

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**Κυρτότητα μίας ομάδας αντικειμενικών συναρτήσεων μεικτής  
ακέραιης βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων για σχεδιασμό  
πτήσεων και συντηρήσεων επιχειρησιακών αεροσκαφών.**

υπό

**ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΑΝΟΝΗ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2011



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 9399/1  
Ημερ. Εισ.: 22-03-2011  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ  
2011  
ΚΑΝ

© 2011 Νικόλαος Κανόνης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης  
Λέκτορας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Δημήτριος Παντελής  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γιώργος Λυμπερόπουλος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Η διπλωματική αυτή δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί χωρίς την συμβολή του επιβλέποντα καθηγητή κ. Γεωργίου Κοζανίδη. Για αυτό και του οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ για την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τους τελευταίους μήνες. Με βάση τις υποδείξεις του και τις προτάσεις του μπόρεσα να ολοκληρώσω την μελέτη, κάτι που θα ήταν πολύ δύσκολο χωρίς την συστηματική παρακολούθηση από μέρους του πράγμα για το οποίο του είμαι ευγνώμων. Καθότι η συγκεκριμένη εργασία βασίστηκε σε ένα προϋπάρχον αλγόριθμο μεγάλη ήταν και η συμβολή του διδακτορικού φοιτητή Ανδρέα Γαβράνη στην βελτίωση του αλγορίθμου σε γλώσσα προγραμματισμού C/C++ και στο να διευκρινίσει τυχόν απορίες μου. Θέλω να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής Γιώργο Λυμπερόπουλο και Δημήτριο Παντελή για την προσεκτική μελέτη της διπλωματικής και το μεγάλο ενδιαφέρον που έδειξαν. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στο σύνολο των φοιτητών, καθηγητών και του προσωπικού του τμήματος των Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου της Θεσσαλίας με τους οποίους συναναστρεφόμουν ανταλλάσσοντας γνώσεις και εμπειρίες τα τελευταία 5 χρόνια. Πολλά είναι που απέκτησα στον Βόλο και πολλές είναι επίσης και οι αναμνήσεις που θα μου μείνουν για μία ζωή.

Σας ευχαριστώ.

# **Κυρτότητα μίας ομάδας αντικειμενικών συναρτήσεων μεικτής ακέραιης βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων για σχεδιασμό πτήσεων και συντηρήσεων επιχειρησιακών αεροσκαφών.**

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΑΝΟΝΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2011

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης Λέκτορας Μεθόδων  
Βελτιστοποίησης Συστημάτων Παραγωγής/Υπηρεσιών

## **Περίληψη**

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με το πρόβλημα της δημιουργίας ενός σχεδίου πτήσεων για ένα σύνολο επιχειρησιακών αεροσκαφών. Στόχος είναι η μακροπρόθεσμη διαθεσιμότητα να διατηρείται στο υψηλότερο δυνατό επίπεδο μεταξύ των διαθέσιμων προς πτήση και των υπό συντήρηση αεροσκαφών. Ο αλγόριθμος που προτείνεται για την επίλυση του προβλήματος είναι μεικτός ακέραιος μη γραμμικός. Σκοπός του είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των αποστάσεων των τελικών υπολειπόμενων χρόνων πτήσης και συντήρησης των αεροσκαφών από τις ιδανικές τιμές τους. Μέσα σε αυτόν, λαμβάνονται υπόψη οι περιορισμοί που τίθενται για κάθε αεροσκάφος ( μέγιστος χρόνος που μπορεί να πετάξει ανά χρονική περίοδο, χρόνος συντήρησης, κτλ.). Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από την πειραματική εφαρμογή του αλγορίθμου που κατασκευάστηκε συγκρίνονται με αυτά από ένα εμπορικό λογισμικό βελτιστοποίησης. Πέραν της ανωτερότητας του αλγορίθμου στην εύρεση της ακριβούς λύσης σε καλύτερους χρόνους, αποδεικνύεται ότι το όλο πρόβλημα εξαρτάται κυρίως από δύο σημαντικές παραμέτρους: το μέγεθος της μονάδας (συνολικός αριθμός αεροσκαφών) και τη χωρητικότητα του σταθμού συντήρησης.

## Πίνακας Περιεχομένων

<b>Κεφάλαιο 1</b>	<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>8</b>
1.1	Στόχος της διπλωματικής.....	8
1.2	Κίνητρο .....	8
1.3	Οργάνωση Εργασίας.....	9
1.4	Προηγούμενες δημοσιεύσεις.....	10
1.5	Σύνοψη της εργασίας .....	13
<b>Κεφάλαιο 2</b>	<b>Μορφοποίηση προβλήματος.....</b>	<b>15</b>
2.1	Μαθηματικό μοντέλο .....	15
2.2	Αποδείξεις.....	23
2.3	Εύρεση εφικτών συνδυασμών $z_g$ και $z_a$ .....	30
2.4	Αριθμητικό παράδειγμα .....	35
<b>Κεφάλαιο 3</b>	<b>Έλεγχος κυρτότητας αντικειμενικής συνάρτησης .....</b>	<b>39</b>
3.1	Γενικότερη φιλοσοφία .....	39
3.2	Περιγραφή κώδικα.....	40
3.3	Μαθηματικές αποδείξεις .....	42
<b>Κεφάλαιο 4</b>	<b>Αριθμητικά αποτελέσματα .....</b>	<b>48</b>
4.1	Πειραματική διαδικασία ... .....	48
4.2	Αποτελέσματα Lingo και C/C++.....	51
4.3	Αποτελέσματα C/C++ .....	56
<b>Κεφάλαιο 5</b>	<b>Συμπεράσματα .....</b>	<b>61</b>
5.1	Συμπεράσματα για Lingo και C/C++ .....	61
5.2	Συμπεράσματα για C/C++.....	62
5.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων .....	63
5.4	Μελλοντική έρευνα .....	66
5.5	Σύνοψη .....	68
<b>Κεφάλαιο 6</b>	<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>70</b>

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1: Υπολειπόμενοι χρόνοι πτήσης/συντήρησης.....	37
Πίνακας 2: Ελάχιστη απόκλιση για τους συνδυασμούς $z_g$ και $z_a$ .....	37
Πίνακας 3: επικαιροποίηση δεικτών αεροσκαφών. ....	38
<b>Πίνακες αποτελεσμάτων για Lingo και C/C++.</b> .....	<b>51</b>
Πίνακας 4: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=50. ....	51
Πίνακας 5: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=100.....	52
Πίνακας 6: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=150.....	53
Πίνακας 7: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=200.....	54
Πίνακας 8: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=250.....	55
<b>Πίνακες αποτελεσμάτων για C/C++.</b> .....	<b>56</b>
Πίνακας 9: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=500.....	56
Πίνακας 10: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=1000.....	57
Πίνακας 11: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=1500.....	58
Πίνακας 12: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=2000.....	59
Πίνακας 13: Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=2500.....	60
<b>Πίνακας 14: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων.</b> .....	<b>64</b>



# 1. Εισαγωγή

## 1.1 Στόχος της διπλωματικής

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία γίνεται μία προσπάθεια να βελτιωθεί ένας αλγόριθμος που έχει αναπτυχθεί για την επίλυση του προβλήματος σχεδιασμού πτήσεων και συντηρήσεων επιχειρησιακών αεροσκαφών. Στην προσπάθεια αυτή, χρησιμοποιούνται κάποιες ιδιότητες οι οποίες ενσωματώνονται υπό τη μορφή κώδικα στο σύστημα για την ταχύτερη επίλυση του προβλήματος. Σε πρώτη φάση, σκοπός είναι να γίνει μία πειραματική επιβεβαίωση των υποθέσεων μέσω των αποτελεσμάτων χωρίς αυτό να αποτελεί στιβαρή απόδειξη, δίνοντας ένα ισχυρό στοιχείο στην προσπάθεια μαθηματικής επιβεβαίωσης τους.

Ο αλγόριθμος ο οποίος εξελίχτηκε στοχεύει στην εξασφάλιση της βέλτιστης λύσης μέσα σε όσο το δυνατόν πιο μικρό χρονικό διάστημα. Απαραίτητη προϋπόθεση ήταν η μορφοποίηση του προβλήματος πριν την ανάπτυξη του ακριβούς αλγόριθμου εύρεσης λύσης.

Στόχος του αλγορίθμου είναι η επίλυση του προβλήματος της απόφασης του πόσο χρόνο θα πετάξει (και αν θα πετάξει) καθένα από τα διαθέσιμα σε ένα σύνολο αεροσκαφών και πόσο χρόνο θα συντηρηθεί (και αν θα συντηρηθεί) καθένα από αυτά που βρίσκονται καθηλωμένα στο χώρο συντήρησης.

Αναγκαία κρίνεται η περιγραφή του υπάρχοντος αλγορίθμου για την παρουσίαση της βάσης πάνω στην οποία έχει στηριχθεί η διπλωματική και για να καταστεί δυνατή η κατανόηση του τρόπου σκέψης που ακολουθήθηκε στη συνέχεια.

## 1.2 Κίνητρο

Ο καταρτισμός βέλτιστου προγραμματισμού είναι πολύ σημαντικός για ένα σύνολο δραστηριοτήτων που σχετίζονται με επιχειρησιακές λειτουργίες για την καλύτερη απόδοση

των διαθέσιμων πόρων (στην προκειμένη περίπτωση, αεροσκαφών) αυξάνοντας την μακροπρόθεσμη διαθεσιμότητα τους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της ανάγκης, που αποτέλεσε και κίνητρο για το όλο εγχείρημα αποτελεί ο τρόπος δράσης των πτερύγων μάχης της Ελληνικής Πολεμικής Αεροπορίας. Το ενδιαφέρον αυξήθηκε όταν έγινε φανερό ότι η επίλυση του προβλήματος για τον συγκεκριμένο τομέα θα μπορούσε να επεκταθεί και όσον αφορά ελικοπτέρα διάσωσης, περιπολίες του λιμενικού σώματος, μαχητικών τζετ, κ.ά. Επιπλέον, θα μπορούσε να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη παρόμοιου είδους αλγορίθμων προγραμματισμού που στηρίζονται σε κίνηση μονάδων για την ικανοποίηση συγκεκριμένων αναγκών σε αρκετές διαφορετικές περιπτώσεις.

Στην περίπτωση της Πολεμικής Αεροπορίας που είναι υπεύθυνη για την αεροπορική προστασία της Ελλάδος υφίσταται ένας οργανωτικός διαχωρισμός σε τέσσερις τομείς: Αρχηγείο Τακτικής Αεροπορίας (ΑΤΑ), Διοίκηση Αεροπορικής Υποστήριξης (ΔΑΥ), Διοίκηση Αεροπορικής Εκπαίδευσης (ΔΑΕ) και ένας τέταρτος τομέας υπεύθυνος για την εύρυθμη λειτουργία των υπολοίπων, ο Τομέας Μονάδων και Υπηρεσιών.

Για τις πτέρυγες μάχης που αποτελούν υποκατηγορία του Αρχηγείου Τακτικής Αεροπορίας, είναι αυξημένη η σημασία διατήρησης ανά πάσα στιγμή υψηλού επιπέδου ετοιμότητας για την αντιμετώπιση οιασδήποτε κρίσης. Για αυτό και είναι σημαντικό οι πιλότοι να πετάνε κάθε μήνα συγκεκριμένες ώρες για την συνεχή τους εκπαίδευση. Το συνολικό *πητικό φορτίο* των μαχητικών αεροσκαφών κάθε μήνα καθορίζεται από το Αρχηγείο, μπορούν να υπάρξουν μικρές μόνο αποκλείσεις του, και είναι ίσο με τις συνολικές ώρες πτήσης που πρέπει να συμπληρώνουν όλα μαζί τα διαθέσιμα αεροσκάφη. Για κάθε αεροσκάφος υπάρχει ένας υπολειπόμενος χρόνος πτήσης μέχρι να παραστεί αναγκαία η συντήρησή του. Στο σταθμό που λαμβάνει μέρος αυτή η συντήρηση υπάρχει συγκεκριμένη χωρική και χρονική δυναμικότητα. Αντιστοίχως λοιπόν, υπάρχει και ο υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης μέχρι την επιστροφή του αεροσκάφους στην ενεργό πτήση. Αντικειμενικός σκοπός είναι η κατάστρωση σχεδίου πτήσης και συντήρησης για την επίτευξη της καλύτερης δυνατής μακροχρόνιας διαθεσιμότητας.

### **1.3 Οργάνωση διπλωματικής εργασίας**

Οι ενότητες στις οποίες χωρίζεται η εργασία είναι οι εξής:

1. Εισαγωγή και προηγούμενες εργασίες,
2. Μορφοποίηση προβλήματος,
3. Έλεγχος κυρτότητας αντικειμενικής συνάρτησης,
4. Αριθμητικά αποτελέσματα,
5. Συμπεράσματα- Μελλοντική έρευνα.

Τελειώνοντας, παρατίθεται και η Βιβλιογραφία.

#### 1.4 Προηγούμενες εργασίες

Παρά το γεγονός ότι το ζήτημα με το οποίο ασχολείται αυτή η διπλωματική εργασία αποτελεί βασικό πρόβλημα λήψης αποφάσεων και συναντάται σε πολλά διαφοροποιημένα προβλήματα, η δημοσιευμένη έρευνα είναι ακόμα περιορισμένη. Η προσπάθεια βελτίωσης βασίζεται πάνω σε έρευνα που διεξάγεται στον τομέα Οργάνωσης Παραγωγής και Βιομηχανικής Διοίκησης του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών. Σύντομη όμως αναφορά οφείλει να γίνει σε παλιότερα εγχειρήματα προσέγγισης του προβλήματος.

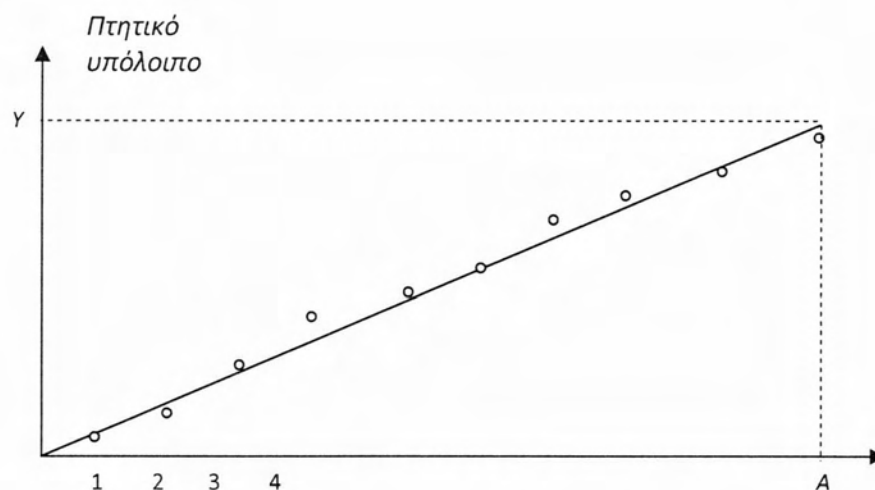
Ο Steiner το 2006 παρουσίασε μία μεθοδολογία προγραμματισμού πτήσεων μέσω της προληπτικής συντήρησης αεροσκαφών με βάση τους επιχειρησιακούς περιορισμούς και τις ανάγκες συντήρησης της Ελβετικής αεροπορίας. Η όλη προσπάθεια βασίστηκε στη μέθοδο της βελτιστοποίησης μέσω ευρετικού αλγορίθμου και έτσι κατορθώθηκε η έκδοση ενός αρχικού προγράμματος πτήσεων που θα χρησιμοποιείτο σε κάθε περίοδο.

Ο Sgaslik το 1994 είχε παρουσιάσει ένα σύστημα λήψης αποφάσεων για προγραμματισμό πτήσεων και συντήρησης σε ένα στόλο ελικοπτέρων, χωρίζοντας το ζητούμενο σε δύο υποπεριπτώσεις. Αυτά ήταν δύο ελαστικά μεικτά ακέραια προβλήματα τα οποία λύνονταν ξεχωριστά με τη βοήθεια γενικού λογισμικού βελτιστοποίησης. Το πρώτο αφορούσε τη συντήρηση, ενώ με βάση αυτό λυνόταν και το δεύτερο που αφορούσε τον καθορισμό των ωρών πτήσης για κάθε διαθέσιμο αεροσκάφος. Το πρόβλημα που προέκυψε ήταν ότι υπήρχαν φορές που παραβιάζονταν κάποιοι από τους περιορισμούς. Το σκεπτικό στο οποίο βασίστηκε η όλη προσπάθεια ήταν να επιτευχθεί ένας σταθερός ρυθμός εισόδου αεροσκαφών στο χώρο συντήρησης.

Στο ίδιο σκεπτικό κινήθηκε και η έρευνα του Phippin το 1998 στην οποία υιοθετήθηκε μία ευρετική μεθοδολογία που χρησιμοποιούσε ένα πτητικό γράφημα της ροής αεροσκαφών.

Το Υπουργείο Άμυνας των Ηνωμένων Πολιτειών το 2000 δημοσίευσε ένα κυλιόμενης κλίμακας πλάνο για τον προγραμματισμό πτήσεων αλλά και τις περιόδους συντήρησης επιχειρησιακών αεροσκαφών με βάση ένα γράφημα. Η ιδέα πάνω στην οποία στηρίχθηκε η δημοσίευση αυτή είναι παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιείται και στην προκειμένη εργασία.

Η διαφορά μεταξύ τους έγκειται στους περιορισμούς που τίθενται και δικαιολογούνται πλήρως αλλά και στο ότι η ευρετική αυτή μέθοδος παίρνει τη μορφή αλγορίθμου και εισάγεται στον υπολογιστή. Ως βοήθεια στην προσπάθεια που γίνεται χρησιμοποιείται ένα δισδιάστατο γράφημα (Σχήμα 1) με τον κατακόρυφο άξονα να αντιπροσωπεύει το πτητικό υπόλοιπο του κάθε αεροσκάφους και τον οριζόντιο να ταξινομεί τα αεροσκάφη με αύξουσα σειρά πτητικού υπόλοιπου μέχρι τον αριθμό των συνολικά διαθέσιμων (έστω ότι αυτά είναι σε αριθμό  $A$ ). Το μέγιστο πτητικό υπόλοιπο είναι ίσο με το πτητικό υπόλοιπο με το οποίο βγαίνει ένα αεροσκάφος από τη συντήρηση (έστω ότι είναι ίσο με  $Y$ ). Χαρτογραφώντας τα δύο αυτά στοιχεία (των αξόνων) σχηματίζεται ένα γράφημα που δίνει την γενικότερη εικόνα του ενεργού στόλου σε σχέση με την διαγώνιο που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο  $(A, Y)$ . Να τονιστεί ότι η διαγώνιος αυτή μπορεί να αλλάζει καθώς μεταβάλλεται το  $A$  σε κάθε περίοδο. Στην συνέχεια, παρόμοιο γράφημα θα χρησιμοποιηθεί για την περίπτωση των αεροσκαφών που βρίσκονται για συντήρηση.



Σχήμα 1. Απεικόνιση της διαθεσιμότητας της μονάδας στο  
Διάγραμμα ροής των διαθέσιμων αεροσκαφών

Για να μετρηθεί η ομαλότητα της κατανομής χρησιμοποιείται ένας συνολικός δείκτης απόκλισης. Ο δείκτης αυτός ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων αποστάσεων των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης των αεροσκαφών από τη διαγώνιο. Όσο μικρότερο το άθροισμα αυτό, τόσο ομαλότερη θα είναι και η κατανομή των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης, με το ιδανικό τα σημεία να βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο και άρα το άθροισμα να είναι ίσο με 0. Στην περίπτωση του εγχειριδίου από την Αμερικάνικη Αεροπορία, συνιστάται ο χρήστης να προσπαθεί να οργανώσει το σχέδιο πτήσης με απώτερο στόχο την ελαχιστοποίηση αυτού του αθροίσματος. Με αυτόν τον τρόπο, μπορεί να διασφαλιστεί ότι τα αεροσκάφη θα διατηρήσουν μία ομαλή είσοδο στο χώρο συντήρησης, εξασφαλίζοντας έτσι μία υψηλή και σταθερή διαθεσιμότητα. Η όλη διαδικασία στηρίζεται στην πρότερη εμπειρία και οργανωτική ικανότητα του υπευθύνου προγραμματισμού, χωρίς να δίνονται σαφείς οδηγίες για το πώς θα μπορούσε αυτό το πράγμα να αυτοματοποιηθεί. Το μεγάλο πρόβλημα στην περίπτωση αυτή είναι η έλλειψη αντικειμενικών κριτηρίων για τη λήψη των διαφόρων αποφάσεων από το άτομο αυτό. Επιπλέον, υπάρχουν δύο θέματα που δεν αντιμετωπίζονται από τη μέθοδο αυτή.

Το πρώτο αφορά τη διαγώνιο, η οποία σε κάθε επανάληψη μεταβάλλεται σε ένα μικρό βαθμό αναλόγως με τον αριθμό των αεροσκαφών που θα βγουν από την συντήρηση αλλά και τον αριθμό αυτών που θα μπουν στην επόμενη χρονική περίοδο. Το πρόβλημα δυσκολεύει όταν σαν μεταβλητή απόφασης ληφθεί και ο αριθμός των αεροσκαφών που θα είναι διαθέσιμα προς πτήση την επόμενη χρονική περίοδο, και άρα η επιλογή των ωρών

πτήσεως και συντήρησης εμπεριέχει τα νούμερα αυτά σαν μεταβλητές. Στην εφαρμογή της μεθόδου για την Πολεμική Αεροπορία των Ηνωμένων Πολιτειών προτείνεται η εκ των προτέρων επιλογή με βάση εμπειρικές μεθόδους για το πόσα αεροσκάφη θα έπρεπε να καθηλωθούν και πόσα να είναι διαθέσιμα προς πτήση στην επόμενη περίοδο, κάτι το οποίο γίνεται εμφανές ότι μπορεί να μην είναι η βέλτιστη επιλογή.

Το δεύτερο θέμα το οποίο δεν αντιμετωπίζεται με την λύση που προκρίνεται από την Αμερικάνικη Αεροπορία είναι ότι δεν παρουσιάζεται ένα σχέδιο συντήρησης για τα καθηλωμένα αεροσκάφη. Για να αντιμετωπιστεί αυτό θα πρέπει να απαντηθούν πολλά ερωτήματα, όπως με τι σειρά θα πρέπει να γίνει η συντήρηση, πόση ώρα θα συντηρηθεί το κάθε αεροσκάφος, πόσα θα πρέπει να ολοκληρώσουν τη συντήρησή τους και πολλά άλλα σχετικά θέματα. Αυτά τα θέματα στην πράξη αντιμετωπίζονται με βάση την εμπειρία και τις γνώσεις του χρήστη, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι γίνονται πάντα οι βέλτιστες επιλογές.

Πέραν αυτών των φανερά σοβαρών ζητημάτων, ένα άλλο θέμα που δεν απασχολεί την αμερικανική μεθοδολογία είναι η μυωπική φύση του προβλήματος. Η μέθοδος δεν ασχολείται με τη μακροπρόθεσμη αποδοτικότητα της εξεταζόμενης μονάδας, παρά μόνο με το τι θα γίνει σε έναν μοναδικό ορίζοντα. Σαν αποτέλεσμα αυτού, η διαθεσιμότητα που προκύπτει από μία συγκεκριμένη κατανομή ωρών πτήσης και συντήρησης για ένα χρονικό διάστημα δύναται μακροπρόθεσμα να μειωθεί σε μεγάλο βαθμό. Αυτό είναι ένα αναπόφευκτο αποτέλεσμα καθώς λύνοντας το ζήτημα για ένα προκαθορισμένο χρονικό ορίζοντα, αγνοούμε το πώς επηρεάζονται μακροχρόνια οι λύσεις. Γίνεται επομένως φανερό, ότι πολύ σημαντικά πλεονεκτήματα θα προέκυπταν από την αντιμετώπιση του προβλήματος σε μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα (για συνεχόμενες περιόδους), αν οι αντίστοιχες πληροφορίες ήταν διαθέσιμες.

## **1.5 Σύνοψη της εργασίας**

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που παρουσιάστηκαν παραπάνω μέσα στα πλαίσια αυτής της εργασίας προτάθηκε μία μεικτή ακέραιη μη γραμμική μορφοποίηση που επιχειρούσε να δημιουργήσει μία ισορροπία ανάμεσα στα προς είσοδο και έξοδο από τον σταθμό συντήρησης αεροσκάφη. Για το λόγο αυτό θεωρήθηκαν ως μεταβλητές απόφασης τόσο οι χρόνοι που θα κληθεί να πετάξει ή να συντηρηθεί κάθε αεροσκάφος όσο και ο

αριθμός αυτών που θα μπου και θα βγουν από το σταθμό συντήρησης. Με αυτό τον τρόπο γίνεται μεν πιο δύσκολο το προς αντιμετώπιση πρόβλημα, αυξάνεται όμως δε η ποιότητα των λύσεων που λαμβάνονται. Για την ολοκλήρωση της διαδικασίας απαραίτητη προϋπόθεση ήταν και η δημιουργία του αλγορίθμου που θα καλούνταν να επιλύσει το πρόβλημα. Πάνω σε αυτό το σκεπτικό στηρίχθηκαν δύο εργασίες, η πρώτη από τις οποίες προτείνει ένα μεικτό ακέραιο πολυκριτήριο γραμμικό μοντέλο ενώ η δεύτερη το επεκτείνει προτείνοντας ένα μονοκριτήριο μοντέλο βελτισποίησης, επιλέγοντας μία αντικειμενική συνάρτηση και προσπαθώντας να λάβει υπόψη τις υπόλοιπες με την υιοθέτηση κάποιων περιορισμών. Παρόλο που αυτό το μοντέλο λαμβάνει υπόψη έναν μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα προγραμματισμού αντί της μίας περιόδου, αποτυγχάνει να αντιμετωπίσει τη μυωπική φύση του προβλήματος, καθώς επικεντρώνεται στην μεγιστοποίηση της πτητικής διαθεσιμότητας, επιλύοντας το πρόβλημα για έναν μεμονωμένο χρονικό ορίζοντα. Από την άλλη μεριά, καταφέρνοντας να επιτύχει την ισορροπία μεταξύ των προς είσοδο και έξοδο στον χώρο συντήρησης αεροσκαφών της μονάδας, το παρόν μοντέλο κατορθώνει να εφαρμόζει ένα σταθερής διαθεσιμότητας πλάνο που μπορεί να επεκταθεί σε πολλές συνεχόμενες χρονικές περιόδους. Επιπροσθέτως, λόγω της υπερβολικής υπολογιστικής διαδικασίας που χρειάζονταν για την επίλυση των προηγούμενων μοντέλων, οι συγγραφείς στηρίζονταν μέχρι τώρα σε ευρετικές μεθοδολογίες επίλυσης. Αντίθετα, η παρούσα μέθοδος επιτρέπει την ανάπτυξη ενός συγκεκριμένου αλγορίθμου για την εύρεση λύσης και την αντιμετώπιση του προβλήματος, ο οποίος βρίσκει την ακριβή λύση.

## 2.Μορφοποίηση προβλήματος

### 2.1 Μαθηματικό μοντέλο

Παρακάτω παρουσιάζεται το μαθηματικό μοντέλο το οποίο διαμορφώθηκε για την επίλυση του προβλήματος.

#### Μεταβλητές απόφασης

$x_i$  : χρόνος πτήσης του αεροσκάφους  $i$  στην παρούσα χρονική περίοδο,

$h_j$  : χρόνος συντήρησης του αεροσκάφους  $j$  στην παρούσα χρονική περίοδο,

$y_{in}$  : υπολειπόμενος διαθέσιμος χρόνος πτήσης του αεροσκάφους  $i$  στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου,

$g_{jn}$  : υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης του αεροσκάφους  $j$  στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου,

$b_i$  : δυαδική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν το διαθέσιμο αεροσκάφος  $i$  εισέλθει στον σταθμό συντήρησης την επόμενη χρονική περίοδο για συντήρηση, και την τιμή 0 διαφορετικά,

$c_j$  : δυαδική μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν το καθηλωμένο αεροσκάφος  $j$  βγει από τον σταθμό συντήρησης στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου, και την τιμή 0 διαφορετικά,

$z_g$  : συνολικός αριθμός αεροσκαφών που θα εισέλθουν στο σταθμό συντήρησης στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου,

$z_a$  : συνολικός αριθμός αεροσκαφών που θα εξέλθουν από τον σταθμό συντήρησης στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου.

#### Παράμετροι

$S$  : απαιτούμενος χρόνος πτήσης όλων των αεροσκαφών στην τρέχουσα χρονική περίοδο,



$B$  : διαθεσιμότητα ωρών συντήρησης για τα καθηλωμένα αεροσκάφη στην τρέχουσα χρονική περίοδο,

$y_{ip}$  : υπολειπόμενος χρόνος πτήσης του διαθέσιμου αεροσκάφους  $i$  στην αρχή της χρονικής περιόδου,

$g_{jp}$  : υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης του καθηλωμένου αεροσκάφους  $j$  στην αρχή της χρονικής περιόδου,

$X_{max}$  : μέγιστος χρόνος πτήσης ενός αεροσκάφους σε μία περίοδο,

$Y_{min}$  : ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης ενός διαθέσιμου αεροσκάφους στην επόμενη χρονική περίοδο,

$G_{min}$  : ελάχιστος υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης ενός καθηλωμένου αεροσκάφους στην επόμενη χρονική περίοδο,

$C$  : μέγιστος αριθμός αεροσκαφών που χωράνε στον σταθμό συντήρησης,

$Y$  : υπολειπόμενος χρόνος πτήσης (μέγιστος) ενός αεροσκάφους αμέσως μόλις βγει από το σταθμό συντήρησης,

$G$  : υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης (μέγιστος) ενός αεροσκάφους αμέσως μόλις εισέλθει στο χώρο συντήρησης,

$L, U$  : πραγματικοί αριθμοί που δίνουν τις μέγιστες αποκλίσεις που μπορεί να γίνουν ανεκτές στους χρόνους πτήσεων των αεροσκαφών,

$A$  : αριθμός διαθέσιμων αεροσκαφών στην αρχή της χρονικής περιόδου,

$NA$  : αριθμός καθηλωμένων αεροσκαφών στην αρχή της χρονικής περιόδου,

$N$  : συνολικός αριθμός αεροσκαφών στην μονάδα όπου  $N = A + NA$ .

Στην αρχή της χρονικής περιόδου τα διαθέσιμα αεροσκάφη τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης έτσι όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του Σχήματος 1, ενώ σε ένα παρόμοιο διάγραμμα τοποθετούνται και τα καθηλωμένα αεροσκάφη, σε αύξουσα σειρά των υπολειπόμενων χρόνων συντήρησης. Υποτίθεται ότι η σειρά αυτή θα διατηρείται συνεχώς όπως στην μεθοδολογία του διαγράμματος. Παρόλο που

αυτός δεν είναι υφιστάμενος περιορισμός, θα φανεί στη συνέχεια ότι είναι ορθός και μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς να υπάρξει κάποιο σφάλμα στο αποτέλεσμα. Με αυτές τις παραδοχές και παραμέτρους το πρόβλημα και οι περιορισμοί του μπορούν να μορφοποιηθούν ως εξής:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^A [(1-b_i)(y_{in} - (i-z_g) \frac{Y}{A-z_g+z_a})^2 + b_i(G - (NA+i-z_a) \frac{G}{NA+z_g-z_a})^2] + \sum_{j=1}^{NA} [(1-c_j)(g_{jn} - (j-z_a) \frac{G}{NA+z_g-z_a})^2 + c_j(Y - (A+j-z_g) \frac{Y}{A-z_g+z_a})^2] \quad (1)$$

$$\text{s.t. } y_{in} = y_{ip} - x_i, i = 1, \dots, A \quad (2)$$

$$g_{jn} = g_{jp} - h_j, j = 1, \dots, NA \quad (3)$$

$$y_{in} \leq y_{i+1n}, i = 1, \dots, A-1 \quad (4)$$

$$g_{jn} \leq g_{j+1n}, j = 1, \dots, NA-1 \quad (5)$$

$$z_g = \sum_{i=1}^A b_i \quad (6)$$

$$z_a = \sum_{j=1}^{NA} c_j \quad (7)$$

$$NA + z_g - z_a \leq C \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{NA} h_j = \min(B, \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}) \quad (9)$$

$$LS \leq \sum_{i=1}^A x_i \leq US \quad (10)$$

$$y_{in} \geq Y_{min}(1-b_i), i = 1, \dots, A \quad (11)$$

$$g_{jn} \geq G_{min}(1-c_j), j = 1, \dots, NA \quad (12)$$

$$y_{in} \leq y_{ip}(1-b_i), i = 1, \dots, A \quad (13)$$

$$g_{jn} \leq g_{jp}(1-c_j), j = 1, \dots, NA \quad (14)$$

$$x_i \leq X_{max}, i = 1, \dots, A \quad (15)$$

$$x_i \geq 0, y_{in} \geq 0, i = 1, \dots, A \quad (16)$$

$$h_j \geq 0, g_{jn} \geq 0, j = 1, \dots, NA \quad (17)$$

$$b_i \text{ binary}, i = 1, \dots, A; c_j \text{ binary}, j = 1, \dots, NA \quad (18)$$

$$z_g, z_a \text{ integer} \geq 0 \quad (19)$$

Η αντικειμενική συνάρτηση (1) εκφράζει το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης των αεροσκαφών στο διάγραμμα από τους ιδανικούς. Αντιστοίχως περιλαμβάνει και το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των υπολειπόμενων χρόνων συντήρησης από τη διαγώνιο στο διάγραμμα των καθηλωμένων αεροσκαφών. Οι δύο πρώτοι όροι αφορούν τα αεροσκάφη που στην αρχή της περιόδου είναι διαθέσιμα. Εφόσον  $z_g$  είναι ο αριθμός αυτών που θα καθηλωθούν στην επόμενη χρονική περίοδο για συντήρηση, ο δείκτης  $i$  καθορίζει το αν το αντίστοιχο αεροσκάφος θα εισέλθει στο χώρο συντήρησης.

Για οποιοδήποτε  $i$  ισχύει ότι αν  $z_g \leq i$  τότε το αντίστοιχο αεροσκάφος θα είναι διαθέσιμο και την επόμενη χρονική περίοδο, καθώς τα αεροσκάφη με τους  $z_g$  χαμηλότερους υπολειπόμενους χρόνους πτήσης θα εισέλθουν για συντήρηση (μέσω της υπόθεσης ότι η σειρά των αεροσκαφών στο διάγραμμα διατηρείται πάντα σταθερή). Σαν αποτέλεσμα, στην επόμενη περίοδο ο νέος δείκτης θα είναι ίσος με  $i - z_g$ . Τέλος, εφόσον  $z_g$  αεροσκάφη θα καθηλωθούν και  $z_a$  αεροσκάφη θα εξέλθουν από τη συντήρηση, η νέα τιμή της κλίσης της διαγωνίου θα είναι ίση με  $\frac{Y}{A - z_g + z_a}$ . Άρα, η τιμή στόχος του υπολειπόμενου χρόνου

πτήσης του αεροσκάφους  $i$  στο τέλος της περιόδου θα είναι το σημείο  $(i - z_g) \frac{Y}{A - z_g + z_a}$ .

Αυτή η τιμή δείχνει πού θα πρέπει να είναι ιδανικά ο υπολειπόμενος χρόνος πτήσης του αεροσκάφους  $i$  και η απόσταση του υπολειπόμενου χρόνου πτήσης από αυτό το σημείο είναι και η απόκλιση του.

Στην περίπτωση που  $z_g \geq i$ , τότε στο τέλος της περιόδου το αεροσκάφος  $i$  θα καθηλωθεί για συντήρηση ενώ ο υπολειπόμενος χρόνος συντήρησης που θα έχει θα είναι ίσος με  $G$ , αλλάζοντας το δείκτη από  $i$  σε  $j$ . Με γνώμονα ότι  $z_a$  θα είναι ο αριθμός αυτών που θα βγουν από τον χώρο συντήρησης στο τέλος της περιόδου, ο δείκτης του αεροσκάφους  $i$  που θα καθηλωθεί θα είναι ίσος με  $j = (NA + i - z_a)$ . Η νέα διαγώνιος για τα καθηλωμένα αεροσκάφη θα έχει κλίση ίση με  $\frac{G}{NA + z_g - z_a}$ . Επομένως, η τιμή στόχος για τον

υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης του αεροσκάφους  $i$  που θα καθηλωθεί για συντήρηση θα είναι  $(NA+i-z_a)\frac{G}{NA+z_g-z_a}$ .

Τέλος, θα πρέπει να τονιστεί ότι οι όροι  $(1-b_i)$  και  $b_i$  είναι οι δυαδικές μεταβλητές για τις οποίες είχε γίνει αναφορά νωρίτερα και μηδενίζονται αναλόγως με την κατάσταση στην οποία θα βρίσκεται το αεροσκάφος την επόμενη χρονική περίοδο. Συγκεκριμένα αν  $b_i=0$  αυτό σημαίνει ότι το αεροσκάφος με δείκτη  $i$  θα είναι διαθέσιμο προς πτήση και την επόμενη χρονική περίοδο ενώ αν  $b_i=1$  το αεροσκάφος στην επόμενη χρονική περίοδο θα έχει μπει στον χώρο συντήρησης. Αξίζει να αναφερθεί ότι ένας από τους δύο όρους  $(1-b_i)$  και  $b_i$  θα είναι μηδέν, μηδενίζοντας αντιστοίχως και την σχέση με την οποία πολλαπλασιάζεται. Αν  $b_i=0$  τότε θα ληφθεί υπόψιν μόνο ο όρος του τετραγώνου που αφορά τα αεροσκάφη που θα είναι διαθέσιμα την επόμενη χρονική περίοδο προς πτήση ενώ αν  $b_i=1$  θα μηδενιστεί αυτός ο όρος και θα υπολογιστεί ο όρος του τετραγώνου που αφορά τα καθηλωμένα αεροσκάφη.

Η ίδια μεθοδολογία συναντάται και στους επόμενους και τελευταίους δύο όρους της συνάρτησης που αφορούν τα αεροσκάφη που στην αρχή της περιόδου είναι στο χώρο συντήρησης και στο τι θα γίνει με αυτά στο τέλος της περιόδου (αν θα παραμείνουν ή θα τελειώσει η συντήρησή τους). Αντιστοίχως, χρησιμοποιείται η δυαδική μεταβλητή  $c_j$ .

Ο περιορισμός (2) ενημερώνει τους υπολειπόμενους χρόνους πτήσης με βάση τους αρχικούς υπολειπόμενους χρόνους και τους χρόνους που θα ανατεθούν σε κάθε αεροσκάφος να πετάξει κατά την περίοδο αυτή. Ο περιορισμός (3) ενημερώνει τους υπολειπόμενους χρόνους συντήρησης κατά όμοιο τρόπο.

Οι περιορισμοί (4) και (5) εξασφαλίζουν την σειρά με την οποία θα μπουν και θα βγουν από το χώρο συντήρησης τα αεροσκάφη ώστε να διατηρείται η κυκλική αλληλουχία που έχει υποτεθεί.

Όσον αφορά τους περιορισμούς (6) και (7) είναι οι μετρητές του πόσα αεροσκάφη διαδοχικά μπαίνουν και βγαίνουν από το σταθμό μέσω των μεταβλητών  $b_i$  και  $c_j$ .

Ο περιορισμός (8) εξασφαλίζει ότι δεν θα υπάρξει υπέρβαση του μέγιστου επιτρεπόμενου αριθμού αεροσκαφών που χωράει η συντήρηση ενώ ο (9) περιορίζει, θέτοντας τις ώρες που θα διατεθούν προς συντήρηση ίσες με το μικρότερο μεταξύ του συνολικού χρόνου που έχει στη διάθεση του ο χώρος για συντήρηση και στο συνολικό χρόνο που απαιτείται για να επιστρέψουν στην ενεργό δράση όλα τα καθηλωμένα αεροσκάφη.

Αυτός ο περιορισμός προστίθεται για την περίπτωση που δεν θα εξαντληθεί η διαθεσιμότητα των ωρών και όλα τα αεροπλάνα θα βγουν από τον χώρο επισκευής. Εξασφαλίζεται έτσι ότι δεν θα υπάρξει υπέρβαση της χωρητικότητας αλλά και επίσης ότι δεν θα μείνει αναξιοποίητος χρόνος συντήρησης που μπορεί να διέθετε ο σταθμός.

Ο περιορισμός (10) χρησιμοποιείται για να εξασφαλίσει ότι το απαιτούμενο πτητικό φορτίο θα εκτελεστεί μεταξύ των δύο ορίων ανοχής  $L$  και  $U$ . Για παράδειγμα έχοντας  $L=0.95$  και  $U=1.05$  μπορεί να γίνει ανεκτή απόκλιση από το προκαθορισμένο πτητικό φορτίο της τάξεως του 5%.

Ο (11) θέτει ένα κάτω όριο στον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης που μπορεί να έχει στο τέλος της περιόδου ένα διαθέσιμο αεροσκάφος ενώ ο (12) θέτει ένα κατώτερο όριο στον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης που θα μπορεί να έχει ένα καθηλωμένο αεροσκάφος. Η χρησιμότητα αυτού έγκειται στο γεγονός ότι υπολογιστικά ένας πολύ μικρός υπολειπόμενος χρόνος θα ήταν πρακτικά ανεφάρμοστο να επιτευχθεί. Αυτή στην πράξη είναι η ανοχή μεταξύ ενός καθηλωμένου και ενός διαθέσιμου αεροσκάφους. Ο περιορισμός (13) από την άλλη θέτει ένα άνω όριο στο υπολειπόμενο χρόνο πτήσης για το  $i$  αεροσκάφος στην αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου, ενώ ομοiotρόπως ο (14) κάνει το ίδιο για το χρόνο συντήρησης του αεροσκάφους  $j$  στο ίδιο διάστημα. Ο περιορισμός (15) αφορά περισσότερο τεχνικούς περιορισμούς οι οποίοι δεν πρέπει να υπερβαίνονται, θέτοντας ένα άνω όριο στο πόσες ώρες μπορεί να πετάξει ένα αεροσκάφος σε μια χρονική περίοδο.

Οι περιορισμοί (16) και (17) υποδηλώνουν τη μη αρνητικότητα των χρόνων πτήσης και συντήρησης. Επιπροσθέτως, οι (18) και (19) ορίζουν την ακεραιότητα των μεταβλητών  $b_i, c_j, z_g,$  και  $z_a$  (ορίζοντας τις πρώτες ως δυαδικές και τις επόμενες ως ακέραιες).

Υπάρχει μία σπάνια περίπτωση στην οποία οι περιορισμοί (9) και (12) δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα. Αυτό συμβαίνει αν  $B < \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}$  ενώ ταυτοχρόνως ο (9) οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα στο οποίο ένα ή περισσότερα αεροσκάφη καταλήξουν να έχουν υπολειπόμενους χρόνους μικρότερους από  $G_{min}$  στο τέλος της περιόδου. Παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης θα ήταν αν  $NA = 1, g_{1p} = G_{min} = 0.1$  και  $B = 0.05$  για την οποία δεν θα υπήρχε εφικτή λύση.

Από πρακτικής απόψεως κάτι τέτοιο μπορεί εύκολα να αντιμετωπιστεί προσαρμόζοντας κατάλληλα την χρονική χωρητικότητα του χώρου συντήρησης. Στην παραπάνω περίπτωση θέτοντας το  $B=0$  ή το  $B=0.1$  θα έκανε το πρόβλημα εφικτό χωρίς

σημαντική διαφορά. Από υπολογιστικής απόψεως τώρα αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω μίας απλής και εύκολης μορφοποίησης. Χρησιμοποιούμε μία βοηθητική δυαδική μεταβλητή  $t$  που παίρνει την τιμή 1 αν ο περιορισμός (9) είναι χαλαρός ενώ διαφορετικά παίρνει την τιμή 0. Αν  $B < \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}$ , αντικαθίσταται η σχέση (9) με τις δύο επόμενες:

$$\sum_{j=1}^{NA} h_j \leq B \quad (20)$$

$$B \leq \sum_{j=1}^{NA} h_j + Ft \quad (21),$$

όπου το  $F$  είναι ένας μεγάλος αριθμός, ενώ με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ο εξής περιορισμός:

$$F(1-t) + \sum_{j=1}^{NA} h_j \geq \sum_{j=1}^{NA} g_{jp} - (NA - z_a)G_{min} \quad (22),$$

Με αυτό τον τρόπο προστίθεται και ο όρος  $F \cdot t$  στην αντικειμενική εξίσωση διασφαλίζοντας ότι το  $t$  θα παίρνει την τιμή 0 όποτε υπάρχει εφικτή λύση. Το αποτέλεσμα της μετατροπής είναι το ακόλουθο:

Αν  $B < \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}$  και μία εφικτή λύση για την οποία  $\sum_{j=1}^{NA} h_j = B$  υπάρχει, τότε το  $t$  παίρνει την τιμή 0 και αυτός ο περιορισμός θα εξασφαλιστεί από τους (20) και (21), ενώ ο (22) θα γίνει περιττός (το πρώτο μέλος θα είναι πάντα πολύ μεγαλύτερο από το δεύτερο). Αλλιώς, το  $t$  θα πάρει την τιμή 1 με τον περιορισμό (21) να γίνεται περιττός αντιστοίχως και ο (22) από εδώ που μπορεί να προσφερθεί από το και πέρα θα θέσει τον συνολικό χρόνο συντήρησης

σταθμό ίσο με  $\sum_{j=1}^{NA} g_{jp} - (NA - z_a)G_{min}$  αντί για  $B$ . Αυτό θα ισχύει καθώς δεν θα υπάρχει εφικτή λύση για την οποία θα ισχύει  $\sum_{j=1}^{NA} h_j > \sum_{j=1}^{NA} g_{jp} - (NA - z_a)G_{min}$  και άρα θα ισχύει η ισότητα.

Παρόμοιο πρόβλημα μπορεί να προκύψει αν στον προγραμματισμό πτητικών φορτίων καταλήξει η βέλτιστη λύση να δίδει υπολειπόμενους χρόνους σε αεροσκάφη μικρότερους από  $Y_{min}$  στο τέλος της χρονικής περιόδου. Τέτοια περίπτωση θα μπορούσε να υπάρξει αν σε  $A = 1, y_{1p} = Y_{min} = 0.1, S = 0.05, L = 0.9$  και  $U = 1.1$  και τότε το πρόβλημα δεν

θα είχε εφικτή λύση. Μία τεχνική πανομοιότυπη με αυτήν που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να υιοθετηθεί και εδώ πέρα. Αυτές οι δύο περιπτώσεις είναι πολύ σπάνιες σε σημείο που η μελέτη τους να καταντάει ασήμαντη. Για αυτό το λόγο στη μελέτη του προβλήματος δεν λαμβάνονται υπόψιν και δεν χρησιμοποιούνται οι περιορισμοί (20)-(22).

Η προτεινόμενη μορφοποίηση βασίζεται τόσο στο διάγραμμα για τα διαθέσιμα όσο και για τα καθλωμένα αεροσκάφη. Η ιδιαιτερότητά της έγκειται στο ότι παρέχει μία επιπλέον ευελιξία επιτρέποντας τον ακριβή υπολογισμό με βάση τη μεταβολή στη διαγωνίου για το πόσα αεροσκάφη μπαίνουν και πόσα βγαίνουν από το σταθμό συντήρησης. Ο τρόπος αυτός φαίνεται πολύ πιο λογικός από το να γίνεται ο προσδιορισμός αυτών των αριθμών εκ των προτέρων και με βάση αυτή την απόφαση να γίνεται η μέτρηση αλλά και ο προσδιορισμός της καινούργιας διαγωνίου.

Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα μπορεί να χωριστεί σε δύο επιμέρους υποπροβλήματα: το πρώτο αφορά τα προς είσοδο και το δεύτερο τα προς έξοδο αεροσκάφη. Οι διαφορές αυτών των δύο υποπροβλημάτων είναι ελάχιστες. Στην περίπτωση των διαθέσιμων μπορεί να υπάρξει μία ανεκτικότητα μέσα σε κάποια όρια  $L$  και  $U$  στην ικανοποίηση του πτητικού φορτίου ενώ κάτι τέτοιο δεν ισχύει για το χρόνο συντήρησης. Επιπροσθέτως, υφίσταται ένα άνω όριο για το πόσο μπορεί να πετάξει το κάθε αεροπλάνο, ενώ κάτι αντίστοιχο δεν υπάρχει όταν έρχεται η σειρά του υπολογισμού για το πόση ώρα θα εκτελέσει συντήρηση το κάθε ένα.

Ένας από τους περιορισμούς οι οποίοι τέθηκαν έχει να κάνει με την εξασφάλιση της σειράς με την οποία οφείλουν να μουν και να βγουν τα αεροσκάφη από το χώρο συντήρησης που σε πρώτη φάση φαίνεται να περιορίζει πολύ το πρόβλημα. Για παράδειγμα, ένα αεροσκάφος που είναι διαθέσιμο αυτή την χρονική περίοδο δεν είναι δυνατό την επόμενη περίοδο να έχει μπει στο χώρο συντήρησης αν πρώτα δεν έχουν εισέλθει σε αυτόν όλα τα αεροσκάφη με χαμηλότερους υπολειπόμενους χρόνους πτήσης. Το ίδιο ισχύει και για τα αεροπλάνα που βρίσκονται καθλωμένα και δεν μπορούν να προσπεράσουν τα προηγούμενα στο διάγραμμα. Μέσα από αυτό τον περιορισμό γίνεται φανερό ότι τα αεροσκάφη πρέπει να καθλώνονται και να επανέρχονται στη δράση με συγκεκριμένη περιστροφική σειρά.

Στην μελέτη του προβλήματος όμως αυτός ο περιορισμός δεν παίζει κανένα ρόλο στην επίλυση και τα αποτελέσματα είναι τα ίδια με την περίπτωση του να μην υπήρχε εξ' αρχής. Τα αεροσκάφη είναι ελεύθερα να κινούνται με όποια σειρά θέλουν και να

μπαινοβγαίνουν στο χώρο συντήρησης χωρίς κανένα πρόβλημα και οι υπολειπόμενοι χρόνοι υπολογίζονται αντιστοίχως. Με αυτό κατά νου, ο δείκτης κάθε αεροσκάφους θα έπρεπε να είναι συνάρτηση μόνο του πόσες ώρες πετάει το καθένα και πόσα μπαίνουν και βγαίνουν από το σταθμό. Η τιμή αυτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε αρκεί να συμβαδίζει με τους άλλους περιορισμούς. Μπορεί να αποδειχτεί ότι υπάρχει πάντα μία βέλτιστη λύση που είναι ίδια με την λύση που προκύπτει όταν ο επιπρόσθετος αυτός περιορισμός είναι χαλαρός. Μέσω της απόδειξης αποκαλύπτονται κάποιες ιδιότητες του προβλήματος κομβικής σημασίας για την επίλυση. Αυτές ενσωματώνονται στη συνέχεια στην εργασία στην προσπάθεια καταγραφής του αλγορίθμου που θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του ιδανικού συνδυασμού.

## 2.2 Αποδείξεις

### Πρόταση 1.

Έχοντας τη βέλτιστη λύση του προβλήματος με βάση τις περιορισμούς (1)-(19) δεν υπάρχει άλλη λύση που να ικανοποιεί όλους τις περιορισμούς εκτός πιθανόν από τους (4) και/ή (5) στην οποία οι διαθέσιμες επιλογές μεταξύ των μεταβλητών να καταλήγουν σε χαμηλότερο συνολικό δείκτη απόκλισης (total deviation index) για την αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου.

### Απόδειξη

Κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχει άλλη βέλτιστη λύση (έστω ότι οι τιμές για τις μεταβλητές της συμβολίζονται με το δείκτη  $q$ ) που περιλαμβάνει δύο διαθέσιμα αεροσκάφη με δείκτες  $l$  και  $m$  για τα οποία ισχύει  $y_{lp} > y_{mp}$  and  $y_{ln}^q < y_{mn}^q$  και οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα χαμηλότερου δείκτη απόκλισης. Θεωρούμε μία διαφορετική λύση στην οποία οι μεταβλητές απόφασης παραμένουν ίδιες όπως στην λύση  $q$  με την εξαίρεση ότι  $x_l = (y_{lp} - y_{mp}) + x_m^q$ ,  $x_m = x_l^q + x_m^q - x_l$ ,  $y_{ln} = y_{mn}^q$ ,  $y_{mn} = y_{ln}^q$ ,  $b_l = b_m^q$  και  $b_m = b_l^q$ . Γίνεται κατανοητό πλέον ότι δεν παραβιάζεται ο περιορισμός (4). Επιπλέον αντιστρέφοντας τα δύο αεροσκάφη στο διάγραμμα θα παρθεί η ίδια λύση όπως και στην περίπτωση  $q$ . Με την επανάληψη της ίδιας μεθόδου μεταξύ όλων των αεροσκαφών του  $q$  λαμβάνεται το ίδιο αποτέλεσμα όπως και προηγουμένως. Η διαφορά είναι ότι τώρα ικανοποιείται και ο περιορισμός (4) για την εξασφάλιση τις σειράς εισόδου στη συντήρηση των αεροσκαφών. Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον περιορισμό (5) ούτως ώστε να εξαλειφτεί το πρόβλημα (με απλή



αντικατάσταση των  $x$ ,  $y$  και  $b$  με τα αντίστοιχα  $h$ ,  $g$  και  $c$  αντίστοιχα) και για την σειρά εξόδου των αεροπλάνων. Συνολικά η τιμή τις εξίσωσης απόκλισης από τις διαγώνιους που θα λαμβάνεται ως αποτέλεσμα θα είναι η ίδια με τις περίπτωσης  $q$ . Με αυτό τον τρόπο γίνεται φανερό ότι η βέλτιστη τιμή που θα βρεθεί πάντα θα υπόκειται στους περιορισμούς (1)-(19) και άρα η υπόθεση που έχει γίνει πάντα θα ισχύει.

## Μεθοδολογία επίλυσης

### Επίλυση για συγκεκριμένο αριθμό $z_g$ και $z_a$

Υποθέτουμε ότι τα  $z_g$  και  $z_a$  που βελτιστοποιούν τη συνάρτηση με τους περιορισμούς (1)-(19) είναι γνωστά. Μέσω αυτών είναι γνωστές οι βέλτιστες δυαδικές μεταβλητές  $b_i$  για  $i = 1, \dots, A$  και  $c_j$  για  $j = 1, \dots, NA$  και ως εκ τούτου οι δείκτες που θα έχουν μετά το τέλος της περιόδου τα αεροσκάφη και η κλίση της διαγωνίου για τα διαθέσιμα και τα καθηλωμένα αεροσκάφη. Με γνώση των  $z_g$  και  $z_a$ , το ζητούμενο της εύρεσης των υπολοίπων μεταβλητών απόφασης γίνεται αρκετά πιο απλό και επιλύεται εύκολα μέσω δύο υπό-προβλημάτων με το πρώτο να αφορά το διάγραμμα για τα αεροσκάφη που είναι διαθέσιμα και το δεύτερο για τα καθηλωμένα.

Για την επίλυση των δύο υποπροβλημάτων χρησιμοποιούνται δύο σύνολα, το ένα ως  $K$  με δείκτη  $k$  και το άλλο ως  $M$  με δείκτη  $m$ . Τα αεροσκάφη που βρίσκονται στο σύνολο  $K$  χωρίζονται σε δύο υποσύνολα: το σύνολο  $K_1$  περιέχει αυτά που στην αρχή της περιόδου ήταν καθηλωμένα και την επόμενη περίοδο θα είναι διαθέσιμα, ενώ το  $K_2$  περιέχει αυτά που στην πρότερη περίοδο ήταν διαθέσιμα και θα είναι στην ίδια κατάσταση και στην επόμενη. Σαφέστατα ο χρόνος συντήρησης των αεροσκαφών που ανήκουν στο σύνολο  $K_1$  θα είναι ίσος με τον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης.

Παρομοίως, το σύνολο  $M$  περιέχει το σύνολο  $M_1$  στο οποίο ανήκουν τα αεροπλάνα που ήταν διαθέσιμα στην αρχή της περιόδου και στο τέλος της θα καθηλωθούν για συντήρηση, και το σύνολο  $M_2$  στο οποίο ανήκουν αυτά που ήταν και θα παραμείνουν καθηλωμένα. Με τον ίδιο τρόπο γίνεται φανερό ότι ο χρόνος πτήσης κάθε αεροπλάνου του συνόλου  $M_1$  θα είναι ίσος με τον υπολειπόμενο χρόνο πτήσης που είχε το καθένα στην αρχή.

Οι νέες τιμές που θα έχουν τώρα τα αεροσκάφη με γνωστά τα  $z_g$  και  $z_a$  χρησιμοποιούνται για να ανανεωθούν οι δείκτες τους. Για αυτά που ανήκουν στο  $K_2$  θα πάρουμε τις δείκτες  $k=1,2,\dots,|K_2|$  αναλόγως με τον υπολειπόμενο στην αρχή χρόνου πτήσης και στη συνέχεια θα τοποθετηθούν τα αεροσκάφη που ανήκουν στο  $K_1$  με δείκτες  $k=|K_2|+1,\dots,|K_2|+|K_1|$  πάλι με τον ίδιο τρόπο. Να τονιστεί ότι  $|K| = |K_2|+|K_1|$ , και στη συνέχεια το ακόλουθο πρόγραμμα βελτιστοποίησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν οι βέλτιστοι χρόνοι πτήσης για τα αεροπλάνα που εμπεριέχονται στο σύνολο  $K_2$ :

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{|K|} \left( y_{kn} - k \frac{Y}{A - z_g + z_a} \right)^2$$

$$\text{s.t. } y_{kn} = y_{kp} - x_k, \quad k = 1, \dots, |K_2|$$

$$y_{kn} = Y - x_k, \quad k = |K_2|+1, \dots, |K|$$

$$LS \leq \sum_{k=1}^{|K_2|} x_k + \sum_{m \in M_1} y_{mp} \leq US$$

$$y_{kn} \geq Y_{min}, \quad k = 1, \dots, |K_2|$$

$$x_k \leq X_{max}, \quad k = 1, \dots, |K_2|$$

$$x_k = 0, \quad k = |K_2|+1, \dots, |K|$$

$$x_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, |K|$$

Σε αυτή τη μορφοποίηση η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιεί την συνολική απόκλιση από την διαγώνιο των διαθέσιμων αεροσκαφών στην αρχή της επόμενης περιόδου. Οι πρώτοι δύο περιορισμοί επικαιροποιούν τους υπολειπόμενους χρόνους των αεροσκαφών των συνόλων  $K_2$  και  $K_1$ . Ο επόμενος περιορισμός εξασφαλίζει την ικανοποίηση των πτητικών αναγκών μέσα στα ανεκτά όρια (με το δείκτη  $m$  να διατρέχει τα διαθέσιμα αεροπλάνα που θα μπουν στον χώρο συντήρησης την επόμενη χρονική περίοδο). Οι επόμενοι δύο περιορισμοί θέτουν άνω και κάτω όρια για τους χρόνους που μπορούν να πετάξουν τα αεροσκάφη που ανήκουν στην ομάδα  $K_2$ , ενώ ο επόμενος θέτει τους υπολειπόμενους χρόνους του συνόλου  $K_1$  ίσους με 0, καθώς δεν θα μπορούν να ανατεθούν σε αυτά χρόνοι πτήσης μιας και θα είναι καθηλωμένα. Ο τελευταίος περιορισμός αφορά τη μη αρνητικότητα των μεταβλητών. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι τα  $y_{kn}$  και τα  $x_k$  για  $k=1, \dots, |K_2|$  είναι μεταβλητές απόφασης με τα  $y_{kp}$  για  $k=1, \dots, |K_2|$  στην αρχή της περιόδου να

είναι γνωστά ενώ τα  $y_{kn}$  και  $x_k$  για  $k = |K_2|+1, \dots, |K|$  είναι βοηθητικές μεταβλητές που δεν υπήρχαν στο αρχικό πρόβλημα με τις τιμές τους γνωστές. Θέτοντας  $s = \frac{Y}{A - z_g + z_a}$ ,  $X_k = \min(X_{max}, y_{kp} - Y_{min})$  για  $k = 1, \dots, |K_2|$ ,  $y_{kp} = Y$  για  $k = |K_2|+1, \dots, |K|$  και  $X_k = 0$  για  $k = |K_2|+1, \dots, |K|$ , λαμβάνεται ως αποτέλεσμα η ακόλουθη μορφοποίηση:

$$\text{Min} \sum_{k=1}^{|K|} ((y_{kp} - x_k) - ks)^2 \quad (23)$$

$$\text{s.t. } LS - \sum_{m \in M_1} y_{mp} \leq \sum_{k=1}^{|K|} x_k \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^{|K|} x_k \leq US - \sum_{m \in M_1} y_{mp} \quad (25)$$

$$0 \leq x_k \leq X_k, k = 1, \dots, |K| \quad (26)$$

Το πρόβλημα που ορίζεται από τις σχέσεις (23)-(26) είναι τετραγωνικό και είναι εύκολο να λυθεί με εξειδικευμένες μεθόδους επίλυσης. Εδώ χρησιμοποιείται μία μέθοδος επονομαζόμενη και ως Sweep μέσω της οποίας λαμβάνεται η βέλτιστη λύση.

Στο διάγραμμα στο οποίο αναφέρονται οι παράμετροι  $y_{kp}$  στα (23)-(26) θεωρούμε μία ευθεία παράλληλη στη διαγώνιο και αρκετά υψηλότερα ώστε να βρίσκεται πάνω από τις συντεταγμένες των αεροσκαφών (όπως φαίνεται και στο σχήμα 2 με το κάθε σημείο να αφορά ένα αεροπλάνο). Αυτή η γραμμή αρχίζοντας να κατεβαίνει προς τα κάτω, παραμένοντας παράλληλη στην διαγώνιο, αρχίζει να σαρώνει τα σημεία με τα οποία έρχεται σε επαφή. Κατά τη διαδικασία αυτή χρόνοι πτήσης ανατίθενται στα αεροσκάφη (με τη σειρά σάρωσης). Αν σε κάποιο από αυτά ο χρόνος που του δοθεί φτάσει τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει,  $X_k$ , η γραμμή το προσπερνάει και συνεχίζει με τα υπόλοιπα σημεία για να διασφαλίσει την εφικτότητα τις τελικής λύσης. Κατά τη διαδικασία αυτή μπορεί να ληφθεί μία από τις ακόλουθες λύσεις:

1. Η λύση όπου το άθροισμα των ορισμένων χρόνων πτήσης των αεροσκαφών είναι ίσο με  $LS - \sum_{m \in M_1} y_{mp}$ . Στη συνέχεια τις εργασίας και για ευκολία θα αναφερόμαστε σε αυτό το άθροισμα ως LL.

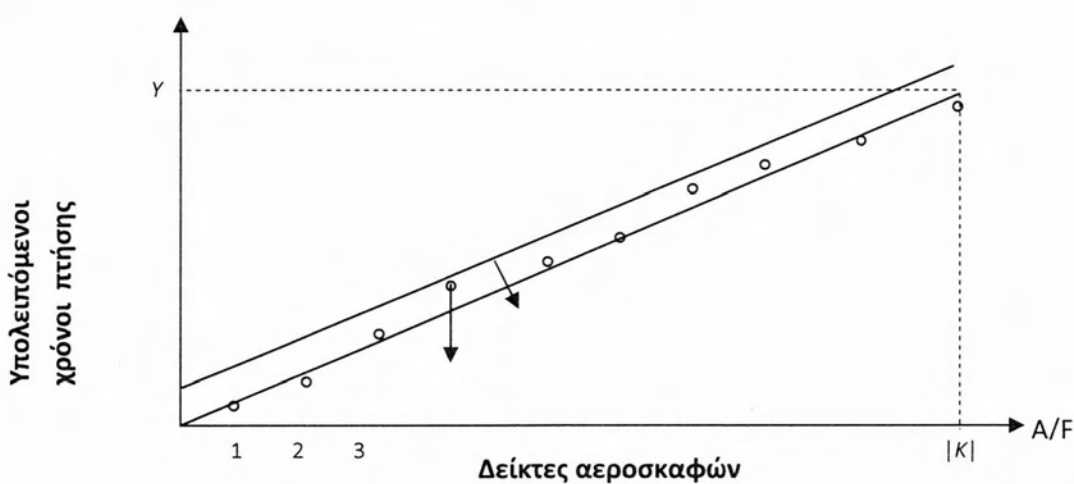
2. Η περίπτωση στην οποία το άθροισμα των χρόνων πτήσης που έχουν τεθεί είναι ίσο με  $US - \sum_{m \in M_1} y_{mp}$ . Στη συνέχεια και για ευκολία θα αναφερόμαστε στο άθροισμα αυτό ως UL.
3. Η λύση στην οποία σε κάθε αεροσκάφος θα δοθεί ο μέγιστος επιτρεπόμενος χρόνος πτήσης του,  $X_k$ . Για την περίπτωση αυτή θα αναγράφουμε στο εξής ως X το άθροισμα του συνολικού χρόνου πτήσης.
4. Η λύση στην οποία κατά τη σάρωση η ευθεία φτάσει να εφάπτεται με τη διαγώνιο. Στη συνέχεια, το άθροισμα των ανατεθειμένων χρόνων πτήσης των αεροσκαφών σε αυτή τη λύση συμβολίζεται με D.

### Πρόταση 2.

Υποθέτοντας ότι τα LL, UL, X, D τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά.

A) Αν λαμβάνοντας υπόψιν οποιαδήποτε ισοβαθμία κατάσταση δεν δύναται να υπάρξει σειρά στην οποία το LL να προηγείται του X το πρόβλημα που ορίζεται από τα (23)-(26) δεν έχει λύση.

B) Αν υπάρχει σειρά στην οποία το LL προηγείται του X τότε η βέλτιστη λύση του προβλήματος που ορίζεται από τις παραπάνω σχέσεις μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο τις σάρωσης (sweep) και το άθροισμα των χρόνων πτήσης που δίνεται στα αεροσκάφη είναι ίσο με την ποσότητα που βρίσκεται δεύτερη στη σειρά αυτή.



Σχήμα 2. Αναπαράσταση της διαδικασίας Sweep

Παρόμοιος τρόπος σκέψης χρησιμοποιείται και για το σύνολο  $M$ . Οι δείκτες των αεροσκαφών του συνόλου ανανεώνονται όπως περιγράφεται παρακάτω. Πρώτα ταξινομούνται τα αεροσκάφη της ομάδας  $M_2$  με σειρά  $m = 1, \dots, |M_2|$  με βάση μία αύξουσα σειρά του υπολειπόμενου χρόνου συντήρησης. Ακολούθως ταξινομούνται τα αεροσκάφη της ομάδας  $M_1$  με δείκτες  $m = |M_2|+1, \dots, |M_2|+|M_1|$  πάλι με τον ίδιο τρόπο. Να τονιστεί πριν τη συνέχεια ότι  $|M| = |M_2|+|M_1|$ . Το ακόλουθο τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης (αντίστοιχο του προηγούμενου) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν οι βέλτιστοι χρόνοι συντήρησης των  $M_2$ :

$$\text{Min} \sum_{m=1}^{|M|} \left( g_{mn} - m \frac{G}{NA + z_g - z_a} \right)^2$$

$$\text{s.t. } g_{mn} = g_{mp} - h_m, m = 1, \dots, |M_2|$$

$$g_{mn} = G - h_m, m = |M_2|+1, \dots, |M|$$

$$\sum_{m=1}^{|M_2|} h_m + \sum_{k \in K_1} g_{kp} = \min(B, \sum_{j=1}^{NA} g_{jp})$$

$$g_{mn} \geq G_{min}, m = 1, \dots, |M_2|$$

$$h_m = 0, m = |M_2|+1, \dots, |M|$$

$$h_m \geq 0, m = 1, \dots, |M|$$

Σε αυτή την μορφοποίηση, η ζητούμενη λύση ελαχιστοποιεί την συνολική απόκλιση που θα επιτευχθεί από τη διαγώνιο των κάθετων αποστάσεων των καθηλωμένων αεροσκαφών στην αρχή της επόμενης περιόδου. Οι πρώτοι δύο περιορισμοί ανανεώνουν τους υπολειπόμενους χρόνους συντήρησης των αεροσκαφών των ομάδων  $M_2$  και  $M_1$  αντίστοιχα για την αρχή της επόμενης χρονικής περιόδου. Ο επόμενος αφορά την καλύτερη εκμετάλλευση του συνολικού διαθέσιμου χρόνου συντήρησης (το  $k$  αφορά τα αεροσκάφη που θα ολοκληρώσουν τη συντήρηση και θα είναι διαθέσιμα στην επόμενη περίοδο). Ο περιορισμός που ακολουθεί θέτει ένα κάτω όριο στον υπολειπόμενο χρόνο συντήρησης κάθε αεροσκάφους που ανήκει στο σύνολο  $M_2$  ενώ στη συνέχεια δίνεται η τιμή 0 στους χρόνους

όλων των αεροσκαφών του συνόλου  $M_1$  που ακολουθεί. Αυτό έρχεται σαν επακόλουθο του γεγονότος ότι τα αεροσκάφη του συνόλου  $M_1$  είναι διαθέσιμα και στο τέλος της περιόδου θα καθηλωθούν για συντήρηση. Τελειώνοντας, τίθεται ο περιορισμός του χρόνου συντήρησης να μην παίρνει αρνητικές τιμές. Στη μορφοποίηση αυτή τα  $g_{mn}$  και  $h_m$  για  $m = 1, \dots, |M_2|$  αποτελούν μεταβλητές απόφασης ενώ τα  $g_{mp}$  για  $m = 1, \dots, |M_2|$  είναι γνωστές παράμετροι. Τέλος τα  $g_{mn}$  και  $h_m$  για  $m = |M_2|+1, \dots, |M|$  είναι βοηθητικές μεταβλητές που δεν υπήρχαν και χρησιμοποιούνται για διευκόλυνση με γνωστές τιμές. Θέτοντας  $s = \frac{G}{NA + z_g - z_a}$ ,  $H_m = g_{mp} - G_{min}$ , για  $m = 1, \dots, |M_2|$ ,  $g_{mp} = G$  για  $m = |M_2|+1, \dots, |M|$  και  $H_m = 0$  για  $m = |M_2|+1, \dots, |M|$  παίρνουμε τη μορφοποίηση:

$$\text{Min} \sum_{m=1}^{|M|} ((g_{mp} - h_m) - ms)^2 \quad (27)$$

$$\text{s.t.} \sum_{m=1}^{|M|} h_m = \min(B, \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}) - \sum_{k \in K_1} g_{kp} \quad (28)$$

$$0 \leq h_m \leq H_m, m = 1, \dots, |M| \quad (29)$$

Το πρόβλημα αυτό είναι παρόμοιο με το πρόβλημα που ορίστηκε πρωτύτερα από τις σχέσεις (23)-(26). Στο διάγραμμα που παίρνουμε από τις συντεταγμένες  $(m, g_{mp})$  των καθηλωμένων αεροσκαφών μπορούν ληφθούν οι ακόλουθες δύο λύσεις χρησιμοποιώντας τη διαδικασία Sweep:

1. Η λύση στην οποία το άθροισμα των χρόνων συντήρησης που έχουν ανατεθεί στα συντηρούμενα αεροσκάφη είναι ίσο με το  $\min(B, \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}) - \sum_{k \in K_1} g_{kp}$ . Το άθροισμα αυτό στη συνέχεια θα το συμβολίζουμε ως  $Bg$ .
2. Η λύση στην οποία κάθε αεροπλάνο  $m$  λαμβάνει τον μέγιστο χρόνο συντήρησης,  $H_m$ . Το άθροισμα αυτό στη συνέχεια θα συμβολίζεται ως  $H$ . Η πρόταση 2 που είχε γίνει για τα διαθέσιμα αεροσκάφη μπορεί να εφαρμοστεί ως ακολούθως για να βρεθεί η βέλτιστη λύση των (27)-(29).

### Πρόταση 3

A) Αν  $Bg \leq H$  τότε η βέλτιστη λύση του προβλήματος που ορίστηκε παραπάνω μπορεί να βρεθεί μέσω της μεθόδου της σάρωσης (sweep). Όταν ισχύει αυτό ο συνολικός χρόνος συντήρησης που θα ανατεθεί στα αεροσκάφη είναι ίσος με  $Bg$ .

B) Αν  $Bg > H$  τότε το παραπάνω πρόβλημα δεν έχει λύση.

### Απόδειξη

Ο τρόπος απόδειξης τις υπόθεσης που έγινε είναι όμοιος με αυτόν την απόδειξης για τις σχέσεις (23)-(26) και βασίζεται στο ότι  $L = U = 1$  and  $LS - \sum_{m \in M_1} y_{mp} = US - \sum_{m \in M_1} y_{mp}$ .

### 2.3 Εύρεση εφικτών συνδυασμών $z_g$ και $z_a$

Η μελέτη η οποία έχει γίνει μέχρι τώρα φανερώνει ότι όταν οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών  $z_g$  και  $z_a$  είναι γνωστές, η εύρεση των βέλτιστων τιμών των υπολοίπων μεταβλητών του προβλήματος που ορίζεται από τις (1)-(19) ανάγεται στην επίλυση δύο ανεξάρτητων τετραγωνικών προβλημάτων. Το πρώτο από αυτά είναι συσχετισμένο με το διάγραμμα των αεροσκαφών που θα είναι διαθέσιμα την επόμενη χρονική περίοδο ενώ το δεύτερο έχει να κάνει με αυτά που θα είναι καθηλωμένα. Επιπροσθέτως, η συνολική ελάχιστη απόκλιση από την διαγώνιο για καθορισμένα  $z_g$  και  $z_a$  είναι ίση με το άθροισμα των αποκλίσεων των δύο υποπροβλημάτων. Συμπερασματικά, μεταξύ όλων των εφικτών συνδυασμών των  $z_g$  και  $z_a$  η βέλτιστη λύση του συνόλου του προβλήματος είναι αυτή στην οποία ελαχιστοποιείται το άθροισμα των αποκλίσεων (για τα δύο διαγράμματα).

Αρχικά, ακολουθείται μία διαδικασία να απορριφθούν ανέφικτοι συνδυασμοί των  $z_g$  και  $z_a$ . Για το λόγο αυτό αρχικά εξετάζουμε το  $z_a$ . Θεωρώντας ότι τα καθηλωμένα αεροσκάφη έχουν ήδη τοποθετηθεί σε μη φθίνουσα σειρά υπολειπόμενων χρόνων συντήρησης με δείκτες  $j = 1, \dots, NA$  το ζήτημα επικεντρώνεται στο άθροισμα των χρόνων αυτών λαμβάνοντας μία μη αρνητική μεταβλητή SUM. Αυτή οδηγεί στον ακόλουθο ψευδοκώδικα ο οποίος ορίζει ένα άνω όριο για τα αεροπλάνα που θα εξέλθουν από τη συντήρηση:

```

Sum = 0; j = 1;

while j ≤ NA do

    Sum = Sum + gjp;

    if Sum ≤ B do

        j = j + 1;

    else

        print j-1 and exit;

    end if

end while

print j-1;

```

#### Πρόταση 4

Η τιμή της μεταβλητής  $z_a$  σε οιαδήποτε εφικτή λύση του προβλήματος (1)-(19) δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τιμή που δίνει ο παραπάνω ψευδοκώδικας.

#### Απόδειξη

Η μεταβλητή SUM χρησιμοποιείται για να αποθηκεύεται το άθροισμα των υπολειπόμενων χρόνων συντήρησης όσων αεροσκαφών μπορούν να τελειώσουν τη συντήρησή τους. Σε κάθε επανάληψη, ο αναγκαίος χρόνος για συντήρηση του αεροσκάφους  $j$  προστίθεται στο υπάρχον άθροισμα αν δεν ξεπερνάει τον μέγιστο χρόνο συντήρησης  $B$ , ενώ το  $j$  αυξάνεται κατά ένα. Τη στιγμή που θα ξεπεραστεί ο διαθέσιμος χρόνος συντήρησης θα σημαίνει ότι δεν δύναται ο σταθμός να συντηρήσει πλήρως αυτό το αεροσκάφος (άρα και οποιοδήποτε επόμενο) τερματίζοντας τη διαδικασία. Σε αντίθετη περίπτωση ο τερματισμός επέρχεται όταν συμπεριληφθούν όλα τα αεροπλάνα πράγμα που θα σημαίνει ότι ο  $NA$  είναι ο μέγιστος αριθμός οχημάτων που μπορούν να συντηρηθούν και να επιστρέψουν για χρήση.



Ο ακόλουθος ψευδοκώδικας χρησιμοποιείται για την εύρεση ενός κατώτερου ορίου για το  $z_a$ :

$$Sum = \sum_{j=1}^{NA} g_{jp} - NA(G_{min}); j = 0;$$

while  $j \leq NA$  do

    if  $Sum \geq B$  do

        print  $j$  and exit;

    else

$$Sum = Sum + G_{min}; j = j + 1;$$

    end if

end while

print  $NA$ ;

## Πρόταση 5

Η τιμή της μεταβλητής  $z_a$  σε οποιαδήποτε εφικτή λύση για το πρόβλημα (1)-(19) δεν είναι δυνατό να είναι μικρότερη από την τιμή που δίνει σαν αποτέλεσμα ο παραπάνω ψευδοκώδικας.

## Απόδειξη

Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει από το γεγονός ότι αν  $k$  είναι μία εφικτή τιμή της  $z_a$  τότε η σχέση  $\sum_{j=1}^k g_{jp} + \sum_{j=k+1}^{NA} (g_{jp} - G_{min}) \geq B$ , ή  $\sum_{j=1}^{NA} g_{jp} - NA(G_{min}) + k(G_{min}) \geq B$  ισχύει. Άρα η χαμηλότερη μη αρνητική τιμή του  $k$  για την οποία ισχύει αυτός ο τύπος αποτελεί ένα κάτω όριο για το  $z_a$ . Αν δεν υπάρχει  $k$  μεταξύ του 0 και του  $NA$  που ικανοποιεί την εξίσωση τότε  $\sum_{j=1}^{NA} g_{jp} < B$ , ενώ ο περιορισμός (9) θέτει το  $\sum_{j=1}^{NA} h_j$  να είναι ίσο με  $\sum_{j=1}^{NA} g_{jp}$ ; και συνεπώς η μόνη λύση του  $z_a$  είναι να είναι ίσο με  $NA$ .

Στην ειδική περίπτωση που θα χρειαζόταν να εισαχθούν οι σχέσεις (20)-(22) το κάτω όριο του  $z_a$  θα έβγαινε μεγαλύτερο από το άνω με αποτέλεσμα το όλο πρόβλημα να είναι μη εφικτό. Συνεχίζοντας καταγράφεται μία διαδικασία για την απόρριψη των ανέφικτων τιμών της μεταβλητής  $z_g$ . Θεωρώντας πάλι τα διαθέσιμα αεροσκάφη σε μη φθίνουσα σειρά των υπολειπόμενων χρόνων πτήσης τους με δείκτες  $i = 1, \dots, A$  λαμβάνεται ο ακόλουθος ψευδοκώδικας:

$Sum = 0; i = 1;$

while  $i \leq \min(C, A)$  and  $y_{ip} \leq X_{max}$  do

$Sum = Sum + y_{ip};$

if  $Sum \leq US$  do

$i = i + 1;$

else

print  $i-1$  and exit;

end if

end while

print  $i-1;$

## Πρόταση 6

Η τιμή του  $z_g$  σε οποιαδήποτε εφικτή λύση του προβλήματος που περιγράφεται από τις (1)-(19) δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από αυτήν που βρίσκει ο ανωτέρω ψευδοκώδικας:

## Απόδειξη

Το  $SUM$  λειτουργεί πάλι ως μετρητής για τον μέγιστο αριθμό αεροσκαφών που μπορεί να καθλωθούν σε μία περίοδο. Σε κάθε επανάληψη ο επόμενος υπολειπόμενος χρόνος πτήσης προστίθεται στο  $SUM$  και αν αυτό παραμένει χαμηλότερο ή ίσο με το  $US$  σημαίνει ότι σε αυτή την χρονική περίοδο μπορεί να μπει στο χώρο συντήρησης ο τρέχων αριθμός αεροπλάνων και το  $i$  αυξάνεται κατά 1. Η διαδικασία τελειώνει είτε όταν το  $z_g$  λάβει

τη μεγαλύτερη τιμή του ( $= \min(C, A)$ ), είτε όταν ένα αεροσκάφος έχει υπολειπόμενο χρόνο πτήσης μεγαλύτερο από  $X_{max}$  (άρα δεν μπορεί να πετάξει ικανές ώρες για να εισέλθει στη συντήρηση) είτε όταν το  $SUM$  ξεπεράσει αριθμητικά το  $US$ .

Τελευταίος ψευδοκώδικας είναι αυτός που εισάγεται για την εύρεση ενός κάτω ορίου για το  $Z_g$ :

$$Sum = \sum_{j=1}^A y_{ip} - A(Y_{min}); j = 0;$$

while  $j \leq A$  do

    if  $Sum \geq LS$  do

        print  $j$  and exit;

    else

$Sum = Sum + Y_{min}; j = j + 1;$

    end if

end while

print “problem is infeasible”;

## Πρόταση 7

Η τιμή της μεταβλητής  $z_g$  σε οποιαδήποτε εφικτή λύση του προβλήματος (1)-(19) δεν μπορεί να είναι μικρότερη από την τιμή δίνει ο παραπάνω ψευδοκώδικας .

## Απόδειξη

Η απόδειξη της πρότασης βασίζεται στο ότι αν  $k$  είναι μία πιθανή τιμή του  $z_g$  τότε θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^k y_{ip} + \sum_{i=k+1}^A (y_{ip} - Y_{min}) \geq LS, \text{ δηλαδή } \text{ότι } \sum_{i=1}^k y_{ip} + \sum_{i=k+1}^A (y_{ip} - Y_{min}) \geq LS, .$$

Ο χαμηλότερος μη αρνητικός ακέραιος  $k$  για τον οποίο ισχύει αυτή η σχέση αποτελεί το κάτω όριο του ζητήματος. Αν η σχέση δεν ισχύει ακόμα και όταν  $k = A$  το πρόβλημα είναι μη εφικτό.

Από τη στιγμή που τα άνω και κάτω όρια για της ζητούμενες μεταβλητές  $z_a$  και  $z_g$  έχουν προσδιοριστεί, ο περιορισμός (8) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απορριφθούν οι τιμές που ξεπερνούν τους χωρικούς περιορισμούς του προβλήματος. Με αυτό το σκεπτικό ο αλγόριθμος ελέγχει μεταξύ των υπόλοιπων συνδυασμών για να βρει αυτόν που οδηγεί στη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

## 2.4 Αριθμητικό παράδειγμα

Για την κατανόηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας για την επίλυση του προβλήματος, απαραίτητη κρίνεται μία μαθηματική επίλυση ενός παραδείγματος. Σε μία μικρή ομάδα 6 αεροσκαφών υποτίθεται ότι 4 είναι διαθέσιμα και 2 βρίσκονται στον χώρο συντήρησης στην αρχή της περιόδου. Ο πίνακας 1 παρουσιάζει τους υπολειπόμενους χρόνους συντήρησης και πτήσης του κάθε αεροπλάνου με την έντονη γραφή να αφορά τα καθηλωμένα.

**Πίνακας 1:** Υπολειπόμενοι χρόνοι πτήσης/συντήρησης ( $y_{ip}/g_{jp}$ ) (ώρες)

$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$j = 1$	$j = 2$
38	50	273	298	<b>130</b>	<b>300</b>

Οι τιμές των υπόλοιπων παραμέτρων είναι  $S = 125$  hours,  $B = 325$  hours,  $G = 320$  ώρες,  $Y = 300$  ώρες,  $C = 3$ ,  $X_{max} = 50$  ώρες,  $Y_{min} = 0.1$  ώρες,  $G_{min} = 0.1$  ώρες,  $L = 0.95$  και  $U = 1.05$ . Στον πίνακα αυτό τα αεροσκάφη είναι ήδη σε μη φθίνουσα σειρά των υπολειπόμενων χρόνων τους, κάτι που θα έπρεπε να γίνει αν δεν δινόταν έτσι. Με τη μέθοδο προσδιορισμού των ορίων που περιγράφηκε ακριβώς πριν, ο χρήστης λαμβάνει σαν αποτέλεσμα  $0 \leq z_g \leq 2$  και  $0 \leq z_a \leq 1$ . Μόνο 5 από τις έξη επιλογές όμως είναι δυνατές και αυτό γιατί για  $z_g = 2$  και  $z_a = 0$  έχουμε παραβίαση του περιορισμού (8). Ο πίνακας 2 παρουσιάζει την απόκλιση που παίρνουμε για κάθε εφικτό συνδυασμό των  $z_g$  και  $z_a$ .

**Πίνακας 2:** Ελάχιστη απόκλιση για τους συνδυασμούς  $z_g$  και  $z_a$

$z_g \setminus z_a$	0	1
0	87652.08	23098.56
1	27215.81	<b>9864.06</b>
2	IF	37819.62

Όπως φαίνεται ο βέλτιστος συνδυασμός είναι  $z_g = 1$  και  $z_a = 1$  με το αποτέλεσμα της συνάρτησης να βγαίνει ίσο με 9864.06. Στο τέλος της περιόδου το αεροσκάφος με  $i=1$  θα καθηλωθεί για συντήρηση και αυτό με  $j=1$  θα την ολοκληρώσει βγαίνοντας από το χώρο και θα είναι διαθέσιμο. Τα δεδομένα που προκύπτουν είναι ότι  $x_1 = 38$ ,  $y_{1n} = 0$ ,  $h_1 = 130$  και  $g_{1n} = 0$ .

Στην περίπτωση αυτή το σύνολο  $K$  αποτελείται από τα διαθέσιμα αεροσκάφη με  $i=2,3,4$  (που αποτελούν το  $K_2$ ) και το  $j=1$  (που αποτελεί το  $K_1$ ). Η ομάδα  $M$  εμπεριέχει τα  $j=2$  ( $M_2$ ) και  $i=1$  ( $M_1$ ). Για την διευκόλυνση του υπολογισμού των υπολοίπων ζητούμενων επικαιροποιούνται οι τιμές των δεικτών με βάση τα νέα δεδομένα όπως φαίνεται στον πίνακα 3.

**Πίνακας 3.** Επικαιροποίηση δεικτών αεροσκαφών

Αρχικοί δείκτες	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$j = 1$	$j = 2$
Επικαιροποιημένοι δείκτες	$j = 2$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$j = 1$

Με βάση τις νέες τιμές το ακόλουθο τετραγωνικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των χρόνων πτήσης που αφορούν το  $K_2$ :

$$\text{Min } (y_{1n} - \frac{300}{4-1+1})^2 + (y_{2n} - 2\frac{300}{4-1+1})^2 + (y_{3n} - 3\frac{300}{4-1+1})^2 + (y_{4n} - 4\frac{300}{4-1+1})^2$$

$$\text{s.t. } y_{1n} = 50 - x_1$$

$$y_{2n} = 273 - x_2$$

$$y_{3n} = 298 - x_3$$

$$y_{4n} = 300 - x_4$$

$$0.95(125) \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 38 \leq 1.05(125)$$

$$y_{in} \geq 0.1, i = 1, \dots, 3$$

$$x_i \leq 50, i = 1, \dots, 3$$

$$x_4 = 0$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$$

Μετά από κάποιες πράξεις το πρόβλημα καταλήγει στην επόμενη μορφοποίηση:

$$\text{Min } ((50 - x_1) - 75)^2 + ((273 - x_2) - 150)^2 + ((298 - x_3) - 225)^2 + ((300 - x_4) - 300)^2$$

$$\text{s.t. } 80.75 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 93.25$$

$$0 \leq x_1 \leq 49.9$$

$$0 \leq x_2 \leq 50$$

$$0 \leq x_3 \leq 50$$

$$0 \leq x_4 \leq 0$$

Ταξινομώντας τα LL, UL, X και D σε αύξουσα σειρά παίρνουμε:  $LL = 80.75$ ,  $UL = 93.25$ ,  $D = 100$ ,  $X = 149.9$ . Άρα η βέλτιστη λύση είναι αυτή που βρίσκεται από τη μέθοδο της σάρωσης (sweep) όταν το άθροισμα των ανατεθειμένων χρόνων πτήσης γίνει ίσο με 93.25. Με τη μέθοδο αυτή οι χρόνοι για την ομάδα  $K_2$  είναι  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 50$  και  $x_3 = 43.25$  ενώ σε σχέση με τους αρχικούς δείκτες θα ήταν  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 50$  και  $x_4 = 43.25$ . Αντικαθιστώντας τις

τιμές αυτές στην αντικειμενική συνάρτηση η απόσταση στο διάγραμμα από τη διαγώνιο είναι ίσο με 6839.06. Αντιστοίχως ο βέλτιστος χρόνος συντήρησης είναι 130 για το αεροσκάφος με δείκτη  $j = 1$  και 195 για αυτό με δείκτη  $j = 2$  οδηγώντας σε μία απόκλιση ίση με 3025 για το γράφημα των συντηρούμενων αεροσκαφών. Συνεπώς η συνολική απόκλιση των δύο υποπροβλημάτων είναι ίση με  $6839.06 + 3025 = 9864.06$ , όσο δηλαδή είναι και η βέλτιστη τιμή.

### 3. Έλεγχος κυρτότητας αντικειμενικής συνάρτησης

#### 3.1 Γενικότερη φιλοσοφία

Βασικός τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος έχει καταστεί ο προσδιορισμός των βέλτιστων  $z_g$  και  $z_a$  καθώς μετά οι υπόλοιπες μεταβλητές μπορούν να βρεθούν πολύ εύκολα. Η μέχρι τώρα εργασία έχει καταγράψει το μορφοποιημένο πρόβλημα σε αλγόριθμο γλώσσα C/C++ για την διενέργεια υπολογιστικών πειραμάτων. Οι χρόνοι παρουσιάζονται αισθητά βελτιωμένοι εν συγκρίσει με το LINGO που είναι ένα λογισμικό βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται σε αντίστοιχα προβλήματα. Όσο όμως αυξάνεται ο αριθμός των αεροσκαφών για το πρόβλημα σε C/C++ αυξάνεται και ο χρόνος και σαν επόμενο βήμα επιτάχυνσης της διαδικασίας γίνεται μία προσπάθεια για περαιτέρω βελτίωση της ταχύτητας ολοκλήρωσης της αναζήτησης. Σημειώνεται ότι το LINGO χρειάζεται απαγορευτικούς χρόνους για να λύσει μεγάλα προβλήματα.

Με αυτό σαν γνώμονα γίνεται η εξής υπόθεση. Για τον πίνακα που έχει σαν γραμμές τα  $z_g$  και σαν στήλες τα  $z_a$  και στον κάθε συνδυασμό στο κελί το συνολικό δείκτη απόκλισης, γίνεται ένας έλεγχος για τυχόν ειδικές ιδιότητες που θα μπορούσαν να προκύψουν. Κατά την επίλυση μικρών προβλημάτων διαπιστώθηκε (χωρίς να μπορεί να αποδειχτεί ως κάτι γενικό) ότι σε όλες τις περιπτώσεις ίσχυε μία κυρτότητα κατά γραμμές και στήλες στις τιμές του πίνακα αυτού.

Για την πειραματική αρχικά επαλήθευση της ισχύος της διαπίστωσης γράφτηκε αρχικά ένας ψευδοκώδικας. Η προσθήκη αυτού στο υπάρχων πρόγραμμα έγινε για να φανεί αν με τον συλλογισμό αυτό τα αποτελέσματα που θα έβγαιναν θα ήταν τα ίδια ενισχύοντας έτσι την υπόθεση (χωρίς αυτό να αποτελεί και απόδειξη). Ενδιαφέρον στοιχείο αποτελούσαν και οι χρόνοι που θα χρειαζόνταν για την επίλυση του νέου αλγόριθμου. Ο ψευδοκώδικας που αποτυπώθηκε αναγράφεται πλήρως και παρουσιάζεται παρακάτω:



### 3.2 Περιγραφή κώδικα

#### Search-code

$K=1$  (Μετρητής από πού θα ξεκινάει σε κάθε γραμμή ο έλεγχος)

Do while ( $k \leq A \ \&\& \ Y_{kp} \leq X_{\max} \ \&\& \ Y_{kp} - S/A \leq 0$ )

$K=k+1$

End while

$N=B$

$l=1$  (Μετρητής για να φανεί ο μέγιστος αριθμός αεροσκαφών που μπορούν να βγουν από τη συντήρηση έτσι ώστε να μην γίνεται έλεγχος σε τιμές μεγαλύτερες αυτού)

Do while  $N > glp$

$N=N-glp$

$l=l+1$

end while

For  $i=1,l$

$Min\_cost(i)=f(k)$

$Min\_m(i)=k$

Do while ( $k \geq 2$ )&&  $f(k-1) < f(k)$

$Min\_cost(i)=f(k-1)$  (Το  $i$  είναι ο δείκτης ούτως ώστε να έχω σε κάθε γραμμή το διαφορετικό ελάχιστό της)

$Min\_m(i)=k-1$

$K=k-1$

End do

M=S

z=1

Do while  $M > Yz^p$  (Μετρητής για την περίπτωση που το επόμενο έχει μικρότερη τιμή να μην υπερβαίνεται ο μέγιστος αριθμός αεροσκαφών που μπορούν να βγουν και να μην γίνονται άσκοποι υπολογισμοί)

$M = M - Yz^p$

$z = z + 1$

End do

Do while  $(k \leq z-1) \&\& f(k-1) < f(k)$

$\text{Min\_cost}(i) = f(k+1)$

$\text{Min\_m}(i) = k+1$

$k = k + 1$

End do

$\text{Tot\_min} = \text{Min\_cost}(1)$  (Γίνεται έλεγχος των ελαχίστων σε κάθε γραμμή για την εύρεση του συνολικού ελαχίστου αφού το  $i$  είναι το μέγιστο για κάθε γραμμή που μπορεί να βγει από τη συντήρηση)

$\text{Tot\_zg} = \text{Min\_m}(1)$

$\text{Tot\_za} = 1$

For  $i=2,1$

If  $\text{Min\_cost}(i) < \text{Tot\_min}$

$\text{Tot\_min} = \text{Min\_cost}(i)$

$\text{Tot\_zg} = \text{Min\_m}(i)$

$\text{Tot\_za} = i$

End if

Print \*: Tot\_zg, Tot\_za, Tot\_min

Ο αναγραφόμενος αλγόριθμος παίρνει σαν υπόθεση ότι ο πίνακας των ελαχίστων αποκλίσεων είναι κυρτός κατά γραμμές και στήλες. Οι τιμές που λαμβάνονται συγκρίνονται με αυτές του αρχικού αλγόριθμου για επαλήθευση του σωστού της υπόθεσης.

Θεωρούμε ότι  $TC(g,a)$  είναι η τιμή του συνολικού δείκτη απόκλισης όταν  $z_g = g$  και  $z_a = a$ . Η ιδιότητα της κυρτότητας κατά γραμμές σημαίνει ότι αν  $TC(g,a) < TC(g,a+1)$  τότε  $TC(g,a+1) \leq TC(g,a+i)$  για κάθε εφικτό  $i \geq 2$ . Επίσης αν  $TC(g,a) < TC(g,a-1)$  τότε  $TC(g,a-1) \leq TC(g,a-i)$  για κάθε εφικτό  $i \geq 2$ . Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και η κυρτότητα κατά στήλες. Έτσι, αν  $TC(g,a) < TC(g+1,a)$  τότε θα ισχύει και ότι  $TC(g+1,a) \leq TC(g+i,a)$  για κάθε εφικτό  $i \geq 2$ , και αν  $TC(g,a) < TC(g-1,a)$  τότε  $TC(g-1,a) \leq TC(g-i,a)$  για κάθε εφικτό  $i \geq 2$ .

Εκμεταλλευόμενοι αυτή την ιδιότητα βρίσκουμε από τον πίνακα με γραμμές τον αριθμό των αεροσκαφών που μπαίνουν για συντήρηση και για στήλες τον αριθμό αυτών που βγαίνουν, την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για κάθε γραμμή ( tot\_zg). Ο έλεγχος ξεκινάει από το K στοιχείο κάθε γραμμής. Στη συνέχεια ελέγχει προς τα πού μειώνεται η αντικειμενική και τερματίζει όταν δει ότι δεν μπορεί να υπάρξει περαιτέρω μείωση.

Τέλος συγκρίνουμε τη βέλτιστη αντικειμενική κάθε στήλης για να πάρουμε το ολικό ελάχιστο ( Tot\_min) και την στήλη στην οποία βρίσκεται ( tot\_za).

### 3.3 Μαθηματικές αποδείξεις

Η ορθότητα της υπόθεσης κυρτότητας που διατυπώθηκε μπορεί από τις πειραματικές μετρήσεις να επαληθευτεί για συγκεκριμένα προβλήματα μέσω του κώδικα που αναπτύχθηκε, αυτό όμως δεν την αποδεικνύει. Σαν επέκταση της διπλωματικής αυτής γίνεται μία πρώτη προσπάθεια να αναχθούν κάποιες μαθηματικές αποδείξεις. Αυτές σε επόμενο βαθμό θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν βάση για την απόδειξη της υπόθεσης. Για αυτό το λόγο μελετάται η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος:

$$\text{Min} \sum_{i=1}^A [(1-b_i)(y_{im} - (i-z_g) \frac{Y}{A-z_g+z_a})^2 + b_i(G - (NA+i-z_a) \frac{G}{NA+z_g-z_a})^2] +$$

$$\sum_{j=1}^{NA} [(1-c_j)(g_{jn} - (j-z_a) \frac{G}{NA+z_g-z_a})^2 + c_j(Y - (A+j-z_g) \frac{Y}{A-z_g+z_a})^2]$$

Η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από τέσσερα μέρη.

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου το  $z_g$  αυξάνεται κατά ένα (έστω ότι πριν έμπαιναν για συντήρηση  $k$  αεροσκάφη και εξέρχονταν  $\lambda$ , ενώ τώρα μπαίνουν  $k+1$  αεροσκάφη χωρίς να μεταβληθεί ο αριθμός αυτών που θα βγουν). Θα μελετηθεί το κάθε μέρος της εξίσωσης χωριστά, ξεκινώντας από τον 2<sup>ο</sup> όρο της εξίσωσης:

$$\text{Παλιό: } \sum_{i=1}^k b_i (G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+k-\lambda})^2$$

$$\text{Νέο : } \sum_{i=1}^k b_i (G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+(k+1)-\lambda})^2 + (G - (NA + k + 1 - \lambda) \frac{G}{NA+(k+1)-\lambda})^2$$

Και η παλιά και η νέα σχέση είναι μη αρνητικές λόγω τετραγώνου. Η νέα έχει οριστεί όσο και η παλιά με τη διαφορά ότι το  $k$  αυξάνεται σε  $k+1$ , ενώ προστίθεται ξέχωρα ο όρος για το επιπλέον αεροσκάφος όπως φαίνεται. Για διευκόλυνση θα ελεγχθούν οι αντίστοιχοι όροι αφήνοντας τον  $k+1$  εκτός. Υποθέτοντας ότι Παλιό < Νέο αν ισχύει αυτό τότε και με την προσθήκη του επιπλέον όρου δεν θα αλλάξει τίποτα. Το  $b_i$  τίθεται ίσο με ένα γιατί οι όροι αυτοί αφορούν μόνο τα  $k$  προς είσοδο αεροσκάφη:

Έστω ότι ισχύει η ανισότητα  $\leq$ :

$$G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+k-\lambda} \leq G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+(k+1)-\lambda} \quad \rightarrow$$

$$-\frac{G}{NA+k-\lambda} \leq -\frac{G}{NA+(k+1)-\lambda} \quad \rightarrow$$

$$NA + k + 1 - \lambda \geq NA + k - \lambda \quad \rightarrow$$

$1 > 0$  άρα ισχύει

$$\text{και άρα } (G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+k-\lambda})^2 \leq (G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+(k+1)-\lambda})^2$$

Από εδώ συμπεραίνεται ότι Παλιό  $\leq$  Νέο και άρα όσο αυξάνεται το  $z_g$  δεν θα μικραίνει ποτέ η σχέση  $\sum_{i=1}^k bi(G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+k-\lambda})^2$ . Στη συνέχεια ο έλεγχος γίνεται για το τι συμβαίνει στον 4<sup>ο</sup> όρο της εξίσωσης όταν μεγαλώνει το  $z_g$  κατά ένα ( $k \rightarrow k+1$ ).

$$\text{Παλιό : } \sum_{i=1}^{\lambda} Cj(Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda})^2$$

$$\text{Νέο : } \sum_{i=1}^{\lambda} Cj(Y - (A + j - k - 1) \frac{Y}{A-k-1+\lambda})^2$$

Έστω ότι ισχύει η ανισότητα  $\leq$ :

$$Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda} \leq Y - (A + j - k - 1) \frac{Y}{A-k-1+\lambda} \quad \rightarrow$$

$$-(A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda} \leq -(A + j - k - 1) \frac{Y}{A-k-1+\lambda} \quad \rightarrow$$

$$-\frac{A+j-k}{A-k+\lambda} \leq -\frac{A+j-k-1}{A-k-1+\lambda} \quad \rightarrow$$

$$(A + j - k)(A - k - 1 + \lambda) \geq (A + j - k - 1)(A - k + \lambda) \quad \rightarrow$$

$$(A + j - k)(A - k + \lambda) - 1(A + j - k) \geq (A + j - k)(A - k + \lambda) - 1(A - k + \lambda) \quad \rightarrow$$

$$-(A + j - k) \geq -(A - k + \lambda) \quad \rightarrow$$

$$-A - j + k \geq -A + k - \lambda \quad \rightarrow$$

$\lambda \geq j$  που ισχύει

$$\text{και άρα } (Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda})^2 \leq (Y - (A + j - k - 1) \frac{Y}{A-k-1+\lambda})^2$$

Το  $j$  εδώ παίρνει τιμές μέχρι  $\lambda$  που είναι και η μέγιστη τιμή του  $z_a$  και άρα η σχέση πάντα θα επαληθεύεται. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν γίνει  $j > Z_a$  θα σημαίνει ότι το αεροσκάφος  $j$  δεν θα βγει άλλα αεροσκάφη από την συντήρηση οπότε  $C_j = 0$ . Άρα όσο μεγαλώνει το  $z_g$  και αυτός ο λόγος θα ακολουθεί μία μη φθίνουσα πορεία.

Ο ίδιο έλεγχος γίνεται και για την περίπτωση που το  $z_a$  γίνει  $z_a + 1$  (θεωρούμε ότι πριν ολοκλήρωναν τη συντήρηση  $\lambda$  αεροσκάφη και τώρα την ολοκληρώνουν  $\lambda + 1$  ενώ δεν αλλάζει ο αριθμός  $k$  αυτών που θα εισέλθουν). Θα μελετηθούν πάλι και οι δύο όροι.

Για τον πρώτο από τους δύο που αφορά τα αεροσκάφη που θα εισέλθουν για συντήρηση (για τον 2<sup>ο</sup> όρο δηλαδή) θα υπάρξει μόνο μία εσωτερική αλλαγή και θα αντικατασταθεί το  $\lambda$  με το  $\lambda + 1$ . Τα τετράγωνα μπορούν να απλοποιηθούν πάλι για τους ίδιους λόγους ενώ τα  $b_i$  είναι ίσα με τη μονάδα.

$$\text{Παλιό: } \sum_{i=1}^k bi(G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA + k - \lambda})^2$$

$$\text{Νέο : } \sum_{i=1}^k bi(G - (NA + i - \lambda - 1) \frac{G}{NA + k - \lambda - 1})^2$$

Έστω ότι ισχύει  $\leq$ :

$$G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA + k - \lambda} \leq G - (NA + i - \lambda - 1) \frac{G}{NA + k - \lambda - 1} \quad \rightarrow$$

$$-(NA + i - \lambda) \frac{G}{NA + k - \lambda} \leq -(NA + i - \lambda - 1) \frac{G}{NA + k - \lambda - 1} \quad \rightarrow$$

$$-\frac{NA + i - \lambda}{NA + k - \lambda} \leq -\frac{NA + i - \lambda - 1}{NA + k - \lambda - 1} \quad \rightarrow$$

$$(NA + i - \lambda)(NA + k - \lambda - 1) \geq (NA + k - \lambda)(NA + i - \lambda - 1) \quad \rightarrow$$

$$(NA + i - \lambda)(NA + k - \lambda) - 1(NA + i - \lambda) \geq (NA + k - \lambda)(NA + i - \lambda) - 1(NA + k - \lambda) \quad \rightarrow$$

$$-1(NA + i - \lambda) \geq -1(NA + k - \lambda) \quad \rightarrow$$

$$-NA - i + \lambda \geq -NA - k + \lambda \quad \rightarrow$$

$k \geq i$  όπου ισχύει

$$\text{και άρα } (G - (NA + i - \lambda) \frac{G}{NA+k-\lambda})^2 \leq (G - (NA + i - \lambda - 1) \frac{G}{NA+k-\lambda-1})^2$$

Το  $i$  παίρνει τιμές μέχρι να σταματήσουν να μπαίνουν και άλλα αεροσκάφη στον χώρο συντήρησης άρα η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι  $z_g$ . Ομοίως όταν γίνει  $i > k$  θα έχουμε  $b_i=0$ .

Όταν αυξάνεται το  $\lambda$  κατά ένα αλλάζει ο αριθμός αεροσκαφών που θα εξέλθουν στην δεύτερη σχέση από τις ελεγχόμενες.

$$\text{Παλιό : } \sum_{i=1}^{\lambda} C_j (Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda})^2$$

$$\text{Νέο : } \sum_{i=1}^{\lambda} C_j (Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda+1})^2 + (Y - (A + \lambda + 1 - k) \frac{Y}{A-k+\lambda+1})^2$$

Στην περίπτωση αυτή που αυξάνεται κατά ένα ο αριθμός των εξερχόμενων αεροσκαφών λαμβάνεται ένας τύπος παρόμοιος με τον προηγούμενο με τη διαφορά ότι  $z_a$  είναι  $z_a+1$  ενώ υπάρχει και ο όρος για το  $\lambda+1$ . Αν ισχύει η ανισότητα του νέου ότι είναι μεγαλύτερο από το παλιό η προσθήκη ενός επιπλέον θετικού όρου δεν θα άλλαζε το αποτέλεσμα και άρα το μέλος  $(Y - (A + \lambda + 1 - k) \frac{Y}{A-k+\lambda+1})^2$  παραλείπεται για τους υπολογισμούς.

Το  $c_j$  σε αυτή την περίπτωση είναι μονάδα ενώ τα τετράγωνα μπορούν πάλι να απαλειφθούν για τους ίδιους λόγους.

Έστω ότι ισχύει  $\leq$ :

$$Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda} \leq Y - (A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda+1} \quad \rightarrow$$

$$-(A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda} \leq -(A + j - k) \frac{Y}{A-k+\lambda+1} \quad \rightarrow$$

$$-\frac{Y}{A-k+\lambda} \leq -\frac{Y}{A-k+\lambda+1} \quad \rightarrow$$

$$\frac{Y}{A-k+\lambda} \geq \frac{Y}{A-k+\lambda+1} \quad \rightarrow$$

$$A - k + \lambda + 1 \geq A - k + \lambda \quad \rightarrow$$

$1 \geq 0$  που ισχύει

$$\text{Και άρα } \left( Y - (A + j - k) \frac{Y}{A - k + \lambda} \right)^2 \leq \left( Y - (A + j - k) \frac{Y}{A - k + \lambda + 1} \right)^2$$

Και στην περίπτωση του  $z_a$  φαίνεται λοιπόν ότι όταν αυτό αυξάνεται τότε και οι δύο όροι (ο 2<sup>ος</sup> και ο 4<sup>ος</sup> της εξίσωσης) ακολουθούν μη φθίνουσα πορεία.

Για τους όρους 1<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> της εξίσωσης δεν μπορεί να αναχθεί κάποιο συμπέρασμα. Αυτό συμβαίνει γιατί συμπεριλαμβάνονται τέσσερις άγνωστοι ( $y_{in}, z_g, g_{jn}, z_a$ ) και για τις δύο οπότε δεν είναι δυνατό να γίνει κάποια ανάλυση.

Όπως παρατηρείται, το ενδεχόμενο να υφίσταται μία κυρτότητα μπορεί να είναι σωστό και οι παραπάνω αποδείξεις αν και πρώιμες ενισχύουν αυτό το σκεπτικό. Εκτεταμένη έρευνα κρίνεται αναγκαία για την ανακάλυψη του αν ισχύει η υπόθεση.

Η συνέχεια της διπλωματικής αποτελεί μία επιστροφή στο βασικό ζητούμενο. Οι μαθηματικές αποδείξεις που προηγήθηκαν αποτελούν μια πολύ ενδιαφέρουσα παρένθεση και τροφή για σκέψη για μελλοντικές προεκτάσεις.



## 4. Αριθμητικά αποτελέσματα

### 4.1 Πειραματική διαδικασία

Το βασικό κομμάτι αρχίζει από εδώ και πέρα και αφορά τον ψευδοκώδικα ο οποίος γράφτηκε. Αφού μετατράπηκε σε C/C++ εισήχθη στο προϋπάρχον πρόγραμμα για την χρησιμοποίησή του σε πειράματα και τη δημιουργία έτσι μια πρώτης εντύπωσης για το αληθές της υπόθεσης.

Για την μελέτη των επιδόσεων της βελτίωσης αποφασίστηκε στις προσομοιώσεις η σύγκριση των χρόνων, των αποτελεσμάτων και του αριθμού των ελεγμένων συνδυασμών με άλλο έτοιμο πρόγραμμα που έχει τη δυνατότητα να εκτελεί την ίδια δουλειά. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών (που περιείχε κάποιους περιορισμούς) η οποία έδινε τα δεδομένα σε δύο προγράμματα, το ένα εκ των οποίων έτρεχε σε C/C++ και το άλλο σε LINGO (2008).

Το LINGO είναι εμπορικό πρόγραμμα βελτιστοποίησης που έχει τη δυνατότητα να εφαρμοστεί στο υπό εξέταση πρόβλημα. Οι τιμές που επιλέχτηκαν του αριθμού των αεροσκαφών για τους υπολογισμούς σε LINGO και C/C++ ήταν 5 διαφορετικές: για 50, 100, 150, 200, 250 και εκτελέστηκαν 20 πειράματα σε κάθε περίπτωση.

Για τον έλεγχο του αλγορίθμου αποφασίστηκε να γίνουν και πειράματα σε μεγάλους αριθμούς αεροσκαφών. Συγκεκριμένα επιλέχτηκε να γίνουν πάλι 20 δοκιμές για  $N = 500, 1000, 1500, 2000$  και  $2500$ . Οι αριθμοί αυτοί δεν συναντώνται στην πράξη στην Πολεμική Αεροπορία η οποία κάνει υπολογισμούς για έως 100 αεροπλάνα. Η πιθανότητα να παραστεί ανάγκη λοιπόν για τέτοιου μεγάλου μεγέθους συνδυασμούς ξεφεύγει από τα όρια της καθημερινότητας. Πολλές φορές όμως μπορεί να χρειάζεται ο προγραμματισμός για έναν ορίζοντα χρονικών περιόδων. Το πρόβλημα λοιπόν μπορεί να αναγκαστεί να λειτουργήσει πολλαπλές χρονικές περιόδους στη σειρά σε διάφορα σενάρια. Σε τέτοια περίπτωση η ταχύτητα σε μεγάλους αριθμούς συνδυασμών είναι υψίστης σημασίας και μπορεί να συμβάλει στον προγραμματισμό και λήψη αποφάσεων όταν τα αποτελέσματα λαμβάνονται σύντομα. Για τις τιμές αυτές το LINGO δεν δύναται να κάνει υπολογισμούς ακόμα και με τη χρησιμοποίηση του local solver (εύρεση τοπικού μεγίστου) με τον αριθμό των επαναλήψεων να είναι απαγορευτικός. Λόγω αυτού χρησιμοποιήθηκε μόνο η C/C++ και η σύγκριση έγινε μεταξύ του

υπολογιστικού προγράμματος με την υπόθεση της κυρτότητας σε σχέση με το χωρίς αυτήν. Σημασία δόθηκε στους χρόνους σε κάθε περίπτωση και τον αριθμό των επαναλήψεων.

Ο υπολογιστής που διαλέχτηκε για την έρευνα (για την εξάλειψη μικροδιαφορών και την πιστοποίηση της αντικειμενικότητας τυχόν διαφορών) ήταν ένας i7-920 που έτρεχε στα 2.7 GHz με επεξεργαστή Intel με μνήμη στα 3 GB.

Το LINGO αφέθηκε να λειτουργήσει με τις αρχικές του ρυθμίσεις με κάποιες μετατροπές: α) το *Update Interval* στο *Solver Status Window* αυξήθηκε από 2 σε 60 δευτερόλεπτα για να μην καθυστερεί το πρόγραμμα, β) το *Output Level* στο *Interface Tab* ρυθμίστηκε στο *Terse* για την μείωση των άσχετων πληροφοριών και γ) η μέγιστη τιμή μεταξύ  $Y$  και  $G$  καθιερώθηκε ως ένα άνω όριο (για εμφανείς λόγους) της βέλτιστης λύσης κάθε μεταβλητής απόφασης στο *Variable Upper Bound* box του *Global Server* tab.

Η γεννήτρια που χρησιμοποιήθηκε λειτούργησε με κάποιες παραδοχές που πλησιάζουν περισσότερο στην πραγματικότητα. Η παράμετρος  $C$  τέθηκε ίση με  $0.2N$  με στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο ακέραιο (στην πράξη το  $C$  είναι περίπου  $0.1N$ , δηλαδή σε ομάδα 60-80 αεροσκαφών το υπόστεγο συντήρησης μπορεί να χωρέσει 6-8 από αυτά). Ο διπλασιασμός αυτής της τιμής κάνει πιο ενδιαφέρουσα την εργασία αυξάνοντας τους εφικτούς συνδυασμούς  $z_g$  και  $z_a$ . Ο αριθμός των καθηλωμένων αεροπλάνων  $NA$  παραγόταν με τυχαία σειρά από μία συνάρτηση πιθανοτήτων και έπαιρνε τιμές μέχρι  $0.2N$ . Αυτομάτως ο αριθμός των διαθέσιμων αεροσκαφών θα είναι  $N-NA$ . Οι υπολειπόμενοι χρόνοι πτήσης καθορίζονταν επίσης τυχαία παίρνοντας τιμές μεταξύ  $[0, Y]$  ενώ αυτές των χρόνων συντήρησης μπορούσαν να λάβουν τιμές στο διάστημα  $[0, G]$ . Η παράμετρος  $B$  τέθηκε ίση με  $0.75 \sum_{j=1}^{NA} g_{jp}$ . Σκοπός αυτού ήταν η μεγιστοποίηση των πιθανών περιπτώσεων των  $z_a$  και αυτό γιατί όσο μεγαλώνει το  $B$  τόσο μεγαλώνει και ο αριθμός των αεροσκαφών που θα εξέλθουν από τη συντήρηση.

Με τον ίδιο τρόπο η παράμετρος  $S$  ορίστηκε ίση με  $0.5 \sum_{i=1}^A \min(y_{ip}, X_{max})$ , για να είναι δυνατό το  $z_g$  να παίρνει μεγάλες τιμές (όσο μεγαλώνει το  $S$  μεγαλώνουν και οι τιμές αυτές). Η διαφορά στην πολλαπλασιαστική σταθερά (0.75 έναντι 0.5) έγκειται στις αποκλίσεις που μπορεί να γίνουν ανεκτές στους χρόνους πτήσης για την ικανοποίηση τους, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί στην περίπτωση του σταθμού συντήρησης. Οι υπόλοιπες τιμές που δόθηκαν πάρθηκαν από αληθινές περιπτώσεις:  $Y = 300$ ,  $G = 320$ ,  $L = 0.95$ ,  $U = 1.05$ ,  $X_{max} = 50$ ,  $Y_{min} =$

0.1 and  $G_{min} = 0.1$ .

Για κάθε μία από τις 20 δοκιμές έγιναν υπολογισμοί. Στην περίπτωση του μικρού αριθμού (50, 100, 150, 200, 250) έγιναν 2 επαναλήψεις σε LINGO μία με τη χρήση Local solver και η δεύτερη με τη χρήση Global solver ενώ άλλες δύο έγιναν σε πρόγραμμα C/C++. Η πρώτη ήταν με τη χρήση του παλιού αλγορίθμου και η επόμενη με του νέου (ο οποίος υποθέτει την ύπαρξη κυρτότητας).

Για την περίπτωση του μεγάλου αριθμού αεροσκαφών (500, 1000, 1500, 2000, 2500) έγιναν πάλι 20 δοκιμές. Για κάθε δοκιμή τα δεδομένα εισάγονταν στο πρόγραμμα γλώσσας C/C++ και γίνονται οι υπολογισμοί για το παλιό και τον υπό έλεγχο αλγόριθμο.

Οι παρακάτω πίνακες αποτυπώνουν τα αποτελέσματα των επαναλήψεων για την περαιτέρω ανάλυσή τους.

Οι πρώτοι 5 αφορούν τα μικρά προβλήματα και τα αποτελέσματα μεταξύ του LINGO και της C/C++:

## 4.2 Αποτελέσματα Lingo και C++

Πίνακας 4

Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=50

N=50	Visual C++		Lingo					
	Mils		Convexity		Local		Global	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος
Αριθμός								
1	35	0,000	22	0,000	5578,783	3,519	5578,783	13,799
2	30	0,000	17	0,000	2009,136	9,349	1900,123	8,109
3	45	0,031	31	0,000	4504,151	4,829	4504,151	24,249
4	45	0,015	30	0,000	9764,226	2,689	9560,355	79,819
5	34	0,015	17	0,015	32959,370	3,529	25869,880	59,439
6	43	0,015	23	0,000	9788,949	3,069	4559,680	54,859
7	38	0,015	19	0,015	25529,390	1,789	9795,049	28,779
8	34	0,000	18	0,000	3586,120	9,819	3585,287	41,359
9	43	0,015	23	0,000	14464,770	7,599	13859,390	61,299
10	34	0,015	18	0,000	7811,281	5,419	3335,224	6,609
11	43	0,015	23	0,015	28321,430	4,079	12741,660	75,999
12	43	0,015	23	0,000	30028,830	2,219	9844,812	25,899
13	46	0,015	22	0,000	61437,880	1,169	27154,330	156,138
14	24	0,000	15	0,000	1976,623	2,039	1976,623	50,409
15	42	0,000	23	0,015	8899,965	4,839	2783,906	8,039
16	37	0,000	22	0,015	5656,539	6,749	5656,539	31,479
17	42	0,031	27	0,000	18208,230	4,479	15677,390	57,619
18	42	0,015	27	0,000	22947,140	1,089	5328,279	67,439
19	42	0,031	24	0,015	6809,076	3,809	6809,076	10,279
20	42	0,015	23	0,015	6406,462	3,889	4767,138	34,579

## Πίνακας 5

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=100

N=100	Visual C++				Lingo			
	Mils		Convexity		Local		Global	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος
Αριθμός								
1	151	0,062	58	0,000	18057,400	10,019	18057,400	111,809
2	178	0,046	70	0,015	144689,200	5,389	8761,609	185,589
3	150	0,062	56	0,015	13561,840	26,039	13561,840	178,859
4	150	0,062	49	0,015	9438,807	16,679	9438,807	181,599
5	140	0,031	59	0,000	78459,480	5,199	8810,130	217,439
6	147	0,046	89	0,031	6979,768	27,279	6979,768	210,959
7	162	0,046	72	0,015	12687,560	9,579	12462,230	314,639
8	164	0,062	68	0,015	83853,320	5,569	10429,710	230,599
9	170	0,062	89	0,031	10665,980	15,359	9888,156	155,509
10	155	0,046	54	0,015	72433,600	5,689	13100,540	135,969
11	165	0,062	70	0,015	11950,700	20,029	11950,700	165,789
12	165	0,062	68	0,015	11261,340	9,279	11261,340	272,219
13	153	0,046	72	0,015	136132,000	4,849	11675,350	244,009
14	120	0,031	50	0,015	6753,134	10,249	3049,704	47,029
15	135	0,031	75	0,015	20274,870	12,789	3642,748	113,519
16	90	0,046	39	0,015	9884,394	16,049	2964,063	54,819
17	81	0,031	36	0,015	6503,960	12,699	2371,120	66,079
18	117	0,031	47	0,000	2430,403	14,109	2296,608	43,189
19	145	0,031	65	0,000	87298,260	6,109	84135,680	686,039
20	144	0,031	63	0,015	108372,800	2,919	10843,310	350,829

## Πίνακας 6

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=150

N=150	Visual C++				Lingo			
	Mils		Convexity		Local		Global	
Αριθμός	# Συνδυασμώ	Χρόνος	# Συνδυασμώ	Χρόνος	Αντικειμενικι	Χρόνος	Αντικειμενικι	Χρόνος
1	322	0,093	123	0,031	20932,630	26,909	20932,630	614,189
2	340	0,078	180	0,046	132974,700	10,039	39079,490	1134,239
3	351	0,093	139	0,031	174081,500	6,389	22862,880	1242,029
4	350	0,093	172	0,046	7330,695	35,579	7330,695	637,589
5	357	0,109	145	0,046	190528,300	10,269	11841,690	522,609
6	302	0,093	93	0,015	39389,070	10,049	10481,860	378,919
7	302	0,078	86	0,015	12725,680	71,939	12725,680	618,219
8	374	0,109	180	0,062	97937,340	10,779	14755,240	627,069
9	371	0,109	124	0,031	162664,100	13,219	14700,100	477,759
10	325	0,093	178	0,046	121964,900	10,299	12046,640	691,429
11	235	0,046	86	0,015	9935,876	7,139	8070,577	310,139
12	295	0,078	129	0,046	14313,650	40,359	14313,650	452,509
13	309	0,093	143	0,031	130454,400	11,429	11107,100	576,639
14	308	0,093	98	0,031	17192,930	75,319	17192,930	734,749
15	368	0,093	175	0,046	26645,930	41,829	26645,930	1336,869
16	329	0,125	105	0,046	68725,680	9,139	12779,430	695,859
17	315	0,078	106	0,015	20663,150	63,729	20338,390	842,149
18	309	0,078	121	0,046	19277,930	51,509	19277,930	439,469
19	294	0,078	105	0,031	26104,020	36,249	26104,020	438,319
20	313	0,093	120	0,046	15790,900	49,829	14432,710	345,639

## Πίνακας 7

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=200

N=200	Visual C++				Lingo			
	Mils		Convexity		Local		Global	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος
Αριθμός								
1	505	0,140	187	0,046	155803,700	13,929	4866,055	828,029
2	557	0,187	195	0,046	17877,780	107,559	17877,780	1648,939
3	570	0,203	204	0,046	120437,300	16,909	7567,354	746,679
4	633	0,171	242	0,062	98001,870	17,669	10596,950	1192,059
5	635	0,234	256	0,078	146362,300	10,559	44882,830	2454,459
6	608	0,265	180	0,062	185869,000	14,099	18649,690	1401,159
7	551	0,187	275	0,093	156978,100	22,329	108926,200	3075,159
8	567	0,203	200	0,046	108560,700	9,499	27718,600	2331,619
9	602	0,156	153	0,031	17303,640	11,289	17303,640	1953,869
10	597	0,171	178	0,046	135548,700	16,169	19604,820	1188,779
11	486	0,109	188	0,062	127325,600	12,429	16551,250	1584,319
12	660	0,203	197	0,046	184595,100	20,569	22188,240	1625,349
13	600	0,218	198	0,046	161531,700	15,769	44006,260	3056,949
14	620	0,171	173	0,046	13597,590	53,999	13597,590	1101,199
15	525	0,140	140	0,031	75744,400	14,809	12453,730	1095,939
16	594	0,156	167	0,046	118451,500	19,779	18240,750	2489,129
17	422	0,109	143	0,031	104737,000	11,819	3073,395	502,039
18	532	0,156	270	0,078	171569,400	13,669	80928,750	3209,939
19	545	0,140	181	0,046	23496,020	72,869	15355,230	1313,689
20	459	0,125	140	0,031	58625,010	22,499	11830,300	1217,199

**Πίνακας 8**  
**Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=250**

N=250	Visual C++				Lingo			
	Mils		Convexity		Local		Global	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος	Αντικειμενική	Χρόνος
Αριθμός								
1	772	0,313	256	0,078	15046,890	101,859	15046,890	3551,699
2	792	0,328	259	0,078	184591,700	16,049	56570,610	4334,699
3	929	0,281	369	0,171	128463,600	17,359	55673,680	3011,019
4	846	0,265	324	0,093	105958,300	20,999	7326,475	3202,639
5	914	0,265	334	0,125	88801,970	18,689	12335,670	1987,529
6	874	0,250	389	0,109	177964,800	24,359	51031,990	6647,259
7	980	0,312	234	0,078	83325,740	34	27314,510	2642,649
8	917	0,390	367	0,109	176440,600	26,829	8148,683	1023,229
9	863	0,265	352	0,109	73806,100	19,649	22099,410	2120,299
10	774	0,328	202	0,046	278947,400	119,369	50824,540	2905,029
11	849	0,359	380	0,109	32405,630	173,239	32405,630	2656,889
12	1008	0,468	396	0,125	222380,600	29,449	49497,440	7225,699
13	889	0,375	328	0,109	117326,700	18,709	9787,745	3285,749
14	965	0,313	263	0,109	180740,100	17,859	20966,800	2596,999
15	842	0,234	333	0,109	230713,800	18,199	103915,700	5817,259
16	924	0,281	324	0,109	129110,000	18,239	15551,630	2236,719
17	884	0,265	216	0,078	164221,100	22,969	15819,020	2574,099
18	891	0,265	219	0,178	129214,900	17,809	14302,660	3389,109
19	908	0,375	211	0,078	15614,190	177,919	15577,700	1804,299
20	807	0,235	332	0,125	67839,240	20,589	46221,840	4514,979



### 4.3 Αποτελέσματα C/C++

Οι επόμενοι 5 πίνακες αφορούν τα μεγάλα προβλήματα και τα αποτελέσματα που προέκυψαν στην C/C++:

#### Πίνακας 9

#### Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=500

N=500	Visual C++					
	Mils		Convexity		Αντικειμενική	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος		
Αριθμός						
1	2821	1,546	936	0,469	23420,618	
2	2940	1,640	987	0,515	20461,899	
3	3010	1,687	1093	0,578	101210,336	
4	2870	1,578	908	0,484	88421,853	
5	2883	1,562	885	0,453	31958,735	
6	2667	1,437	883	0,437	18982,872	
7	2931	1,625	956	0,484	8399,799	
8	2931	1,609	881	0,468	28008,511	
9	2918	1,593	940	0,500	30487,728	
10	3185	1,828	1184	0,656	87612,116	
11	3169	1,843	1275	0,703	91758,332	
12	3279	1,859	1221	0,656	34242,905	
13	3240	1,843	1133	0,625	28877,882	
14	3126	1,750	1105	0,593	43892,395	
15	3177	1,843	1231	0,656	70852,721	
16	3339	1,921	1222	0,656	27976,247	
17	3124	1,750	972	0,515	12418,520	
18	3434	2,000	1222	0,671	50397,048	
19	3056	1,671	987	0,515	12879,009	
20	3305	1,875	1242	0,687	36144,359	

## Πίνακας 10

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=1000

N=1000	Visual C++					
	Mils		Convexity		Αντικειμενική	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος		
Αριθμός						
1	12876	19,078	4211	5,953	83222,609	
2	13299	21	4476	6,437	67920,463	
3	13265	20,031	4398	6,406	119200,900	
4	13378	20,359	4477	6,546	114255,004	
5	13194	19,843	4535	6,515	53337,852	
6	13456	20,421	4577	6,625	85491,664	
7	13445	20,546	4862	6,968	46124,836	
8	14007	21,781	4662	7,046	79311,705	
9	13680	20,906	4348	6,421	47812,571	
10	13472	20,640	4716	6,921	117624,422	
11	13574	20,843	4983	7,296	63766,698	
12	12757	18,906	3937	5,640	30411,538	
13	13977	21,750	4981	7,500	135567,841	
14	13726	21,093	4528	6,656	43922,605	
15	13290	19,984	4337	6,250	29902,026	
16	13860	21,406	4536	6,844	95672,232	
17	13475	20,406	4255	6,312	55379,781	
18	13895	21,546	4735	7,062	45935,980	
19	14204	22,343	5342	8,109	72129,138	
20	13622	20,875	4229	6,375	89163,916	

## Πίνακας 11

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=1500

N=1500	Visual C++					
	Mils		Convexity		Αντικειμενική	
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος		
Αριθμός						
1	30770	92,234	9201	26,781	86490,374	
2	31685	95,484	9684	29,062	107536,703	
3	30479	92,562	9303	27,265	78042,817	
4	31160	93,250	9984	29,406	70862,045	
5	30950	91,437	9071	27,156	61133,007	
6	32484	101,843	11148	34,687	102313,578	
7	32628	101,453	10450	32,750	102334,800	
8	33510	106,062	11730	37,546	139098,522	
9	32983	106,828	12105	38,968	88357,876	
10	31801	97,453	10041	31,187	69401,658	
11	32876	104,375	10416	34,250	110392,410	
12	30848	94,578	4901	13,375	73090,389	
13	32608	103,796	10119	32,890	112726,881	
14	32949	105,750	10655	33,953	82861,878	
15	32295	104,000	4854	13,328	77952,428	
16	31815	100,359	4880	13,937	98981,394	
17	31787	102,750	4842	13,437	100542,902	
18	32696	106,531	5209	14,515	106425,007	
19	32891	107,062	5015	13,984	94932,054	
20	32884	108,984	5125	14,890	108334,164	

## Πίνακας 12

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=2000

N=2000	Visual C++					
	Mils			Convexity		
	# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος	Αντικειμενική	
Αριθμός						
1	56743	312,343	9108	42,796	135789,778	
2	59313	339,843	9287	43,453	143130,507	
3	59303	348,750	9075	42,812	160387,713	
4	58846	330,046	8793	40,297	134899,582	
5	59176	337,171	9004	41,250	144441,901	
6	59105	339,046	9360	43,609	158413,010	
7	56129	318,812	9131	42,687	158841,524	
8	58519	355,046	9346	44,906	171653,060	
9	56494	340,296	10164	49,734	201432,913	
10	47047	212,046	16009	65	190751,704	
11	48192	219,953	16816	69,312	104526,228	
12	49834	228,937	16961	71,062	93575,615	
13	52193	250,984	20388	90,031	269432,246	
14	52691	253,640	19326	84,578	123890,034	
15	51885	245,921	17130	76,546	216386,656	
16	50682	235,562	15278	68,063	85252,745	
17	53871	261,125	17027	79,312	197642,071	
18	55565	292,765	17205	84,812	121719,315	
19	56664	290,578	18168	89,093	101115,593	
20	56135	281,750	17072	85,796	140267,214	

## Πίνακας 13

## Σύγκριση αποτελεσμάτων για N=2500

N=2500		Visual C++				
		Mils		Convexity		Αντικειμενική
		# Συνδυασμών	Χρόνος	# Συνδυασμών	Χρόνος	
Αριθμός						
1		76485	589,281	23331	160,609	197885,436
2		82674	675,312	26168	192,140	216992,538
3		83780	695,078	26247	197,890	116031,571
4		89462	786,125	28503	233,984	141109,682
5		88080	782,390	13519	95,500	135113,677
6		93388	901,421	14041	102,218	200354,499
7		89235	862,171	13100	95,218	182704,499
8		87498	755,015	27395	218,625	130518,328
9		88100	784,312	13523	95,265	162669,438
10		89448	825,625	13734	100,500	162766,074
11		92505	939,453	15137	114,375	215342,189
12		90003	961,234	15295	119,437	246468,524
13		80574	645,421	24637	176,921	156811,258
14		82232	660,906	24608	184,281	121506,322
15		86305	731,343	26456	208,671	143261,385
16		89773	795,593	28104	230,187	147683,282
17		91986	855,265	30150	264,203	138399,139
18		91497	864,265	14281	107,000	189526,042
19		91364	898,421	14643	110,093	200929,001
20		92143	977,578	15205	116,953	235997,146

## 5. Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των ανωτέρω αποτελεσμάτων αρκετά ενδιαφέροντα συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν. Η σύγκριση οφείλει να γίνει σε δύο στάδια. Το πρώτο αφορά τα πειράματα στα προβλήματα με μικρό αριθμό αεροσκαφών όπου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το LINGO και η δεύτερη επικεντρώνεται και στα αποτελέσματα σε μεγάλο αριθμό αεροσκαφών όπως αυτά αλλάζουν κατά την εφαρμογή των αλλαγών μέσα στο πρόγραμμα.

Για την πρώτη περίπτωση σημασία έχει το συνολικό πρόγραμμα και τα αποτελέσματα που δίνει. Σε σχέση με το υπάρχον πρόγραμμα που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα (LINGO) θα φανούν οι διαφορές σε θέματα καλύτερης αξιοποίησης χρόνου και πόρων. Δίνεται με αυτό τον τρόπο μία καλύτερη εντύπωση της σημασίας αυτής της προσπάθειας και το χάσμα που υπήρχε για την αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων (με την προοπτική της επέκτασης του προγράμματος βελτιστοποίησης και σε άλλους παρεμφερείς τομείς).

Η δεύτερη ομάδα αποτελεσμάτων παρουσιάζει τις βελτιώσεις που εφαρμόστηκαν στο πρόγραμμα στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής σε σύγκριση με το υπάρχον. Οι προσθήκες που έγιναν σκοπός είναι να βελτιώσουν και άλλο τους χρόνους επίλυσης των προβλημάτων και να βγει ένα συμπέρασμα του σε τι βαθμό η υπόθεση της κυρτότητας ισχύει. Μεγάλη σημασία έχει επίσης και ο έλεγχος του αν τα αποτελέσματα είναι τα ίδια ενισχύοντας την περίπτωση να ισχύει η κυρτότητα. Φαίνονται με αυτό τον τρόπο και οι περαιτέρω προοπτικές που θα μπορούσαν να υπάρξουν και για επόμενη επέκταση του προγράμματος.

### 5.1 Συμπεράσματα για LINGO και C/C++

Η πληθώρα των περιπτώσεων θεωρητικά θα αφορά προβλήματα μικρού αριθμού αεροσκαφών (λιγότερα από 250 που έχουν υπολογιστεί εδώ) και άρα η ανάλυση των δεδομένων αυτής της σειράς αποκτά αυξημένη αξία. Πριν από την δημιουργία αυτού του προγράμματος ο μόνος τρόπος να λυνόταν το πρόβλημα προγραμματισμού πτήσεων και συντηρήσεων ήταν η χρήση του LINGO. Στους πρώτους 5 πίνακες παρουσιάζεται ο χρόνος που θα χρειαζόταν ο υπολογιστής να λύσει το μικρού αριθμού αεροσκαφών πρόβλημα. Οι διαφορές αν ο αναλυτής αποφάσιζε να χρησιμοποιήσει local solver ή global solver θα είχαν μεγάλο αντίκτυπο στο αποτέλεσμα. Για τον μεν πρώτο θα έπαιρνε γρήγορα μία τιμή αν βιαζόταν, με τον κίνδυνο να απέχει πολύ από τη βέλτιστη ενώ με τη μέθοδο της ολικής λύσης θα έβρισκε τη βέλτιστη λύση αλλά θα απαιτείτο αρκετός χρόνος. Στους ίδιους πίνακες

φαίνεται και ο προτεινόμενος τρόπος αντιμετώπισης (το πρόγραμμα που έχει σχεδιαστεί σε C/C++) πριν και μετά την εισαγωγή της υπόθεσης κυρτότητας. Σε μικρούς αριθμούς αεροσκαφών, όπως στην περίπτωση των 50 οι χρόνοι και στις τέσσερις περιπτώσεις θα μπορούσαν να θεωρηθούν μικροί. Μέχρι και η απόφαση της λύσης με LINGO που ήταν η μόνη παλιά δεν θα είχε μεγάλη σημασία αν διαλεγόταν. Καθώς αυξάνεται όμως ο αριθμός των αεροπλάνων παρατηρείται ότι και οι χρόνοι αυξάνονται σε μεγάλο βαθμό. Για την διενέργεια ενός πειράματος η αναμονή θα μπορούσε να γίνει δεκτή, όταν όμως οι απαιτήσεις μπορεί να υποχρεώνουν τους υπευθύνους να εφαρμόσουν πολλαπλά πειράματα σε διαφορετικές συνθήκες πριν την τελική απόφαση η χρήση του κατασκευασμένου προγράμματος κρίνεται επιτακτική. Σε σχέση τώρα με το νέο και το παλιό πρόγραμμα οι χρόνοι μπορεί να φαίνονται και στις δύο περιπτώσεις μικροί. Παρατηρώντας όμως καλύτερα γίνεται κατανοητό ότι αν και μικροί χωριστά, μεταξύ τους όταν αντιπαραβάλλονται οι προσθήκες που έγιναν δείχνουν να μειώνουν τον χρόνο επίλυσης σε ποσοστό που φτάνει το 70%!! Αν το πρόγραμμα αφεθεί να τρέξει πολλές φορές συνεχόμενα αυτό σημαίνει ότι η οικονομία του χρόνου είναι τεράστια. Η σημασία αυτού δε για την αεροπορία είναι μεγάλη για να μπορεί εγκαίρως να παίρνει τις σωστές αποφάσεις σε στιγμές που η ταχύτητα είναι ένα ζήτημα κομβικής σημασίας.

## 5.2 Συμπεράσματα για C/C++

Στην περίπτωση των μεγάλων προβλημάτων η προσπάθεια και μόνο του να χρησιμοποιηθεί το LINGO είναι άνευ ουσίας. Οι χρόνοι επίλυσης κατά την αύξηση του αριθμού των αεροσκαφών αυξάνονται γεωμετρικά. Με δεδομένο ότι στα 250 κάνει κατά μέσο όρο 3376,92 δευτερόλεπτα γίνεται κατανοητό τι θα συμβεί σε μεγαλύτερα προβλήματα. Στην περίπτωση αυτή κρίνεται επιτακτική (αρχίζοντας από τα προβλήματα που μπορεί να τρέξουν μία μόνο φορά) η χρήση του προγράμματος που έχει αναπτυχθεί. Σε γενικές γραμμές δεν είναι πιθανό να χρειαστεί όμως δεν γίνεται να αγνοηθεί ο υπολογισμός για τόσο μεγάλους αριθμούς αεροπλάνων (μεγαλύτερους των 250) . Στις ελάχιστες των περιπτώσεων και μόνο να εφαρμοστεί όπως σε προγραμματισμούς ασκήσεων συνεργασίας μεταξύ χωρών, κοινού ελέγχου εναέριων χώρων ή και κοινών επιχειρήσεων καθιστά σημαντική την μελέτη αυτή. Οι χρόνοι εδώ φαίνεται πιο καθαρά ότι παίζουν μεγάλη σημασία. Πέραν του ότι αυξάνονται γεωμετρικά καθώς μεγαλώνει ο αριθμός αεροπλάνων αυξάνεται σε μεγάλο βαθμό και η

ποσοστιαία διαφορά. Όπως και πριν είναι δυνατό να χρειαστεί να γίνουν πολλαπλά πειράματα. Σε αυτή την περίπτωση οι εναλλακτικές παρουσιάζουν τόση μεγάλη διαφορά που δεν μπαίνει θέμα επιλογής. Η χρησιμοποίηση του βελτιωμένου προγράμματος (εφόσον γίνεται δεκτό ότι δεν αλλάζουν τα αποτελέσματα με την υπόθεση της κυρτότητας) είναι μονόδρομος όπως και η δεδομένη ανωτερότητα του. Σημαντικό εδώ πέρα είναι και ότι στις δύο περιπτώσεις το αποτέλεσμα που βγάζει ο αλγόριθμος έχει την ίδια τιμή. Λόγω του ότι απόδειξη δεν έχει υπάρξει ακόμα για το σωστό της υπόθεσης είναι ένας τρόπος ελέγχου ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο ενισχύοντας την.

### 5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα των πειραμάτων συμπεριλαμβάνονται όλα μαζί σε ένα γενικό πίνακα αντιπροσωπευτικό του τι συμβαίνει καθώς μεταβάλλεται ο αριθμός αεροσκαφών και πως επηρεάζονται τα δεδομένα:



		Lingo					C++								
N=	Global		Local				Proposed algorithm				modified algorithm				
	Times		Times		% obj		Times		Combinations		Times		Combinations		
	AVG	MAX	AVG	MAX	AVG	MAX	AVG	MAX	AVG	MAX	AVG	MAX	AVG	MAX	
50	44,810	156,139	4,298	9,819	75,182%	330,667%	0,013	0,031	39,2	46	0,005	0,015	22,35	31	
100	198,324	686,039	11,794	27,279	323,466%	1551,400%	0,046	0,062	144,1	178	0,014	0,031	62,45	89	
150	655,819	1336,869	29,6	75,319	335,779%	1508,962%	0,09	0,125	323,45	374	0,036	0,062	130,4	180	
200	1700,825	3209,939	24,911	107,559	703,120%	3307,860%	0,172	0,265	563,4	660	0,051	0,093	193,35	275	
250	3376,392	7225,699	45,716	177,919	518,792%	2065,265%	0,308	0,468	881,4	1008	0,106	0,178	304,4	396	
500							1,723	2	3070	3434	0,566	0,703	1063	1275	
1000							20,692	22,343	13523	14204	6,694	8,109	4556	5342	
1500							100,84	108,984	32105	33510	25,668	38,968	8437	12105	
2000							289,731	355,046	54919	59313	62,752	90,031	13732	20388	
2500							799,31	977,578	87827	93388	156,204	264,203	20404	30150	

Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Πίνακας 14

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που πάρθηκαν από τις μετρήσεις. Για την περίπτωση του LINGO οι τιμές που αποκτούν σημασία έχουν διαφορές από αυτές για την C/C++. Για τις πρώτες μετρήσεις (LINGO) σημασία έχει ο μέσος χρόνος επίλυσης σε κάθε μία εκ των global και local solver όπως και ο μέγιστος χρόνος που χρειάστηκε το πρόβλημα για να τα λύσει. Ενώ η βέλτιστη λύση είναι που εξασφαλίζει το σωστό αποτέλεσμα όπως φαίνεται στον πίνακα δεν έρχεται χωρίς κόστος. Οι χρόνοι που χρειάζονται σε κάθε περίπτωση μόνο αμελητέοι δεν μπορούν να θεωρηθούν. Πολλές φορές ο υπεύθυνος θα μπορούσε να μπει στο δίλημμα ποια μέθοδο να διαλέξει όταν παρουσιάζονται τόσο μεγάλες διαφορές στους μέσους και μέγιστους χρόνους ανάμεσα στις δύο επιλογές. Παράγοντας που παίζει μεγάλο ρόλο στην επιλογή είναι και οι % αποκλίσεις από την βέλτιστη τιμή που παρουσιάζει η τοπική λύση από την σωστή. Όσο αυξάνεται ο αριθμός αεροσκαφών τόσο αυξάνεται και η μέση απόκλιση από την βέλτιστη τιμή αν χρησιμοποιηθεί local solver. Αυτό έρχεται σε σύγκλιση με τους χρόνους οι οποίοι ακολουθούν την ίδια πορεία διογκώνοντας σε μεγάλο βαθμό το χάσμα που υπήρχε εξ αρχής. Μέχρι τώρα η μόνη επιλογή που είχε ο χρήστης για την μείωση αυτών των διαφορών θα ήταν να θέσει την επιλογή *multistart solver attempts*, πράγμα που σήμαινε ότι θα επιλέγονταν περισσότερα από ένα σημεία εκκίνησης του έλεγχου για την εύρεση καλύτερης λύσης χωρίς να ξέρει πόσο κοντά ήταν στη σωστή τιμή, ή θα διάλεγε τον global solver χωρίς να ξέρει σε αυτή την περίπτωση πόσο χρόνο θα έκανε ο υπολογιστής για τους υπολογισμούς.

Αυτές τις δύσκολες αποφάσεις έρχεται να επιλύσει το πρόγραμμα που έχει γραφτεί. Από τους μικρούς αριθμούς αεροσκαφών ακόμα παρουσιάζεται μία μεγάλη διαφορά στα εξαγόμενα αποτελέσματα. Με αυτό τον έξυπνο τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος αποτελέσματα παίρνονται σε σύντομο διάστημα. Οι καταγραφόμενες τιμές στον πίνακα ξεκινάνε από τους χρόνους επίλυσης στις δύο περιπτώσεις (υπάρχον και τροποποιημένο πρόγραμμα) και συγκεκριμένα τις μέσες και ανώτερες τιμές τους. Άμεσα συνδεδεμένο με τους χρόνους είναι και οι δυνατοί συνδυασμοί που ελέγχθηκαν σε κάθε περίπτωση και αναπαριστούν τα οφέλη των περιορισμών που ετέθησαν στο πλαίσιο της διπλωματικής αυτής. Στη μείωση αυτών των περιορισμών έγκειται η προσπάθεια επιτάχυνσης της εύρεσης λύσης με μία ενίσχυση των δεσμεύσεων για την περαιτέρω μείωση των συνδυασμών. Από την εργασία αυτή μόνο φαίνεται μία μεγάλη διαφορά στις εφικτές τιμές που μπορεί να πάρουν οι μεταβλητές  $z_g$  και  $z_a$  μειώνοντας στο 70% τους ελέγχους που πραγματοποιούνται ενώ οι χρόνοι αυξάνονται επίσης γεωμετρικά. Χαρακτηριστικό ότι για  $N=500$  η οικονομία είναι της τάξης του 67.1%, για  $N=1500$  είναι 74.52% ενώ για  $N=2500$  η διαφορά είναι 80.46%. Αν

αποφασιζόταν να τρέξουν πολλά πειράματα με διαφορετικά δεδομένα και συνθήκες το βελτιωμένο πρόγραμμα εγγυάται την κατά πολύ ταχύτερη αντιμετώπιση τους.

Κατά την μελέτη τόσο των προβλημάτων με μικρούς αριθμούς αεροσκαφών όσο και με μεγάλους γινόταν καθ' όλη τη διάρκεια σε κάθε μία από τις 20 επαναλήψεις και σε κάθε ένα από τα 10 συνολικά πειράματα έλεγχος του αποτελέσματος της αντικειμενικής συνάρτησης. Το νούμερο για τις δύο περιπτώσεις έβγαине σε κάθε περίπτωση το ίδιο ενισχύοντας την υπόθεση της κυρτότητας όπως αυτή έχει διατυπωθεί. Αυτός ο έλεγχος επιβεβαίωσε σε κάθε βήμα ότι οι διαφορές στους χρόνους δεν έβγαίναν από λάθη που μπορεί να είχαν γίνει.

## 5.4 Μελλοντική έρευνα

Στο ευρύτερο σύνολο της εργασίας καταγράφεται η μορφοποίηση του ζητούμενου για την επίλυση ενός προβλήματος που μέχρι τώρα δεν είχαν γίνει προσπάθειες αντιμετώπισής του. Ο σχεδιασμός χρονοδιαγράμματος πτήσεων και συντηρήσεων για μία ομάδα αεροσκαφών μέχρι στιγμής γινόταν με βάση την εμπειρία του χρήστη. Αυτή ακριβώς την έλλειψη ήρθε να καλύψει το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε. Στόχος ήταν η εξασφάλιση ενός σχεδίου σε συμβατούς με τις ανάγκες της αεροπορίας χρόνους εύρεσης λύσης για την μεγιστοποίηση της διαθεσιμότητας. Η μορφοποίηση του ζητούμενου στο τέλος αφού καταγράφηκαν οι σχέσεις καταγράφηκε σε πρόγραμμα γλώσσας C/C++ για να μπορεί να εφαρμοστεί.

Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής έγινε μία πρώτη προσπάθεια βελτίωσης του προγράμματος που είχε αναπτυχθεί για την εξοικονόμηση χρόνου. Τα κύρια θέματα με τα οποία καταπιιάστηκε μπορούν να αποτελέσουν μία βάση για βελτίωση επιπλέον του προγράμματος.

Η διατύπωση της υπόθεσης για την ιδιότητα της κυρτότητας ήταν η αρχή πάνω στην οποία στηρίχθηκε η όλη διπλωματική. Ακολούθως γράφτηκε ο κώδικας που προστέθηκε στον υπάρχον αλγόριθμο και θα έθετε τα κατάλληλα όρια. Η προσπάθεια που έγινε για την διατύπωση κάποιων μαθηματικών αποδείξεων, όσο απλοϊκή και αν ήταν, δείχνει τις προοπτικές που μπορεί να έχει το όλο εγχείρημα. Στην ενίσχυση της υπόθεσης ήρθε να προστεθεί και το αποτέλεσμα των πειραμάτων με τον έλεγχο της αντικειμενικής, κάτι που αν έβγαίνε διαφορετικό θα σταματούσε οποιαδήποτε προσπάθεια είχε γίνει στην εργασία αυτή. Το

μεγαλύτερο μέρος της εργασίας όμως αναλώθηκε στα πειράματα με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για την οικονομία που μπορούσε να προκύψει στον χρόνο επίλυσης με τις προσθήκες του προγράμματος σε σχέση με το παλιό και το LINGO που ήταν δυνατό να χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα. Μέσω των πειραμάτων αυτών φάνηκε και η οικονομία που επιτυγχάνεται ακόμα και από τον αλγόριθμο στην C/C++ για να είναι γνωστή σε περίπτωση που δεν ίσχυε η κυρτότητα ή κάποιος την αμφισβητούσε. Με τον τρόπο αυτό μπορούσε να γίνει η αρχή που θα χρησίμευε σε κάθε περίπτωση για οποιαδήποτε συνέχεια.

Μέσω αυτών που έχουν γίνει μέχρι στιγμής και της κατάταξης τους φαίνεται και το τι οφείλει να γίνει σε επόμενο στάδιο και που εκκρεμούν συμπληρωματικές εργασίες.

Από τα πρώτα πράγματα που οφείλει γίνει προσπάθεια αντιμετώπισης είναι η μαθηματική επιβεβαίωση της υπόθεσης. Η όλη έρευνα βασίστηκε στο γεγονός ότι θεωρήθηκε δεδομένη η ύπαρξη κυρτότητας. Αυτή η άποψη μπορεί ανά πάσα στιγμή να αντικρουστεί από τον οποιονδήποτε καθ' ότι δεν βασίζεται σε κάποια μαθηματική τεκμηρίωση. Κρίσιμο λοιπόν είναι να βρεθεί ένας τρόπος στήριξης της υπόθεσης ώστε από εκεί και πέρα να μπορέσει η εργασία να ασχοληθεί με περαιτέρω βελτιώσεις. Η προσπάθεια αυτή μπορεί να γίνει μόνο με την συμβολή των μαθηματικών. Το ζητούμενο όμως παραμένει το ίδιο ενώ η σημασία της απόδειξης του αυξάνεται όσο η συνέχεια στηρίζεται εκεί.

Ένα άλλο θέμα που χρήζει αντιμετώπισης είναι η συμπεριφορά του αλγορίθμου σε μεγαλύτερους χρονικούς ορίζοντες. Η γενικότερη εικόνα που παρουσιάζει το αποτέλεσμα είναι ένα από τα ζητήματα που θα κληθούν να αντιμετωπιστούν σε μεταγενέστερο επίπεδο. Πειράματα μπορεί να έγιναν σε διάφορους συνδυασμούς αλλά ο αριθμός τους δεν μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικός. Σκοπός ήταν μέχρι τώρα η ευρύτερη κατανόηση του πώς επηρεάζεται το αποτέλεσμα καθώς μεταβάλλεται ο αριθμός των αεροσκαφών παρά η κατάληξη σε συγκεκριμένα συμπεράσματα. Μέσω της συνεχόμενης εφαρμογής του αλγορίθμου είναι δυνατό να υπάρξουν κάποιες γενικότερες σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών  $z_g$  και  $z_a$  καθώς επίσης και των ωρών πτήσης και συντήρησης για κάθε αεροσκάφος. Ο σκοπός άλλωστε αυτής της προσπάθειας είναι η αντιμετώπιση ζητημάτων προγραμματισμού σε βάθος χρόνου.

Η κυρτότητα που εφαρμόστηκε μέχρι στιγμής είχε σαν αποτέλεσμα τη δραστική μείωση του χρόνου που χρειαζόταν ο υπολογιστής για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Με αυτό το σκεπτικό πολύ πιθανό μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν και άλλες υποθέσεις που θα

μπορούσαν να γίνουν για τον ίδιο σκοπό. Σημαντικό σε όλες τις περιπτώσεις είναι να υπάρξει εμπεριστατωμένη διατύπωση οποιασδήποτε βελτίωσης. Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσε να ελεγχθεί αν μπορούν να τεθούν επιπλέον περιορισμοί για την επιβολή ορίων που θα επιτάχυναν τη διαδικασία. Επιπλέον έλεγχος της συμπεριφοράς του αλγορίθμου και των αποτελεσμάτων του (πολλά μπορεί να βρεθούν από εκεί) είναι απαραίτητο να γίνει.

Το πρόβλημα που καταγράφηκε ήρθε να αντιμετωπίσει το ζήτημα της έλλειψης τρόπου προγραμματισμού πτήσεων και συντηρήσεων αεροσκαφών. Σε πολλές όμως περιπτώσεις παρουσιάζονται παρόμοιες ανάγκες. Πέραν της αεροπορίας ζητήματα σχετικά με το θέμα παρατηρούνται στον στρατό (μεταφορές, προσομοιώσεις μάχης, προγράμματα συντήρησης,...) ενώ πιθανές συσχετίσεις θα μπορούσαν να υπάρξουν και για το ναυτικό (όπως στους εξοπλισμούς για τα πλοία και άλλα). Στις μεταφορές χαρακτηριστικά παρουσιάζονται πανομοιότυπες συνθήκες ως προς τα οχήματα καθώς η συντήρηση αλλά και ο προσδιορισμός του χρόνου λειτουργίας είναι απαραίτητος. Στη βιομηχανία επίσης μπορούν να υπάρξουν τέτοιες ανάγκες όπου με μία διαμόρφωση του υπάρχοντος προβλήματος θα μπορούσε να γίνει κάποιος σχεδιασμός ακόμα και για τα μηχανήματα, ακόμα και σε ανάγκες οργάνωσης όπως για το προσωπικό (άδειες αντί για συντήρηση, υπερωρίες,...). Μερικά από αυτά να φαντάζουν άσχετα θέματα, το γεγονός όμως μένει ότι το πρόγραμμα θα μπορούσε να διαμορφωθεί για την επίλυση πολλών ζητημάτων. Γεγονός παραμένει ότι οι προεκτάσεις του μπορεί να είναι απεριόριστες πολλές εκ των οποίων να μην φαίνονται καν να συσχετίζονται.

## 5.5 Σύνοψη

Ολοκληρώνοντας, τα συμπεράσματα τα οποία ανακτήθηκαν από την όλη διπλωματική εργασία είναι τα εξής:

- Από τους χρόνους που έτρεξαν τα πειράματα φαίνεται μία μεγάλη διαφορά μεταξύ του Lingo όταν ήταν ρυθμισμένο σε global ή local solver. Πέραν της διαφοράς στον χρόνο επίλυσης, μεγάλες αποκλίσεις είχαν και τα αποτελέσματα της αντικειμενικής. Χαρακτηριστικό είναι ότι όταν γινόταν η επιλογή Global solver, ο υπολογιστής χρειαζόταν από 942,49%-7.285,52% περισσότερο χρόνο για να βρει την λύση. Από την άλλη όμως, η απόκλιση της βέλτιστης λύσης της αντικειμενικής από την λύση όταν επιλεγόταν η επιλογή Local solver

κυμαινόταν κατά μέσο όρο από 75,18%-703,12%. Για την αντιμετώπιση της απόκλισης από την σωστή λύση, μία επιλογή θα ήταν η αύξηση των multistart attempts στο Lingo, κάτι που θα μείωνε την απόκλιση της αντικειμενικής για τις δύο περιπτώσεις, χωρίς όμως να εγγυάται το σωστό αποτέλεσμα αυξάνοντας ταυτόχρονα τον χρόνο επίλυσης.

- Ο αλγόριθμος πάντα βρίσκει το ολικό βέλτιστο. Από τους πίνακες επίσης φαίνεται η υπεροχή του συγκριτικά με το Lingo. Τα αποτελέσματα που παίρνονται χαρακτηρίζονται πολύ πιο αξιόπιστα (από την επιλογή local solver) ενώ οι χρόνοι επίλυσης είναι σαφώς μικρότεροι. Ο μέσος χρόνος που έκανε ο αλγόριθμος για την εύρεση της σωστής λύσης αντιστοιχούσε κατά μέσο όρο στο 0,016% !!!! από αυτόν που έκανε το Lingo ρυθμισμένο σε Global solver.

- Ο τροποποιημένος αλγόριθμος σε όλα τα πειράματα βρήκε την ολικά βέλτιστη λύση. Ο χρόνος που χρειάστηκε για αυτό αντιστοιχούσε κατά μέσο όρο στο 37,75% του χρόνου επίλυσης από τον υπάρχον αλγόριθμο.

- Ο υπολογιστικός φόρτος που απαιτείται από τον υπολογιστή για την επίλυση του προβλήματος φαίνεται να εξαρτάται από δύο κύριες παραμέτρους: τον αριθμό των αεροσκαφών και την χωρητικότητα ( C ) του σταθμού συντήρησης. Όσο αυτά αυξάνονται τόσο αυξάνεται γεωμετρικά και ο απαιτούμενος χρόνος για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.

## 6. Βιβλιογραφία

G. Kozanidis, A. Gavranis, and Eftychia Kostarelou, Mixed integer least squares optimization for flight and maintenance planning of mission aircraft, (2010)

G. Kozanidis, A multiobjective model for maximizing fleet availability under the presence of flight and maintenance requirements, Journal of Advanced Transportation 43 (2009), 155-182.

G. Kozanidis, A. Gavranis, and G. Liberopoulos, Heuristics for maximizing fleet availability subject to flight & maintenance requirements, Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Applications of Advanced Technologies in Transportation, Athens, Greece, 2008, 15 pages.

G. Kozanidis, G. Liberopoulos, and C. Pitsilkas, Flight and maintenance planning of military aircraft for maximum fleet availability, Military Operations Research 15 (2010), 53-73.

LINGO, User's guide, Chicago, IL: LINDO Systems, Inc., <http://www.lindo.com/>, 2008

B. W. Pippin, Allocating flight hours to army helicopters, MSc Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, 1998.

A. Sgaslik, Planning german army helicopter maintenance and mission assignment, MSc Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, CA, USA, 1994.

A. Steiner, A heuristic method for aircraft maintenance scheduling under various constraints, Proceedings of the 6<sup>th</sup> Swiss Transport Research Conference, Ascona, Switzerland, 2006, 28 pages.

U.S. DoA, Field manual No. 3-04.500: Army aviation maintenance (Appendix D: Maintenance management tools), U.S. Department of the Army, Washington, DC. <http://www.globalsecurity.org/military/library/policy/army/fm/3-04-500/>, 2000.





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000105762