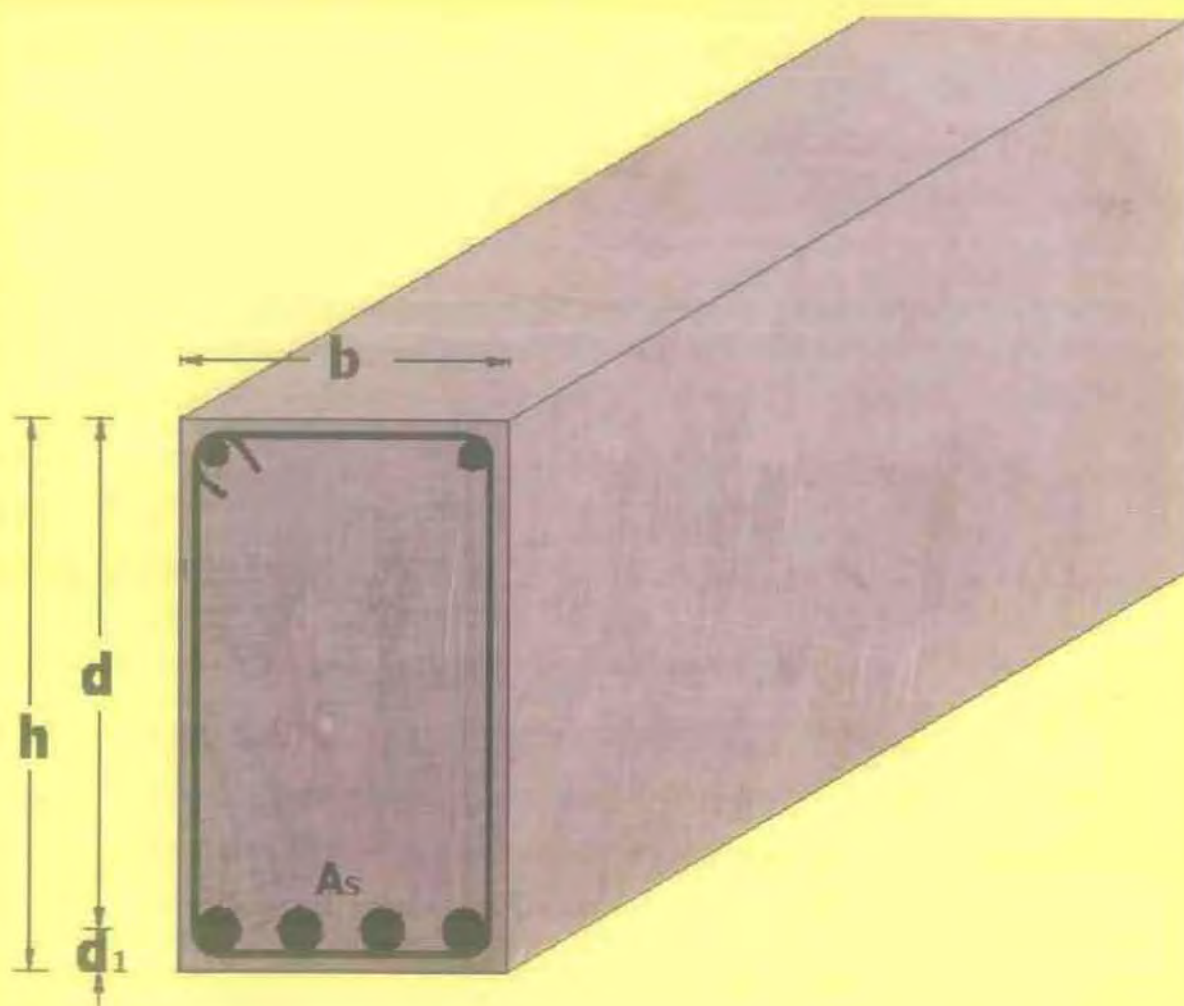




Διπλωματική Εργασία

**Βελτιστοποίηση Σχεδιασμού ως προς το Συνολικό Κόστος
Ορθογωνικών Διατομών Δοκών Οπλισμένου
Σκυροδέματος σε Καθαρή Κάμψη**



Επιμέλεια: Παπαθανασίου Σπυριδούλα Μαρία
Επιβλέπων Καθηγητής: Περδικάρης Φίλιππος

Βόλος, Οκτώβριος 2010



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 9010/1
Ημερ. Εισ.: 29-11-2010
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ
2010
ΠΑΠ

*Στους γονείς μου Βλάσση και Ελένη
και στον θείο μου Κώστα.*

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2009-2010, στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος φοίτησης του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Ολοκληρώθηκε και παρουσιάστηκε τον Οκτώβριο του 2010. Η εργασία πραγματεύεται τον σχεδιασμό ορθογωνικών διατομών σε δοκούς οπλισμένου σκυροδέματος με στόχο το ελάχιστο κόστος. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκε η ήδη γνωστή μέθοδος για την εύρεση ακροτάτων διαφόρων συναρτήσεων υπό συνθήκες, η μέθοδος Lagrange. Με βάση αυτή, αναπτύχθηκαν μαθηματικές σχέσεις για την εύρεση των βέλτιστων λύσεων που αντιστοιχούν στο ελάχιστο κόστος, τόσο για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκυστικό οπλισμό, όσο και αυτή με διπλό οπλισμό. Οι λύσεις που προέκυψαν από τις σχέσεις επαληθεύτηκαν τόσο από την ισορροπία όσο και από τη γραφική προσέγγιση που αναπτύχθηκε, κατοχυρώνοντας ότι όντως αντιστοιχούν στο ελάχιστο κόστος. Τέλος, αναπτύχθηκαν βοηθητικά διαγράμματα, για την γρήγορη εύρεση των βέλτιστων λύσεων ανάλογα με τις συνθήκες και απαιτήσεις που επιβάλλει ο σχεδιασμός.

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή και μαζί και την φοίτηση μου στο προπτυχιακό τμήμα του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Περδικάρη Φίλιππο για την πολύτιμη βοήθειά του και τις εύστοχες παρατηρήσεις, χωρίς τις οποίες θα ήταν αδύνατη η επιτυχής ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Παπαθανασίου Σπυριδούλα Μαρία
ΒΟΛΟΣ, Οκτώβριος 2010

➤ Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Η έννοια της βελτιστοποίησης σχεδιασμού διατομών σε δοκούς οπλισμένου σκυροδέματος.....	5
1.1. Το κόστος και οι παράμετροί του	5
1.2. Ορισμός συμβάσεων και παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν στη διερεύνηση του κόστους και στη διαδικασία βελτιστοποίησης.....	5
Κεφάλαιο 2. Ελαχιστοποίηση του κόστους στον σχεδιασμό ορθογωνικών διατομών από οπλισμένο σκυρόδεμα.....	8
2.1. Βελτιστοποίηση του κόστους σε διατομές Ο.Σ. με εφελκόμενο οπλισμό.....	9
2.1.1. Η έννοια της ισορροπημένης διατομής και η σημασία της στη βελτιστοποίηση	19
2.2. Βελτιστοποίηση του κόστους σε διατομές Ο.Σ. με εφελκόμενο και θλιβόμενο οπλισμό.....	26
2.3. Σχετική βιβλιογραφία	44
2.4. Μελέτη της συμπεριφοράς των βελτιστοποιημένων παραμέτρων του κόστους.....	45
2.4.1. Μελέτη της συμπεριφοράς του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ορθογωνικής διατομής (ρ_{opt}).....	46
2.4.1.1. Βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού για την περίπτωση όπλισης διατομών με μόνο εφελκόμενο οπλισμό.....	46
2.4.1.2. Βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού για την περίπτωση όπλισης διατομών με εφελκόμενο και θλιβόμενο οπλισμό.....	50
2.4.1.3. Βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού για όλες τις περιπτώσεις όπλισης.....	53
2.4.2. Μελέτη της συμπεριφοράς του βέλτιστου στατικού ύψους ορθογωνικής διατομής (d_{opt}).....	63
2.4.2.1. Βέλτιστο στατικό ύψος για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό.....	63
2.4.2.2. Βέλτιστο στατικό ύψος για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό.....	65

2.4.2.3. Βέλτιστο στατικό ύψος για όλες τις περιπτώσεις όπλισης..	66
2.4.3. Μελέτη της συμπεριφοράς των βέλτιστων μεγεθών που προέρχονται από το ρ_{opt} και το d_{opt} (μ_{opt} , ω_{opt}).....	71
Κεφάλαιο 3. Το ελάχιστο κόστος όπως προκύπτει από τη μέθοδο Lagrange.....	78
3.1. Η μέθοδος Lagrange σε σύγκριση με τον κλασσικό σχεδιασμό.....	78
3.2. Γραφική μέθοδος επαλήθευσης της μεθόδου Lagrange.....	83
3.3. Η μέθοδος Lagrange σε σχέση με το κόστος ξυλοτύπου.....	94
Κεφάλαιο 4. Συμπεράσματα.....	96

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΣΕ ΔΟΚΟΥΣ ΟΠΛΙΣΜΕΝΟΥ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΟΣ.

Βασικός στόχος του μηχανικού κατά τον σχεδιασμό μιας κατασκευής, είναι να διαστασιολογήσει και να οπλίσει τα στοιχεία της ώστε να εξασφαλιστεί η απαιτούμενη αντοχή και πλαστιμότητα σε επίπεδο διατομών, αλλά και η ασφάλεια προς τα άτομα που την χρησιμοποιούν. Εκτός από τον παραπάνω στόχο του μηχανικού, υπάρχει ένας ακόμη σημαντικός παράγοντας που πρέπει να αντισταθμιστεί, *το κόστος*. Η βελτιστοποίηση των διατομών είναι μια διαδικασία που γίνεται πάντα με σκοπό τη βελτίωση κάποιας παραμέτρου σχεδιασμού. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται πώς ο κλασικός σχεδιασμός δοκών οπλισμένου σκυροδέματος, με πλήρη ικανοποίηση των διατάξεων του ΕΚΩΣ 2000 και του Ευρωκώδικα 2, μπορεί να συνδυαστεί με την βελτιστοποίηση σχεδιασμού *ως προς το συνολικό κόστος*. Η **βελτιστοποίηση** αυτή αφορά **μόνο τα υλικά της διατομής** (χάλυβας και σκυρόδεμα) και όχι το κόστος του ξυλοτύπου, της διαμόρφωσης ή της εργασίας. Επιπλέον εξετάζεται η ευαισθησία του ελάχιστου κόστους για μεταβολή των παραμέτρων που το επηρεάζουν και παρουσιάζονται συνοπτικά διαγράμματα.

1.1. Το Κόστος και οι Παράμετροι του

Το συνολικό κόστος μιας διατομής οπλισμένου σκυροδέματος αποτελείται από το κόστος του σκυροδέματος και του χάλυβα που χρησιμοποιούνται, τα οποία με τη σειρά τους εξαρτώνται από τις διαστάσεις των υλικών αυτών. Τα μεγέθη αυτά, βρίσκονται ως παράμετροι μέσα στη μαθηματική συνάρτηση του συνολικού κόστους, έτσι ώστε να μπορεί να προσαρμοστεί σε κάθε περιοχή και χώρα που μελετάται. Ωστόσο, δεν επηρεάζουν με τον ίδιο τρόπο το συνολικό κόστος όλες οι μεταβολές των τιμών των παραμέτρων. Σημειώνεται ότι στους υπολογισμούς που ακολουθούν δεν συμπεριλαμβάνεται το κόστος ξυλοτύπου. Στην επόμενη παράγραφο ορίζουμε τα μεγέθη που υπεισέρχονται σε αυτή την εργασία.

1.2. Ορισμός Συμβάσεων και Παραμέτρων που θα Χρησιμοποιηθούν στη Διερεύνηση του Κόστους και στη Διαδικασία Βελτιστοποίησης

Ορίζονται οι εξής παράμετροι, που θα χρησιμοποιηθούν στη διερεύνηση του κόστους και στη διαδικασία βελτιστοποίησης:

C_c : κόστος του σκυροδέματος ανά μονάδα όγκου

C_s : κόστος του χάλυβα οπλισμού ανά μονάδα όγκου

C_{tot} : συνολικό κόστος της διατομής δοκού οπλισμένου σκυροδέματος ανά μονάδα μήκους δοκού.

$q = \frac{C_s}{C_c}$: σχετικό κόστος χάλυβα οπλισμού και σκυροδέματος.

f_{yk} : χαρακτηριστική τάση διαρροής χάλυβα οπλισμού.

f_{ck} : χαρακτηριστική τάση αντοχής σκυροδέματος.

γ_c, γ_s : συντελεστές ασφαλείας υλικών για το σκυρόδεμα και το χάλυβα οπλισμού αντίστοιχα (αδιάστατα μεγέθη), οι οποίοι δίδονται στον Πίνακα 1, Κεφάλαιο 6 (¶ 6.3.3), ΕΚΩΣ 2000.

Πίνακας 1: Επιμέρους συντελεστές ασφαλείας υλικών γ_m .

Οριακές καταστάσεις	Συνδυασμοί	Σκυρόδεμα γ_c	Χάλυβας οπλισμού γ_s
Αστοχίας	Βασικοί	1.50	1.15
	Τυχηματικοί	1.30	1.00
	Τυχηματικοί με σεισμό	1.50	1.15
Λειτουργικότητας	Βασικοί	1.00	1.00

$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$: τάση διαρροής σχεδιασμού χάλυβα οπλισμού.

$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$: τάση αντοχής σχεδιασμού σκυροδέματος.

b : πλάτος διατομής δοκού.

h : ύψος διατομής δοκού.

d_1 : απόσταση στο επίπεδο της διατομής, του κέντρου βάρους του εφελκόμενου οπλισμού από την εφελκόμενη ακραία ίνα.

d_2 : απόσταση στο επίπεδο της διατομής, του κέντρου βάρους του θλιβόμενου οπλισμού από την θλιβόμενη ακραία ίνα.

$d=h-d_1$: στατικό ύψος διατομής, απόσταση του κέντρου βάρους του εφελκυσμένου οπλισμού από την θλιβόμενη ακραία ίνα.

d_{opt} : βέλτιστο στατικό ύψος διατομής, που σε συνδυασμό με το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού δίνουν στο σχεδιασμό τη λύση με το ελάχιστο κόστος.

A_s : εμβαδό εφελκυσμένου οπλισμού διατομής.

A_s' : εμβαδό θλιβόμενου οπλισμού διατομής.

$\rho = \frac{A_s}{bd}$: γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού διατομής.

ρ_{opt} : βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκυσμένου οπλισμού διατομής, που σε συνδυασμό με το βέλτιστο στατικό ύψος διατομής δίνουν στο σχεδιασμό τη λύση με το ελάχιστο κόστος.

ρ_{bal} : γεωμετρικό ποσοστό εφελκυσμένου οπλισμού για την "ισορροπημένη" διατομή για το οποίο ο εφελκυσμένος οπλισμός μόλις διαρρέει και ταυτόχρονα το σκυρόδεμα αστοχεί ("συνθλίβεται").

$\omega = \rho \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$: μηχανικό ποσοστό οπλισμού.

M_d : ροπή κάμψης σχεδιασμού διατομής

$\mu = \frac{M_d}{bd^2 f_{cd}}$: ανηγμένη ροπή σχεδιασμού διατομής.

μ_{opt} : βέλτιστη ανηγμένη ροπή κάμψης σχεδιασμού διατομής.

$\delta_1 = \frac{d_1}{d}$: ανηγμένη απόσταση εφελκυσμένου οπλισμού από ακραία εφελκυσόμενη ίνα.

$\delta_2 = \frac{d_2}{d}$: ανηγμένη απόσταση θλιβόμενου οπλισμού από ακραία θλιβόμενη ίνα.

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης στην παρούσα εργασία βασίζεται στις διατάξεις του ΕΚΩΣ 2000. Σε πολλά σημεία γίνεται σύγκριση με τις αντίστοιχες διατάξεις του Ευρωκώδικα 2, ο οποίος θα ισχύει αντί του ΕΚΩΣ 2000 από το έτος 2011 και μετά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ ΣΤΟΝ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΟΜΩΝ ΑΠΟ ΟΠΛΙΣΜΕΝΟ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑ

Η βελτιστοποίηση του κόστους κατά τον σχεδιασμό ορθογωνικών διατομών σε δοκούς, δεν είναι τίποτα παραπάνω από μια διαδικασία που στοχεύει στην εύρεση ακρότατου (ελαχίστου) της συνάρτησης κόστους, υπό κάποια συνθήκη περιορισμού. Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε από τους B.Ceranic και C.Fryer του Πανεπιστημίου του Derby στην Αγγλία (University of Derby, Kedleston Site, UK) στο άρθρο που δημοσιεύτηκε στο επιστημονικό περιοδικό Springer-Verlag με τίτλο "Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams", το έτος 2000. Στόχος τους ήταν η βελτιστοποίηση σχεδιασμού ως προς τα υλικά με στόχο το ελάχιστο κόστος, με εφαρμογή των διατάξεων του βρετανικού κανονισμού British Standard (BS 8110 -1:1997). Η ίδια μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί και από άλλους ερευνητές, όπως οι Yousef A. Al-Salloum and Ghulam Husain Siddigi, στο άρθρο τους στο περιοδικό ACI Structural Journal το έτος 1994 και οι M.H.F.M. Barros and R.A.F. Martins and A.F.M. Barros, στο άρθρο τους στο περιοδικό Springer-Verlag, το έτος 2005. Με την βελτιστοποίηση σχεδιασμού ως προς το κόστος (cost-optimization design), ασχολήθηκαν πολλοί μηχανικοί αναπτύσσοντας διαφορετικές μεθόδους για την υλοποίησή της, κυρίως προγραμματιστικές (βλ. βιβλιογραφία στο τέλος της ενότητας 2.1.).

Μια εύχρηστη μέθοδος για την ελαχιστοποίηση ή την μεγιστοποίηση της τιμής που παίρνει μια συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, είναι ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου της. Ωστόσο η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση (μίας ή περισσότερων μεταβλητών), αποτελείται από μεταβλητές που δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ή που έχουν περιορισμούς. Η μέθοδος Lagrange επιλύει μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, η οποία υπόκειται σε περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων $g_i = k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $i=1, 2, \dots, m$, m ο αριθμός των περιορισμών και n ο αριθμός των μεταβλητών. Για να έχει ισχύ η μέθοδος θα πρέπει ο αριθμός των περιορισμών να είναι μικρότερος από τον αριθμό των μεταβλητών, δηλαδή $m < n$.

Στόχος είναι ξεκινώντας από τη συνάρτηση που υπόκειται σε περιορισμούς να καταλήξουμε σε μια άλλη που δεν υπόκειται, τη συνάρτηση Lagrange $L(x)$. Η συνάντηση εκφράζεται σαν το άθροισμα της συνάρτησης y και των γινομένων $\lambda_i \cdot g_i$, όπου λ_i οι πολλαπλασιαστές Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = y(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \lambda_i} \quad (1)$$

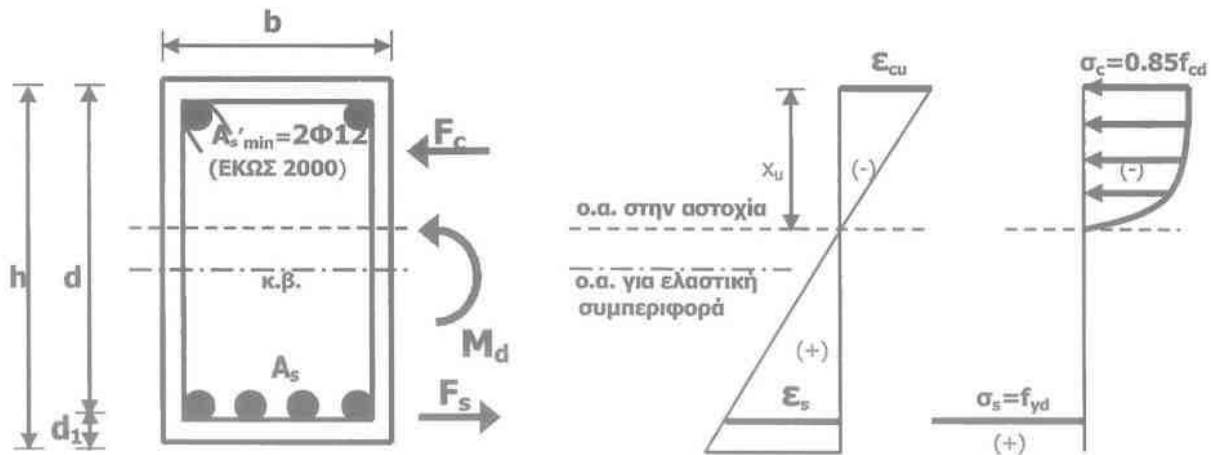
Η λύση της συνάρτησης Lagrange είναι το σύστημα:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0, \quad \text{όπου } k=1,2,\dots,n \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i = 0, \quad \text{όπου } i=1,2,\dots,m \quad (3)$$

Με τον τρόπο αυτό καταστρώνεται ένα σύστημα $n+m$ εξισώσεων, με $n+m$ αγνώστους. Η απλότητα και η αποτελεσματικότητα της μεθόδου Lagrange, για έναν οικονομικά βελτιστοποιημένο σχεδιασμό, θα αναδειχθεί παρακάτω, μέσα από εφαρμογές και γραφήματα.

2.1. Βελτιστοποίηση Κόστους σε Διατομές Ο.Σ. με Μόνο Εφελκυσμένο Οπλισμό



Σχήμα 1. Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις, ανηγμένες παραμορφώσεις και κατανομή τάσεων σε ορθογωνική διατομή με μόνο εφελκυσμένο οπλισμό, στην οριακή κατάσταση αστοχίας σε κάμψη-ΕΚΩΣ 2000.

Για την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange, σύμφωνα με την περιγραφή της μεθόδου Lagrange που προηγήθηκε, απαιτείται η συνάρτηση του μεγέθους που πρόκειται να βελτιστοποιηθεί και οι συναρτήσεις περιορισμού αυτής. Συνεπώς, το συνολικό κόστος μιας ορθογωνικής διατομής οπλισμένου σκυροδέματος ανά μονάδα μήκους δοκού χωρίς το κόστος ξυλοτύπου, θα είναι το άθροισμα των κοστών του χάλυβα και του σκυροδέματος, ή αλλιώς

$$\begin{aligned} C_{\text{tot}} &= C_c b(d+d_1) + C_s \rho b d = \\ &= C_c b d (1+\delta_1) + C_c \rho b d = \\ &= C_c b d [(1+\delta_1) + \rho] \end{aligned} \quad (4)$$

όπου C_c = το κόστος σκυροδέματος ανά μονάδα όγκου,
 C_s = το κόστος χάλυβα οπλισμού ανά μονάδα όγκου,

$$q = \frac{C_s}{C_c} \text{ και}$$

$$\delta_1 = \frac{d_1}{d}$$

Στη σχέση (4) δεν συμπεριλαμβάνεται το κόστος του ξυλοτύπου.

Η ελαχιστοποίηση του κόστους επιτυγχάνεται με τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων που το συνθέτουν. Για τη διευκόλυνση της διαδικασίας βελτιστοποίησης θεωρείται ότι το πλάτος b της διατομής και το ανηγμένο μέγεθος δ_1 παραμένουν σταθερά, δηλαδή μπορούν να έχουν μια σταθερή τιμή σε όλη την ανάλυση. Επομένως οι παράμετροι που βελτιστοποιούνται είναι το **γεωμετρικό ποσοστό εφελκυσμένου οπλισμού ρ και το στατικό ύψος d της διατομής**, για ένα δεδομένο πλάτος b . Στη συνέχεια, με βάση τα βελτιστοποιημένα μεγέθη προσδιορίζεται η βέλτιστη ανηγμένη ροπή κάμψης μ . Επομένως για να έχουμε το ελάχιστο κόστος κατά τον σχεδιασμό μιας διατομής που εκτίθεται σε ροπή κάμψης M_d (ή ανηγμένη ροπή μ), θα πρέπει αυτή να οπλιστεί με γεωμετρικό ποσοστό εφελκυσμένου οπλισμού ρ_{opt} και ταυτόχρονα να διαστασιολογηθεί, για γνωστό πλάτος b , με στατικό ύψος d_{opt} (ή με $d = b_{opt}$). Τα μεγέθη ρ_{opt} , d_{opt} και μ_{opt} θα προκύψουν από τη διαδικασία βελτιστοποίησης, για κάθε περίπτωση όπλισης.

Η σχέση (4) δίνει τη συνάρτηση κόστους την οποία στοχεύουμε να ελαχιστοποιήσουμε με τη μέθοδο Lagrange. Υπάρχουν πολλοί περιορισμοί κατά τον σχεδιασμό μιας διατομής, που αφορούν την ισορροπία, την πλαστιμότητα, τα βέλη κάμψης της δοκού, την ανθεκτικότητα, την πυροπροστασία ή και τις διαστάσεις της διατομής λόγω αρχιτεκτονικών εμποδίων. Ο περιορισμός στην παρούσα εργασία είναι μοναδικός και προέρχεται από την ισορροπία της διατομής στην οριακή κατάσταση αστοχίας. Ο ίδιος περιορισμός χρησιμοποιήθηκε στη βελτιστοποίηση βάσει BS 8110 στη βελτιστοποίηση σχεδιασμού διατομών δοκών των B.Ceramic και C.Fryer. Απαιτηση είναι η διατομή που θα αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος να μπορεί να μεταφέρει με ασφάλεια τα μέγιστα φορτία που της ασκούνται και να υπακούει στις διατάξεις που επιβάλλει ο ΕΚΩΣ 2000.

Η ισορροπία των εσωτερικών δυνάμεων και ισοδυναμία με τα εξωτερικά εντατικά μεγέθη σε ορθή ένταση ορθογωνικής διατομής οπλισμένου σκυροδέματος μόνο με εφελκυσμένο οπλισμό, για την οριακή κατάσταση αστοχίας σε καθαρή κάμψη ($N=0$), έχει ως εξής:

$$F_c = F_s \tag{5}$$

$$0.85 \cdot 0.8095 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x_u = A_s \cdot f_{yd}$$

$$\text{ή } 0.688 \cdot \frac{f_{ck}}{1.5} \cdot b \cdot x_u = \rho \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{yk}}{1.15}$$

άρα

$$x_u = 1.896 \rho d \frac{f_{yk}}{f_{ck}} \quad (6)$$

Ορίζουμε $\eta_f = \frac{f_{yk}}{f_{ck}}$, οπότε η σχέση (6) μπορεί να γραφεί:

$$x_u = 1.896 \rho d \eta_f \quad (6a)$$

Η ισορροπία των δυνάμεων βασίζεται στο Σχήμα 1, όπως αυτό δίδεται από τον ΕΚΩΣ 2000. Ο Ευρωκώδικας 2 συμφωνεί πλήρως με την κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων που δίνει ο ΕΚΩΣ 2000. Η ισορροπία των εσωτερικών και εξωτερικών ροπών κάμψης για αστοχία σε ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος μόνο με εφελκόμενο οπλισμό, έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} M_d &= F_c (d - 0.416 x_u) = F_s (d - 0.416 x_u) = \\ &= A_s f_{yd} (d - 0.416 x_u) = \\ &= \rho b d \frac{f_{yk}}{1.15} (d - 0.416 \cdot 1.896 \rho d \eta_f) \end{aligned}$$

άρα

$$M_d = 0.87 \rho b d^2 f_{yk} - 0.686 \eta_f \rho^2 b d^2 f_{yk}$$

$$\text{ή } M_d = 0.87 \rho b d^2 f_{yk} (1 - 0.79 \eta_f \rho) \quad (7)$$

Η σχέση (7) αποτελεί τον περιορισμό της συνάρτησης κόστους (4). Για την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange και για τους μετέπειτα υπολογισμούς, ισχύουν οι παρακάτω παραδοχές:

- ο λόγος $\delta_1 = \frac{d_1}{d}$, θεωρείται σταθερή τιμή
- η ροπή κάμψης M_d είναι δεδομένη ποσότητα
- και τέλος δεν υπάρχει αξονική δύναμη N που να ασκείται στη διατομή.

Άρα, η συνάρτηση Lagrange, σύμφωνα με τις σχέσεις (1), (4) και (7), διαμορφώνεται ως εξής:

$$L = b \left\{ [C_c d(q\rho + (1+\delta_1))] + \lambda [0.87 \rho d^2 f_{yk} (1-0.79 n_f \rho) - M_d] \right\} \quad (8)$$

Παρατήρηση: Το πλάτος b της διατομής, είναι κοινός παράγων των δύο όρων του αθροίσματος που υπάρχει στη συνάρτηση Lagrange (8). Συνεπώς κατά την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange, απλοποιείται και καθίσταται αδύνατη η βελτιστοποίησή του. Θεωρώντας μια σταθερή τιμή γι'αυτό, το πρόβλημα της βελτιστοποίησής του λύνεται.

Επίλυση:

Από τις σχέσεις (2) και (8), παραγωγίζοντας ως προς ρ και d προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = b [C_c q d + \lambda (0.87 d^2 f_{yk} - 2 \cdot 0.87 \cdot 0.79 n_f \rho d^2 f_{yk})] = 0$$

$$\text{ή } C_c q d + \lambda (0.87 d^2 f_{yk} - 2 \cdot 0.87 \cdot 0.79 n_f \rho d^2 f_{yk}) = 0 \quad (9)$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial d} = b \left\{ C_c [q\rho + (1+\delta_1)] + \lambda [2 \cdot 0.87 \rho d f_{yk} (1-0.79 n_f \rho)] \right\} = 0$$

$$\text{ή } C_c [q\rho + (1+\delta_1)] + \lambda [2 \cdot 0.87 \rho d f_{yk} (1-0.79 n_f \rho)] = 0 \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (3) και (8) παραγωγίζοντας ως προς λ προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.87 \rho b d^2 f_{yk} (1-0.79 n_f \rho) - M_d = 0$$

άρα

$$M_d = 0.87 \rho b d^2 f_{yk} (1-0.79 n_f \rho) \quad (11)$$

Με βάση τη σχέση (9) και (10) αντίστοιχα, καταλήγουμε στην τιμή του λ:

$$\lambda = \frac{-C_c q d}{0.87 d^2 f_{yk} - 1.37 n_f \rho d^2 f_{yk}} \quad (9a)$$

και

$$\lambda = \frac{-C_c [q\rho + (1+\delta_1)]}{1.74\rho d f_{yk} (1-0.79n_f\rho)} \quad (10a)$$

Με την εξίσωση των δυο σχέσεων (9a) και (10a) απλοποιούνται τα εξής μεγέθη: το κόστος της μονάδας σκυροδέματος C_c ως κοινός παράγοντας των δυο αριθμητών, όπως επίσης το στατικό ύψος d και η χαρακτηριστική τάση διαρροής του χάλυβα οπλισμού f_{yk} , σαν κοινοί παράγοντες των δυο παρονομαστών. Επομένως:

$$\frac{q}{0.87-1.37n_f\rho} = \frac{q\rho + (1+\delta_1)}{1.74\rho(1-0.79n_f\rho)}$$

$$\text{ή } 1.74q\rho - 1.37n_f q\rho^2 = 0.87q\rho + 0.87(1+\delta_1) - 1.37n_f q\rho^2 - 1.37n_f(1+\delta)\rho$$

Αν λύσουμε ως προς ρ προκύπτει:

$$\rho = \frac{1+\delta_1}{q+1.578n_f(1+\delta_1)}$$

$$\text{ή } \rho = \frac{1}{\frac{q}{1+\delta_1} + 1.578n_f} \quad (12)$$

$$\text{όπου } q = \frac{C_s}{C_c}, \quad n_f = \frac{\bar{f}_{yk}}{f_{ck}} \quad \text{και} \quad \delta_1 = \frac{d_1}{d}.$$

Η σχέση (12) δίνει το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού μιας ορθογωνικής διατομής χωρίς θλιβόμενο οπλισμό, για υλικά δεδομένων χαρακτηριστικών τάσεων (χάλυβας και σκυρόδεμα) και δεδομένα κόστη,

$$\rho_{opt} = \frac{1}{\frac{q}{1+\delta_1} + 1.578n_f} \quad (12a)$$

Η σχέση (12α) έχει την ίδια μορφή με την αντίστοιχη σχέση στην οποία κατέληξαν οι B.Ceranic και C.Fryer με την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange βάσει BS 8110 (Springer-Verlag 2000). Η σχέση είναι ανεξάρτητη από το πλάτος b , το ύψος h της διατομής και τη ροπή κάμψης M_d που ασκείται, όπως άλλωστε αναμενόταν, εφόσον πρόκειται για ποσοστό οπλισμού. Ως εκ τούτου, το ποσοστό ρ_{opt} θα εξαρτάται μόνο από τις χαρακτηριστικές τάσεις των υλικών στη διατομή και από το κόστος τους για δεδομένη ανηγμένη απόσταση $\delta_1=d_1/d$. Η ευαισθησία του βέλτιστου ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} , σε αλλαγές τάσεων ή κοστών υλικών θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα.

Η σχέση (12α) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\rho_{opt} = \frac{1}{\frac{q}{1 + \frac{d_1}{d}} + 1.578n_f} = \frac{1}{q \frac{d}{h} + 1.578n_f} \quad (12\beta)$$

Με βάση την σχέση (12β) είναι δυνατόν να οριστεί το μηχανικό ποσοστό οπλισμού μιας διατομής οπλισμένου σκυροδέματος

$$\begin{aligned} \omega_{opt} &= \rho_{opt} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 1.304 \frac{1}{q \frac{d}{h} + 1.578n_f} \frac{f_{yk}}{f_{ck}} = 1.304 \frac{1}{q \frac{d}{h} + 1.578n_f} n_f = \\ &= \frac{1.304}{\frac{q}{n_f} \frac{d}{h} + 1.578} \end{aligned} \quad (13)$$

Στις σχέσεις (12β) και (13) δεν απαιτείται να είναι γνωστές οι τιμές των μεγεθών d και h , παρά μόνο ο λόγος τους. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε ένα προσεγγιστικό βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού για κάθε χώρα, για την περίπτωση όπλισης διατομών χωρίς θλιβόμενο οπλισμό.

Πιο συγκεκριμένα για την Ελλάδα:

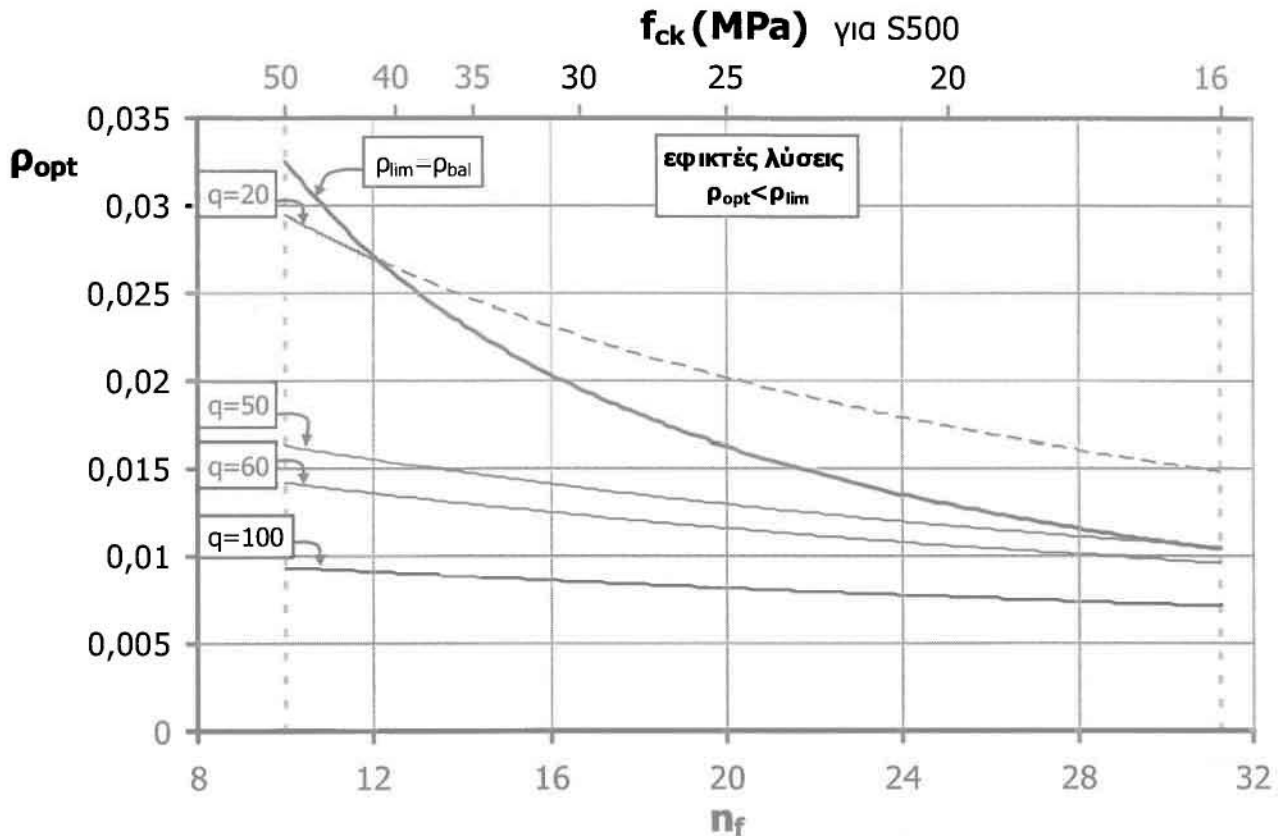
- Υποθέτοντας ότι στην πλειονότητα των κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος χρησιμοποιείται σκυρόδεμα C30/37, τότε για χάλυβα με τάση διαρροής 500 MPa ισχύει ότι $n_f=16.7$.

- Το σχετικό κόστος χάλυβα και σκυροδέματος $q=C_s/C_c$ κυμαίνεται ανάλογα με την αντοχή σκυροδέματος από περίπου 50 έως 60, όπως περιγράφεται στην ενότητα 2.4 με βάση τον Πίνακα 4 και το κόστος του χάλυβα οπλισμού.

Άρα από τη σχέση (12a) για $q=55$ και $\delta_1=0.10$ υπολογίζεται ότι το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκούμενου οπλισμού ρ_{opt} , χωρίς την παρουσία θλιβόμενου οπλισμού, που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος, για τον ελλαδικό χώρο είναι:

$$\rho_{opt} = \frac{1}{\frac{q}{1+\delta_1} + 1.578n_f} = 0.0131$$

Η σχέση μεταξύ του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού, ρ_{opt} , για μόνο εφελκούμενο οπλισμό, με το λόγο των χαρακτηριστικών τάσεων των υλικών (τάση αντοχής για το σκυρόδεμα και τάση διαρροής για το χάλυβα), είναι αντίστροφη αλλά όχι ανάλογη (βλ. Σχήμα 2). Ίδια είναι και η σχέση μεταξύ του βέλτιστου ποσοστού ρ_{opt} και του λόγου των κοστών των υλικών q . Οι καμπύλες του Σχήματος 2 βασίζονται στη σχέση (12a) με το q να έχει μια δεδομένη τιμή σε καθεμία από αυτές, ενώ στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται και η καμπύλη της "ισορροπημένης" διατομής, σύμφωνα με τη σχέση (18a). Η "ισορροπημένη" διατομή, η οποία αναλύεται εκτενώς στην παράγραφο §2.1.1., είναι ένα θεωρητικό άνω όριο στο σχεδιασμό διατομών με μόνο εφελκούμενο οπλισμό. Συνεπώς οι λύσεις που δίνουν τιμές μεγαλύτερες από την αντίστοιχη της "ισορροπημένης" διατομής, δεν ισχύουν. Για αυτές η βέλτιστη λύση δεν είναι ο μόνο εφελκούμενος οπλισμός. Τα τμήματα των καμπυλών που βρίσκονται πάνω από αυτή της "ισορροπημένης" διατομής απεικονίζονται στο Σχήμα 2 με διακεκομμένη γραμμή. Εκτενέστερη ανάλυση για τη μορφή των καμπυλών και την ευαισθησία του βέλτιστου ποσοστού σε αλλαγές των παραγόντων από τους οποίους εξαρτάται γίνεται στην παράγραφο §2.4.1.1. Εκεί γίνεται αναφορά και στα μέγιστα ποσοστά οπλισμού από τον κανονισμό.



Σχήμα 2. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} με $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ -μόνο εφελκυόμενος οπλισμός ($\delta_1 = 0.10$).

Από τη σχέση (11) εκφράζουμε τη ροπή κάμψης M_d , που δύναται να φέρει η διατομή, συναρτήσει του γεωμετρικού ποσοστού εφελκυόμενου οπλισμού, ρ :

$$M_d = 0.87 \rho b d^2 f_{yk} (1 - 0.79 n_f \rho)$$

Άρα

$$d = \sqrt{\frac{M_d}{0.87 \rho b f_{yk} (1 - 0.79 n_f \rho)}} \quad \text{και} \quad (14)$$

$$b = \frac{M_d}{0.87 \rho d^2 f_{yk} (1 - 0.79 n_f \rho)} \quad (15)$$

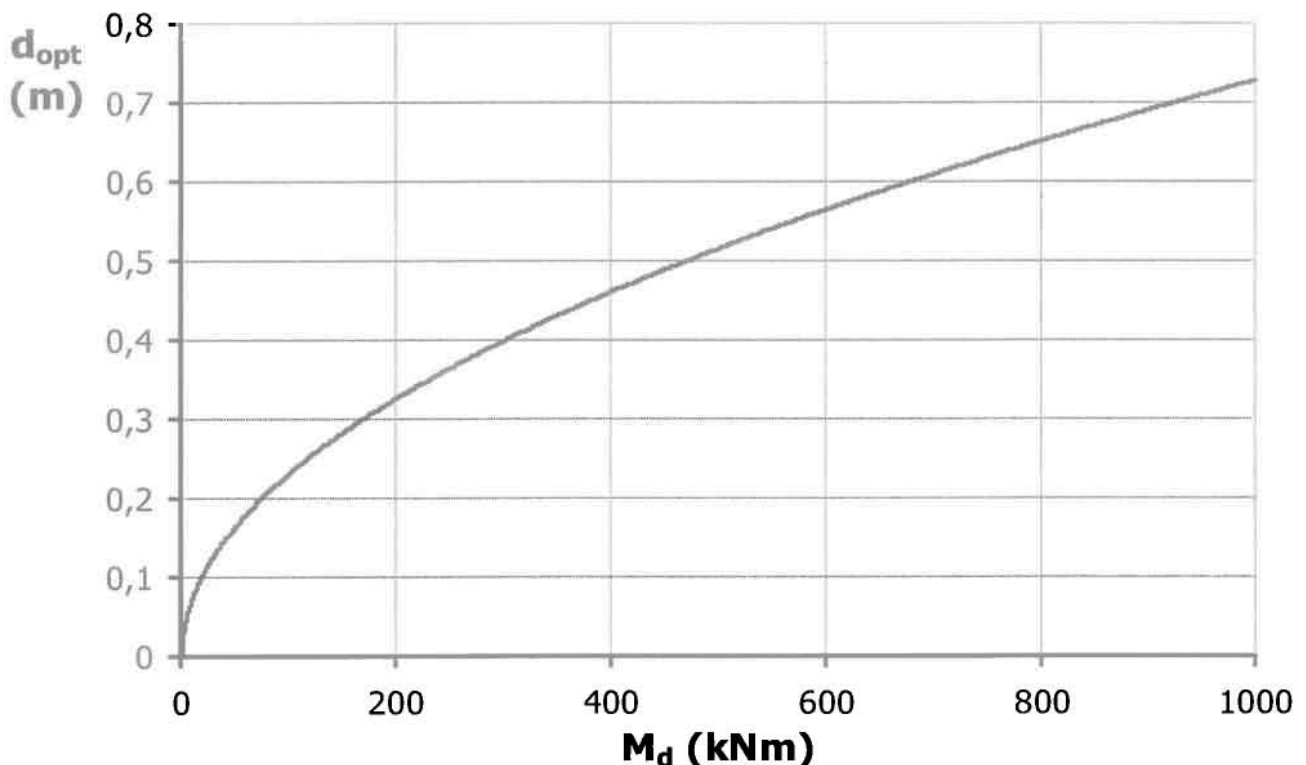
Άρα για δεδομένη ροπή κάμψης M_d και πλάτος ορθογωνικής διατομής b , το βέλτιστο στατικό ύψος της διατομής d_{opt} , που οπλίζεται με μόνο εφελκυόμενο οπλισμό είναι:

$$d_{opt} = \sqrt{\frac{M_d}{0.87 \rho_{opt} b f_{yk} (1 - 0.79 \eta_f \rho_{opt})}} \quad (14a)$$

και το βέλτιστο πλάτος της διατομής b_{opt} , για δεδομένα M_d και d ή h και όπλιση με μόνο εφελκόμενο οπλισμό είναι:

$$b_{opt} = \frac{M_d}{0.87 \rho_{opt} d^2 f_{yk} (1 - 0.79 \eta_f \rho_{opt})} \quad (15a)$$

Στην πλειονότητα των περιπτώσεων σχεδιασμού, υπάρχει δεδομένη τιμή του πλάτους b της διατομής μιας δοκού, η οποία επιβάλλεται από την αρχιτεκτονική των λοιπών πρωτευόντων στοιχείων (π.χ. δεδομένες διαστάσεις υποστρωμάτων που φέρουν τη δοκό), ενώ το στατικό ύψος d είναι άγνωστο [σχέση (13a)]. Βέβαια δύναται να συμβαίνει και το αντίθετο, οπότε και εφαρμόζεται η σχέση (14a), με άγνωστο το πλάτος b . Οποιαδήποτε διάσταση και αν είναι η ζητούμενη, απαραίτητα η άλλη θα πρέπει να ναι γνωστή. Το βέλτιστο στατικό ύψος της διατομής είναι το ύψος που δίνει η ισορροπία ροπών σε μια διατομή που οπλίζεται με βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού ρ_{opt} . Η σχέση μεταξύ του βέλτιστου στατικού ύψους της διατομής, d_{opt} , για μόνο εφελκόμενο οπλισμό, με τη ροπή κάμψης M_d , απεικονίζεται στο Σχήμα 3 [σχέση (14a)]. Το εύρος των τιμών της ροπής κάμψης είναι τυχαίο.



Σχήμα 3. Καμπύλη βέλτιστου στατικού ύψους διατομής d_{opt} για $f_{ck}=30$ MPa, $q=55$, $b=0.4$ m και $\rho_{lim}=\rho_{bal}$ -μόνο εφελκόμενος οπλισμός($\delta_1=0.10$).

Τα βελτιστοποιημένα μεγέθη ρ_{opt} και d_{opt} που προσδιορίστηκαν σε αυτή την ενότητα δεν αντιστοιχούν στα ελάχιστα μεγέθη σχεδιασμού μιας ορθογωνικής διατομής. Αντιστοιχούν όμως σε μια μοναδική λύση που ικανοποιεί την ισορροπία και ταυτόχρονα δίνει το ελάχιστο κόστος σχεδιασμού. Εφαρμόζοντας τον κλασσικό σχεδιασμό μιας ορθογωνικής διατομής που εκτίθεται σε δεδομένη ροπή κάμψης, μπορούν να προκύψουν άπειρα ζεύγη λύσεων οπλισμού-διαστάσεων που να ικανοποιούν την αντοχή και την πλαστιμότητα της διατομής. Συνεπώς, για δεδομένο πλάτος, επιλέγεται πρώτα είτε το ποσοστό οπλισμού είτε το ύψος της διατομής και στη συνέχεια υπολογίζεται το αντίστοιχο άγνωστο μέγεθος ώστε να προσδιοριστεί η λύση σχεδιασμού. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης ωστόσο περιορίζει τον τρόπο υπολογισμού του ζεύγους λύσης, καθώς όπως προκύπτει από την σχέση (12a) το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού εξαρτάται μόνο από το σχετικό κόστος του χάλυβα και του σκυροδέματος και από τις χαρακτηριστικές τάσεις αυτών. Ως εκ τούτου επιλέγοντας εξ αρχής τα υλικά που θα χρησιμοποιηθούν, το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού προσδιορίζεται αυτόματα και στη συνέχεια μέσω της ισορροπίας, υπολογίζεται το βέλτιστο στατικό ύψος της διατομής. **Στην περίπτωση που επιλεγεί αρχικά ένα στατικό ύψος διατομής, είναι αδύνατον να υπολογιστεί το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού από την ισορροπία της διατομής, αφού το ποσοστό αυτό για δεδομένες τάσεις έχει προσδιοριστεί ήδη και είναι μοναδικό.**

Με βάση τα παραπάνω είναι δυνατόν να οριστεί η γνωστή σχέση που συνδέει το βέλτιστο μηχανικό ποσοστό οπλισμού ω_{opt} , με τη βέλτιστη ανηγμένη ροπή κάμψης μ_{opt} που μπορεί να φέρει μια ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος, για δεδομένες τιμές της ροπής κάμψης σχεδιασμού M_d και του πλάτους της διατομής b (ΕΚΩΣ 2000), για μόνο εφελκόμενο οπλισμό:

$$\begin{aligned} \mu_{opt} &= \frac{M_d}{b d_{opt}^2 f_{cd}} = 1,304 n_f \rho_{opt} (1 - 0,79 n_f \rho_{opt}) = \\ &= \omega_{opt} (1 - 0,6 \omega_{opt}) \end{aligned} \quad (16)$$

όπου

$$\omega_{opt} = \rho_{opt} \frac{f_{vd}}{f_c} = 1,304 \rho_{opt} n_f$$

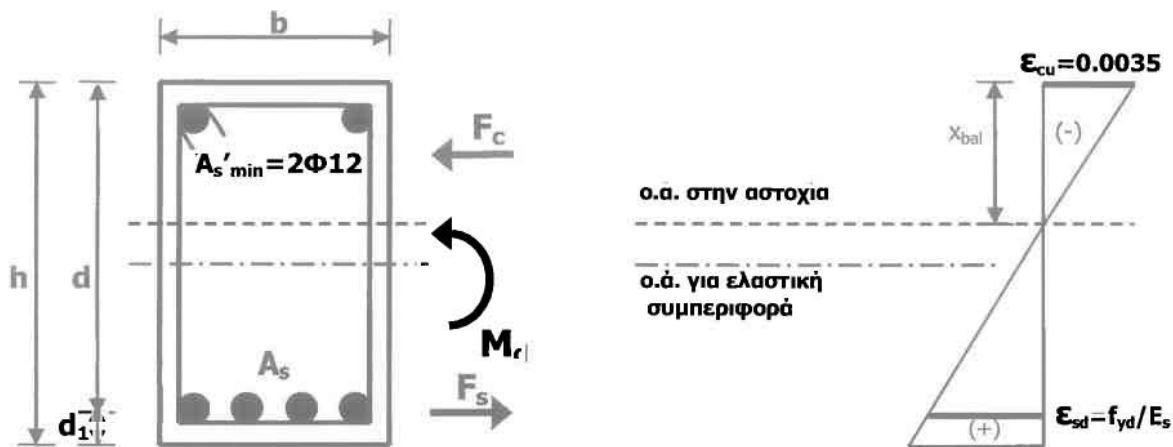
2.1.1. Η Έννοια της Ισορροπημένης Διατομής και η Σημασία της στη Βελτιστοποίηση

Ο σχεδιασμός μιας διατομής που εκτίθεται σε ροπή κάμψης (M_d), μπορεί να γίνει με πολλούς εναλλακτικούς τρόπους, που διαφοροποιούν την καμπτική συμπεριφορά της. Ειδικότερα, μια διατομή μπορεί να συμπεριφερθεί είτε ελαστικά, είτε ελαστοπλαστικά. Η ποσότητα οπλισμού σε συνάρτηση με τις διαστάσεις της καθορίζουν την συμπεριφορά της. Συνεπώς, το βέλτιστο κόστος σχετίζεται άρρηκτα με τον τρόπο σχεδιασμού της διατομής ή αλλιώς με την πλαστιμότητά της. Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμο να οριστεί η έννοια της "ισορροπημένης" διατομής.

Η "ισορροπημένη" διατομή είναι η διατομή εκείνη που διαθέτει μόνο εφελκόμενο οπλισμό και στην οποία ταυτόχρονα το σκυρόδεμα στη θλιβόμενη περιοχή αστοχεί (ανηγμένη παραμόρφωση με βάση τον ΕΚΩΣ 2000, $\epsilon_{cu}=3,5\%$) ενώ ο εφελκόμενος οπλισμός μόλις διαρρέει (ανηγμένη παραμόρφωση $\epsilon_{yd}=f_{yd}/E_s$). Είναι μια θεωρητική περίπτωση σχεδιασμού διατομής που παρουσιάζει μηδενική πλαστιμότητα καθώς ο χάλυβας μπαίνει οριακά στην περιοχή της πλάστιμης παραμόρφωσης, όπου και είναι η περιοχή μέγιστης χρησιμότητάς του [δυνατότητα παραμόρφωσης έως και δεκαπλάσια της διαρροής του ($\approx 10\epsilon_{yd}$)]. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η διατομή έχει οπλιστεί με τη μέγιστη δυνατή ποσότητα εφελκόμενου οπλισμού και τις μικρότερες δυνατές διατάσεις (bxd). Με άλλα λόγια έχει οπλιστεί με ένα μέγιστο ρ , το οποίο στην παρούσα εργασία χαρακτηρίζεται ως ρ_{bal} . Συνεπώς αποτελεί ένα άνω όριο οπλισμού, πάνω από το οποίο ($\rho > \rho_{bal}$) η διατομή απαιτεί και θλιβόμενο οπλισμό.

Στις σύγχρονες κατασκευές, οι ισχύοντες κανονισμοί κάθε χώρας περιλαμβάνουν διατάξεις που ασχολούνται κυρίως με τον ελαστοπλαστικό σχεδιασμό, χωρίς βέβαια να απαγορεύουν τον ελαστικό. Ο λόγος είναι ότι η ελαστική συμπεριφορά επιτυγχάνεται μέσω της μεγάλης ακαμψίας μιας κατασκευής, γεγονός που καθιστά την υλοποίησή της ιδιαίτερα ακριβή λόγω μεγάλων διαστάσεων στα πρωτεύοντα στοιχεία της. Ο ελαστοπλαστικός σχεδιασμός είναι οικονομικότερη λύση, ενώ τα πρόσθετα ειδικά μέτρα που επιβάλλουν οι κανονιστικές διατάξεις για τις περιοχές αυξημένων απαιτήσεων, την καθιστούν ταυτόχρονα και ασφαλή. Η ελαστοπλαστική συμπεριφορά σε επίπεδο διατομής σημαίνει τον σχεδιασμό της με γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού, ρ , για την περίπτωση που μόνο αυτός οπλίζει τη διατομή, μικρότερο αυτού της "ισορροπημένης" διατομής, ή αλλιώς $\rho < \rho_{bal}$. Όσο πιο χαμηλό είναι το ποσοστό ρ , σε σχέση με της "ισορροπημένης", τόσο πιο γρήγορα διαρρέει ο εφελκόμενος οπλισμός σε σχέση με την σύνθλιψη του σκυροδέματος (ΕΚΩΣ 2000 και Ευρωκώδικας 2, $\epsilon_{cu}=3,5\%$). Ως εκ τούτου, το χαμηλό γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού σημαίνει μεγάλη πλαστιμότητα. Ο ΕΚΩΣ 2000, με στόχο την καλύτερη δυνατή πλάστιμη συμπεριφορά, στις περιπτώσεις όπλισης με διπλό οπλισμό, επιβάλλει την τοποθέτηση θλιβόμενου οπλισμού, σε ποσοστό τουλάχιστο 50% του εφελκόμενου. Το ποσοστό του μέγιστου εφελκόμενου οπλισμού επιλέγεται ανάλογα με τις απαιτήσεις πλαστιμότητας.

Η ισορροπία των εσωτερικών δυνάμεων σε ορθογωνική "ισορροπημένη" διατομή οπλισμένου σκυροδέματος για την περίπτωση αστοχίας σε καθαρή κάμψη ($N=0$), έχει ως εξής:



Σχήμα 4. Ανηγμένες παραμορφώσεις σε ορθογωνική "ισορροπημένη" διατομή με μόνο εφελκόμενο οπλισμό χάλυβα οπλισμού (ΕΚΩΣ 2000-Ευρωκώδικας 2).

Το Σχήμα 4 βασίζεται τόσο στον ΕΚΩΣ 2000 όσο και στον Ευρωκώδικα 2. Σύμφωνα με τον τελευταίο, η παραμόρφωση αστοχίας του συνθλιβόμενου σκυροδέματος είναι **3,5‰** για αντοχές σκυροδέματος από **16 MPa έως 50 MPa**. Το συγκεκριμένο εύρος των αντοχών μελετάται στην παρούσα εργασία. Η ανηγμένη παραμόρφωση για χάλυβα οπλισμού προκύπτει από τη σχέση

$$\epsilon_{sd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Σύμφωνα με το Σχήμα 4, το βάθος της θλιβόμενης ζώνης για την "ισορροπημένη" διατομή x_{bal} , με βάση τη σχέση,

$$\frac{\epsilon_{cu}}{x_{bal}} = \frac{\epsilon_{sd}}{d - x_{bal}} = \frac{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sd}}{d}$$

υπολογίζεται ως

$$x_{bal} = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{sd}} d = \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \frac{f_{yd}}{E_s}} d \quad (17)$$

Για την περίπτωση όπου ο χάλυβας είναι ποιότητας S500, τότε προκύπτει:

$$x_{bal} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{sd}} d = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \frac{f_{yd}}{E_s}} d = \frac{0.0035}{0.0035 + 0.00217} d = 0.617d \quad (17a)$$

Άρα με βάση τη σχέση ισορροπίας αξονικών δυνάμεων στην ορθογωνική διατομή δοκών οπλισμένου σκυροδέματος:

$$F_c = F_s$$

$$\text{ή } 0.688bx_{bal}f_{cd} = \rho_{bal} bdf_{yd}$$

$$\text{ή } 0.688 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \frac{f_{yd}}{E_s}} db \frac{f_{ck}}{1.5} = \rho_{bal} bd \frac{f_{yk}}{1.15}$$

Αν λύσουμε ως προς ρ_{bal}

$$\rho_{bal} = 0.527 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \frac{f_{ck}}{f_{yk}} = 0.527 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \frac{1}{\eta_f} \quad (18)$$

Δηλαδή το γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού ρ_{bal} που αντιστοιχεί στην "ισορροπημένη" διατομή, εξαρτάται αποκλειστικά από τις κρίσιμες ανηγμένες παραμορφώσεις του σκυροδέματος και του χάλυβα (παραμόρφωση αστοχίας για το σκυρόδεμα και διαρροής για το χάλυβα) και από τις χαρακτηριστικές τους τάσεις (διαρροή και αστοχία για τον χάλυβα και το σκυρόδεμα αντίστοιχα). Με δεδομένο ότι το εύρος των αντοχών σκυροδέματος είναι από **16 MPa έως 50 MPa**, η παραμόρφωση αστοχίας του σκυροδέματος της θλιβόμενης περιοχής, ε_{cu} , είναι ίση με **3,5‰** (Ευρωκώδικας 2). Συνεπώς το γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού για την "ισορροπημένη" διατομή εξαρτάται από την παραμόρφωση του χάλυβα και τις χαρακτηριστικές τάσεις χάλυβα και σκυροδέματος ή ακόμη πιο απλά αποκλειστικά από τις χαρακτηριστικές τάσεις των υλικών, αφού η παραμόρφωση του χάλυβα έχει να κάνει με την τάση διαρροής του.

Από τη σχέση (18) υπολογίζεται το μηχανικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού για την "ισορροπημένη" διατομή, ω_{bal} :

$$\omega_{bal} = \rho_{bal} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0.527 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \frac{1}{\eta_f} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 0.687 \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \quad (19)$$

Δηλαδή, το μηχανικό ποσοστό οπλισμού για την "ισορροπημένη" διατομή, εξαρτάται από τις κρίσιμες ανηγμένες παραμορφώσεις του χάλυβα και του σκυροδέματος. Με δεδομένο ότι η παραμόρφωση αστοχίας του συνθλιβόμενου σκυροδέματος, ϵ_{cu} , είναι ίση με **3.5%**, το μηχανικό ποσοστό οπλισμού για την "ισορροπημένη" διατομή εξαρτάται αποκλειστικά από την τάση διαρροής του χάλυβα.

Για την περίπτωση όπου ο χάλυβας είναι ποιότητας S500, προκύπτει:

$$\rho_{bal} = 0.527 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \frac{1}{n_f} = 0.325 \frac{f_{ck}}{500}, \text{ με } f_{ck} \text{ σε MPa} \quad \text{και} \quad (18a)$$

$$\omega_{bal} = 0.687 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} = 0.42 \quad (19a)$$

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή της παραγράφου, το ποσοστό οπλισμού ρ_{bal} αποτελεί ένα θεωρητικό άνω όριο για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Άρα, ισχύει ότι:

$$\rho_{lim} = \rho_{bal}$$

Σε περιπτώσεις αυξημένων απαιτήσεων πλαστιμότητας μπορεί να θεωρηθεί στον σχεδιασμό ότι $\rho_{lim} = 0,75\rho_{bal}$, $0,50\rho_{bal}$ ή οποιοδήποτε άλλο ποσοστό ανταποκρίνεται στην πλαστιμότητα που στοχεύεται. Όσο πιο μικρό το ποσοστό, τόσο μεγαλύτερη η πλαστιμότητα της διατομής. Πιο συγκεκριμένα:

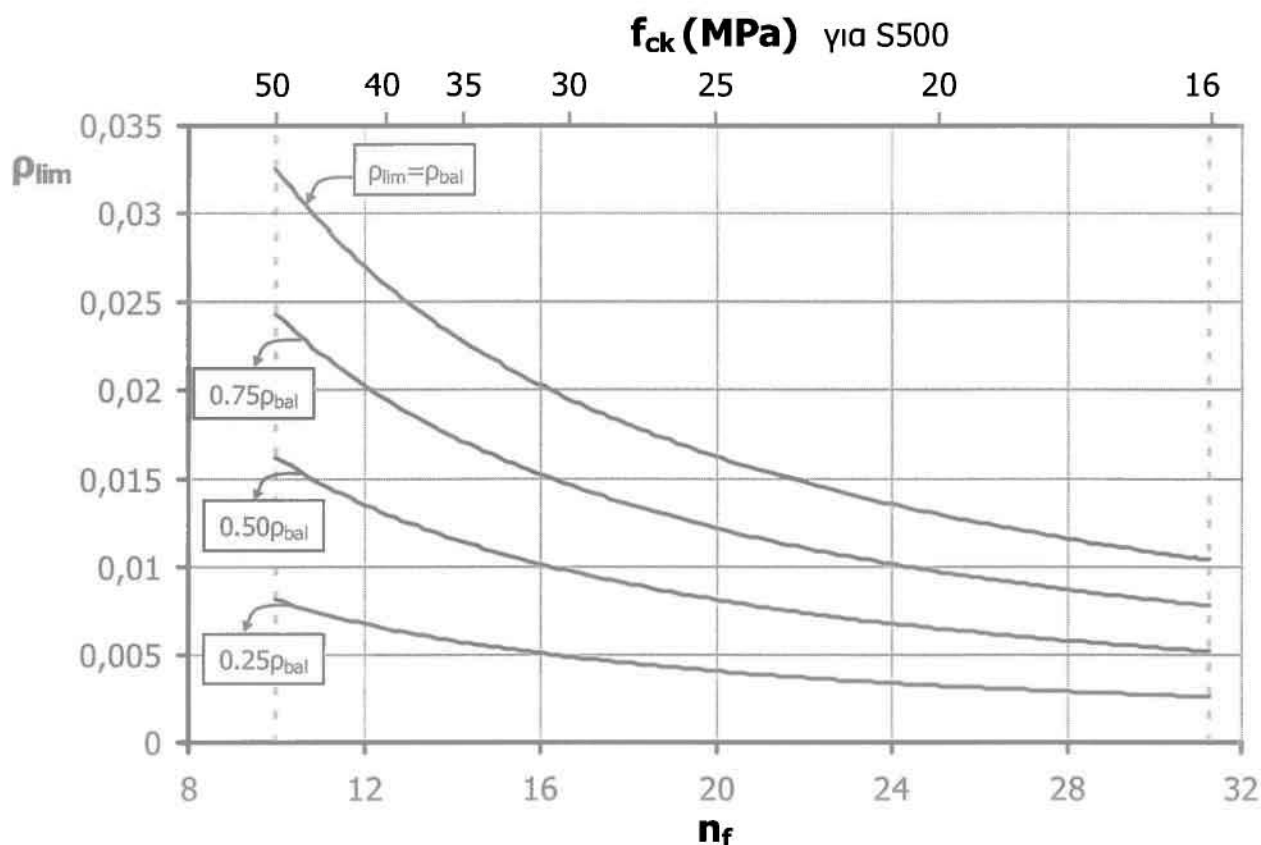
$$\rho_{lim} = 0.75 \cdot \rho_{bal} = 0.244 \cdot \frac{f_{ck}}{500}, \quad \text{για } x_u = 0.75 \cdot x_{bal} \quad (20)$$

$$\rho_{lim} = 0.50 \cdot \rho_{bal} = 0.163 \cdot \frac{f_{ck}}{500}, \quad \text{για } x_u = 0.50 \cdot x_{bal} \quad (21)$$

$$\rho_{lim} = 0.25 \cdot \rho_{bal} = 0.081 \cdot \frac{f_{ck}}{500}, \quad \text{για } x_u = 0.25 \cdot x_{bal} \quad (22)$$

Στις σχέσεις (18a)-(22) η αντοχή του σκυροδέματος μετράται σε MPa.

Η σχέση μεταξύ του άνω ορίου του μόνο εφελκυσμένου οπλισμού, ρ_{lim} , με την αντοχή σκυροδέματος, f_{ck} , απεικονίζεται στο Σχήμα 5 (ο χάλυβας είναι **S500** σε όλες τις περιπτώσεις). Οι καμπύλες είναι η γραφική απεικόνιση των σχέσεων (18a), (20), (21) και (22).



Σχήμα 5. Καμπύλες άνω ορίων μόνο εφελκυσμένου οπλισμού, ρ_{lim} .

Όλες οι καμπύλες ρ_{lim} έχουν την ίδια μορφή, καθώς περιγράφονται από μαθηματικές σχέσεις που είναι ανάλογες μεταξύ τους. Το άνω όριο του εφελκυσμένου οπλισμού είναι πάντα αντιστρόφως ανάλογο με το λόγο των χαρακτηριστικών τάσεων του χάλυβα και του σκυροδέματος, n_f , για την περίπτωση όπου ο χάλυβας είναι S500 ή αλλιώς ανάλογο με την αντοχή του σκυροδέματος. Όταν ο χάλυβας είναι άλλης ποιότητας, οι σχέσεις (18a), (20), (21) και (22) δεν ισχύουν, αλλά ισχύει η γενική σχέση που ορίζει το ποσοστό της "ισορροπημένης" διατομής, η σχέση (18). Για κάθε ποιότητα χάλυβα μπορούν να προκύψουν αντίστοιχες σχέσεις, οι οποίες θα είναι ανάλογες της αντοχής σκυροδέματος. Στην παρούσα εργασία γίνεται αναφορά μόνο στον χάλυβα S500, ως τον πιο διαδεδομένο στις κατασκευές.

Από τις καμπύλες του Σχήματος 5 προκύπτει το συμπέρασμα ότι όσο πιο χαμηλό είναι το ρ_{lim} που επιλέγεται κατά τον σχεδιασμό μιας ορθογωνικής διατομής, τόσο οι τιμές του τείνουν να είναι λιγότερο επηρεασμένες από την αύξηση της αντοχής σκυροδέματος. Ειδικότερα, στο εύρος του f_{ck} από 50 έως 30, οι τιμές του ρ_{bal} μεταβάλλονται περίπου κατά 0.013, ενώ οι τιμές του $0.25\rho_{bal}$ κατά 0.003. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό παρατηρώντας ότι στις σχέσεις (18a) και (22) ο λόγος n_f έχει διαφορετική βαρύτητα, λόγω της διαφοράς του αριθμητή στην τάξη μεγέθους. Το άνω

όριο γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού για τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό, ρ_{lim} , διαφέρει ανάλογα με τι ποσοστό της "ισορροπημένης" διατομής ρ_{bal} αυτό καλύπτει (βλ. Πίνακα 2).

Πίνακας 2. Άνω όριο γεωμετρικού ποσοστού μόνο εφελκούμενου οπλισμού ρ_{lim} , για ποιότητα σκυροδέματος C30/37.

$\frac{\rho_{lim}}{\rho_{bal}}$	ρ_{lim}
1	0.0195
0.75	0.0146
0.50	0.0098
0.25	0.0049

Ο ρόλος του άνω ορίου του μόνο εφελκούμενου οπλισμού ρ_{lim} είναι καθοριστικός, καθώς είναι το κριτήριο με το οποίο γίνεται αποδεκτή μια λύση ως βέλτιστη ή όχι. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή του ρ_{opt} που προκύπτει για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκούμενο οπλισμό από τη σχέση (12a) συγκρίνεται πάντα με το άνω όριο ρ_{lim} που έχει επιλεγεί και πρέπει να είναι μικρότερη από αυτό για να είναι εφικτή. Κατά τον σχεδιασμό μιας κατασκευής, η επιλογή του άνω ορίου για τον εφελκούμενο οπλισμό, γίνεται από τον μηχανικό βάσει των απαιτήσεων του συστήματος, αρκεί να τηρούνται πάντα όλα τα απαραίτητα μέτρα για την ασφάλεια της κατασκευής. Η "ισορροπημένη" διατομή, η οποία αναλύθηκε στην αρχή της παραγράφου, περιγράφεται από τον ΕΚΩΣ 2000 σαν μια θεωρητική περίπτωση όπλισης διατομής, την οποία ο ίδιος απαγορεύει μέσα από τις πρόσθετες διατάξεις του. Συνεπώς, εάν θεωρήσουμε ότι το άνω όριο για τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό είναι $\nu\%$ αυτού που ορίζει η "ισορροπημένη" διατομή, η τιμή ρ_{opt} για τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από αυτό. Με τη σύγκριση των δύο τιμών, προκύπτει ο βέλτιστος τρόπος όπλισης της διατομής τελικώς. Ειδικότερα, στο παράδειγμα της παραγράφου §2.1., για την περίπτωση της Ελλάδας βρέθηκε ότι μια αντιπροσωπευτική τιμή βέλτιστου ποσοστού είναι η $\rho_{opt} = 0.0131$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 προκύπτει ότι το ποσοστό αυτό αποτελεί το 67.2% της ισορροπημένης διατομής, ή αλλιώς $\rho_{opt} = 0.672\rho_{bal}$. Συνεπώς, εάν το ρ_{lim} που επιλέγεται σαν άνω όριο για τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό είναι μεγαλύτερο του $0.672\rho_{bal}$, τότε η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στο μόνο εφελκούμενο οπλισμό, ενώ εάν είναι μικρότερο τότε η βέλτιστη λύση δεν αντιστοιχεί στον μόνο εφελκούμενο οπλισμό.

Για τις περιπτώσεις όπου η βέλτιστη λύση δεν είναι ο μόνο εφελκούμενος οπλισμός, γίνεται ανάλυση σε επόμενη παράγραφο. Για τις υπόλοιπες τιμές του λόγου ρ_{lim}/ρ_{max} που δεν αναγράφονται στον Πίνακα 2, εφαρμόζεται η γραμμική παρεμβολή.

Ο ΕΚΩΣ 2000 θέτει κάποια όρια τόσο για ρ_{\max} όσο και ρ_{\min} :

$$\rho_{\max} = 0.65 \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \frac{\rho'}{\rho} + 0.0015 \leq \frac{7}{f_{yd}} \quad (23)$$

$$\rho_{\min} = \frac{1}{2} \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} \quad (24)$$

Ο Ευρωκώδικας 2 δίνει ένα πιο ανεκτικό άνω όριο τόσο για τον **εφελκούμενο** όσο και για τον **θλιβόμενο** οπλισμό:

$$A_{s,\max} = A_{s',\max} = 0.04A_c \quad (23a)$$

όπου A_c είναι το εμβαδό της διατομής σκυροδέματος ($=bh$)

Άρα

$$\rho_{\max} = \rho'_{\max} = \frac{0.04A_c}{bd} = \frac{0.04bh}{bd} = \frac{0.04bh}{bd} = \frac{0.04}{\left(\frac{d}{h}\right)} = 0.04(1 + \bar{\sigma}_1) \quad (23\beta)$$

Η μέγιστη ροπή που μπορεί να φέρει μια ορθογωνική διατομή με μόνο εφελκόμενο οπλισμό, αντιστοιχεί στη ροπή που μπορεί να φέρει η "ισορροπημένη" διατομή. Από την ισορροπία ρομών και με τη βοήθεια της σχέσης (17) για χάλυβα S500, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= F_s (d - 0.416 x_{bal}) = \rho_{lim} bd \frac{f_{yk}}{1.15} (d - 0.416 \cdot 0.617d) = \\ &= 0.325 \frac{f_{ck}}{f_{yk}} bd \frac{f_{yk}}{1.15} 0.743d \end{aligned}$$

$$\text{ή } M_{\max} = 0.228bd^2 f_{ck} \quad (25)$$

Αντίστοιχα για τις περιπτώσεις, $\rho_{lim} = 0.50\rho_{bal}$ και $\rho_{lim} = 0.25\rho_{bal}$, οι σχέσεις της μέγιστης ροπής είναι:

$$\text{για } \rho_{lim} = 0.75\rho_{bal} \rightarrow M_{\max} = 0.171 bd^2 f_{ck} \quad (26)$$

$$\text{για } \rho_{lim} = 0.50\rho_{bal} \rightarrow M_{\max} = 0.123 bd^2 f_{ck} \quad (27)$$

$$\text{για } \rho_{lim}=0.25\rho_{bal} \rightarrow M_{max} = 0.066 b d^2 f_{ck} \quad (28)$$

Θα πρέπει να αναφέρουμε, ότι στις περιπτώσεις όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό, τοποθετείται πάντα και ο ελάχιστος θλιβόμενος οπλισμός, που σύμφωνα με τον ΕΚΩΣ 2000 αντιστοιχεί σε $2\Phi 12 (=2,26 \text{ cm}^4)$. Η παρουσία του είναι υποχρεωτική, αφού σε αυτόν στηρίζονται οι συνδετήρες για την παραλαβή της τέμνουσας δύναμης. Η συνεισφορά του στην αντοχή δεν λαμβάνεται υπόψη.

2.2. Βελτιστοποίηση του Κόστους σε Διατομές Ο.Σ. με Εφελκόμενο και Θλιβόμενο Οπλισμό



Σχήμα 6. Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις, ανηγμένες παραμορφώσεις και κατανομή τάσεων σε ορθογωνική διατομή από οπλισμένο σκυρόδεμα με διπλό οπλισμό, κατά την οριακή κατάσταση αστοχίας σε κάμψη (ΕΚΩΣ 2000).

Το συνολικό κόστος μιας ορθογωνικής διατομής οπλισμένου σκυροδέματος ανά μονάδα μήκους δοκού, θα είναι το άθροισμα των κοστών του χάλυβα και του σκυροδέματος, ή αλλιώς

$$\begin{aligned} C_{tot} &= C_c b(d+d_1) + C_s (A_s + A_s') = \\ &= C_c b d(1+\delta_1) + C_s (\rho b d + \rho' b d) = \\ &= C_c b d [(1+\delta_1) + q(\rho + \rho')] \end{aligned} \quad (29)$$

όπου C_c = το κόστος σκυροδέματος ανά μονάδα όγκου,

C_s = το κόστος χάλυβα οπλισμού ανά μονάδα όγκου,

$$q = \frac{C_s}{C_c} \text{ και } \delta_i = \frac{d_i}{d}$$

Στη σχέση (28) δεν συμπεριλαμβάνεται το κόστος του ξυλοτύπου.

Η σχέση (29) δίνει τη συνάρτηση κόστους την οποία στοχεύουμε να ελαχιστοποιήσουμε με τη μέθοδο Lagrange. Σε σύγκριση με την αντίστοιχη σχέση κόστους για μόνο εφελκόμενο οπλισμό [σχέση (4)], διαθέτει ένα ακόμη όρο που αφορά το κόστος του θλιβόμενου οπλισμού. Ως εκ τούτου διαθέτει μια παραπάνω άγνωστο, το γεωμετρικό ποσοστό θλιβόμενου οπλισμού ρ' ($\rho' = A_s' / bd$). Για την απλοποίηση της διαδικασίας βελτιστοποίησης **γίνεται η παραδοχή ότι ο εφελκόμενος οπλισμός ορίζεται σαν το άθροισμα του μέγιστου εφελκόμενου οπλισμού όταν μόνο αυτός οπλίζει τη διατομή και του θλιβόμενου**. Με άλλα λόγια,

$$\rho = \rho_{lim} + \rho' \quad (30)$$

όπου ρ είναι ο εφελκόμενος οπλισμός της διατομής, ρ_{lim} είναι το άνω όριο για όπλιση της διατομής μόνο με εφελκόμενο χάλυβα και ρ' το ποσοστό του θλιβόμενου οπλισμού. Με την παραπάνω παραδοχή επιτυγχάνεται η μείωση των αγνώστων προς βελτιστοποίηση. Η επίδραση της παραδοχής της σχέσης (30) θα μελετηθεί στο τέλος της παραγράφου. Το ποσοστό ρ_{lim} εξαρτάται από την απαιτούμενη πλαστιμότητα, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο (§ 2.1.1.). Στο σημείο αυτό ορίζεται η έννοια της "ισορροπημένης" διατομής για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό.

Η "ισορροπημένη" διατομή παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, σαν ένα θεωρητικό άνω όριο για την όπλιση μόνο με εφελκόμενο οπλισμό, ενώ ταυτόχρονα είναι η διατομή που φέρει τη μεγαλύτερη δυνατή ροπή χωρίς την παρουσία θλιβόμενου. Εάν οι απαιτήσεις για καμπτική αντοχή είναι ακόμη μεγαλύτερες, η λύση είναι ο διπλός οπλισμός [σχέση (30)]. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζεται ως "ισορροπημένη" διατομή εκείνη για την οποία ισχύει

$$\rho = \rho_{bal} + \rho' \quad (31)$$

Το ρ_{bal} είναι το μέγιστο ποσοστό μόνο εφελκόμενου οπλισμού, ενώ το ρ' είναι το ποσοστό θλιβόμενου που απαιτείται επιπλέον για τη λήψη των φορτίων. Συνεπώς, η "ισορροπημένη" διατομή, για γνωστές χαρακτηριστικές τάσεις σκυροδέματος και χάλυβα, δεν είναι μια, αλλά ένα σύνολο διατομών που διαφέρουν μόνο στην τιμή του ρ' . Η τιμή αυτή περιορίζεται μόνο από τα όρια που θέτει ο ΕΚΩΣ 2000 και ο Ευρωκώδικας 2 για το ρ (§ 2.1.1.).

Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (31) μπορεί να γραφεί:

$$\bar{\rho}_{bal} = \rho_{bal} + \rho' \quad (31a)$$

Η σχέση (31a) ορίζει το σύνολο των ισορροπημένων διατομών διπλού οπλισμού, οι οποίες αποτελούν μια θεωρητική περίπτωση σχεδιασμού, καθώς ο εφελκόμενος οπλισμός διαρρέει μόλις το σκυρόδεμα αστοχεί (μηδενική πλαστιμότητα). Ο σχεδιασμός γίνεται πάντα με βάση τη σχέση (30), όπου σαν ρ_{lim} μπορεί να επιλεγεί οποιοδήποτε ποσοστό του ρ_{bal} [π.χ. σχέσεις (20), (21) και (22)]. Με τη βοήθεια της

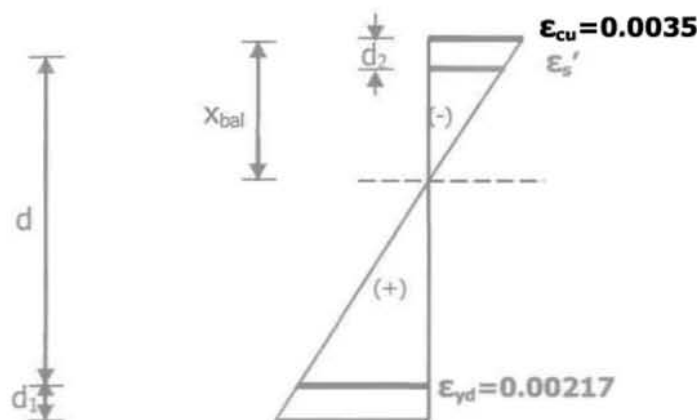
σχέσης (30), γίνεται μείωση των αγνώστων μεγεθών της συνάρτησης κόστους ως εξής,

$$\begin{aligned}
 C_{\text{tot}} &= C_c \, b d \left[(1 + \delta_1) + q(\rho + \rho') \right] = \\
 &= C_c \, b d \left[(1 + \delta_1) + q(\rho + (\rho - \rho_{\text{lim}})) \right] = \\
 &= C_c \, b d \left[(1 + \delta_1) + q(2\rho - \rho_{\text{lim}}) \right]
 \end{aligned} \tag{32}$$

Η επιλογή του ρ_{lim} στην περίπτωση του διπλού οπλισμού πρέπει να γίνεται εξ αρχής, όπως φαίνεται στη σχέση (32), αφού σε αυτό το όριο βασίζεται ο προσδιορισμός όλων των βελτιστοποιημένων μεγεθών της μεθόδου Lagrange. Η ίδια σχέση [σχέση (30)] χρησιμοποιείται και από τους B.Ceraníc και C.Fryer (Springer-Verlag 2000) με σκοπό την μείωση των αγνώστων της σχέσης κόστους για τον διπλό οπλισμό. Για να συνεχιστεί η επίλυση της μεθόδου, θεωρούμε ότι $\rho_{\text{lim}} = 0.75\rho_{\text{bal}}$ και με τη βοήθεια της σχέσης (20):

$$C_{\text{tot}} = C_c \, b d \left[(1 + \delta_1) + q \left(2\rho - 0.244 \frac{f_{\text{ck}}}{500} \right) \right] \tag{32a}$$

Η τιμή του ρ_{lim} μπορεί να είναι οποιαδήποτε τιμή ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του συστήματος σε πλαστιμότητα. Τα βελτιστοποιημένα μεγέθη που προκύπτουν αντιστοιχούν μόνο σε $\rho_{\text{lim}} = 0.75\rho_{\text{bal}}$. Σημειώνεται ότι οι σχέσεις (18a), (20), (21) και (22) αφορούν μόνο την περίπτωση χάλυβα S500. Για να συμπεριλαμβάνονται όλες οι περιπτώσεις f_{yk} , στη θέση της σχέσης (20) μπαίνει η σχέση (18) πολλαπλασιασμένη επί 0.75. Πριν διατυπωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας, πρέπει να εξετασθεί αν και ο θλιβόμενος οπλισμός διαρρέει και υπό ποιες προϋποθέσεις.



Σχήμα 7. Ανηγμένες παραμορφώσεις σε ορθογωνική "ισορροπημένη" διατομή με διπλό οπλισμό και χάλυβα S500.

Από αναλογία των τριγώνων που δημιουργούν οι παραμορφώσεις της ισορροπημένης διατομής του σχήματος 7, προκύπτει:

$$\frac{0.0035}{x_{bal}} = \frac{0.00217}{d-x_{bal}} = \frac{\epsilon_s'}{x_{bal}-d_2} = \frac{0.0035+0.00217}{d}$$

$$\text{ή } \epsilon_s' = \frac{0.00567}{d} (x_{bal}-d_2) = \frac{0.00567}{d} (0.617d-d_2) \quad (33)$$

Η παραμόρφωση του θλιβόμενου χάλυβα, ϵ_s' , δίδεται από τη σχέση (33) και εξαρτάται από την τιμή της απόστασης d_2 , η οποία μπορεί να εκφραστεί σαν ένα ποσοστό του στατικού ύψους d (όπως και το $d_1=\delta_1d$). Άρα, εάν το d_2 εκφραστεί σαν δ_2d και διερευνηθούν οι τιμές του δ_2 , μπορούν να διαχωριστούν οι περιοχές στις οποίες ο θλιβόμενος χάλυβας βρίσκεται πριν ή μετά τη διαρροή.

$$\epsilon_s' = \frac{0.00567}{d} (0.617d - \delta_2d) \quad (33a)$$

- Εάν $\delta_2 < 0.23$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός στην ισορροπημένη διατομή έχει διαρρεύσει πριν την αστοχία του σκυροδέματος
- Εάν $\delta_2 = 0.23$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός στην ισορροπημένη διατομή διαρρέει ταυτόχρονα με την διαρροή του εφελκόμενου και την αστοχία του σκυροδέματος.
- Εάν $\delta_2 > 0.23$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός δεν προλαβαίνει να διαρρεύσει πριν την αστοχία του σκυροδέματος

Πρακτικά, για μια διατομή, η τιμή $d_2=0.23d$ είναι πολύ μεγάλη. Άρα, για την περίπτωση της ισορροπημένης διατομής ο θλιβόμενος οπλισμός πάντα διαρρέει, εφόσον ικανοποιείται πάντα η σχέση

$$d_2 \leq 0.23d \quad (34)$$

Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, ο σχεδιασμός δεν γίνεται ποτέ στην ισορροπημένη διατομή. Για την κάθε περίπτωση διατομής με εφελκόμενο οπλισμό σε ποσοστό $\rho = \rho_{lim} + \rho' = v \cdot \rho_{bal} + \rho'$, με $v < 1$, η κατανομή των παραμορφώσεων είναι διαφορετική.

Για $v=0.75$ το οποίο χρησιμοποιήσαμε στην εξίσωση του κόστους για να προσδιορίσουμε τα βελτιστοποιημένα μεγέθη ισχύει: η διαρροή του εφελκόμενου χάλυβα, εφόσον το ποσοστό ρ_{lim} είναι μικρότερο αυτού της ισορροπημένης διατομής, συμβαίνει νωρίτερα από την αστοχία του σκυροδέματος.

Από αναλογία των τριγώνων που δημιουργούν οι παραμορφώσεις και με τη βοήθεια της σχέσης (20),

$$\frac{0.0035}{0.75x_{bal}} = \frac{\epsilon_s}{d-0.75x_{bal}} = \frac{\epsilon_s'}{0.75x_{bal}-d_2} = \frac{\epsilon_s + \epsilon_s'}{d}$$

Άρα

$$\epsilon_s = \frac{0.0035}{0.75 \cdot 0.617d} (d-0.75 \times 0.617d) = 0.004 > \epsilon_{yd} = 0.00217$$

$$\text{και } \epsilon_s' = \frac{0.0035}{0.75 \cdot 0.617d} (0.75 \cdot 0.617d - d_2) = \frac{0.0035}{0.463d} (0.463d - \delta_2 d) \quad (35)$$

- Εάν $\delta_2 < 0.176$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός στην ισορροπημένη διατομή έχει διαρρεύσει πριν την αστοχία του σκυροδέματος
- Εάν $\delta_2 = 0.176$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός στην ισορροπημένη διατομή διαρρέει ταυτόχρονα με την διαρροή του εφελκυσμένου και την αστοχία του σκυροδέματος.
- Εάν $\delta_2 > 0.176$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός δεν προλαβαίνει να διαρρεύσει πριν την αστοχία του σκυροδέματος.

Η τιμή $d_2 = 0.176d$ είναι επίσης μεγάλη για μια πραγματική διατομή. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο θλιβόμενος οπλισμός διαρρέει, αρκεί να ικανοποιείται πάντα ο περιορισμός

$$\mathbf{d_2 \leq 0.176d} \quad (36)$$

Όσο πιο μικρό είναι το ρ_{lim} σε σχέση με την ισορροπημένη διατομή, τόσο πιο δύσκολη είναι η διαρροή του θλιβόμενου οπλισμού. Με την ίδια λογική μπορεί να προκύψει για κάθε $\nu \rho_{bal}$, με $\nu < 1$, μια σχέση η οποία θα πρέπει να ικανοποιείται ώστε να διαρρέει ο θλιβόμενος οπλισμός:

$$\Rightarrow \text{Για } \rho_{lim} = 0.50\rho_{bal}, \text{ θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση } \mathbf{d_2 \leq 0.117d} \quad (37)$$

$$\Rightarrow \text{Για } \rho_{lim} = 0.25\rho_{bal}, \text{ θα πρέπει να ικανοποιείται η σχέση } \mathbf{d_2 \leq 0.059d} \quad (38)$$

Η ισορροπία των δυνάμεων βασίζεται στο Σχήμα 4, όπως αυτό δίδεται από τον ΕΚΩΣ 2000. Ο Ευρωκώδικας 2 συμφωνεί πλήρως με την κατανομή των τάσεων και παραμορφώσεων που δίνει ο ΕΚΩΣ 2000. Η ισορροπία των εσωτερικών δυνάμεων σε

ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος με διπλό οπλισμό, για την περίπτωση αστοχίας σε καθαρή κάμψη ($N=0$) και χάλυβα S500, εφόσον ο θλιβόμενος οπλισμός διαρρέει [συνθήκη σχέσης (36)], έχει ως εξής:

$$F_c + F_s' = F_s$$

$$\text{ή } F_c = F_s - F_s'$$

$$0.688 b x_u f_{cd} = (A_s - A_s') f_{yd}$$

Άρα

$$0.688 b x_u \frac{f_{ck}}{1.5} = (\rho - \rho') b d \frac{f_{yk}}{1.15}$$

ή

$$x_u = \frac{1.896 \rho_{\max} d f_{yk}}{f_{ck}} = 1.896 d \frac{500}{f_{ck}} 0.244 \frac{f_{ck}}{500} = 0.463 d (=0.75 x_{bal}) \quad (39)$$

Η ισορροπία των εσωτερικών και εξωτερικών ροπών κάμψης για αστοχία σε ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος με διπλό οπλισμό (καθαρή κάμψη), εφόσον ο θλιβόμενος οπλισμός διαρρέει [συνθήκη σχέσης (36)], έχει ως εξής:

$$M_d = F_s' (d - d_2) + F_c (d - 0.416 x_u) = \rho' b d f_{yd} d (1 - \delta_2) + 0.688 b x_u f_{cd} (d - 0.416 x_u) =$$

$$= \rho' b d^2 \frac{f_{yk}}{1.15} (1 - \delta_2) + 0.688 b 0.463 d \frac{f_{ck}}{1.5} (d - 0.193 d)$$

$$\text{ή } M_d = 0.87 \rho' b d^2 f_{yk} (1 - \delta_2) + 0.1714 b d^2 f_{ck} =$$

$$= 0.87 (\rho - 0.244 \frac{f_{ck}}{500}) b d^2 f_{yk} (1 - \delta_2) + 0.1714 b d^2 f_{ck} \quad (40)$$

Η σχέση (40) είναι ο περιορισμός για τη σχέση κόστους (32a). Ο ίδιος περιορισμός για τη συνάρτηση κόστους χρησιμοποιήθηκε από τους B.Ceranic και C.Fryer προσαρμοσμένος στις διατάξεις του BS 8110.

Έτσι, εάν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (32α) και (40), θα προκύψει η συνάρτηση Lagrange για την περίπτωση ορθογωνικών διατομών με διπλό οπλισμό:

$$L = b \left\{ \left[C_c \mathbf{d} \left((1 + \delta_1) + q \left(2\rho - \frac{0.244}{n_f} \right) \right) \right] + \right. \\ \left. + \lambda \cdot \left[(0.87\rho n_f - 0.212) \mathbf{d}^2 f_{ck} (1 - \delta_2) + 0,171 \mathbf{d}^2 f_{ck} - M_d \right] \right\} \quad (41)$$

όπου $n_f = 500/f_{ck}$, με f_{ck} σε MPa

Για τη σχέση (41) ισχύουν οι ίδιες παραδοχές που ισχύουν για την αντίστοιχη σχέση Lagrange διατομής με μόνο εφελκόμενο οπλισμό:

- οι λόγοι $\delta_1 = \frac{d_1}{d}$ και $\delta_2 = \frac{d_2}{d}$, θεωρούνται σταθερές τιμές
- η ροπή κάμψης (M_d) είναι δεδομένη ποσότητα
- και τέλος δεν υπάρχει αξονική δύναμη (N) που να ασκείται στη διατομή.

Παρατήρηση: Το πλάτος b της διατομής, όπως και στην περίπτωση διατομών με μόνο εφελκόμενο οπλισμό, είναι κοινός παράγων των δύο όρων του αθροίσματος που υπάρχει στη συνάρτηση Lagrange (41). Λόγω της απαλοιφής του στην επίλυση της μεθόδου Lagrange, καθίσταται αδύνατη η βελτιστοποίηση του. Ως εκ τούτου, η τιμή του επιλέγεται για τον προσδιορισμό του βέλτιστου ύψους της διατομής και θεωρείται σταθερή.

Επίλυση

Από τις σχέσεις (2) και (41) παραγωγίζοντας ως προς ρ και d προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = b \left\{ 2C_c q d + \lambda \left[0.87 n_f d^2 f_{ck} (1 - \delta_2) \right] \right\} = 0$$

$$\text{ή } 2C_c q d + \lambda \left[0.87 n_f d^2 f_{ck} (1 - \delta_2) \right] = 0 \quad (42)$$

και

$$\frac{\partial L}{\partial d} = b \left\{ C_c \left[(1 + \delta_1) + q \left(2\rho - \frac{0.244}{n_f} \right) \right] + \right. \\ \left. + \lambda \left[2(0.87\rho n_f - 0.212) d f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.342 d f_{ck} \right] \right\} = 0$$

$$\dot{\eta} \quad C_c \left[(1 + \delta_1) + q \left(2\rho - \frac{0.244}{n_f} \right) \right] + \\ + \lambda \left[2(0.87\rho n_f - 0.212) d f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.342 d f_{ck} \right] = 0 \quad (43)$$

Από τις σχέσεις (3) και (41) προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \left[(0.87\rho n_f - 0.212) b d^2 f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.171 b d^2 f_{ck} - M_d \right] = 0$$

$$\dot{\eta} \quad M_d = (0.87\rho n_f - 0.212) b d^2 f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.171 b d^2 f_{ck} \quad (44)$$

Με βάση τις σχέσεις (42) και (43) αντίστοιχα, καταλήγουμε στην τιμή του λ:

$$\lambda = \frac{-2C_c q d}{0.87 n_f d^2 f_{ck} (1 - \delta_2)} \quad (42a)$$

και

$$\lambda = \frac{-C_c \left[(1 + \delta_1) + q \left(2\rho - \frac{0.244}{n_f} \right) \right]}{2(0.87\rho n_f - 0.212) d f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.342 d f_{ck}} \quad (43a)$$

Αν εξισώσουμε τις δυο σχέσεις απλοποιούνται τα εξής μεγέθη: το κόστος της μονάδας σκυροδέματος C_c ως κοινός παράγοντας των δυο αριθμητών, όπως επίσης το στατικό ύψος d και η χαρακτηριστική τάση διαρροής του χάλυβα οπλισμού f_{yk} , ως κοινοί παράγοντες των δυο παρονομαστών. Επομένως:

$$\frac{2q}{0.87 n_f (1 - \delta_2)} = \frac{(1 + \delta_1) + q \left(2\rho - \frac{0.244}{n_f} \right)}{2(0.87\rho n_f - 0.212)(1 - \delta_2) + 0.342}$$

$$\begin{aligned} \eta & 4q(0.87\rho n_f - 0.212)(1 - \delta_2) + 0.684q = \\ & = 0.87n_f(1 - \delta_2)(1 + \delta_1) + 0.87n_f(1 - \delta_2)q\left(2\rho - \frac{0.244}{n_f}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta & 3.48q\rho n_f(1 - \delta_2) - 0.848q(1 - \delta_2) + 0.684q = \\ & = 0.87n_f(1 - \delta_2)(1 + \delta_1) + 1.74q\rho n_f(1 - \delta_2) - 0.212q(1 - \delta_2) \end{aligned} \quad (45)$$

Αν λύσουμε τη σχέση (44) ως προς ρ προκύπτει:

$$\rho = \frac{1 + \delta_1}{2q} - \frac{0.394}{n_f(1 - \delta_2)} + \frac{0.366}{n_f} = \frac{1 + \delta_1}{2q} - \frac{0.366\delta_2 + 0.028}{n_f(1 - \delta_2)} \quad (45a)$$

Το ποσοστό ρ που ορίζεται στη σχέση (45a) είναι το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού μιας ορθογωνικής διατομής με εφελκόμενο και θλιβόμενο οπλισμό, για υλικά δεδομένων χαρακτηριστικών τάσεων (χάλυβας και σκυρόδεμα) και δεδομένα κόστη,

$$\rho_{opt} = \frac{1 + \delta_1}{2q} - \frac{0.366\delta_2 + 0.028}{n_f(1 - \delta_2)}, \quad (45\beta)$$

$$\text{όπου } q = \frac{C_s}{C_c}, \quad n_f = \frac{500}{f_{ck}} \quad (f_{ck} \text{ σε MPa}), \quad \delta_1 = \frac{d_1}{d} \text{ και } \delta_2 = \frac{d_2}{d}.$$

Η σχέση (45β) έχει την ίδια μορφή με την αντίστοιχη σχέση στην οποία κατέληξαν οι B.Ceranic και C.Fryer με την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange βάσει BS 8110 (Springer-Verlag 2000). Στην σχέση αυτή υπάρχουν τα μεγέθη δ_1 και δ_2 , οι τιμές των οποίων διαφέρουν ελάχιστα στην πραγματικότητα. Στην παρούσα εργασία θεωρείται ότι $\delta_1 = \delta_2$. Για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση πλαστιμότητας, όπου $\rho_{lim} = \nu\rho_{bal}$, χρειάζεται να επαναλάβουμε από την αρχή τα βήματα της διαδικασίας που ακολουθήθηκε στην παράγραφο αυτή, με το νέο όριο ρ_{lim} .

Ενδεικτικά:

- Για $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ προκύπτει, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η σχέση $d_2 \leq 0.23d$,

$$\rho_{opt} = \frac{1 + \delta_1}{2q} - \frac{0.483}{n_f(1 - \delta_2)} + \frac{0.488}{n_f} = \frac{1 + \delta_1}{2q} - \frac{0.488\delta_2 - 0.005}{n_f(1 - \delta_2)} \quad (46)$$

- Για $\rho_{lim}=0.50\rho_{bal}$ προκύπτει, με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση $d_2 \leq 0.117d$,

$$\rho_{opt} = \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.283}{n_f(1-\delta_2)} + \frac{0.244}{n_f} = \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.244\delta_2+0.039}{n_f(1-\delta_2)} \quad (47)$$

- Για $\rho_{lim}=0.25\rho_{bal}$ τότε, με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση $d_2 \leq 0.059d$,

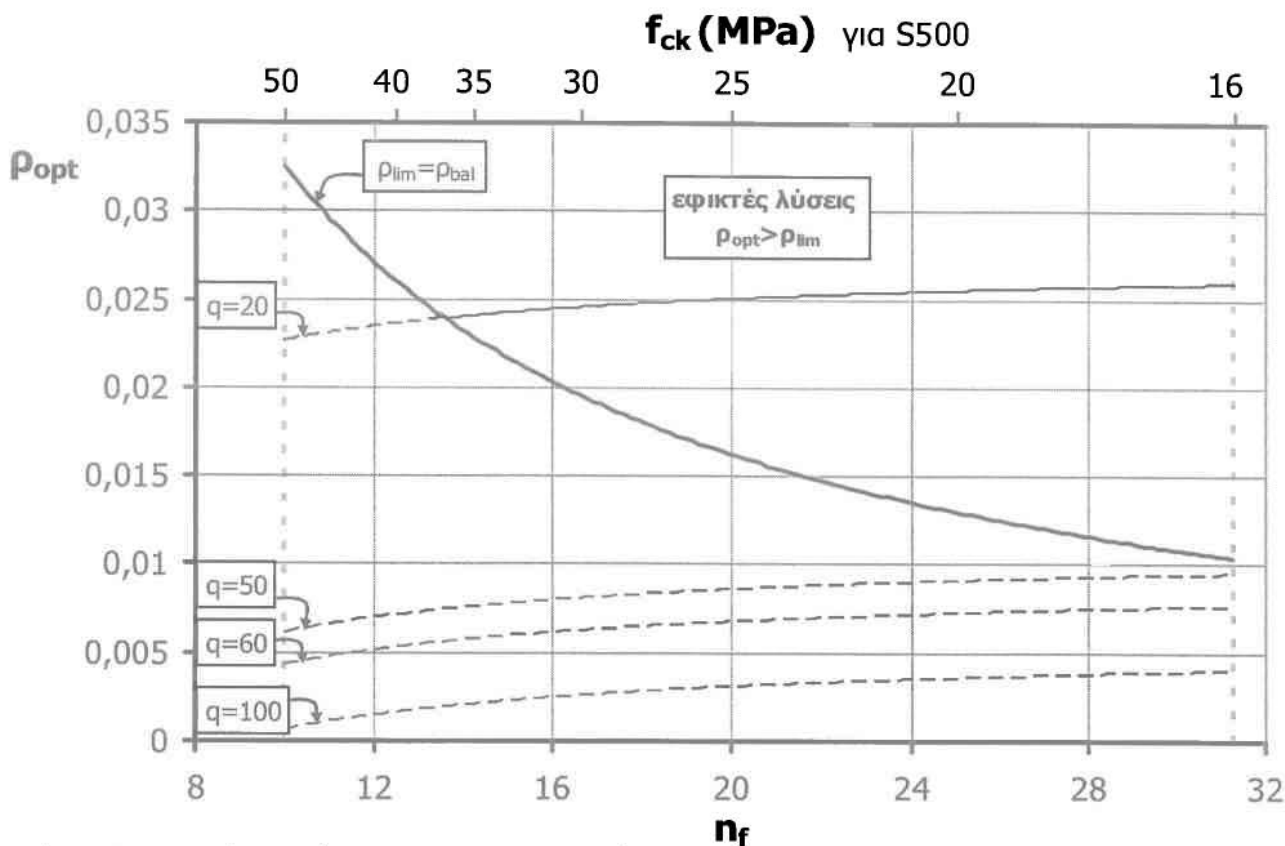
$$\rho_{opt} = \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.152}{n_f(1-\delta_2)} + \frac{0.122}{n_f} = \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.122\delta_2+0.03}{n_f(1-\delta_2)} \quad (48)$$

Ανάλογα με την τιμή του d_2 , ο θλιβόμενος οπλισμός άλλοτε διαρρέει και άλλοτε όχι. Για τις περιπτώσεις όπου το ρ_{lim} είναι ίσο με το ρ_{bal} ή $0.75\rho_{bal}$ ή $0.50\rho_{bal}$ Ωστόσο, επειδή η σχέση (48) περιορίζεται σημαντικά λόγω της σχέσης $d_2 \leq 0.059d$, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής ώστε να περιλαμβάνει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει το d_2 :

$$\rho_{opt} = \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.152}{n_f(1-\delta_2)} \frac{f_{yk}'}{f_s'} + \frac{0.122}{n_f}$$

$$\text{ή } \rho_{opt} = \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.132}{n_f(1-\delta_2)} \frac{f_{yk}'}{f_{sd}'} + \frac{0.122}{n_f}, \text{ για κάθε τιμή του } d_2 \quad (48a)$$

Παρατήρηση: Στις σχέσεις (45a)-(48), οι οποίες δίνουν το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού ρ_{opt} για διαφορετικό άνω όριο εφελκόμενου οπλισμού, ο όρος $(1+\delta_1)/2q$ είναι κοινός. Με δεδομένο ότι η απόσταση d_2 είναι τέτοια ώστε ο θλιβόμενος χάλυβας να διαρρέει, ο δεύτερος όρος των σχέσεων, που αφαιρείται από τον κοινό όρο, είναι μια μικρή ποσότητα. Συνεπώς το βέλτιστο ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού είναι πρακτικά σταθερό και εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από το σχετικό κόστος των υλικών και όχι από την χαρακτηριστική τους τάση. Στην περίπτωση που ο θλιβόμενος οπλισμός δεν διαρρέει η επιρροή του δεύτερου όρου των σχέσεων ρ_{opt} είναι μεγαλύτερη. Όσο πιο μακριά από τη διαρροή βρίσκεται ο θλιβόμενος χάλυβας τόσο πιο μεγάλη επιρροή έχει ο όρος αυτός ή αλλιώς τόσο περισσότερη βαρύτητα στο αποτέλεσμα έχουν οι τάσεις των υλικών. Στο Σχήμα 8 απεικονίζεται η συμπεριφορά του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού, για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό, όταν $\rho_{lim}=\rho_{bal}$ [σχέση (46)]. Όσο χαμηλότερη τιμή έχει το σχετικό κόστος του χάλυβα οπλισμού προς το σκυρόδεμα, τόσο η βέλτιστη οικονομικά λύση τείνει να είναι στη μεριά του διπλού οπλισμού. Όταν το σχετικό κόστος είναι χαμηλό σημαίνει ότι ο χάλυβας είναι κοντά σε κόστος με το σκυρόδεμα. Συνεπώς συμφέρει οικονομικά να αυξηθεί το ποσοστό του και να μπει διπλός οπλισμός προκαλώντας μείωση στην άγνωστη διάσταση της διατομής.



Σχήμα 8. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} με $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ -διπλός οπλισμός ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Πράγματι, στο σχήμα 8 οι καμπύλες των λύσεων βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφέλυκτου οπλισμού για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό, τείνουν να είναι σχεδόν σταθερές για τις διάφορες τιμές σχετικού κόστους q . Συνεπώς, επιβεβαιώνεται το συμπέρασμα που προκύπτει ήδη από τις σχέσεις που ορίζουν το ρ_{opt} για τον διπλό οπλισμό [(45α)-(48)], ότι ο βέλτιστος οπλισμός είναι σχεδόν ανεξάρτητος των χαρακτηριστικών τάσεων των υλικών (βλ. Πίνακα 3) και αφού οι σχέσεις ισχύουν για χάλυβα S500, το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού είναι ανεξάρτητο από την αντοχή του σκυροδέματος που θα χρησιμοποιηθεί (με την προϋπόθεση ότι η απόσταση d_2 είναι τέτοια ώστε ο θλιβόμενος οπλισμός να διαρρέει).

Εφαρμογή

Έστω ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος διαστάσεων $b \times h$, η οποία εκτίθεται σε καμπτική φόρτιση και σχεδιάζεται έτσι ώστε να έχει το ελάχιστο κόστος, με $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$. Για $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$ από τη σχέση (45β) προκύπτει:

$$\rho_{opt} = \frac{1 + 0.10}{2q} - \frac{0.366 \cdot 0.10 + 0.028}{0.90n_f} = \frac{1.10}{2q} - \frac{0.072}{n_f} \quad (45\gamma)$$

όπου $\eta_f = \frac{500}{f_{ck}}$, με f_{ck} σε MPa

Στον Πίνακα 3, εξετάζεται η επιρροή των δυο όρων του αθροίσματος της σχέσης (45β) στην τελική τιμή του βέλτιστου ποσοστού ρ_{opt} , όταν το σχετικό κόστος του χάλυβα και του σκυροδέματος είναι ίσο με 20 και μεταβάλλεται η αντοχή του σκυροδέματος.

Πίνακας 3. Τιμές βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκυσμένου οπλισμού ρ_{opt} με $q=20$, $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -διπλός οπλισμός ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

q	f_{ck}	η_f	$\frac{1+\delta_1}{2q}$	$-\frac{0.072}{\eta_f}$	ρ_{opt}
20	16	31,25	0,0275	-0,0023	0,0252
	20	25,00	0,0275	-0,0029	0,0246
	25	20,00	0,0275	-0,0036	0,0239
	30	16,67	0,0275	-0,0043	0,0232
	35	14,29	0,0275	-0,0050	0,0225
	40	12,50	0,0275	-0,0058	0,0217

Το γεγονός ότι το βέλτιστο ποσοστό εφελκυσμένου οπλισμού ρ_{opt} για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό είναι ανεπηρέαστο από τη μεταβολή της αντοχής του σκυροδέματος επεξηγείται στον Πίνακα 3. Οι δυο όροι που όταν προστεθούν δίνουν το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού, δεν έχουν την ίδια βαρύτητα. Ο όρος $(1+\delta_1)/2q$ για ένα δεδομένο q δίνει μια σταθερή ποσότητα, ενώ ο όρος $-0.072/\eta_f$ για μεταβολή της αντοχής σκυροδέματος δίνει αντίστοιχα μεταβαλλόμενες τιμές. Η διαφορά στους δυο όρους εντοπίζεται στην τάξη μεγέθους των τιμών τους. Ο δεύτερος όρος δίνει τιμές πολύ μικρότερες του πρώτου. Συνεπώς, ο πρώτος όρος είναι αυτός που καθορίζει το αποτέλεσμα.

Με τα ίδια δεδομένα της εφαρμογής, για τα υπόλοιπα ρ_{lim} προκύπτει:

Για $\rho_{lim}=\rho_{bal}$, $q=20$ και $\delta_1=\delta_2=0.10$ ισχύει,

$$\rho_{opt} = 0.0275 - \frac{0.049}{\eta_f} \quad (46a)$$

Για $\rho_{lim}=0.50\rho_{bal}$, $q=20$ και $\delta_1=\delta_2=0.10$ ισχύει,

$$\rho_{opt} = 0.0275 - \frac{0.0704}{\eta_f} \quad (47a)$$

Για $\rho_{lim}=0.25\rho_{bal}$, $q=20$ και $\delta_1=\delta_2=0.10$ ισχύει,

$$\begin{aligned} \rho_{opt} &= \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.152}{n_f(1-\delta_2)} \frac{f_{yk}}{\epsilon_s E} + \frac{0.122}{n_f} = \\ &= 0.0275 - \frac{0.152}{0.90n_f} \frac{500}{0.00123 \cdot 200000} + \frac{0.122}{n_f} = 0.0275 - \frac{0.221}{n_f} \end{aligned} \quad (48\beta)$$

$$\text{όπου } n_f = \frac{500}{f_{ck}}$$

Από τη σχέση (48β) γίνεται προφανές ότι όταν ο θλιβόμενος οπλισμός δεν διαρρέει τότε η επιρροή του δεύτερου όρου του αθροίσματος ρ_{opt} , ο οποίος περιέχει την αντοχή του σκυροδέματος, γίνεται πολύ μεγάλη. Για την περίπτωση $\rho_{lim}=0.25\rho_{bal}$ η τιμή $\delta_2=0.10$, δεν επιτρέπει την διαρροή του θλιβόμενου χάλυβα με αποτέλεσμα ο δεύτερος όρος να παίζει καθοριστικό ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα, δίνοντας τιμές ίδιας τάξης μεγέθους με τον πρώτο όρο.

Από τη σχέση (44) εκφράζουμε τη ροπή κάμψης M_d συναρτήσει του γεωμετρικού ποσοστού εφελκυσμένου οπλισμού ρ , με την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η συνθήκη της σχέσης (36), $d_2 \leq 0.176d$:

$$M_d = (0.87\rho n_f - 0.212) b d^2 f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.171 b d^2 f_{ck}$$

$$\text{ή } d = \sqrt{\frac{M_d}{(0.87\rho n_f - 0.212) b f_{ck} (1 - \delta_2) + 0.171 b f_{ck}}}$$

Μετά από πράξεις στον παρονομαστή προκύπτει:

$$= \sqrt{\frac{M_c}{[(0.87\rho n_f - 0.212)(1 - \delta_2) + 0.171] b f_{ck}}} \quad \text{και} \quad (49)$$

$$b = \frac{M_c}{[0.87\rho n_f (1 - \delta_2) + 0.212\delta_2 - 0.041] d^2 f_{ck}} \quad (50)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συμβαδίζουν απόλυτα με τις αντίστοιχες στις οποίες κατέληξαν B.Ceranic και C.Fryer με την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange στη

βελτιστοποίηση βάσει BS 8110 (Springer-Verlag 2000). Άρα για δεδομένη ροπή κάμψης (M_d) και πλάτος ορθογωνικής διατομής (b), το βέλτιστο στατικό ύψος της διατομής που οπλίζεται με διπλό οπλισμό, με εφελκούμενο σε ποσοστό ρ_{opt} και θλιβόμενο σε ποσοστό $\rho' = \rho_{opt} - \rho_{max}$, είναι:

$$d_{opt} = \sqrt{\frac{M_d}{[0.87\rho_{opt} n_f (1-\delta_2) + 0.212\delta_2 - 0.041] b f_{ck}}} \quad \text{και} \quad (49a)$$

το βέλτιστο πλάτος της διατομής b_{opt} , για δεδομένα M_d και d ή h είναι:

$$b_{opt} = \frac{M_d}{[0.87\rho_{opt} n_f (1-\delta_2) + 0.212\delta_2 - 0.041] d^2 f_{ck}} \quad (50a)$$

Αντίστοιχες σχέσεις για τη ροπή κάμψης και το βέλτιστο στατικό ύψος της διατομής μπορούν να διατυπωθούν και για διαφορετικά άνω όρια μόνο εφελκούμενου οπλισμού. Ενδεικτικά:

- Για $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ προκύπτει, με την προϋπόθεση ότι ικανοποιείται η σχέση $d_2 \leq 0.23d$,

$$M_d = (0.87\rho n_f - 0.283) b d^2 f_{ck} (1-\delta_2) + 0.210 b d^2 f_{ck} \quad (51)$$

$$\text{ή} \quad d = \sqrt{\frac{M_d}{(0.87\rho n_f - 0.283) b f_{ck} (1-\delta_2) + 0.210 b f_{ck}}} \quad (51a)$$

- Για $\rho_{lim} = 0.50\rho_{bal}$ προκύπτει, με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση $d_2 \leq 0.117d$,

$$M_d = (0.87\rho n_f - 0.141) b d^2 f_{ck} (1-\delta_2) + 0.123 b d^2 f_{ck} \quad (52)$$

$$\text{ή} \quad d = \sqrt{\frac{M_d}{(0.87\rho n_f - 0.141) b f_{ck} (1-\delta_2) + 0.123 b f_{ck}}} \quad (52a)$$

- Για $\rho_{lim} = 0.25\rho_{bal}$ προκύπτει, με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση $d_2 \leq 0.059d$

$$M_d = (0.87\rho n_f - 0.071)bd^2f_{ck}(1-\delta_2) + 0.066bd^2f_{ck} \quad (53)$$

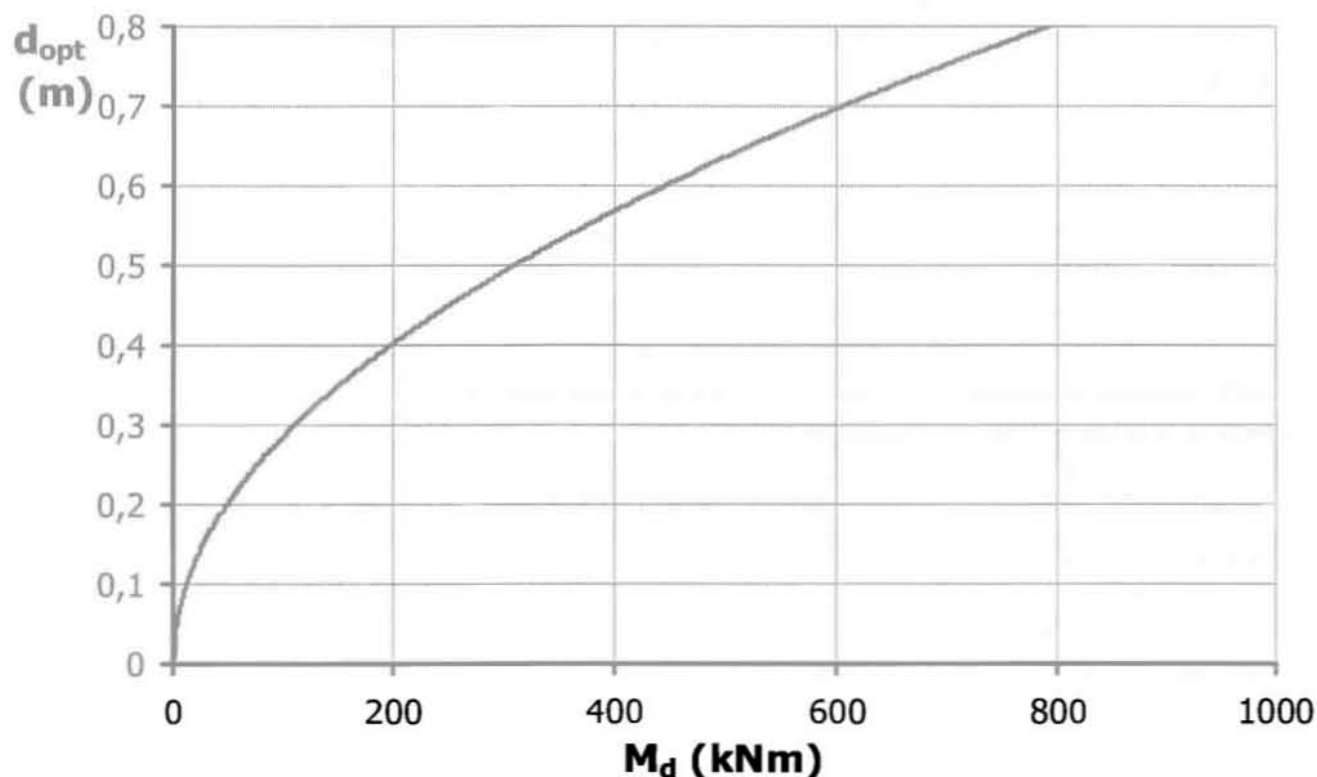
$$\eta \quad d = \sqrt{\frac{M_c}{(0.87\rho n_f - 0.071)bf_{ck}(1-\delta_2) + 0.066bf_{ck}}} \quad (53a)$$

Στην περίπτωση όπου $d_2 > 0.059d$, τότε ο θλιβόμενος οπλισμός δεν διαρρέει και ισχύει η σχέση:

$$d = \sqrt{\frac{M_c}{(0.87\rho n_f - 0.071)bf_{ck} \frac{f_s'}{f_{yk}} (1-\delta_2) + 0.066bf_{ck}}} \quad (53\beta)$$

όπου f_s' η τάση του θλιβόμενου χάλυβα οπλισμού.

Η σχέση μεταξύ του βέλτιστου στατικού ύψους της διατομής, d_{opt} , για διπλό οπλισμό, με τη ροπή κάμψης M_d , απεικονίζεται στο Σχήμα 9. Η καμπύλη βασίζεται στη σχέση (49a) ενώ το εύρος των τιμών της ροπής κάμψης είναι τυχαίο.



Σχήμα 9. Καμπύλη βέλτιστου στατικού ύψους διατομής d_{opt} για $f_{ck}=16$ MPa, $q=50$, $b=0.4$ m και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -διπλός οπλισμός ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Με βάση τα παραπάνω είναι δυνατόν να οριστεί η γνωστή σχέση που συνδέει το βέλτιστο μηχανικό ποσοστό οπλισμού ω_{opt} , με τη βέλτιστη ανηγμένη ροπή κάμψης μ_{opt} που μπορεί να φέρει μια ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος, για δεδομένες τιμές της ροπής κάμψης σχεδιασμού M_d και του πλάτους της διατομής b (ΕΚΩΣ 2000), για διπλό οπλισμό όταν $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ [σχέση (49a)]:

$$\mu_{opt} = \frac{M_d}{bd_{opt}^2 f_{cd}} = 1.304\rho_{opt} n_f (1-\delta_2) + 0.318\delta_2 - 0.061$$

$$\eta \quad \mu_{opt} = \omega_{opt} (1-\delta_2) + 0.318\delta_2 - 0.061 \quad (54)$$

$$\text{όπου} \quad \omega_{opt} = \rho_{opt} \frac{f_{yd}}{f_{cd}} = 1.304\rho_{opt} n_f = 1.304\rho_{opt} \frac{500}{f_{ck}}$$

Όμοιες σχέσεις με την (54) μπορούν να διατυπωθούν για όλα τα ρ_{lim} που αναλύθηκαν προηγουμένως αλλά και για τα ενδιάμεσα αυτών.

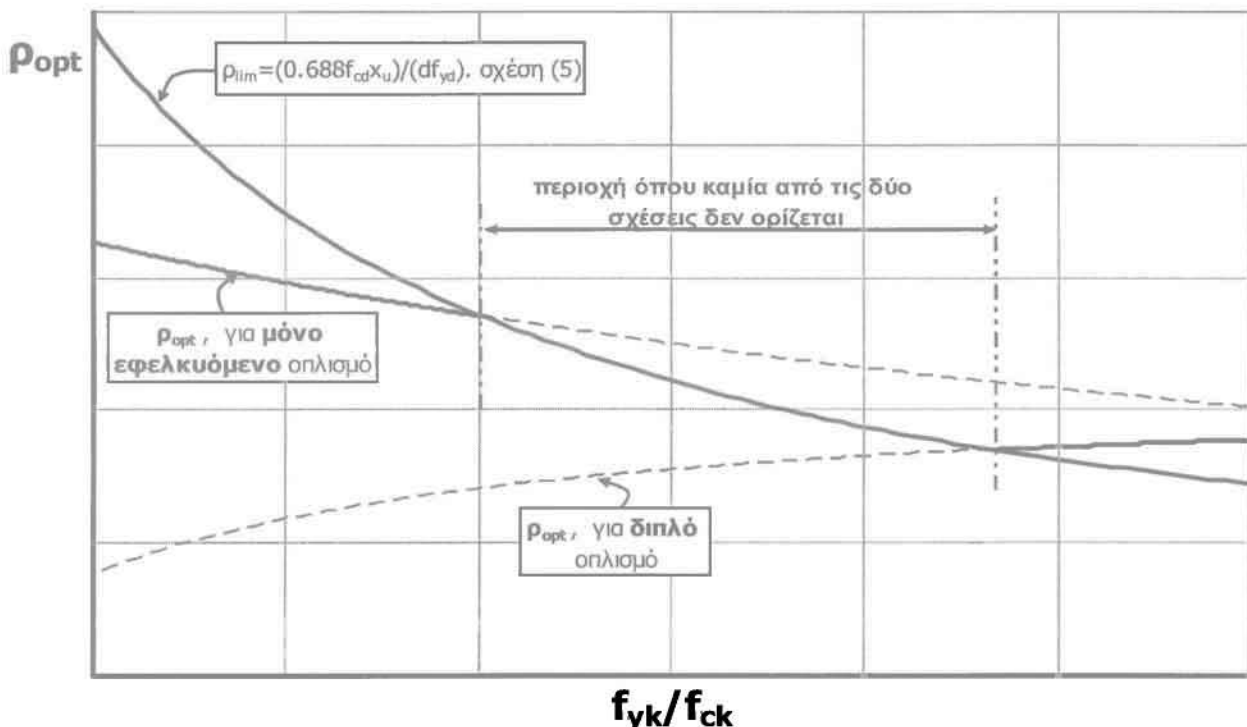
Συγκεντρώνοντας τις βέλτιστες λύσεις για όλες τις περιπτώσεις όπλισης, προκύπτει ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα. Για κάθε τιμή σχετικού κόστους χάλυβα και σκυροδέματος και για κάθε αντοχή σκυροδέματος (με δεδομένη ποιότητα χάλυβα), έχουμε μια βέλτιστη τιμή γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} . Η τιμή αυτή μπορεί να αντιστοιχεί σε μόνο εφελκόμενο οπλισμό ή σε διπλό οπλισμό. Η λύση του διπλού οπλισμού προϋποθέτει ότι ο μέγιστος εφελκόμενος οπλισμός δεν είναι αρκετός για την παραλαβή των εξωτερικών φορτίων ορθής έντασης, οπότε και προστίθεται ποσοστό ρ' , τόσο στην εφελκόμενη περιοχή όσο και στην θλιβόμενη. Με βάση τη σχέση που ορίζει τον συνολικά εφελκόμενο οπλισμό στην περίπτωση όπλισης με διπλό, $\rho = \rho_{lim} + \rho'$, δημιουργείται ένας **βασικός περιορισμός στις βέλτιστες λύσεις**: για να ορίζεται το ποσοστό ρ' , θα πρέπει το συνολικό ποσοστό εφελκόμενου ρ [σχέση (45a)-(48)] να είναι μεγαλύτερο του ρ_{lim} . Ειδάλλως, η σχέση $\rho' = \rho - \rho_{lim}$, δίνει αρνητικό αποτέλεσμα. Στις περιπτώσεις του διπλού οπλισμού, όπου οι λύσεις ρ είναι μικρότερες από το ρ_{lim} , ή αλλιώς όπου το ρ' είναι αρνητικό, η βέλτιστη λύση παραπέμπεται στο αμέσως επόμενο εφικτό ποσοστό, το οποίο είναι το μέγιστο ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού ρ_{lim} για τη δεδομένη αντοχή σκυροδέματος [σχέσεις (18a), (20), (21) και (22)]. Συνεπώς, για ένα εύρος αντοχών και σχετικών κοστών σκυροδέματος και χάλυβα διακρίνουμε **τρεις περιοχές βέλτιστων λύσεων**: α) την περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι ο μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\rho_{opt} < \rho_{lim}$), β) την περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι ο μέγιστος εφελκόμενος οπλισμός ($\rho_{opt} = \rho_{lim}$) και γ) την περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι ο διπλός οπλισμός ($\rho_{opt} > \rho_{lim}$). Για παράδειγμα, για την περίπτωση που το άνω όριο είναι $\rho_{lim} = 0.75 \rho_{bal}$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\rho_{opt} = \frac{1}{\frac{\eta}{1.10} + 1.578n_f}, \text{ για } \rho_{opt} < \rho_{lim} \quad (\text{μόνο εφελκούμενος οπλισμός})$$

και

$$\rho_{opt} = \frac{1.10}{2q} - \frac{0.394}{0.90n_f} + \frac{0.366}{n_f}, \text{ για } \rho_{opt} > \rho_{lim} \quad (\text{διπλός οπλισμός})$$

Η περιοχή στην οποία η βέλτιστη λύση είναι ο μόνο εφελκούμενος οπλισμός ορίζεται από την πρώτη σχέση, όπου $\rho_{opt} < \rho_{lim}$. Η δεύτερη σχέση δίνει βέλτιστες λύσεις διπλού οπλισμού με $\rho_{opt} > \rho_{lim}$. Στην περίπτωση όπου η πρώτη σχέση δίνει τιμή βέλτιστης λύσης μεγαλύτερη του ρ_{lim} και η δεύτερη σχέση για τα ίδια δεδομένα δίνει βέλτιστη λύση μικρότερη του ρ_{lim} , τότε φαινομενικά δεν υπάρχει βέλτιστη οικονομικά λύση ούτε στο μόνο εφελκούμενο ούτε στο διπλό οπλισμό. Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη λύση παραπέμπεται στον μέγιστο εφελκούμενο οπλισμό που αντιστοιχεί στην αντοχή του σκυροδέματος για την οποία γίνεται ο σχεδιασμός (βλ. Σχήμα 10).



Σχήμα 10. Καμπύλη βέλτιστων λύσεων γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού για δεδομένο q - όλες οι περιπτώσεις όπλισης.

Το Σχήμα 10, αφορά ένα δεδομένο σχετικό κόστος q και δίνει τις βέλτιστες λύσεις γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού συναρτήσεως ενός εύρους αντοχών σκυροδέματος. Οι τρεις περιοχές λύσεων είναι εμφανείς. Ανάλογα με το εύρος των χαρακτηριστικών τάσεων σκυροδέματος και χάλυβα και το σχετικό κόστος τους q , το οποίο είναι δεδομένο σε κάθε περίπτωση σχεδιασμού, είναι πιθανό μια καμπύλη να μην "προλαβαίνει" να εμφανίσει και τις τρεις περιοχές λύσεων. Τέτοιες περιπτώσεις θα

παρουσιαστούν σε επόμενα γραφήματα. Όπως διαπιστώνεται και με αριθμητικό παράδειγμα παρακάτω, για τα ίδια δεδομένα ροπής, πλάτους διατομής και σχετικού κόστους υλικών, η διατομή είναι οικονομικότερο να οπλιστεί με μόνο εφελκόμενο οπλισμό παρά με διπλό, με δεδομένο ότι ο χάλυβας είναι ακριβότερος από το σκυρόδεμα κατά q . Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η βέλτιστη λύση παραπέμπεται στον μέγιστο εφελκόμενο οπλισμό, όταν η λύση διπλού οπλισμού δεν μπορεί να οριστεί. Σ'αυτή την περίπτωση, ο μέγιστος εφελκόμενος οπλισμός αντιστοιχεί στην οικονομικότερη λύση από οποιοδήποτε άλλο ποσοστό μόνο εφελκόμενου οπλισμού επιλεγεί.

2.3. Σχετική Βιβλιογραφία

1. B. Ceranic and C. Fryer, Springer-Verlag 2000: Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams. *Structural Multidisc Optimization* 20, 260-268.
2. Yousef A. Al-Salloum and Ghulam Husain Siddigi, *ACI Structural Journal* November/December 1994: Cost- optimum design of reinforced concrete beams. No. 91- S62, 647-655.
3. S. Kanagasundaram and B.L. Karihaloo, *Computers and Structures* 1991: Minimum-cost design of reinforced concrete structures. Vol 41, No. 6, 1357-1364.
4. M.H.F.M. Barros and R.A.F. Martins and A.F.M. Barros, Springer-Verlag 2005: Cost optimization of singly and doubly reinforced concrete beams with EC2-2001. *Structural Multidisc Optimization* 30, 236-242.
5. S. Kanagasundaram and B.L. Karihaloo, Springer-Verlag 1990: Minimum cost design of reinforced concrete structures. *Structural Optimization* 2, 173-184.
6. A. Adamu and B.L. Karihaloo, Springer-Verlag 1994: Minimum cost design of reinforced concrete using DCOC Part II. Beams with uniform cross-sections. *Structural Optimization* 7, 252-259.

2.4. Μελέτη της Συμπεριφοράς των Βελτιστοποιημένων Παραμέτρων του Κόστους

Η ελαχιστοποίηση του κόστους μιας διατομής οπλισμένου σκυροδέματος, είναι μια διαδικασία που δύναται να γίνει με πολλές μεθόδους, οι οποίες έχουν κοινή λογική: στοχεύουν στη βελτιστοποίηση των παραμέτρων που αποτελούν τις συνιστώσες του κόστους. Αυτό διαπιστώθηκε κατά την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange, όταν ξεκινώντας από τη σχέση του συνολικού κόστους και τη σχέση ισορροπίας, προέκυψαν σχέσεις που ορίζουν τις βελτιστοποιημένες παραμέτρους ρ_{opt} , d_{opt} και με βάση αυτές το μ_{opt} . Πριν αναλυθεί η συμπεριφορά των παραμέτρων αυτών στις μεταβολές των μεγεθών που τα απαρτίζουν, κρίνεται σκόπιμο να εξεταστούν οι αντοχές και τα κόστη των υλικών που μελετώνται στην παρούσα εργασία και χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μιας διατομής οπλισμένου σκυροδέματος. Οι τιμές του κόστους είναι προσεγγιστικές και βασίζονται σε αυτές που παρατηρήθηκαν στο σκυρόδεμα και το χάλυβα, στην περιοχή της Μαγνησίας για το έτος 2010.

Πίνακας 4. Τιμές κόστους μονάδας σκυροδέματος στην Ελλάδα για διάφορες θλιπτικές αντοχές.

Θλιπτική Αντοχή (MPa)	Κόστος χωρίς ΦΠΑ (€/m ³)
C16	60
C20	61
C25	65
C30	70
C35	75
C40	80
C50	90

Το εύρος των θλιπτικών αντοχών σκυροδέματος που μελετάται στην παρούσα εργασία είναι από 16 MPa έως 50 MPa, ενώ ο χάλυβας στα παραδείγματα που ακολουθούν είναι ποιότητας S500, αφού και οι σχέσεις των βελτιστοποιημένων μεγεθών που αναπτύχθηκαν στηρίχθηκαν στην τάση διαρροής, $f_{yk}=500$ MPa. Το κόστος του χάλυβα, συμπεριλαμβανομένου της μεταφοράς, της διαμόρφωσης και της τοποθέτησης θεωρείται ίσο με **1 €/kg**. Με δεδομένο ότι το ειδικό βάρος του δομικού χάλυβα είναι **7900 kg/m³**, προκύπτει ότι το κόστος είναι **7900 €/m³**, ανεξαρτήτως της διαμέτρου των ράβδων του. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η τιμή της μονάδας σκυροδέματος για την Ελλάδα κυμαίνεται από **60** έως **90 €/m³** (βλ. Πίνακα 4), το σχετικό κόστος των δυο υλικών **q** κυμαίνεται από **132** έως **88**, αντίστοιχα. Ωστόσο, οι τιμές της μονάδας σκυροδέματος που αναφέρονται στον Πίνακα 4, αντιστοιχούν μόνο στην αγορά του υλικού. Μια αντιπροσωπευτική τιμή για το κόστος της μονάδας σκυροδέματος συμπεριλαμβανομένου του κόστους υλικού, μεταφοράς, ξυλοτύπου και αντλίας έγχυσης είναι από **130 €/m³** έως **150 €/m³** (τιμές με ΦΠΑ). Συνεπώς το σχετικό κόστος **q** κυμαίνεται από **60** έως **53** αντίστοιχα. Κατά την κατάστρωση των συναρτήσεων κόστους στη διαδικασία βελτιστοποίησης Lagrange, δεν

συνυπολογίστηκε το κόστος ξυλοτύπου που σχετίζεται με το εμβαδόν της διατομής, με σκοπό το πρόβλημα να περιέχει όσο το δυνατόν λιγότερες αγνώστους. Με την τιμή του κόστους ξυλοτύπου να συμπεριλαμβάνεται στην τιμή της μονάδας σκυροδέματος, η αντιμετώπιση της βελτιστοποίησης γίνεται πιο πρακτική και τα αποτελέσματα έρχονται πιο κοντά στις πραγματικές τιμές. Εξάλλου, στην πραγματικότητα, η τιμή του σκυροδέματος είναι πάντα συνοδευμένη από τα επιμέρους κόστη του ξυλοτύπου, της μεταφοράς και της αντλίας έγχυσης. Συνεπώς **στην Ελλάδα** θεωρείται ότι το σχετικό κόστος του χάλυβα και του σκυροδέματος κυμαίνεται από **50 έως 60**. Θα ήταν πολύ χρήσιμη η σύγκριση των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης που γίνεται στην παρούσα εργασία και μιας αντίστοιχης στην οποία το κόστος ξυλοτύπου θα αποτελούσε ξεχωριστό κόστος στη συνάρτηση του συνολικού και θα διαχωρίζονταν η τιμή του συνολικού q . Παρακάτω γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου Lagrange της παρούσας εργασίας με τα αντίστοιχα που η ίδια δίνει όταν ο ξυλότυπος συμπεριληφθεί εξ αρχής στη μέθοδο, σύμφωνα με τα λεγόμενα των Yousef A. Al-Salloum and Ghulam Husain Siddigi, στο επιστημονικό τους άρθρο (βλ βιβλιογραφία, ενότητα 2.3.)

2.4.1. Μελέτη της Συμπεριφοράς του Βέλτιστου Γεωμετρικού Ποσοστού Εφελκούμενου Οπλισμού Ορθογωνικής Διατομής Ο.Σ. (ρ_{opt}).

2.4.1.1. Βέλτιστο Γεωμετρικό Ποσοστό Εφελκούμενου Οπλισμού για την Περίπτωση Όπλισης Διατομών με Μόνο Εφελκούμενο Οπλισμό.

Η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μιας ορθογωνικής διατομής, όπως αναπτύχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο με τη μέθοδο Lagrange, σημαίνει την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των δυο επιμέρους κοστών, σκυροδέματος και χάλυβα οπλισμού (το κόστος ξυλοτύπου υπάρχει στην τιμή q). Με βάση αυτό μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτό ότι το ελάχιστο δυνατό ποσοστό οπλισμού ή το ελάχιστο ύψος της διατομής δεν αντιστοιχούν στην πιο οικονομική λύση. Η οικονομικότερη λύση προέρχεται από τον κατάλληλο συνδυασμό οπλισμού και διαστάσεων έτσι ώστε το συνολικό άθροισμα του κόστους των δύο υλικών να είναι το ελάχιστο. Στην παράγραφο αυτή μελετάται το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκούμενου οπλισμού, όταν μόνο αυτός οπλίζει την ορθογωνική διατομή, όπως ορίστηκε από τη σχέση (12a). Το ποσοστό ρ_{opt} εξαρτάται από το σχετικό κόστος του χάλυβα οπλισμού και του σκυροδέματος που χρησιμοποιούνται, καθώς και από τις χαρακτηριστικές τάσεις αυτών. Εφόσον οι σχέσεις για το άνω όριο του εφελκούμενου οπλισμού και στη συνέχεια του βέλτιστου για τον διπλό οπλισμό αναπτύχθηκαν θεωρώντας ότι ο χάλυβας είναι ποιότητας S500, όλοι οι υπολογισμοί και τα γραφήματα αφορούν αυτή την περίπτωση ($f_{yk}=500$ MPa). Η παρουσία του όρου $1+\delta_1$ που διαιρεί το σχετικό κόστος q στον παρονομαστή της σχέσης, προκαλεί μια μικρή αύξηση στην τιμή του. Στους πίνακες και τα γραφήματα που ακολουθούν, παρουσιάζεται η συμπεριφορά του ποσοστού ρ_{opt} σε μεταβολές των παραπάνω παραμέτρων. Θεωρούμε ότι ο λόγος δ_1 έχει σταθερή τιμή ίση με 0.10, ενώ η τιμή του πλάτους της διατομής b δεν απαιτείται να είναι γνωστή για τον προσδιορισμό του ποσοστού οπλισμού της.

Οι λύσεις του μόνο εφελκόμενου οπλισμού, που προκύπτουν από την εφαρμογή της σχέσης βελτιστοποίησης (12α), για να αποτελούν την βέλτιστη λύση σχεδιασμού μιας διατομής συγκρίνονται πάντα με το άνω όριο του μόνο εφελκόμενου οπλισμού, ρ_{lim} , έτσι ώστε πάντα να είναι μικρότερες από αυτό. Αυτό φάνηκε από την εφαρμογή που παρουσιάστηκε στην παράγραφο §2.1.1. (βλ. Πίνακα 2). Στον Πίνακα 5 συγκεντρώνονται οι τιμές διαφόρων ρ_{lim} , όταν η αντοχή σκυροδέματος μεταβάλλεται. Ειδικότερα περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις $\rho_{lim}=\rho_{bal}$, $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$, $\rho_{lim}=0.50\rho_{bal}$ και $\rho_{lim}=0.25\rho_{bal}$, σύμφωνα με τις εξισώσεις (18α), (20), (21) και (22) αντίστοιχα. Η γραφική αναπαράσταση των τιμών γίνεται στο Σχήμα 5.

Πίνακας 5. Τιμές μέγιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού (ρ_{iim}) για διάφορες περιπτώσεις πλαστιμότητας.

f_{ck} (MPa)	n_f	$\rho_{lim}=\rho_{bal}$	$\rho_{iim} = 0,75\rho_{bal}$	$\rho_{iim} = 0,50\rho_{bal}$	$\rho_{iim} = 0,25\rho_{bal}$
16	31,3	0,0104	0,0078	0,0052	0,0026
20	25	0,0130	0,0098	0,0065	0,0032
25	20	0,0162	0,0122	0,0081	0,0041
30	16,7	0,0195	0,0146	0,0097	0,0049
35	14,3	0,0227	0,0171	0,0114	0,0057
40	12,5	0,0260	0,0195	0,013	0,0065
50	10	0,0325	0,0244	0,0162	0,0081

Στην ενότητα 2.1. παρουσιάστηκαν γραφικά οι λύσεις του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού ρ_{opt} , για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό, όταν $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ (βλ. Σχήμα 2). Ο Πίνακας 6 συγκεντρώνει τις αντίστοιχες βέλτιστες λύσεις όταν $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Η γραφική απεικόνιση των λύσεων γίνεται στο Σχήμα 11.

Πίνακας 6. Τιμές βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} με $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ – μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).

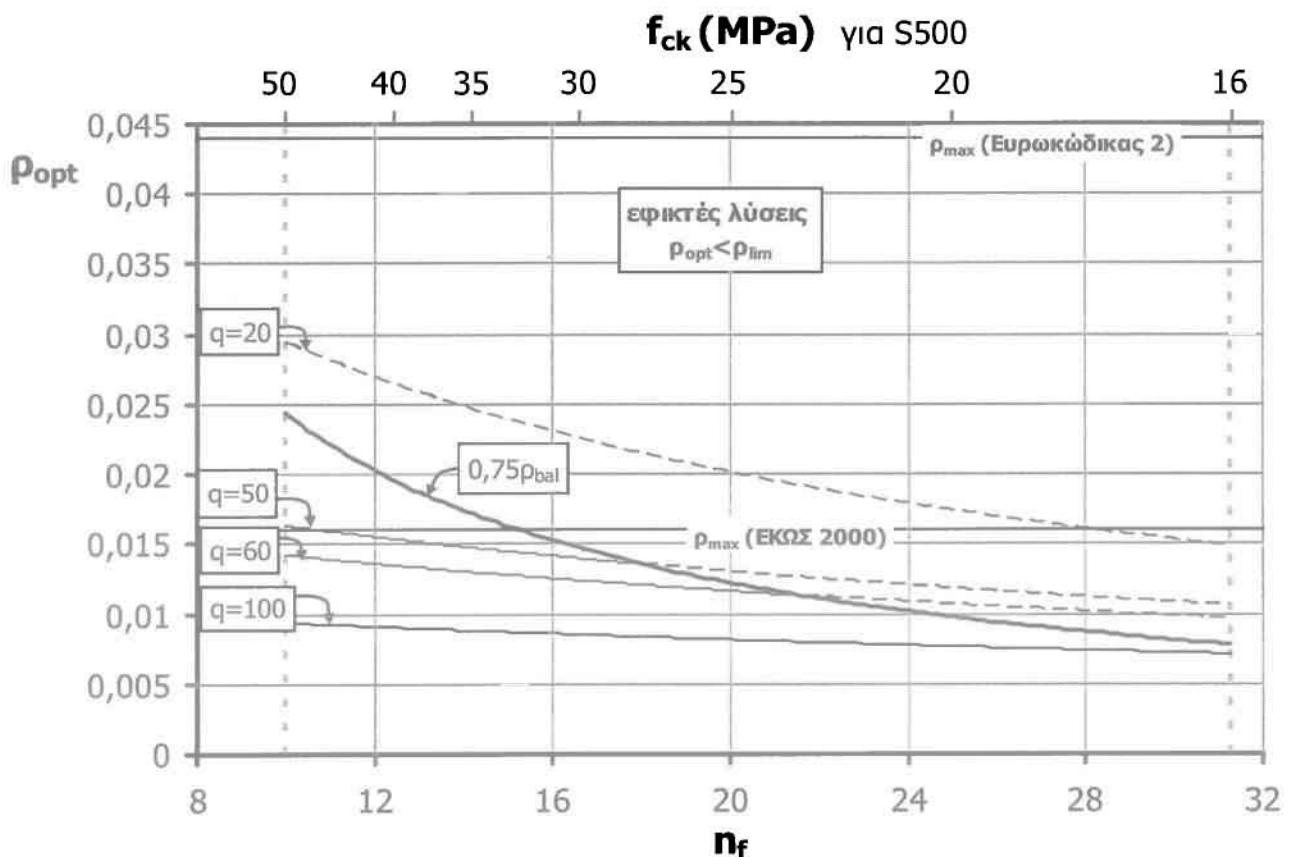
$q = \frac{C_s}{C_c} =$		100	60	50	20	$\rho_{lim}=0,75\rho_{bal}$
f_{ck} (MPa)	n_f	ρ_{opt}				
16	31,3	0,0071	0,0096	0,0106	0,0148	0,0078
20	25	0,0077	0,0106	0,0118	0,0174	0,0098
25	20	0,0082	0,0116	0,0130	0,0201	0,0122
30	16,7	0,0085	0,0124	0,0139	0,0225	0,0146
35	14,3	0,0088	0,0130	0,0147	0,0246	0,0171
40	12,5	0,0090	0,0135	0,0153	0,0264	0,0195
50	10	0,0094	0,0142	0,0163	0,0294	0,0244

Στα γραφήματα των βέλτιστων γεωμετρικών ποσοστών οπλισμού σημειώνονται επίσης τα άνω όρια του εφελκόμενου οπλισμού ρ_{max} που θέτουν ο ΕΚΩΣ 2000 και ο Ευρωκώδικας 2. Για $\delta_1=0.10$ από τη σχέση (23β) προκύπτει:

$$\rho_{max} = \rho'_{max} = 0.04(1 + \delta_1) = 0.044 \quad (\text{Ευρωκώδικας 2})$$

Το άνω όριο του εφελκόμενου οπλισμού κατά ΕΚΩΣ 2000 ορίζεται από τη σχέση (23) και λαμβάνει υπόψη του και το ποσοστό του θλιβόμενου οπλισμού. Παρόλα αυτά στα γραφήματα που ακολουθούν απεικονίζεται μόνο η οριακή τιμή της σχέσης (23):

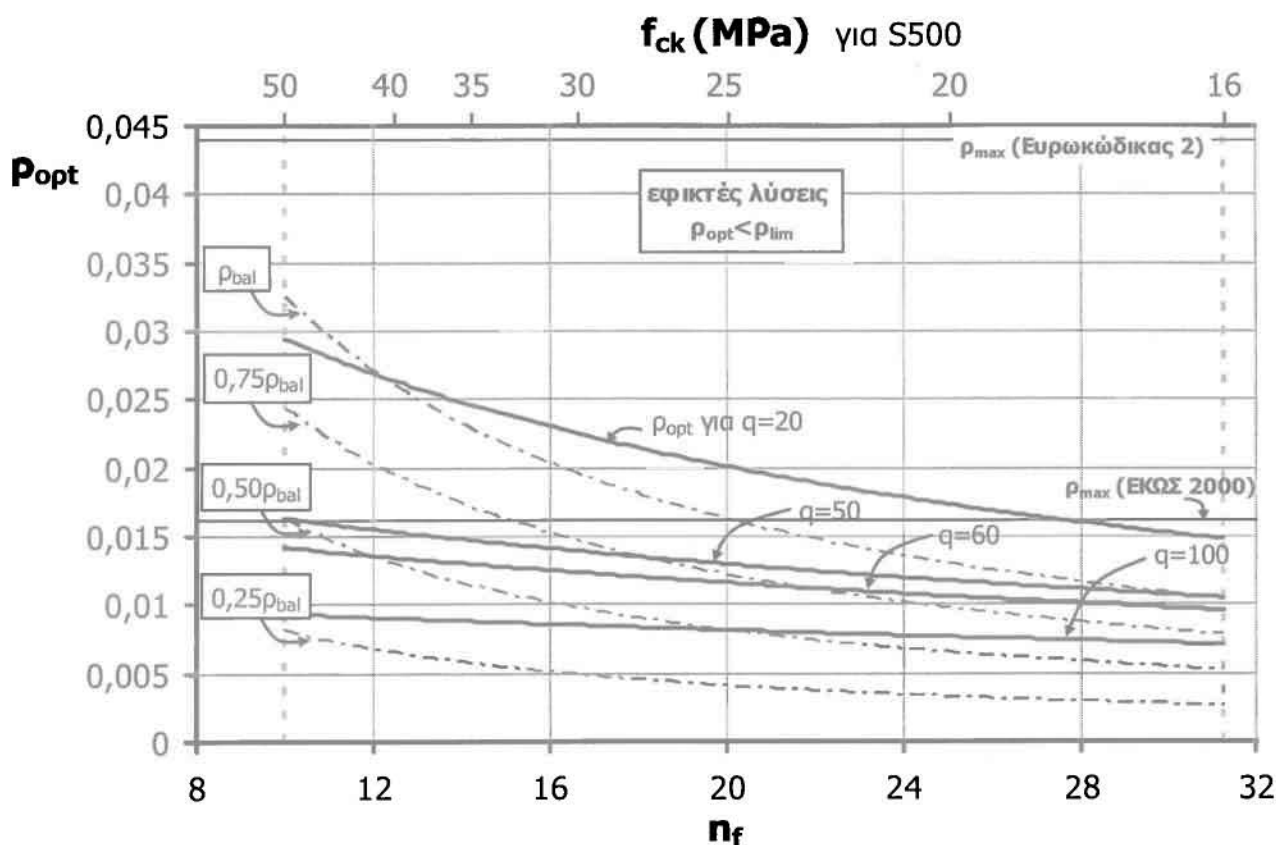
$$\rho_{max} = 7/f_{yd} \quad (\text{ΕΚΩΣ 2000})$$



Σχήμα 11. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} με $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$ – μόνο εφελκόμενος οπλισμός (δεδομένα Πίνακα 6).

Στο Σχήμα 11, οι καμπύλες που απεικονίζονται αντιστοιχούν σε βέλτιστα γεωμετρικά ποσοστά εφελκόμενου οπλισμού όταν μόνο αυτός οπλίζει τη διατομή, ανάλογα με την θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος f_{ck} και το λόγο των κοστών του χάλυβα και του σκυροδέματος, q . Οι καμπύλες δίδονται συναρτήσει του λόγου $\eta_f = 500/f_{ck}$. Επιπλέον απεικονίζεται το άνω όριο του μόνο εφελκόμενου οπλισμού $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$. Οι συνεχόμενες γραμμές που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη ρ_{lim} αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις με μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Αντίθετα, υπάρχουν και καμπύλες οι οποίες ξεπερνούν το ρ_{lim} και αυτές απεικονίζονται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή. Για αυτές ο εφελκόμενος οπλισμός δεν είναι η βέλτιστη λύση. Ως εκ τούτου, για τις περιπτώσεις όπου $\rho_{opt} > \rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$, εφαρμόζουμε τη σχέση

(45β), που αφορά στο βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού για τις περιπτώσεις όπλισης ορθογωνικών διατομών με διπλό οπλισμό. Παρόμοια σχήματα μπορούν να απεικονίσουν τη συμπεριφορά των βέλτιστων λύσεων για διαφορετικά ρ_{lim} . Από την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange για τη βελτιστοποίηση σχεδιασμού ως προς το κόστος στις παραγράφους §2.4.1.1. και §2.4.1.3., προκύπτει το συμπέρασμα ότι, για δεδομένη αντοχή σκυροδέματος f_{ck} και σχετικό κόστος χάλυβα και σκυροδέματος, q , η τιμή του βέλτιστου ποσοστού για μόνο εφελκόμενο οπλισμό είναι η ίδια ανεξαρτήτου ρ_{lim} . Αυτό σημαίνει ότι για ένα δεδομένο εύρος αντοχών σκυροδέματος, η καμπύλη βέλτιστων λύσεων ρ_{opt} που αντιστοιχεί σε μια τιμή του λόγου q είναι ίδια για οποιοδήποτε ρ_{lim} και αν επιλεχθεί. Αυτό που μεταβάλλεται είναι το σημείο τομής των καμπυλών ρ_{opt} και ρ_{lim} , ή αλλιώς το κομμάτι που παραμένει "ενεργό", δηλαδή που είναι κάτω από την καμπύλη ρ_{lim} (βλ. Σχήμα 12). Στο Σχήμα 11 απεικονίζονται επιπλέον τα μέγιστα επιτρεπόμενα ποσοστά οπλισμού, τόσο από βάσει ΕΚΩΣ 2000, όσο και βάσει Ευρωκώδικα 2. Βασιζόμενοι στον ΕΚΩΣ 2000, πολλές από τις βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν παύουν να έχουν νόημα, καθώς είναι μεγαλύτερες από το όριο που ο ίδιος θέτει. Το άνω όριο του Ευρωκώδικα είναι πολύ πιο ανεκτικό. Στα γραφήματα ωστόσο εμφανίζονται και τα δυο ποσοστά, έτσι ώστε να ευνοείται η σύγκριση μεταξύ των δυο κανονισμών. Σημειώνεται ότι, ο ΕΚΩΣ 2000 παύει να ισχύει από το έτος 2011 και μετά.



Σχήμα 12. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για διαφορετικά ρ_{lim} — μόνο εφελκόμενος οπλισμός (δεδομένα Πίνακα 5 και 6).

Στο Σχήμα 12 οι καμπύλες ρ_{opt} που απεικονίζονται με έντονο μαύρο χρώμα είναι οι ίδιες καμπύλες βέλτιστων λύσεων που υπάρχουν και στο Σχήμα 11, δηλαδή αντιστοιχούν και αυτές στα δεδομένα του Πίνακα 6. Οι διακεκομμένες γραμμές

αντιστοιχούν στα μέγιστα επιτρεπόμενα ποσοστά εφελκόμενου οπλισμού, όταν αυτά αφορούν την ισορροπημένη διατομή ή κάποιο ποσοστό αυτής (βλ. Πίνακα 5). Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις όπου $\rho_{lim} = \nu \rho_{bal}$, με $\nu < 1$, μπορούν να υπολογιστούν και να απεικονιστούν εύκολα από τη σχέση (18a), αν αυτή πολλαπλασιαστεί με ν . Για κάθε καμπύλη ρ_{lim} που επιλέγεται, οι καμπύλες ρ_{opt} που βρίσκονται κάτω από αυτή περιλαμβάνουν τις εφικτές λύσεις ("ενεργά" τμήματα καμπυλών), ενώ αυτές που βρίσκονται πάνω, τις ανέφικτες ("ανενεργά" τμήματα καμπυλών). Για τα "ανενεργά" τμήματα των καμπυλών η βέλτιστη οικονομικά λύση δεν είναι ο μόνο εφελκόμενος οπλισμός (παράγραφος §2.4.1.2.-2.4.1.3.). **Σε κάθε περίπτωση ρ_{lim} , το "ενεργό" τμήμα το "ανενεργό" τμήμα, θα δίνουν πάντα την ίδια καμπύλη.**

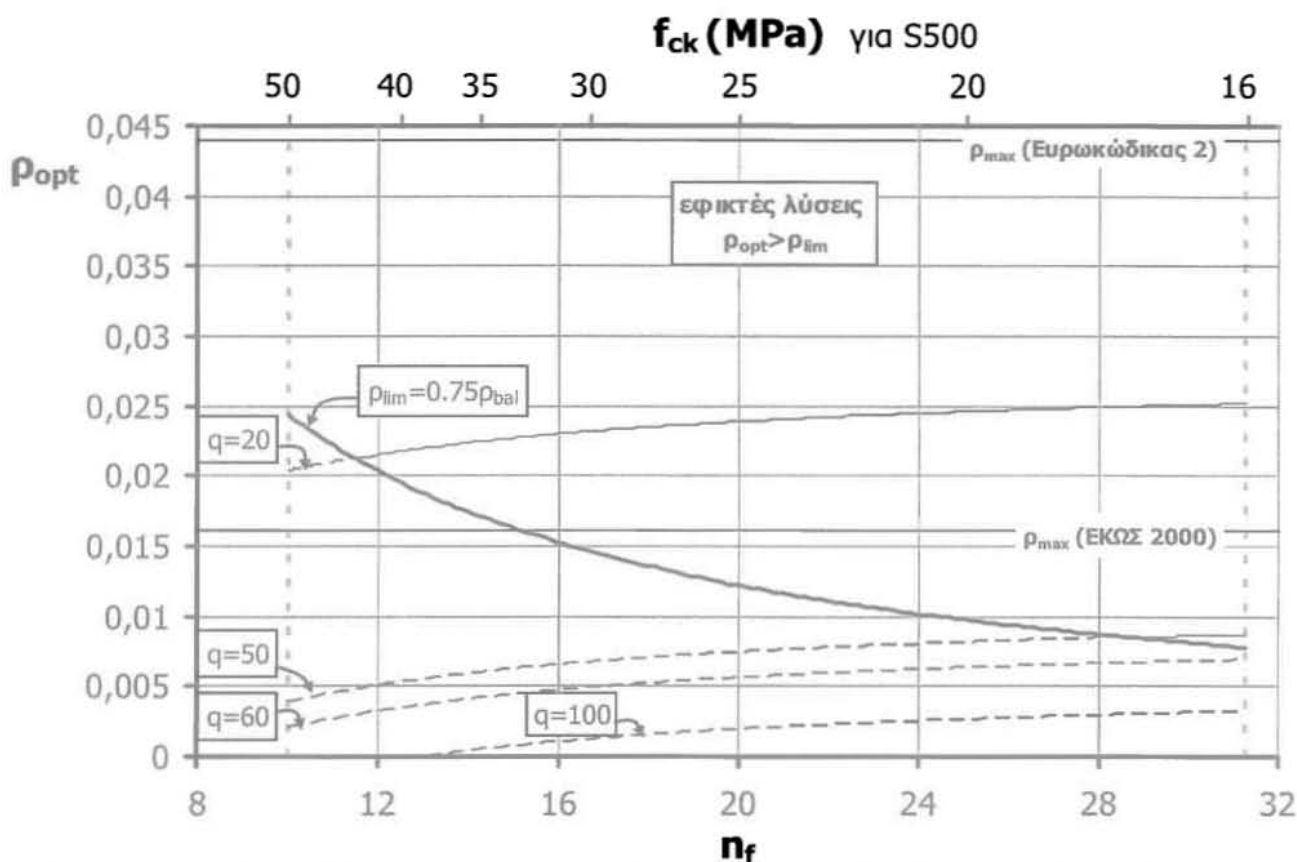
2.4.1.2. Βέλτιστο Γεωμετρικό Ποσοστό Εφελκόμενου Οπλισμού για την Περίπτωση Όπλισης Διατομών με Εφελκόμενο και Θλιβόμενο Οπλισμό

Στην περίπτωση όπλισης μιας διατομής με εφελκόμενο και θλιβόμενο οπλισμό, όπως παρουσιάστηκε σε προηγούμενη παράγραφο, οι υπολογισμοί περιπλέκονται, αφενός επειδή υπάρχει μια παραπάνω δύναμη στην διατομή (θλιβόμενο οπλισμό) και εφετέρου επειδή για να μειωθούν οι άγνωστοι που πρέπει να προσδιοριστούν (δηλαδή οι παράμετροι που πρέπει να βελτιστοποιηθούν) απαιτείται εξαρχής η επιλογή του άνω ορίου του μόνο εφελκόμενου οπλισμού ρ_{lim} (παραδοχή $\rho' = \rho - \rho_{lim}$). Συνεπώς για **διαφορετικά ρ_{lim}** έχουμε και **διαφορετικές καμπύλες ρ_{opt}** , γεγονός που δεν ισχύει στην περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό. **Δηλαδή, για διαφορετικά ρ_{lim} , το "ενεργό" και το "ανενεργό" τμήμα, δεν δίνουν την ίδια καμπύλη βέλτιστων λύσεων.** Στο Σχήμα 8, απεικονίστηκαν οι βέλτιστες λύσεις για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό, όταν το άνω όριο για την όπλιση με μόνο εφελκόμενο οπλισμό είναι αυτό της "ισορροπημένης" διατομής. Ωστόσο, επειδή η "ισορροπημένη" διατομή είναι ένα θεωρητικό άνω όριο σχεδιασμού και για να μπορέσουν να συνδεθούν οι λύσεις του διπλού οπλισμού με αυτές του μόνο εφελκόμενου της προηγούμενης παραγράφου, στον Πίνακα 7 δίδονται οι βέλτιστες λύσεις διπλού οπλισμού όταν $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$ [σχέση (45a)]. Η γραφική απεικόνιση των δεδομένων του Πίνακα 7, γίνεται στο Σχήμα 13.

Στο σχήμα 13, όλες οι καμπύλες αντιστοιχούν σε βέλτιστα γεωμετρικά ποσοστά εφελκόμενου οπλισμού για την περίπτωση διπλού οπλισμού με $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$ (σχέση (45a)), ανάλογα με την θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος f_{ck} και τον λόγο των κοστών του χάλυβα και του σκυροδέματος q που επιλέγονται. Οι συνεχόμενες γραμμές που βρίσκονται πάνω από την καμπύλη ρ_{lim} αντιστοιχούν σε λύσεις με εφελκόμενο και θλιβόμενο οπλισμό ("ενεργά" τμήματα καμπυλών). Αντίθετα, υπάρχουν και οι καμπύλες οι οποίες είναι κάτω από το ρ_{lim} και αυτές απεικονίζονται στο σχήμα με διακεκομμένη γραμμή ("ανενεργά" τμήματα καμπυλών). Για αυτές ο θλιβόμενος οπλισμός δεν είναι η βέλτιστη λύση. Ως εκ τούτου, για τα "ανενεργά" τμήματα των καμπυλών ($\rho_{opt} < \rho_{max}$), εφαρμόζουμε τη σχέση (12a), που αφορά στο βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού για τις περιπτώσεις όπλισης ορθογωνικών διατομών με μόνο εφελκόμενο οπλισμό.

Πίνακας 7. Τιμές βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} με $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ – διπλός οπλισμός ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

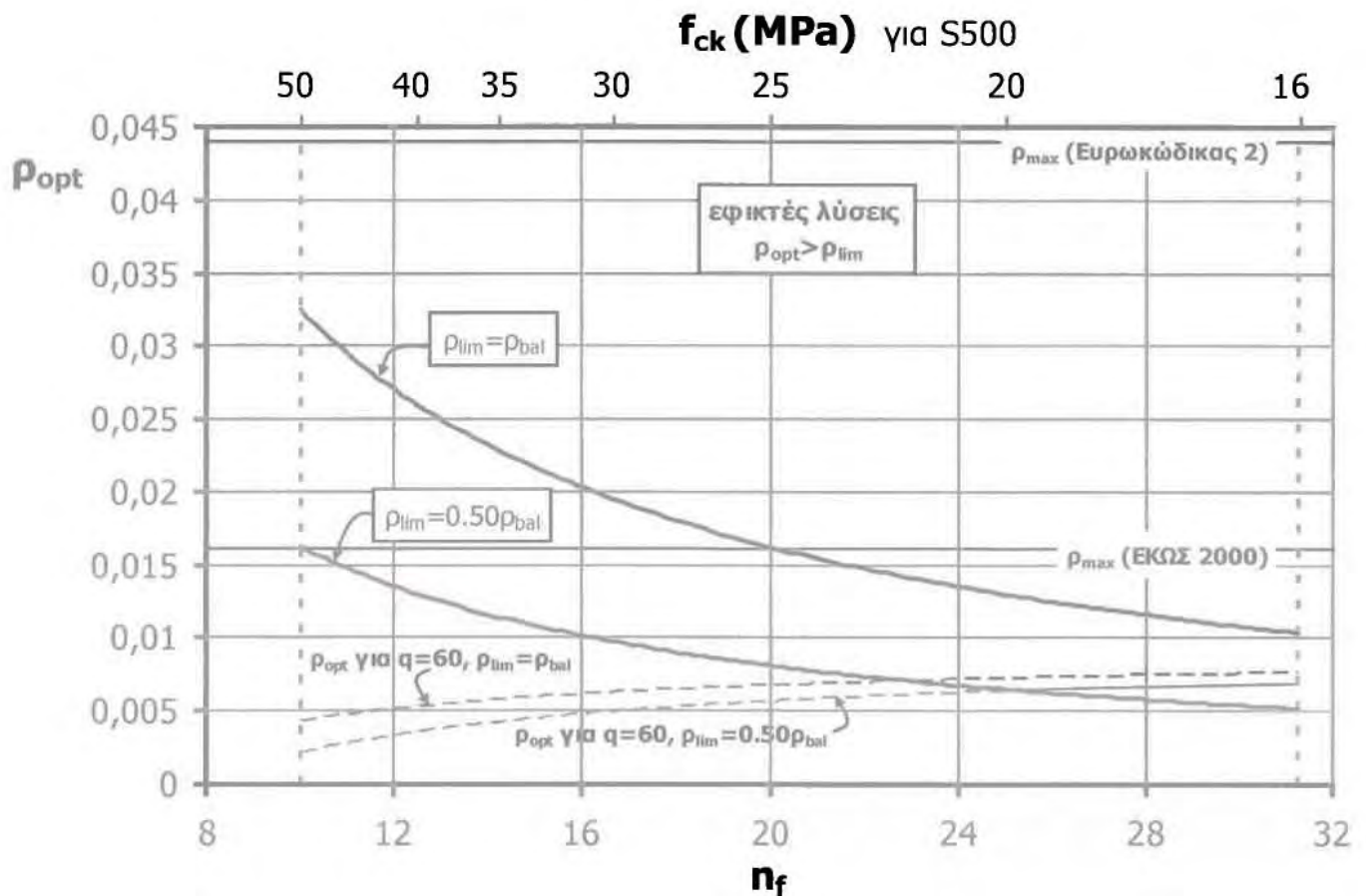
$q = \frac{C_s}{C_c} =$		100	60	50	20	$\rho_{lim}=0,75\rho_{bal}$
f_{ck} (MPa)	n_f	ρ_{opt}				
16	31,3	0,0032	0,0069	0,0087	0,0252	0,0078
20	25	0,0026	0,0063	0,0081	0,0246	0,0098
25	20	0,0019	0,0056	0,0074	0,0239	0,0122
30	16,7	0,0012	0,0049	0,0067	0,0232	0,0146
35	14,3	0,0005	0,0041	0,0060	0,0225	0,0171
40	12,5	-0,0002	0,0034	0,0053	0,0218	0,0195
50	10	-0,0017	0,0020	0,0038	0,0203	0,0244



Σχήμα 13. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ – διπλός οπλισμός (δεδομένα Πίνακα 7).

Συνεπώς, ο συνδυασμός των σχημάτων 11 και 13 θα συγκεντρώνει το σύνολο των λύσεων για την όπλιση μιας διατομής, όταν $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ (βλ. Σχήμα 15). Κατά τον σχεδιασμό μιας διατομής, με δεδομένες χαρακτηριστικές τάσεις υλικών και δεδομένο σχετικό κόστος, αυτό που μπορεί να αλλάξει τη βέλτιστη λύση είναι το ρ_{lim} που επιλέγεται σαν άνω όριο στον μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Στο σχήμα 14 εξετάζεται το πώς αλλάζουν οι βέλτιστες λύσεις του εφελκόμενου οπλισμού, για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό, όταν το ρ_{lim} μεταβάλλεται από ρ_{bal} σε $0.50\rho_{bal}$. Στο

γράφημα απεικονίζεται μόνο η τιμή $q=60$, η οποία αντιπροσωπεύει την περίπτωση σχεδιασμού στην Ελλάδα. Συνεπώς, προκύπτει το συμπέρασμα ότι στην Ελλάδα, όταν ο σχεδιασμός γίνει με άνω όριο για τον μόνο εφελκόμενο οπλισμό αυτό της "ισορροπημένης" διατομής, τότε ο διπλός οπλισμός δεν μπορεί να είναι η βέλτιστη λύση για καμία αντοχή σκυροδέματος ("ανενεργή" καμπύλη). Όταν το άνω όριο μειωθεί κατά 50%, ο διπλός οπλισμός είναι η βέλτιστη λύση για σχεδιασμό με ποιότητα σκυροδέματος C16/20. Για όλες τις υπόλοιπες αντοχές σκυροδέματος η βέλτιστη λύση βρίσκεται στην περιοχή του μόνο εφελκόμενου οπλισμού, μέγιστου ή όχι. Από τα Σχήματα 11 και 13 προκύπτει ότι ο διπλός οπλισμός δεν αποτελεί βέλτιστη οικονομικά λύση, για καμία αντοχή σκυροδέματος, ούτε για την περίπτωση όπου $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. **Όσο πιο χαμηλό είναι το άνω όριο για τον μόνο εφελκόμενο οπλισμό, τόσο η οικονομικότερη λύση για τα δεδομένα σχεδιασμού τείνει να αντιστοιχεί στο διπλό οπλισμό.**



Σχήμα 14. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοτού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για $q=60$, με $\rho_{lim}=\rho_{bal}$ και $\rho_{lim}=0.50\rho_{bal}$ – διπλός οπλισμός ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

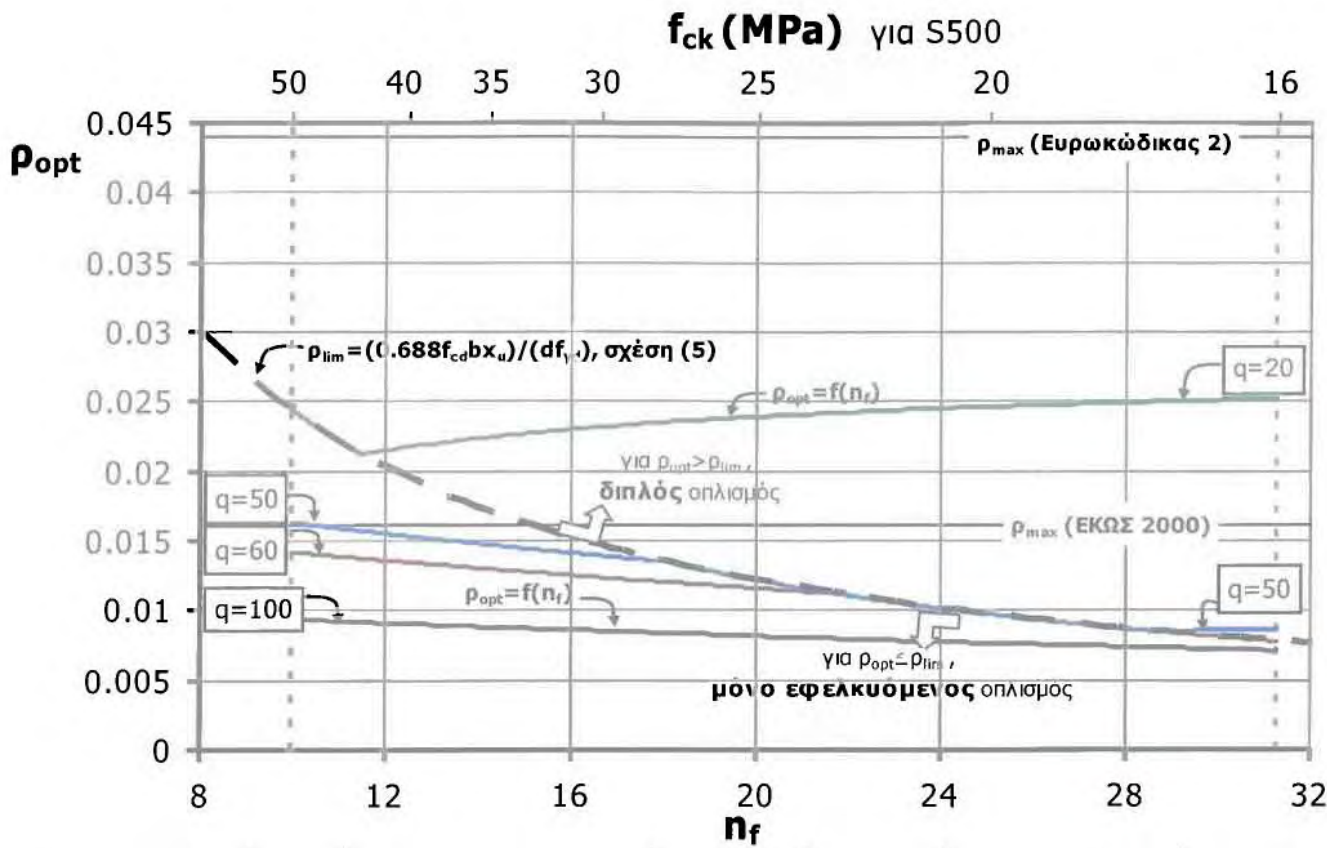
2.4.1.3. Βέλτιστο Γεωμετρικό Ποσοστό Εφελκόμενου Οπλισμού για Όλες τις Περιπτώσεις Όπλισης

Συνδυάζοντας τα δεδομένα από τους πίνακες 6 και 7, προκύπτει ο Πίνακας 8, ο οποίος συγκεντρώνει τις βέλτιστες λύσεις για όλες τις περιπτώσεις όπλισης μιας διατομής, όταν $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$.

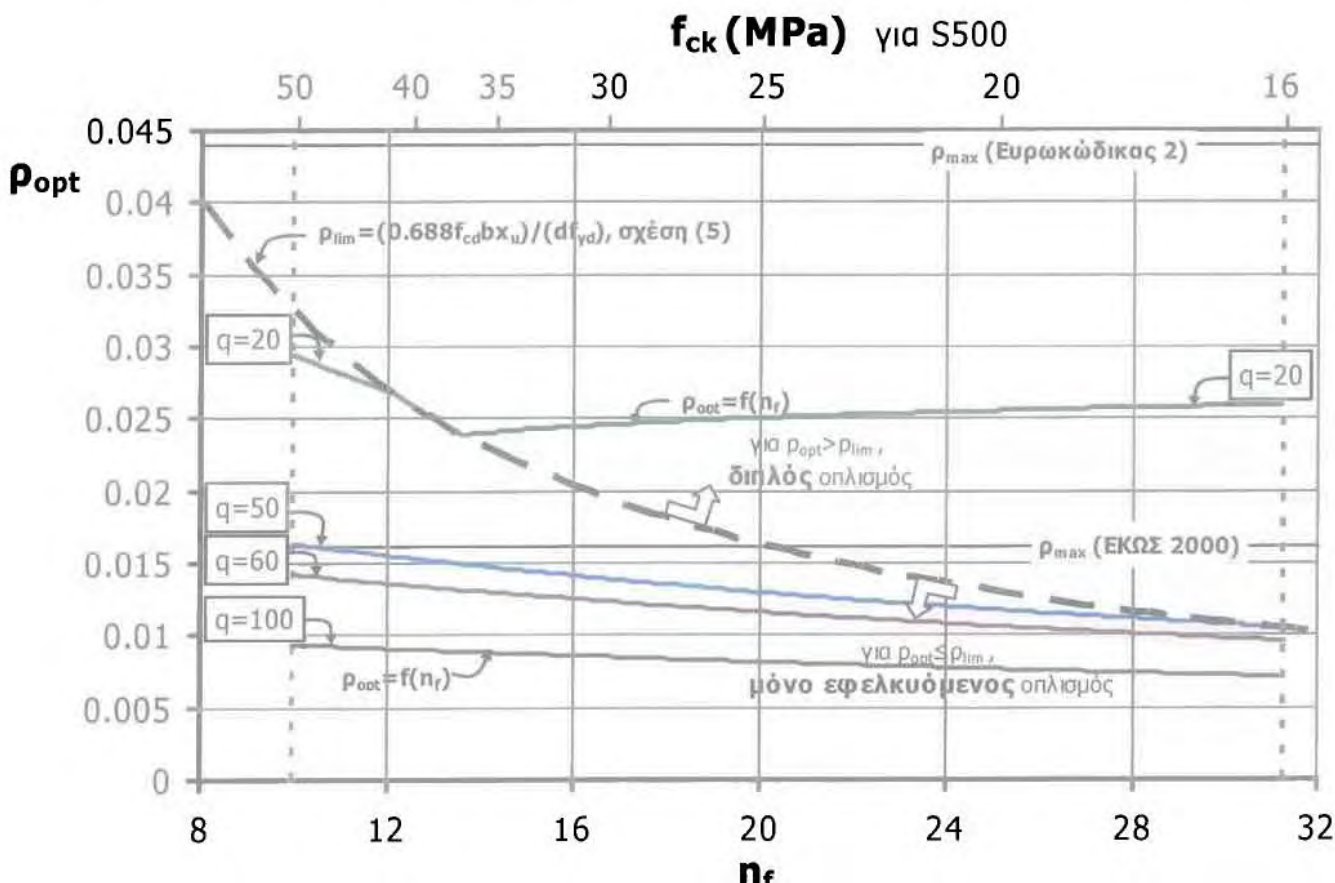
Πίνακας 8. Τιμές βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} με $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ – όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

$q = \frac{C_s}{C_c} =$		100	60	50	20	$\rho_{lim}=0,75\rho_{bal}$
$f_{ck}(MPa)$	n_f	ρ_{opt}				
16	31,3	0,0071	0,0078	0,0087	0,0252	0,0078
20	25	0,0077	0,0098	0,0098	0,0246	0,0098
25	20	0,0082	0,0116	0,0122	0,0239	0,0122
30	16,7	0,0085	0,0124	0,0139	0,0232	0,0146
35	14,3	0,0088	0,0130	0,0147	0,0225	0,0171
40	12,5	0,0090	0,0135	0,0153	0,0218	0,0195
50	10	0,0094	0,0142	0,0163	0,0244	0,0244

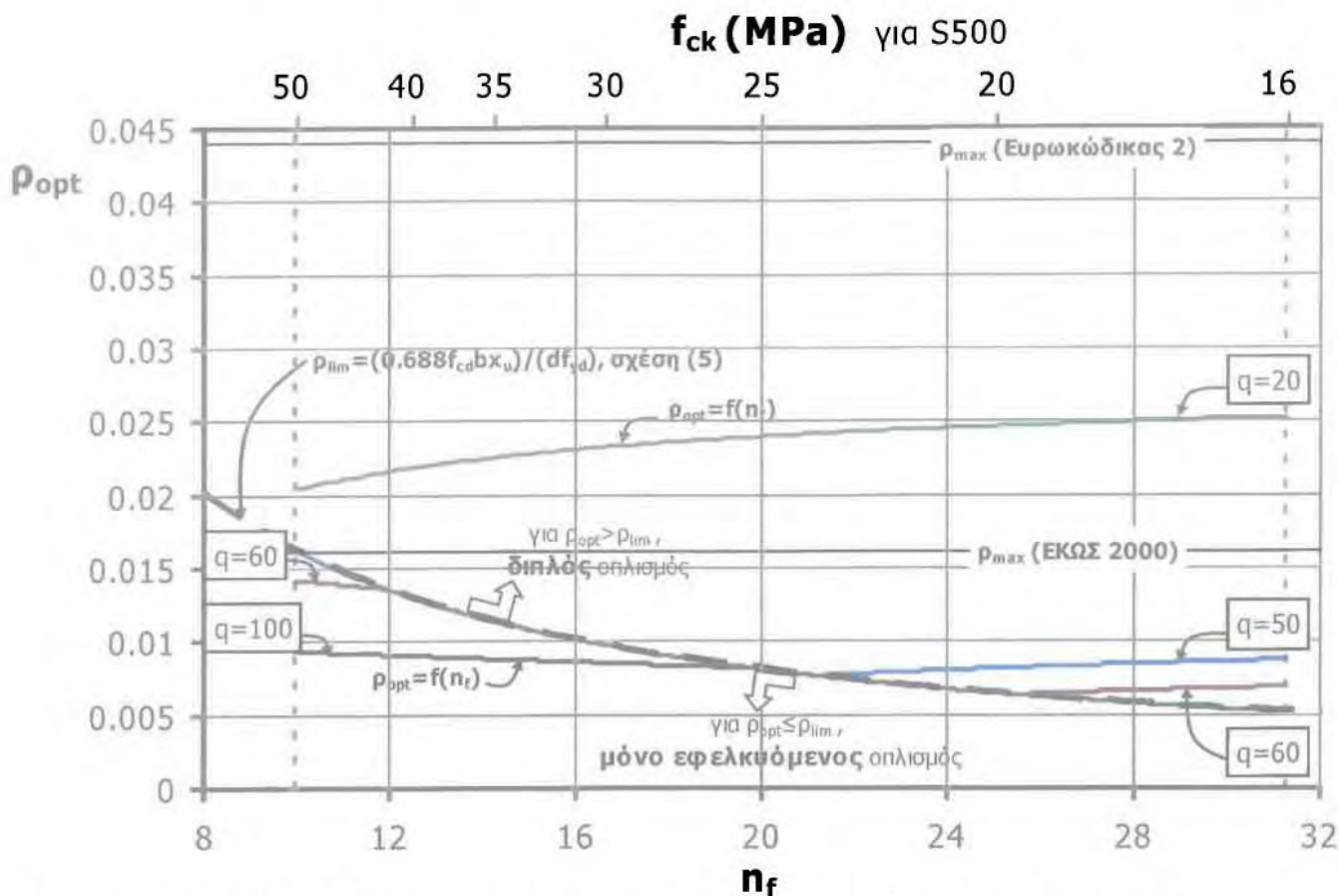
Στον Πίνακα 8 περιέχονται οι λύσεις, για όλες τις περιπτώσεις όπλισης μιας διατομής, όταν $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Πιο συγκεκριμένα, για μικρές αντοχές σκυροδέματος οι βέλτιστες λύσεις αντιστοιχούν στον διπλό οπλισμό, για μεγάλες στον μόνο εφελκόμενο, ενώ ενδιάμεσα τους, με γρι χρώμα κελιών, δίνονται οι βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν στον μέγιστο εφελκόμενο οπλισμό. Οι λόγοι ύπαρξης αυτών των λύσεων εξηγήθηκαν στο τέλος ενότητας 2.2. (βλ. Σχήμα 10). Το ίδιο συμβαίνει και με τις τιμές των q , για μικρές τιμές οι λύσεις αντιστοιχούν κυρίως στον διπλό οπλισμό, ενώ για μεγάλες στον μόνο εφελκόμενο. Το Σχήμα 15 αποτελεί την γραφική απεικόνιση των δεδομένων του Πίνακα 8. Οι καμπύλες που αποδίδονται με χρώματα αντιστοιχούν στις βέλτιστες λύσεις γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} , για όλες τις περιπτώσεις όπλισης, συναρτήσεως του λόγου των χαρακτηριστικών τάσεων των υλικών ($n_f=500/f_{ck}$). Η έντονη διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο άνω όριο του μόνο εφελκόμενου οπλισμού, $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Ανάλογα με το λόγο των κοστών των υλικών q , μια καμπύλη βέλτιστων λύσεων, στο συγκεκριμένο εύρος αντοχών σκυροδέματος, μπορεί να παρουσιάζει τρεις περιοχές λύσεων (όπως για $q=50$, μόνο εφελκόμενος οπλισμός, μέγιστος εφελκόμενος και διπλός), δύο περιοχές λύσεων (όπως για $q=20$, μέγιστος εφελκόμενος και διπλός οπλισμός) ή μια περιοχή λύσεων (όπως για $q=100$, μόνο εφελκόμενος οπλισμός). Τα τμήματα των καμπυλών που βρίσκονται **πάνω από την αυτή του ρ_{lim} αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις με διπλό οπλισμό, ενώ τα τμήματα που είναι κάτω από αυτή αντιστοιχούν σε βέλτιστες λύσεις με μόνο εφελκόμενο**. Στα Σχήματα 16 και 17 απεικονίζονται οι βέλτιστες λύσεις όταν το ρ_{lim} είναι ίσο με το ρ_{bal} και με το $0.50 \rho_{bal}$, αντίστοιχα.



Σχήμα 15. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκυσμένου οπλισμού ρ_{opt} για ρ_{lim} = 0.75ρ_{bal} – όλες οι περιπτώσεις όπλισης (δ₁ = δ₂ = 0.10).



Σχήμα 16. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκυσμένου οπλισμού ρ_{opt} για ρ_{lim} = ρ_{bal} – όλες οι περιπτώσεις όπλισης (δ₁ = δ₂ = 0.10).



Σχήμα 17. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για $\rho_{lim} = 0.50 \rho_{bal}$ – όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Ένα από τα βασικότερα συμπεράσματα που προκύπτει από την απεικόνιση της συμπεριφοράς του ρ_{opt} , είναι ότι όταν η βέλτιστη λύση είναι ο μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\rho_{opt} < \rho_{lim}$), η αύξηση της αντοχής του σκυροδέματος σημαίνει και την αύξηση του ποσοστού ρ_{opt} . Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται από την εξίσωση ισορροπίας, από όπου προήλθε η σχέση που απεικονίζεται στα παραπάνω γραφήματα. Σε ένα πρόβλημα σχεδιασμού όπου είναι δεδομένα το πλάτος b της διατομής, το εμβαδό οπλισμού A_s και η εξωτερική ασκούμενη ροπή κάμψης M_d , αυξάνοντας της αντοχή του σκυροδέματος προκαλείται μείωση της θλιβόμενης ζώνης της διατομής έτσι ώστε η θλιπτική δύναμη να διατηρηθεί σταθερή ($F_c = 0.688 f_{cd} b x_u$), όπως διατηρείται και η εφελκυστική ($F_s = A_s f_{yd}$). Για να επιτευχθεί η μείωση της θλιβόμενης ζώνης με σταθερό εφελκόμενο οπλισμό πρέπει να μικρύνει το στατικό ύψος της διατομής d . Συνεπώς το ποσοστό ρ ($= A_s / bd$) μεγαλώνει. **Αντίθετα, στην περίπτωση του διπλού οπλισμού ($\rho_{opt} > \rho_{lim}$), η αύξηση της αντοχής του σκυροδέματος προκαλεί μείωση του βέλτιστου ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} .** Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται από την ισορροπία των δυνάμεων της διατομής που οπλίζεται με διπλό οπλισμό, γνωστού εμβαδού A_s για τον εφελκόμενο, πλάτους b και ροπής κάμψης M_d . Πιο απλά, σύμφωνα με τη σχέση (30), ο εφελκόμενος οπλισμός θα είναι το άθροισμα του μέγιστου εφελκόμενου οπλισμού που ορίστηκε, όταν μόνο αυτός οπλίζει τη διατομή και του θλιβόμενου, ή αλλιώς $\rho - \rho' = \rho_{lim}$. Το άνω όριο εφελκόμενου οπλισμού ρ_{lim} είναι ανάλογο της αντοχής του σκυροδέματος (σχέσεις 18-22) και ταυτόχρονα ορίζεται ως $A_{s,lim} / bd$. Συνεπώς με την αύξηση της αντοχής του σκυροδέματος αυξάνεται. Από τη ισορροπία των

δυνάμεων ($F_c + F_s' = F_s$ ή $0.688f_{cd}bx_u + A_s'f_{yd} = A_sf_{yd}$), προκύπτει ότι για να διατηρηθεί σταθερή η εφελκούμενη δύναμη του χάλυβα (εφόσον το συνολικό εμβαδό του εφελκούμενου οπλισμού διατηρείται σταθερό), θα πρέπει με την αύξηση της αντοχής του σκυροδέματος να διατηρηθεί σταθερό και το άθροισμα των δυνάμεων της θλιβόμενης περιοχής (σκυροδέματος και χάλυβα). Τελικά η ισορροπία αποκαθίσταται με την αύξηση του στατικού ύψους της διατομής d έτσι ώστε η θλιπτική δύναμη στο σκυρόδεμα να αυξηθεί λόγω αύξησης του x_u ($0.688f_{cd}bx_u$) και η θλιπτική δύναμη του χάλυβα να μειωθεί $[(A_s - \rho_{lim}bd)f_{yd}]$, λόγω αύξησης τόσο του d όσο και του ρ_{lim} . Με αυτό τον τρόπο το άθροισμα των δυο δυνάμεων διατηρείται σταθερό, ενώ το ποσοστό του εφελκούμενου οπλισμού ρ μειώνεται.

Όσον αφορά την ευαισθησία των βέλτιστων λύσεων στην μεταβολή της αντοχής του σκυροδέματος, από τα Σχήματα 15, 16 και 17 προκύπτει το συμπέρασμα ότι **όσο μικρότερο είναι το σχετικό κόστος του χάλυβα και του σκυροδέματος, τόσο πιο μεγάλη είναι η μεταβολή του υφίσταται η βέλτιστη λύση για όπλιση με μόνο εφελκούμενο οπλισμό λόγω μεταβολής της θλιπτικής αντοχής του σκυροδέματος**. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρώντας το Σχήμα 16, για αντοχή σκυροδέματος από 50 MPa έως 40 MPa, οι βέλτιστες λύσεις για $q=20$ παρουσιάζουν πολύ μεγαλύτερη μείωση από τις λύσεις για $q=100$. Συνεπώς για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκούμενο οπλισμό, οι βέλτιστες λύσεις παρουσιάζουν μεγάλη ευαισθησία στις αλλαγές της θλιπτικής αντοχής, όταν το q είναι μικρό. **Αντίθετα, όταν η διατομή οπλίζεται με διπλό οπλισμό, η ευαισθησία του βέλτιστου οπλισμού σε μεταβολές της αντοχής σκυροδέματος είναι μηδαμινή, με την προϋπόθεση ότι ο θλιβόμενος οπλισμός διαρρέει. Όταν δεν διαρρέει, η ευαισθησία είναι αρκετά μεγάλη.**

Η ευαισθησία των βέλτιστων λύσεων, ρ_{opt} , στις αλλαγές της αντοχής σκυροδέματος εξαρτάται κι από την τιμή του σχετικού κόστους q . Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή του q , τόσο πιο ανεπηρέαστες είναι η βέλτιστες λύσεις από τις αλλαγές της αντοχής του σκυροδέματος και για τις δύο περιπτώσεις όπλισης. Σε επόμενο διάγραμμα, θα μελετηθεί η ευαισθησία των βέλτιστων λύσεων στις μεταβολές του q , όταν η αντοχή του σκυροδέματος, f_{ck} , διατηρείται σταθερή. Με μια πρώτη ματιά, προκύπτει ότι **ο διπλός οπλισμός παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία στις αλλαγές του q από ότι ο μόνο εφελκούμενος**.

Τέλος, ο μέγιστος εφελκούμενος οπλισμός, ρ_{lim} , είναι εντελώς ανεξάρτητος από το σχετικό κόστος q και εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της αντοχής σκυροδέματος, f_{ck} (χάλυβας S500). Όπως φαίνεται κι από τα γραφήματα, όσο μικρότερο το ποσοστό του ρ_{lim} , τόσο λιγότερο επηρεάζεται από τη μεταβολή της τιμής της αντοχής σκυροδέματος, f_{ck} , ενώ ταυτόχρονα οι λύσεις απομακρύνονται από τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό και τείνουν προς τον μέγιστο εφελκούμενο και τον διπλό οπλισμό.

Παράδειγμα

Έστω ότι πρέπει να σχεδιαστεί ορθογωνική διατομή οπλισμένου σκυροδέματος, πλάτους $b=0.4$ m, με χάλυβα οπλισμού S500 και ποιότητα σκυροδέματος C30/37. Το σχετικό κόστος χάλυβα και σκυροδέματος είναι περίπου ίσο με 55. Η διατομή θα πρέπει να αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος. Όπως προέκυψε από τη διαδικασία βελτιστοποίησης, η βέλτιστη τιμή του γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού, ρ_{opt} , εξαρτάται από το άνω όριο που θα οριστεί για την περίπτωση όπλισης της διατομής με μόνο εφελκόμενο οπλισμό (βλ. Πίνακα 9).

Πίνακας 9. Τιμές βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για S500, C30/37 και $q=55$ - ανάλογα με το ρ_{lim} ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

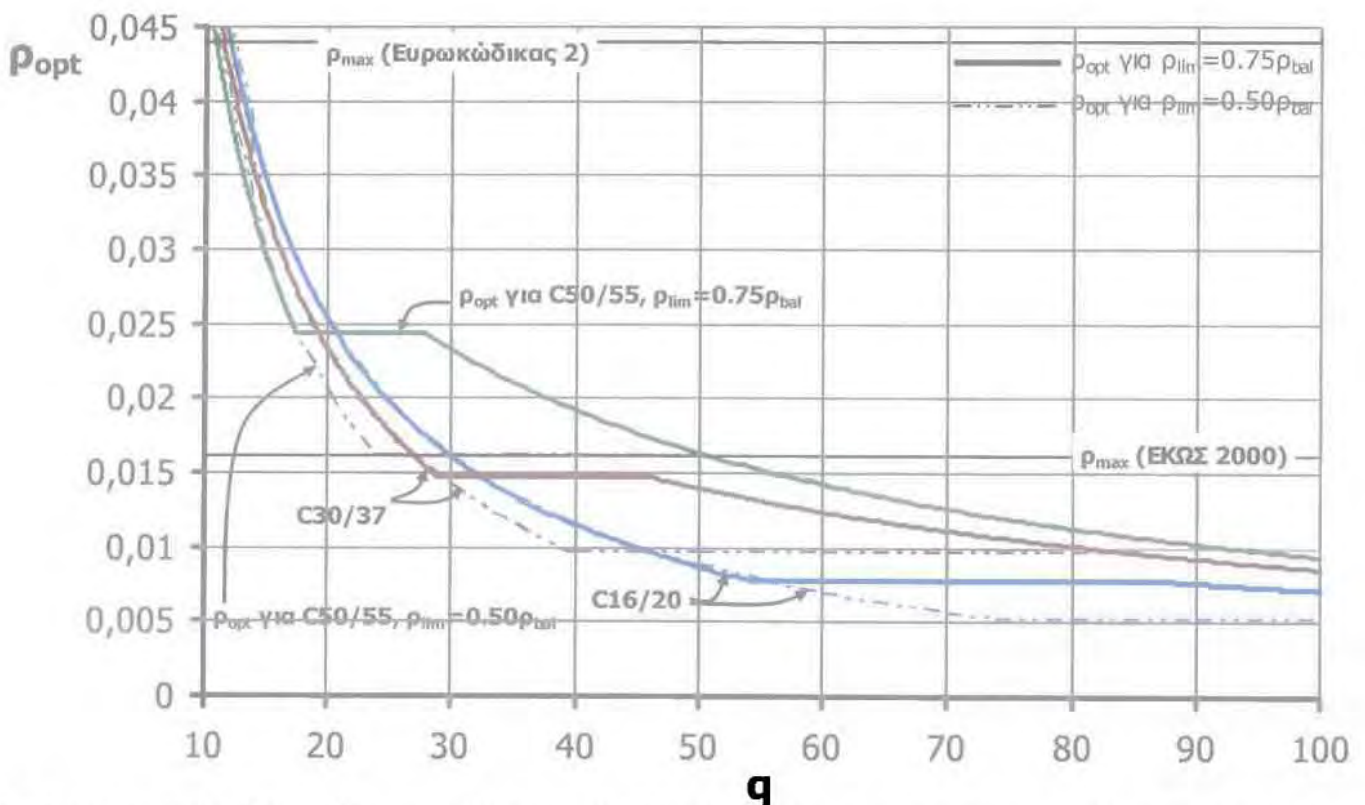
αύξηση πλαστικότητας διατομής ↓	ρ_{lim}	ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού, ρ_{opt}	
		μόνο εφελκόμενος	εφελκόμενος και θλιβόμενος
	$\rho_{bai}= 0.0195$	0.0131	αδύνατο
	$0.75\rho_{bai}= 0.0146$	0.0131	αδύνατο
	$0.50\rho_{bai}= 0.0098$	$\rho_{lim}=0.0098$	αδύνατο
	$0.25\rho_{bai}= 0.0049$	$\rho_{lim}=0.0049$	αδύνατο

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 9, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις τιμές που περίπου ισχύουν στην Ελλάδα, γίνεται ξεκάθαρο ότι επιλέγοντας διαφορετικό ρ_{lim} διαφοροποιείται ο τρόπος και το ποσοστό όπλισης της διατομής, ώστε ο σχεδιασμός να αντιστοιχεί στην οικονομικότερη λύση. Όσο περισσότερο πλαστική επιδιώκεται να γίνει η διατομή τόσο η βέλτιστη λύση τείνει να αντιστοιχεί στον διπλό οπλισμό.

Στον Πίνακα 10, παρουσιάζεται η ευαισθησία της βέλτιστης λύσης οπλισμού στην δεύτερη παράμετρο που το επηρεάζει, το σχετικό κόστος χάλυβα οπλισμού και σκυροδέματος, q . Το εύρος του q που μελετάται είναι από $q=10$ έως $q=100$, για τρεις διαφορετικές αντοχές σκυροδέματος. Στο Σχήμα 18 απεικονίζονται τα δεδομένα του Πίνακα 10. Οι καμπύλες αφορούν δυο διαφορετικές περιπτώσεις άνω ορίου μόνο εφελκόμενου οπλισμού ρ_{lim} , $\rho_{lim}=0.75\rho_{bai}$ και $\rho_{lim}=0.50\rho_{bai}$, ενώ σε όλες τις καμπύλες είναι ευδιάκριτες οι τρεις περιοχές όπλισης, η περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι ο μόνο εφελκόμενος οπλισμός, η περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι μέγιστος εφελκόμενο οπλισμός και τέλος η περιοχή όπου η βέλτιστη λύση διπλός οπλισμός, όπως έχει παρουσιαστεί στην ενότητα 2.2.

Πίνακας 10. Τιμές βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ και $\rho_{lim} = 0.50\rho_{bal}$ - όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$)

Ποιότητα σκυροδέματος	C16/20		C30/37		C50/55	
	=0.75 ($\rho_{lim}=0.0078$)	=0.50 ($\rho_{lim}=0.0052$)	=0.75 ($\rho_{lim}=0.0146$)	=0.50 ($\rho_{lim}=0.0097$)	=0.75 ($\rho_{lim}=0.0244$)	=0.50 ($\rho_{lim}=0.0162$)
q	ρ_{opt}					
10	0.0527	0.0527	0.0507	0.0508	0.0478	0.0480
20	0.0252	0.0252	0.0232	0.0233	0.0244	0.0205
30	0.0160	0.0161	0.0146	0.0141	0.0232	0.0162
40	0.0115	0.0115	0.0146	0.0097	0.0192	0.0162
50	0.0087	0.0087	0.0139	0.0097	0.0163	0.0162
60	0.0078	0.0069	0.0124	0.0097	0.0142	0.0142
70	0.0078	0.0056	0.0111	0.0097	0.0126	0.0126
80	0.0078	0.0052	0.0101	0.0097	0.0113	0.0113
90	0.0076	0.0052	0.0092	0.0092	0.0102	0.0102
100	0.0071	0.0052	0.0085	0.0085	0.0094	0.0094



Σχήμα 18. Καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} για $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$ και $\rho_{lim} = 0.50\rho_{bal}$ - όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Από τα δεδομένα του Πίνακα 10 και την απεικόνισή τους στο Σχήμα 18, προκύπτει ότι, όσο πιο μικρή είναι η τιμή του σχετικού κόστους q , τόσο η βέλτιστη λύση τείνει να αντιστοιχεί στον διπλό οπλισμό, ενώ όσο πιο μεγάλη τόσο τείνει να αντιστοιχεί στον μόνο εφελκόμενο, μέγιστο ή μη. Η κατανομή των λύσεων στις τρεις περιοχές εξαρτάται βέβαια και από την αντοχή σκυροδέματος, f_{ck} , η τιμή της οποίας

χαρακτηρίζει και την κάθε καμπύλη. Για μια δεδομένη αντοχή σκυροδέματος, όταν το q είναι μικρό, σημαίνει ότι ο χάλυβας έχει κόστος κοντά σε αυτό του σκυροδέματος και συνεπώς συμφέρει οικονομικά η τοποθέτηση μεγάλης ποσότητας του. Ευνοείται λοιπόν ο διπλός οπλισμός, σαν την οικονομικότερη λύση. Αντίθετα, όταν το q είναι μεγάλο, ο χάλυβας κοστίζει πολύ περισσότερο από ότι το σκυρόδεμα και δεν συμφέρει οικονομικά η τοποθέτηση μεγάλου ποσοστού από αυτόν. Ευνοείται συνεπώς η λύση του μόνο εφελκόμενου οπλισμού.

Στο Σχήμα 18 επαληθεύεται το συμπέρασμα που βγαίνει παρατηρώντας τη σχέση που ορίζει το ρ_{opt} για τον διπλό οπλισμό [σχέση (45a)], ότι εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από το σχετικό κόστος q . Στα Σχήματα 15, 16 και 17 ήταν προφανές ότι το ίδιο ποσοστό παρουσιάζει πολύ μικρή ευαισθησία στην αλλαγή του λόγου των χαρακτηριστικών τάσεων των υλικών, ιδίως όταν αυτός είναι μεγάλος (ή αλλιώς όταν το f_{ck} είναι μικρό, για χάλυβα S500). Λόγω της αντίστροφης αναλογίας, η αύξηση του λόγου q προκαλεί απότομη μείωση του ποσοστού ρ_{opt} . Στον μόνο εφελκόμενο οπλισμό, η πτώση του ποσοστού ρ_{opt} δεν είναι τόσο απότομη. Η ευαισθησία του ποσοστού ρ_{opt} , εξαρτάται από την τιμή της αντοχής σκυροδέματος, f_{ck} . Ειδικότερα, στον μόνο εφελκόμενο οπλισμό, όσο το f_{ck} μειώνεται, τόσο λιγότερο μεταβάλλεται το ρ_{opt} . Το φαινόμενο γίνεται ακόμη εντονότερο, όταν το q παίρνει μεγάλες τιμές. Την ίδια ακριβώς συμπεριφορά έχει και το βέλτιστο ποσοστό για τον διπλό οπλισμό. Οι τρεις περιοχές λύσεων, που ορίζονται για κάθε καμπύλη, διαφοροποιούνται τόσο στο εύρος όσο και στα όρια, για διαφορετικές αντοχές f_{ck} . Οι συνδυασμοί f_{ck} - q που ορίζουν τις τρεις περιοχές λύσεων, μπορούν να προσδιοριστούν για $\rho_{lim}=0.75 \rho_{bal}$, βάσει των σχέσεων (12a), (20) και (45a) ως εξής:

$$\frac{1}{\frac{q}{1+\delta_1} + 1.578n_f} \leq \rho_{lim}$$

$$\text{ή } \frac{1}{\frac{q}{1+\delta_1} + 1.578n_f} < \frac{0.244}{n_f}$$

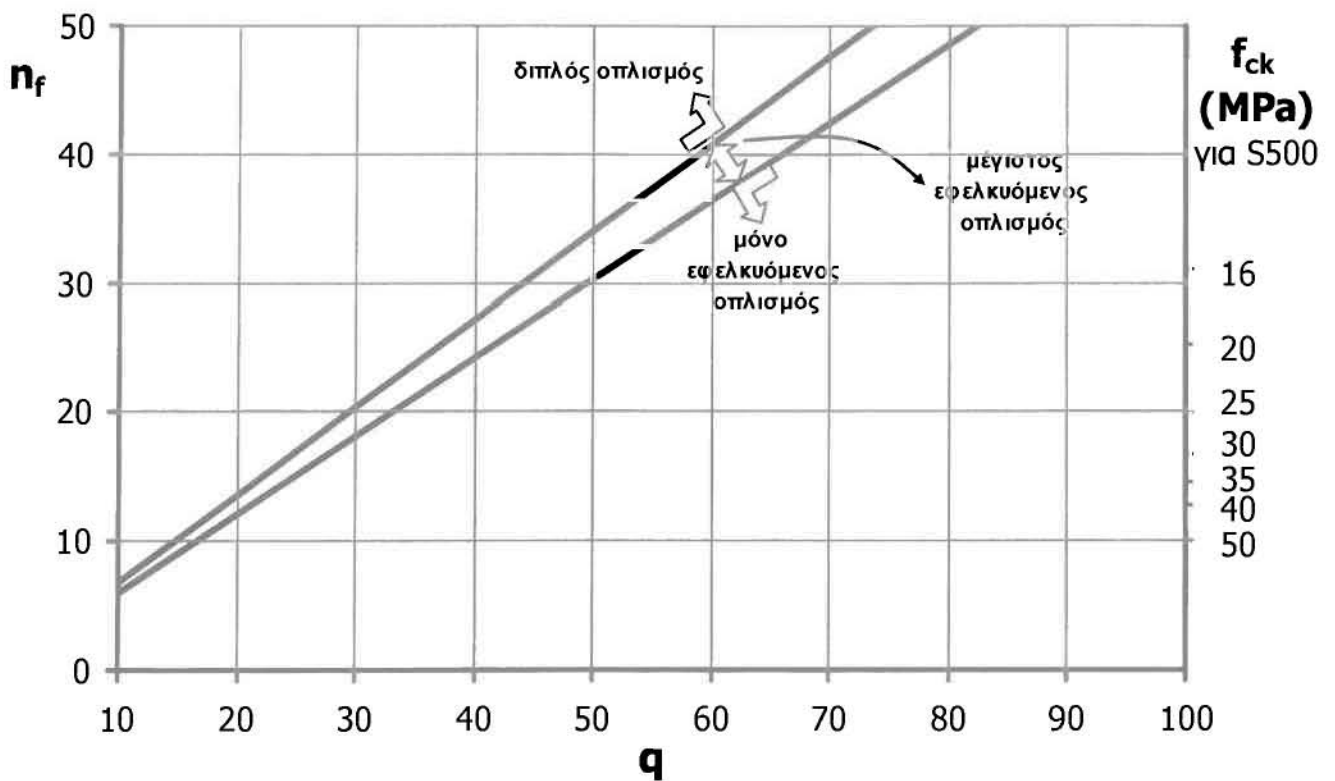
$$\text{ή } n_f < \mathbf{0.397} \frac{q}{1 + \delta_1} \quad \text{για τον μόνο εφελκόμενο οπλισμό} \quad (55)$$

$$\text{και } \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.394}{n_f(1-\delta_2)} + \frac{0.366}{n_f} > \rho_{lim}$$

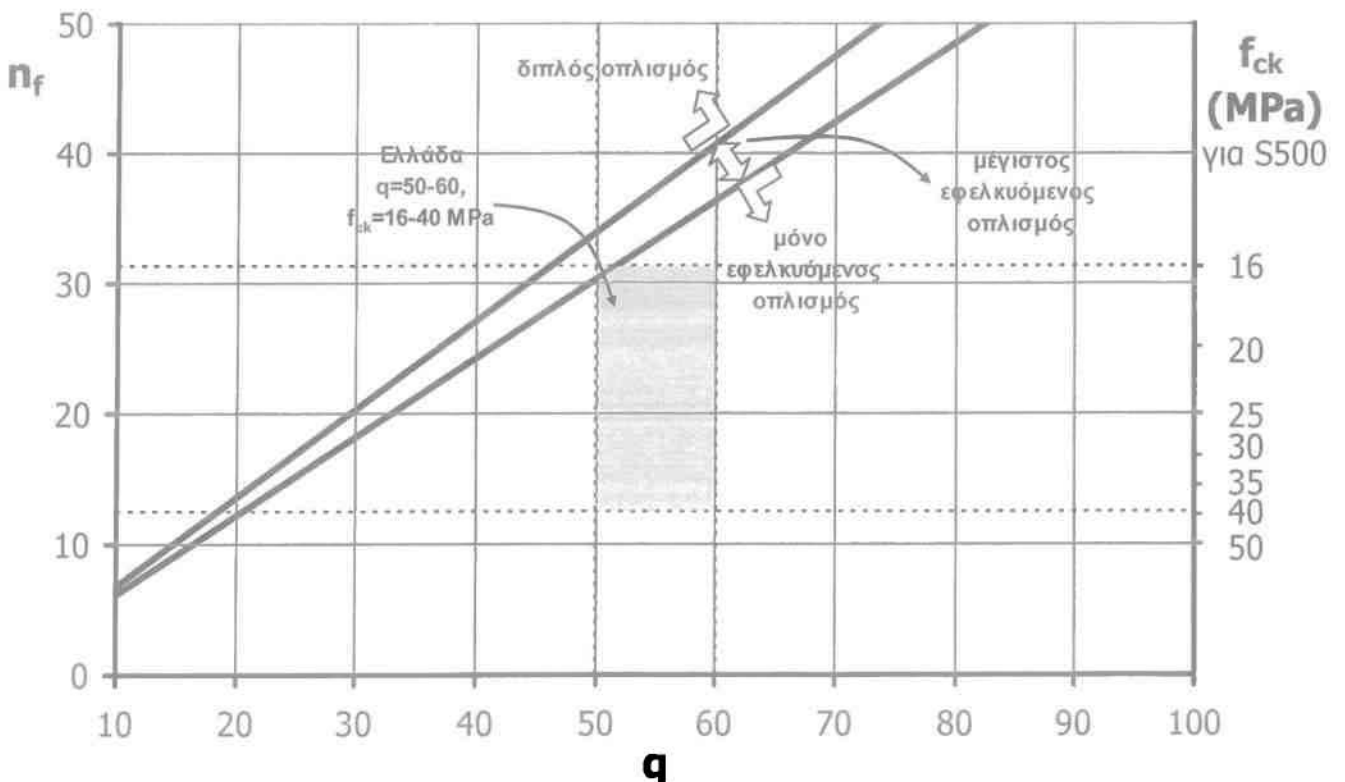
$$\text{ή } \frac{1+\delta_1}{2q} - \frac{0.394}{n_f(1-\delta_2)} + \frac{0.366}{n_f} > \frac{0.244}{n_f}$$

$$\text{ή } n_f > \frac{2q}{1 + \delta_1} \left[\frac{\mathbf{0.394}}{(1 - \delta_2)} - \mathbf{0.122} \right] \quad \text{για τον διπλό οπλισμό} \quad (56)$$

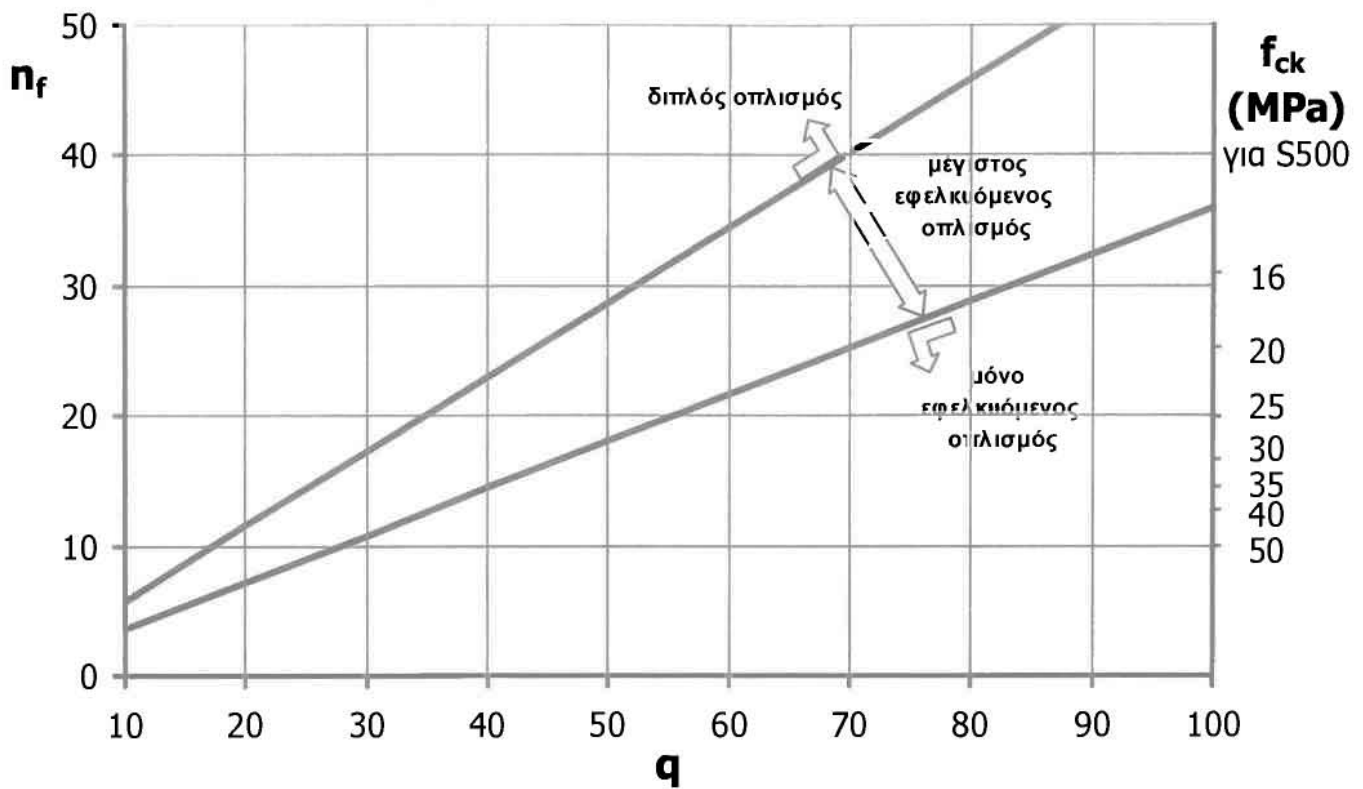
Από τις σχέσεις (55) και (56) μπορούν να προσδιοριστούν οι τρεις περιοχές λύσεων για ένα εύρος τιμών σχετικού κόστους q και για $\delta_1 = \delta_2 = 0.10$ (βλ. Σχήμα 20). Στα Σχήματα 19 και 21 απεικονίζονται τα όρια των τριών περιοχών για $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ και $\rho_{lim} = 0.50\rho_{bal}$.



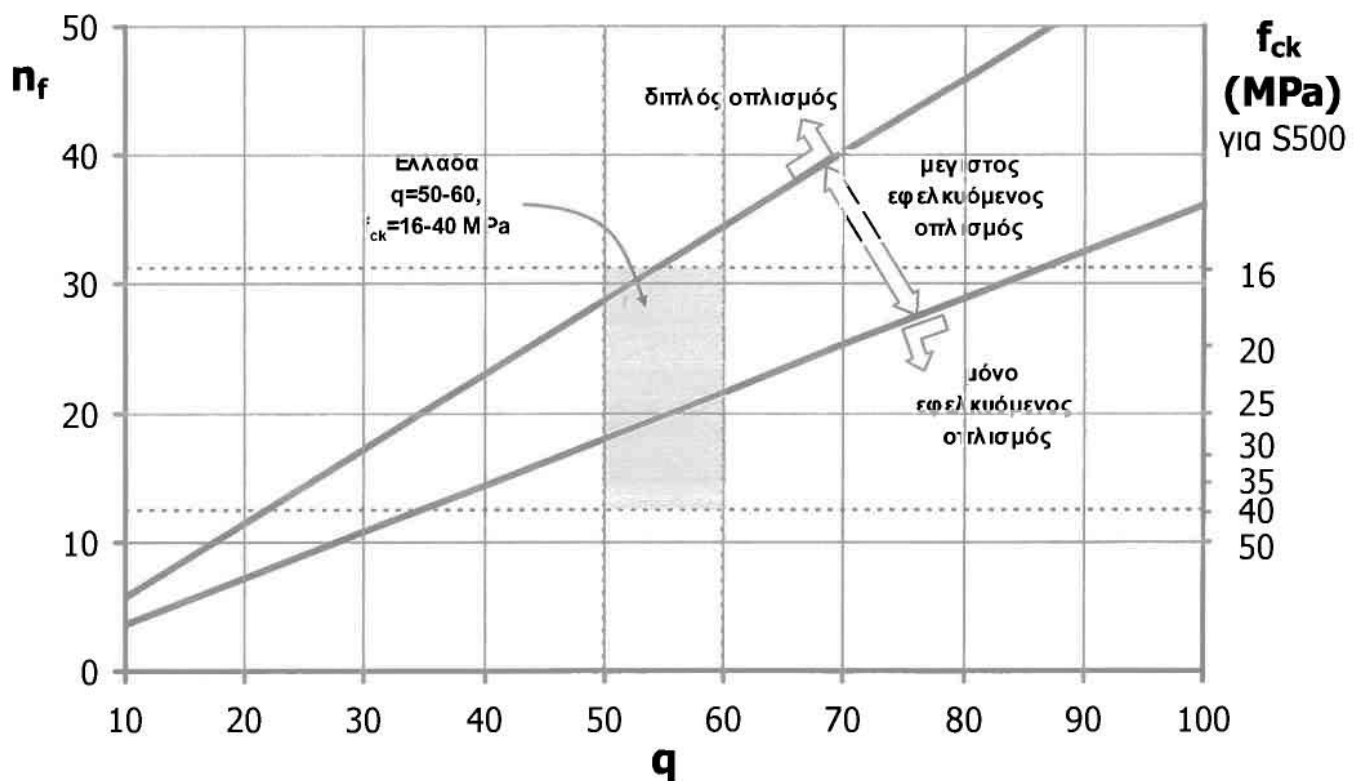
Σχήμα 19. Συνδυασμοί (q, n_f) και περιοχές βέλτιστων λύσεων, για $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).



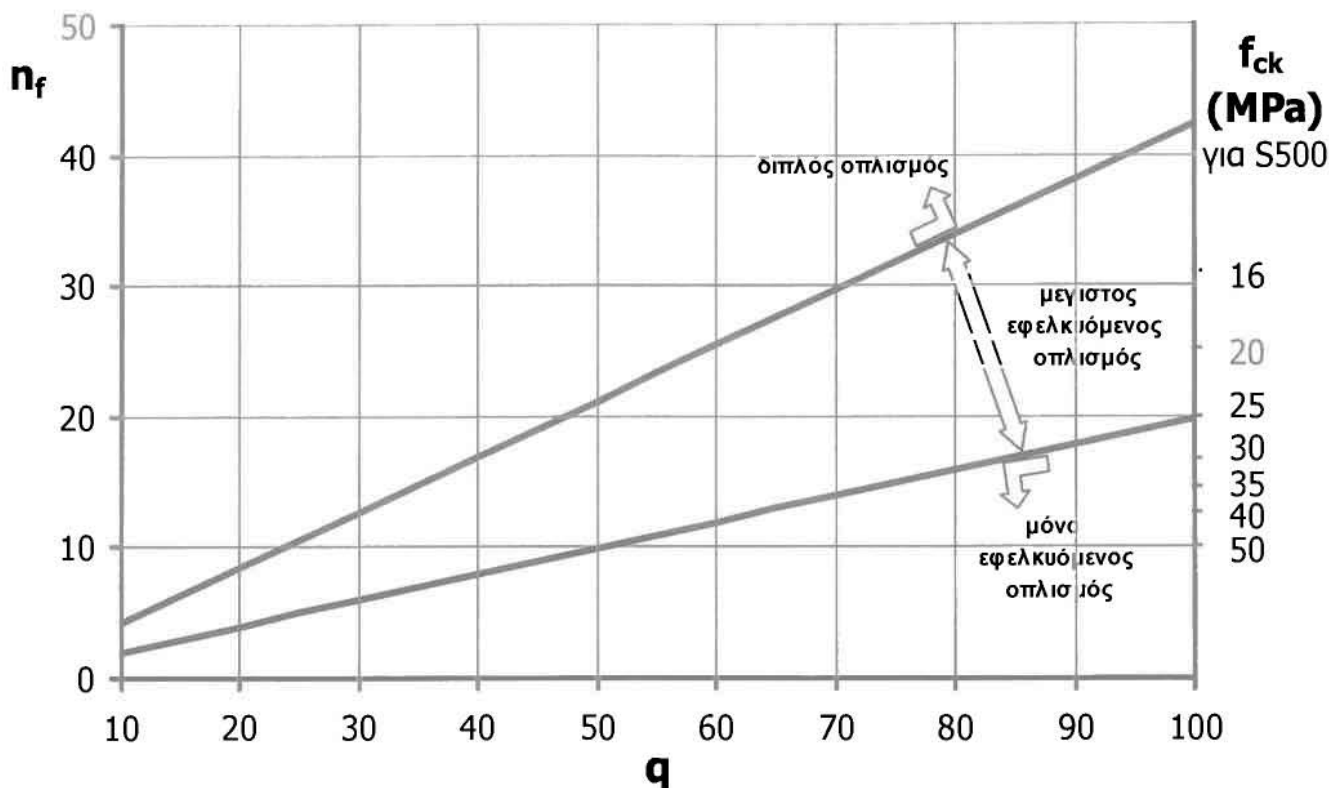
Σχήμα 19α. Συνδυασμοί (q, n_f) και περιοχές βέλτιστων λύσεων, για $\rho_{lim} = \rho_{bal}$ ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).



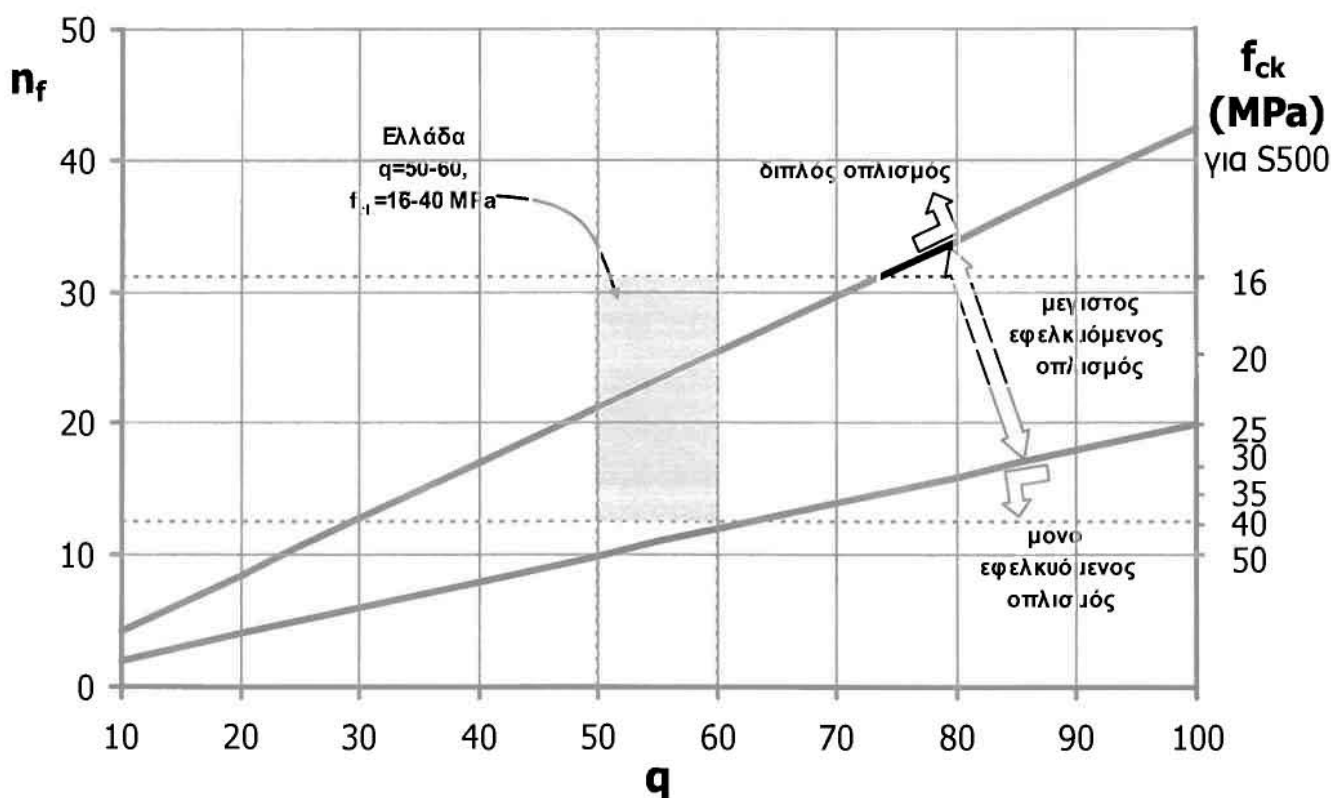
Σχήμα 20. Συνδυασμοί (q, n_f) και περιοχές βέλτιστων λύσεων, για $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).



Σχήμα 20α. Συνδυασμοί (q, n_f) και περιοχές βέλτιστων λύσεων, για $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).



Σχήμα 21. Συνδυασμοί (q, n_f) και περιοχές βέλτιστων λύσεων, για $\rho_{lim}=0.50\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).



Σχήμα 21α. Συνδυασμοί (q, n_f) και περιοχές βέλτιστων λύσεων, για $\rho_{lim}=0.50\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

Από τα Σχήματα 19-21 επαληθεύεται το συμπέρασμα που προέκυψε και από προηγούμενα γραφήματα, ότι όσο το ρ_{lim} μικραίνει, τόσο οι βέλτιστες λύσεις τείνουν

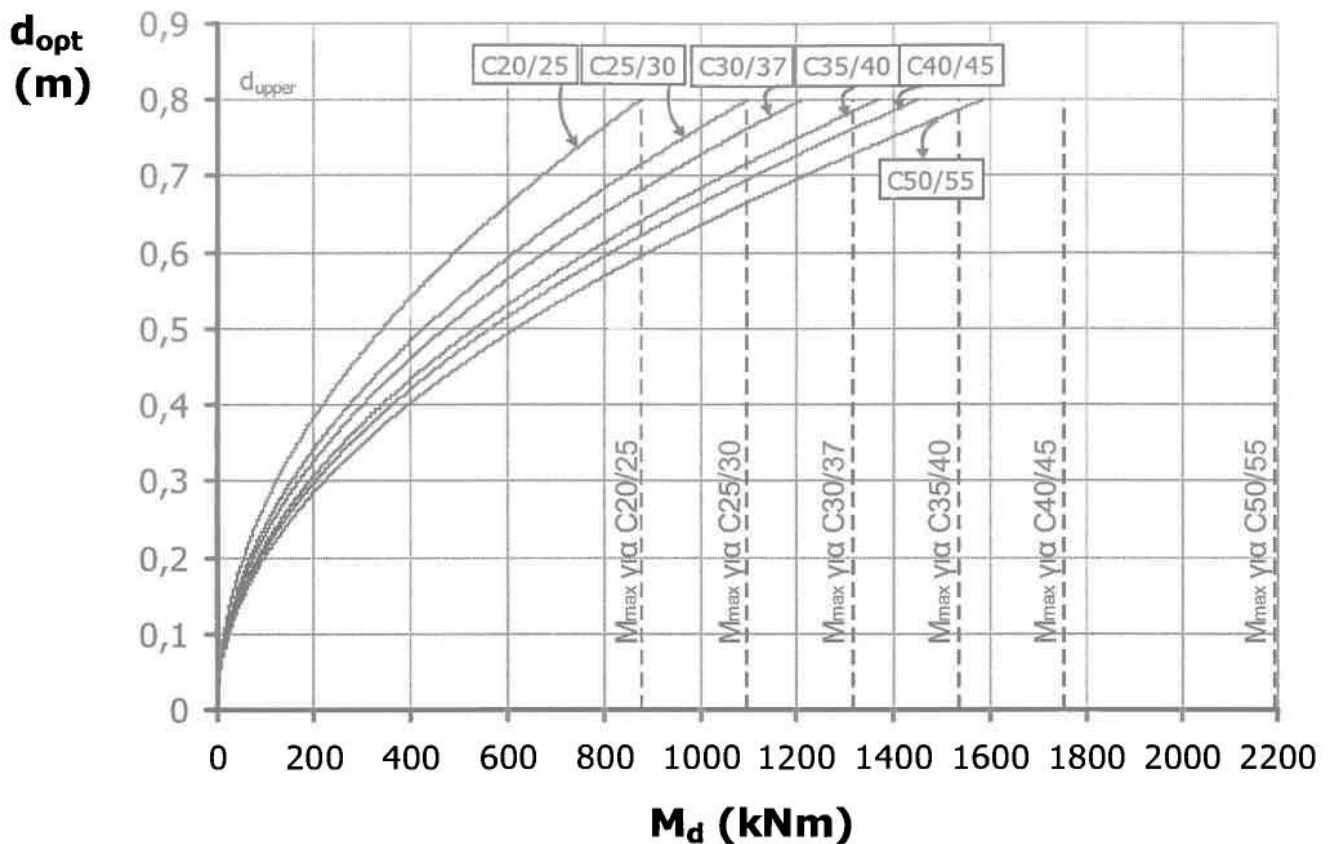
να είναι στη μεριά του διπλού οπλισμού. Σε παρόμοιο συμπέρασμα κατέληξαν και οι B.Ceranic και C.Fryer (Springer-Verlag 2000), βάσει του βρετανικού κανονισμού BS 8110. Επιπλέον, όσο το α μεγαλώνει, τόσο το εύρος της περιοχής όπου οι βέλτιστες λύσεις αντιστοιχούν στον μέγιστο εφελκόμενο οπλισμό μεγαλώνει. Η διεύρυνση αυτής της περιοχής είναι ακόμη πιο έντονη, όσο το ρ_{lim} χαμηλώνει. Δηλαδή όσο πιο μικρή είναι η τιμή του ρ_{lim} , τόσο ενισχύονται οι περιοχές όπου οι λύσεις αντιστοιχούν στον μέγιστο εφελκόμενο και στον διπλό οπλισμό, ενώ μειώνεται η ισχύς της περιοχής όπου οι λύσεις είναι μόνο εφελκόμενου οπλισμού αλλά όχι μέγιστου. Τα Σχήματα 19 και 21 βασίζονται σε αντίστοιχες ανισότητες με αυτές των σχέσεων (55) και (56), εάν σε αυτές αντικατασταθούν οι σχέσεις που αντιστοιχούν στο ποσοστό ρ_{lim} το οποίο μελετάται.

2.4.2. Μελέτη της Συμπεριφοράς του Βέλτιστου Στατικού Ύψους Ορθογωνικής Διατομής (d_{opt})

Το βέλτιστο στατικό ύψος μιας ορθογωνικής διατομής, είναι το ύψος που αντιστοιχεί στη διατομή που οπλίζεται με βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} . Ο υπολογισμός της τιμής του γίνεται από την ισορροπία δυνάμεων, σύμφωνα με τον κλασικό σχεδιασμό, όπως περιγράφηκε ενότητες 2.1. και 2.2. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η τιμή του γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού είναι αυτή που καθορίζει τον τρόπο όπλισης που απαιτείται να έχει η διατομή για να αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος. Συνεπώς με γνωστό τον τρόπο όπλισης, υπολογίζεται το στατικό ύψος, από την αντίστοιχη σχέση ισορροπίας.

2.4.2.1. Βέλτιστο Στατικό Ύψος για την Περίπτωση Όπλισης με Μόνο Εφελκόμενο Οπλισμό

Το βέλτιστο στατικό ύψος για την περίπτωση όπλισης διατομών με μόνο εφελκόμενο οπλισμό, παραπέμπει σε ένα συνδυασμό αντοχής σκυροδέματος, f_{ck} και σχετικού κόστους χάλυβα και σκυροδέματος, α , τέτοιον ώστε το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό εφελκόμενου οπλισμού ρ_{opt} , να αντιστοιχεί σε μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Στη συνέχεια, με γνωστή την τιμή ρ_{opt} , από ισορροπία δυνάμεων και ροπών σε επίπεδο διατομής, προκύπτει η τιμή του στατικού ύψους που αντιστοιχεί στο βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού ή αλλιώς η τιμή του βέλτιστου στατικού ύψους, d_{opt} .

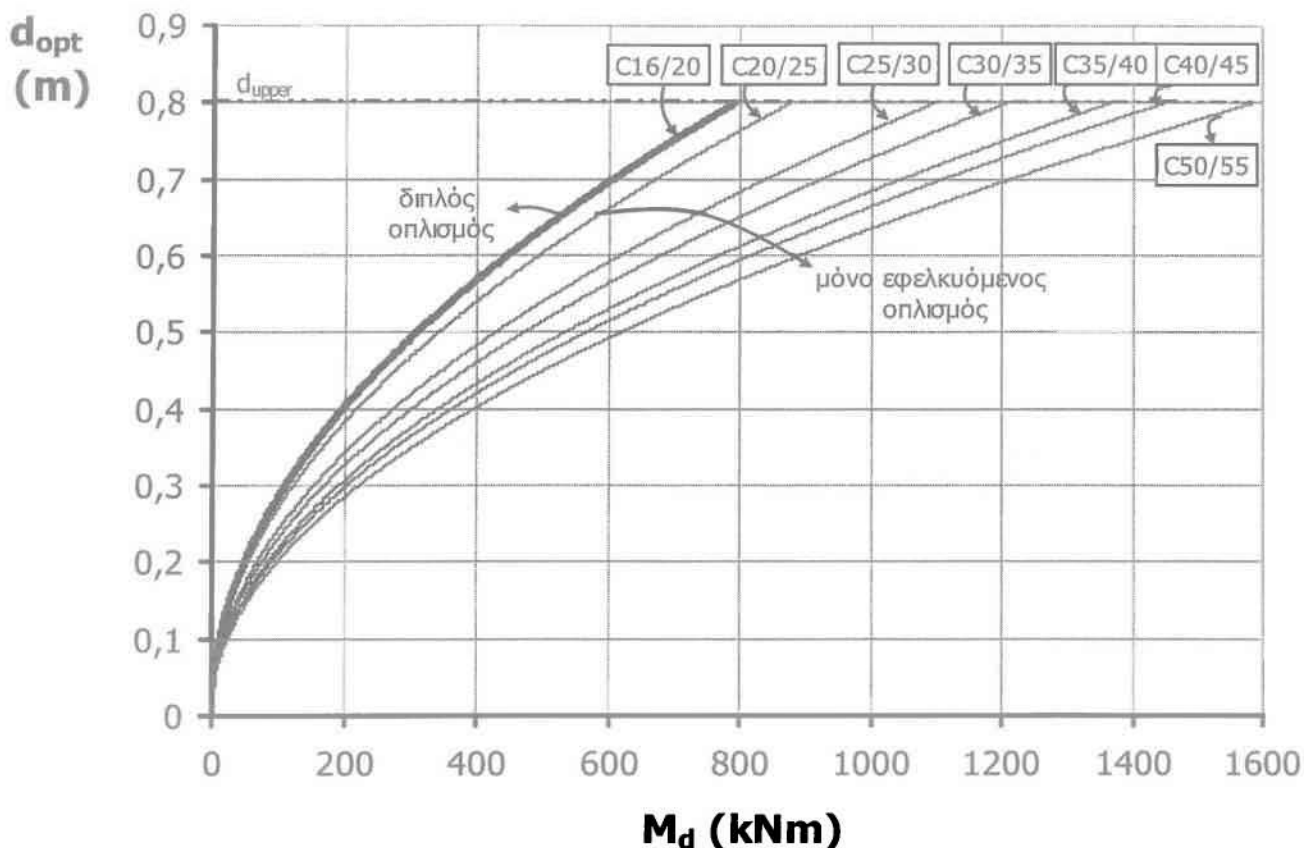


Σχήμα 22. Καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους διατομής d_{opt} για $q=50$, $b=0.4$ m και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).

Το Σχήμα 22 αντιστοιχεί σε καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους d_{opt} , για την περίπτωση όπου $q=50$, $b=0.4$ m και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Οι καμπύλες δίνουν τη συμπεριφορά του βέλτιστου στατικού ύψους με την αύξηση της ροπής κάμψης M_d . Η κάθε μια από αυτές αντιστοιχεί σε μια τιμή θλιπτικής αντοχής σκυροδέματος, ενώ οι τιμές των αντοχών είναι τέτοιες ώστε σε συνδυασμό με την τιμή $q=50$ το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού να αντιστοιχεί στο μόνο εφελκόμενο οπλισμό [$\rho_{opt} < \rho_{lim}$ με βάση τη σχέση (12a)]. Σαν άνω όριο του στατικού ύψους θεωρείται η τιμή $d=0.5b=0.5 \cdot 0.4=0.8$ m, σύμφωνα με την εμπειρική σχέση $h/b=1/2$ (αντί για h , χρησιμοποιήθηκε d). Ο περιορισμός αυτός δεν είναι υποχρεωτικός και δεν εφαρμόζεται σε κάθε σχεδιασμό. Υπάρχει περίπτωση, το μέγιστο ύψος της διατομής να περιορίζεται ακόμη περισσότερο λόγω άλλων παραγόντων, όπως το μέγιστο επιτρεπόμενο βέλος κάμψης. Παρατηρώντας τις καμπύλες προκύπτει το συμπέρασμα ότι για μικρές τιμές τις ροπής κάμψης, το βέλτιστο στατικό ύψος παρουσιάζει μεταβαλλόμενο ρυθμό αύξησης, ενώ όταν οι τιμές είναι μεγαλύτερες ο ρυθμός αύξησης τείνει να είναι σταθερός. Στο Σχήμα 22 σημειώνονται επίσης οι μέγιστες καμπτικές ροπές, που μπορεί να φέρει μια διατομή μέγιστων διαστάσεων (0.4 m x 0.8 m), όταν οπλίζεται με τον μέγιστο επιτρεπόμενο οπλισμό ρ_{lim} [σχέση (26)]. Η σχέση είναι ανάλογη της αντοχής σκυροδέματος, γι'αυτό και κάθε καμπύλη d_{opt} έχει και ένα όριο M_{max} . Για παράδειγμα, για την περίπτωση της Ελλάδας, όπου $q=50$, εάν το πλάτος της διατομής είναι ίσο με $b=0.4$ m και η εξωτερική ροπή που καλείται η υπό σχεδιασμό διατομή να φέρει είναι ίση με $M_d=400$ kNm, τότε για σχεδιασμό με **C20/25** το βέλτιστο στατικό ύψος είναι

0.54m, με **C30/35** είναι **0.46 m**, ενώ με **C50/55** είναι **0.40 m**. Αντίστοιχο γράφημα του Σχήματος 22 μπορεί να φτιαχτεί για διαφορετικό q , b αλλά και ρ_{lim} .

2.4.2.2. Βέλτιστο Στατικό Ύψος για την Περίπτωση Όπλισης με Διπλό Όπλισμό



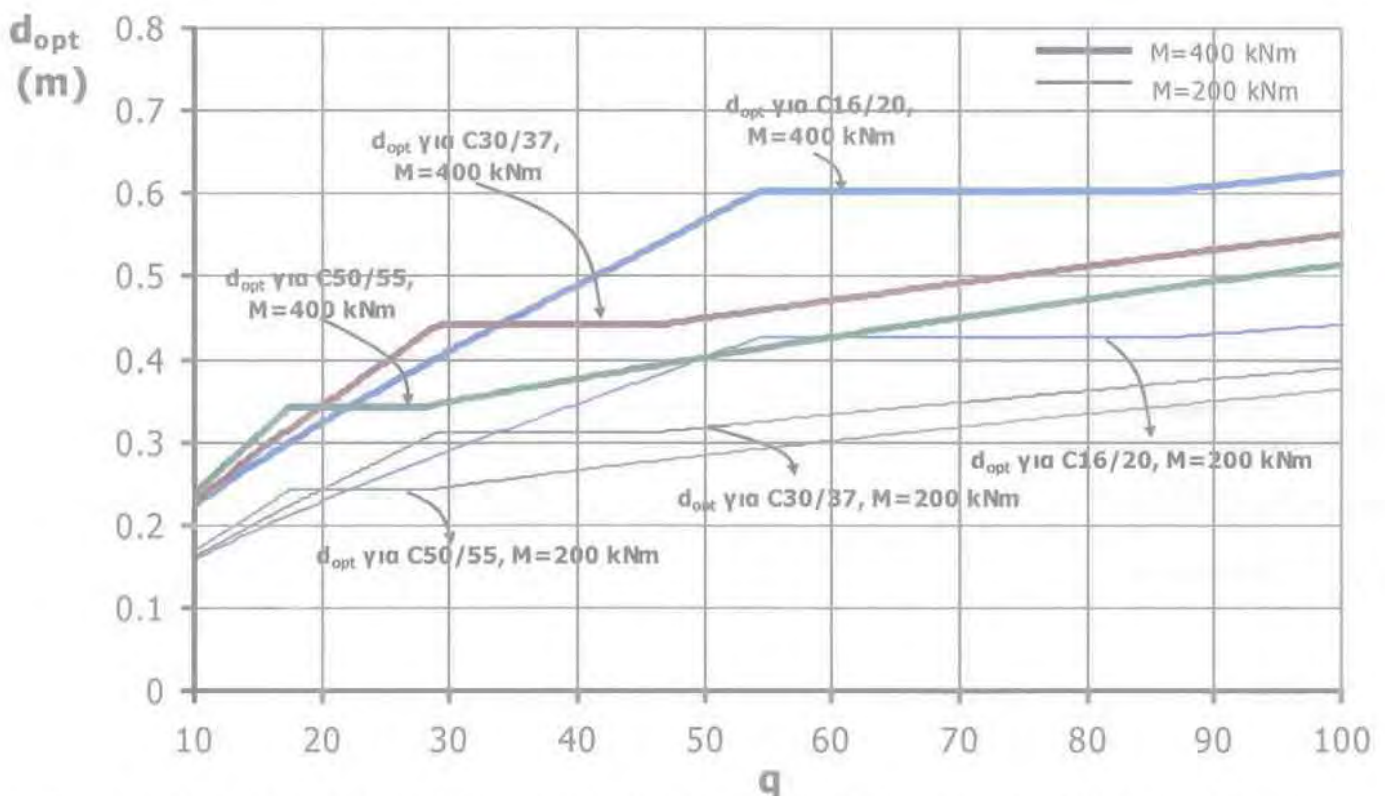
Σχήμα 23. Καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους διατομής d_{opt} για $q=50$, $b=0.4$ m και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

Το Σχήμα 23 αντιστοιχεί στις καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους d_{opt} , για την περίπτωση όπου $q=50$, $b=0.4$ m, και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Οι καμπύλες για αντοχές από C20/25 έως C50/55, είναι οι ίδιες με αυτές του Σχήματος 22 και αντιστοιχούν σε μόνο εφελκόμενο οπλισμό, ενώ η καμπύλη για C16/20 αντιστοιχεί σε διπλό οπλισμό. Αυτό σημαίνει ότι η αντοχή C16/20 σε συνδυασμό με το σχετικό κόστος $q=50$, δίνει σαν βέλτιστη λύση τον διπλό οπλισμό. Έπειτα, από την ισορροπία δυνάμεων και ροπών σε επίπεδο διατομής που οπλίζεται με διπλό οπλισμό, προκύπτει η τιμή του στατικού ύψους που αντιστοιχεί στο βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού ή αλλιώς το βέλτιστο στατικό ύψος, d_{opt} . Στο Σχήμα 23, όπως και στο προηγούμενο γράφημα, απεικονίζεται η συμπεριφορά του βέλτιστου στατικού ύψους στη μεταβολή της ροπής κάμψης. Η συμπεριφορά των καμπυλών τόσο για τον μόνο εφελκόμενο όσο και για τον θλιβόμενο οπλισμό είναι ίδια. Οι καμπύλες τοποθετήθηκαν σε ένα γράφημα, έτσι

ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των δύο περιπτώσεων βέλτιστων λύσεων, δηλαδή μεταξύ μόνο εφελκόμενου οπλισμού και διπλού.

2.4.2.3. Βέλτιστο Στατικό Ύψος για Όλες τις Περιπτώσεις Όπλισης Διατομών

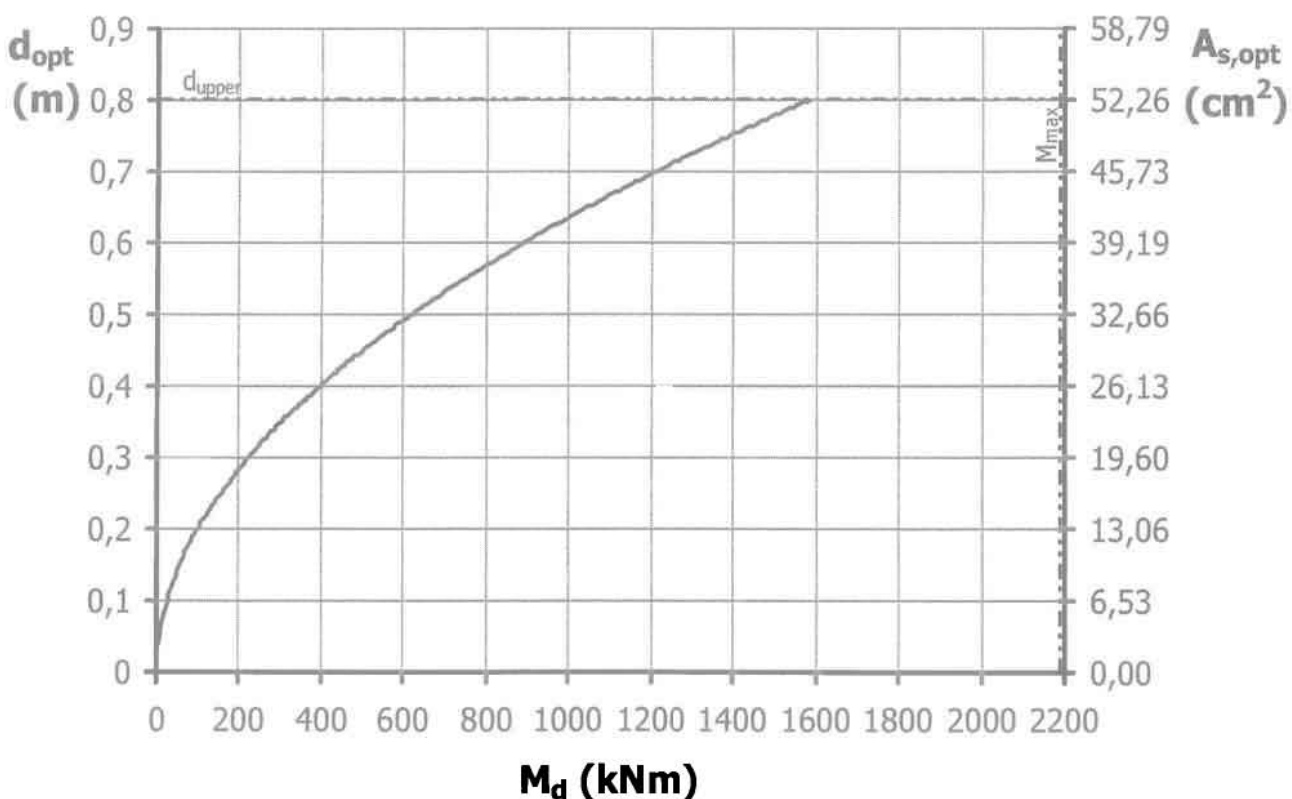
Το Σχήμα 23, της παραγράφου 2.4.2.2. περιλαμβάνει τις βέλτιστες λύσεις στατικών υψών για όλες τις περιπτώσεις όπλισης, μιας και η κάθε καμπύλη από αυτές που απεικονίζονται στο γράφημα, αντιστοιχεί σε έναν τρόπο όπλισης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σχετικό κόστος του χάλυβα και του σκυροδέματος, q , είναι σταθερό και ίσο με 50 και η κάθε καμπύλη αφορά μια σταθερή αντοχή σκυροδέματος. Συνεπώς βάσει των σχέσεων (12α) και (45β), σε κάθε καμπύλη αντιστοιχεί μια σταθερή τιμή βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού, η οποία μπορεί να δίνει σαν όπλιση τον μόνο εφελκόμενο οπλισμό, τον μέγιστο εφελκόμενο οπλισμό ή τον διπλό οπλισμό. Στο Σχήμα 24 που ακολουθεί, απεικονίζονται οι καμπύλες βέλτιστων στατικών υψών, για επιλεγμένες αντοχές σκυροδέματος, συναρτήσε του λόγου των κοστών χάλυβα και σκυροδέματος, q . Στο γράφημα αυτό, σε κάθε καμπύλη η τιμή της θλιπτικής αντοχής διατηρείται σταθερή ενώ το σχετικό κόστος q μεταβάλλεται. Άρα, σε κάθε καμπύλη το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού δεν διατηρείται σταθερό, αλλά μεταβάλλεται, περιλαμβάνοντας τις τρεις περιοχές λύσεων που προαναφέρθηκαν.



Σχήμα 24. Καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους διατομής d_{opt} για $M_d=400$ kNm, $b=0.4$ m και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

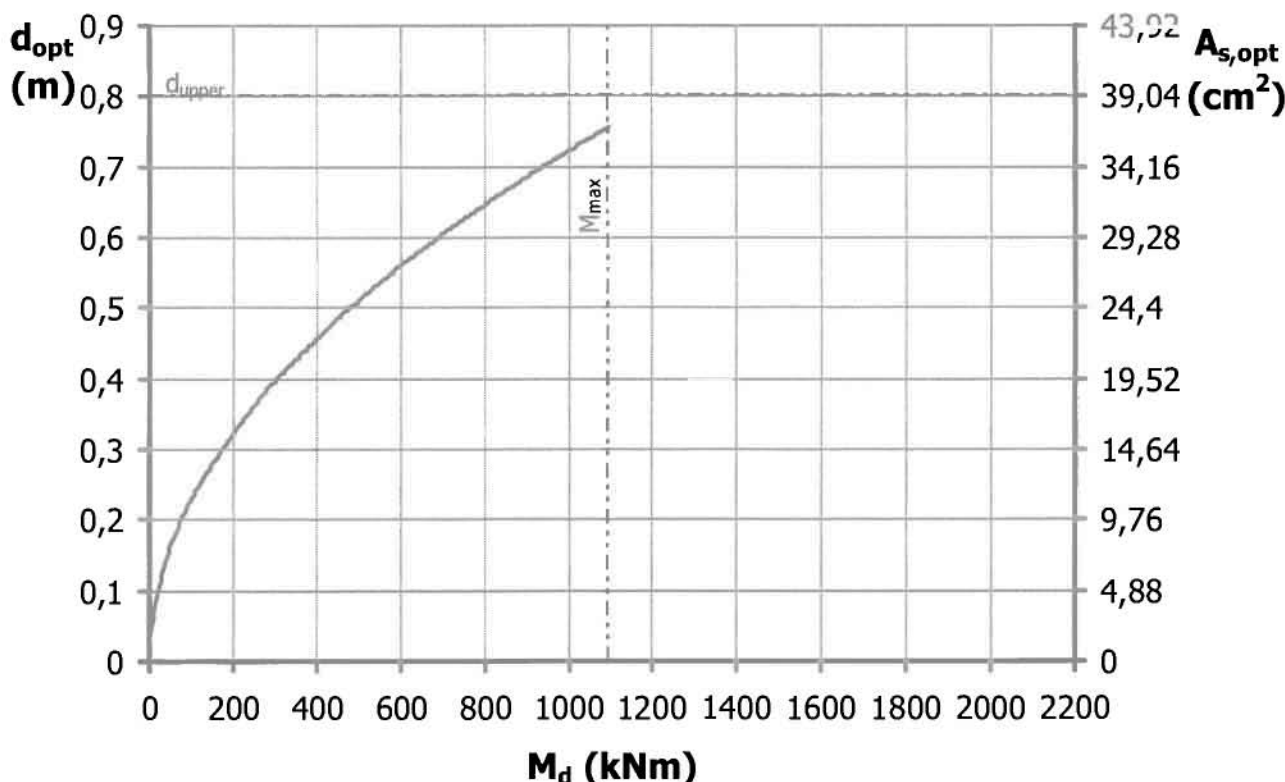
Το Σχήμα 24 αντιστοιχεί στις καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους διατομής d_{opt} συναρτήσεως του λόγου των κοστών q , όταν η ροπή κάμψης είναι ίση με $M_d=400$ kNm και 200 kNm, η διατομή έχει πλάτος $b=0.4$ m και το άνω όριο του μόνο εφελκόμενου οπλισμού είναι $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Οι τρεις περιοχές όπλισης είναι εμφανείς, όπως ακριβώς και στο Σχήμα 18. Ακριβέστερα, το Σχήμα 24 περιλαμβάνει τα στατικά ύψη που αντιστοιχούν στα βέλτιστα γεωμετρικά ποσοστά οπλισμού του Σχήματος 18. Έτσι, στην περιοχή όπου οι τιμές του σχετικού κόστους q είναι μικρές και οι βέλτιστες λύσεις αντιστοιχούν στο διπλό οπλισμό, το βέλτιστο ποσοστό παρουσιάζει απότομη πτώση με την αύξηση του q ενώ αντίστοιχα το βέλτιστο στατικό ύψος παρουσιάζει απότομη άνοδο. Ταυτόχρονα, στο κομμάτι όπου οι καμπύλες βέλτιστου γεωμετρικού οπλισμού είναι σταθερές (μέγιστος εφελκόμενος οπλισμός), οι καμπύλες βέλτιστου στατικού ύψους είναι επίσης σταθερές, ενώ εκεί που πέφτουν με μικρότερο ρυθμό (μόνο εφελκόμενος οπλισμός), το στατικό ύψος αυξάνεται με μικρότερο ρυθμό.

Τα Σχήματα 25, 26 και 27 συγκεντρώνουν τις βέλτιστες λύσεις $A_{s,opt}-d_{opt}$ συναρτήσεως της εξωτερικής ροπής κάμψης M_d , για τρεις εφαρμογές σχεδιασμού, όπου τα δεδομένα τους είναι ίδια και το μόνο που αλλάζει είναι η αντοχή του σκυροδέματος. Ο σχεδιασμός αφορά την περίπτωση πλαστιμότητας, $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$. Στο κάθε διάγραμμα, διατηρείται σταθερό τόσο το q όσο και το f_{ck} . Συνεπώς στο κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί μια τιμή ρ_{opt} , η οποία εν συγκρίσει με το άνω όριο ρ_{lim} , ορίζει τον βέλτιστο τρόπο όπλισης της διατομής. Στα γραφήματα σημειώνεται το άνω όριο του στατικού ύψους d_{upper} , σύμφωνα με την εμπειρικά άνω επιτρεπόμενη αναλογία των διαστάσεων $b/d=1/2$, καθώς και το άνω όριο της φέρουσας ροπής, M_{max} , της διατομής που οπλίζεται με μόνο εφελκόμενο οπλισμό σε ποσοστό ρ_{lim} και διαθέτει τις μέγιστες επιτρεπόμενες διαστάσεις.

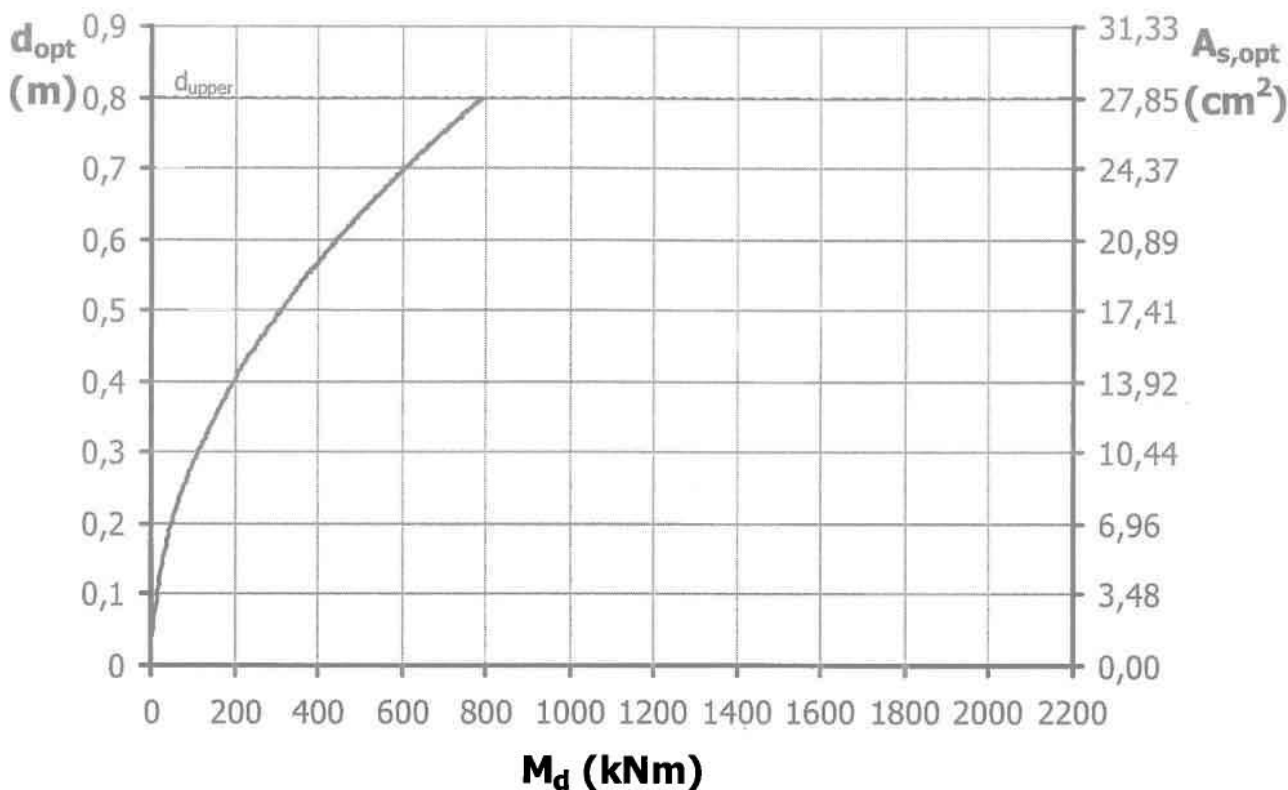


Σχήμα 25. Βέλτιστος συνδυασμός λύσεων (d_{opt} , $A_{s,opt}$) για $b=0.4$ m, $q=50$, $f_{ck}=50$ MPa και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).

Στο παράδειγμα του οποίου οι λύσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 25, η βέλτιστη λύση ρ_{opt} είναι ίση με 0.0163, ενώ το άνω όριο για τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό είναι ίσο με $0.75\rho_{bal}$ ή 0.0244. Συνεπώς, ο βέλτιστος οπλισμός είναι ο μόνο εφελκούμενος, ενώ όλο το γράφημα δίνει λύσεις που αντιστοιχούν σ'αυτή την τιμή οπλισμού. Σύμφωνα με τον ΕΚΩΣ 2000, ο οποίος θέτει ως άνω όριο του μέγιστου επιτρεπόμενου οπλισμού την τιμή $\rho_{max}=0.0161$, η τιμή του ρ_{opt} δεν μπορεί να εφαρμοσθεί και η επόμενη εφικτή τιμή είναι το ίδιο το ρ_{max} . Ο Ευρωκώδικας 2, είναι πολύ πιο ανεκτικός στο μέγιστο επιτρεπόμενο ποσοστό οπλισμού το οποίο θέτει, $\rho_{max}=0.044$. Επιλέγοντας το όριο που θέτει ο τελευταίος σαν το ισχύον, η βέλτιστη λύση που προκύπτει από τα δεδομένα σχεδιασμού είναι αποδεκτή. Από το Σχήμα 25, για την περίπτωση σχεδιασμού με $q=50$ (Ελλάδα), για δεδομένο πλάτος διατομής $b=0.4$ m και δεδομένη ποιότητα σκυροδέματος C50/55, τότε για διάφορες τιμές της εξωτερικής ροπής κάμψης, παίρνουμε τον βέλτιστο συνδυασμό στατικού ύψους διατομής και εμβαδού εφελκόμενου χάλυβα. Στο Σχήμα 26, η αντοχή του σκυροδέματος είναι η μισή σε σχέση με αυτή του Σχήματος 25 (C25/30), με αποτέλεσμα η βέλτιστη λύση να αντιστοιχεί στον μέγιστο εφελκούμενο οπλισμό, $\rho_{opt}=\rho_{lim}=0.0122$. Η μέγιστη ροπή που μπορεί να φέρει μια διατομή με αυτό τον οπλισμό, μειώθηκε αναλογικά με το σκυροδέμα. Τέλος, στο Σχήμα 27 η αντοχή του σκυροδέματος μειώνεται ακόμη περισσότερο (C16/20), με αποτέλεσμα η βέλτιστη λύση για το ίδιο q ($=50$), να αντιστοιχεί στον διπλό οπλισμό.

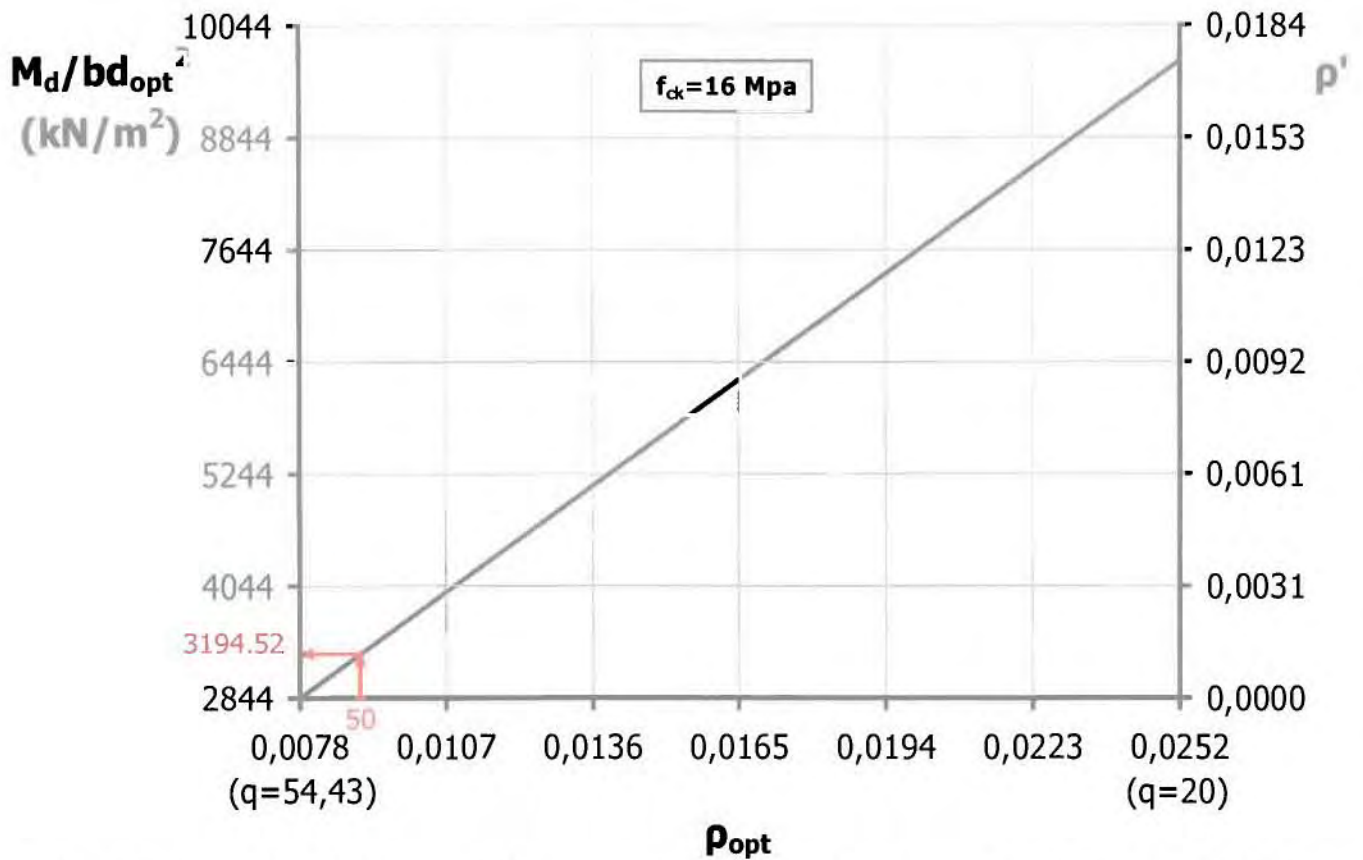


Σχήμα 26. Βέλτιστος συνδυασμός λύσεων (d_{opt} , $A_{s,opt}$) για $b=0.4$ m, $q=50$, $f_{ck}=25$ MPa και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -μέγιστος εφελκούμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).

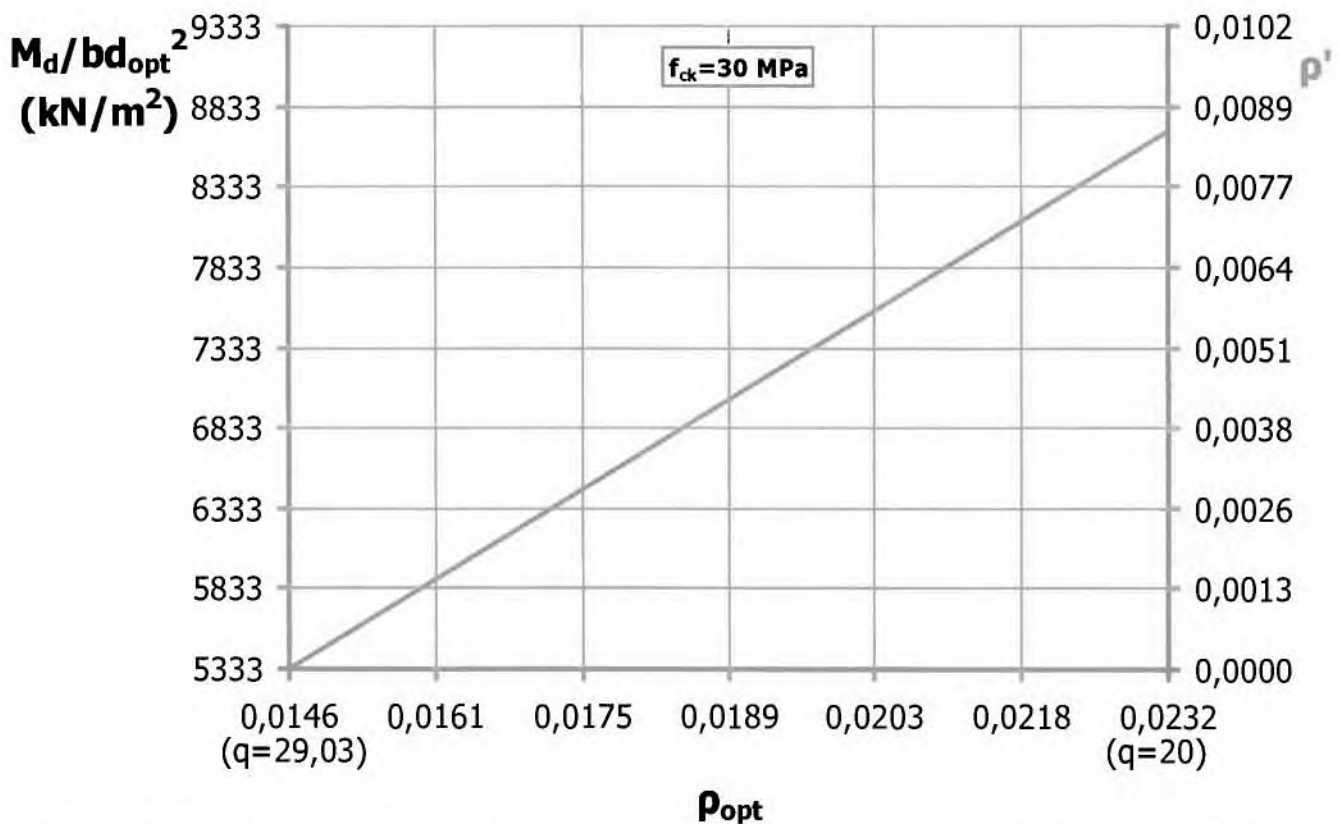


Σχήμα 27. Βέλτιστος συνδυασμός λύσεων (d_{opt} , $A_{s,opt}$) για $b=0.4$ m, $q=50$, $f_{ck}=16$ MPa και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -διπλός οπλισμός ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

Στα διαγράμματα 25, 26 και 27, επαληθεύεται το συμπέρασμα που προέκυψε προηγουμένως, από την παρατήρηση της συμπεριφοράς του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού εφελκόμενου οπλισμού όταν μεταβάλλεται η χαρακτηριστική αντοχή σκυροδέματος. Ειδικότερα, εάν συγκριθούν τα Σχήματα 25 και 26, τα οποία αντιστοιχούν σε μόνο εφελκόμενο οπλισμό, παρατηρείται ότι η μείωση της αντοχής του σκυροδέματος (ή η αύξηση του λόγου η_f) προκάλεσε μείωση του βέλτιστου ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} . Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι για το ίδιο στατικό ύψος d και το ίδιο πλάτος b , απαιτείται λιγότερο εμβαδό οπλισμού για μικρότερη αντοχή σκυροδέματος. Στην περίπτωση όπου το ρ_{opt} δεν παραμένει σταθερό, είναι δύσκολο να κατασκευαστούν παρόμοια διαγράμματα, αφού κάποιες τιμές του ρ_{opt} αντιστοιχούν σε εφελκόμενο οπλισμό και κάποιες άλλες σε διπλό. Ωστόσο, απομονώνοντας τις λύσεις του διπλού οπλισμού για κάποιο εύρος των παραμέτρων που το ορίζουν, μπορούν να κατασκευαστούν διαγράμματα από τα οποία να προκύπτουν τα βέλτιστα ποσοστά τόσο του εφελκόμενου και του θλιβόμενου οπλισμού όσο και του βέλτιστου στατικού ύψους. Ακριβώς αυτό επιτυγχάνεται στα Σχήματα 28 και 29 που ακολουθούν, στα οποία μελετούνται οι περιπτώσεις των αντοχών σκυροδέματος C16/20 και C30/37, για κάποιες τιμές q που στην κάθε περίπτωση έχουν εύρος από $q=20$ έως το q που αντιστοιχεί στο ρ_{lim} (από ρ_{lim} και πάνω αντιστοιχεί διπλός οπλισμός). Η γραμμική σχέση τόσο μεταξύ του M_d/bd_{opt}^2 και του ρ_{opt} , όσο και μεταξύ του ρ_{opt} και ρ' απεικονίζονται στα διαγράμματα με την ίδια ευθεία, γεγονός που επιτυγχάνεται με την κατάλληλη προσαρμογή της κλίμακας του άξονα ρ' .



Σχήμα 28. Καμπύλη βέλτιστων λύσεων $\rho_{opt}-M_d/bd^2$ από $\rho_{opt}=\rho_{lim}=0.0078$ ($q=54.43$) έως $\rho_{opt}=0.0252$ ($q=20$), $f_{ck}=16 \text{ MPa}$ και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -διπλός οπλισμός ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

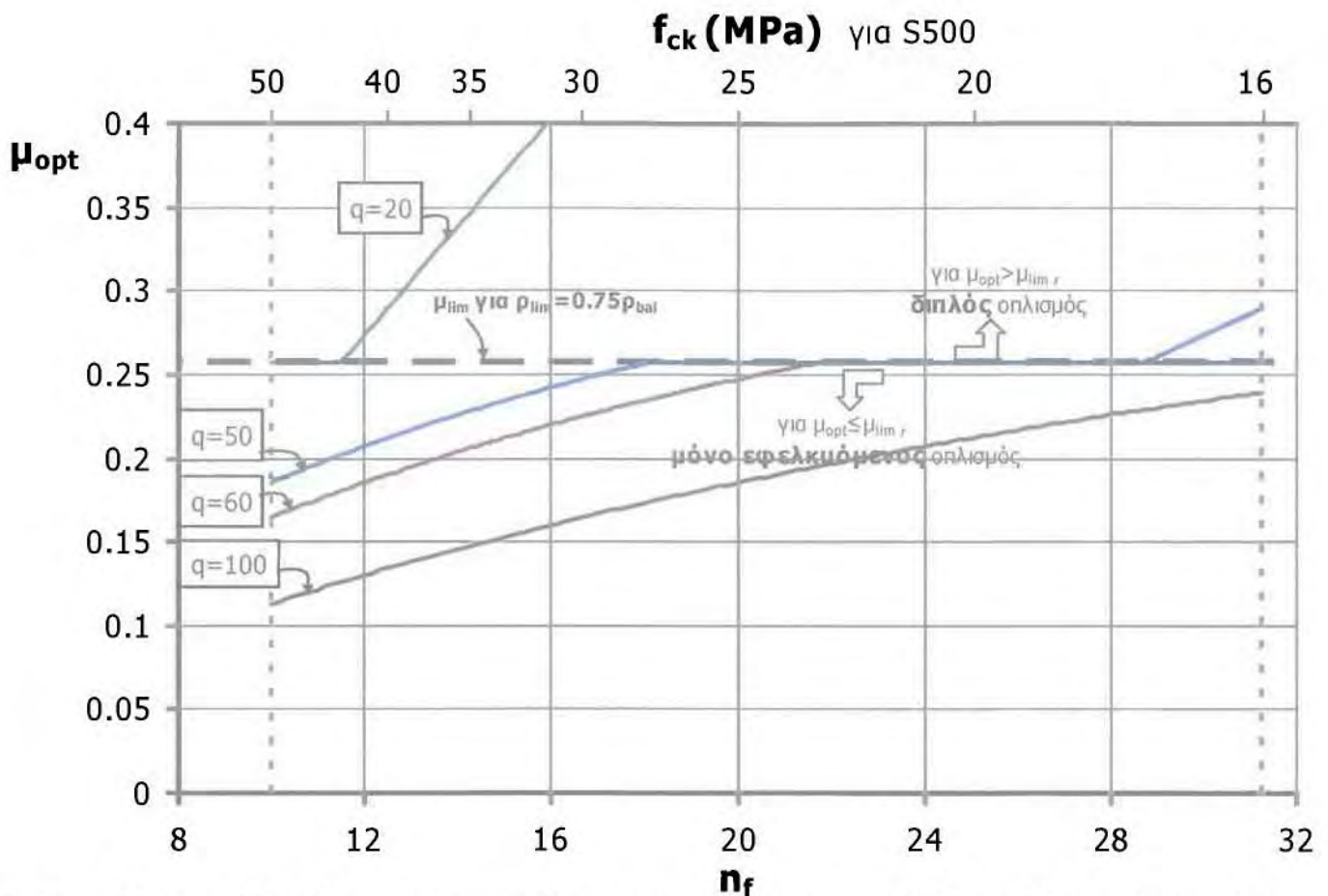


Σχήμα 29. Καμπύλη βέλτιστων λύσεων $\rho_{opt}-M_d/bd^2$ από $\rho_{opt}=\rho_{lim}=0.0146$ ($q=29.03$) έως $\rho_{opt}=0.0232$ ($q=20$), $f_{ck}=30 \text{ MPa}$ και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -διπλός οπλισμός ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

Οι σχέσεις αυτές προέρχονται από την ισορροπία της διατομής στον κλασσικό σχεδιασμό, όμως διαφοροποιούνται από αυτόν σε ένα σημείο. Κατά τον κλασσικό σχεδιασμό όπου το ποσοστό ρ είναι ανεξάρτητο του κόστους των υλικών, μπορεί να επιλεγεί μια τιμή για αυτό και μέσω των παραπάνω γραφημάτων να υπολογιστεί τόσο το M_d/bd^2 όσο και το ρ' . Επίσης μπορεί να ακολουθηθεί και η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή να επιλεγεί μια τιμή του M_d/bd^2 ή αλλιώς για μια ροπή M_d ένας συνδυασμός διαστάσεων b και d και με τη βοήθεια των γραφημάτων να προκύψει μια τιμή ρ . **Με τη διαδικασία βελτιστοποίησης όμως, δεν ισχύουν και οι δυο διαδικασίες.** Το ρ_{opt} είναι μια τιμή που υπολογίζεται εξ αρχής, με την επιλογή των υλικών και με το αντίστοιχο κόστος τους. Είναι δηλαδή μια τιμή η οποία προσδιορίζεται χωρίς τα παραπάνω διαγράμματα και ασχέτως με αυτά. Μετά τον προσδιορισμό της τιμής αυτής από τα δεδομένα σχεδιασμού, υπολογίζεται από το γράφημα και η τιμή M/bd_{opt}^2 που της αντιστοιχεί. Η αντίστροφη πορεία δεν μπορεί να ισχύει, καθώς το ρ_{opt} είναι μοναδικό για δεδομένα υλικά. Άρα για την περίπτωση σχεδιασμού στην Ελλάδα, όπου μια αντιπροσωπευτική τιμή του q είναι το 50, για σχεδιασμό μιας διατομής με σκυρόδεμα C16/20 και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$, προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στον διπλό οπλισμό, με ποσοστό $\rho_{opt}=0.0087$. Από το Σχήμα 28, η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε $M_d/bd_{opt}^2=3194.5$. Με δεδομένη την τιμή αυτή, μπορούν να προκύψουν άπειροι συνδυασμοί $b-d_{opt}$ για δεδομένη ροπή κάμψης M_d ή άπειροι συνδυασμοί M_d-d_{opt} για δεδομένο πλάτος διατομής b . **Η αντίθετη πορεία δεν μπορεί να ακολουθηθεί.** Δηλαδή δεν είναι δυνατόν με γνωστές τις διαστάσεις της διατομής και τη ροπή κάμψης που της ασκείται, να οπλιστεί με το ελάχιστο δυνατό κόστος, ακριβώς επειδή, το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού είναι αυτό που καθορίζει τον βέλτιστο τρόπο όπλισης. Η τιμή του δεν είναι αυθαίρετη αλλά καθορίζεται από την αντοχή του σκυροδέματος και το σχετικό κόστος q . Συνεπώς αν ακολουθηθεί η αντίστροφη πορεία, για να προκύψει το ρ που υπολογίστηκε θα πρέπει να αλλάξει η τιμή του q , πράγμα που είναι αδύνατον.

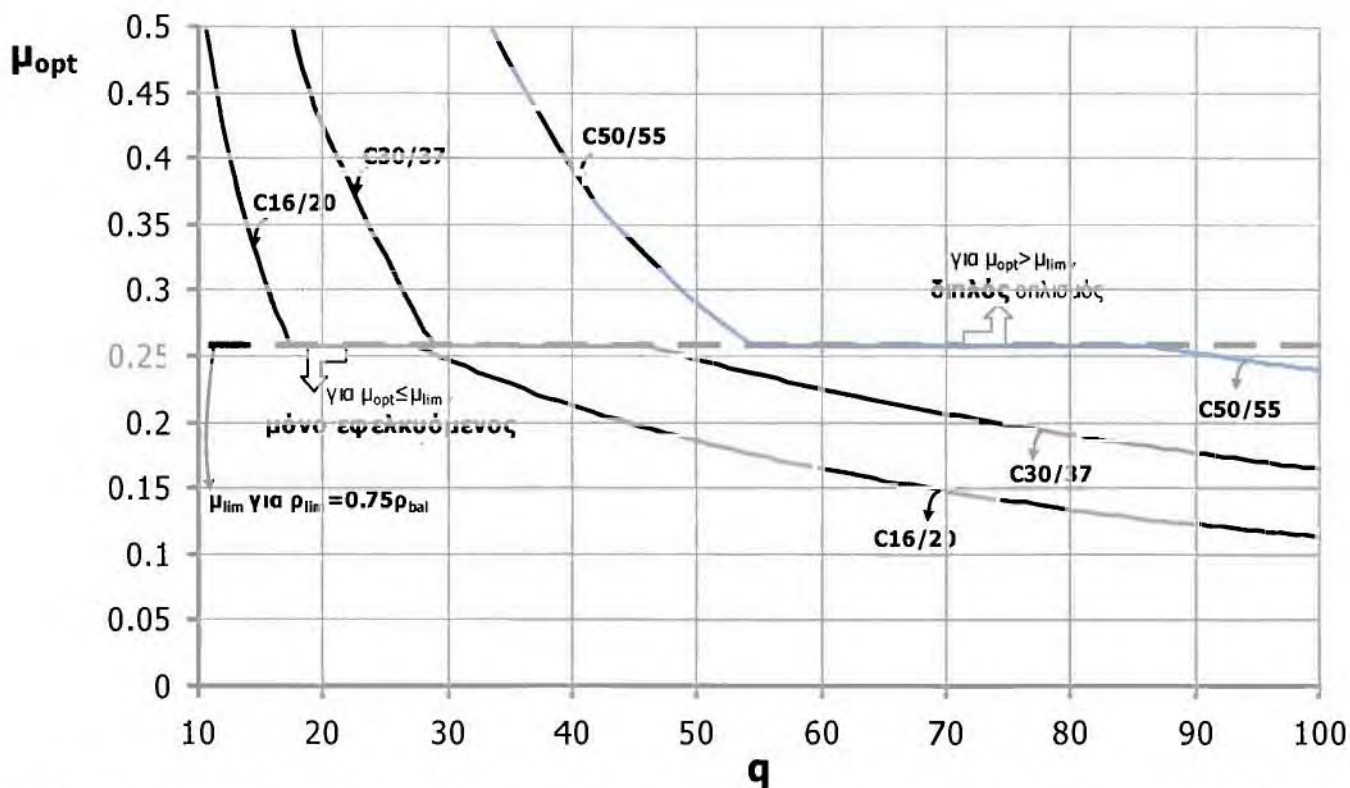
2.4.3. Μελέτη της Συμπεριφοράς των Βέλτιστων Μεγεθών που Προέρχονται από το ρ_{opt} και το d_{opt} (μ_{opt} , ω_{opt})

Ένα ακόμη βοηθητικό μέγεθος που χρησιμεύει στη διαδικασία βελτιστοποίησης του σχεδιασμού μιας διατομής, είναι η ανηγμένη ροπή κάμψης μ_{opt} [βλ. σχέσεις (16) και (54)]. Από τη διαδικασία του κλασσικού σχεδιασμού, οι τιμές που παίρνει το μ καθορίζουν και τον τρόπο όπλισης της διατομής. Η βέλτιστη ανηγμένη ροπή μ_{opt} , συνδέει το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού, τη ροπή κάμψης M_d και το βέλτιστο στατικό ύψος μιας διατομής πλάτους b . Στα Σχήματα 30 και 31, απεικονίζεται η συμπεριφορά του μ_{opt} στην αύξηση της αντοχής του σκυροδέματος και του σχετικού κόστους, αντίστοιχα.



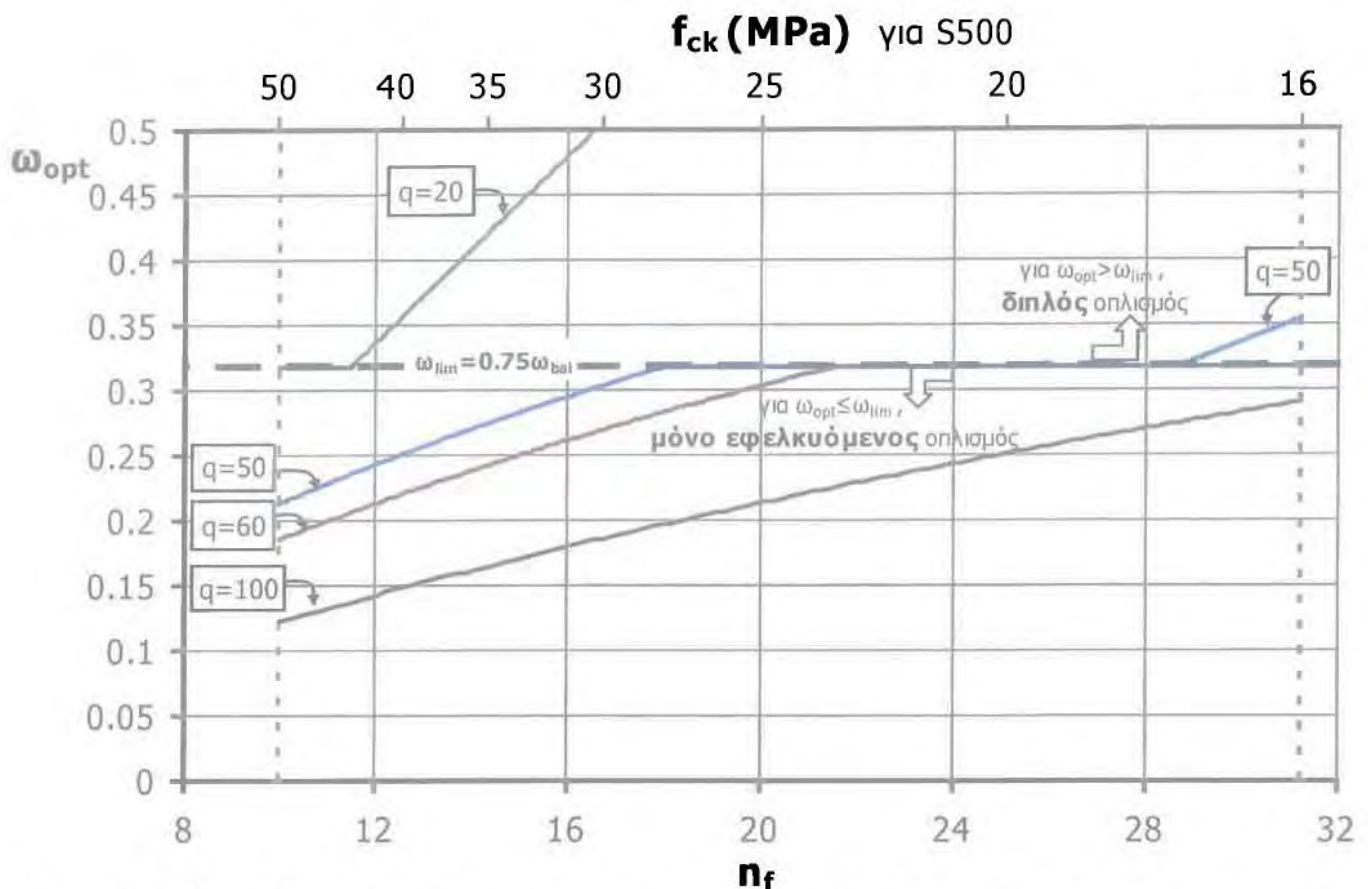
Σχήμα 30. Καμπύλες βέλτιστης ανηγμένης ροπής μ_{opt} για $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$ -όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Από τον κλασσικό σχεδιασμό, είναι γνωστό ότι η τιμή του μ_{opt} είναι πολύ βοηθητική, καθώς υποδεικνύει τον τρόπο όπλισης της διατομής ενώ ταυτόχρονα είναι ανεξάρτητη της αντοχής σκυροδέματος. Το Σχήμα 30, επιβεβαιώνει ότι στα βελτιστοποιημένα κατά Lagrange μεγέθη, δεν ισχύει κάτι τέτοιο, δηλαδή **η μεταβολή της αντοχής του σκυροδέματος, f_{ck} , σημαίνει και την μεταβολή της βέλτιστης ανηγμένης ροπής κάμψης, μ_{opt}** . Ειδικότερα, η αύξηση της αντοχής σημαίνει την μείωση της βέλτιστης ανηγμένης ροπής, γραμμικά για την περίπτωση του διπλού οπλισμού και μη γραμμικά για την περίπτωση του μόνο εφελκόμενου [σχέσεις (16) και (54)]. Όταν η αντοχή του σκυροδέματος παραμένει σταθερή, αλλά μεταβάλλεται το σχετικό κόστος του χάλυβα και του σκυροδέματος, η βέλτιστη ανηγμένη ροπή επίσης δεν διατηρείται σταθερή. Η αύξηση του q , προκαλεί μείωση του μ_{opt} με μη γραμμικό τρόπο, τόσο στην περίπτωση του μόνο εφελκόμενου όσο και στην περίπτωση του διπλού (βλ Σχήμα 31). Ο λόγος που το μ_{opt} εξαρτάται από την αντοχή του σκυροδέματος και τον σχετικό λόγο των κοστών των υλικών είναι ότι και το ρ_{opt} εξαρτάται από τους παράγοντες αυτούς [σχέσεις (12α) και (45β)]. Ο ρυθμός με τον οποίο το μ_{opt} μειώνεται με την αύξηση του q είναι πολύ μεγαλύτερος στην περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό, δηλαδή παρουσιάζει μεγαλύτερη ευαισθησία.



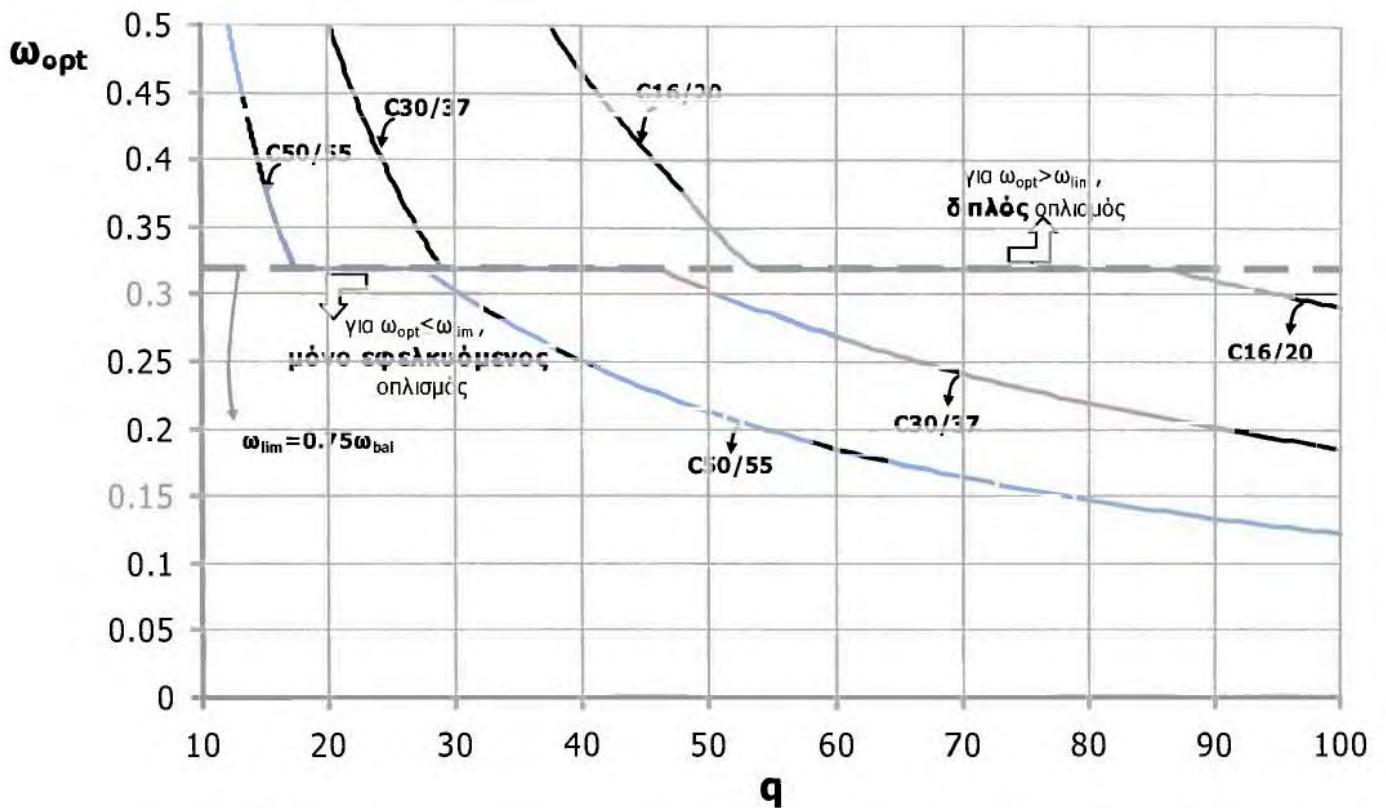
Σχήμα 31. Καμπύλες βέλτιστης ανηγμένης ροής μ_{opt} , για $\rho_{lim} = 0.75\rho_{bal}$ -όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Όπως αναφέρθηκε κατά την διατύπωση των σχέσεων (16) και (54), το γινόμενο $\rho f_{yd}/f_{cd}$ ή αλλιώς $1,3044\rho\omega$ ορίζει το μηχανικό ποσοστό όπλισμού της διατομής, ω . Η φυσική σημασία του ποσοστού ω είναι το ποσοστό σκυροδέματος που πρέπει να τοποθετηθεί στη διατομή αντί του χάλυβα όπλισμού ρ , έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι η ίδια αντοχή. Το ω δηλαδή είναι η ισοδυναμία σε αντοχή των δυο υλικών. Κατά τον κλασικό σχεδιασμό μιας διατομής βάσει των εξισώσεων ισορροπίας, το μηχανικό ποσοστό όπλισμού ω αποτελεί πολύ χρήσιμο μέγεθος, καθώς καθορίζει τον τρόπο όπλισης της διατομής, όπως και το ρ και ταυτόχρονα είναι ανεξάρτητο της αντοχής σκυροδέματος. Χρησιμοποιώντας το ω για τα αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης, προκύπτει το ω_{opt} , το οποίο ορίζεται βάσει του ρ_{opt} . Ορίζοντας τη σχέση του ω_{opt} , προκύπτει ότι σε αντίθεση με το ω , αυτό εξαρτάται από την αντοχή του σκυροδέματος. Αυτό οφείλεται στη σχέση που ορίζει το ρ_{opt} [σχέση (12a) και (45β)], η οποία δεν είναι γραμμική με την αντοχή του σκυροδέματος, με αποτέλεσμα όταν πολλαπλασιάζεται με τον όρο f_{yd}/f_{cd} , η αντοχή του σκυροδέματος να μην απαλείφεται. Στα Σχήματα 32 και 33, απεικονίζεται η συμπεριφορά του ω_{opt} συναρτήσει του λόγου των τάσεων η_f και του σχετικού κόστους q αντίστοιχα.

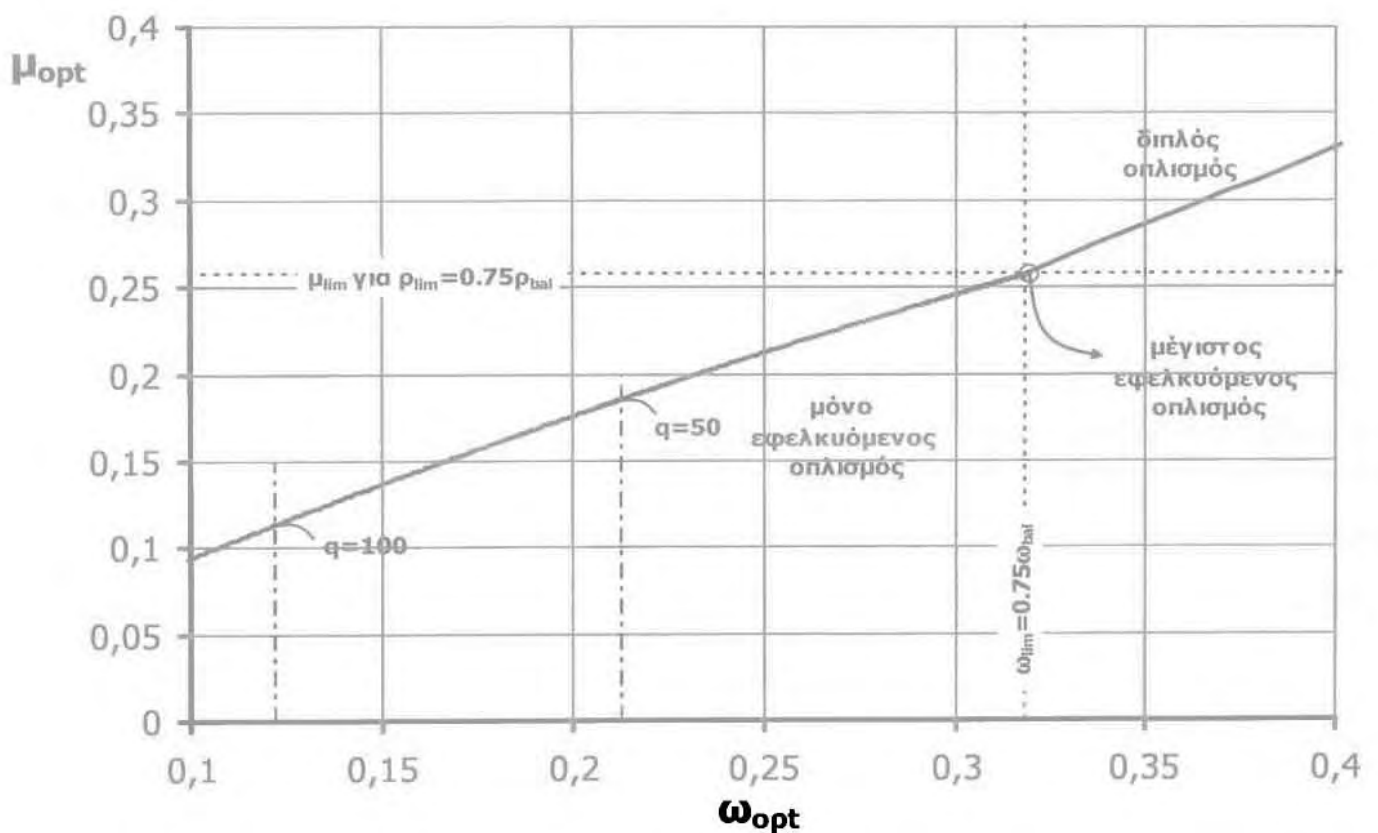


Σχήμα 32. Καμπύλες βέλτιστου ανηγμένου μηχανικού ποσοστού οπλισμού ω_{opt} για $\rho_{lim} = 0.75 \rho_{bal}$ - όλες οι περιπτώσεις όπλισης ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

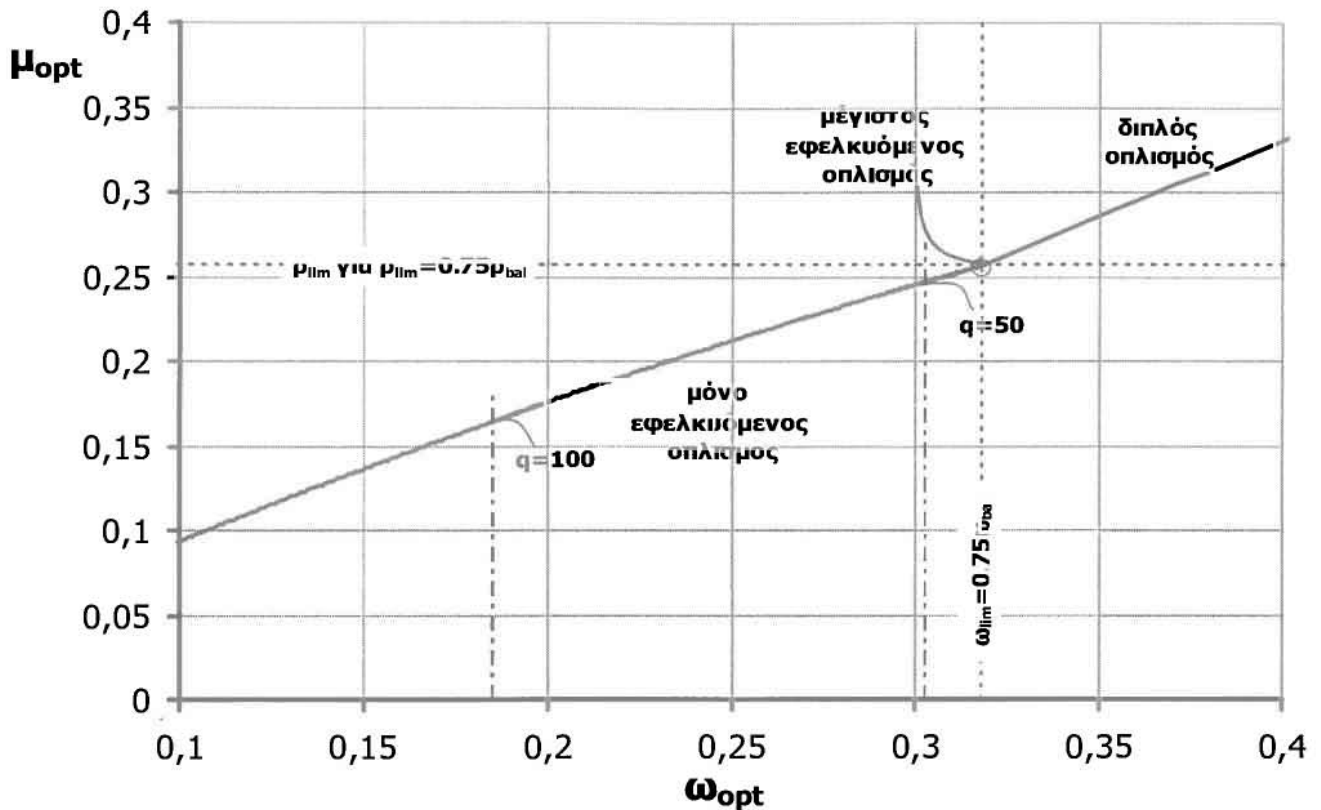
Από το Σχήμα 32 προκύπτει ότι το ω_{opt} **δεν είναι ανεξάρτητο της αντοχής του σκυροδέματος** (για χάλυβα S500). Η συμπεριφορά του είναι σχεδόν ίδια με της βέλτιστης ανηγμένης ροπής κάμψης, μ_{opt} . Το ίδιο συμβαίνει και με τη συμπεριφορά του ω_{opt} συναρτήσεως του σχετικού κόστους q (βλ. Σχήμα 33). Από τα παραπάνω διαγράμματα προκύπτουν αυτόματα οι βέλτιστες τιμές τόσο του μ_{opt} όσο και του ω_{opt} . Στην περίπτωση όπου στο σχεδιασμό της διατομής από το ρ_{opt} , υπολογιστεί το ω_{opt} , δύναται από την τιμή αυτή να προκύψει η τιμή του μ_{opt} . Το πλεονέκτημα που έχει αυτή η πορεία σχεδιασμού, στην κλασική μεθοδολογία, είναι ότι το ω_{opt} και το μ_{opt} είναι ανεξάρτητα της αντοχής σκυροδέματος. Συνεπώς η απεικόνιση της σχέσης τους [σχέσεις (16) και (54)], διαθέτει το πλεονέκτημα της μιας και μοναδικής καμπύλης, για όλες τις διαφορετικές τιμές f_{ck} . Ωστόσο, από τα διαγράμματα 30 και 32, προέκυψε ότι τόσο η βέλτιστη ανηγμένη ροπή κάμψης μ_{opt} , όσο και το βέλτιστο μηχανικό ποσοστό οπλισμού, ω_{opt} , δεν είναι ανεξάρτητα από την αντοχή του σκυροδέματος, f_{ck} . Το γεγονός όμως ότι και τα δυο μεγέθη δεν είναι ανεξάρτητα από το f_{ck} , οδηγεί σε ένα μοναδικό γράφημα που μπορεί να αντιπροσωπεύει όλες τις βέλτιστες τιμές ω_{opt} , οι οποίες θα δίνουν τις αντίστοιχες μ_{opt} (βλ. Σχήματα 34, 35, 36).



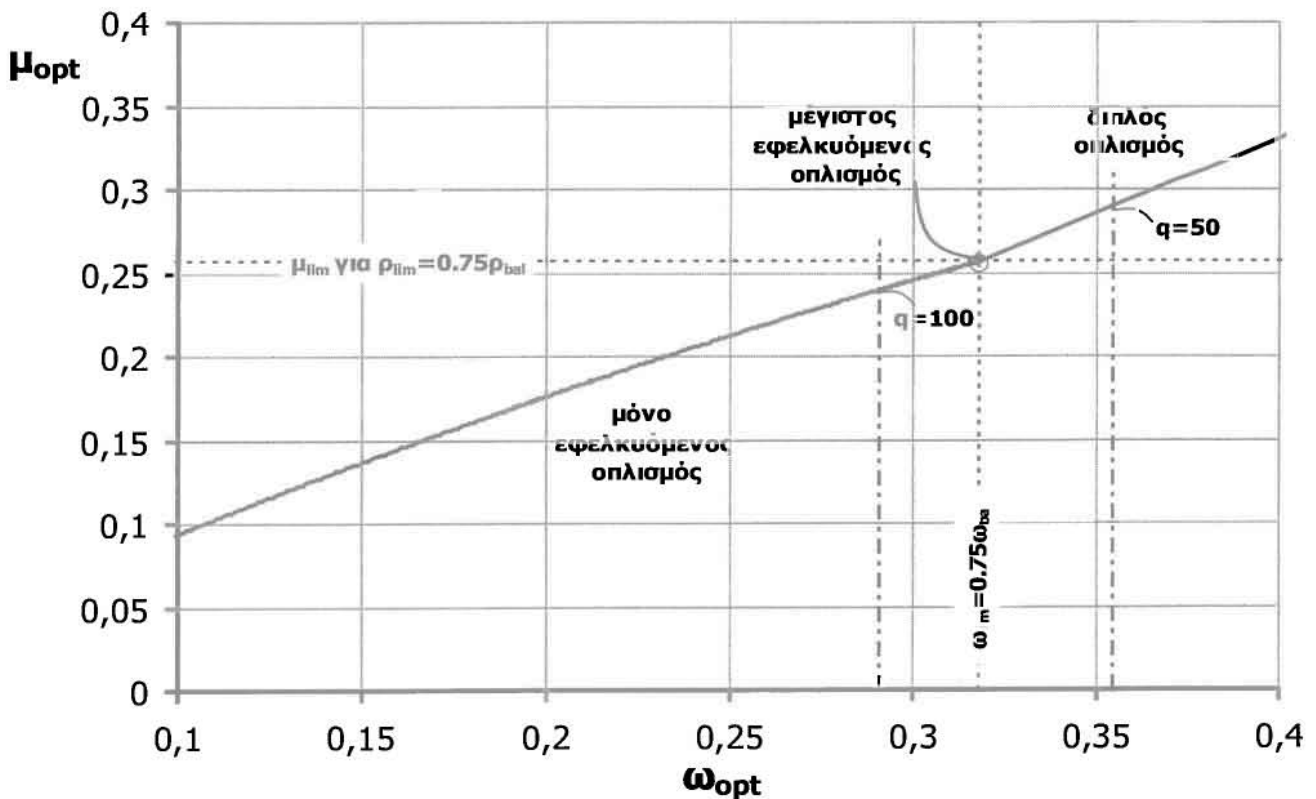
Σχήμα 33. Καμπύλες βέλτιστου ανηγμένου μηχανικού ποσοστού οπλισμού ω_{opt} για $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -όλες οι περιπτώσεις οπλισής ($\delta_1=\delta_2=0.10$).



Σχήμα 34. Καμπύλες βέλτιστου συνδυασμού $\omega_{opt}-\mu_{opt}$ για εύρος q από 50 έως 100, $f_{ck}=50$ MPa και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).



Σχήμα 35. Καμπύλες βέλτιστου συνδυασμού ω_{opt} - μ_{opt} για εύρος q από 50 έως 100, $f_{ck} = 30$ MPa και $\rho_{lim} = 0.75 \rho_{bal}$ ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).



Σχήμα 36. Καμπύλες βέλτιστου συνδυασμού ω_{opt} - μ_{opt} για εύρος q από 50 έως 100, $f_{ck} = 16$ MPa και $\rho_{lim} = 0.75 \rho_{bal}$ ($\delta_1 = \delta_2 = 0.10$).

Στα Σχήματα 34-36 απεικονίζεται η σχέση που έχουν το μ_{opt} και το ω_{opt} , για την περίπτωση σχεδιασμού όπου $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$, για εύρος τιμών σχετικού κόστους q από 50 έως 100. Η καμπύλη που περιγράφει τη σχέση των δυο μεγεθών είναι μια και μοναδική. Ωστόσο δεν παύουν να μην είναι ανεξάρτητα από την αντοχή σκυροδέματος f_{ck} . Αυτός είναι και ο λόγος που το ίδιο γράφημα παρατίθεται για κάθε αντοχή σκυροδέματος ξεχωριστά. Αυτό που μεταβάλλεται, όταν η τιμή της αντοχής f_{ck} αλλάζει, είναι το εύρος και τα όρια των τιμών ω_{opt} , τα οποία αντιστοιχούν για q από 50 έως 100. Άρα επαληθεύεται το γεγονός ότι η σχέση των δυο μεγεθών είναι μια και μοναδική, ανεξάρτητα της αντοχής σκυροδέματος. Μια αλλαγή στην τιμή της απλά αλλάζει τη θέση των λύσεων πάνω στο ίδιο διάγραμμα. Για παράδειγμα, αν η υπό σχεδιασμό διατομή σχεδιάζεται σε περιοχή όπου το σχετικό κόστος **q είναι ίσο με 50** (Ελλάδα) και επιβάλλεται για περιβαλλοντικούς λόγους η χρήση σκυροδέματος ποιότητας **C30/37**, τότε η βέλτιστη λύση, για την περίπτωση όπου το άνω όριο του μόνο εφελκόμενου οπλισμού είναι **$\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$** , είναι στη μεριά του μόνο εφελκόμενου οπλισμού και ορίζεται από το γεωμετρικό ποσοστό **$\rho_{opt}=0.0139$** ($<\rho_{lim}=0.01464$). Το αντίστοιχο βέλτιστο μηχανικό ποσοστό οπλισμού είναι ίσο με **$\omega_{opt}=\rho_{opt}f_{yd}/f_{cd}=0.302$** . Από το Σχήμα 35 προκύπτει για $q=50$, η τιμή της βέλτιστης ανηγμένης ροπής κάμψης, **$\mu_{opt}=0.248$** . Από το ορισμό της ανηγμένης ροπής κάμψης και με δεδομένη την τιμή της ροπής που απαιτείται από τη διατομή να φέρει, **$M_d=400$ kNm**, προκύπτουν άπειροι συνδυασμοί διαστάσεων b,d που να ανταποκρίνονται στην ισορροπία και **να αντιστοιχούν όλοι στο ελάχιστο κόστος**. Αυτό είναι προφανές, μιας και η λύση του ελαχίστου κόστους καθορίζεται αποκλειστικά από το γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού. Συνεπώς:

$$\mu_{opt} = \frac{M_d}{bd_{opt}^2 f_{cd}}$$

$$\text{ή } 0.248 = \frac{400}{bd_{opt}^2 \frac{30000}{1.5}}$$

Άρα

$$bd_{opt}^2 = 0.0806$$

Πίνακας 11. Βέλτιστοι συνδυασμοί διαστάσεων διατομής, για $f_{ck}=30$ MPa, $q=50$ και $M_d=400$ kNm ($\delta_1=0.10$).

b (m)	d_{opt} (m)	h_{opt} (m)
0,3	0,52	0,57
0,35	0,48	0,53
0,4	0,45	0,49
0,45	0,42	0,47
0,5	0,40	0,44
0,55	0,38	0,42
0,6	0,37	0,40

Όλοι οι συνδυασμοί του Πίνακα 11, αντιστοιχούν στο ελάχιστο κόστος της διατομής.

Από τα Σχήματα 34, 35 και 36, που αφορούν διαφορετικές τιμές της αντοχής σκυροδέματος, φαίνεται ξανά ότι όσο πιο μεγάλη η αντοχή f_{ck} , τόσο οι βέλτιστες λύσεις που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές q τείνουν να είναι στη μεριά του μόνο εφελκυσμένου οπλισμού. Η σχέση $\omega_{opt}-\mu_{opt}$ για τον μόνο εφελκυσμένο οπλισμό είναι μη γραμμική [σχέση (16)], ενώ για τον διπλό είναι γραμμική [σχέση (54)]. Η κλίση της ευθείας του διπλού οπλισμού, που ισχύει από $\mu_{lim} - \omega_{lim}$ και πάνω, είναι σταθερή ενώ η κλίση της μη γραμμικής σχέσης του μόνο εφελκυσμένου οπλισμού, ακριβώς στο σημείο ρ_{lim} καθορίζεται από την τιμή του ρ_{lim} . Πιο συγκεκριμένα:

η κλίση της καμπύλης του μόνο εφελκυσμένου οπλισμού είναι:

$$\frac{d\mu_{opt}}{d\omega_{opt}} = (\omega_{opt} - 0,6\omega_{opt}^2)' = 1 - 1,2\omega_{opt}$$

η κλίση της ευθείας του διπλού οπλισμού είναι:

$$\frac{d\mu_{opt}}{d\omega_{opt}} = (\omega_{opt} - \omega_{opt}\delta_2 + 0,318\delta_2 - 0,061)' = 1 - \delta_2$$

Άρα, στο σημείο όπου $\omega_{opt}=\omega_{lim}$ και $\mu_{opt}=\mu_{lim}$, η κλίση της ευθείας (διπλός οπλισμός) είναι πάντα σταθερή, ενώ της καμπύλης (μόνο εφελκυσμένος οπλισμός) εξαρτάται από την τιμή του ω_{lim} .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΚΟΣΤΟΣ ΟΠΩΣ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ LAGRANGE

3.1. Η Μέθοδος Lagrange σε Σύγκριση με τον Κλασσικό Σχεδιασμό

Αφού προσεγγίστηκαν οι βέλτιστες λύσεις τόσο για τον εφελκυσμένο όσο και για τον θλιβόμενο, προκύπτει το συμπέρασμα, βάσει των σχέσεων (4) και (29), ότι το ελάχιστο κόστος ορίζεται ως εξής:

$$C_{tot, min} = C_c b [d_{opt} (1 + \delta_1) + q\rho_{opt} d_{opt}], \text{ για } \rho \leq \rho_{lim}, \text{ μόνο εφελκυσμένος οπλισμός}$$

και

$$C_{tot, min} = C_c b [d_{opt} (1 + \delta_1) + qd_{opt} (2\rho_{opt} - \rho_{lim})], \text{ για } \rho > \rho_{lim}, \text{ διπλός οπλισμός}$$

για πλάτος της διατομής b δεδομένο.

Στον Πίνακα 12 συγκρίνονται οι λύσεις του κλασσικού σχεδιασμού με την βέλτιστη λύση σχεδιασμού μιας διατομής, με γνωστά χαρακτηριστικά. Για κάποια δεδομένα σχεδιασμού, υπάρχουν άπειροι διαφορετικοί συνδυασμοί οπλισμού και διαστάσεων διατομής που να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του συστήματος. Οι συνδυασμοί αυτοί μπορεί να αντιστοιχούν στον μόνο εφελκόμενο ή στο διπλό οπλισμό. Η βέλτιστη λύση που μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της μεθόδου Lagrange, είναι μια από τις άπειρες λύσεις που ικανοποιούν τη ισορροπία, αλλά ταυτόχρονα αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος. Έτσι, εάν εντοπιστεί η λύση αυτή από την ισορροπία, ως τη λύση που έχει το μικρότερο κόστος όλων και συγκριθεί με την αντίστοιχη της μεθόδου βελτιστοποίησης Lagrange, η μέθοδος μπορεί να επαληθευτεί ή να απορριφθεί. Για τους συνδυασμούς λύσεων ρ - d του Πίνακα 12, , δίδονται τα αντίστοιχα εμβαδά των υλικών (εμβαδό διατομής σκυροδέματος και συνολικό εμβαδό χάλυβα) και το συνολικό κόστος της διατομής για κάθε λύση, C_{tot} (€/m), διαιρεμένο με το κόστος της μονάδας σκυροδέματος, C_c (€/m³). Η διαίρεση αυτή έχει σαν αποτέλεσμα το συνολικό κόστος να είναι ανεξάρτητο από την τιμή της μονάδας σκυροδέματος και για τον προσδιορισμό του να απαιτείται μόνο η γνώση του σχετικού κόστους των υλικών και όχι οι ακριβείς τιμές τους. Επιπλέον, με τον τρόπο αυτό το συνολικό κόστος μετράται πλέον σε τετραγωνικά μέτρα (m²). **Συνεπώς γίνεται ξεκάθαρο ότι αυτό που ελαχιστοποιείται με τη μέθοδο Lagrange, είναι ένα συνολικό εμβαδό.** Το εμβαδό αυτό ορίζεται από το εμβαδό της διατομής σκυροδέματος συν το εμβαδό της διατομής του συνολικού χάλυβα πολλαπλασιασμένο με το q ($bh+q\rho bd$ ή A_c+qA_s), το οποίο καθορίζει πως θα μεταβληθεί το συνολικό άθροισμα σε μια αύξηση του εμβαδού του χάλυβα και αντίστοιχη μείωση του στατικού ύψους της διατομής ή και το αντίθετο. Το q δηλαδή, παίζει το ρόλο του συντελεστή βαρύτητας. Όσο πιο μεγάλη η τιμή του, τόσο πιθανότερο είναι να καθορίζει την συμπεριφορά του συνολικού κόστους με βάση της συμπεριφορά του εμβαδού οπλισμού.

Σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange, η βέλτιστη λύση για $f_{ck}=20$ MPa, $q=100$ και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ αντιστοιχεί στον μόνο εφελκόμενο οπλισμό, με ποσοστό $\rho_{opt}=0.0077$. Για την επαλήθευση του αποτελέσματος αυτού, θα πρέπει από τις λύσεις που προκύπτουν από την ισορροπία, να διαπιστωθεί ότι το ελάχιστο κόστος αντιστοιχεί στο ποσοστό $\rho=0.0077$. Όντως, εάν υπολογίσουμε τα κόστη των διατομών που οπλίζονται είτε με μόνο εφελκόμενο είτε με διπλό οπλισμό και ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του συστήματος, προκύπτει ότι για το ποσοστό αυτό και για το στατικό ύψος $d_{opt}=0.42$ m που από την ισορροπία του αντιστοιχεί, η διατομή κοστίζει το λιγότερο δυνατό (βλ Πίνακα 12). **Άρα, η βελτιστοποίηση κατά Lagrange επαληθεύεται.** Η βέλτιστη λύση ανήκει στο εφικτό εύρος των λύσεων ισορροπίας αλλά αυτό που την καθορίζει ουσιαστικά είναι τα εμβαδά των υλικών που της αντιστοιχούν και το σχετικό τους κόστος, q . Παρατηρώντας τη μεταβολή των εμβαδών, καθώς το ποσοστό του οπλισμού ρ αυξάνεται και το στατικό ύψος μειώνεται, προκύπτει ότι, για τα δεδομένα του προβλήματος, προκαλείται **μείωση του συνολικού εμβαδού της διατομής και αύξηση του συνολικού εμβαδού του οπλισμού.** Αυτή η συμπεριφορά οφείλεται στα δεδομένα σχεδιασμού της διατομής. Το συνολικό κόστος μειώνεται, δηλαδή ακολουθεί τη συμπεριφορά του συνολικού εμβαδού της διατομής, ακριβώς επειδή στο άθροισμα των δυο κοστών έχει τη μεγαλύτερη βαρύτητα. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή του $q=100$, παραπέμπει σε ένα βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού σχετικά μικρό, μιας και ο χάλυβας είναι πολύ ακριβότερο από το σκυρόδεμα. Από την ισορροπία της διατομής προκύπτει ένα μεγάλο εμβαδό διατομής, το οποίο εφόσον έχει τη μεγαλύτερη βαρύτητα στη διαμόρφωση

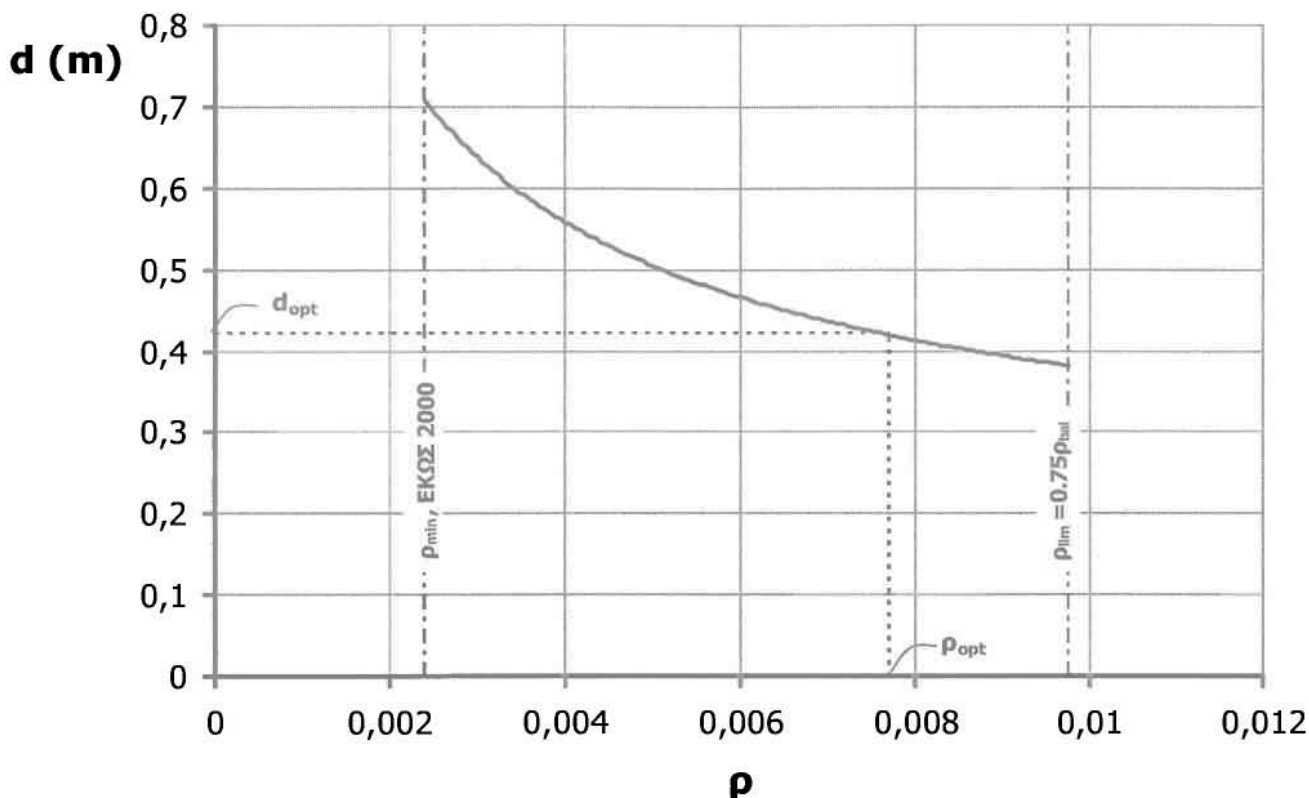
του συνολικού κόστους θα αντιστοιχεί και σε μεγάλο κόστος διατομής. Συνεπώς το ρ παίζει το ρόλο του συντελεστή βαρύτητας του συνολικού κόστους.

Πίνακας 12. Συνδυασμοί λύσεων σχεδιασμού διατομής με $b=0.4$ m, $M_d=200$ kNm, $f_{ck}=20$ MPa, $q=100$ και άνω όριο $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ -όλες οι περιπτώσεις όπλισης.

όπλιση	ρ	A_s (cm ²)	d (m)	A_c (m ²)	C_{tot}/C_c (m ²)
λύσεις με μόνο εφελκυσμένο οπλισμό	0,0024	6,78	0,706	0,311	0,3791
	0,0032	7,94	0,620	0,273	0,3520
	0,0042	9,19	0,547	0,241	0,3323
	0,0052	10,34	0,497	0,219	0,3217
	0,0062	11,41	0,460	0,202	0,3163
	0,0072	12,44	0,432	0,190	0,3141
	0,0077 *	12,94	0,420	0,185	0,3138
	0,0082	13,42	0,409	0,180	0,3141
	0,0087	13,89	0,399	0,176	0,3147
	0,0092	14,39	0,391	0,172	0,3157
	0,0097	14,86	0,383	0,169	0,3170
λύση με μέγιστο εφελκυσμένο οπλισμό	0,0098	14,97	0,382	0,168	0,3172
λύσεις με διπλό οπλισμό	0,0099	15,01	0,379	0,167	0,3184
	0,0102	15,22	0,373	0,164	0,3227
	0,0107	15,54	0,363	0,160	0,3288
	0,0112	15,86	0,354	0,156	0,3348
	0,0117	16,19	0,346	0,152	0,3407
	0,0122	16,49	0,338	0,149	0,3465
	0,0127	16,81	0,331	0,146	0,3522
	0,0132	17,11	0,324	0,143	0,3579
	0,0137	17,37	0,317	0,139	0,3635
	0,0142	17,66	0,311	0,137	0,3689
	0,0147	17,99	0,306	0,135	0,3738
	0,0150	18,12	0,302	0,133	0,3776

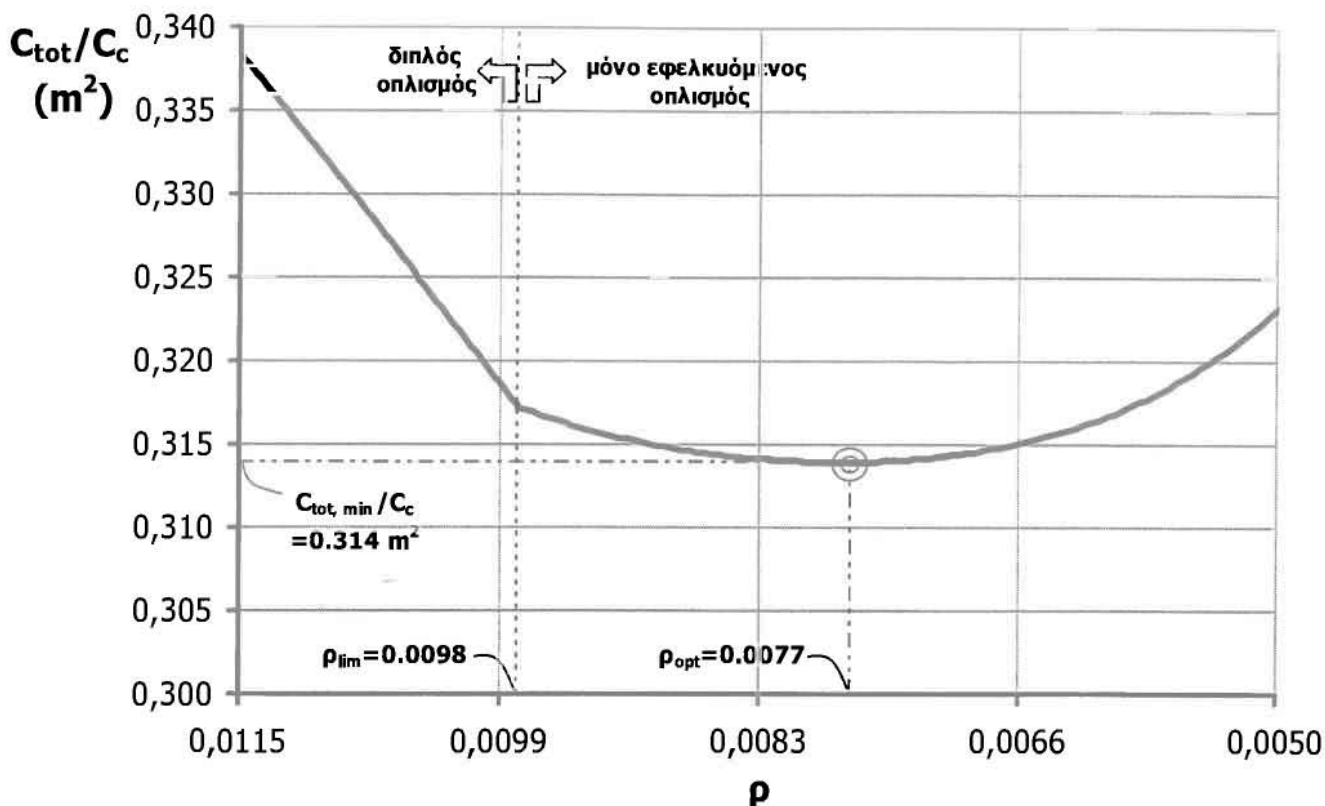
*:βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού ρ_{opt} , το οποίο για δεδομένη ροπή αντιστοιχεί σε ένα βέλτιστο στατικό ύψος διατομής d_{opt} . Το ζεύγος (ρ_{opt} , d_{opt}) αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος.

Είναι προφανές ότι οι βέλτιστες τιμές του οπλισμού και του στατικού ύψους, δεν είναι οι ελάχιστες. Υπάρχουν συνδυασμοί λύσεων και ικανοποιούν εξίσου αυστηρά την εξίσωση ισορροπίας, αλλά αντιστοιχούν σε μικρότερα ρ και μεγαλύτερα d ή σε μεγαλύτερα ρ και μικρότερα d (βλ Σχήμα 37). Για όλους αυτούς τους συνδυασμούς, το κόστος είναι μεγαλύτερο από αυτό της βέλτιστης λύσης (βλ. Πίνακα 12).

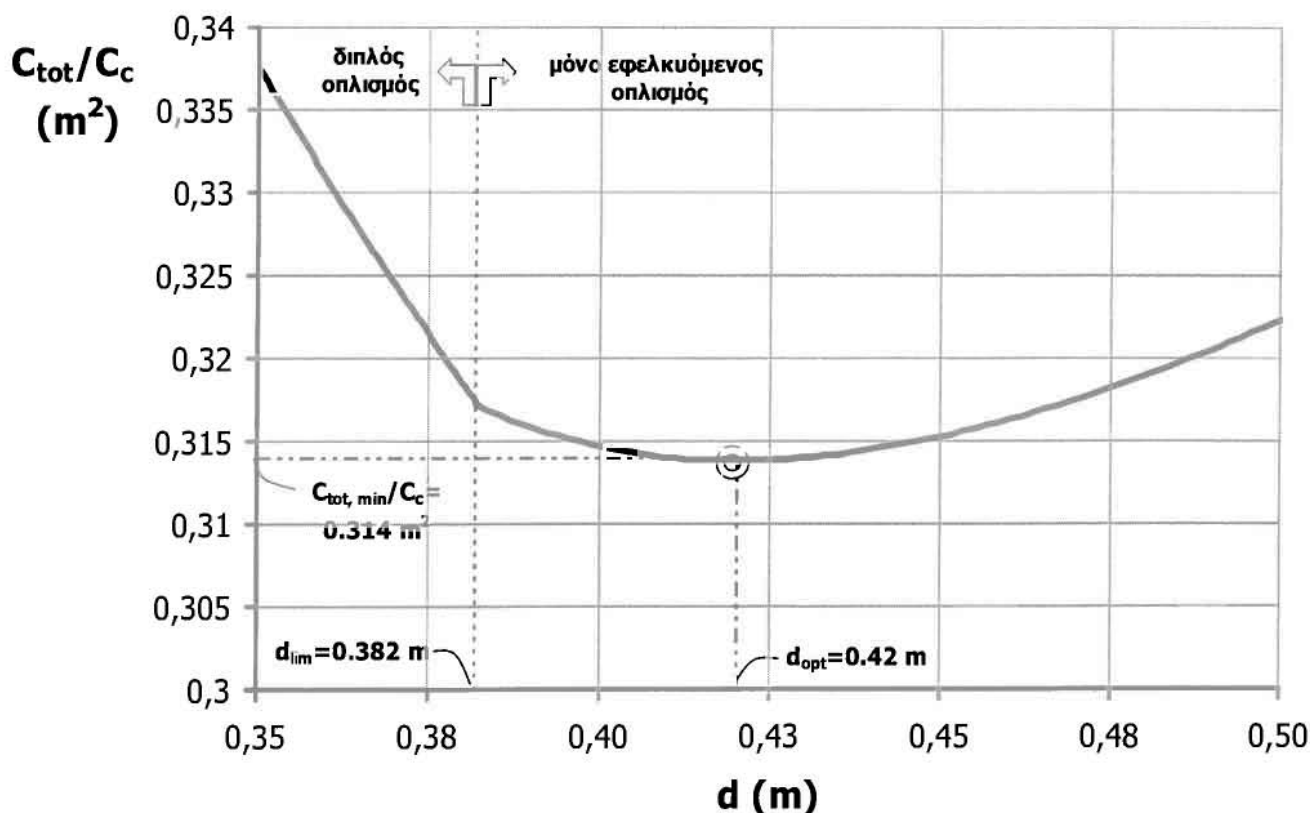


Σχήμα 37. Λύσεις σχεδιασμού από ισορροπία της διατομής για $f_{ck}=20$ MPa, $q=100$, $b=0.4$ m, $M_d=200$ kNm και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).

Στο Σχήμα 37, γίνεται εμφανές το γεγονός ότι η βέλτιστη λύση σχεδιασμού μιας διατομής δεδομένων απαιτήσεων, δεν αντιστοιχεί στα ελάχιστα μεγέθη. Το γεγονός ότι η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος γίνεται ξεκάθαρο τόσο από τον Πίνακα 11, όσο και από τα Σχήματα 38 και 39, που απεικονίζουν την συμπεριφορά του συνολικού κόστους σε σχέση με την αύξηση του ποσοστού ρ (και του εμβαδού οπλισμού) και την μείωση του στατικού ύψους d (και του εμβαδού διατομής), αντίστοιχα. Στα γραφήματα αυτά, είναι ξεκάθαρο ότι το ελάχιστο κόστος αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση **σε σχέση με όλους τους δυνατούς τρόπους όπλισης**. Η αλλαγή της μορφής της καμπύλης συνολικού κόστους, ακριβώς στο σημείο της λύσης του μέγιστου εφελκόμενου οπλισμού, οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτησή του έχει δυο κλάδους, ανάλογα με τον τρόπο όπλισης. Οι δύο συναρτήσεις κόστους είναι μη γραμμικές με τα μεγέθη σχεδιασμού (ρ, d).



Σχήμα 38. Καμπύλη συνολικού κόστους για $f_{ck}=20 \text{ MPa}$, $q=100$, $b=0.4 \text{ m}$, $M_d=200\text{kNm}$ και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).



Σχήμα 39. Καμπύλη συνολικού κόστους για $f_{ck}=20 \text{ MPa}$, $q=100$, $b=0.4 \text{ m}$, $M_d=200\text{kNm}$ και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ ($\delta_1=\delta_2=0.10$).

Πράγματι, η συνάρτηση κόστους, για τα δεδομένα σχεδιασμού του Πίνακα 12, παρουσιάζει ακρότατο ακριβώς στην βέλτιστη λύση που υπολογίστηκε μέσω της μεθόδου Lagrange. Βέβαια, όπως διατυπώθηκε και παραπάνω το κόστος είναι μια συνάρτηση που ορίζεται από δυο κλάδους, έναν για τις λύσεις με μόνο εφελκόμενο οπλισμό και έναν για εκείνες με διπλό οπλισμό. Η βέλτιστη λύση παρότι πάντα αντιστοιχεί σε έναν τρόπο όπλισης (εφελκόμενος ή διπλός οπλισμός) δίνει την χαμηλότερη τιμή κόστους σε σχέση με όλο το εύρος λύσεων, τόσο για όπλιση με μόνο εφελκόμενο όσο και για διπλό. Στα γραφήματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω δεν δόθηκε βαρύτητα στα άνω επιτρεπόμενα όρια οπλισμού που θέτει ο ΕΚΩΣ 2000 και ο Ευρωκώδικας 2. Αυτό έγινε σκόπιμα, καθώς στόχος ήταν στα διαγράμματα να φανεί ότι το χαμηλότερο κόστος αντιστοιχεί στη λύση που δίδεται από τη μέθοδο Lagrange. Το άνω όριο του Ευρωκώδικα 2, το οποίο θα ισχύει έναντι του ΕΚΩΣ 2000 από το 2011 και μετά, είναι αρκετά ανεκτικό και δεν περιορίζει τις λύσεις.

3.2. Γραφική Μέθοδος Επαλήθευσης της Μεθόδου Lagrange

Σύμφωνα με τις λύσεις που παρατίθενται στον Πίνακα 12, η μέθοδος Lagrange όντως αποδίδει τις βέλτιστες λύσεις σχεδιασμού ως προς το κόστος. Στην παράγραφο αυτή, προτείνεται μια γραφική μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης οικονομικά λύσης, χωρίς τον υπολογισμό του κόστους όλων των υπαρκτών συνδυασμών λύσεων που προέρχονται από την ισορροπία. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση κόστους για την περίπτωση όπλισης με μόνο εφελκόμενο οπλισμό δίδεται από τη σχέση (4)

$$C_{tot} = C_c b [d(1+\delta_1) + qpd] = C_c [bd(1+\delta_1) + qA_s]$$

λύνοντας ως προς d προκύπτει:

$$d = \frac{C_{tot}/C_c}{b(1+\delta_1)} - \frac{q}{b(1+\delta_1)} A_s \quad (4a)$$

Η σχέση (4a) είναι η γνωστή σχέση κόστους πάνω στην οποία βασίστηκε η βελτιστοποίηση κατά Lagrange. Εκφράζοντας την ως προς d , και με γνωστά μεγέθη το σχετικό κόστος των υλικών q , το πλάτος b της διατομής, το μέγεθος δ_1 και την τιμή του κόστους που επιδιώκεται να έχει η υπό σχεδιασμό διατομή μπορούν να βρεθούν συνδυασμοί οπλισμού και ύψους διατομής που να την ικανοποιούν. Αυτές οι λύσεις θα είναι εφικτές μόνο εάν ικανοποιούν ταυτόχρονα και την εξίσωση ισορροπίας. Με αυτή τη λογική μπορεί να προσεγγιστεί ο βέλτιστος συνδυασμός ύψους διατομής και εμβαδού οπλισμού, ώστε αυτός να αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή κόστους. Το πρόβλημα στην περίπτωση του ελάχιστου κόστους είναι ότι δεν μπορεί να είναι γνωστή η τιμή του πριν να υπολογιστούν τα βέλτιστα μεγέθη ρ_{opt} και d_{opt} . Με τη γραφική λύση, **οι τιμές των ρ_{opt} και d_{opt} δεν είναι προαπαιτούμενες** για να βρεθεί το ελάχιστο κόστος.

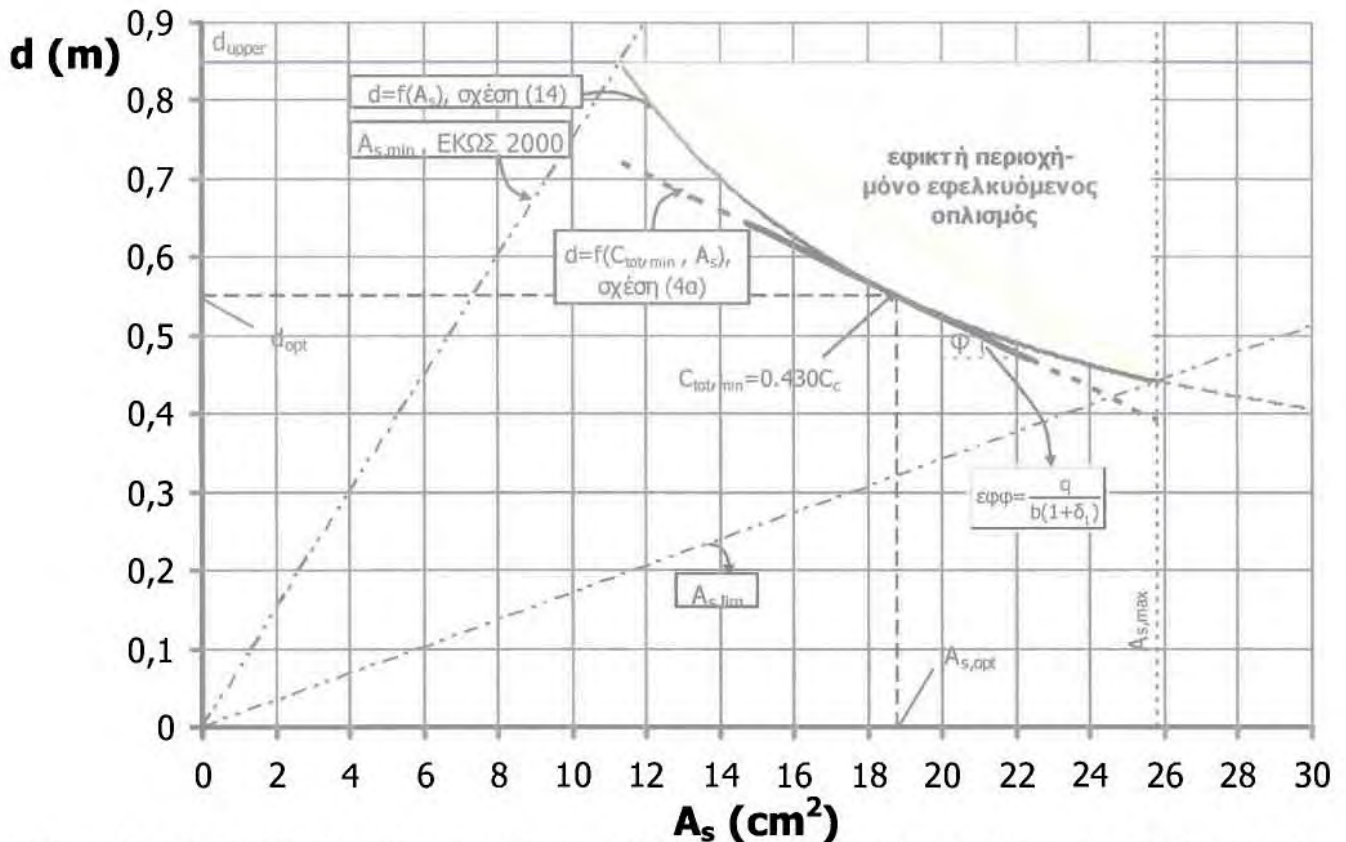
Αοιθητικό παρόδειγμα 1-νοσφική προσένγιση για την εύρεση της βέλτιστης λύσης μόνο εφελκόμενου οπλισμού.

Πίνακας 13. Αριθμητικό παράδειγμα 1- $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - βέλτιστη οικονομικά λύση ο μόνο εφελκόμενος οπλισμός.

Περιγραφή	Παράμετροι	Τιμές	Αναφορά
Δεδομένα	f_{ck}, f_{yk}	30 MPa, 500 MPa	
	q	100	
	b	0.4 m	
	M_d	400 kNm	
	δ_1	0.10	
Τιμές ελέγχου	ρ_{opt}	0.0085	σχέση (45a)
	ρ_{lim}	0.0146	σχέση (20)
	ρ_{min}	0.0033	σχέση (24)
Σχέση ισορροπίας	M_d	$400=435000A_s d - 14318750A_s^2$	σχέση (7 και 14)
Σχέση κόστους	C_{tot}	$d=2.27C_{tot}/C_c - 227.27A_s$ (λυμένη ως προς d)	σχέση (4a)

Στον Πίνακα 13 δίδονται τα στοιχεία σχεδιασμού μιας ορθογωνικής διατομής, της οποίας η βέλτιστη λύση εφαρμόζοντας τη μέθοδο Lagrange, αντιστοιχεί στον μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Υποθέτοντας ότι ο βέλτιστος τρόπος όπλισης δεν είναι γνωστός, είναι δυνατόν μέσω της γραφικής μεθόδου να επαληθευτεί η βέλτιστη λύση που υπολογίστηκε. Η γραφική λύση προϋποθέτει την γραφική απεικόνιση των λύσεων που ικανοποιούν την εξίσωση ισορροπίας και ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις σχεδιασμού που έχουν τεθεί εξαρχής. Η απεικόνιση είναι προτιμότερο να γίνει σε σύστημα αξόνων $d-A_s$ παρά σε $d-\rho$, έτσι ώστε το διάγραμμα να περιέχει εμβαδό οπλισμού, μέγεθος περισσότερο αξιοποιήσιμο. Η ισορροπία δίδεται από τη σχέση (7) και για τα δεδομένα του παραδείγματος διαμορφώνεται ως εξής: $400 = 435000A_s d - 14318750A_s^2$. Για το εύρος των γεωμετρικών ποσοστών οπλισμού με το οποίο μπορεί να οπλιστεί η διατομή (από ρ_{min} έως ρ_{lim} για τον μόνο εφελκόμενο οπλισμό), προκύπτουν τα αντίστοιχα ύψη d k από εκεί τα εμβαδά A_s . Έχοντας πλέον το γράφημα των λύσεων που υπακούουν στην ισορροπία, μπορεί να βρεθεί η μοναδική βέλτιστη λύση με την εξής λογική: η βέλτιστη λύση ($A_{s,opt}$, d_{opt}) θα πρέπει να ανήκει στην καμπύλη της ισορροπίας και ταυτόχρονα να ανήκει και στην καμπύλη του συνολικού κόστους. Πρόκειται δηλαδή για τομή δυο καμπυλών. Σύμφωνα με τη συνάρτηση κόστους (σχέση (4a)), η σχέση του d και του A_s είναι γραμμική: $d=2.27C_{tot}/C_c - 227.27A_s$. Η τομή μιας ευθείας και μιας καμπύλης β' βαθμού μπορεί να γίνει το πολύ σε δυο σημεία. Όμως η βέλτιστη λύση είναι μοναδική. Άρα η βέλτιστη λύση είναι το σημείο που η συνάρτηση κόστους εφάπτεται σε αυτή της ισορροπίας. Ωστόσο, η τιμή του ελάχιστου κόστους δεν είναι γνωστή, εφόσον δεν έχει βρεθεί πρώτα η βέλτιστη λύση. Αυτό που αξιοποιείται από τη συνάρτηση κόστους, η οποία είναι της μορφής $\gamma=a+\beta x$, είναι η κλίση της που ορίζεται από τη σχέση $\beta=εφ\phi=-q/[b(1+\delta_1)]$ και για τα δεδομένα του προβλήματος ίση με -227.27 . Με γνωστή την κλίση της ευθείας μπορεί

να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση, ακριβώς στο σημείο που εφάπτεται στην καμπύλη της ισορροπίας.



Σχήμα 40. Γραφική προσέγγιση βέλτιστης λύσης σχεδιασμού- Αριθμητικό παράδειγμα 1, δεδομένα Πίνακα 13 με $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - μόνο εφελκούμενος οπλισμός.

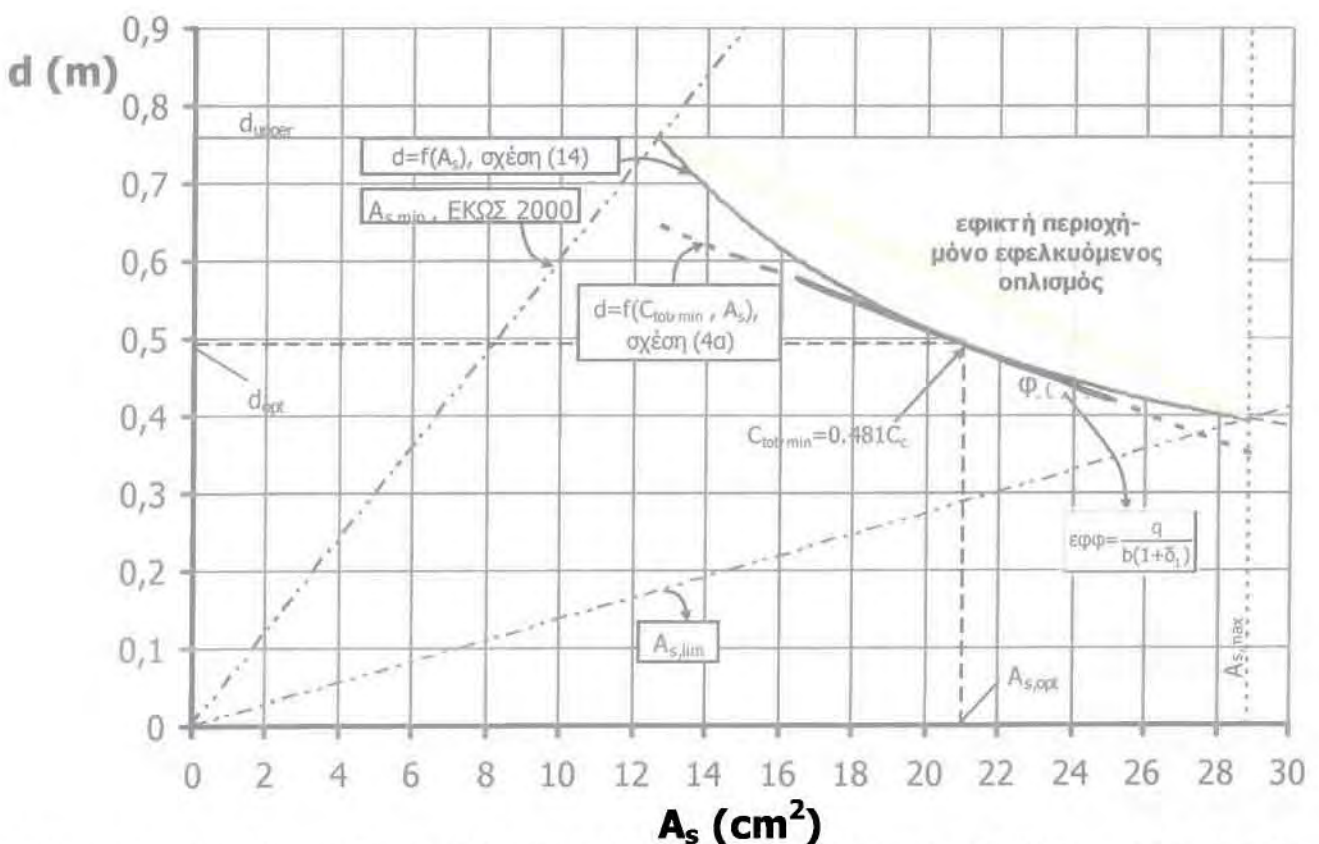
Στην περίπτωση όπου δεν ήταν γνωστός ο βέλτιστος τρόπος όπλισης τότε αντί για λύσεις ισορροπίας με μόνο εφελκούμενο οπλισμό, θα συμπεριλαμβάνονταν στην καμπύλη ισορροπίας και αυτές με διπλό οπλισμό. Όπως θα διαπιστωθεί και παρακάτω, η κλίση της ευθείας κόστους για τον διπλό οπλισμό είναι πολλή μεγαλύτερη από αυτή για τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό, για τα ίδια δεδομένα σχεδιασμού. Συνεπώς η ευθεία του κόστους των λύσεων για διπλό οπλισμό, δεν θα εφάπτονταν σε κανένα σημείο της καμπύλης των λύσεων της αντίστοιχης όπλισης, παρά μόνο θα την έτεμνε. Άρα δε θα οριζόνταν βέλτιστη οικονομικά λύση διπλού οπλισμού. Στο Σχήμα 40, δεν παρουσιάζεται ούτε η καμπύλη $A_{s,max}$ που δίνει ο ΕΚΩΣ 2000, αλλά ούτε κ αυτή που δίνει ο Ευρωκώδικας 2. Οι καμπύλες αυτές βασίζονται στα μέγιστα επιτρεπόμενα γεωμετρικά ποσοστά οπλισμού ρ_{max} που θέτει ο εκαστοτε κανονισμός (για τον ΕΚΩΣ 2000 είναι 0.0161 και για τον Ευρωκώδικα είναι 0.044). Επειδή στο αριθμητικό παράδειγμα 1, το ρ_{lim} είναι το μεγαλύτερο ποσοστό με το οποίο οπλίζεται η διατομή και αυτό προκύπτει να είναι μικρότερο από τα ρ_{max} των δυο κανονισμών, δεν αναπαρίστανται στο γράφημα έτσι ώστε να είναι πιο απλό.

Πίνακας 13α. Λύσεις ισορροπίας για τα δεδομένα του αριθμητικού Παραδείγματος 1- Πίνακας 13.

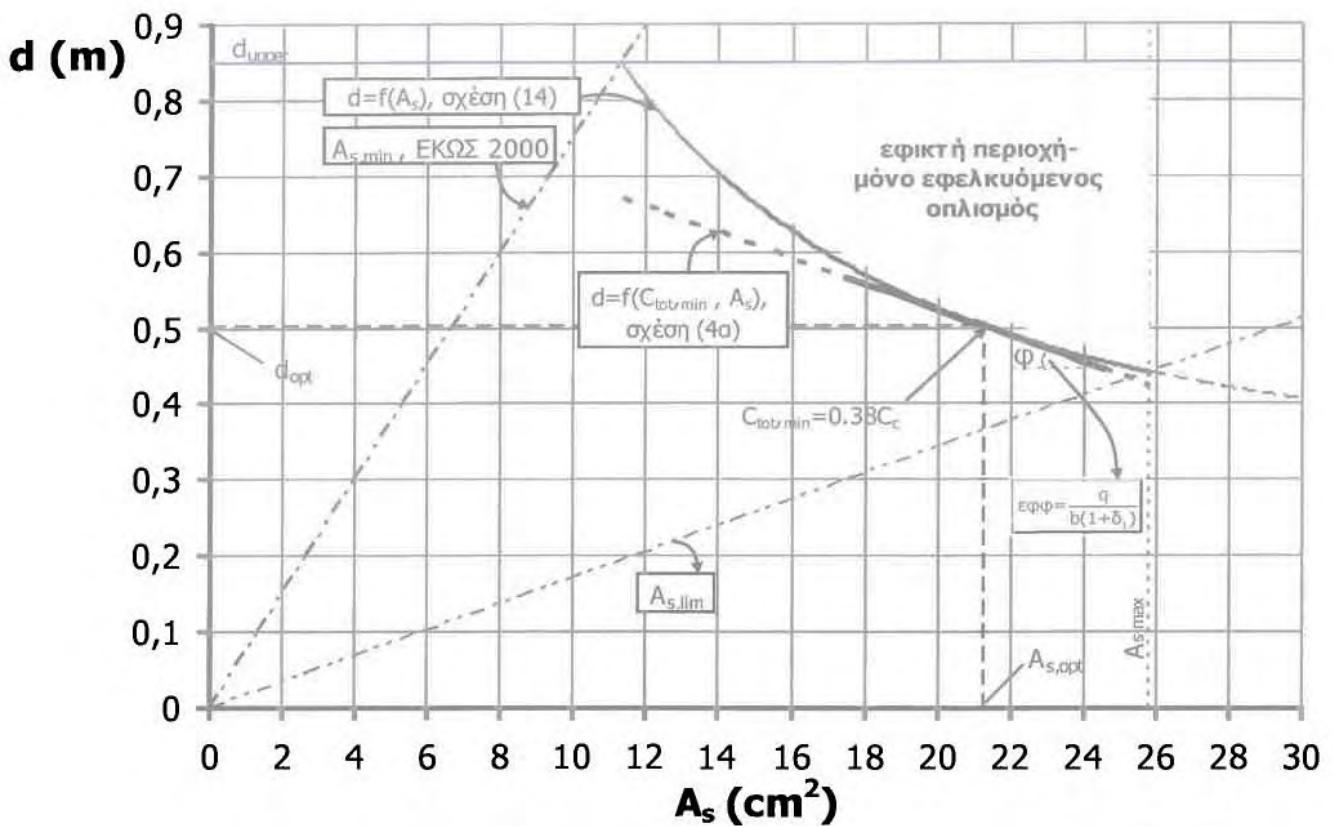
ρ	d (m)	A_c (m ²)	A_s (cm ²)	C_{tot}/C_c (m ²)
0,0033	0,849	0,374	11,33	0,487
0,0040	0,779	0,343	12,46	0,467
0,0045	0,737	0,324	13,26	0,457
0,0050	0,702	0,309	14,03	0,449
0,0055	0,671	0,295	14,77	0,443
0,0060	0,645	0,284	15,48	0,439
0,0065	0,622	0,274	16,17	0,435
0,0070	0,601	0,265	16,84	0,433
0,0075	0,583	0,257	17,50	0,432
0,0080	0,567	0,249	18,14	0,431
0,0085	0,551	0,242	18,80	0,430
0,0090	0,538	0,237	19,38	0,431
0,0095	0,526	0,231	19,98	0,431
0,0100	0,515	0,226	20,58	0,432
0,0105	0,504	0,222	21,17	0,433
0,0110	0,494	0,218	21,75	0,435
0,0115	0,485	0,214	22,33	0,437
0,0120	0,477	0,210	22,90	0,439
0,0125	0,469	0,206	23,46	0,441
0,0130	0,462	0,203	24,02	0,443
0,0135	0,455	0,200	24,57	0,446
0,0140	0,449	0,197	25,13	0,449
0,0145	0,443	0,195	25,67	0,452
0,0146	0,441	0,194	25,83	0,452

Με βάση τα παραπάνω προσδιορίζεται η βέλτιστη λύση $(A_{s,opt}, d_{opt})=(18.8 \text{ cm}^2, 0.551 \text{ m})$ και το ελάχιστο κόστος $C_{tot,min}=0.43C_c$. Το συμπέρασμα που προκύπτει από την λύση που δόθηκε γραφικά είναι ότι η βέλτιστη λύση, για δεδομένες χαρακτηριστικές τάσεις υλικών και ροπή κάμψης, εξαρτάται από το σχετικό κόστος των υλικών και από το πλάτος της διατομής ($\delta_1=0.10$ =σταθερό). Ειδικότερα, με την αύξηση του πλάτους της διατομής προκαλείται μείωση της κλίσης της ευθείας του αντιστοιχεί στο κόστος, με αποτέλεσμα η βέλτιστη λύση να μεταφέρεται πιο δεξιά, δηλαδή σε χαμηλότερη τιμή βέλτιστου ύψους και σε υψηλότερη βέλτιστου εμβαδού οπλισμού (καθώς η καμπύλη ισορροπίας έχει τα κοίλα προς τα κάτω). Στο σχήμα 41 απεικονίζεται η γραφική λύση του αριθμητικού παραδείγματος 1, στην περίπτωση που το πλάτος αυξηθεί και γίνει ίσο με $b=0.5 \text{ m}$. Η νέα κλίση της ευθείας κόστους είναι $\beta=\epsilon\phi=-181.82$ και η νέα βέλτιστη λύση είναι $(A_{s,opt}, d_{opt})= (21.02 \text{ cm}^2, 0.493 \text{ m})$. Το νέο ελάχιστο κόστος είναι ίσο με $C_{tot,min}=0.481C_c$. Η αύξησή του οφείλεται στην αύξηση του συνολικού εμβαδού του χάλυβα οπλισμού, ο οποίος λόγω του $q=100$, έχει μεγάλη βαρύτητα στη διαμόρφωση του συνολικού κόστους. Με την αύξηση του b , το βέλτιστο ρ παραμένει ίδιο. Ωστόσο μειώνεται το συνολικό εμβαδό της διατομής και αυξάνεται το συνολικό εμβαδό του οπλισμού. Ακριβώς επειδή το q είναι 100, δίνει

μεγάλη βαρύτητα στην συμπεριφορά του εμβαδού οπλισμού για την τελική διαμόρφωση του κόστους, με αποτέλεσμα αυτό να αυξάνεται. Αντίθετα στο Σχήμα 42, όπου απεικονίζεται η γραφική λύση του αριθμητικού παραδείγματος 1, στην περίπτωση που το σχετικό κόστος μειωθεί και γίνει ίσο με $q=75$, το συνολικό ελάχιστο κόστος μειώνεται. Η μείωση του q , δίνει μικρότερη κλίση στην ευθεία του κόστους, με αποτέλεσμα η βέλτιστη λύση να μετατοπίζεται πιο δεξιά. Σ'αυτή την περίπτωση όπου ο χάλυβας είναι πιο φτηνός η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί σε ένα πιο μεγάλο ποσοστό οπλισμού ρ και σε ένα πιο μικρό εμβαδό διατομής, $(A_{s,opt}, d_{opt}) = (21.27 \text{ cm}^2, 0.502 \text{ m})$. Το συνολικό κόστος θα είναι πιο μικρό από αυτό του παραδείγματος 1, εφόσον το συνολικό εμβαδό είναι πιο μικρό και η επιρροή του εμβαδού οπλισμού επίσης μικρότερη, $C_{tot,min} = 0.38C_c$. Σαν εφικτή χαρακτηρίζεται η περιοχή που οριοθετείται από την καμπύλη ισορροπίας, από το μέγιστο στατικό ύψος το οποίο αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσοστό οπλισμού και από τον μέγιστο οπλισμό ο οποίος αντιστοιχεί στο ποσοστό ρ_{lim} . Η καμπύλη ισορροπίας δίνει τους συνδυασμούς λύσεων που καλύπτουν οριακά την αστοχία της διατομής. Στην εφικτή περιοχή οι λύσεις αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες διαστάσεις διατομής και εμβαδά οπλισμού, άρα καλύπτουν με άνεση την αστοχία της διατομής.



Σχήμα 41. Γραφική προσέγγιση βέλτιστης λύσης σχεδιασμού για $f_{ck}=30 \text{ MPa}$, $q=100$, $b=0.5 \text{ m}$, $\delta_1=0.10$, $M_d=400\text{kNm}$ και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).



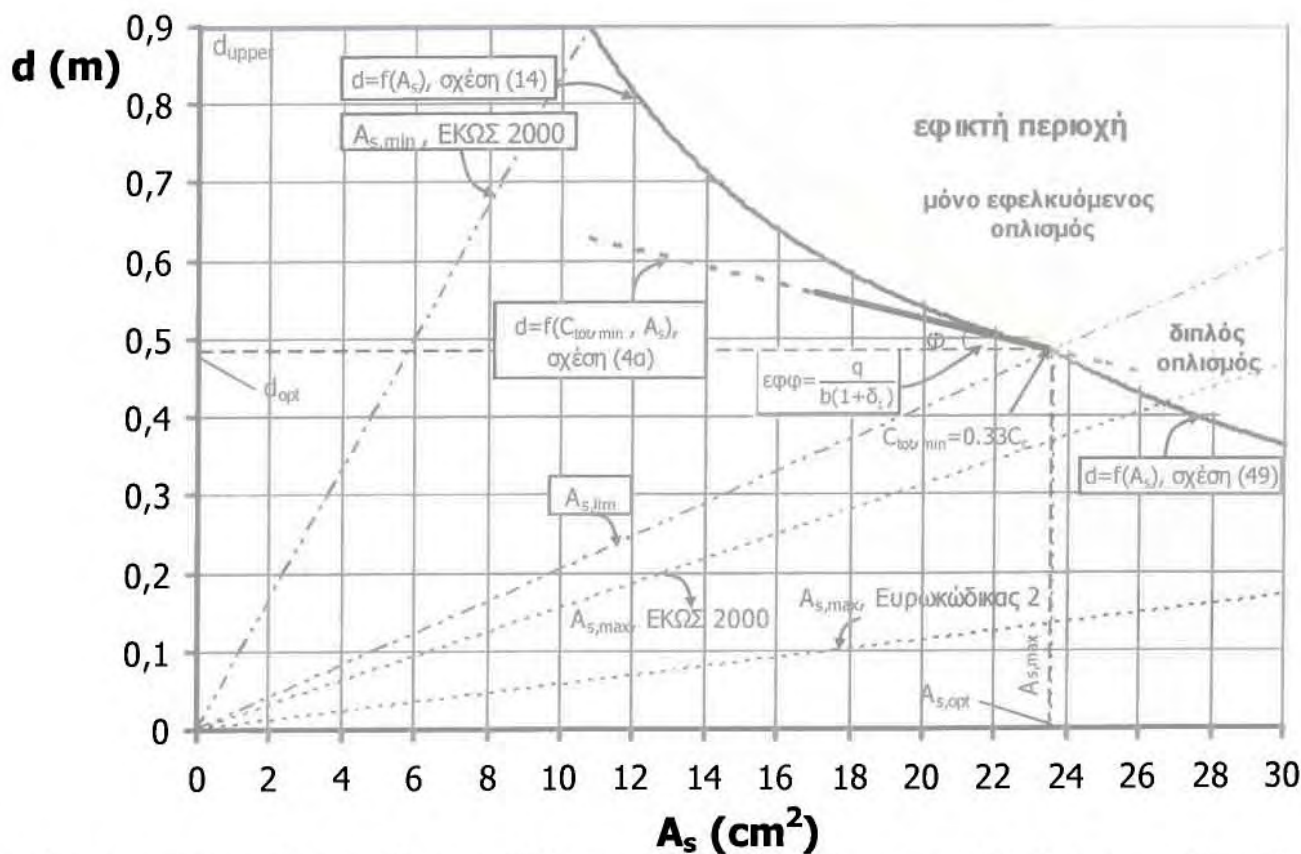
Σχήμα 42. Γραφική προσέγγιση βέλτιστης λύσης σχεδιασμού για $f_{ck}=30$ MPa, $q=75$, $b=0.4$ m, $\delta_1=0.10$, $M_d=400$ kNm και $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - μόνο εφελκόμενος οπλισμός ($\delta_1=0.10$).

Τόσο στο Σχήμα 41 όσο και στο Σχήμα 42 η αντοχή του σκυροδέματος παραμένει σταθερή και ίδια με αυτή του αριθμητικού παραδείγματος 1. Συνεπώς το άνω όριο ρ_{lim} του μόνο εφελκόμενου οπλισμού παραμένει επίσης σταθερό και μικρότερο των ρ_{max} που δίνουν ο ΕΚΩΣ 2000 και ο Ευρωκώδικας 2. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η γραφική λύση σε ένα παράδειγμα σχεδιασμού, όπου ο βέλτιστος οπλισμός είναι ο μέγιστος εφελκόμενος.

Αριθμητικό παράδειγμα 2-γραφική προσέγγιση για την εύρεση της βέλτιστης λύσης μέγιστου εφελκούμενου οπλισμού.

Πίνακας 14. Αριθμητικό παράδειγμα 2- $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - βέλτιστη οικονομικά λύση ο μέγιστος εφελκούμενος οπλισμός.

Περιγραφή	Παράμετροι	Τιμές	Αναφορά
Δεδομένα	f_{ck}, f_{yk}	25 MPa, 500 MPa	
	q	50	
	b	0.4 m	
	M_d	400 kNm	
	δ_1	0.10	
Τιμές ελέγχου	ρ_{opt}	0.0122	σχέση (20)
	ρ_{lim}	0.0122	σχέση (20)
	ρ_{min}	0.003	σχέση (24)
Σχέση ισορροπίας	M_d	$400=435000A_s d - 17182500A_s^2$	σχέση (7 και 14)
Σχέση κόστους	C_{tot}	$d=2.27C_{tot}/C_c - 113.64A_s$ (λυμένη ως προς d)	σχέση (4a)



Σχήμα 43. Γραφική προσέγγιση βέλτιστης λύσης μέγιστου εφελκούμενου οπλισμού δεδομένων Πίνακα 14 ($\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$).

Πίνακας 14α. Λύσεις ισορροπίας για τα δεδομένα του αριθμητικού Παραδείγματος 2-Πίνακας 14.

ρ	d	A_c (m ²)	A_s (cm ²)	A_s' (cm ²)	C_{tot}/C_c (m ²)
0,0030	0,898	0,395	10,74	0	0,449
0,0035	0,834	0,367	11,67	0	0,425
0,0040	0,783	0,345	12,53	0	0,407
0,0045	0,742	0,326	13,35	0	0,393
0,0050	0,707	0,311	14,13	0	0,382
0,0055	0,677	0,298	14,88	0	0,372
0,0060	0,651	0,286	15,61	0	0,364
0,0065	0,628	0,276	16,32	0	0,358
0,0070	0,608	0,267	17,01	0	0,352
0,0075	0,590	0,259	17,69	0	0,348
0,0080	0,574	0,252	18,35	0	0,344
0,0085	0,559	0,246	19,00	0	0,341
0,0090	0,546	0,240	19,64	0	0,338
0,0095	0,534	0,235	20,28	0	0,336
0,0100	0,523	0,230	20,90	0	0,334
0,0105	0,512	0,225	21,52	0	0,333
0,0110	0,503	0,221	22,13	0	0,332
0,0115	0,494	0,217	22,74	0	0,331
0,0120	0,486	0,214	23,34	0	0,331
0,0122	0,483	0,213	23,57	0	0,330
0,0127	0,472	0,208	23,98	0,944	0,332
0,0132	0,462	0,203	24,40	1,848	0,335
0,0137	0,453	0,199	24,81	2,716	0,337
0,0142	0,444	0,195	25,21	3,551	0,339
0,0147	0,436	0,192	25,61	4,356	0,341
0,0152	0,428	0,188	26,00	5,132	0,344
0,0157	0,420	0,185	26,39	5,883	0,346
0,0162	0,413	0,182	26,77	6,610	0,349
0,0163	0,412	0,181	26,81	6,682	0,349
0,0167	0,406	0,179	27,15	7,315	0,351
0,0172	0,400	0,176	27,52	8,000	0,354
0,0177	0,394	0,173	27,89	8,665	0,356
0,0182	0,388	0,171	28,25	9,313	0,359
0,0187	0,382	0,168	28,61	9,943	0,361
0,0192	0,377	0,166	28,96	10,558	0,364
0,0197	0,372	0,164	29,31	11,158	0,366
0,0202	0,367	0,161	29,65	11,744	0,368
0,0207	0,362	0,159	29,99	12,317	0,371

Εφαρμόζοντας τη γραφική λύση με γνωστή την κλίση της ευθείας κόστους $\beta = \epsilon\phi\phi = -113.64$, προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στον μέγιστο εφελκυσμένο οπλισμό και έχει τιμή $(A_{s,opt}, d_{opt}) = (23.57 \text{ cm}^2, 0.483 \text{ m})$, ενώ το

ελάχιστο κόστος είναι ίσο με $C_{tot,min}=0.33C_c$. Σε σχέση με το Παράδειγμα 1, η μείωση του σχετικού κόστους q προκαλεί την αύξηση του βέλτιστου ποσοστού οπλισμού και την μικρή μείωση του στατικού ύψους d , αφού ταυτόχρονα σημειώνεται και μείωση της αντοχής του σκυροδέματος. Συνεπώς το κόστος της διατομής θα είναι σαφώς μειωμένο σε σχέση με πριν, αφού και η επιρροή του εμβαδού χάλυβα είναι μικρή. Ακριβώς επειδή η λύση αυτή είναι οριακή, στο Σχήμα 43 απεικονίζονται λύσεις τόσο μόνο εφελκόμενου οπλισμού όσο και διπλού. Μια δεύτερη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης θα ήταν η εφαρμογή της κλίσης της ευθείας κόστους για τον διπλό οπλισμό. Εφόσον η βέλτιστη λύση είναι το όριο μεταξύ εφελκόμενου και θλιβόμενου οπλισμού ή αλλιώς είναι κοινό σημείο των δυο καμπυλών, θα επαληθεύεται και με τις δυο προσεγγίσεις. Από τη σχέση (32), το κόστος για τον διπλό οπλισμό ορίζεται:

$$C_{tot} = C_c b [d(1+\delta_1) + qd(2\rho - \rho_{lim})]$$

$$\text{ή } \frac{C_{tot}}{C_c} = bd(1+\delta_1) + 2bqdp - bqdp_{lim} = bd(1+\delta_1) + 2qA_s - qbdp_{lim}$$

λύνοντας ως προς d προκύπτει:

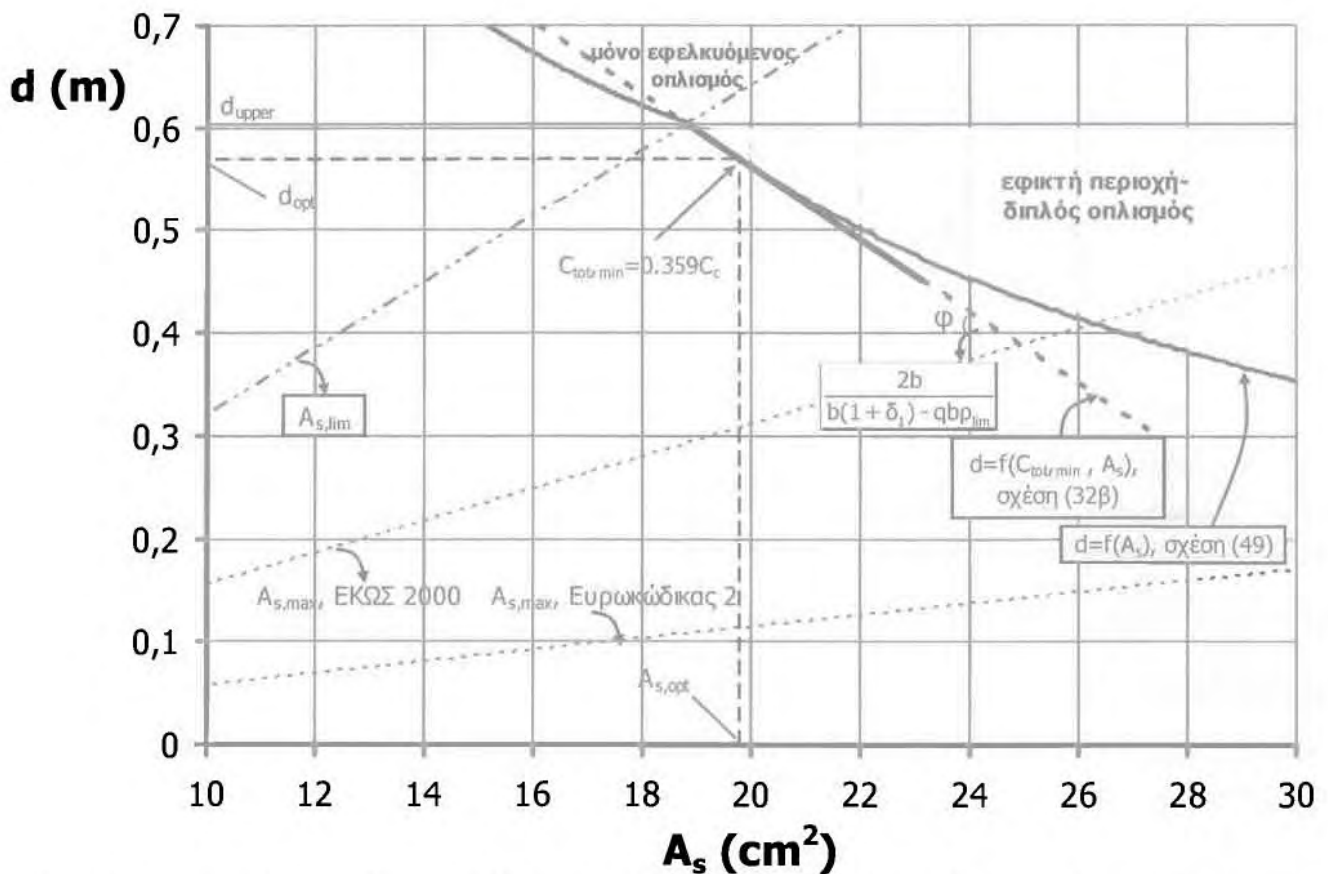
$$d = \frac{\frac{C_{tot}}{C_c} - 2qA_s}{b(1+\delta_1) - qb\rho_{lim}} = \frac{\frac{C_{tot}}{C_c}}{b(1+\delta_1) - qb\rho_{lim}} - \frac{2q}{b(1+\delta_1) - qb\rho_{lim}} A_s \quad (32\beta)$$

Όπως η σχέση για τον μόνο εφελκόμενο οπλισμό (4α), έτσι και η σχέση (32β) είναι της μορφής $y=a+\beta x$, για δεδομένες χαρακτηριστικές τάσεις υλικών, γνωστό πλάτος διατομής και γνωστό σχετικό κόστος υλικών. Συνεπώς η γραφική μέθοδος εύρεσης της βέλτιστης λύσης βασίζεται στην κλίση της ευθείας, $\beta = \text{εφ}\phi = -2q/[b(1+\delta_1) - qb\rho_{lim}]$. Στο παράδειγμα 2, η ευθεία με αυτή την κλίση, εφάπτεται στην καμπύλη των λύσεων με διπλό οπλισμό, ακριβώς στο οριακό σημείο όπου $\rho' = 0$ ή αλλιώς $\rho = \rho_{lim}$. Η κλίση της ευθείας κόστους για τον διπλό οπλισμό έχει παρόμοια συμπεριφορά με την κλίση αυτής για μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Ειδικότερα, εάν δεν υπάρχει θλιβόμενος οπλισμός ο όρος $-qb\rho_{lim}$ απαλείφεται και η σχέση κόστους (32β) του διπλού καταλήγει σε αυτή για τον μόνο εφελκόμενο (4α). Επηρεάζεται από το πλάτος της διατομής, από το σχετικό κόστος των υλικών και από τις χαρακτηριστικές τους τάσεις οι οποίες καθορίζουν το ρ_{lim} .

Αριθμητικό παράδειγμα 3-νοαφική προσέγγιση για την εύρεση της βέλτιστης λύσης διπλού οπλισμού.

Πίνακας 15. Αριθμητικό παράδειγμα 3- $\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$ - βέλτιστη οικονομικά λύση ο μέγιστος εφελκόμενος οπλισμός.

Περιγραφή	Παράμετροι	Τιμές	Αναφορά
Δεδομένα	f_{ck}, f_{yk}	16 MPa, 500 MPa	
	q	50	
	b	0.4 m	
	M_d	400 kNm	
	δ_1	0.10	
Τιμές ελέγχου	ρ_{opt}	0.0087	σχέση (20)
	ρ_{lim}	0.0078	σχέση (20)
	ρ_{min}	0.0033	σχέση (24)
Σχέση ισορροπίας	M_d	$400=391500A_s d - 125.77d^2$	σχέση (40 ή 49a)
Σχέση κόστους	C_{tot}	$d=3.523C_{tot}/C_c - 352.31A_s$ (λυμένη ως προς d)	σχέση (32β)



Σχήμα 44. Γραφική προσέγγιση βέλτιστης λύσης διπλού οπλισμού δεδομένων Πίνακα 15 ($\rho_{lim}=0.75\rho_{bal}$).

Πίνακας 15α. Λύσεις ισορροπίας για τα δεδομένα του αριθμητικού Παραδείγματος 3-Πίνακας 15.

ρ	d	A_c (m ²)	A_s (cm ²)	A_s' (cm ²)	C_{tot}/C_c (m ²)
0,0054	0,701	0,308	15,138	0	0,384
0,0060	0,671	0,295	16,095	0	0,376
0,0065	0,649	0,286	16,875	0	0,370
0,0070	0,630	0,277	17,643	0	0,365
0,0078	0,604	0,266	18,869	0	0,360
0,0083	0,584	0,257	19,396	1,17	0,360
0,0087	0,569	0,250	19,803	2,04	0,359
0,0092	0,552	0,243	20,307	3,08	0,360
0,0097	0,536	0,236	20,8	4,06	0,360
0,0102	0,521	0,229	21,282	5,00	0,361
0,0107	0,508	0,224	21,753	5,88	0,362
0,0112	0,496	0,218	22,215	6,73	0,363
0,0117	0,484	0,213	22,667	7,54	0,364
0,0122	0,473	0,208	23,112	8,32	0,366
0,0127	0,463	0,204	23,547	9,07	0,367
0,0132	0,454	0,200	23,975	9,80	0,369
0,0137	0,445	0,196	24,396	10,50	0,370
0,0142	0,437	0,192	24,81	11,17	0,372
0,0147	0,429	0,189	25,217	11,83	0,374
0,0152	0,421	0,185	25,618	12,46	0,376
0,0157	0,414	0,182	26,012	13,08	0,378
0,0162	0,407	0,179	26,401	13,68	0,380
0,0167	0,401	0,176	26,784	14,26	0,382
0,0172	0,395	0,174	27,162	14,83	0,384
0,0177	0,389	0,171	27,535	15,39	0,386
0,0182	0,383	0,169	27,902	15,93	0,388
0,0187	0,378	0,166	28,265	16,47	0,390
0,0192	0,373	0,164	28,624	16,99	0,392
0,0197	0,368	0,162	28,978	17,49	0,394
0,0202	0,363	0,160	29,328	17,99	0,396
0,0207	0,358	0,158	29,674	18,48	0,398
0,0212	0,354	0,156	30,015	18,96	0,401
0,0217	0,350	0,154	30,353	19,43	0,403

Η βέλτιστη λύση που προσδιορίστηκε γραφικώς, με βάση την κλίση της ευθείας κόστους αντιστοιχεί σε διπλό οπλισμό $\beta = \epsilon\phi = -352.31$, είναι ίση με $(A_{s,opt}, d_{opt}) = (19.8 \text{ cm}^2, 0.569 \text{ m})$ ενώ το ελάχιστο κόστος είναι ίσο με $C_{tot,min} = 0.359C_c$. Σε σχέση με το Παράδειγμα 2 όπου το σχετικό κόστος είναι επίσης $q = 50$, η μείωση της αντοχής του σκυροδέματος προκαλεί την μείωση του ρ_{lim} , με αποτέλεσμα η λύση να αντιστοιχεί στον διπλό οπλισμό. Το συνολικό ποσοστό οπλισμού είναι μικρότερο από πριν, αλλά το εμβαδόν της διατομής αυξάνεται. Συνεπώς το συνολικό κόστος αυξάνεται επίσης.

3.3. Η Μέθοδος Lagrange σε Σχέση με το Κόστος Ξυλοτύπου

Όπως διευκρινίστηκε στην αρχή της παρούσας εργασίας, το κόστος ξυλοτύπου δεν συμπεριλήφθηκε στην κατάστρωση της σχέσης του συνολικού κόστους, όπου θα αποτελούσε έναν επιπλέον όρο με ξεχωριστό κόστος μονάδας. Ωστόσο, για να είναι πιο ρεαλιστικά τα αποτελέσματα και πιο πρακτικός ο σχεδιασμός, το κόστος ξυλοτύπου δόθηκε μέσω της τιμής της μονάδας σκυροδέματος, κάτι που συμβαίνει όντως σε έναν πραγματικό σχεδιασμό. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της διαδικασίας αυτής, είναι χρήσιμο να ελεγχθεί, συμπεριλαμβάνοντας αυτή τη φορά το κόστος ξυλοτύπου στη συνάρτηση του συνολικού κόστους. Για το σκοπό αυτό κρίθηκε σκόπιμο να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα των Yousef A. Al-Salloum and Ghulam Husain Siddigi, τα οποία εξέδωσαν το 1994, στο περιοδικό ACI Structural Journal. Οι δυο ερευνητές ανέπτυξαν σχέσεις που δίνουν τη βέλτιστη λύση σχεδιασμού για την περίπτωση του μόνο εφελκόμενου οπλισμού, συμπεριλαμβάνοντας στο συνολικό κόστος εκτός του κόστους χάλυβα και σκυροδέματος, αυτό του ξυλοτύπου. Με βάση ένα συγκεκριμένο παράδειγμα που παραθέτουν (βλ Πίνακα 16), γίνεται σύγκριση της βέλτιστης λύσης σχεδιασμού στην οποία καταλήγουν, με την αντίστοιχη που προκύπτει σύμφωνα με τις σχέσεις της παρούσας εργασίας.

Πίνακας 16. Παράδειγμα βέλτιστου σχεδιασμού, για την περίπτωση όπου ο ξυλότυπος περιλαμβάνεται στην σχέση κόστους, σύμφωνα με τον αμερικάνικο κανονισμό, όπως παρατίθεται από τους Yousef A. Al-Salloum and Ghulam Husain Siddigi (βλ σχετική βιβλιογραφία, ενότητα 2.1.4.).

Περιγραφή	Παράμετροι	Τιμές
Δεδομένα	f_{ck}, f_{yk}	35 MPa, 420 MPa
	b, d_{max}, δ_1	0.3 m, 1.135 m, 0.0135
	M_d	400 kNm
	C_s	5000 \$/m ³
	C_c	100 \$/m ³
	C_f (κόστος ξυλοτύπου)	2 \$/m ²
Τιμές ελέγχου	ρ_{max}	0.025
	ρ_{min}	0.0033
Σχέση ισορροπίας	$M_d=0,90\rho b d^2 f_{yk}(1-0.59\rho n_f)$	$8.904A_s^2-378A_s d+400*10^6 \leq 0$
Σχέση κόστους	$C_{tot}=C_c(A_c-A_s)+C_s A_s+[2d(1+\delta_1)+b]C_f$	$0.0049A_s+0.034d+2.81$
Βελτιστοποιημένα μεγέθη κατά Lagrange	ρ_{opt}	0.01743
	d_{opt}	0.480 m
	$A_{s,opt}$	25.12 cm ²
	$C_{tot,min}$	34.45 \$/m

Για να γίνει εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο περιπτώσεων βελτιστοποίησης, θα πρέπει τα κόστη που παρατίθενται στον Πίνακα 16 να αναχθούν σε σχετικό κόστος q , συμπεριλαμβανομένου και του ξυλότυπου. Αν αθροιστούν το κόστος σκυροδέματος και το κόστος ξυλοτύπου και στη συνέχεια το αποτέλεσμα

διαιρεθεί με το κόστος χάλυβα, τότε η τιμή του q που προκύπτει είναι περίπου ίση με 45. Με την εφαρμογή των σχέσεων που αποδείχτηκαν στην παρούσα εργασία, υπολογίζονται τα βέλτιστα μεγέθη:

$$\rho_{opt} = \frac{1}{\frac{q}{1 + \delta_1} + 1.578n_f} = \frac{1}{\frac{45}{1 + 0.135} + 1.578 \frac{420}{35}} = 0.0171 \quad \text{και}$$

$$d_{opt} = \sqrt[3]{\frac{M_d}{0.87\rho_{opt} b f_{yk} (1 - 0.79n_f \rho_{opt})}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{400}{0.87 \cdot 0.0171 \cdot 0.3 \cdot 420000 \cdot (1 - 0.79 \frac{420}{35} \cdot 0.0154)}} = 0.505 \text{ m}$$

Έλεγχος άνω ορίου οπλισμού:

$$\rho_{ba} = 0.527 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \frac{f_{ck}}{f_{yk}} = 0.527 \frac{\epsilon_{cu}}{\epsilon_{cu} + \frac{f_{yk}}{1.15E_s}} \frac{1}{n_f} = 0.0289$$

Το άνω όριο στο πρόβλημα του Πίνακα 16, δεν αναφέρεται σε ποια πλαστιμότητα αντιστοιχεί. Εξάλλου το συγκεκριμένο άρθρο μελετά περιπτώσεις όπου η όπλιση αντιστοιχεί σε μόνο εφελκόμενο οπλισμό. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων, παρατηρείται ότι είναι σχεδόν πανομοιότυπα. Το ποσοστό ρ_{opt} που καθορίζει την βέλτιστη λύση, με την εφαρμογή των σχέσεων της παρούσας εργασίας προέκυψε ίσο με 0.0171 ενώ με την εφαρμογή των σχέσεων που συμπεριλαμβάνουν το κόστος ξυλοτύπου εξαρχής προέκυψε ίσο με 0.0174. Αντίστοιχα τα στατικά ύψη έχουν παρόμοια τιμή, με το δε στατικό ύψος στην πρώτη περίπτωση να είναι ίσο με 0.505 m ενώ στη δεύτερη ίσο με 0.48 m. Είναι βέβαια σημαντικό να συνυπολογιστεί το γεγονός ότι τα δυο ζεύγη αποτελεσμάτων προέρχονται από ισορροπίες διατομών που δεν τηρούν τις διατάξεις των ίδιων κανονισμών. Η διαφορά στους συντελεστές των όρων της ισορροπίας, δημιουργούν χωρίς αμφιβολία μια μικρή διαφορά στα αποτελέσματα. Ωστόσο, το συμπέρασμα που προκύπτει από την παραπάνω σύγκριση είναι ότι **τα αποτελέσματα από τις σχέσεις της παρούσας εργασίας είναι αρκετά αντιπροσωπευτικό, παρόλο που το κόστος ξυλοτύπου δεν συμπεριλήφθηκε στη σχέση του συνολικού κόστους.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή και αφού εξετάστηκαν οι διάφορες παράμετροι βελτιστοποίησης σχεδιασμού μιας ορθογωνικής διατομής οπλισμένου σκυροδέματος προέκυψαν κάποια συμπεράσματα, τα οποία παρατίθενται κατηγοριοποιημένα.

α) Αποτελεσματικότητα της μεθόδου βελτιστοποίησης Lagrange.

Μετά την εξέταση όλων των βελτιστοποιημένων παραμέτρων και την επιβεβαίωση της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλασιαστών Lagrange για την εύρεση της βέλτιστης οικονομικά λύσης σχεδιασμού μιας ορθογωνικής διατομής οπλισμένου σκυροδέματος, οδηγεί σε **ακριβή αποτελέσματα** και μπορεί να εφαρμοσθεί το ίδιο επιτυχώς είτε στον **μόνο εφελκόμενο** οπλισμό, είτε στον **διπλό** οπλισμό. Η επαλήθευση των αποτελεσμάτων που δίνει έγινε τόσο με την ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας και τον υπολογισμό του συνολικού κόστους, όσο και με τη γραφική προσέγγιση της λύσης (Κεφάλαιο 3). Επιπλέον, έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων και των συμπερασμάτων με τα αντίστοιχα στα οποία κατέληξαν οι B.Ceranic και C.Fryer του Πανεπιστημίου του Derby στην Αγγλία (University of Derby, Kedleston Site, UK) στο άρθρο που δημοσιεύτηκε στο επιστημονικό περιοδικό Springer-Verlag με τίτλο "Sensitivity analysis and optimum design curves for the minimum cost design of singly and doubly reinforced concrete beams" το έτος 2000 και διαπιστώθηκε ότι αυτά συγκλίνουν. **Συνεπώς η λύση της μεθόδου Lagrange αντιστοιχεί όντως στο ελάχιστο κόστος.** Αναμφισβήτητα, πρόκειται για μια απλή και εύχρηστη μέθοδο, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τον σχεδιαστή χωρίς να απαιτείται το υπόβαθρο γνώσεων σχετικών με μεθόδους βελτιστοποίησης του σχεδιασμού διατομών.

β) Αποτελεσματικότητα των υποθέσεων που έγιναν για την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange.

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1, η βελτιστοποίηση που πραγματεύεται η παρούσα εργασία αφορά μόνο τα υλικά της διατομής (χάλυβας και σκυρόδεμα). Το γεγονός ότι δεν περιλαμβάνονται το κόστος ξυλοτύπου, διαμόρφωσης των υλικών ή εργασίας, μειώνει σημαντικά το συνολικό κόστος, αφού η βαρύτητά τους σε αυτό είναι μεγάλη. Αυτό ίσως να μην επηρεάζει το αποτέλεσμα για την περίπτωση των στοιχείων που δεν παρασκευάζονται ή διαμορφώνονται στο εργοτάξιο και έρχονται έτοιμα, αφού τότε τα κόστη ξυλοτύπου και διαμόρφωσης εκλείπουν. Για να είναι αντιπροσωπευτικά τα αποτελέσματα της διαδικασίας βελτιστοποίησης που έγινε στην παρούσα εργασία, το κόστος ξυλοτύπου και αντλίας σκυροδέτησης για το σκυρόδεμα, καθώς και το κόστος διαμόρφωσης και μεταφοράς για τον χάλυβα, για την περίπτωση σχεδιασμού στην Ελλάδα, **συμπεριλήφθηκαν στα επιμέρους κόστη των μονάδων των υλικών και στη συνέχεια στο σχετικό κόστος τους.** Συνεπώς, ακόμη κι αν η

συνάρτηση συνολικού κόστους δεν καταστρώθηκε έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει τα επιπλέον αυτά κόστη, αυτά περιέχονται στην τιμή του σχετικού κόστους q . Με αυτό τον τρόπο, η μέθοδος γίνεται πιο πρακτική, αφού κατά την αγορά των υλικών το κόστος της μονάδας σκυροδέματος συνοδεύεται πάντα από το κόστος ξυλοτύπου και το κόστος της μονάδας του χάλυβα οπλισμού από το κόστος διαμόρφωσης. Σύμφωνα με την σύγκριση των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας και των αντίστοιχων στα οποία κατέληξαν οι Yousef A. Al-Salloum and Ghulam Husain Siddigi, βελτιστοποιώντας διατομές σύμφωνα με τον αμερικάνικο κανονισμό αφού συμπεριέλαβαν και τον ξυλότυπο, προκύπτει ότι τα αποτελέσματα είναι απολύτως ακριβή. **Συνεπώς, το γεγονός ότι ο ξυλότυπος συμπεριλήφθηκε στην τιμή του σκυροδέματος και δεν αποτέλεσε μόνος του επιπλέον κόστος, δεν φαίνεται να έχει μεγάλη επιρροή στα αποτελέσματα.**

Μια ακόμη παραδοχή που έγινε με σκοπό την απλοποίηση της διαδικασίας βελτιστοποίησης, είναι ότι **ο συνολικά εφελκούμενος οπλισμός στην περίπτωση της διπλής όπλισης, ορίζεται σαν το άθροισμα του μέγιστου εφελκούμενου όταν μόνο αυτός οπλίζει τη διατομή και του θλιβόμενου.** Δηλαδή, όταν οι απαιτήσεις σε αντοχή δεν μπορούν να καλυφθούν από τον μόνο εφελκούμενο οπλισμό, θεωρούμε ότι αφού αυτός πάρει τη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή του, ρ_{lim} , τότε τοποθετείται επιπλέον ποσοστό ρ' τόσο στον εφελκούμενο όσο και στον θλιβόμενο οπλισμό, ώστε να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις του συστήματος. Εάν το μέγιστο επιτρεπόμενο ποσοστό οπλισμού για την όπλιση με μόνο εφελκούμενο οπλισμό, είναι αυτό της "ισορροπημένης" διατομής, τότε αυτό σημαίνει ότι όλες οι διατομές που οπλίζονται με διπλό οπλισμό, είναι ισορροπημένες. Στην πραγματικότητα, ποτέ ο σχεδιασμός δεν γίνεται με άνω όριο την ισορροπημένη διατομή. Συνεπώς, ρυθμίζοντας κατάλληλα την τιμή του ρ_{lim} [βλ. σχέσεις (18),(20),(21), και (22)], ώστε να απέχει από την "ισορροπημένη" διατομή τόσο όσο επιβάλλουν οι απαιτήσεις πλαστιμότητας, η παραδοχή που έγινε για τον διπλό οπλισμό, δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα στο σχεδιασμό. Ωστόσο, η επίδρασή της είναι εμφανής στον βέλτιστο τρόπο όπλισης, δημιουργώντας τρεις περιοχές, την περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι ο μόνο εφελκούμενος οπλισμός, αυτή όπου η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στον μέγιστο εφελκούμενο οπλισμό και την περιοχή όπου η βέλτιστη λύση είναι ο διπλός οπλισμός. Οι τρεις περιοχές μεταβάλλουν το εύρος του και το όριά τους ανάλογα με την τιμή του ρ_{lim} που επιλέγεται. **Όσο πιο χαμηλή είναι η τιμή του ρ_{lim} , τόσο ενισχύονται οι περιοχές όπου η βέλτιστη λύση αντιστοιχεί στον μέγιστο εφελκούμενο και στον διπλό οπλισμό, εις βάρος της περιοχής του μόνο εφελκούμενου.** Η παραδοχή που ορίζει το βέλτιστο ποσοστό στην περίπτωση του διπλού οπλισμού, χρησιμοποιείται στην συνάρτηση του αντίστοιχου συνολικού κόστους, με σκοπό την μείωση των αγνώστων προς βελτιστοποίηση. Με αυτό τον τρόπο, το μέγιστο ποσοστό του μόνο εφελκούμενου οπλισμού, ρ_{lim} , συμπεριλαμβάνεται στην διαδικασία της βελτιστοποίησης από την αρχή, για τον διπλό οπλισμό. Αντίθετα, στην περίπτωση του μόνο εφελκούμενου οπλισμού, το μέγιστο ποσοστό δεν παίρνει μέρος από την αρχή της βελτιστοποίησης, αλλά συγκρίνεται με την βέλτιστη τιμή, στο τέλος. **Συνεπώς διαφορετική τιμή του ρ_{lim} σημαίνει διαφορετική τιμή βέλτιστης λύσης ρ_{opt} διπλού οπλισμού και σταθερή τιμή μόνο εφελκούμενου.**

Τέλος, η παραδοχή ότι το πλάτος b της διατομής παραμένει σταθερό, δεν δημιουργεί πρόβλημα στο σχεδιασμό, αφού μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, αρκεί να διατηρείται σταθερή σε όλη τη διάρκεια του σχεδιασμού με βελτιστοποίηση.

γ) Το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού, ρ_{opt} και η ευαισθησία του σε μεταβολές των παραγόντων που το επηρεάζουν.

Εφαρμόζοντας τη διαδικασία βελτιστοποίησης, προέκυψε ότι **η βέλτιστη λύση σχεδιασμού μιας διατομής καθορίζεται αποκλειστικά από το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού, ρ_{opt}** . Η τιμή του ρ_{opt} , υπολογίζεται από τις χαρακτηριστικές τάσεις των υλικών (χάλυβα και σκυροδέματος) και από το σχετικό τους κόστος. Η τιμή αυτή, σε σύγκριση με το άνω όριο του μόνο εφελκυόμενου οπλισμού ρ_{lim} [βλ. σχέσεις (18),(20),(21), και (22)] καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να οπλιστεί η διατομή ώστε ο σχεδιασμός να αντιστοιχεί στο ελάχιστο δυνατό κόστος. Έπειτα, από ισορροπία δυνάμεων και ροπών υπολογίζεται το στατικό ύψος της διατομής που οπλίζεται με το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού, d_{opt} . Η αντίστροφη πορεία σχεδιασμού δεν μπορεί να ακολουθηθεί στη βελτιστοποίηση. Δηλαδή, είναι αδύνατον να επιλεχθεί πρώτα το ύψος της διατομής και ύστερα να προσδιοριστεί το βέλτιστο ποσοστό ώστε να αντιστοιχεί η διατομή στο ελάχιστο κόστος. Αυτό, συμβαίνει επειδή, το βέλτιστο ποσοστό ρ_{opt} , εξαρτάται με τη σειρά του εκτός από την αντοχή σκυροδέματος (για δεδομένη τάση διαρροής χάλυβα) και από το σχετικό κόστος χάλυβα και σκυροδέματος, q . Συνεπώς, αν ακολουθηθεί η αντίστροφη πορεία σχεδιασμού, για να μπορέσει να γίνει υλοποιήσιμη η τιμή του ρ_{opt} η οποία προκύπτει, θα πρέπει η τιμή του q να προσαρμοστεί σε αυτή. Αυτό όμως είναι αδύνατον, γιατί η τιμή του q είναι δεδομένη σε μια περιοχή. **Άρα, στον βέλτιστο σχεδιασμό μιας διατομής, πρώτα προσδιορίζεται το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό και ύστερα το βέλτιστο στατικό ύψος. Η αντίστροφη πορεία δεν μπορεί να ακολουθηθεί.** Το ζεύγος (ρ_{opt} , d_{opt}) που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση, αποτελεί έναν από τους χιλιάδες συνδυασμούς λύσεων που ικανοποιούν την ισορροπία και ταυτόχρονα τον μοναδικό που αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος. Ανάμεσα στα ζεύγη της ισορροπίας, το βέλτιστο δεν αντιστοιχεί ούτε σε αυτό που το ποσοστό ρ είναι το ελάχιστο και το στατικό ύψος το μέγιστο, αλλά ούτε σε αυτό που το ρ είναι το μέγιστο και το στατικό ύψος το ελάχιστο. **Το ζεύγος αυτό αποτελεί έναν ενδιάμεσο συνδυασμό από αυτούς της ισορροπίας, που σε συνάρτηση πάντα με το σχετικό κόστος q , αντιστοιχεί στο ελάχιστο κόστος σε σύγκριση με τις λύσεις όλων των δυνατών οπλίσεων της διατομής (μόνο εφελκυόμενος ή διπλός οπλισμός).**

Όσον αφορά την ευαισθησία του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού οπλισμού ρ_{opt} , τα αποτελέσματα διαφέρουν ανάλογα με τον τρόπο όπλισης. Στην περίπτωση του μόνο εφελκυόμενου οπλισμού, το ποσοστό ρ_{opt} , εξαρτάται από την αντοχή του σκυροδέματος f_{ck} (χάλυβας S500) και από το σχετικό κόστος των υλικών, q . Η ευαισθησία του στις αλλαγές των δυο μεγεθών είναι παρόμοια. **Η αύξηση της αντοχής σκυροδέματος προκαλεί την αύξηση του βέλτιστου ποσοστού, με το φαινόμενο να γίνεται πιο έντονο όταν η τιμή του q είναι μικρή.** Αυτό συμβαίνει γιατί τότε η τιμή του ρ_{opt} είναι αρκετά μεγάλη. Αντίθετα, όταν η τιμή του q είναι μικρή, η ευαισθησία του βέλτιστου ποσοστού είναι ανεπαίσθητη, αφού το ρ_{opt} παίρνει πολύ μικρές τιμές.

Το ποσοστό του μέγιστου εφελκυόμενου οπλισμού, ρ_{lim} , εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της αντοχής σκυροδέματος, f_{ck} (δεδομένη τιμή χάλυβα). Όσο αυτή αυξάνεται, αυξάνεται και το ποσοστό ρ_{lim} . Όσο χαμηλότερο είναι το ποσοστό του ρ_{bal} που το ρ_{lim} αποτελεί, η ευαισθησία του στις αλλαγές της αντοχής

σκυροδέματος μειώνεται. Ταυτόχρονα, οι τρεις περιοχές των βέλτιστων λύσεων αναδιαρθρώνονται, με αυτές του μέγιστου εφελκυσμού και του διπλού οπλισμού να ενισχύονται. Το ποσοστό του ρ_{lim} , δεν επηρεάζει το βέλτιστο ποσοστό του μόνο εφελκυσμού, αλλά επηρεάζει αυτό του διπλού, αφού η τιμή του συμπεριλαμβάνεται από την αρχή της διαδικασίας βελτιστοποίησης για τη δεύτερη περίπτωση. **Συνεπώς όταν αλλάζει το ρ_{lim} , αλλάζουν και οι τιμές του ρ_{opt} για τον διπλό οπλισμό, για τις ίδιες αντοχές και τα ίδια σχετικά κόστη.**

Το βέλτιστο γεωμετρικό ποσοστό ρ_{opt} , για την περίπτωση όπλισης με διπλό οπλισμό, παρουσιάζει πολύ μεγάλη ευαισθησία στις μεταβολές του q και ανεπαίσθητη μεταβολή στις αλλαγές της αντοχής του σκυροδέματος f_{ck} , με την προϋπόθεση ότι ο θλιβόμενος οπλισμός διαρρέει. Αν δεν διαρρέει, τότε παίζει καθοριστικό ρόλο και η αντοχή του σκυροδέματος. **Όσο το q μειώνεται, το ρ_{opt} αυξάνεται και το εύρος των λύσεων διπλού οπλισμού μεγαλώνει.** Αυτό είναι λογικό, αφού σε μια περιοχή όπου ο χάλυβας έχει κόστος κοντά σε αυτό του σκυροδέματος (μικρό q), συμφέρει η τοποθέτηση μεγάλου ποσοστού από αυτόν, δηλαδή συμφέρει η βέλτιστη λύση να αντιστοιχεί στον διπλό οπλισμό. **Η περιοχή των λύσεων του διπλού οπλισμού ενισχύεται σε εύρος, όσο το ρ_{lim} μικραίνει.**

δ) Το βέλτιστο στατικό ύψος, d_{opt} και η ευαισθησία του σε μεταβολές των παραγόντων που το επηρεάζουν.

Με γνωστό τον βέλτιστο τρόπο όπλισης της διατομής, από την ισορροπία των δυνάμεων και των ροπών προκύπτει το βέλτιστο στατικό ύψος, d_{opt} . Με βάση τα διαγράμματα που απεικονίστηκαν, προκύπτει **ότι η ευαισθησία του στατικού ύψους της διατομής ακολουθεί περίπου την ευαισθησία του βέλτιστου γεωμετρικού ποσοστού, στην μεταβολή της αντίστοιχης παραμέτρου.** Η αύξηση του q , προκαλεί μια απότομη αύξηση των τιμών d_{opt} στην περιοχή του διπλού οπλισμού, όπως ακριβώς συμβαίνει και με το γεωμετρικό ποσοστό οπλισμού, μόνο που αυτό μειώνεται απότομα. Το d_{opt} , δεν παρουσιάζει κάποια ιδιομορφία στη γνωστή συμπεριφορά του και ακολουθεί την ισορροπία της διατομής.

ε) Η συμπεριφορά των μεγεθών που προκύπτουν από την βέλτιστη λύση σχεδιασμού της μεθόδου Lagrange.

Με βάση τη βέλτιστη λύση σχεδιασμού της διατομής, η οποία προέκυψε με την εφαρμογή της μεθόδου Lagrange, προκύπτουν παράγωγα μεγέθη που βοηθούν στη διαδικασία σχεδιασμού. Στην εργασία αυτή μελετήθηκε τόσο η συμπεριφορά του βέλτιστου μηχανικού ποσοστού οπλισμού της διατομής, ω_{opt} , όσο και η ανηγμένη ροπή κάμψης M_{opt} . **Το συμπέρασμα το οποίο προέκυψε είναι ότι και τα δυο παράγωγα από το ρ_{opt} και d_{opt} μεγέθη, εξαρτώνται τόσο από το σχετικό κόστος q των υλικών όσο και από την αντοχή σκυροδέματος (δεδομένη τάση διαρροής χάλυβα).** Εξαρτώνται δηλαδή από τους ίδιους παράγοντες που επηρεάζουν το ρ_{opt} . **Αυτή η διαπίστωση έρχεται σε αντίθεση με τον κλασικό σχεδιασμό,**

όπου τόσο το ω όσο και το μ , είναι ανεξάρτητα της αντοχής σκυροδέματος. Ωστόσο η απεικόνιση της μεταξύ σχέσης των βέλτιστων μεγεθών, είναι μια μοναδική καμπύλη, όπου ανάλογα με την αντοχή του σκυροδέματος, "ενεργοποιείται" διαφορετικό τμήμα της. **Με άλλα λόγια, τα γραφήματα ω_{opt} - μ_{opt} για διαφορετικές τιμές f_{ck} , βρίσκονται όλα πάνω στην ίδια καμπύλη, αλλά διαφέρουν στο εύρος και στα όρια.** Συνεπώς επαληθεύεται το γεγονός ότι η σχέση των δυο μεγεθών είναι ανεπηρέαστη από την τιμή της αντοχής του σκυροδέματος, με δεδομένο ότι όλες οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικά f_{ck} περιέχονται σε μια

στ) Το ελάχιστο κόστος σύμφωνα με την μέθοδο Lagrange.

Η βελτιστοποίηση σχεδιασμού της παρούσας εργασίας έγινε με στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους της υπό σχεδιασμό διατομής. Στην ενότητα 3.1. το συνολικό κόστος ανά μονάδα μήκους δοκού, διαιρέθηκε με το κόστος του κυβικού σκυροδέματος, με αποτέλεσμα να φανεί ότι αυτό που τελικά ελαχιστοποιείται με τη μέθοδο Lagrange είναι ένα εμβαδό: **$bh+qrbd$ ή A_c+qA_s** (στην περίπτωση του διπλού οπλισμού $A_c+q(A_s+A_s')$ ή $A_c+qA_{s,tot}$). Η βέλτιστη λύση σχεδιασμού, διαμορφώνεται σε κάθε περίπτωση έτσι ώστε το εμβαδό της διατομής σκυροδέματος συν το συνολικό εμβαδό χάλυβα πολλαπλασιασμένο με το σχετικό κόστος q , να είναι το ελάχιστο δυνατό. **Ο προσδιορισμός του ελαχίστου της σχέσης κόστους εξαρτάται ακριβώς από την τιμή του q , η οποία καθορίζει το αν συμφέρει να τοποθετηθεί μεγάλη ή μικρή ποσότητα χάλυβα.** Όταν η τιμή του q είναι μεγάλη, τότε ο χάλυβας είναι πολύ πιο ακριβός από το σκυροδέμα και το βέλτιστο ποσοστό οπλισμού είναι μικρό. Η πορεία του συνολικού κόστους θα είναι ανάλογη με την πορεία του εμβαδού διατομής, το οποίο αυξάνεται λόγω της αύξησης του στατικού ύψους, διότι έχει μεγαλύτερη βαρύτητα στη διαμόρφωση του συνολικού κόστους. Πορεία αυτή του συνολικού κόστους συνεχίζεται όσο το εμβαδό οπλισμού είναι μικρό. Ακριβώς το αντίθετο συμβαίνει στην περίπτωση όπου η τιμή του q είναι μικρή. Τότε, το συνολικό κόστος ακολουθώντας την πορεία του εμβαδού της διατομής, είναι μικρότερο. Με βάση αυτή τη λογική διαμορφώνεται το συνολικό κόστος και προκύπτει ο συνδυασμός ρ_{opt} - d_{opt} στον οποίο αντιστοιχεί η ελάχιστη τιμή του. **Συνεπώς, στη μεταβολή της τιμής q , το συνολικό κόστος συμπεριφέρεται ανάλογα.**