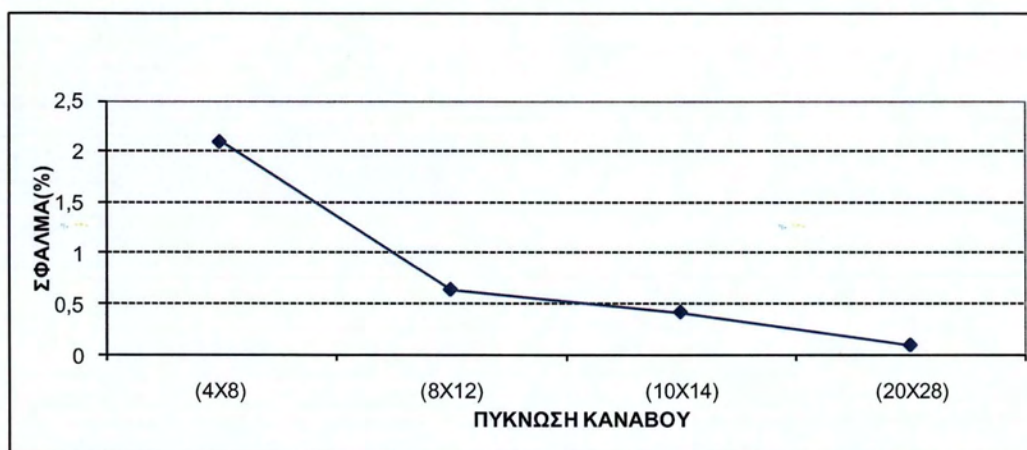
Για τις ροπές  $M_y$  έχουμε:

ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	SAP2000	ΣΦΑΛΜΑ (%)
4x8	231.0302	235.9623	2.09
8x12	218.0665	219.459	0.63451
10x14	216.3083	217.2064	0.41349
20x28	213.5702	213.7595	0.08857

Πίνακας 4.5: Σύγκριση ροπών  $M_y$  A.S.D.A.P-SAP2000



Σχήμα 4-15: Διάγραμμα των ροπών  $M_y$  των δύο προγραμμάτων.



Σχήμα 4-16: Διάγραμμα σφάλματος των ροπών  $M_y$  του A.S.D.A.P σε σχέση με το SAP2000.

Από τα σχήματα Σχήμα 4-15 και Σχήμα 4-16 βλέπουμε ότι οι ροπές  $M_y$  είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και ταυτίζονται όταν αυξάνει η πυκνωση των στοιχείων.

#### 4.2 ΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΑ ΤΡΥΠΑ ΣΤΗΝ ΜΕΣΗ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ

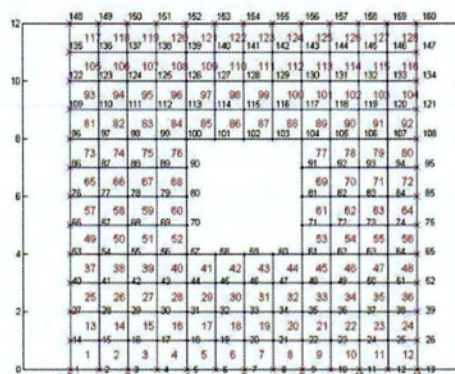
Μια πακτωμένη περιμετρικά τετράγωνη πλάκα, με τετράγωνη εσωτερική τρύπα, φορτιζόμενη με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο  $q(x,y)$ . Υπολογίζεται το μέγιστο βέλος κάμψης καθώς και οι τιμές των καμπτικών ροπών  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  στο κέντρο του κάτω πέλματος της πλάκας.

Κάνοντας την επίλυση αυτής της εφαρμογής στον κώδικα A.S.D.A.P για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που παίρνουμε για το κέντρο του κάτω πέλματος της πλάκας είναι:

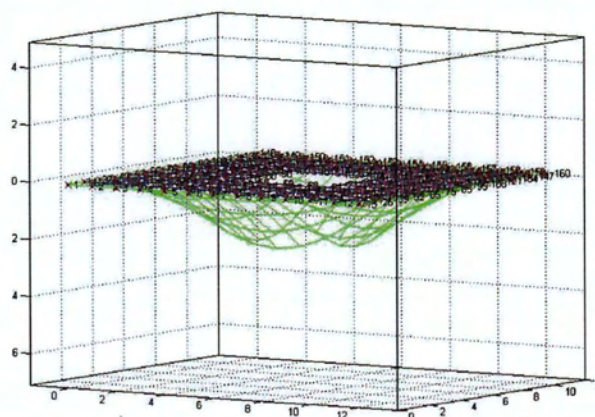
	ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ		
	6×6	12×12	18×18
w	-0.9328	-0.875	-0.8628
$\theta_x$	-0.71691	-0.67036	-0.66031
$\theta_y$	0	0	0
$M_x$	67.251	48,2	45,88
$M_y$	-3,3419	-44,1546	-49,4
$M_{xy}$	0	0	0

**Πίνακας 4.6:** Αποτελέσματα από το A.S.D.A.P για διάφορους κανάβους.

Τα γραφήματα του κανάβου και της παραμορφωμένης πλάκας που εμφανίζει ο κώδικας για πύκνωση κανάβου 12×12 όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η παραμόρφωση του φορέα δίνεται από τα παρακάτω σχήματα

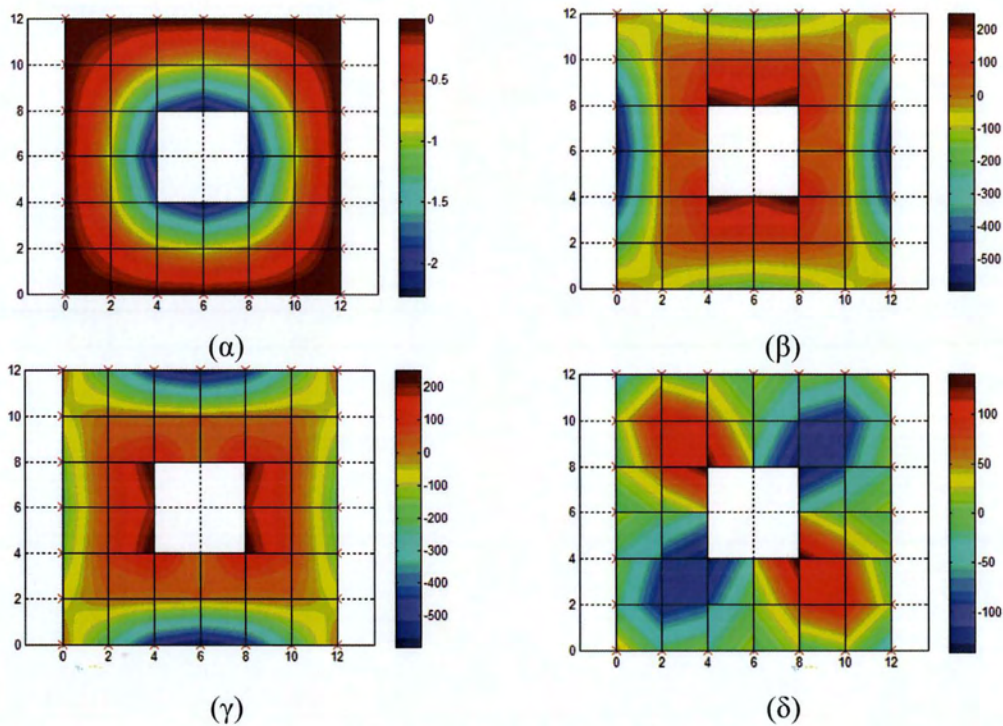


**Σχήμα 4-17:** Κανάβος πλάκας με εσωτερική τρύπα(12×12)



**Σχήμα 4-18:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του παραμορφωμένου φορέα.

Για τις βυθίσεις  $w$  και για τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  για πύκνωση του κανάβου  $6 \times 6$  παίρνουμε τα ακόλουθα γραφήματα:



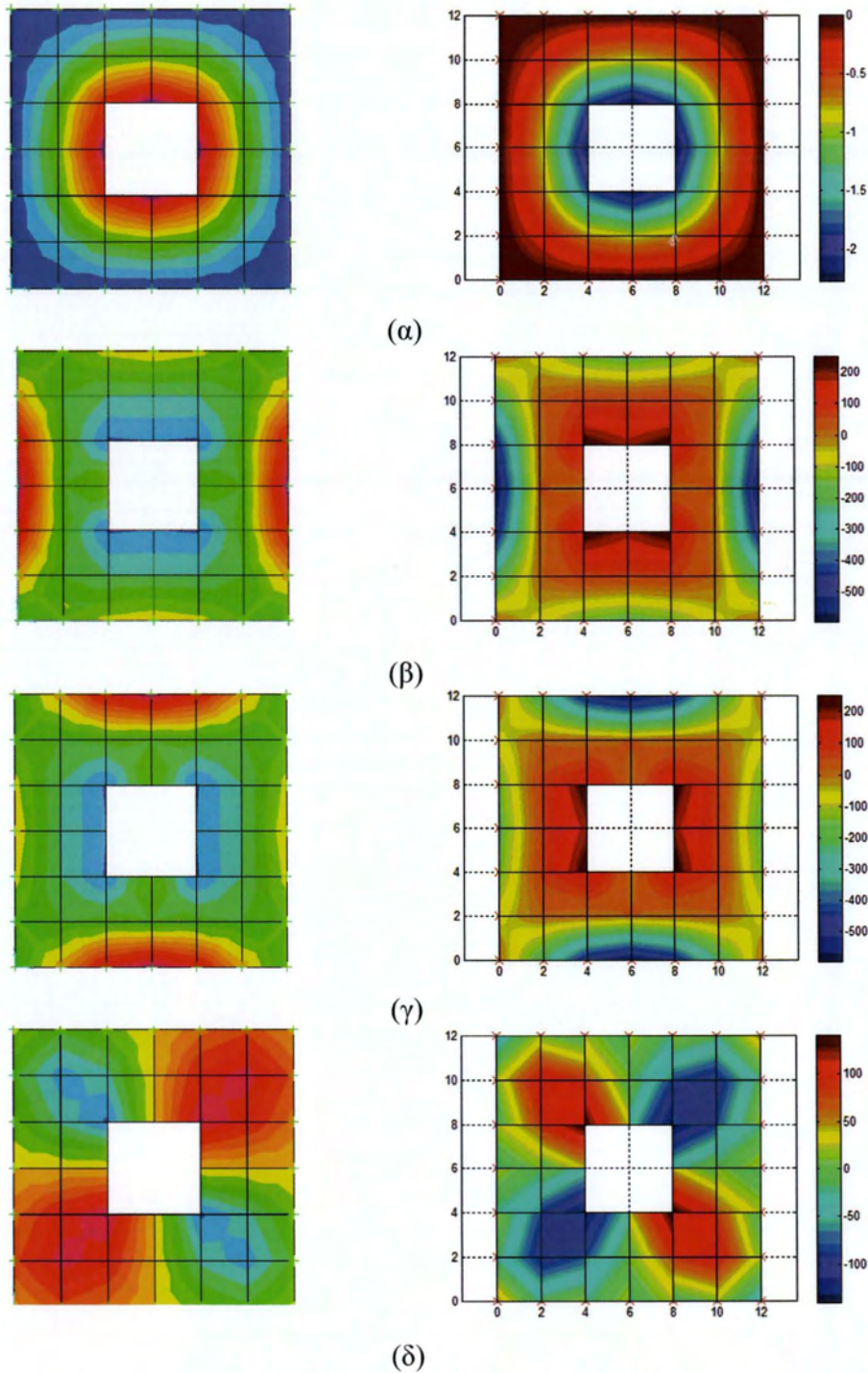
**Σχήμα 4-19:** Γραφήματα (α) βυθίσεις (β)  $M_x$  (γ)  $M_y$  (δ)  $M_{xy}$  πύκνωση κανάβου ( $6 \times 6$ )

Κάνοντας την επίλυση της εφαρμογής στο SAP2000 για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των  $w$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που παίρνουμε για το κέντρο του κάτω πέλματος της πλάκας είναι:

	ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ		
	6×6	12×12	18×18
$w$	-2.4177	-2.314	-2.2969
$\theta_x$	0	0	0
$\theta_y$	0	0	0
$M_x$	412.3578	366.95639	361.133226
$M_y$	235.962252	219.459	217.206446
$M_{xy}$	0	0	0

**Πίνακας 4.7:** Αποτελέσματα από το SAP2000 για διάφορους κανάβους

Τα αντίστοιχα γραφήματα για τις βυθίσεις  $w$  και τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που προκύπτουν από το SAP2000 για πυκνώσεις κανάβου (6×6) φαίνονται στον παρακάτω πίνακα σε παράθεση με τα γραφήματα του A.S.D.A.P.



**Σχήμα 4-20:** Σύγκριση γραφημάτων (α) βυθίσεις (β)  $M_x$  (γ)  $M_y$  (δ)  $M_{xy}$  για πύκνωση κανάβου (6×6). Αριστερή στήλη SAP2000 δεξιά στήλη A.S.D.A.P.

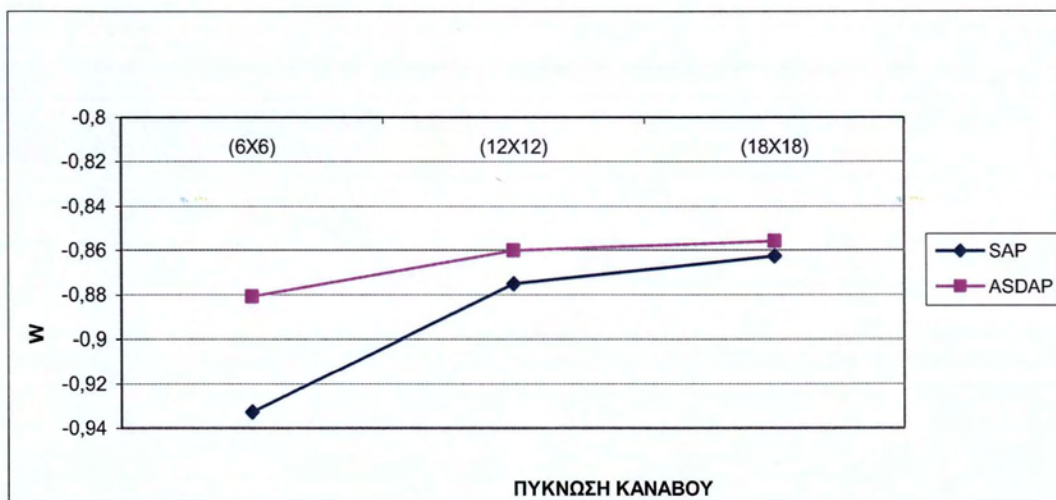


Με τη βοήθεια του προγράμματος excel απεικονίζονται με γραφήματα οι συγκρίσεις των αποτελεσμάτων των δυο προγραμμάτων A.S.D.A.P-SAP2000. Οι τιμές αφορούν το μέσον του κάτω πέλματος της πλάκας και στα δυο προγράμματα για τις διάφορες διακριτοποιήσεις.

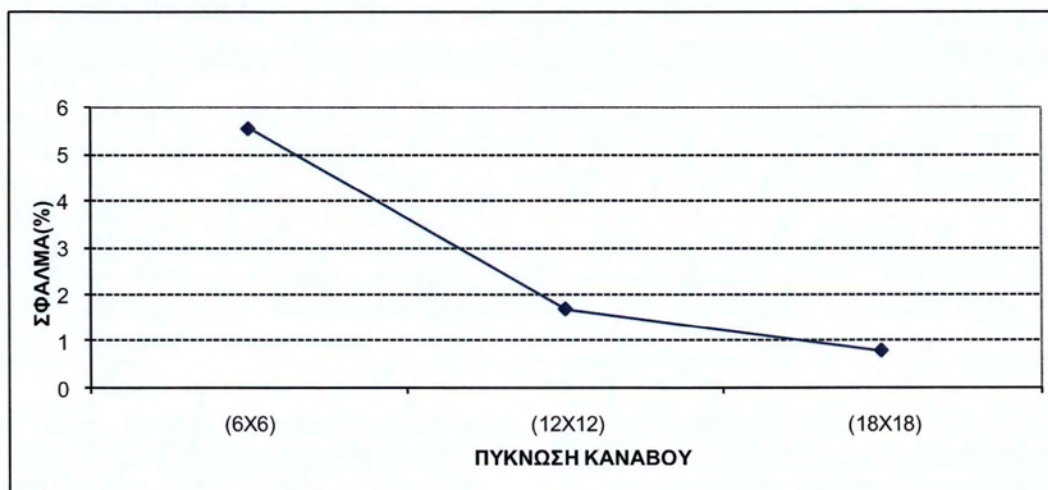
Για τις βυθίσεις  $w$  έχουμε:

ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	SAP2000	ΣΦΑΛΜΑ (%)
6×6	-0.8809	-0.9328	5.563894
12×12	-0.8602	-0.875	1.691429
18×18	-0.856	-0.8628	0.788132

**Πίνακας 4.8:** Σύγκριση βυθίσεων A.S.D.A.P-SAP2000



**Σχήμα 4-21:** Διάγραμμα για τις βυθίσεις των δύο προγραμμάτων.



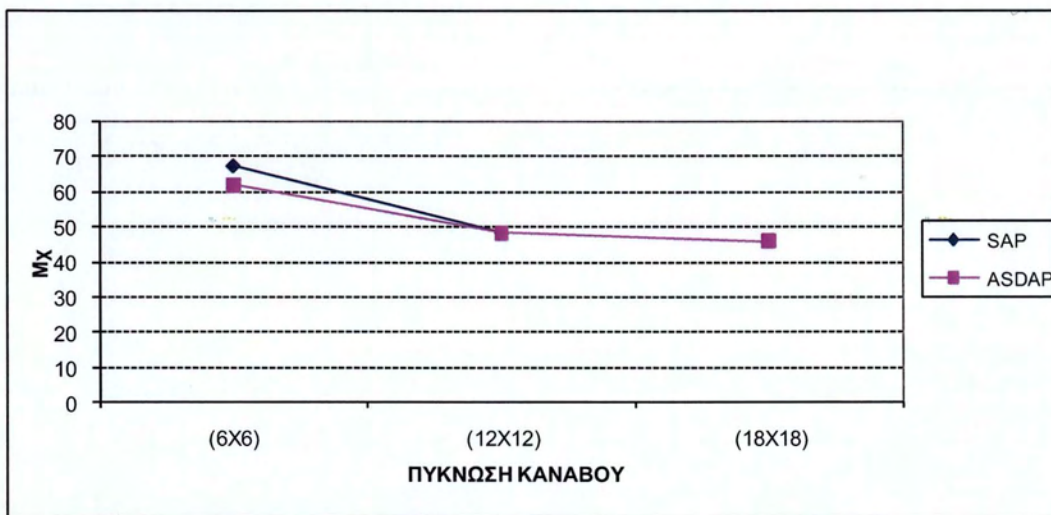
**Σχήμα 4-22:** Διάγραμμα σφάλματος βυθίσεων που παίρνουμε από το A.S.D.A.P σε σχέση με το SAP2000.

Παρατηρούμε από τα σχήματα *Σχήμα 4-19* και *Σχήμα 4-20* ότι οι τιμές για κάναβο (6×6) παρουσιάζουν μια διαφορά της τάξεως του 5% η οποία μικραίνει όσο αυξάνει η πυκνωση του κανάβου.

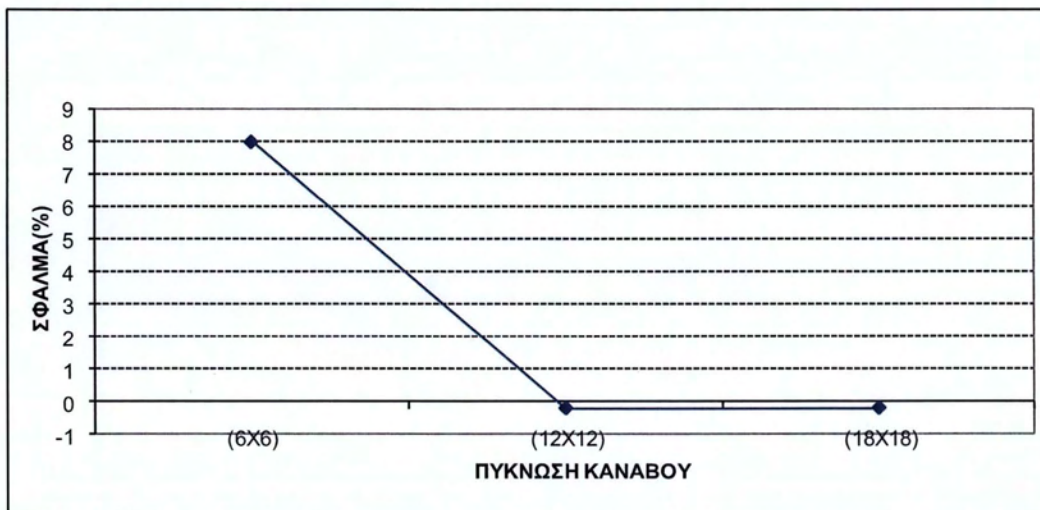
Για τις ροπές  $M_x$  έχουμε:

ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	SAP2000	ΣΦΑΛΜΑ (%)
6×6	61.8488	67.251	8.03
12×12	48.303	48.2	-0.21369
18×18	45.975	45.88	-0.20706

**Πίνακας 4.9:** Σύγκριση ροπών  $M_x$  A.S.D.A.P-SAP2000



**Σχήμα 4-23:** Διάγραμμα για τις ροπές  $M_x$  των δυο προγραμμάτων.



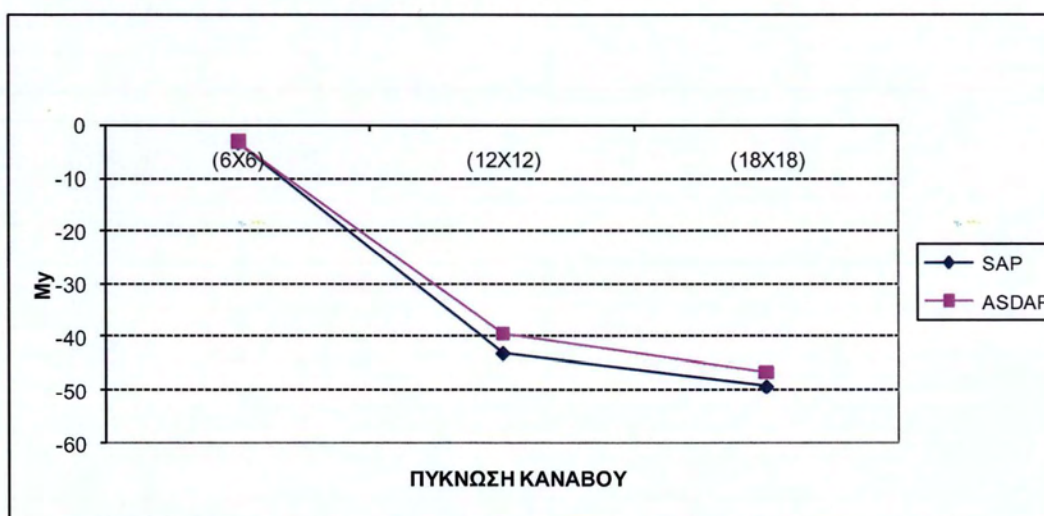
**Σχήμα 4-24:** Διάγραμμα σφάλματος ροπών  $M_x$  του A.S.D.A.P σε σχέση με το SAP2000.

Ομοίως από τα σχήματα Σχήμα 4-23 και Σχήμα 4-24 βλέπουμε ότι οι τιμές των ροπών  $M_x$  για κάναβο (6×6) παρουσιάζουν μια διαφορά της τάξεως του 8% η οποία σχεδόν μηδενίζεται όσο αυξάνει η πυκνωση του κανάβου.

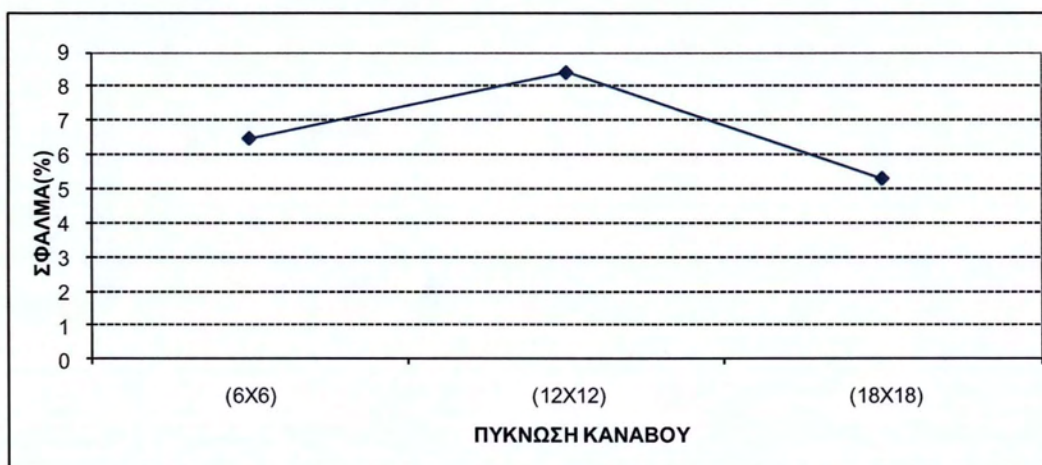
Για τις ροπές  $M_y$  έχουμε:

ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	SAP2000	ΣΦΑΛΜΑ(%)
6×6	-3.1254	-3.3419	6.478351
12×12	-39.5209	-43.1546	8.420192
18×18	-46.7842	-49.4	5.29514

Πίνακας 4.10: Σύγκριση ροπών  $M_y$  A.S.D.A.P-SAP2000



Σχήμα 4-25: Διάγραμμα για τις ροπές  $M_y$  των δύο προγραμμάτων.



Σχήμα 4-26: Διάγραμμα σφάλματος ροπών  $M_y$  του A.S.D.A.P σε σχέση με το SAP2000.

Στα σχήματα Σχήμα 4-25 και Σχήμα 4-26 για τις ροπές  $M_y$  παρατηρούμε ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων βελτιώνεται με την αύξηση των στοιχείων που χρησιμοποιούμε.

### 4.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

#### 4.3.1 ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΣΤΙΣ 4 ΠΛΕΥΡΕΣ

##### 4.3.1.1 ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ.

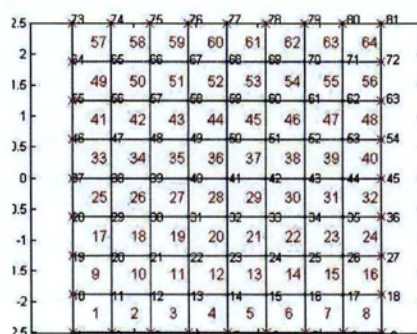
Έστω μια τετραγωνική πλάκα πακτωμένη στις 4 πλευρές της η οποία φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο  $q(x,y)$  και ζητείται η βύθιση στο κέντρο της πλάκας. Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν από το κώδικα A.S.D.A.P συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που δίνει ως λύσεις το βιβλίο του Zienkiewicz-Taylor (2005).

Κάνοντας την επίλυση αυτής της εφαρμογής στον κώδικα A.S.D.A.P για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των βυθίσεων  $w$ , που παίρνουμε για το κέντρο της πλάκας είναι:

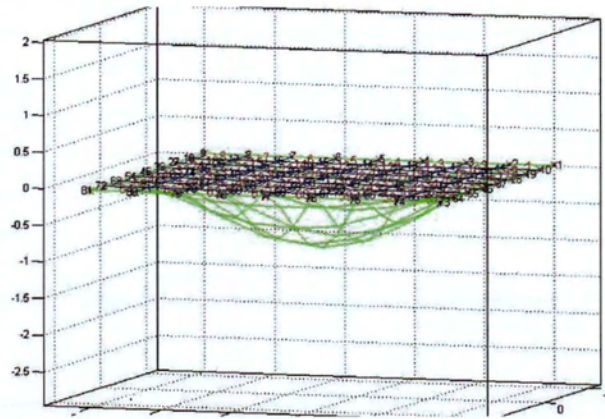
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	ΒΥΘΙΣΕΙΣ $w$ (m)
2×2	0.0214
4×4	0.0203
8×8	0.0188
16×16	0.0185

Πίνακας 4.11: Αποτελέσματα A.S.D.A.P

Τα γραφήματα του κανάβου και της παραμορφωμένης πλάκας που εμφανίζει ο κώδικας για πυκνωση κανάβου (8×8) όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η παραμόρφωση του φορέα δίνεται από τα παρακάτω σχήματα

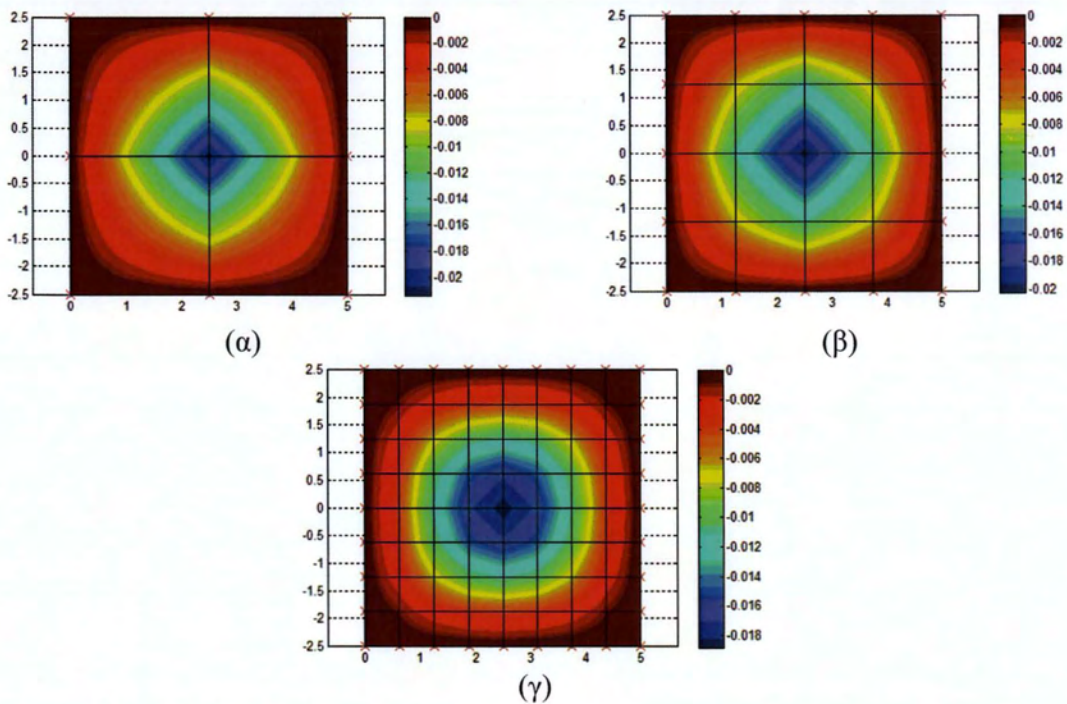


Σχήμα 4-27: Κανάβος πλάκας (8×8).



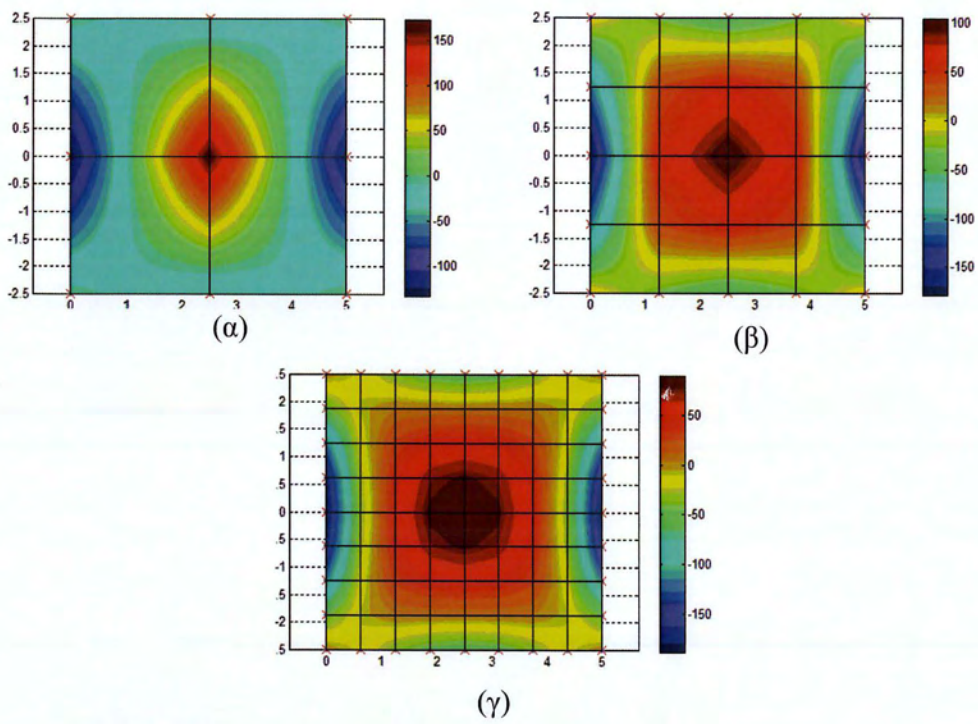
Σχήμα 4-28: Τρισδιάστατη απεικόνιση του παραμορφωμένου φορέα.

Τα γραφήματα των βυθίσεων  $w$  που παίρνουμε από τον κώδικα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

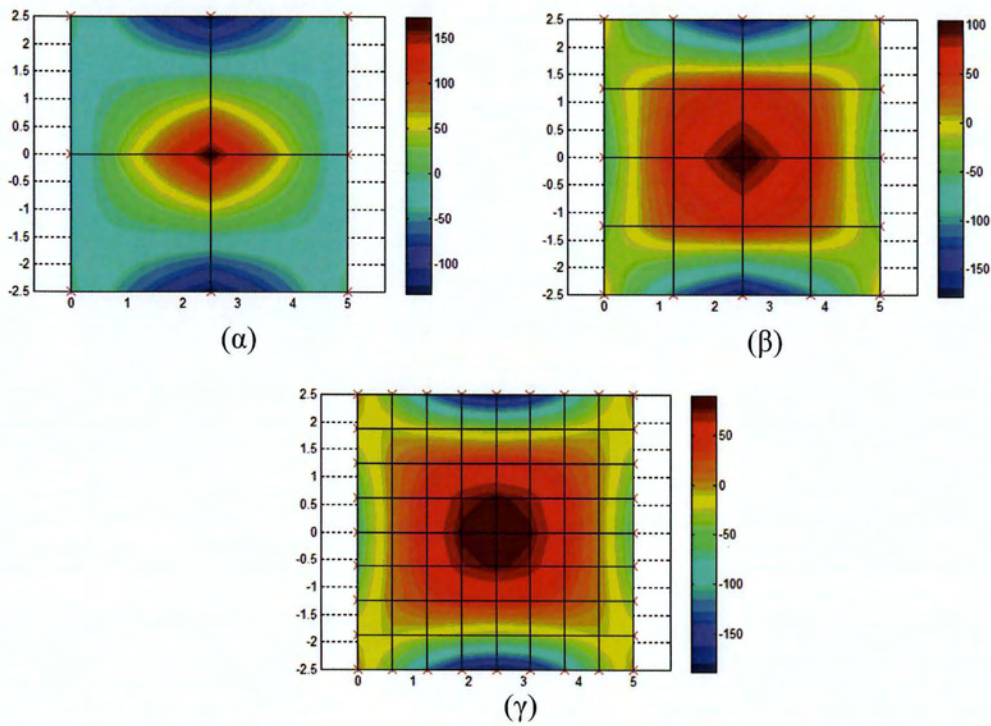


Σχήμα 4-29: Γραφήματα βυθίσεων για κανάβους (α)  $(2 \times 2)$ , (β)  $(4 \times 4)$ , (γ)  $(8 \times 8)$ .

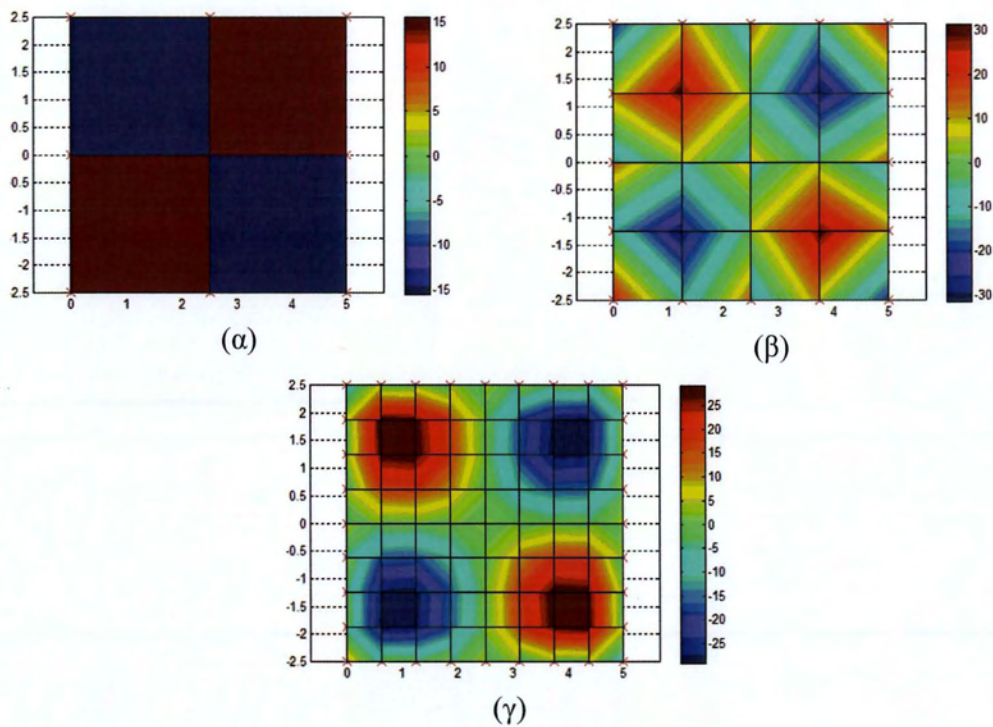
Τα αντίστοιχα γραφήματα για τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που προκύπτουν για πυκνώσεις κανάβου  $(2 \times 2)$ ,  $(4 \times 4)$  και  $(8 \times 8)$  φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.



Σχήμα 4-30: Γραφήματα ροπών  $M_x$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).



Σχήμα 4-31: Γραφήματα ροπών  $M_y$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).



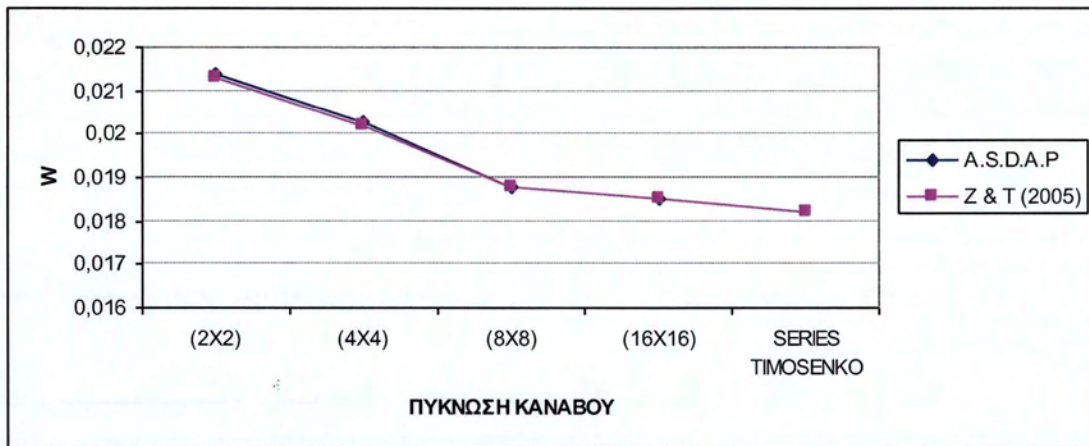
**Σχήμα 4-32:** Γραφήματα ροπών  $M_{xy}$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίθηκαν με αυτά που δίνονται ως λύσεις σε αντίστοιχη εφαρμογή του βιβλίου του Zienkiewicz-Taylor (2005). Και οι διαφορές που παρουσιάζουν είναι μηδενικές.

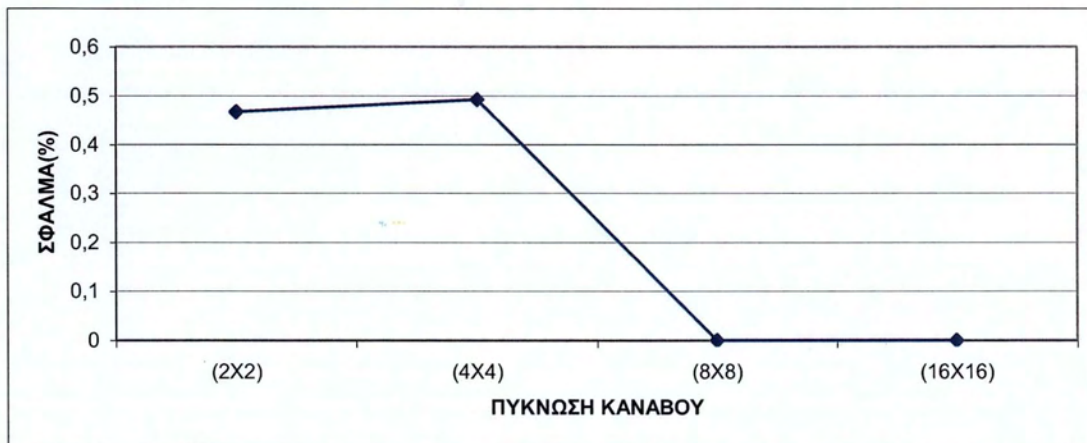
ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)			
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	Z & T (2005)	ΣΦΑΛΜΑ(%)
2×2	0.0214	0.0213	0.467
4×4	0.0203	0.0202	0.4926
8×8	0.0188	0.0188	0
16×16	0.0185	0.0185	0

**Πίνακας 4.12:** Σύγκριση βυθίσεων

Οι παραπάνω τιμές των βυθίσεων και των σφαλμάτων τους φαίνονται και στα παρακάτω γραφήματα:



Σχήμα 4-33: Διάγραμμα για τις βυθίσεις.



Σχήμα 4-34: Διάγραμμα σφάλματος τιμών A.S.D.A.P σε σχέση με το Z & T (2005).

Από τα σχήματα Σχήμα 4-27 και Σχήμα 4-28 παρατηρούμε ότι οι τιμές του κώδικα A.S.D.A.P είναι σχεδόν ταυτόσμιες με αυτές από το βιβλίο του Zienkiewicz-Taylor (2005).

#### 4.3.1.2 ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

Έστω μια τετραγωνική πλάκα πακτωμένη στις 4 πλευρές της η οποία φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της και ζητείται η βύθιση στο κέντρο της πλάκας. Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν από το κώδικα A.S.D.A.P συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που δίνει ως λύσεις το βιβλίο του Zienkiewicz-Taylor (2005).

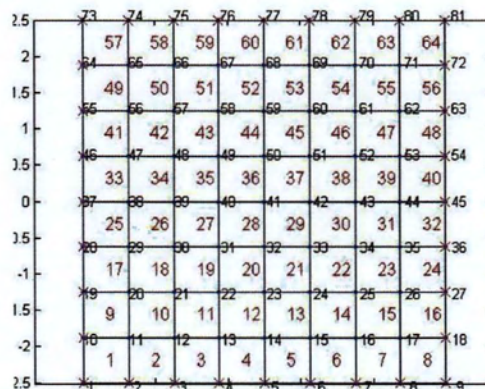
Κάνοντας την επίλυση αυτής της εφαρμογής στον κώδικα A.S.D.A.P για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των βυθίσεων  $w$ , που παίρνουμε για το κέντρο της πλάκας είναι:



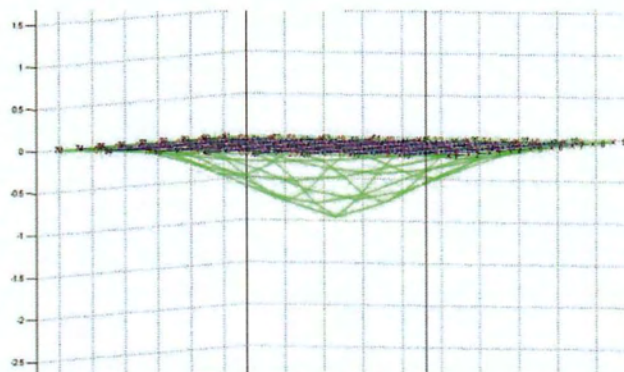
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)
2×2	0.0034
4×4	0.0035
8×8	0.0034
16×16	0.0033

**Πίνακας 4.13:** Αποτελέσματα A.S.D.A.P

Τα γραφήματα του κανάβου και της παραμορφωμένης πλάκας που εμφανίζει ο κώδικας για πύκνωση κανάβου 8×8 όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η παραμόρφωση του φορέα δίνεται από τα παρακάτω σχήματα

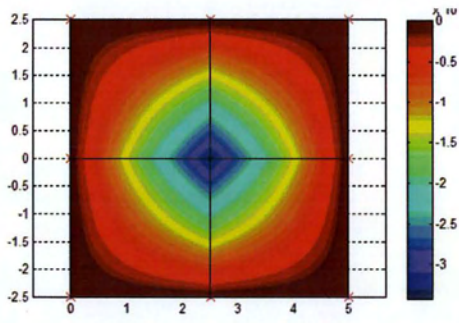


**Σχήμα 4-35:** Κανάβος πλάκας (8×8).

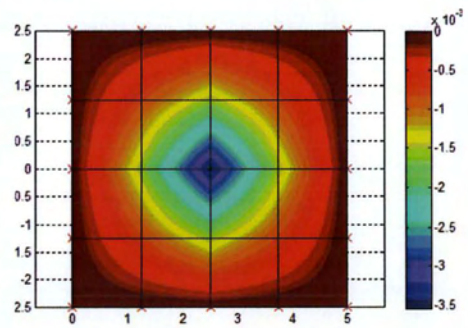


**Σχήμα 4-36:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του παραμορφωμένου φορέα.

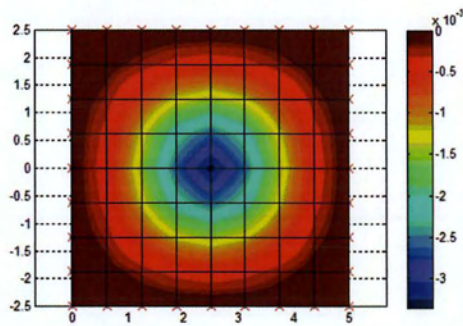
Τα γραφήματα των βυθίσεων w που παίρνουμε από τον κώδικα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



(α)



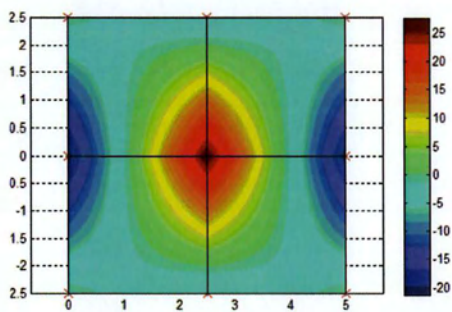
(β)



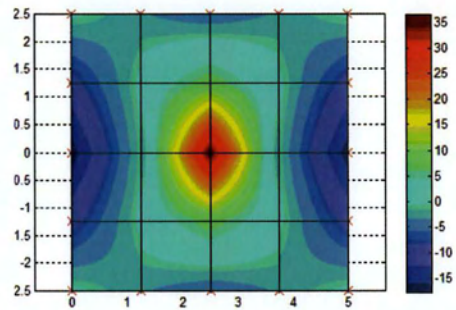
(γ)

**Σχήμα 4-37:** Γραφήματα βυθίσεων για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

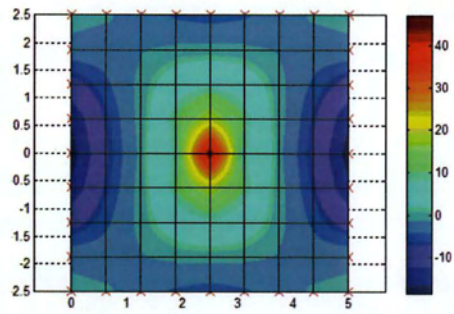
Τα αντίστοιχα γραφήματα για τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που προκύπτουν για πυκνώσεις κανάβου (2×2), (4×4) και (8×8) φαίνονται στους παρακάτω πίνακες



(α)

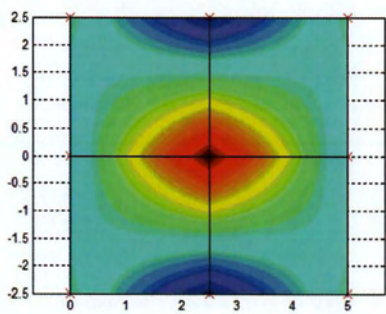


(β)

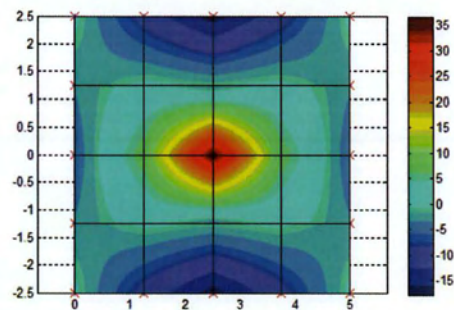


(γ)

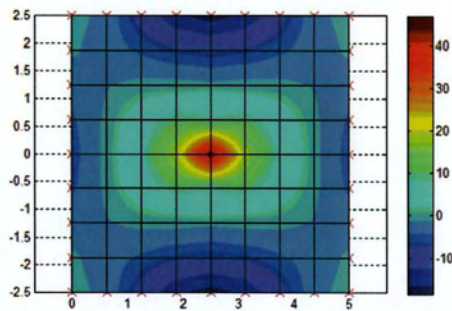
Σχήμα 4-38: Γραφήματα ροπών  $M_x$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).



(α)

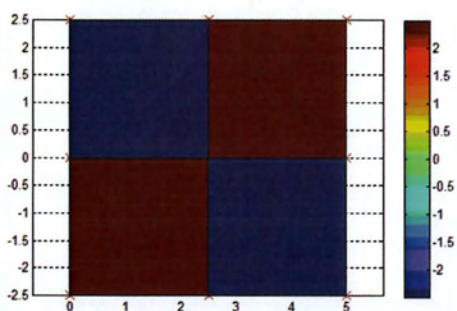


(β)

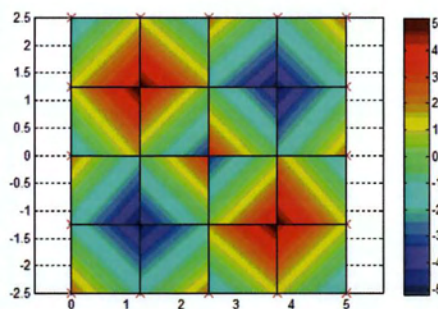


(γ)

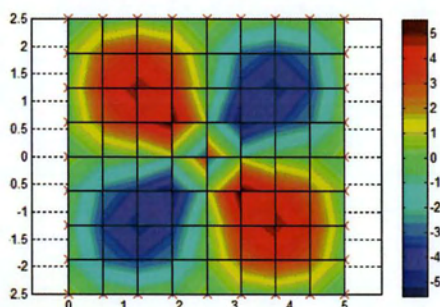
Σχήμα 4-39: Γραφήματα ροπών  $M_y$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).



(α)



(β)



(γ)

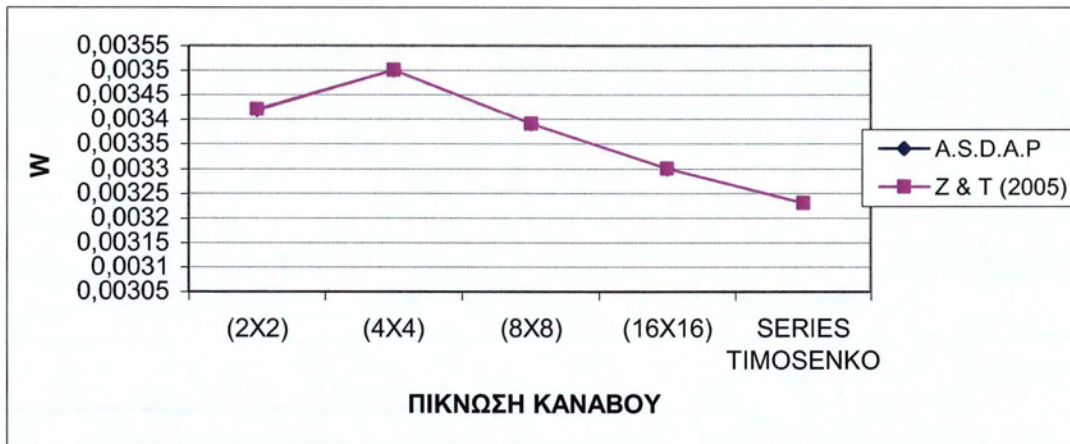
**Σχήμα 4-40:** Γραφήματα ροπών  $M_{xy}$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίθηκαν με αυτά που δίνονται ως λύσεις σε αντίστοιχη εφαρμογή του βιβλίου του Zienkiewicz-Taylor (2005). Και οι διαφορές που παρουσιάζουν είναι μηδενικές.

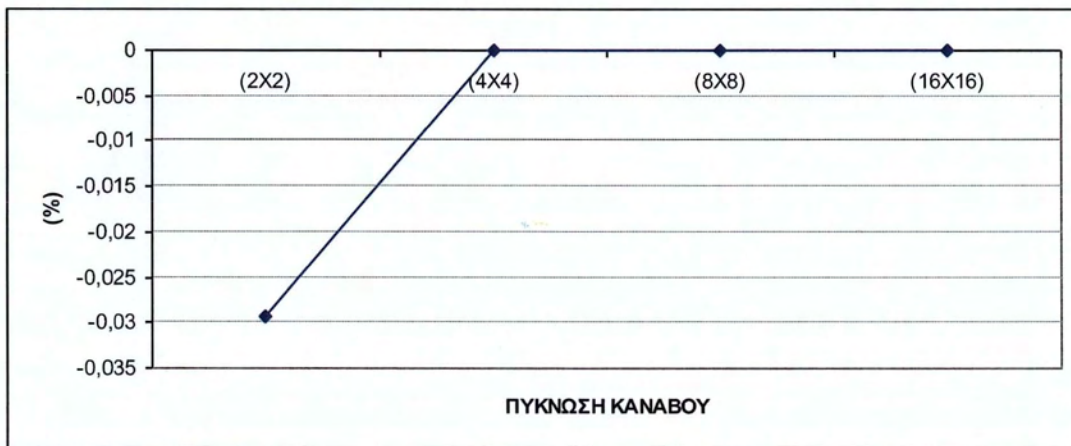
ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)			
ΚΑΝΑΒΟΣ	A.S.D.A.P	Z & T (2005)	ΣΦΑΛΜΑ(%)
2×2	0.0034	0.00342	-0.029
4×4	0.0035	0.0035	0
8×8	0.0034	0.0034	0
16×16	0.0033	0.0033	0

**Πίνακας 4.14:** Σύγκριση βυθίσεων

Οι παραπάνω τιμές των βυθίσεων και των σφαλμάτων τους φαίνονται και στα παρακάτω γραφήματα:



Σχήμα 4-41: Διάγραμμα για τις βυθίσεις



Σχήμα 4-42: Διάγραμμα σφάλματος τιμών A.S.D.A.P σε σχέση με το Z & T (2005).

Παρατηρούμε από τα σχήματα Σχήμα 4-41 και Σχήμα 4-42 ότι ο A.S.D.A.P δίνει πολύ καλή προσέγγιση των αποτελεσμάτων όπου μπορούμε να πούμε ότι είναι και ακριβής σε μεγάλο αριθμό στοιχείων.

#### 4.3.2 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΗΣ

##### 4.3.2.1 ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ.

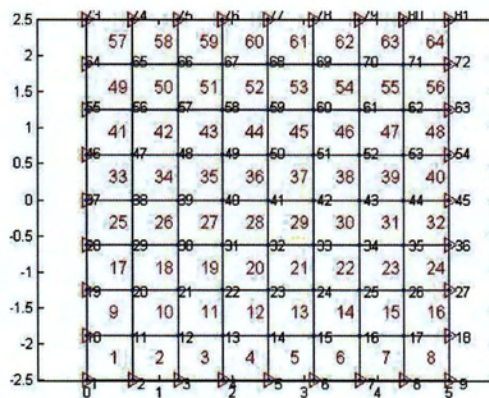
Έστω μια τετραγωνική πλάκα απλά εδραζόμενη στις 4 πλευρές της η οποία φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο  $q(x,y)$  και ζητείται η βύθιση στο κέντρο της πλάκας. Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν από το κώδικα A.S.D.A.P συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που δίνει ως λύσεις το βιβλίο του Zienkiewicz-Taylor (2005).

Κάνοντας την επίλυση αυτής της εφαρμογής στον κώδικα A.S.D.A.P για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των βυθίσεων  $w$ , που παίρνουμε για το κέντρο της πλάκας είναι:

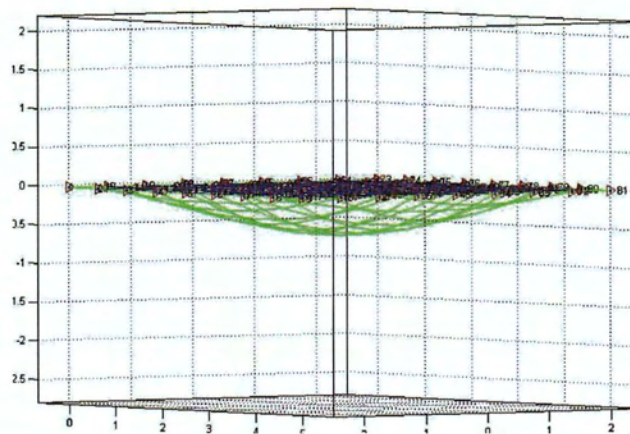
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)
2×2	0.0751
4×4	0.0625
8×8	0.0596
16×16	0.0589

**Πίνακας 4.15:** Αποτελέσματα A.S.D.A.P.

Τα γραφήματα του κανάβου και της παραμορφωμένης πλάκας που εμφανίζει ο κώδικας για πύκνωση κανάβου (8×8) όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η παραμόρφωση του φορέα δίνεται από τα παρακάτω σχήματα:

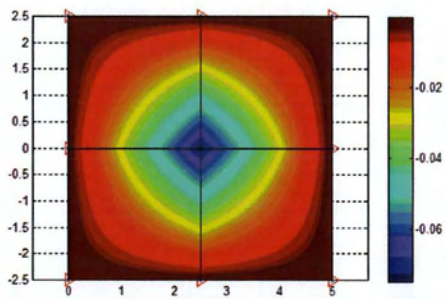


**Σχήμα 4-43:** Κανάβος πλάκας (8×8).

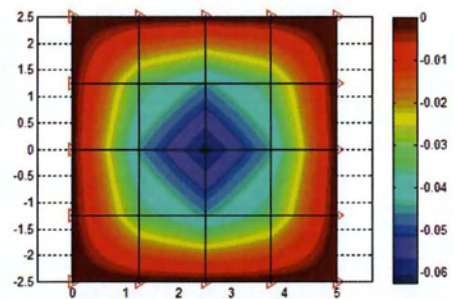


**Σχήμα 4-44:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του παραμορφωμένου φορέα.

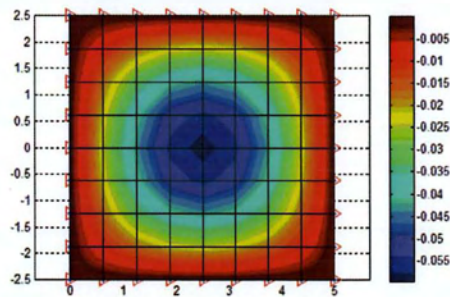
Τα γραφήματα των βυθίσεων w που παίρνουμε από τον κώδικα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



(α)



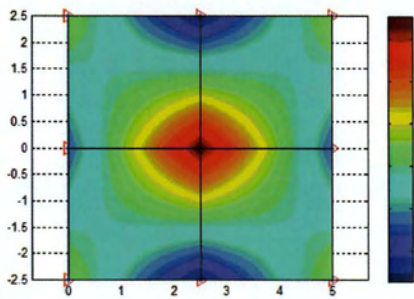
(β)



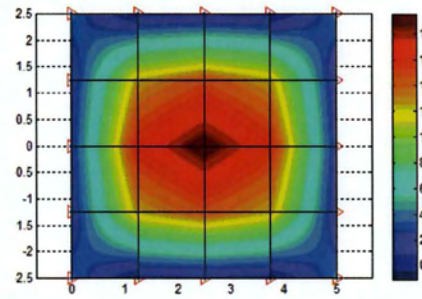
(γ)

**Σχήμα 4-45:** Γραφήματα βυθίσεων για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

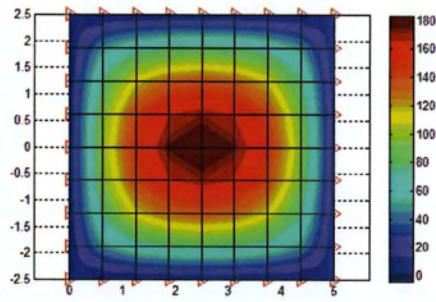
Τα αντίστοιχα γραφήματα για τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που προκύπτουν για πυκνώσεις κανάβου (2×2), (4×4) και (8×8) φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:



(α)

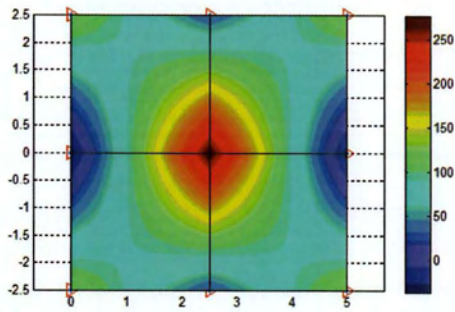


(β)

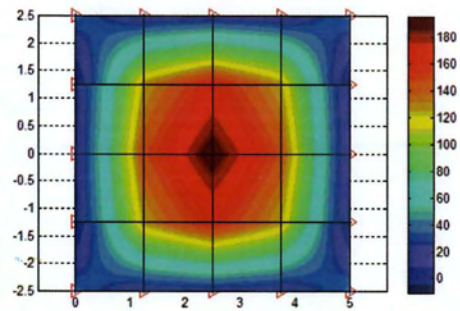


(γ)

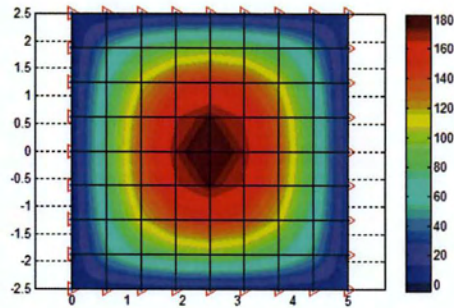
Σχήμα 4-46: Γραφήματα ροπών  $M_x$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).



(α)



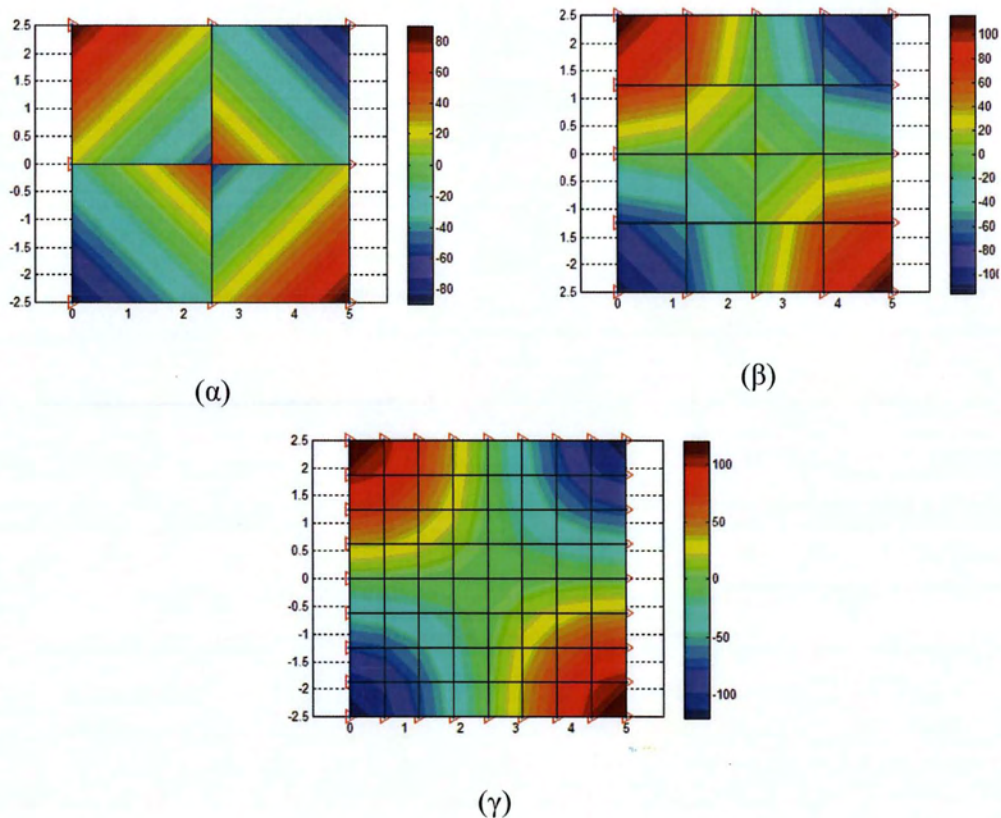
(β)



(γ)

Σχήμα 4-47: Γραφήματα ροπών  $M_y$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).





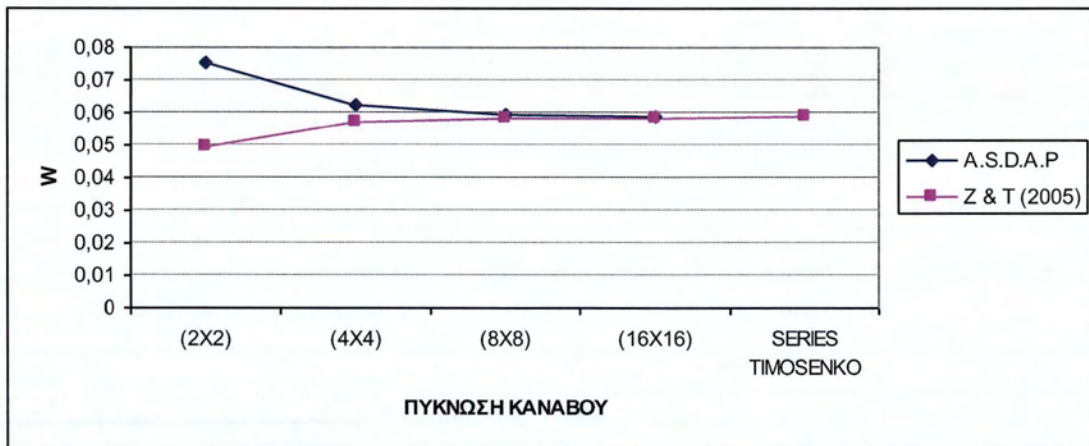
**Σχήμα 4-48:** Γραφήματα ροπών  $M_{xy}$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

Τα αποτελέσματα αυτά συγκρίθηκαν με αυτά που δίνονται ως λύσεις σε αντίστοιχη εφαρμογή του βιβλίου του Zienkiewicz-Taylor (2005). Και οι διαφορές που παρουσιάζουν μηδενίζονται όσο αυξάνονται τα στοιχεία.

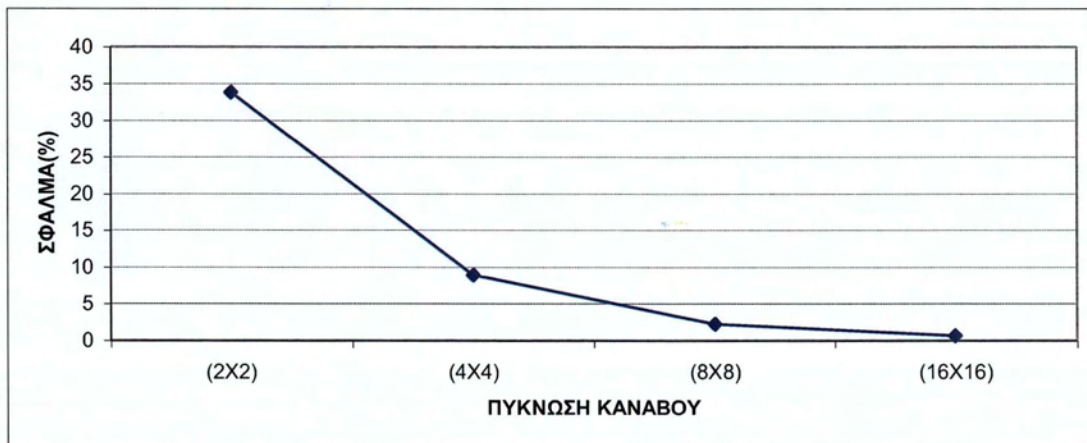
ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)			
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	Z & T (2005)	ΣΦΑΛΜΑ(%)
2×2	0.0751	0.0497	33.8215
4×4	0.0625	0.05689	8.976
8×8	0.0596	0.05825	2.2651
16×16	0.0589	0.05849	0.696

**Πίνακας 4.16:** Σύγκριση βυθίσεων

Οι παραπάνω τιμές των βυθίσεων και των σφαλμάτων τους φαίνονται και στα παρακάτω γραφήματα:



Σχήμα 4-49: Διάγραμμα για τις βυθίσεις.



Σχήμα 4-50: Διάγραμμα σφάλματος τιμών A.S.D.A.P σε σχέση με το Z & T (2005).

Παρατηρούμε από τα σχήματα Σχήμα 4-49 και Σχήμα 4-50 ότι για μικρό αριθμό στοιχείων, κάνναβη(2×2), η απόκλιση των τιμών που δίνει ο κώδικας είναι μεγάλη 32% εξαιτίας του μικρού αριθμού των στοιχείων. Όμως με τον διπλασιασμό των στοιχείων, κάνναβος(4×4), η απόκλιση πέφτει στο 8% και με συνεχή αύξηση των στοιχείων του κανάβου η απόκλιση γίνεται μηδενική.

#### 4.3.2.2 ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

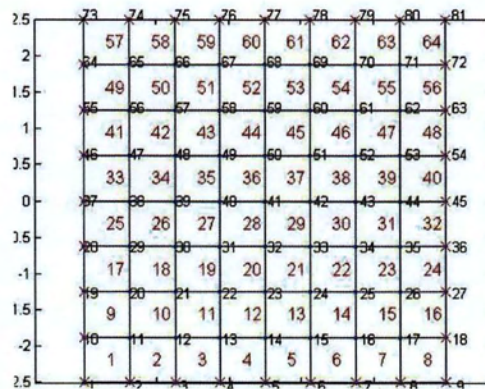
Έστω μια τετραγωνική πλάκα απλά εδραζόμενη στις 4 πλευρές της η οποία φορτίζεται με συγκεντρωμένο φορτίο στο μέσον της και ζητείται η βύθιση στο κέντρο της πλάκας. Τα αποτελέσματα που βρέθηκαν από το κώδικα A.S.D.A.P συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που δίνει ως λύσεις το βιβλίο του Zienkiewicz-Taylor (2005).

Κάνοντας την επίλυση αυτής της εφαρμογής στον κώδικα A.S.D.A.P για διάφορες πυκνώσεις του κανάβου τα αποτελέσματα των βυθίσεων  $w$ , που παίρνουμε για το κέντρο της πλάκας είναι:

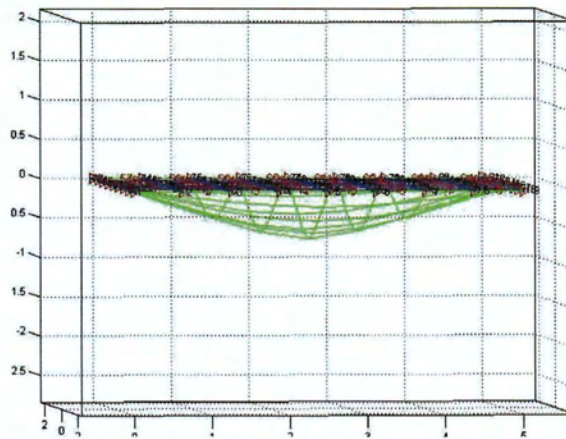
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)
2×2	0.008
4×4	0.0071
8×8	0.0068
16×16	0.0067

**Πίνακας 4.17:** Αποτελέσματα A.S.D.A.P

Τα γραφήματα του κανάβου και της παραμορφωμένης πλάκας που εμφανίζει ο κώδικας για πύκνωση κανάβου (8×8) όπου φαίνεται με λεπτομέρεια η παραμόρφωση του φορέα δίνεται από τα παρακάτω σχήματα

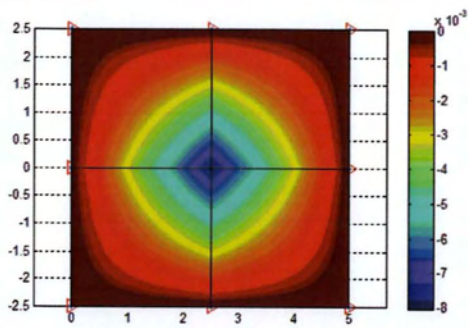


**Σχήμα 4-51:** Κανάβος πλάκας (8×8).

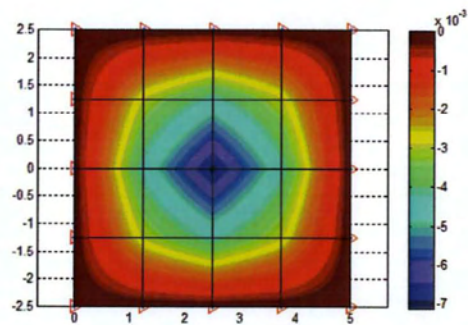


**Σχήμα 4-52:** Τρισδιάστατη απεικόνιση του παραμορφωμένου φορέα.

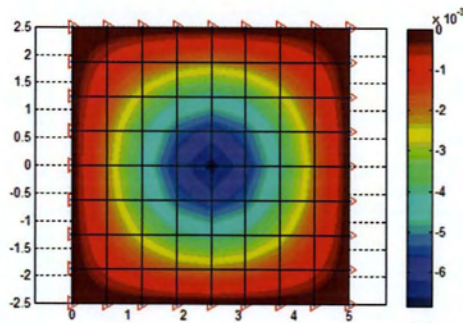
Τα γραφήματα των βυθίσεων w που παίρνουμε από τον κώδικα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



(α)



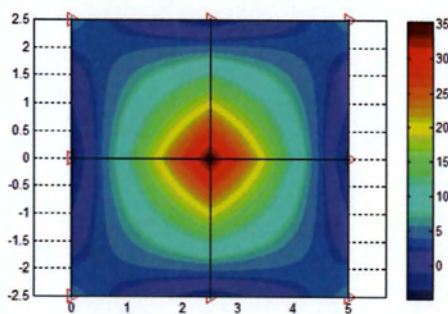
(β)



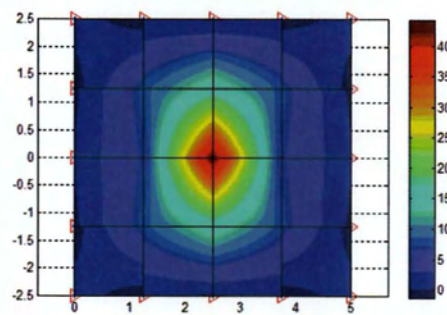
(γ)

**Σχήμα 4-53:** Γραφήματα βυθίσεων για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

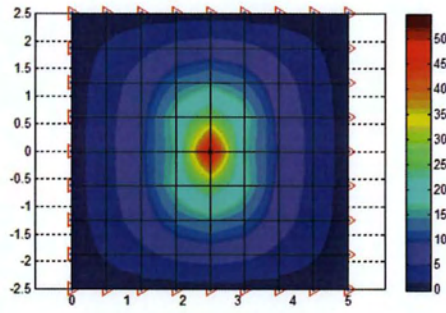
Τα αντίστοιχα γραφήματα για τις ροπές  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  που προκύπτουν για πυκνώσεις κανάβου (2×2), (4×4) και (8×8) φαίνονται στους παρακάτω πίνακες



(α)

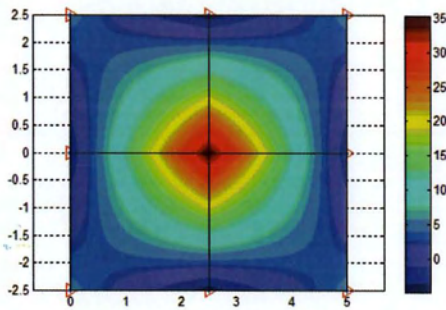


(β)

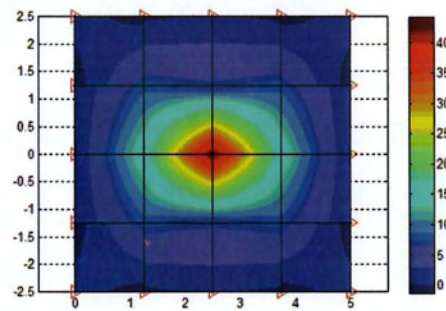


(γ)

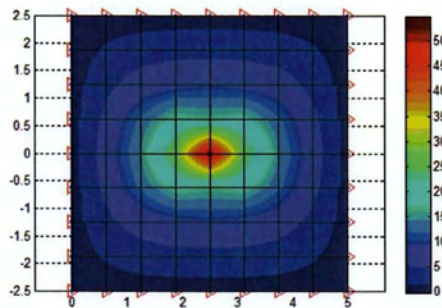
Σχήμα 4-54: Γραφήματα ροπών  $M_x$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).



(α)

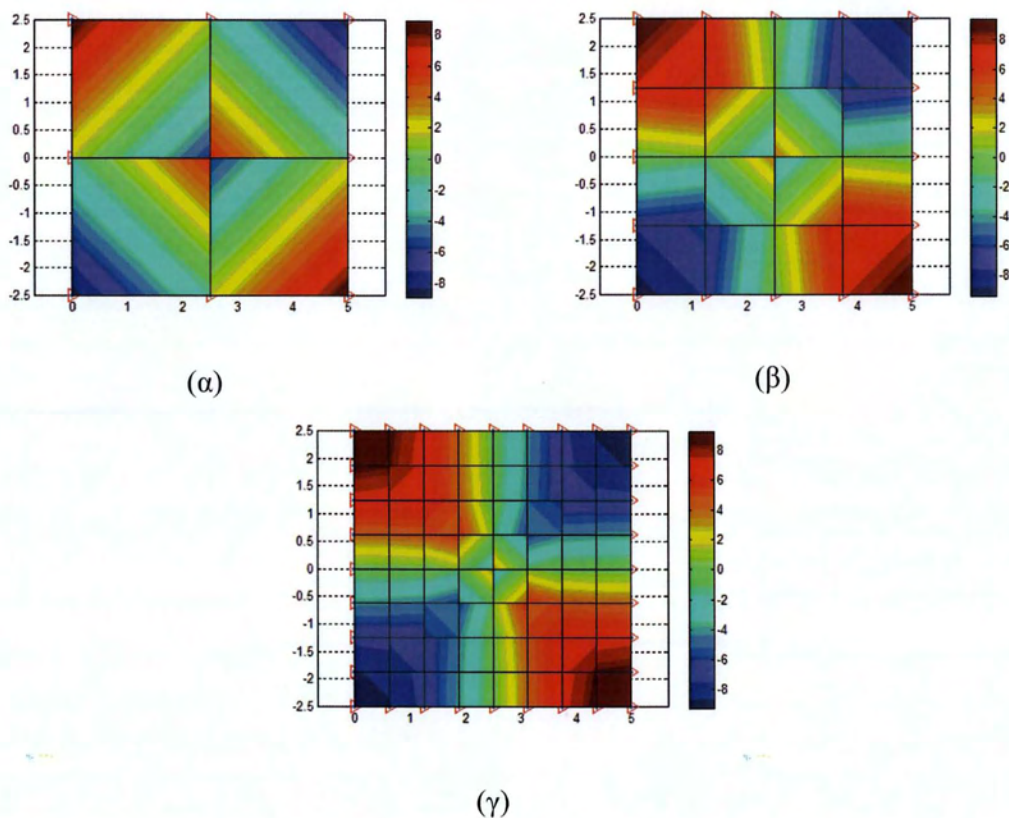


(β)



(γ)

Σχήμα 4-55: Γραφήματα ροπών  $M_y$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

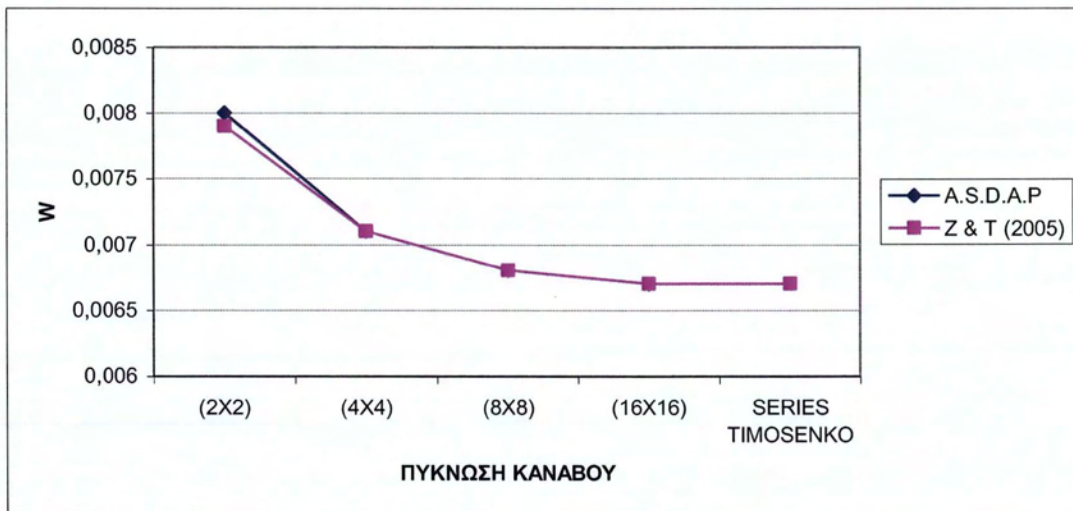


Σχήμα 4-56: Γραφήματα ροπών  $M_{xy}$  για κανάβους (α) (2×2), (β) (4×4), (γ) (8×8).

ΒΥΘΙΣΕΙΣ w (m)			
ΔΙΚΤΥΟ ΠΣ	A.S.D.A.P	Z & T (2005)	ΣΦΑΛΜΑ (%)
2×2	0.008	0.0079	1.25
4×4	0.0071	0.0071	0
8×8	0.0068	0.0068	0
16×16	0.0067	0.0067	0

Πίνακας 4.18: Σύγκριση βυθίσεων

Οι παραπάνω τιμές των βυθίσεων και των σφαλμάτων τους φαίνονται και στα παρακάτω γραφήματα



Σχήμα 4-57: Διάγραμμα για τις βυθίσεις.



Σχήμα 4-58: Διάγραμμα σφάλματος τιμών A.S.D.A.P σε σχέση με το Z & T (2005).

Από τα σχήματα Σχήμα 4-57 και Σχήμα 4-58 βλέπουμε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε έχουν μηδενική απόκλιση από αυτά της εφαρμογή του βιβλίου του Zienkiewicz-Taylor (2005).

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Μ.Παπαδρακάκης, “Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων”, εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 2001.

Ε.Ι.Σαμπουντζάκης, “Θεωρία πλακών”, πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π Αθήνα 2005.

Ο.С. Zienkiwicz and R.L.Taylor, “The Finite Element, Method. Vol. 2.” MacGraw-H.M, New York 1989.

C.S. Krishnamoorthy, “Finite Element Analysis, Theory and Programming Vol. 2”. Tata MacGraw- Hill. Education, New Delhi 1995.

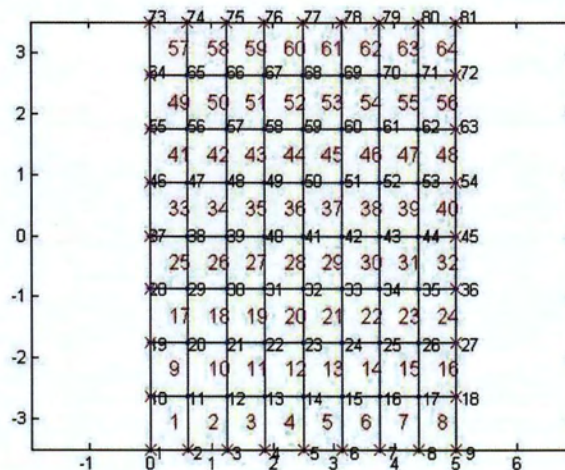


## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι - ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΤΗ

### Π.1 ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΑΡΧΕΙΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Για να τρέξει ο κώδικας A.S.D.A.P θα πρέπει να δημιουργηθεί ένα αρχείο δεδομένων (Input File) από τον χρήστη, το οποίο θα είναι ένα αρχείο m-file του MATLAB. Ο χρήστης μπορεί να δώσει οποιοδήποτε όνομα επιθυμεί στο Input File του.

Παρακάτω περιγράφονται τα βασικά βήματα για την ανάλυση μιας ορθογωνικής πλάκας με μήκη πλευρών 5m και 7m πακτωμένη στις 4 πλευρές και φορτισμένη με ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο. Με μέτρο ελαστικότητας  $E=21000000$  συντελεστή poisson  $\nu=0.3$  και πάχος πλάκας  $t=0.15$ . Η διακριτοποίηση της πλάκας με τετράπλευρα στοιχεία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα Ι-1: Κάναβος

Το αρχείο δεδομένων (input file) για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος φαίνεται παρακάτω:

```
% clear the memory and start the analysis
ClearAll

Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;

E = 21000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t = 0.15; % thickness

% plate dimensions
L = 5; % length of the beam
c = 3.5; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line

points=[0,-c;L,-c;L,c;0,c];
```

```

elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties
[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,8,8,'x');

q0=150;
for i=1:size(elements,1)
    ElemLoads{i,1}=i;
    ElemLoads{i,2}=q0;
end;

[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[0,c,L,-c],[1 1 1],'or');

PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')

% When the program meets this command analysis is performed.
RunAnalysis
% View displaced shape
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl*50)
% View displacement contour, use 1,2,3 to switch calculate
w,thetax,thetay
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,3)
% View Stresses, use 1,2,3 to switch calculate Mx,My,Mxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,1)
% View Strain, use 1,2,3 to switch calculate kx,ky,kxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)

Dpl

% terminate the programm and exit
exitProgram

```

## Π.1.2 ΕΝΤΟΛΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

ClearAll  
από προηγούμενες διαδικασίες

Ωστε να καθαρίσει η μνήμη του MATLAB

Analysis Type='Static'  
εκτελέσει ο κώδικας.

Δηλώνει τον τύπο της ανάλυσης που θα

Analysis.ndim=3;

Βαθμοί ελευθερίας σε κάθε κόμβο.

Έπειτα ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος:

### 1) Χαρακτηριστικά πλάκας

E=21000000 μέτρο ελαστικότητας.

nu=0.3 συντελεστής Poisson.

t=0.15 πάχος πλάκας.

## 2) Διαστάσεις πλάκας

`L=5` μήκος πλάκας.

`c=3.5` απόσταση από τη μέση επιφάνεια μέχρι το άκρο ή αλλιώς το μισό του πλάτους.

## 3) Εντολές

```
points=[0, -c; L, -c, L, c; 0, c];
```

Δηλώνει τα 4 σημεία της ορθογωνικής πλάκας, κάθε ζευγάρι δηλώνει τις συντεταγμένες ενός σημείου, ο πρώτος χαρακτήρας δηλώνει την τετμημένη και ο δεύτερος την τεταγμένη του σημείου. (π.χ το πρώτο σημείο είναι το  $x=0$  και  $y=-c$ ).

```
elemprop={'Plate', E, nu, t}
```

Βάζοντας την λέξη **Plate** δηλώνουμε τον τρόπο της στατικής επίλυσης που θα ακολουθήσει ο κώδικας. (σε περίπτωση επίπεδης έντασης ή παραμόρφωσης βάζουμε **pstress** ή **pstrain** αντίστοιχα).

## 4) Διακριτοποίηση

```
[nodes, elements]=mesh(nodes, elements, elemprop, points,  
8, 8, 'x');
```

Στην πέμπτη και έκτη θέση τοποθετούμε τον αριθμό των στοιχείων που θέλουμε σε κάθε διεύθυνση. Ο τελευταίος όρος `'x'` δηλώνει σε ποιά διεύθυνση αναφέρεται ο αριθμός της πέμπτης θέσης. (π.χ **8** στοιχεία στη διεύθυνση `'x'`).

## 5) Φόρτιση

Για καταναμημένο φορτίο αρκεί να βάλουμε την τιμή στο  $q_0$  και να γράψουμε την επαναληπτική διαδικασία:

```
q0=150;
```

```
for i=1:size(elements,1)
```

```
ElemLoads{i,1}=i;
```

```
ElemLoads{i,2}=q0;
```

```
end;
```

Σε περιπτώσεις συγκεντρωμένης φόρτισης, τα επικόμβια φορτία υπολογίζονται με τη βοήθεια των εντολών.

```
[NodalLoads]=cforce(nodes, NodalLoads, [L/2, 0], [-150, 0, 0]);
```

Για συγκεντρωμένη φόρτιση σε ένα σημείο με συντεταγμένες  $[L/2, 0]$ , δηλαδή  $x = L/2$  και  $y = 0$ , ασκούμε στον άξονα  $z$  δύναμη 150 με διεύθυνση αντίθετη της θετικής φοράς. Ο δεύτερος και τρίτος όρος της αγκύλης  $[-150, 0, 0]$  αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας των στροφών  $\theta_x$   $\theta_y$ .

Αν θέλουμε μια δύναμη να ισοκατανεμηθεί στους κόμβους που έχουν την μία από τις δύο συντεταγμένες ίδιες χρησιμοποιούμε την εντολή

```
[NodalLoads]=Iforce(nodes, NodalLoads, 1, L/2, [-150, 0, 0]);
```

Ο αριθμός 1 δηλώνει την διεύθυνση  $x$  ενώ η διεύθυνση  $y$  συμβολίζεται με τον αριθμό 2. Η εντολή αυτή μπορεί να διαβαστεί ως εξής για τους κόμβους με τετμημένη  $x=L/2$  θα ισοκατανεμηθεί δύναμη  $F_z = -150$ .

### 6) Συνοριακές συνθήκες

```
[bcon]=bounEdge(nodes, bcon, [1, 2, 1, 2], [0, c, L, -c], [1, 1], 'or');
```

Η γραμμή αυτή δηλώνει ότι οι κόμβοι, ('or') με συντεταγμένες  $x=0$ ,  $y=c$ ,  $x=L$  και  $y=-c$  έχουν δεσμευμένους και τους 3 βαθμούς ελευθερίας, Η πρώτη αγκύλη δηλώνει το  $x$  ή το  $y$  ( $x=1$  και  $y=2$ ), η δεύτερη την τιμή της τετμημένης ή της τεταγμένης και η τελευταία τις δεσμεύσεις των βαθμών ελευθερίας (0: ελεύθερος β.ε 1: δεσμευμένος β.ε). Αν θέλουμε να αναφερθούμε για έναν συγκεκριμένο κόμβο χρησιμοποιούμε τη έκφραση ('intersect') αντί για ('or')

```
[bcon]=bounEdge(nodes, bcon, [1, 2], [0, c], [1, 1, 0], 'intersect');
```

Η γραμμή αυτή δηλώνει ότι ο κόμβος, ('intersect') με συντεταγμένες  $x=0$  και  $y=c$  έχει δεσμευμένους και τους 2 βαθμούς ελευθερίας,

### 7) Εντολή στατικής επίλυσης

```
RunAnalysis
```

στατική επίλυση της πλάκας

Με αυτήν την εντολή ο κώδικας εκτελεί την

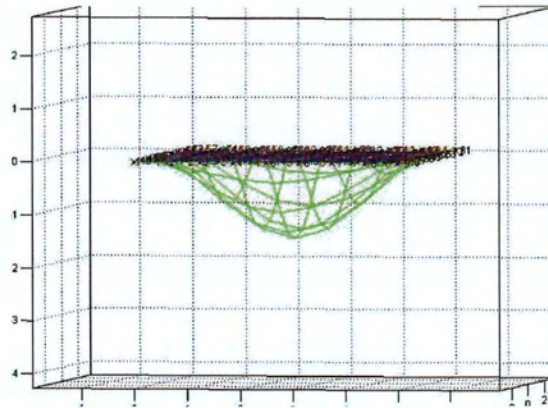
### 8) Γραφήματα

```
PlotMesh(nodes, elements, bcon, 'grid off', 'labels')
```

Με την εντολή αυτή εμφανίζεται ο κάναβος της πλάκας χωρισμένος σε πεπερασμένα στοιχεία..

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)
```

Εμφανίζει τον τρισδιάστατο παραμορφωμένο φορέα, σε περίπτωση που οι παραμορφώσεις είναι μικρές και δεν φαίνεται καλά ο παραμορφωμένος φορέας μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε π.χ  $Dpl*10$  ώστε να είναι πιο εμφανείς οι μετατοπίσεις της πλάκας.

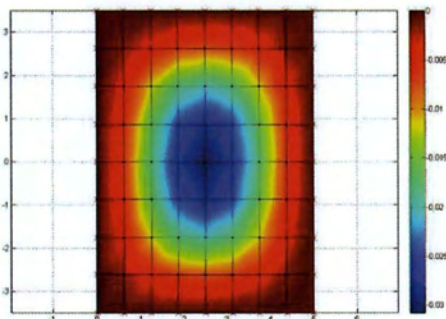


Σχήμα I-2: Παραμορφωμένη πλάκα

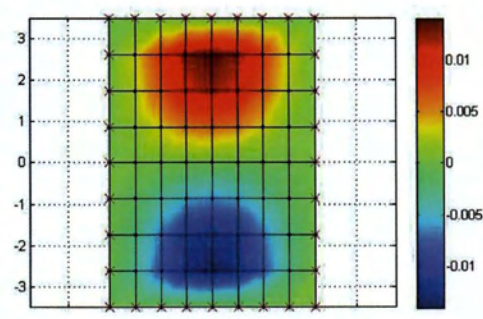
```
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
```

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)
```

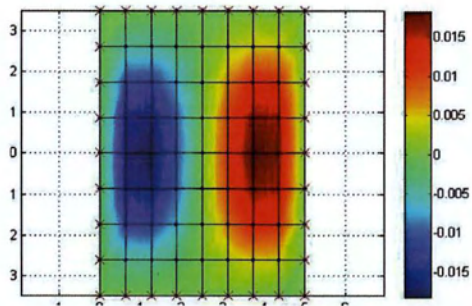
Με τις δύο αυτές εντολές εμφανίζεται το γράφημα των βυθίσεων. Αν αλλάξουμε τον τελευταίο αριθμό, βάζοντας τον αριθμό 2 το γράφημα των στροφών  $\theta_x$  ή τον 3 για τις στροφές  $\theta_y$ ,



(α)



(β)

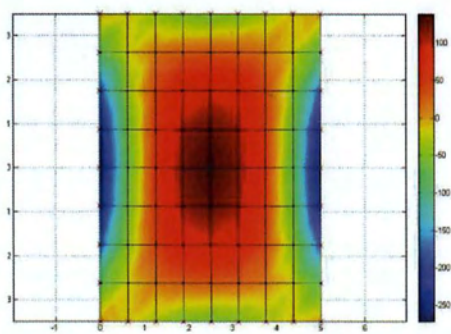


(γ)

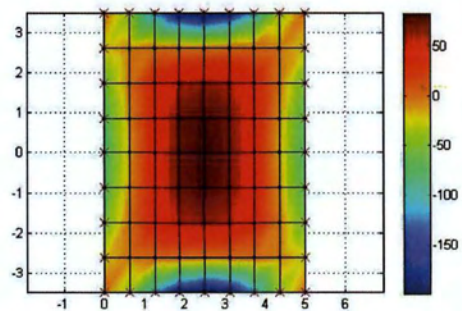
Σχήμα I.3: Γραφήματα (α)  $w$ , (β)  $\theta_x$ , (γ)  $\theta_y$

`PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,1)`

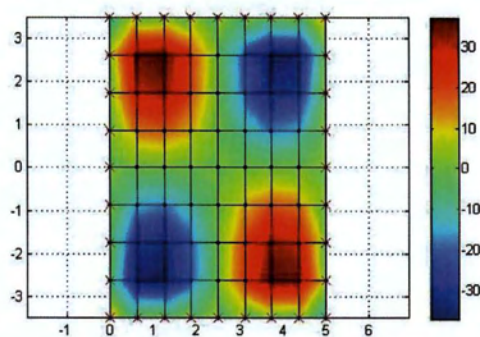
Μας δίνει το γράφημα των ροπών  $M_x$ , και αντικαθιστώντας τον αριθμό 1 με τον 2 ή 3 παίρνουμε το γράφημα της  $M_y$  ή  $M_{xy}$  αντίστοιχα.



(α)



(β)

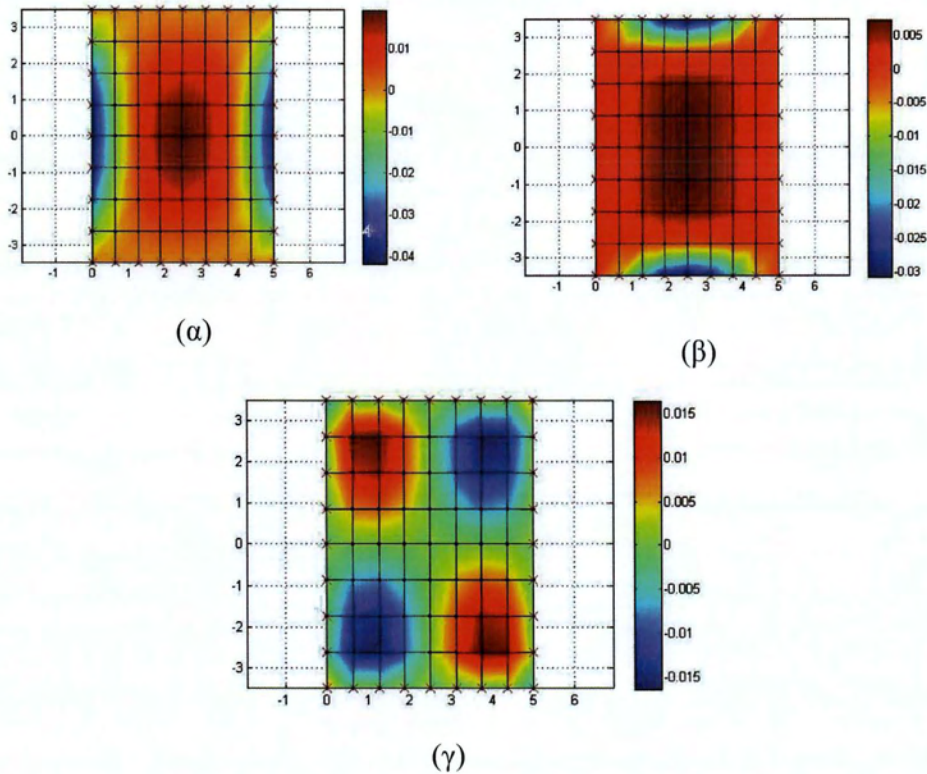


(γ)

Σχήμα I.4: Γραφήματα (α)  $M_x$ , (β)  $M_y$ , (γ)  $M_{xy}$ .

`PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)`

Μας δίνει το γράφημα των καμπυλοτήτων  $k_x$  και ομοίως όπως και πριν αντικαθιστώντας τον αριθμό 1 με τον 2 ή 3 παίρνουμε το γράφημα της  $k_y$  ή  $k_{xy}$  αντίστοιχα.



Σχήμα 1.5: Γραφήματα των καμπυλοτήτων (α)  $k_x$ , (β)  $k_y$ , (γ)  $k_{xy}$ .

### 9) Εμφάνιση της μετατόπισης σε οποιονδήποτε κόμβο

`Dp1(25, :)` εμφανίζεται στο command window του MATLAB τη μετατόπιση και τις στροφές στον 25 κόμβο

### 10) Τερματισμός του κώδικα

`exitProgram` δηλώνει τον τερματισμό του κώδικα και καθαρίζει όλες τις μεταβλητές από τη μνήμη.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ - ΑΡΧΕΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (Input Files)

### 1) ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

```
% clear the memory and start the analysis
ClearAll

Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;
%format long

E = 10000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t = 0.1; % thickness

% plate dimensions
L = 10; % length of the beam
c = 7; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line

points=[0,-c;L,-c;L,c;0,c];

elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties

[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,4,8,'x');

q0=100;
for i=1:size(elements,1)
    ElemLoads{i,1}=i;
    ElemLoads{i,2}=q0;
end;

[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[0,c,L,-c],[1 1 1],'or');
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[L,c,L,-c],[1 1 1],'or');

PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')

% When the program meets this command analysis is performed.

RunAnalysis

% View displaced shape
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)

% View displacement contour, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis
w,thetax,thetay
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)

% View Stresses, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis Mx,My,Mxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,1)

% View Strain, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis kx,ky,kxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)

Dpl
```



```
% terminate the program and exit
exitProgram
```

## 2) ΤΕΤΡΑΓΩΝΗ ΠΛΑΚΑ ΜΕ ΜΙΑ ΤΡΥΠΑ ΣΤΗΝ ΜΕΣΗ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ

```
% clear the memory and start the analysis
ClearAll
```

```
Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;
```

```
E = 10000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t = 0.1; % thickness
```

```
% plate dimensions
L = 12; % length of the beam
c = 12; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line
```

```
%points=[0,0;0,c;c,c;0,c];
points=[0,0;0,c;c,0;c,c];
```

```
elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties
```

```
[nodes]=[0,0;c/6,0;2*c/6,0;3*c/6,0;4*c/6,0;5*c/6,0;c,0;0,c/6;c/6,c/6;2*c/6,c/6;3*c/6,c/6;4*c/6,c/6;5*c/6,c/6;c,c/6;
```

```
0,2*c/6;c/6,2*c/6;2*c/6,2*c/6;3*c/6,2*c/6;4*c/6,2*c/6;5*c/6,2*c/6;c,2*c/6;
0,3*c/6;c/6,3*c/6;2*c/6,3*c/6;4*c/6,3*c/6;5*c/6,3*c/6;c,3*c/6;
```

```
0,4*c/6;c/6,4*c/6;2*c/6,4*c/6;3*c/6,4*c/6;4*c/6,4*c/6;5*c/6,4*c/6;c,4*c/6;
```

```
0,5*c/6;c/6,5*c/6;2*c/6,5*c/6;3*c/6,5*c/6;4*c/6,5*c/6;5*c/6,5*c/6;c,5*c/6;
0,c;c/6,c;2*c/6,c;3*c/6,c;4*c/6,c;5*c/6,c;c,c];
```

```
[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,4,4,'x');
```

```
% [NodalLoads]=cforce(nodes,[],[c/2,c/2],[-10,0,0]);
```

```
q0=100;
for i=1:size(elements,1)
    ElemLoads{i,1}=i;
    ElemLoads{i,2}=q0;
end;
```

```
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,1],[0,c],[1 1 1],'or');
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[2,2],[0,c],[1 1 1],'or');
```

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')
```

```
% When the program meets this command analysis is performed.
RunAnalysis
```

```

% View displaced shape
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)

% View displacement contour, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis
w,thetax,thetay
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)

% View Stresses, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis Mx,My,Mxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,1)

% View Strain, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis kx,ky,kxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)

Dpl

% terminate the programm and exit
ExitProgram

```

### 3) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΣΤΙΣ 4 ΠΛΕΥΡΕΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

```

% clear the memory and start the analysis
ClearAll

Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;
%format long

E = 21000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t =0.15; % thickness

% plate dimensions
L =5; % length of the beam
c =2.5; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line

points=[0,-c;L,-c;L,c;0,c];

elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties

[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,2,2,'x');

q0=150;
for i=1:size(elements,1)
    ElemLoads{i,1}=i;
    ElemLoads{i,2}=q0;
end;

[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[0,c,L,-c],[1 1 1],'or');
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[L,c,L,-c],[1 1 1],'or');

PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')

% When the program meets this command analysis is performed.

```

```

RunAnalysis

% View displaced shape
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)

% View displacement contour, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis
w,thetax,thetay
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)

% View Stresses, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis Mx,My,Mxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,3)

% View Strain, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis kx,ky,kxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)

Dpl

% terminate the programm and exit
ExitProgram

```

#### 4) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ ΣΤΙΣ 4 ΠΛΕΥΡΕΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

```

% clear the memory and start the analysis
ClearAll

Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;
%format long

E = 21000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t = 0.15; % thickness

% plate dimensions
L = 5; % length of the beam
c = 2.5; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line

points=[0,-c;L,-c;L,c;0,c];

elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties

[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,2,2,'x');

% [NodalLoads]=cforce(nodes,[],[c/2,c/2],[-10,0,0]);
[NodalLoads]=cforce(nodes,NodalLoads,[L/2,0],[-150,0,0]);
%[NodalLoads]=lforce(nodes,NodalLoads,1,L/2,[-1000,0,0]);

[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[0,c,L,-c],[1 1 1],'or');
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[L,c,L,-c],[1 1 1],'or');

PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')

% When the program meets this command analysis is performed.

RunAnalysis

```

```

% View displaced shape
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)

% View displacement contour, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis
w,thetax,thetay
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)

% View Stresses, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis Mx,My,Mxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,3)

% View Strain, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis kx,ky,kxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)

Dpl

% terminate the programm and exit
ExitProgram

```

### 5) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ.

```

% clear the memory and start the analysis
ClearAll

Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;
%format long

E = 21000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t = 0.15; % thickness

% plate dimensions
L =5; % length of the beam
c =2.5; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line

points=[0,-c;L,-c;L,c;0,c];

elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties

[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,2,2,'x');

q0=150;
for i=1:size(elements,1)
    ElemLoads{i,1}=i;
    ElemLoads{i,2}=q0;
end;

[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[0,c,L,-c],[1 0 0],'or');
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[L,c,L,-c],[1 0 0],'or');

PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')

% When the program meets this command analysis is performed.

```

RunAnalysis

```
% View displaced shape
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)

% View displacement contour, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis
w,thetax,thetay
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)

% View Stresses, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis Mx,My,Mxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,1)

% View Strain, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis kx,ky,kxy
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)

Dpl

% terminate the programm and exit
exitProgram
```

## 6) ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ ΑΠΛΑ ΕΔΡΑΖΟΜΕΝΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΖΟΜΕΝΗ ΜΕ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΣΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ.

```
% clear the memory and start the analysis
ClearAll

Analysis.Type='Static'; % type of Analysis
Analysis.ndim=3;
%format long

E = 21000000; % Young's modulus
nu = 0.30; % Poisson's ratio
t =0.15; % thickness

% plate dimensions
L =5; % length of the beam
c =2.5; % the distance of the outer fiber of the beam from the mid-line

points=[0,-c;L,-c;L,c;0,c];

elemprop={'plate',E,nu,t}; % basic element properties

[nodes,elements]=mesh(nodes,elements,elemprop,points,2,2,'x');

% [NodalLoads]=cforce(nodes,[],[c/2,c/2],[-10,0,0]);
[NodalLoads]=cforce(nodes,NodalLoads,[L/2,0],[-150,0,0]);
%[NodalLoads]=lforce(nodes,NodalLoads,1,L/2,[-1000,0,0]);

[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[0,c,L,-c],[1 0 0],'or');
[bcon]=bounEdge(nodes,bcon,[1,2,1,2],[L,c,L,-c],[1 0 0],'or');

PlotMesh(nodes,elements,bcon,'grid off','labels')
```

```
% When the program meets this command analysis is performed.
```

```
RunAnalysis
```

```
% View displaced shape
```

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'labels','disp',Dpl)
```

```
% View displacement contour, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis  
w,thetax,thetay
```

```
[dspelm] = disp2Elem(index,elements,4,Dpl);
```

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',dspelm,1)
```

```
% View Stresses, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis Mx,My,Mxy
```

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',stress,1)
```

```
% View Strain, allazontas ta 1,2,3 briskeis tis kx,ky,kxy
```

```
PlotMesh(nodes,elements,bcon,'contour',strain,1)
```

```
Dpl
```

```
% terminate the programm and exit
```

```
exitProgram
```



Μουσαφειρόπουλος, Γ. Π.	
ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ	
"Ανάλυση πλακών με τη μέ-	
ΤΙΤΛΟΣ	
"Οδο των πεπερασμένων -"	
ΛΗΞΗ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΔΑΝΕΙΖΟΜΕΝΟΥ
31/10/14	

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Τηλ.: 24210 74760-61

06300-1



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000108397