

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Τομέας Οργάνωσης Παραγωγής & Βιομηχανικής Διοίκησης**

*Διπλωματική Εργασία*

**Επίλυση του Προβλήματος Χρονικού Προγραμματισμού Διεργασιών  
Συνεχούς Παραγωγής με Χρήση Δυναμικού Προγραμματισμού**

υπο

**ΠΑΣΣΑ ΜΟΥΣΤΑΦΑ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

**ΒΟΛΟΣ 2010**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 8260/1  
Ημερ. Εισ.: 18-03-2010  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜ  
2010  
ΠΑΣ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

Τομέας Οργάνωσης Παραγωγής & Βιομηχανικής Διοίκησης

Διπλωματική Εργασία

**Επίλυση του Προβλήματος Χρονικού Προγραμματισμού Διεργασιών  
Συνεχούς Παραγωγής με Χρήση Δυναμικού Προγραμματισμού**

υπό

**ΠΑΣΣΑ ΜΟΥΣΤΑΦΑ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

**ΒΟΛΟΣ 2010**

© 2010 Μουσταφά Πασσά

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής  
(Επιβλέπων)

**Δρ. Δημήτριος Παντελής**  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

**Δρ. Γεώργιος Λυμπερόπουλος**  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

**Δρ. Γεώργιος Κοζανίδης**  
Λέκτορας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Πρώτα απ' όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας Επίκουρο Καθηγητή κ. Δημήτριο Παντελή για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε να αναλάβω αυτή τη διπλωματική εργασία, την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του κατά τη διάρκεια της εργασίας μου καθώς και τη συμβολή του στην αντιμετώπιση τυχόν δυσκολιών και προβλημάτων που προέκυψαν. Επίσης είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου Καθηγητή Γεώργιο Λυμπερόπουλο και Λέκτορα Γεώργιο Κοζανίδη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Πάνω απ' όλα είμαι ευγνώμων στους γονείς μου Χασάν και Σααδέτ και στον αδερφό μου Ιμπραήμ για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξη τους, ηθική και οικονομική όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην οικογένεια μου.

Πασσά Μουσταφά

# Επίλυση του Προβλήματος Χρονικού Προγραμματισμού Διεργασιών Συνεχούς Παραγωγής με Χρήση Δυναμικού Προγραμματισμού

ΠΑΣΣΑ ΜΟΥΣΤΑΦΑ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2010

**Επιβλέπων Καθηγητής:** Δρ. Δημήτριος Παντελής, Επίκουρος Καθηγητής

Στοχαστικών Προτύπων Επιχειρησιακής Έρευνας  
στη Βιομηχανική Διοίκηση

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία μελετάμε το Πρόβλημα του Χρονικού Προγραμματισμού Διεργασιών Συνεχούς Παραγωγής με Χρήση Δυναμικού Προγραμματισμού, για μια βιομηχανία που παράγει διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων, χρησιμοποιώντας μια γραμμή παραγωγής. Η ζήτηση για κάθε προϊόν σε κάθε βαθμίδα θεωρείται τυχαία ενώ όλοι οι χρόνοι αλλαγής της παραγωγικής διαδικασίας από ένα παραγόμενο προϊόν σε κάποιο άλλο θεωρούνται καθοριστικοί. Όταν η μονάδα παραγωγής παράγει ένα συγκεκριμένο προϊόν σε μια συγκεκριμένη βαθμίδα, οι μόνες επιτρεπτές αλλαγές στην παραγωγή είναι από αυτή τη βαθμίδα προς στην αμέσως προηγούμενη ή προς στην αμέσως επόμενη. Μοντελοποιούμε το συγκεκριμένο πρόβλημα ως μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων (Markov Decision Process ή MDP) διακριτού χρόνου, όπου σε κάθε περίοδο αποφασίζεται αν θα πρέπει να αλλάξει η ρύθμιση της παραγωγικής διαδικασίας ώστε να ξεκινήσει η αλλαγή προϊόντος σε μια γειτονική βαθμίδα από αυτή που παραγόταν ή όχι. Η απόφαση αυτή προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος και τα επίπεδα αποθέματος ετοιμοπαραδότητων προϊόντων για όλες τις βαθμίδες. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο προσδοκώμενο κόστος λειτουργίας της μονάδας στον άπειρο χρονικό ορίζοντα. Το κόστος αυτό προέρχεται από τις αλλαγές στην παραγωγή, τις χαμένες πωλήσεις λόγω ανεπαρκών αποθεμάτων, και την υπερχειλίση του αποθηκευτικού χώρου. Για την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής χρησιμοποιούμε μία παραλλαγή της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων, όπου το κριτήριο σύγκλισης καθορίζεται από το μέσο κόστος λειτουργίας του συστήματος σε κάθε βήμα, το οποίο υπολογίζεται με προσομοίωση. Αρχικά επιλύουμε το πρόβλημα 4 και 5 προϊόντων εκκινώντας τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων με διαφορεικό κόστος  $V=0$  για διαφορετικές περιπτώσεις ζητήσεων. Κατόπιν επιλύουμε τα ίδια προβλήματα με αρχικό διαφορετικό κόστος που προκύπτει από τη λύση ενός αριθμού τριτοβάθμιων υποπροβλημάτων που προσεγγίζουν τα πραγματικά προβλήματα 4 και 5 προϊόντων. Παρουσιάζουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από τους δυο τρόπους επίλυσης του προβλήματος. Για όλες τις περιπτώσεις ζητήσεων που επιλύθηκαν η εναλλακτική μέθοδος που εξετάζεται σε αυτήν την εργασία συγκλίνει πολύ ταχύτερα από την κλασική μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b>	Εισαγωγή.....	11
<b>1.1</b>	Κίνητρο και Υπόβαθρο.....	11
<b>1.2</b>	Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....	11
<b>1.3</b>	Οργάνωση της Διπλωματικής Εργασίας.....	14
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b>	Χρονικός Προγραμματισμός.....	15
<b>2.1</b>	Δυναμικός Προγραμματισμός.....	17
<b>2.2</b>	Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού.....	18
<b>2.3</b>	Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα του Δυναμικού Προγραμματισμού.....	20
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b>	Προσομοίωση.....	21
<b>3.1</b>	Τα Είδη Μοντέλων Προσομοίωσης.....	22
<b>3.2</b>	Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Προσομοίωσης.....	23
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>	Μορφοποίηση - Επίλυση του Χρονικού Προγραμματισμού με Χρήση Δυναμικού Προγραμματισμού.....	24
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b>	Αριθμητικά Αποτελέσματα.....	27
<b>5.1</b>	Αριθμητικά Αποτελέσματα 4 Προϊόντων.....	27
<b>5.2</b>	Συμπεράσματα των 4 Προϊόντων.....	42
<b>5.3</b>	Αριθμητικά Αποτελέσματα 5 Προϊόντων.....	43
<b>5.4</b>	Συμπεράσματα των 5 Προϊόντων.....	68
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</b>	Σύνοψη Διπλωματικής Εργασίας - Μελλοντική Εργασία.....	69
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	.....	70
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	.....	73



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

<b>Πίνακας 1:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για το πρόβλημα 4 και 5 προϊόντων...	27
<b>Πίνακας 2:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 1, BDDB	27
<b>Πίνακας 3:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 2, DDBB	28
<b>Πίνακας 4:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 3, DBDB	28
<b>Πίνακας 5:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 4, DBBD	28
<b>Πίνακας 6:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD) με τον ακριβή αλγόριθμο	29
<b>Πίνακας 7:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 1, BDDB με διαφορετικό κόστος (V=0)	29
<b>Πίνακας 8:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 2, DDBB με διαφορετικό κόστος (V=0)	30
<b>Πίνακας 9:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 3, DBDB με διαφορετικό κόστος (V=0)	30
<b>Πίνακας 10:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 4, DBBD με διαφορετικό κόστος (V=0)	31
<b>Πίνακας 11:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 5, BD-D-B	32
<b>Πίνακας 12:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 6, B-D-DB	32
<b>Πίνακας 13:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 7, DD-B-B	32
<b>Πίνακας 14:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 8, D-D-BB	32
<b>Πίνακας 15:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 9, DB-D-B	32
<b>Πίνακας 16:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 10, D-B-DB	33
<b>Πίνακας 17:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 11, DB-B-D	33
<b>Πίνακας 18:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 12, D-B-BD	33
<b>Πίνακας 19:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 1, BDDB με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα	34
<b>Πίνακας 20:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 2, DDBB με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα	34
<b>Πίνακας 21:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 3, DBDB με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα	35
<b>Πίνακας 22:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 4, DBBD με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα	35
<b>Πίνακας 23:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 1, BDDB	37
<b>Πίνακας 24:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 2, DDBB	38
<b>Πίνακας 25:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 3, DBDB	39
<b>Πίνακας 26:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 4, DBBD	40
<b>Πίνακας 27:</b> Συγκεντωτικό πίνακα αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις από 1 έως 4	41
<b>Πίνακας 28:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 13, ACDC	43
<b>Πίνακας 29:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 14, DCCAA	43
<b>Πίνακας 30:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 15, DCAAC	43
<b>Πίνακας 31:</b> Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 16, DACAC	44
<b>Πίνακας 32:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 13 έως 16 (ACDC, DCCAA, DCAAC, DACAC) με τον ακριβή αλγόριθμο	44
<b>Πίνακας 33:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 13, ACDC με διαφορετικό κόστος (V=0)	45

<b>Πίνακας 34:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 14, DCCAA με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ ).....	45
<b>Πίνακας 35:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 15, DCAAC με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ ).....	46
<b>Πίνακας 36:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 16, DACAC με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ ).....	46
<b>Πίνακας 37:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 17, ACD-C-A.....	47
<b>Πίνακας 38:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 18, AC-D-CA.....	47
<b>Πίνακας 39:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 19, A-C-DCA.....	48
<b>Πίνακας 40:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 20, DCC-A-A.....	48
<b>Πίνακας 41:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 21, DC-C-AA.....	48
<b>Πίνακας 42:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 22, D-C-CAA.....	48
<b>Πίνακας 43:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 23, DCA-A-C.....	48
<b>Πίνακας 44:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 24, DC-A-AC.....	48
<b>Πίνακας 45:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 25, D-C-AAC.....	49
<b>Πίνακας 46:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 26, DAC-A-C.....	49
<b>Πίνακας 47:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 27, DA-C-AC.....	49
<b>Πίνακας 48:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 28, D-A-CAC.....	49
<b>Πίνακας 49:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 13,ACDCA με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα.....	50
<b>Πίνακας 50:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 14,DCCAA με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα.....	50
<b>Πίνακας 51:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 15,DCAAC με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα.....	51
<b>Πίνακας 52:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 16,DACAC με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα.....	51
<b>Πίνακας 53:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 13,ACDCA.....	53
<b>Πίνακας 54:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 14,DCCAA.....	54
<b>Πίνακας 55:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 15,DCAAC.....	55
<b>Πίνακας 56:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 16,DACAC.....	56
<b>Πίνακας 57:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 29, BBDBB.....	57
<b>Πίνακας 58:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 30, ECFCE.....	57
<b>Πίνακας 59:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 31, EAЕAE.....	57
<b>Πίνακας 60:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 29 έως 31 (BBDBB, ECFCE, EAЕAE) με τον ακριβή αλγόριθμο.....	57
<b>Πίνακας 61:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 29, BBDBB με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ ).....	58

<b>Πίνακας 62:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 30, ECFCE με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ ).....	59
<b>Πίνακας 63:</b> Αποτελέσματα για την περίπτωση 31, EAEAE με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ ).....	60
<b>Πίνακας 64:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 32, BBD-B-B...61	
<b>Πίνακας 65:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 33, BB-D-BB...62	
<b>Πίνακας 66:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 34, B-B-DBB...62	
<b>Πίνακας 67:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 35, ECF-C-E.....62	
<b>Πίνακας 68:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 36, EC-F-CE.....62	
<b>Πίνακας 69:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 37, E-C-FCE....62	
<b>Πίνακας 70:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 38, EAE-A-E...63	
<b>Πίνακας 71:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 39, EA-E-AE....63	
<b>Πίνακας 72:</b> Κατανομές ζητήσεων, $Pr(D_j = i)$ για την περίπτωση 40, E-A-EAE....63	
<b>Πίνακας 73:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 29, BBDBB.....64	
<b>Πίνακας 74:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 30, ECFCE.....65	
<b>Πίνακας 75:</b> Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 31, EAEAE.....66	
<b>Πίνακας 76:</b> Συγκεντωτικό πίνακα αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις από 13 έως 16 και από 29 έως 31.....	67

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

<b>Διάγραμμα 1:</b> Διάγραμμα των περιπτώσεων από 1 έως 4 με διαφορεικό κόστος ( $V=0$ ).....	31
<b>Διάγραμμα 2:</b> Διάγραμμα των περιπτώσεων από 1 έως 4 με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα.....	36
<b>Διάγραμμα 3:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 1,BDDB.....	37
<b>Διάγραμμα 4:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 2,DDBB.....	38
<b>Διάγραμμα 5:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 3,DBDB.....	39
<b>Διάγραμμα 6:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 4,DBBD.....	40
<b>Διάγραμμα 7:</b> Διάγραμμα των περιπτώσεων από 13 έως 16 με διαφορεικό κόστος ( $V=0$ ).....	47
<b>Διάγραμμα 8:</b> Διάγραμμα των περιπτώσεων από 13 έως 16 με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα.....	52
<b>Διάγραμμα 9:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 13,ACDCA.....	53
<b>Διάγραμμα 10:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 14,DCCAA.....	54
<b>Διάγραμμα 11:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 15,DCAAC.....	55
<b>Διάγραμμα 12:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 16,DACAC.....	56
<b>Διάγραμμα 13:</b> Διάγραμμα των περιπτώσεων από 29 έως 31 με διαφορεικό κόστος ( $V=0$ ).....	61
<b>Διάγραμμα 14:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 29, BBDBB.....	64
<b>Διάγραμμα 15:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 30, ECFCE.....	65
<b>Διάγραμμα 16:</b> Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 31, EAEAE.....	66

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

<b>Σχήμα 1:</b> Δείχνει τους τρόπους μελέτης για τη λειτουργία ενός συστήματος.....	21
---	----

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 ΚΙΝΗΤΡΟ ΚΑΙ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ο χρονικός προγραμματισμός της παραγωγής πολλαπλών προϊόντων σε μια παραγωγική μονάδα κάτω από αυστηρούς περιορισμούς παραγωγικής ικανότητας είναι ένα από τα κλασικά προβλήματα στην επιχειρησιακή έρευνα που συχνά αναφέρεται ως στοχαστικό πρόβλημα χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής. Μια από τις σύγχρονες μεθόδους επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είναι ο δυναμικός προγραμματισμός με τον οποίο προκύπτει η βέλτιστη ακριβής λύση του προβλήματος. Όμως με τη μέθοδο δυναμικού προγραμματισμού όσο αυξάνει η πολυπλοκότητα του πραγματικού συστήματος τόσο αυξάνει και ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος. Έτσι για την μείωση του χρόνου επίλυσης του προβλήματος αναπτύχθηκε ως εναλλακτική μέθοδος επίλυσης η προσομοίωση. Μια μέθοδος προσομοίωσης δεν περιλαμβάνει μεθόδους βελτιστοποίησης παρά μόνο προσομοιώνει τη λειτουργία του συστήματος με τη βοήθεια ενός αλλού συστήματος το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ένα μοντέλο που εκτελείται σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Με τη μέθοδο προσομοίωσης δεν προκύπτει η αναλυτική λύση του προβλήματος, όμως ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος είναι πολύ ταχύτερος σε σύγκριση με τον δυναμικό προγραμματισμό. Η περιγραφή αυτών των δυο μεθόδων μας οδηγεί στα αντίστοιχα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου επίλυσης προβλημάτων. Όπως θα αναλύσουμε στα επόμενα κεφάλαια είναι φανερό ότι οι δυο αυτές μέθοδοι αλληλοσυμπληρώνονται μεταξύ τους ως μια μέθοδος επίλυσης πολύπλοκων προβλημάτων.

## 1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Η SELSP είναι ένα ενδιαφέρον και σχετικό πρόβλημα, τόσο από θεωρητική και τόσο από πρακτική άποψη και γι αυτό έχει λάβει σημαντική προσοχή στη βιβλιογραφία. Μια περιεκτική ανασκόπηση σχετικών εργασιών περιέχεται στην εργασία των Sox et al.(1999) και Winands et al.(2005). Από αυτές τις εργασίες προκύπτει ότι στη βιβλιογραφία υπάρχουν δυο προσεγγίσεις για την επίλυση του SELSP. Η πρώτη αφορά την ανάπτυξη ενός κυκλικού προγράμματος παραγωγής το οποίο προκύπτει από τη χρήση μιας καθοριστικής προσέγγισης του στοχαστικού προβλήματος κατά την οποία αναπτύσσεται ένας κανόνας έλεγχου που εφαρμόζεται στο συγκεκριμένο πρόγραμμα. Η βιβλιογραφία σε αυτή την προσέγγιση είναι σχετικά πλούσια και έχει αυξηθεί εξαιτίας της ανάπτυξης του καθοριστικού προβλήματος ELSP. Μερικές από τις πιο αντιπροσωπευτικές εργασίες που εφαρμόζουν κυκλικό πρόγραμμα παραγωγής είναι ο Gallego (1990,1994), οι Bourland και Yano (1994), Fransoo et al.(1995), οι Federgruen και Katalan (1996), οι Leachman και Gascon (1998), οι Anupindi και Tayur (1998), ο Markowitz et al. (2000) και οι Markowitz και Wein (2001). Η ελκυστικότητα αυτής της προσέγγισης έγκειται στην ικανότητα να εξασφαλίζει μια πρακτική επίλυση σε προβλήματα με μεγάλο αριθμό προϊόντων. Το μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι δεν ανταποκρίνεται θετικά σε τυχαίες αλλαγές της ζήτησης.

Η άλλη προσέγγιση, η οποία χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική εργασία για την επίλυση του SELSP, βασίζεται στην ανάπτυξη ενός δυναμικού προγράμματος παραγωγής το οποίο καθορίζει ποιο προϊόν θα παραχθεί, λαμβάνοντας υπόψη την τρέχουσα κατάσταση του συστήματος. Για παράδειγμα το επίπεδο αποθέματος του προϊόντος για το οποίο βρίσκεται στημένη η παραγωγή, ή τη γενική κατάσταση του συστήματος. Ο Zipkin (1986) είναι ένα ενδεικτικό παράδειγμα ο οποίος προσεγγίζει τη δυναμική αλληλουχία χρησιμοποιώντας μια πολιτική μεγέθους παρτίδας τύπου  $(s,Q)$ . Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιεί είτε ένα ευρετικό αλγόριθμο είτε την ανάλυση του βέλτιστου έλεγχου του προβλήματος. Η βιβλιογραφία που περιγράφει τις προσεγγίσεις της δυναμικής αλληλουχίας και ειδικότερα το «ρεύμα» των εργασιών που υιοθετεί την προοπτική του βέλτιστου έλεγχου είναι αρκετά περιορισμένο, εξαιτίας της δυσκολίας εύρεσης αναλυτικής λύσης ακόμη και σε προβλήματα μικρού μεγέθους, γεγονός το οποίο μετατρέπει σε υπολογιστική πρόκληση την αριθμητική επίλυση προβλημάτων ρεαλιστικού μεγέθους.

Από τους πρώτους ερευνητές που ασχολήθηκαν με το πρόβλημα SELSP είναι οι Vergin και Lee (1978) οι οποίοι εξέτασαν απλούς ευρετικούς αλγορίθμους δυναμικής αλληλουχίας για το πρόβλημα SELSP με κόστος μετάβασης αλλά χωρίς μεταβατικούς χρόνους. Το συμπέρασμα τους είναι ότι ο ευρετικός αλγόριθμος που υπερτερεί είναι εκείνος όπου σε κάθε περίοδο υποδεικνύει τη μετάβαση της παραγωγής στο προϊόν με τις λιγότερες απομένουσες μέρες σε στοκ ή τις περισσότερες μέρες με απόθεμα σε έλλειψη, μεταξύ φυσικά των προϊόντων που έχουν λιγότερες μέρες σε διαθέσιμο στοκ από τον κρίσιμο αριθμό ημερών. Διαφορετικά εάν το προϊόν το οποίο παράγεται δεν υπερβαίνει το μέγιστο επίπεδο αποθέματος (απόλυτο και σχετικό) τότε η παραγωγή συνεχίζεται την επόμενη περίοδο, ενώ σε διαφορετική περίπτωση η παραγωγή παραμένει ανενεργή την επόμενη περίοδο.

Ο Graves (1980) μορφοποίησε το SELSP ως πρόβλημα διακριτού χρόνου στοχαστικού έλεγχου με δυναμική αλληλουχία. Πρώτα επίλυσε το πρόβλημα ενός προϊόντος με κόστη διατήρησης και έλλειψης αποθέματος, καθώς και κόστος μετάβασης αλλά χωρίς μεταβατικούς χρόνους, όπου η απόφαση που πρέπει να ληφθεί σε κάθε περίοδο είναι αν η παραγωγική μονάδα θα παράγει ή θα μείνει ανενεργή. Στη συνέχεια χρησιμοποίησε τη λύση του προβλήματος του ενός προϊόντος ως βάση μιας ευρετικής προσέγγισης για την επίλυση του προβλήματος πολλαπλών προϊόντων. Σύμφωνα με αυτή την ευρετική προσέγγιση, οι συγκρούσεις για τον προγραμματισμό διαφορετικών προϊόντων επιλύονται συγκρίνοντας τα διαφορετικά κόστη που προκύπτουν για κάθε μεμονωμένο και κάθε σύνθετο προϊόν, με βάση την ανάλυση του ενός προϊόντος. Το σύνθετο προϊόν είναι μια έννοια που εισάγει ο Graves για να βοηθήσει στην πρόληψη πιθανών συγκρούσεων στον προγραμματισμό του προβλήματος πολλαπλών προϊόντων. Η γενικότερη ιδέα είναι ότι το σύνθετο απόθεμα διαφόρων προϊόντων θα έπρεπε να υποδεικνύει την ανάγκη για άμεση παραγωγή στην περίπτωση όπου το απόθεμα του κάθε προϊόντος ξεχωριστά δεν υποδείκνυε μια τέτοια ανάγκη επειδή η ποσότητα του θα ήταν μόλις επαρκής.

Ο Qiu και Loulou (1995) μελετούν το πρόβλημα SELSP με ζητήσεις που ακολουθούν κατανομή Poisson, καθοριστικούς χρόνους επεξεργασίας και μετάβασης, κόστη μετάβασης και κόστη έλλειψης και διατήρησης αποθέματος. Οι συγγραφείς μοντελοποιούν το πρόβλημα ως μια ημι-Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων (Semi-Markov Decision Process) που έχει ως στόχο τον καθορισμό του προϊόντος που θα παραχθεί εφόσον παραχθεί κάποιο προϊόν σε κάθε στιγμή αναθεώρησης του

συστήματος, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί το εκπιπόμενο κόστος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα. Ως στιγμές αναθεώρησης ορίζονται εκείνα τα χρονικά σημεία όπου είτε η παραγωγική μονάδα είναι ανενεργή και κάποιες ζητήσεις έχουν έρθει, είτε κάποιο προϊόν έχει μόλις παραχθεί και η παραγωγική μονάδα είναι ελεύθερη. Για να παράγουν σχεδόν βέλτιστες πολιτικές έλεγχου χρησιμοποιούν διαδοχικές προσεγγίσεις επιλύοντας το πρόβλημα σε έναν περικεκομμένο χώρο καταστάσεων αποθέματος και υπολογίζοντας τα όρια σφάλματος λόγω της περικοπής. Στην παρουσίαση δυο προϊόντων αναφέρουν ότι τα συστήματα με περισσότερα προϊόντα περιορίζονται από την κατάρρα της διαστατικότητας.

Οι Karmarkar και Yoo (1994) και οι Sox και Muckstadt (1997) αναπτύσσουν στοχαστικά μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα για το SELSP που θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν και ως SCLSP. Στη μοντελοποίηση τους θεωρούν καθοριστικούς χρόνους παράγωγης και αλλαγών και χρησιμοποιούν την μέθοδο της χαλάρωσης Lagrange για την εύρεση βέλτιστων ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων σε προβλήματα μικρού μεγέθους.

Επίσης υπάρχει μια πληθώρα εργασιών δυναμικού προγραμματισμού που περιγράφουν συστήματα που υπόκεινται σε βλάβες και βασίζονται στη προσέγγιση ελέγχου ροής. Αρκετές εργασίες της δεδομένης βιβλιογραφίας υποθέτουν ότι η δυναμικότητα της παραγωγής αλλάζει συχνά εξαιτίας της αστοχίας και επισκευής των μηχανών ενώ ο ρυθμός της ζήτησης παραμένει σταθερός.

Οι Kimemia και Gershwin (1983) βρίσκονται ανάμεσα στους πρώτους ερευνητές που δείχνουν ότι η βέλτιστη πολιτική έλεγχου για τα δεδομένα συστήματα είναι μια πολιτική ισοσταθμισμένου σημείου σύμφωνα με την οποία διατηρείται ένα θετικό πλεόνασμα αποθεμάτων των προϊόντων προκειμένου να καλυφθούν πιθανές ελλείψεις που δημιουργούνται κατά τη διάρκεια αστοχίας των μηχανών.

Όταν ένα σύστημα δεν είναι απόλυτα προσαρμοσμένο αλλά απαιτεί ρυθμίσεις, οι Sharifnia et al. (1991) προτείνουν μια πολιτική προγραμματισμού η οποία χρησιμοποιεί διαδρόμους στο χώρο που ένα προϊόν βρίσκεται σε πλεόνασμα η έλλειμμα καθορίζοντας την περίοδο που πρέπει να γίνει αλλαγή στην παραγωγή προκειμένου η τροχιά του αποθέματος να οδηγηθεί στην επιθυμητή κατεύθυνση. Επίσης ερευνούν λεπτομερώς την περίπτωση όπου η επιθυμητή τροχιά οδηγεί στο ισοσταθμισμένο σημείο και δείχνουν ότι σε αυτή την περίπτωση η τροχιά του αποθέματος που βρίσκεται σε πλεόνασμα ή έλλειμμα μπορεί να μην οδηγήσει σε ολοκληρωμένο κύκλο παραγωγής.

Σε μια άλλη σχετική εργασία οι Liberopoulos και Caramanis (1997) χρησιμοποιούν μια προσέγγιση MDP για την εύρεση του βέλτιστου ρυθμού παραγωγής και της μεταβατικής πολιτικής μιας παραγωγικής μονάδας που υπόκειται σε βλάβες και παρουσιάζει ασήμαντους ή τυχαίους χρόνους μετάβασης προκειμένου να ικανοποιήσει τη σταθερή τυχαία ζήτηση των δυο προϊόντων έχοντας κάνει υποθέσεις που αφορούν τα κόστη διατήρησης αποθέματος ή ελλείμματος. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της έρευνάς τους αποκαλύπτουν ότι η βέλτιστη μεταβατική πολιτική είναι μια πολιτική τύπου διαδρόμου η οποία ορίζει ένα ισοσταθμισμένο περιορισμένο κύκλο.

Παράλληλα οι Elhafsi και Bai (1997) ακολουθούν μια όμοια προσέγγιση για ένα όμοιο σύστημα παραγωγής δυο προϊόντων και δείχνουν ότι η δομή της βέλτιστης

πολιτικής μετάβασης είναι μια παρόμοια πολιτική τύπου διαδρόμου. Στην δική τους περίπτωση, ο διάδρομος είναι είτε ορθογώνιος είτε παράλληλος και εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος.

Οι Leachman και Gascon (1988) αναπτύσσουν μια δυναμική περιοδική πολιτική έλεγχου που καθορίζει ποια προϊόντα θα παραχθούν και σε ποιες ποσότητες με βάση τις δυναμικά υπολογισμένες λύσεις καθοριστικών ELSP που λαμβάνουν υπόψη μη στάσιμες κατανομές ζήτησης. Η λύση που προκύπτει από το καθοριστικό μοντέλο τροποποιείται εάν δύο ή περισσότερα προϊόντα είναι κοντά στο να εξαντληθούν τα αποθέματα τους ή βρίσκονται ήδη σε κατάσταση έλλειψης.

### 1.3 ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το υπόλοιπο αυτής της διπλωματικής εργασίας χωρίζεται σε 5 ενότητες που καταλαμβάνουν τα κεφάλαια 2-6 αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιγράφουμε το χρονικό προγραμματισμό, το δυναμικό προγραμματισμό, τα χαρακτηριστικά του δυναμικού προγραμματισμού καθώς τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του δυναμικού προγραμματισμού.

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιγράφουμε την προσομοίωση, τα είδη μοντέλων της προσομοίωσης καθώς τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της προσομοίωσης.

Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο μορφοποιούμε και επιλύουμε τον χρονικό προγραμματισμό με χρήση δυναμικού προγραμματισμού.

Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα και τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο περιγράφουμε τη σύνοψη της διπλωματικής εργασίας και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.



## 2. ΧΡΟΝΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο χρονικός προγραμματισμός της παραγωγής πολλαπλών προϊόντων με τυχαία ζήτηση σε μια παραγωγική μονάδα με περιορισμένη παραγωγική δυναμικότητα, σημαντικά κόστη και χρόνους αλλαγής από προϊόν σε προϊόν είναι ένα κλασσικό πρόβλημα στην ερευνητική περιοχή του προγραμματισμού παραγωγής που συχνά αναφέρεται ως στοχαστικό πρόβλημα χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής (Stochastic Lot Scheduling Problem SLSP). Οι Sox et al. (1999) διακρίνουν δυο εκδοχές του SLSP, το στοχαστικό πρόβλημα του βέλτιστου χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής (Stochastic Economic Lot Scheduling Problem SELSP) και το στοχαστικό πρόβλημα της επιλογής μεγέθους παρτίδων παραγωγής σε συστήματα παραγωγής με περιορισμένη δυναμικότητα (Stochastic Capacitated Lot Sizing Problem SCLSP). Το SELSP υποθέτει άπειρο ορίζοντα προγραμματισμού και στάσιμες κατανομές ζήτησης ενώ το SCLSP υποθέτει πεπερασμένο ορίζοντα προγραμματισμού και επιτρέπει μη στάσιμες κατανομές ζήτησης. Το SELSP είναι κατάλληλο για συστήματα παραγωγής συνεχούς ροής που απαντώνται συνήθως σε βιομηχανίες διεργασιών που επεξεργάζονται την υλη που ρέει συνεχώς όπως συμβαίνει με προϊόντα πετρελαίου και άνθρακα, μεταλλουργικά προϊόντα, μη μεταλλικά ορυκτά προϊόντα, βασικές χημικές ύλες, τρόφιμα και ποτά, προϊόντα χαρτιού κλπ. Γενικά οι βιομηχανίες διεργασιών είναι έντασης κεφαλαίου και εστιάζουν στην παραγωγή προϊόντων σε μεγάλες ποσότητες και μικρή ποικιλία. Σε μια τυπική βιομηχανία διεργασιών η παραγωγή είναι συνεχής και τα διαφορετικά προϊόντα είναι στην πραγματικότητα διαφορετικές παραλλαγές της ίδιας οικογενείας προϊόντων που διαφέρουν ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά όπως ποιότητα, μέγεθος, πάχος κλπ. Ενώ το SCLSP εφαρμόζεται καλύτερα σε βιομηχανίες παραγωγής διακριτών τεμαχίων όπως είναι οι βιομηχανίες παραγωγής ηλεκτρονικών υπολογιστών, ηλεκτρικού εξοπλισμού και οικιακών συσκευών, μεταφορικού εξοπλισμού, μηχανημάτων, μεταλλικών προϊόντων, ξύλου και επίπλου κλπ..

Η ντετερμινιστική εκδοχή του SELSP το λεγόμενο ELSP έχει τύχει αξιόλογης προσοχής στη βιβλιογραφία τις τελευταίες δεκαετίες (Elmaghraby (1978) και Salomon (1991)). Οι αναλυτικές και ευρετικές λύσεις του ELSP παράγουν κυκλικά προγράμματα παραγωγής όπου όλες οι βαθμίδες παράγονται διαδοχικά σε κάθε κύκλο ξεκινώντας από τη χαμηλότερη βαθμίδα πηγαίνοντας στην υψηλότερη και επιστρέφοντας πίσω στη χαμηλότερη. Ενδιαφέρουσες επίσης μπορούν να χαρακτηριστούν οι πολιτικές που η παραγωγή αλλάζει στο προϊόν του οποίου το επίπεδο αποθέματος μηδενίζεται πρώτο δηλαδή να εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες όπως παρουσιάζεται από τους Chase et al (1993). Δυστυχώς τα κυκλικά προγράμματα παραγωγής δεν λειτουργούν καλά στο στοχαστικό πρόβλημα για δυο λόγους. Πρώτον διότι αυτά εστιάζουν στο μέγεθος της παρτίδας και όχι στη δυναμική κατανομή της παραγωγικής δυναμικότητας που είναι απαραίτητη σε προβλήματα όπου η ζήτηση μεταβάλλεται τυχαία και δεύτερον, διότι στο στοχαστικό πρόβλημα τα αποθέματα των τελικών προϊόντων αποσκοπούν όχι μόνο στο να μειώσουν τον αριθμό των αλλαγών όπως συμβαίνει στην περίπτωση του ντετερμινιστικού προβλήματος αλλά και στο να δημιουργήσουν ένα προστατευτικό φράγμα έναντι της ενδεχόμενης έλλειψης αποθέματος. Στο στοχαστικό πρόβλημα η επιλογή του μεγέθους παρτίδας και η κατανομή της παραγωγικής δυναμικότητας πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ταυτόχρονα ενώ η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος πρέπει

να συμπεριλαμβάνεται στο πρόγραμμα παραγωγής όπως περιγράφεται από Graves (1980).

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετάμε μια παραλλαγή του Στοχαστικού Προβλήματος του Βέλτιστου Χρονικού Προγραμματισμού Παρτίδων Παραγωγής (SELSP). Ένα εργοστάσιο απλής παραγωγής πρέπει παράγει διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων χρησιμοποιώντας μια γραμμή παραγωγής, για να ικανοποιήσει την τυχαία ζήτηση για κάθε βαθμίδα. Τα παραγόμενα προϊόντα αποθηκεύονται σε μονάδα αποθήκευσης ετοιμοπαραδότητων προϊόντων με πεπερασμένη χωρητικότητα. Η ζήτηση που δεν ικανοποιείται άμεσα από το απόθεμα χάνεται. Οι πρώτες ύλες είναι πάντα διαθέσιμες και η μονάδα παραγωγής παράγει με συνεχή σταθερό ρυθμό. Όταν η μονάδα παραγωγής παράγει μια συγκεκριμένη βαθμίδα, οι μόνες επιτρεπτές αλλαγές στην παραγωγή είναι από αυτή τη βαθμίδα προς την αμέσως προηγούμενη ή προς την αμέσως επόμενη βαθμίδα. Σε πολλές βιομηχανίες είναι σύνηθες να διαιρείται το ενδιάμεσο προϊόν που παράγεται κατά την διάρκεια μιας αλλαγής. Έστω από τη βαθμίδα A στην βαθμίδα B σε δυο μισά και να χαρακτηρίζεται το πρώτο μισό ως A και το δεύτερο μισό ως B ενώ στην πραγματικότητα η βαθμίδα του προϊόντος που παράγεται κατά τη διάρκεια της αλλαγής μεταβάλλεται σταδιακά από τη βαθμίδα A στη B. Στο συγκεκριμένο μοντέλο SELSP για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι το προϊόν που παράγεται κατά τη διάρκεια μιας αλλαγής από τη βαθμίδα A στη βαθμίδα B χαρακτηρίζεται ως A ενώ αυτό που παράγεται κατά τη διάρκεια της αντίστροφης αλλαγής χαρακτηρίζεται ως B. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση οι παραγόμενες ποσότητες των βαθμίδων A και B είναι ίδιες με αυτές που θα παράγονταν αν διαιρούσαμε την ποσότητα ενδιάμεσου προϊόντος σε δυο μισά. Επίσης υποθέτουμε ότι όλοι οι χρόνοι αλλαγής είναι ντετερμινιστικοί και ίσοι μεταξύ τους. Τα κόστη τα οποία λαμβάνονται υπόψη αρχικά είναι το κόστος αλλαγής, για κάθε φορά που ρυθμίζεται το μηχάνημα για την παραγωγή μιας βαθμίδας. Το κόστος υπερχειλίσης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος, για κάθε βαθμίδα που δεν χωράει να αποθηκευτεί στη μονάδα αποθήκευσης λόγω πληρότητας του αποθηκευτικού χώρου. Το κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης για κάθε φορά που δεν επαρκεί το απόθεμα. Οι παραπάνω υποθέσεις είναι ρεαλιστικές και βασίζονται σε ένα πραγματικό πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού ενός εργοστασίου παραγωγής PET και παρουσιάζονται στην εργασία των Liberopoulos et al. (2009). Το συγκεκριμένο πρόβλημα μορφοποιήθηκε ως μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων (Markov Decision Process-MDP) διακριτού χρόνου όπου σε κάθε χρονική περίοδο πρέπει να αποφασιστεί αν θα ξεκινήσει η αλλαγή προϊόντος σε μια γειτονική βαθμίδα ή αν θα παραμείνει η ρύθμιση της μονάδας ως έχει. Σκοπός μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μέσο προσδοκώμενο κόστος λειτουργίας της μονάδας για άπειρο χρονικό ορίζοντα.

## 2.1 ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ο δυναμικός προγραμματισμός είναι μία υπολογιστική μέθοδος η οποία εφαρμόζεται όταν πρόκειται να ληφθεί μία σύνθετη απόφαση η οποία προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων που αλληλοεξαρτώνται. Η αλληλεξάρτηση μπορεί να προκύπτει επειδή οι αποφάσεις είτε παρουσιάζουν κάποια χρονική διαδοχή, όπως στην περίπτωση αναζήτησης της συντομότερης διαδρομής σ' ένα γράφημα, και της περίπτωσης αναζήτησης του βέλτιστου σχήματος παραγωγής και αποθεματοποίησης σ' ένα ορίζοντα προγραμματισμού πολλών περιόδων, είτε συνδέονται με κοινούς περιορισμούς, όπως στην περίπτωση κατανομής περιορισμένων μέσων σε ανταγωνιστικές δραστηριότητες. Οι αποφάσεις αυτές μπορεί να λαμβάνονται σ' ένα περιβάλλον γνωστών συνθηκών (ντετερμινιστικός δυναμικός προγραμματισμός) ή ακόμα και σ' ένα περιβάλλον αβεβαιότητας (στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός). Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στη διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων με κατάλληλη αναδρομική σχέση ώστε η σύνθεση των επιμέρους αποφάσεων να δίνει την τελικά ζητούμενη απόφαση. Το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε επιμέρους υποπροβλήματα τα οποία συνδέονται με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων. Για να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων, τα υποπροβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή για όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων. Έτσι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την επανάληψη των υποπροβλημάτων προς όφελος μας λύνοντας κάθε υποπρόβλημα μια μόνο φορά και αποθηκεύοντας τα αποτελέσματα για μελλοντική χρήση. Αυτό αποτελεί και το κυρίως υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, το οποίο, αν και είναι σημαντικό, είναι πάντως πολύ μικρότερο από το κόστος της πλήρους απαρίθμησης και αξιολόγησης όλων των δυνατών λύσεων.

Ο δυναμικός προγραμματισμός ευρίσκει εφαρμογές :

- Στον προγραμματισμό παραγωγής
- Στον προγραμματισμό επενδύσεων
- Στα προβλήματα διατήρησης αποθεμάτων
- Στα προβλήματα αντικατάστασης – συντήρησης εξοπλισμού
- Στα προβλήματα βέλτιστης διαδρομής

## 2.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Τα βασικά χαρακτηριστικά κάθε προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού είναι τα εξής:

1. Το πρόβλημα μπορεί να χωριστεί σε στάδια, όπου μία απόφαση απαιτείται σε κάθε στάδιο. Συγκεκριμένα τα προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού απαιτούν μία αλληλουχία αλληλοσχετιζόμενων αποφάσεων, όπου κάθε απόφαση αντιστοιχεί σε ένα στάδιο του προβλήματος.

2. Κάθε στάδιο έχει έναν αριθμό καταστάσεων που σχετίζονται με την αρχή του συγκεκριμένου σταδίου. Γενικά, οι καταστάσεις είναι οι δυνατές συνθήκες στις οποίες μπορεί να βρίσκεται το σύστημα. Ο αριθμός των καταστάσεων μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

3. Η επίδραση της απόφασης σε κάθε στάδιο είναι ο μετασχηματισμός της παρούσας κατάστασης σε μία νέα κατάσταση που σχετίζεται με την αρχή του επόμενου σταδίου.

4. Η διαδικασία επίλυσης σχεδιάζεται έτσι ώστε να βρεθεί μία βέλτιστη πολιτική για το συνολικό πρόβλημα, δηλαδή να καθοριστεί η βέλτιστη απόφαση σε κάθε στάδιο, για κάθε κατάσταση στην οποία μπορεί να βρίσκεται το πρόβλημα. Για κάθε πρόβλημα, ο δυναμικός προγραμματισμός παρέχει την πολιτική που θα πρέπει να ακολουθηθεί για να βρεθεί η βέλτιστη απόφαση για κάθε δυνατή περίπτωση.

5. Εάν δοθεί η παρούσα κατάσταση, μία βέλτιστη πολιτική για τα υπολειπόμενα στάδια είναι ανεξάρτητη των αποφάσεων που ελήφθησαν σε προηγούμενα στάδια. Γι' αυτό, η βέλτιστη άμεση απόφαση εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την παρούσα κατάσταση και όχι από το πώς έφτασε το σύστημα σε αυτήν. Αυτή είναι η αρχή της βελτιστότητας του δυναμικού προγραμματισμού. Γενικά, για προβλήματα δυναμικού προγραμματισμού, γνώση της παρούσας κατάστασης του συστήματος περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με την προηγούμενη συμπεριφορά του που απαιτείται για τον καθορισμό της βέλτιστης λύσης εφεξής. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται Μαρκοβιανή ιδιότητα. Ένα πρόβλημα που δεν έχει αυτή την ιδιότητα δεν μπορεί να μορφοποιηθεί ως πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού.

6. Η διαδικασία επίλυσης ξεκινά συνήθως με την εύρεση της βέλτιστης πολιτικής για το τελευταίο στάδιο. Η βέλτιστη πολιτική για το τελευταίο στάδιο καθορίζει την βέλτιστη απόφαση για κάθε μια από τις δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρίσκεται το σύστημα στο τελευταίο στάδιο.

7. Μία αναδρομική σχέση ορίζεται που αναγνωρίζει τη βέλτιστη πολιτική για το στάδιο  $n$ , εάν είναι γνωστή η βέλτιστη πολιτική για το στάδιο  $n+1$ . Αυτή η σχέση ποικίλλει από πρόβλημα σε πρόβλημα αλλά μία γενική μορφή μπορεί να οριστεί για όλα τα προβλήματα. Χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$N$  = αριθμός σταδίων

$n$  = δείκτης του τρέχοντος σταδίου ( $n = 1, \dots, N$ )

$S_n$  = τρέχουσα κατάσταση για το στάδιο  $n$

$x_n$  = μεταβλητή απόφασης για το στάδιο  $n$

$x_n^*$  = βέλτιστη τιμή του  $x_n$  (εάν δίνεται το  $S_n$ )

$f_n(S_n, x_n)$  = συνεισφορά των σταδίων  $n, n+1, \dots, N$  στην αντικειμενική συνάρτηση αν το σύστημα ξεκινά από την κατάσταση  $S_n$  του σταδίου  $n$ , η άμεση απόφαση είναι  $x_n$  και βέλτιστες αποφάσεις λαμβάνονται από κει και πέρα.

Η αναδρομική σχέση έχει πάντα τη μορφή

$$f_n^*(S_n) = \max_{x_n} \{f_n(S_n, x_n)\} \text{ ή } f_n^*(S_n) = \min_{x_n} \{f_n(S_n, x_n)\},$$

όπου ο όρος  $f_n(S_n, x_n)$  γράφεται ως συνάρτηση των  $S_n, x_n, f_{n+1}^*(S_{n+1})$  και πιθανώς κάποιου μέτρου της άμεσης συνεισφοράς του  $x_n$  στην αντικειμενική συνάρτηση. Ο όρος  $f_{n+1}^*(S_{n+1})$  εισάγεται στο δεξί μέλος, έτσι ώστε ο όρος  $f_n^*(S_n)$  να οριστεί συναρτήσει του  $f_{n+1}^*(S_{n+1})$  και αυτό είναι που κάνει τη σχέση αναδρομική.

Η αναδρομική σχέση επεκτείνεται καθώς μετακινούμαστε προς τα πίσω από στάδιο σε στάδιο. Όταν ο δείκτης του τρέχοντος σταδίου  $n$  μειώνεται κατά  $1$ , η νέα συνάρτηση  $f_n^*(S_n)$  εξάγεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση  $f_{n+1}^*(S_{n+1})$  που μόλις εξήχθη κατά την προηγούμενη επανάληψη και στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται.

**8.** Όταν χρησιμοποιούμε την αναδρομική σχέση, η διαδικασία επίλυσης ξεκινά από το τέλος και μετακινείται προς τα πίσω από στάδιο σε στάδιο, μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική για το αρχικό στάδιο. Αυτή η βέλτιστη πολιτική άμεσα ορίζει μια βέλτιστη λύση για όλο το πρόβλημα, δηλαδή  $x_1^*$  για την πρώτη κατάσταση  $S_1$ ,  $x_2^*$  για την κατάσταση  $S_2$  που προκύπτει,  $x_3^*$  για την κατάσταση  $S_3$  που προκύπτει, και ούτω καθ' εξής μέχρι την  $x_n^*$  για την τελική κατάσταση. Επειδή η αρχική κατάσταση του προβλήματος  $S_1$  είναι γνωστή το πρόβλημα στο σημείο έχει επιλυθεί καθώς έχουν οριστεί όλες οι βέλτιστες αποφάσεις και οι ενδιάμεσες καταστάσεις του.

## 2.3 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

### Πλεονεκτήματα του δυναμικού προγραμματισμού

- ✚ Είναι ιδανική για προγραμματισμό μέσω υπολογιστή,
- ✚ Είναι εφαρμόσιμη σε μια απεριόριστη κλάση προβλημάτων βελτιστοποίησης,
- ✚ Οι λύσεις τους αποθηκεύονται και επαναχρησιμοποιούνται πολλές φορές όταν χρειάζονται για να λυθούν μεγαλύτερα υποπροβλήματα και τελικά το αρχικό πρόβλημα.

### Μειονεκτήματα του δυναμικού προγραμματισμού

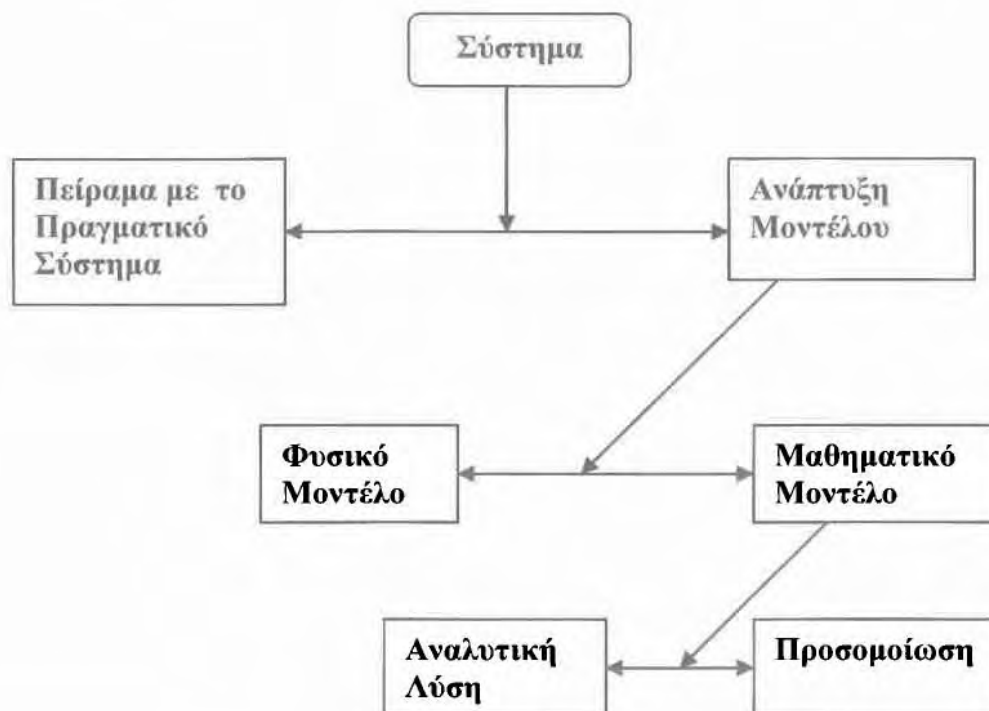
- ✚ Σχετικά αργή μέθοδος,
- ✚ Υπερβολικές υπολογιστικές απαιτήσεις ακόμα και για μικρής τάξης συστήματα.

### 3. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

Η προσομοίωση είναι μέθοδος μελέτης ενός συστήματος και εξοικείωσης με τα χαρακτηριστικά του, με τη βοήθεια ενός άλλου συστήματος το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ένα μοντέλο που εκτελείται σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή. Όπου το μοντέλο είναι το σύνολο των πληροφοριών ενός συστήματος που έχει συγκεντρωθεί με σκοπό τη μελέτη του συστήματος. Η προσομοίωση συνιστάται για τη μελέτη πολύπλοκων συστημάτων, δηλαδή συστήματα για τα οποία οι αναλυτικές λύσεις είναι ανέφικτες, για τη σύγκριση εναλλακτικών σχεδίων, για την επαλήθευση αναλυτικών λύσεων.

Η προσομοίωση ευρίσκει εφαρμογές :

- Στην ανάλυση και σχεδίαση συστημάτων παραγωγής
- Στον έλεγχο αποθεμάτων
- Στη μελέτη κυκλοφοριακών συστημάτων
- Στη μελέτη συστημάτων εξυπηρέτησως πελατών
- Στην αξιολόγηση αποφάσεων υπό αβεβαιότητα.



Σχήμα 1. Δείχνει τους τρόπους μελέτης για τη λειτουργία ενός συστήματος

### 3.1 ΤΑ ΕΙΔΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Έχοντας ένα μαθηματικό μοντέλο που πρέπει να μελετήσουμε με προσομοίωση (δηλαδή ένα Μοντέλο Προσομοίωσης), θα πρέπει να αναζητήσουμε κατάλληλα εργαλεία για το σκοπό αυτό. Στην προσπάθεια αυτή, είναι χρήσιμο να ταξινομήσουμε τα μοντέλα προσομοίωσης με βάση τρεις διαφορετικές έννοιες:

1. Στατικά ή Δυναμικά Μοντέλα Προσομοίωσης: Ένα στατικό μοντέλο προσομοίωσης, αναπαριστά ένα σύστημα σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή, ή αναπαριστά ένα σύστημα στο οποίο ο χρόνος δεν έχει σημασία. Αντίθετα, ένα δυναμικό μοντέλο προσομοίωσης αναπαριστά ένα σύστημα, όπως αυτό εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου.
2. Ντετερμινιστικά ή Στοχαστικά Μοντέλα Προσομοίωσης: Αν ένα μοντέλο προσομοίωσης δεν περιλαμβάνει πιθανοτικά (δηλαδή "τυχαία") τμήματα, ονομάζεται ντετερμινιστικό. Για παράδειγμα, ένα πολύπλοκο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει μία χημική αντίδραση, μπορεί να είναι ένα τέτοιο μοντέλο. Στα ντετερμινιστικά μοντέλα, η έξοδος είναι καθορισμένη, με δεδομένο το σύνολο των ποσοτήτων και σχέσεων εισόδου του μοντέλου. Όμως, πολλά συστήματα πρέπει να χρησιμοποιήσουν στοχαστικά μοντέλα προσομοίωσης, δηλαδή μοντέλα που θα έχουν τουλάχιστον ορισμένα τμήματα με "τυχαία" είσοδο. Τα περισσότερα υπολογιστικά συστήματα, που βασίζονται στα συστήματα αναμονής, χρησιμοποιούν στοχαστικά μοντέλα προσομοίωσης.
3. Συνεχή ή Διακριτά Μοντέλα Προσομοίωσης: Συνεχές είναι το σύστημα του οποίου οι μεταβλητές κατάστασης αλλάζουν συνεχώς στο χρόνο. Λίγα συστήματα στην πράξη είναι εξ ολοκλήρου διακριτά ή συνεχή, αλλά επειδή συνήθως μία από τις δύο ιδιότητες κυριαρχεί, μπορούμε τις περισσότερες φορές να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως διακριτό ή συνεχές. Διακριτό σύστημα είναι αυτό στο οποίο οι μεταβλητές κατάστασης μπορούν να αλλάξουν σε διακεκριμένες στιγμές του χρόνου.



## 3.2 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

### Πλεονεκτήματα της προσομοίωσης

- ✚ Τα περισσότερα σύνθετα συστήματα του πραγματικού κόσμου με τυχαίες παραμέτρους, δεν μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά με κάποιο μαθηματικό μοντέλο που μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Έτσι, η προσομοίωση είναι συχνά η μόνη διαθέσιμη μέθοδος μελέτης,
- ✚ Δίνει τη δυνατότητα επανάληψης του ίδιου φαινομένου,
- ✚ Μπορούν να συγκριθούν μέσω της προσομοίωσης, εναλλακτικές προτεινόμενες σχεδιάσεις ή εναλλακτικές πολιτικές λειτουργίας του συστήματος, ώστε να προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση που ικανοποιεί τις προδιαγραφές που έχουν ορισθεί,
- ✚ Σε ένα μοντέλο προσομοίωσης μπορούμε να έχουμε καλύτερο έλεγχο στις συνθήκες των πειραμάτων, σε σχέση με πιθανό πειραματισμό με το πραγματικό σύστημα,
- ✚ Μπορεί να κοστίζει λιγότερο,
- ✚ Η προσομοίωση επιτρέπει τη μελέτη ενός συστήματος που έχει μακρόχρονη εξέλιξη (π.χ. ένα οικονομικό σύστημα), σε πολύ μικρότερο χρόνο.

### Μειονεκτήματα της προσομοίωσης

- ✚ Μπορεί να μην είναι η πιο κατάλληλη μέθοδος επίλυσης του προβλήματος,
- ✚ Δεν εγγυάται ότι θα οδηγήσει στην καλύτερη δυνατή λύση,
- ✚ Μπορεί να μην αντανακλά με ακρίβεια την υπό μελέτη κατάσταση,
- ✚ Κάποιες φορές απαιτεί σημαντικό χρόνο και κόστος,
- ✚ Βασίζεται καθοριστικά στην τυχαιότητα (στοχαστικές κατανομές, τυχαίοι αριθμοί).

#### 4. ΜΟΡΦΟΠΟΙΗΣΗ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Σε μία μονάδα παραγωγής εφαρμόζουμε ένα μοντέλο διακριτού χρόνου. Η μονάδα μπορεί να παράγει  $N$  διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων, μία κάθε φορά. Οι αλλαγές στις βαθμίδες επιτρέπονται μόνο μεταξύ γειτονικών βαθμίδων. Σε κάθε χρονική περίοδο η μονάδα παραγωγής παράγει  $P$  μονάδες από την βαθμίδα που είχε στηθεί για να παράγει από την αρχή της περιόδου. Ο χρόνος αλλαγής ισούται με μια χρονική περίοδο. Η ποσότητα που παράγεται αποθηκεύεται σε μια κοινή αποθήκη ετοιμοπαραδότην προϊόντων, με πεπερασμένη χωρητικότητα  $X$  μονάδων. Για την πλεονάζουσα ποσότητα που δεν χωράει να αποθηκευτεί λόγω πληρότητας του αποθηκευτικού χώρου, υπεισέρχεται το κόστος υπερχείλισης  $CS$  ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος. Στον αποθηκευτικό χώρο μπορούμε να αποθηκεύουμε ποσότητα κάθε βαθμίδας προϊόντος, αρκεί οι συνολικές μονάδες να μην υπερβαίνουν την χωρητικότητα  $X$ . Για τα ετοιμοπαραδόμενα προϊόντα που έχουν αποθηκευτεί στην αποθήκη προκύπτει ένα διάνυσμα με τυχαίες ζητήσεις  $D \equiv (D_1, \dots, D_N)$ , που πρέπει να ικανοποιηθούν από την αποθήκη. Η ζήτηση για κάθε βαθμίδα  $n$ ,  $D_n$ ,  $n=1, \dots, N$  είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με γνωστή σταθερή συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων. Για την ποσότητα της ζήτησης κάθε βαθμίδας  $n$ , που δεν μπορεί να ικανοποιηθεί από την αποθήκη ετοιμοπαραδότην προϊόντων, υπεισέρχεται το κόστος χαμένων πωλήσεων  $CL_n$  ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης. Στα πραγματικά προβλήματα το  $P$  δεν θεωρείται μεταβλητή έλεγχου για σκοπούς χρονικού προγραμματισμού, επειδή με το να αλλάζουμε το  $P$ , μπορεί να προκαλέσει αστάθεια στην παραγωγική διαδικασία. Το αλλάζουμε σποραδικά, μόνο σε περιπτώσεις εποχικής ζήτησης ή για άλλες μακροπρόθεσμες διαφοροποιήσεις της ζήτησης, έτσι ώστε να ικανοποιήσει την συνολική αναμενόμενη ζήτηση όλων των βαθμίδων. Για τους σκοπούς του μεσοπρόθεσμου χρονικού προγραμματισμού που μας απασχολεί στην παρούσα εργασία, θεωρούμε ότι το  $P$  είναι ίσο ή περίπου ίσο με την συνολική αναμενόμενη ζήτηση για όλες τις βαθμίδες.

Διατυπώνουμε το δυναμικό πρόβλημα χρονικού προγραμματισμού της μονάδας παραγωγής σαν ένα πρόβλημα  $MDP$  διακριτού χρόνου, όπου η κατάσταση του συστήματος στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου ορίζεται από το διάνυσμα

$y \equiv (s, x_1, \dots, x_N)$ , όπου με  $s$  συμβολίζουμε την βαθμίδα για την οποία είναι στημένη να παράγει η μονάδα παραγωγής την τρέχουσα περίοδο και με  $x_n$ ,

$n=1, \dots, N$ , την αποθηκευμένη ποσότητα της βαθμίδας  $n$  στην αποθήκη ετοιμοπαραδότην προϊόντων, στην αρχή της περιόδου. Σημειώνεται ότι το  $s \in \{1, \dots, N\}$ , και το εύρος των επιτρεπόμενων τιμών πληρότητας της αποθήκης καθορίζεται από όλους τους ακεραίους  $x_n$ ,  $n=1, \dots, N$ , έτσι ώστε  $0 < \sum_n x_n \leq X$ .

Όποτε το μέγεθος του χώρου καταστάσεων είναι  $(N \cdot X^N)/2$ . Στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου, θα πρέπει να παρθεί η απόφαση  $u$ , για το αν θα γίνει κάποια αλλαγή σε γειτονική βαθμίδα ή αν θα αφήσουμε την μονάδα παραγωγής στημένη όπως έχει. Εάν το τρέχον στήσιμο προϊόν είναι το  $s$ , οι επιτρεπτές αλλαγές ορίζονται από το σύνολο  $U(s)$ , όπου  $U(1) = \{1,2\}$ ,  $U(N) = \{N-1,N\}$ , και από το

$U(s) = \{s-1, s, s+1\}$ ,  $s = 2, \dots, N-1$ . Εάν η απόφαση είναι να κάνουμε μια αλλαγή στο προϊόν τότε η αλλαγή θα αρχίσει στην αρχή της επόμενης περιόδου. Για κάθε αλλαγή στην αρχή μιας περιόδου υπεισέρχεται το κόστος αλλαγής  $CC$  σε εκείνη την περίοδο.

Υποθέτουμε ότι στην αρχή της χρονικής περιόδου η κατάσταση του συστήματος είναι η  $y$ , η απόφαση  $u$  έχει παρθεί και η ζήτηση  $D$  έχει ικανοποιηθεί. Το κόστος που πρόεκυψε σ' αυτήν την περίοδο είναι το  $g(y, u, D)$  και έστω

$y' \equiv (s', x'_1, \dots, x'_N) = f(y, u, D)$ , η κατάσταση που θα βρίσκεται το σύστημα στην αρχή της επόμενης περιόδου. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι,  $s' = u$  και

$x'_n = [x_n + p(y) \cdot I_{n=s} - D_n]^+$ ,  $n=1, \dots, N$ , όπου με  $p(y)$  ορίζουμε την ποσότητα που προστέθηκε στην αποθήκη ετοιμοπαραδότητων προϊόντων αφού η μονάδα παράγωγης παρήγαγε  $P$  μονάδες και πριν ικανοποιηθεί η ζήτηση προκύπτει από τον τύπο  $p(y) \equiv \min\{P, X - \sum_n x_n\}$ . Το  $I_a$  είναι η δυαδική συνάρτηση που παίρνει την 1 εάν το  $a$  είναι αληθές και 0 αν δεν αληθεύει και τέλος  $[x]^+ \equiv \max\{0, x\}$ . Ισχύει ότι

$$g(y, u, D) = CC \cdot I_{u \neq s} + CS \cdot (P - p(y)) + \sum_n CL_n \cdot [D_n - x_n - p(y) \cdot I_{n=s}]^+$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε μια εξαρτώμενη από την κατάσταση πολιτική  $u = \mu(y)$ , η οποία να ελαχιστοποιεί το μακροχρόνιο προσδοκώμενο μέσο κόστος  $J$  ανά μονάδα χρόνου. Για να βρούμε την επιθυμητή πολιτική, θα πρέπει να λύσουμε την αποκαλούμενη εξίσωση του Bellman η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως

$J + V(y) = \min_{u \in U(s)} T_u(V(y))$  με το  $\bar{v}(y)$  να είναι το διαφορικό κόστος που αρχίζει από την κατάσταση  $y$ , και ο τελεστής  $T_u(\cdot)$  ορίζεται σαν  $T_u(V(y)) \equiv E_D \{g(y, u, D) + V(y')\}$ . Το σύμβολο  $\min$  (minimum) στην εξίσωση του Bellman καθορίζει την βέλτιστη πολιτική  $\mu^*(y)$ , όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $y$ .

Λύνουμε την εξίσωση του Bellman με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Δηλώνουμε με  $V_k(y)$  την τιμή της διαφορικού κόστους στην  $k$  επανάληψη και τις αρχικές συνθήκες  $\bar{V}_0(y) = 0 \forall y$ . Οι τιμές της  $(k+1)$ ης επανάληψης, αποκτώνται από την προηγούμενη επανάληψη μέσω του αναδρομικού τύπου  $V_{k+1}(y) = T(V_k(y)) - T(V_k(\hat{y}))$ , με  $T(V_k(y)) = \min_{u \in U(s)} T_u(V_k(y))$  και  $\hat{y}$  να είναι μια αυθαίρετα επιλεγμένη κατάσταση. Επίσης το διαφορικό κόστος της ειδικής κατάστασης μηδενίζεται σε κάθε επανάληψη. Υποθέτοντας ότι το επαναληπτικό σχήμα συγκλίνει σε κάποιες τιμές  $V(y)$ , τότε μέσω αναδρομικού τύπου, αυτές οι τιμές θα πρέπει να επαληθεύουν τον τύπο  $T(V(\hat{y})) + V(y) = T(V(y))$ . Συγκρίνοντας αυτήν την εξίσωση και την εξίσωση του Bellman, διαπιστώνουμε ότι  $J = T(V(\hat{y}))$ .

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, σε κάθε επανάληψη υπολογίζουμε τις μέγιστες και τις ελάχιστες διαφορές,  $V_k^U = \max_y \{V_k(y) - V_{k-1}(y)\}$  και  $V_k^L = \min_y \{V_k(y) - V_{k-1}(y)\}$ . Η διαδικασία

τερματίζεται όταν ικανοποιείται η συνθήκη  $V_k^1 - V_k^2 < \varepsilon \cdot T(V_k(\bar{y}))$  με  $\varepsilon$  μια μικρή θετική ποσότητα.

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζουμε τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων με διαφορετικό κριτήριο σύγκλισης. Βρίσκουμε το  $U$  που ελαχιστοποιεί το  $T_u(V_k(y))$  στην  $k$  επανάληψη. Για το συγκεκριμένο  $U$  κάνουμε προσομοίωση και υπολογίζουμε το κόστος  $J_k$ . Η διαδικασία τερματίζεται όταν  $|J_{k+1} - J_k| < 0.01 * J_{k+1}$ . Επιπλέον για να μην τερματίσει πιο νωρίς επιβάλλουμε τον περιορισμό να γίνουν τουλάχιστον 10 επαναλήψεις.

Εξετάζουμε δύο εκδοχές της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων, η πρώτη με μηδενικό αρχικό διαφορικό κόστος,  $V(n, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1) = 0$  για 4 προϊόντα και  $V(n, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1, x5+1) = 0$  για 5 προϊόντα. Η δεύτερη με αρχικό διαφορικό κόστος που προκύπτει από τη λύση υποπροβλημάτων 3 προϊόντων. Για το πρόβλημα με 4 προϊόντα, (A-B-C-D), τα υποπροβλήματα που προκύπτουν είναι:

$$\begin{aligned}(A+B)-C-D &= V1(n, x1+1, x2+1, x3+1) \\ A-B-(C+D) &= V2(n, x1+1, x2+1, x3+1)\end{aligned}$$

Όποτε για το πρόβλημα με 4 προϊόντα το διαφορικό κόστος που έχουμε είναι:

$$\begin{aligned}V(1, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1) &= V2(1, x1+1, x2+1, x3+x4+1) \\ V(2, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1) &= V2(2, x1+1, x2+1, x3+x4+1) \\ V(3, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1) &= V1(2, x1+x2+1, x3+1, x4+1) \\ V(4, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1) &= V1(3, x1+x2+1, x3+1, x4+1)\end{aligned}$$

Ενώ για το πρόβλημα με 5 προϊόντα, (A-B-C-D-E), τα υποπροβλήματα που προκύπτουν είναι:

$$\begin{aligned}(A+B+C)-D-E &= V1(n, x1+1, x2+1, x3+1) \\ (A+B)-C-(D+E) &= V2(n, x1+1, x2+1, x3+1) \\ A-B-(C+D+E) &= V3(n, x1+1, x2+1, x3+1)\end{aligned}$$

Όποτε για το πρόβλημα με 5 προϊόντα το διαφορικό κόστος που έχουμε είναι:

$$\begin{aligned}V(1, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1, x5+1) &= V3(1, x1+1, x2+1, x3+x4+x5+1) \\ V(2, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1, x5+1) &= V3(2, x1+1, x2+1, x3+x4+x5+1) \\ V(3, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1, x5+1) &= V2(2, x1+x2+1, x3+1, x4+x5+1) \\ V(4, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1, x5+1) &= V1(2, x1+x2+x3+1, x4+1, x5+1) \\ V(5, x1+1, x2+1, x3+1, x4+1, x5+1) &= V1(3, x1+x2+x3+1, x4+1, x5+1)\end{aligned}$$

## 5. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 5.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 4 ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε για διαφορετικές περιπτώσεις ζήτησεων αριθμητικά αποτελέσματα του προβλήματος με 4 και 5 προϊόντα, τα οποία προκύπτουν από την ακριβή επίλυση του προβλήματος και από την παραλλαγή της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων που προτείνεται στην παρούσα εργασία. Εξετάζουμε δύο εκδοχές της μεθόδου διαδοχικών προσεγγίσεων, η πρώτη με μηδενικό αρχικό διαφορικό κόστος και η δεύτερη με αρχικό διαφορικό κόστος που προκύπτει από τη λύση υποπροβλημάτων 3 προϊόντων. Για όλες τις περιπτώσεις ζήτησεων που επιλύθηκαν παρουσιάζουμε σε κάθε περίοδο (επανάληψη) και το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους. Σε κάθε παράδειγμα, υποθέτουμε ότι η ζήτηση για κάθε προϊόν κατανέμεται παρόμοια με μία από τις τυχαίες μεταβλητές  $D_j = A, B, C, D$  όπου οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 1.

	Pr ( $D_j = i$ )				
j/i	0	1	2	3	E[ $D_j$ ]
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
B	0,25	0,5	0,25	0	1
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2

**Πίνακας 1:** Κατανομές ζήτησεων, Pr ( $D_j = i$ ) για το πρόβλημα 4 και 5 προϊόντων

Για κάθε παράδειγμα, θεωρούμε τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις. Σε κάθε περίπτωση, η συνολική αναμενόμενη ζήτηση είναι ίση με το ρυθμό της παραγωγής. Η διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων είναι με τη σειρά με την οποία αυτές κατανομές εμφανίζονται στην αλυσίδα των επιτρεπόμενων μεταβάσεων.

**Περίπτωση 1,** BDDB όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στις άκρες (1 και 4), ενώ τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι στη μέση (2 και 3), οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 2.

	Pr ( $D_j = i$ )				
j/i	0	1	2	3	E[ $D_j$ ]
B	0,25	0,5	0,25	0	1
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
B	0,25	0,5	0,25	0	1

**Πίνακας 2.** Κατανομές ζήτησεων, Pr ( $D_j = i$ ) για την περίπτωση 1, BDDB

**Περίπτωση 2, DDBB** όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στο τέλος (3 και 4), ενώ τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι στη αρχή (1 και 2), οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 3.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
B	0,25	0,5	0,25	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	1

**Πίνακας 3.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 2, DDBB

**Περίπτωση 3, DBDB** όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι 2 και 4, ενώ τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι 1 και 3, οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 4.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
B	0,25	0,5	0,25	0	1
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
B	0,25	0,5	0,25	0	1

**Πίνακας 4.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 3, DBDB

**Περίπτωση 4, DBBD** όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στη μέση (2 και 3), ενώ τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι στις άκρες (1 και 4), οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 5.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
B	0,25	0,5	0,25	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	1
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2

**Πίνακας 5:** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 4, DBBD

Πρώτα λύνουμε τις περιπτώσεις 1 έως 4 με τον ακριβή τρόπο επίλυσης του προβλήματος και παράλληλα με την μέθοδο που περιλαμβάνει τον υπολογισμό του κόστους μέσω προσομοίωσης χρησιμοποιώντας μηδενικό αρχικό διαφορικό κόστος για 15 περιόδους (επαναλήψεις). Σε όλες τις περιπτώσεις, θα θεωρηθεί  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=30$ ,  $N=4$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στους επομένους πίνακες.

Περίπτωση	Επαναλήψεις	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J
1, BDDB	55	1,0034
2, DDBB	156	1,0927
3, DBDB	187	1,1835
4, DBBD	110	1,2881

**Πίνακας 6.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD) με τον ακριβή αλγόριθμο

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό $V=0$	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	7,9972	1,0034	697,0102
2	4,1277	1,0034	311,3713
3	1,8171	1,0034	81,09428
4	1,2702	1,0034	26,58960
5	1,2218	1,0034	21,76600
6	1,1822	1,0034	17,81941
7	1,0755	1,0034	7,185569
8	1,0398	1,0034	3,627666
9	1,0241	1,0034	2,062986
10	1,0129	1,0034	0,946781
11	1,0100	1,0034	0,657764
12	1,0089	1,0034	0,548136
13	1,0097	1,0034	0,627865
14	1,0107	1,0034	0,727526
15	1,0027	1,0034	0,069763

**Πίνακας 7.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 1, BDDB με διαφορικό κόστος ( $V=0$ )

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	7,9977	1,0927	631,9209
2	9,9999	1,0927	815,1551
3	2,2139	1,0927	102,6082
4	1,5104	1,0927	38,22641
5	1,6768	1,0927	53,45475
6	1,6073	1,0927	47,09435
7	1,4279	1,0927	30,67631
8	1,3378	1,0927	22,43068
9	1,2416	1,0927	13,62680
10	1,1723	1,0927	7,284708
11	1,1425	1,0927	4,557518
12	1,1159	1,0927	2,123181
13	1,1113	1,0927	1,702206
14	1,1070	1,0927	1,308685
15	1,0954	1,0927	0,247094

**Πίνακας 8.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 2, DDBB με διαφορικό κόστος (V=0)

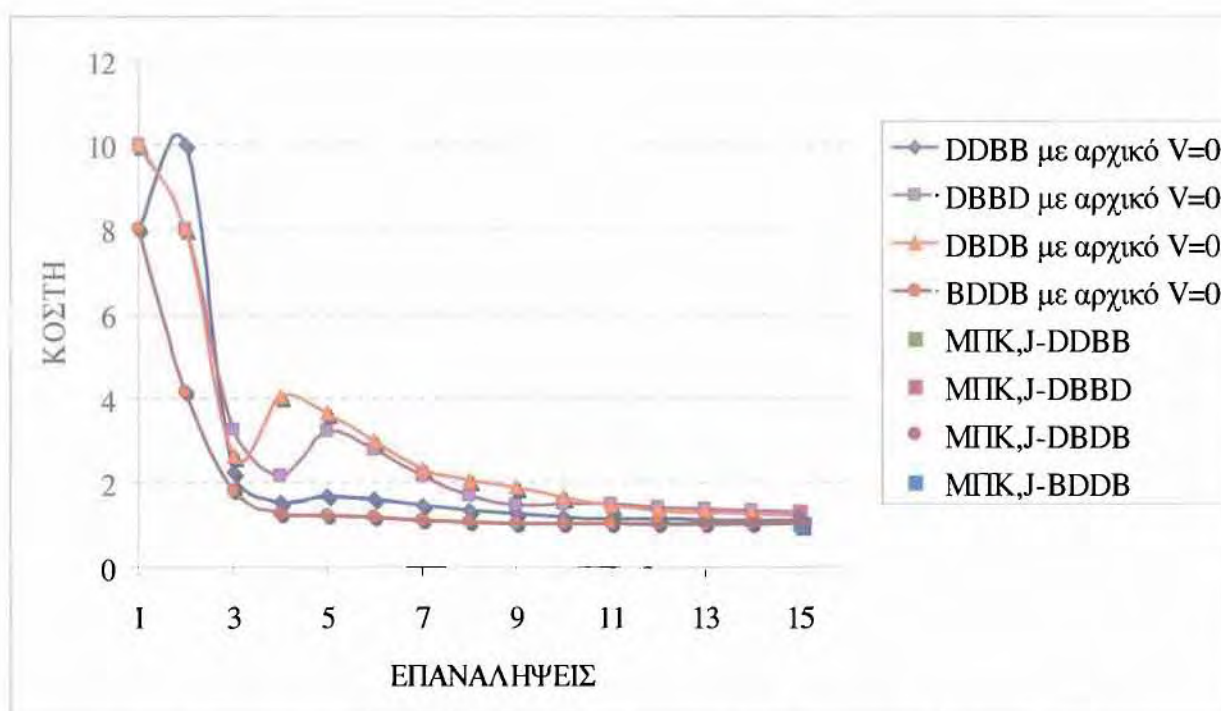
Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	9,9972	1,1835	744,7148
2	8,0023	1,1835	576,1555
3	2,6334	1,1835	122,5095
4	4,0420	1,1835	241,5294
5	3,6216	1,1835	206,0076
6	2,9613	1,1835	150,2155
7	2,3223	1,1835	96,22307
8	2,0479	1,1835	73,03760
9	1,8662	1,1835	57,68483
10	1,6424	1,1835	38,77482
11	1,4652	1,1835	23,80228
12	1,3365	1,1835	12,92776
13	1,2706	1,1835	7,359527
14	1,2455	1,1835	5,238699
15	1,2221	1,1835	3,261512

**Πίνακας 9.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 3, DBDB με διαφορικό κόστος (V=0)



Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με αρχικό $V=0$	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, $J$ από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	9,9955	1,2881	675,9879
2	8,0000	1,2881	521,2716
3	3,2395	1,2881	151,4944
4	2,1636	1,2881	67,96833
5	3,2038	1,2881	148,7229
6	2,7668	1,2881	114,7970
7	2,1465	1,2881	66,64079
8	1,6695	1,2881	29,60950
9	1,4651	1,2881	13,74117
10	1,4802	1,2881	14,91344
11	1,4669	1,2881	13,88091
12	1,4204	1,2881	10,27094
13	1,3531	1,2881	5,046192
14	1,3265	1,2881	2,981135
15	1,3050	1,2881	1,312010

**Πίνακας 10.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 4, DBBD με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ )



**Διάγραμμα 1.** Διάγραμμα των περιπτώσεων από 1 έως 4 με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ )

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τους πίνακες για τις κατανομές ζήτησεων των υποπροβλημάτων για τις περιπτώσεις 5 έως 12. Οι κατανομές των 2 προϊόντων προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης αθροιστικής ζήτησης 2 προϊόντων. Τα υποπροβλήματα προκύπτουν ως προβλήματα 3 προϊόντων, τα οποία επιλύονται με τον ακριβή τρόπο επίλυσης.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)						
j/i	0	1	2	3	4	5	E[D <sub>j</sub> ]
BD	0,0125	0,075	0,225	0,35	0,2625	0,075	3
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	1

**Πίνακας 11.** Κατανομές ζήτησεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 5, BD-D-B

	Pr (D <sub>j</sub> = i)						
j/i	0	1	2	3	4	5	E[D <sub>j</sub> ]
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	1
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2
DB	0,0125	0,075	0,225	0,35	0,2625	0,075	3

**Πίνακας 12.** Κατανομές ζήτησεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 6, B-D-DB

	Pr (D <sub>j</sub> = i)							
j/i	0	1	2	3	4	5	6	E[D <sub>j</sub> ]
DD	0,0025	0,02	0,085	0,21	0,3225	0,27	0,09	4
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0	1

**Πίνακας 13.** Κατανομές ζήτησεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 7, DD-B-B

	Pr (D <sub>j</sub> = i)					
j/i	0	1	2	3	4	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	2
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	2
BB	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625	2

**Πίνακας 14.** Κατανομές ζήτησεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 8, D-D-BB

	Pr (D <sub>j</sub> = i)						
j/i	0	1	2	3	4	5	E[D <sub>j</sub> ]
DB	0,0125	0,075	0,225	0,35	0,2625	0,075	3
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	1

**Πίνακας 15.** Κατανομές ζήτησεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 9, DB-D-B

	Pr (Dj = i)						
j/i	0	1	2	3	4	5	E[Dj]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	1
DB	0,0125	0,075	0,225	0,35	0,2625	0,075	3

**Πίνακας 16.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 10, D-B-DB

	Pr (Dj = i)						
j/i	0	1	2	3	4	5	E[Dj]
DB	0,0125	0,075	0,225	0,35	0,2625	0,075	3
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	1
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2

**Πίνακας 17.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 11, DB-B-D

	Pr (Dj = i)						
j/i	0	1	2	3	4	5	E[Dj]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	1
BD	0,0125	0,075	0,225	0,35	0,2625	0,075	3

**Πίνακας 18.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 12, D-B-BD

Λύνουμε τα υποπροβλήματα θεωρώντας  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=30$ ,  $N=3$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης).

Ξέροντας τα αποτελέσματα των υποπροβλημάτων, λύνουμε τις αρχικές περιπτώσεις 1 έως 4 με τον ακριβή τρόπο επίλυσης του προβλήματος και παράλληλα με την προσομοίωση χρησιμοποιώντας το διαφορικό κόστος ( $V$ ) που προκύπτει από τα υποπροβλήματα για 15 επαναλήψεις. Σε όλες τις περιπτώσεις, θα θεωρηθεί  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=30$ ,  $N=4$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στους επομένους πίνακες.

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	1,5143	1,0034	50,91688
2	1,2624	1,0034	25,81224
3	1,2276	1,0034	22,34403
4	1,2300	1,0034	22,58322
5	1,1423	1,0034	13,84293
6	1,0797	1,0034	7,604146
7	1,0410	1,0034	3,747259
8	1,0190	1,0034	1,554714
9	1,0226	1,0034	1,913494
10	1,0118	1,0034	0,837154
11	1,0043	1,0034	0,089695
12	1,0029	1,0034	0,049831
13	1,0051	1,0034	0,169424
14	1,0085	1,0034	0,508272
15	1,0012	1,0034	0,219255

**Πίνακας 19.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 1,BDDB με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	1,6393	1,0927	50,02288
2	1,6668	1,0927	52,53958
3	1,7424	1,0927	59,45822
4	1,6065	1,0927	47,02114
5	1,5831	1,0927	44,87966
6	1,6130	1,0927	47,61600
7	1,5096	1,0927	38,15320
8	1,4099	1,0927	29,02901
9	1,2556	1,0927	14,90803
10	1,1582	1,0927	5,994326
11	1,1176	1,0927	2,278759
12	1,1037	1,0927	1,006681
13	1,1000	1,0927	0,668070
14	1,0972	1,0927	0,411824
15	1,0900	1,0927	0,247094

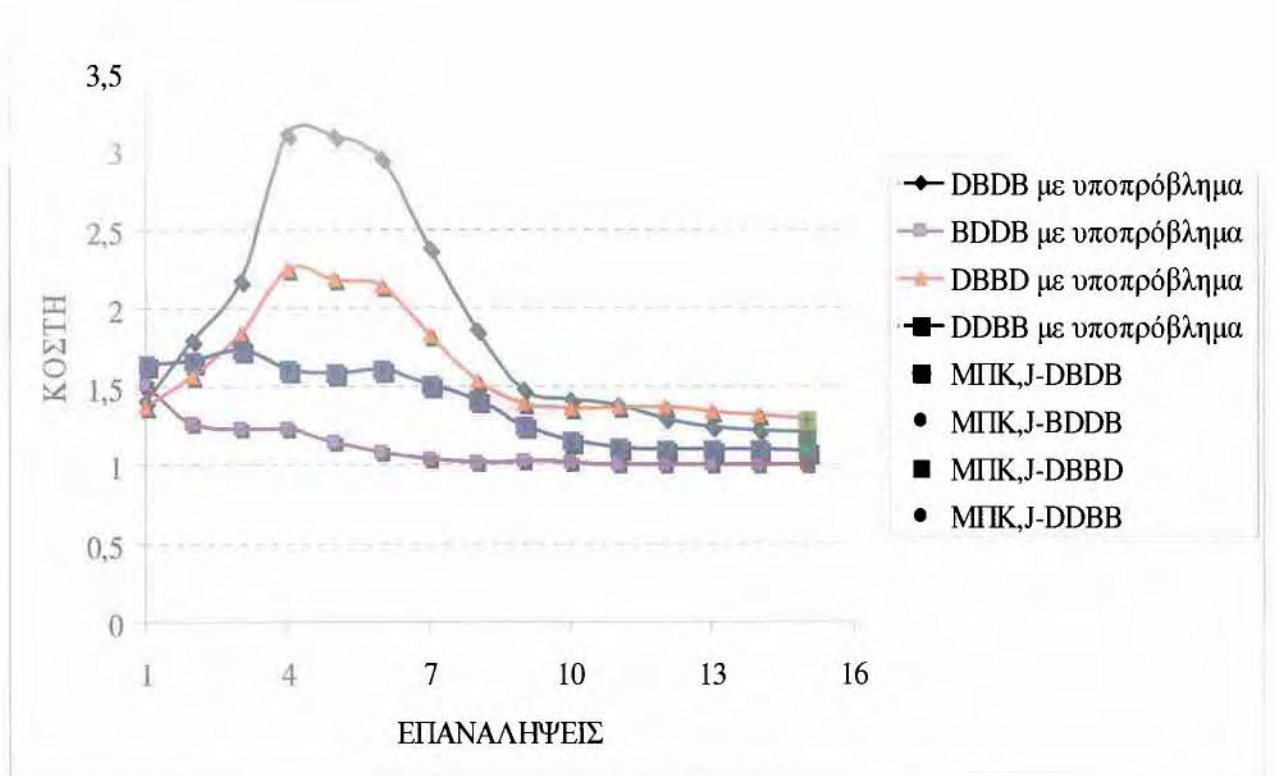
**Πίνακας 20.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 2,DDBE με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	1,3993	1,1835	18,23405
2	1,7979	1,1835	51,91381
3	2,1708	1,1835	83,42205
4	3,1032	1,1835	162,2053
5	3,0873	1,1835	160,8619
6	2,9475	1,1835	149,0494
7	2,3764	1,1835	100,7943
8	1,8585	1,1835	57,03422
9	1,4801	1,1835	25,06126
10	1,4127	1,1835	19,36629
11	1,3822	1,1835	16,78918
12	1,2992	1,1835	9,776088
13	1,2389	1,1835	4,681031
14	1,2202	1,1835	3,100972
15	1,2151	1,1835	2,670046

**Πίνακας 21.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 3,DBDB με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο Σφάλμα, %
1	1,3731	1,2881	6,598867
2	1,5675	1,2881	21,69086
3	1,8339	1,2881	42,37249
4	2,2523	1,2881	74,85444
5	2,1789	1,2881	69,15612
6	2,1338	1,2881	65,65484
7	1,8296	1,2881	42,03866
8	1,5322	1,2881	18,95039
9	1,3980	1,2881	8,531946
10	1,3663	1,2881	6,070957
11	1,3766	1,2881	6,870585
12	1,3773	1,2881	6,924928
13	1,3388	1,2881	3,936030
14	1,3189	1,2881	2,391119
15	1,2957	1,2881	0,590016

**Πίνακας 22.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 4,DBBD με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

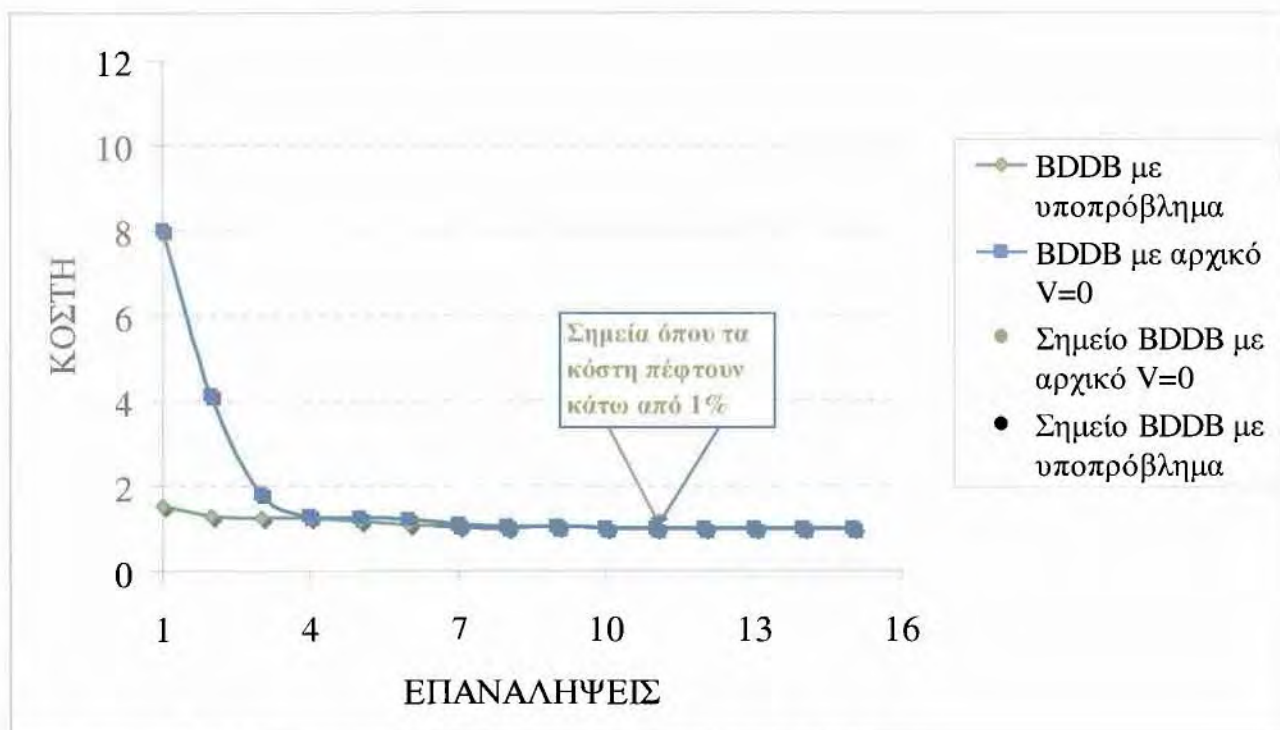


**Διάγραμμα 2.** Διάγραμμα των περιπτώσεων από 1 έως 4 με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζουμε το συνολικό κόστος που προκύπτει με τους 2 τρόπους επίλυσης όπου για κάθε τρόπο επίλυσης βρίσκουμε σε ποια επανάληψη μετά τη δέκατη η διαφορά στα κόστη δύο διαδοχικών επαναλήψεων είναι μικρότερη από 1%. Επίσης παρουσιάζουμε και συγκριτικά διαγράμματα για τους 2 τρόπους επίλυσης.

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	1,5143	7,9972	6,4829
2	1,2624	4,1277	2,8653
3	1,2276	1,8171	0,5895
4	1,2300	1,2702	0,0402
5	1,1423	1,2218	0,0795
6	1,0797	1,1822	0,1025
7	1,0410	1,0755	0,0345
8	1,0190	1,0398	0,0208
9	1,0226	1,0241	0,0015
10	1,0118	1,0129	0,0011
11	*1,0043*	*1,0100*	0,0057
12	1,0029	1,0089	0,0060
13	1,0051	1,0097	0,0046
14	1,0085	1,0107	0,0022
15	1,0012	1,0027	0,0015

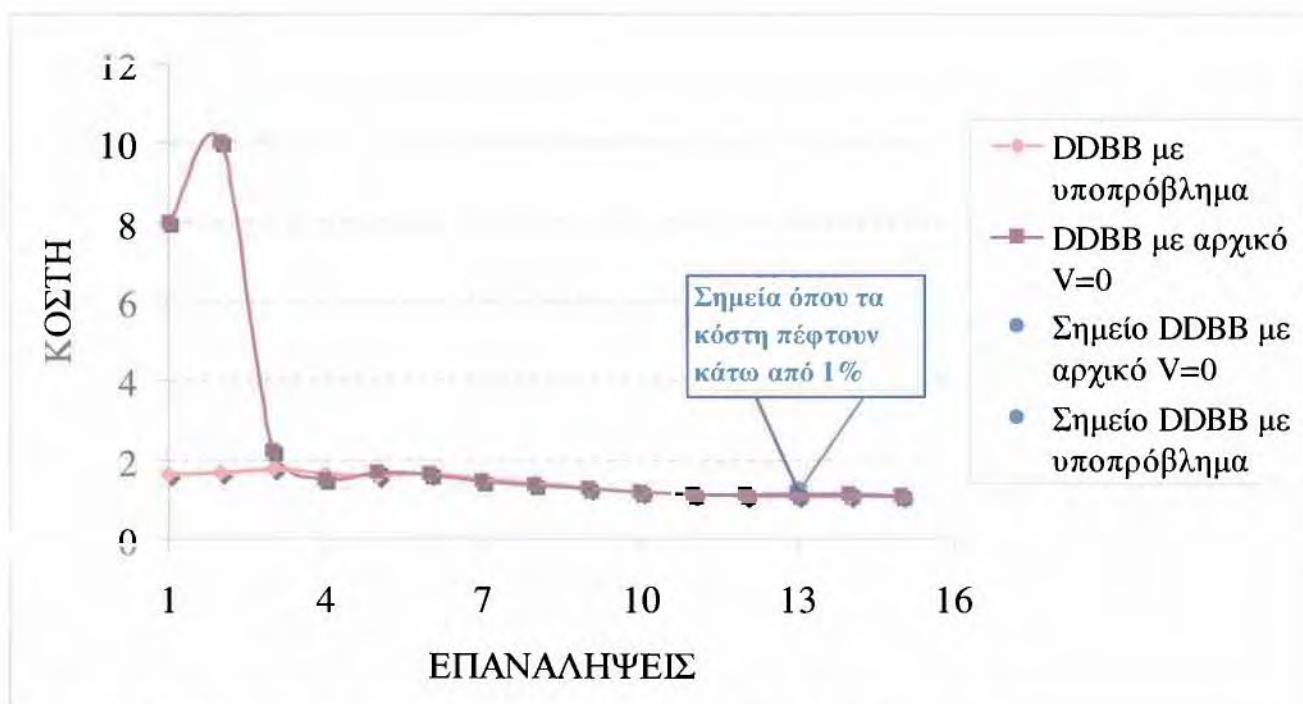
**Πίνακας 23.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 1,BDDB



**Διάγραμμα 3.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 1,BDDB

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	1,6393	7,9977	6,3584
2	1,6668	9,9999	8,3331
3	1,7424	2,2139	0,4715
4	1,6065	1,5104	0,0961
5	1,5831	1,6768	0,0937
6	1,6130	1,6073	0,0057
7	1,5096	1,4279	0,0817
8	1,4099	1,3378	0,0721
9	1,2556	1,2416	0,0140
10	1,1582	1,1723	0,0141
11	1,1176	1,1425	0,0249
12	1,1037	1,1159	0,0122
13	*1,1000*	*1,1113*	0,0113
14	1,0972	1,1070	0,0098
15	1,0900	1,0954	0,0054

**Πίνακας 24.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 2, DDBB

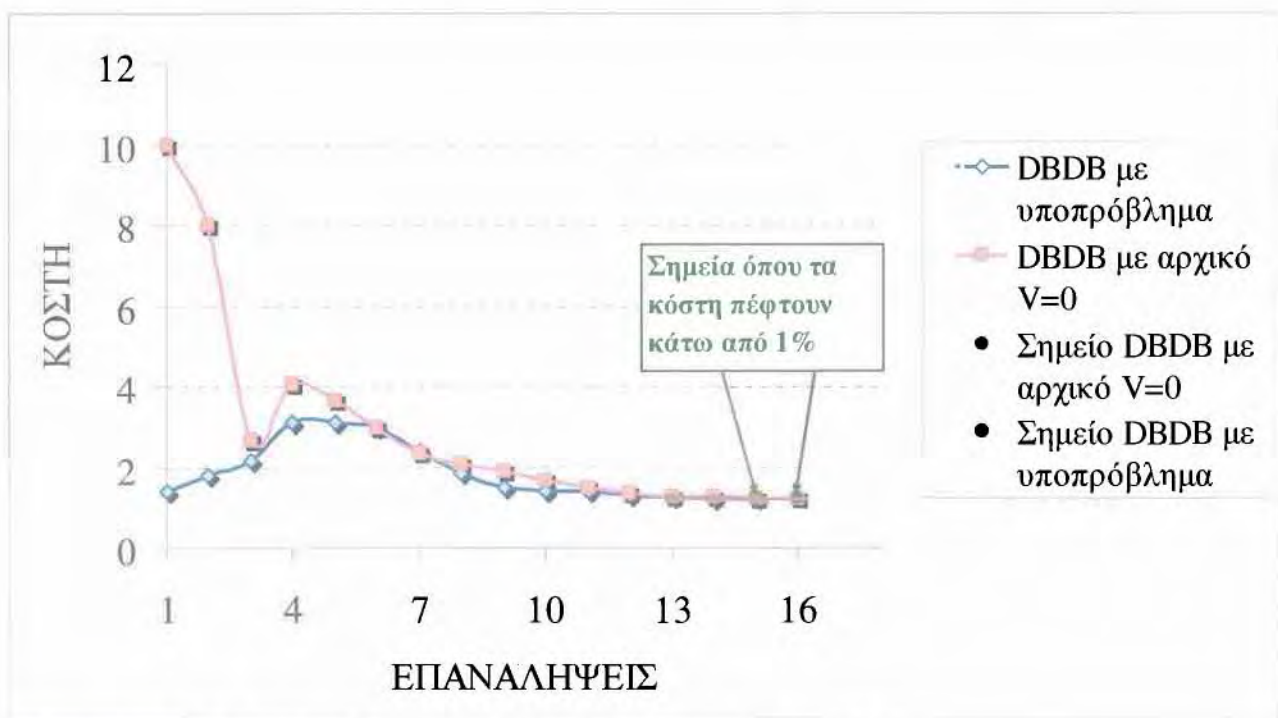


**Διάγραμμα 4.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 2, DDBB



Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	1,3993	9,9972	8,5979
2	1,7979	8,0023	6,2044
3	2,1708	2,6334	0,4626
4	3,1032	4,0420	0,9388
5	3,0873	3,6216	0,5343
6	2,9475	2,9613	0,0138
7	2,3764	2,3223	0,0541
8	1,8585	2,0479	0,1894
9	1,4801	1,8662	0,3861
10	1,4127	1,6424	0,2297
11	1,3822	1,4652	0,0830
12	1,2992	1,3365	0,0373
13	1,2389	1,2706	0,0317
14	1,2202	1,2455	0,0253
15	*1,2151*	1,2221	0,0070
16	-----	*1,2192*	-----

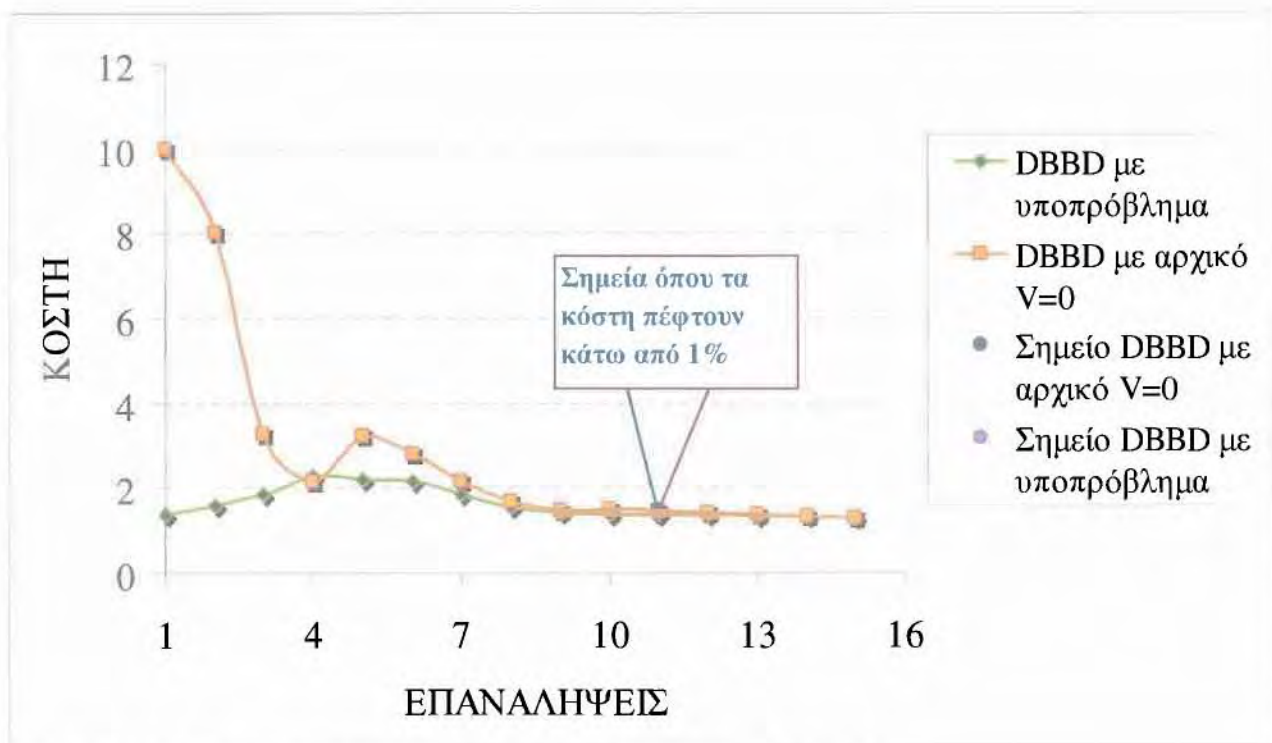
**Πίνακας 25.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 3,DBDB



**Διάγραμμα 5.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 3,DBDB

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	1,3731	9,9955	8,6224
2	1,5675	8,0000	6,4351
3	1,8339	3,2395	1,4056
4	2,2523	2,1636	0,0887
5	2,1789	3,2038	1,0249
6	2,1338	2,7668	0,6330
7	1,8296	2,1465	0,3169
8	1,5322	1,6695	0,1373
9	1,3980	1,4651	0,0671
10	1,3663	1,4802	0,1139
11	*1,3766*	*1,4669*	0,0903
12	1,3773	1,4204	0,0431
13	1,3388	1,3531	0,0143
14	1,3189	1,3265	0,0076
15	1,2957	1,3050	0,0093

**Πίνακας 26.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 4,DBBD



**Διάγραμμα 6.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 4,DBBD

Στον επόμενο συγκριτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε σε ποια επανάληψη τα κόστη πέφτουν κάτω από 1% με προσομοίωση, επίσης και την επανάληψη από τον ακριβή αλγόριθμο για το μέσο προσδοκώμενο κόστος, J και τα αντίστοιχο ποσοστιαίο σφάλμα για τις περιπτώσεις 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD).

Περίπτωση	Επανάληψεις	Επανάληψεις από τον ακριβή αλγόριθμο	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J	Ποσοστιαίο Σφάλμα %
1,BDDB με υποπρόβλημα	11	55	1,0043	1,0034	0,089695
1,BDDB με V=0	11	55	1,0100	1,0034	0,657764
2,DDBB με υποπρόβλημα	13	156	1,1000	1,0927	0,668070
2,DDBB με V=0	13	156	1,1113	1,0927	1,702206
3,DBDB με υποπρόβλημα	15	187	1,2151	1,1835	2,670046
3,DBDB με V=0	16	187	1,2192	1,1835	3,016477
4,DBBD με υποπρόβλημα	11	110	1,3766	1,2881	6,870585
4,DBBD με V=0	11	110	1,4669	1,2881	13,88091

**Πίνακας 27.** Συγκριτικό πίνακα αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις από 1 έως 4.

## 5.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 4 ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα των 4 προϊόντων συμπεραίνουμε ότι όταν επιλύουμε τις περιπτώσεις 1 έως 4 με αρχικό διαφορικό κόστος ( $V=0$ ) το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους στην 1<sup>η</sup> περίοδο είναι πολύ υψηλό, δηλαδή 697%, 631.92%, 744.71%, 675.98% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD). Ενώ στη συνέχεια αρχίζει να πέφτει και στη 15<sup>η</sup> περίοδο γίνεται 0.0697%, 1.3%, 3.261%, 1.312% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD). Το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους από τα αποτελέσματα που πρόεκυψαν με τον 2<sup>ο</sup> τρόπο επίλυσης του προβλήματος χρησιμοποιώντας το διαφορικό κόστος που προκύπτει από τα υποπροβλήματα είναι ότι στην 1<sup>η</sup> περίοδο έχουμε σφάλμα 50.91%, 50.02%, 18.23%, 6.59% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD). Ενώ στη 15<sup>η</sup> περίοδο γίνεται 0.219%, 0.247%, 2.67%, 0.59% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD). Από την σύγκριση των δυο τρόπων επίλυσης του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι στην 1<sup>η</sup> περίοδο το συνολικό κόστος που προκύπτει με αρχικό διαφορικό κόστος ( $V=0$ ) είναι 3-7 φορές μεγαλύτερο από το συνολικό κόστος που προκύπτει με διαφορικό κόστος από υποπροβλήματα. Όμως στη συνέχεια η διαφορά μικραίνει κατά πολύ και στη 15<sup>η</sup> περίοδο είναι σχεδόν ίση για κάθε περίπτωση από 1 έως 4 (BDDB, DDBB, DBDB, DBBD). Κατά συνέπεια και οι δυο τρόποι επίλυσης του προβλήματος συγκλίνουν πολύ γρήγορα στο μέσο προσδοκώμενο κόστος και το συνολικό κόστος σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις που επιλύσαμε πέφτει κάτω από 1% στη 11<sup>η</sup> περίοδο.

### 5.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 5 ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

**Περίπτωση 13**, ACDCA όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στις 1 και 5, τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι 2 και 4, και το προϊόν με την υψηλότερη ζήτηση είναι το 3, οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 28.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75

**Πίνακας 28.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 13, ACDCA

**Περίπτωση 14**, DCCAA όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στις 4 και 5, τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι 2 και 3, και το προϊόν με την υψηλότερη ζήτηση είναι το 1, οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 29.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75

**Πίνακας 29.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 14, DCCAA

**Περίπτωση 15**, DCAAC όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στις 3 και 4, τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι 2 και 5, και το προϊόν με την υψηλότερη ζήτηση είναι το 1, οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 30.

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25

**Πίνακας 30.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 15, DCAAC

**Περίπτωση 16** , DACAC όπου τα προϊόντα με τη χαμηλή ζήτηση είναι στις 2 και 4, τα προϊόντα με την υψηλή ζήτηση είναι 3 και 5, και το προϊόν με την υψηλότερη ζήτηση είναι το 1, οι κατανομές των οποίων δίνονται στον πίνακα 31.

j/i	Pr (Dj = i)				E[Dj]
	0	1	2	3	
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25

**Πίνακας 31.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 16, DACAC

Πρώτα λύνουμε τις περιπτώσεις 13 έως 16 με την ακριβή μέθοδο επίλυσης του προβλήματος και παράλληλα με την προσομοίωση χρησιμοποιώντας το αρχικό διαφορικό κόστος ( $V=0$ ) για 15 περιόδους (επαναλήψεις). Σε όλες τις περιπτώσεις, θα θεωρηθεί  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχειλίσης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=20$ ,  $N=5$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στους επομένους πίνακες.

Περίπτωση	Επαναλήψεις	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J
13, ACDCA	35	2,6520
14, DCCAA	71	3,0016
15, DCAAC	129	3,4916
16, DACAC	129	3,6572

**Πίνακας 32.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC) με τον ακριβή αλγόριθμο

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα,%
1	9,4938	2,652	257,9864
2	4,2820	2,652	61,46305
3	3,4662	2,652	30,70136
4	2,8815	2,652	8,653846
5	2,8220	2,652	6,410256
6	2,7387	2,652	3,269231
7	2,6941	2,652	1,587481
8	2,6675	2,652	0,584465
9	2,6634	2,652	0,429864
10	2,6588	2,652	0,256410
11	2,6530	2,652	0,037707
12	2,6564	2,652	0,165913
13	2,6536	2,652	0,060332
14	2,6573	2,652	0,199849
15	2,6505	2,652	0,056561

**Πίνακας 33.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 13, ACDCA με διαφορετικό κόστος (V=0)

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα,%
1	9,4935	3,0016	216,2813
2	9,4906	3,0016	216,1847
3	4,6564	3,0016	55,13060
4	3,6618	3,0016	21,99494
5	3,6240	3,0016	20,73561
6	3,2803	3,0016	9,285048
7	3,0823	3,0016	2,688566
8	3,0207	3,0016	0,636327
9	3,0170	3,0016	0,513060
10	3,0104	3,0016	0,293177
11	3,0076	3,0016	0,199893
12	3,0116	3,0016	0,333156
13	3,0093	3,0016	0,256530
14	3,0061	3,0016	0,149920
15	2,9966	3,0016	0,166578

**Πίνακας 34.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 14, DCCAA με διαφορετικό κόστος (V=0)

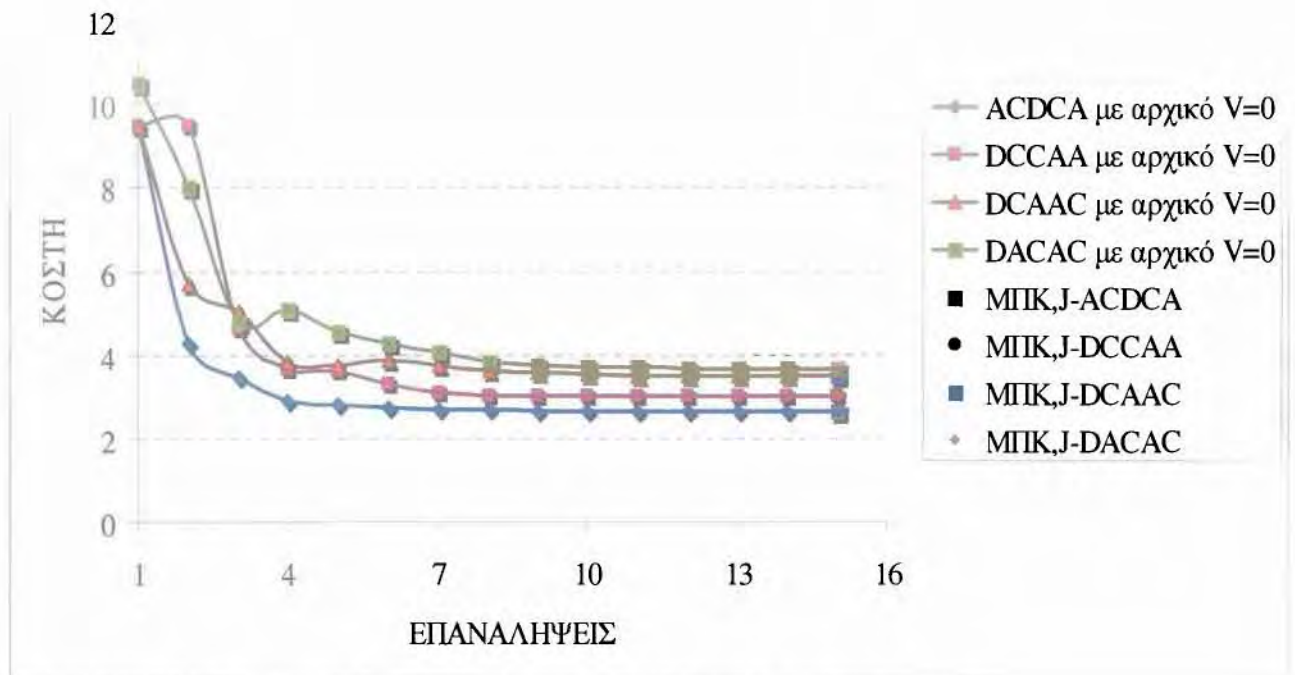
Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα,%
1	9,4927	3,4916	171,8725
2	5,7022	3,4916	63,31195
3	5,0609	3,4916	44,94501
4	3,8148	3,4916	9,256501
5	3,7344	3,4916	6,953832
6	3,8775	3,4916	11,05224
7	3,7362	3,4916	7,005384
8	3,6105	3,4916	3,405316
9	3,5633	3,4916	2,053500
10	3,5198	3,4916	0,807653
11	3,5090	3,4916	0,498339
12	3,5102	3,4916	0,532707
13	3,4969	3,4916	0,151793
14	3,5088	3,4916	0,492611
15	3,4941	3,4916	0,071600

**Πίνακας 35.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 15, DCAAC με διαφορετικό κόστος (V=0)

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα,%
1	10,4939	3,6572	186,9381
2	8,0061	3,6572	118,9134
3	4,7881	3,6572	30,92256
4	5,0918	3,6572	39,22673
5	4,5749	3,6572	25,09297
6	4,2809	3,6572	17,05403
7	4,0654	3,6572	11,16154
8	3,8240	3,6572	4,560866
9	3,7308	3,6572	2,012469
10	3,7210	3,6572	1,744504
11	3,7075	3,6572	1,375369
12	3,6725	3,6572	0,418353
13	3,6751	3,6572	0,489445
14	3,6588	3,6572	0,043749
15	3,6578	3,6572	0,016406

**Πίνακας 36.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 16, DACAC με διαφορετικό κόστος (V=0)





**Διάγραμμα 7.** Διάγραμμα των περιπτώσεων από 13 έως 16 με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ )

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τους πίνακες για τις κατανομές ζητήσεων των υποπροβλημάτων για τις περιπτώσεις 17 έως 28. Οι κατανομές των 3 προϊόντων προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης αθροιστικής ζήτησης 3 προϊόντων. Τα υποπροβλήματα προκύπτουν ως προβλήματα 3 προϊόντων, τα οποία επιλύονται με τον ακριβή τρόπο επίλυσης του προβλήματος 3 προϊόντων.

	Pr ( $D_j = i$ )									
$j/i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$E[D_j]$
ACD	0,005	0,0313	0,1069	0,2125	0,2762	0,2338	0,1044	0,0225	0,0075	4
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0,75

**Πίνακας 37.** Κατανομές ζητήσεων, Pr ( $D_j = i$ ) για την περίπτωση 17, ACD-C-A

	Pr ( $D_j = i$ )						
$j/i$	0	1	2	3	4	5	$E[D_j]$
AC	0,1	0,225	0,3375	0,275	0,0375	0,025	2
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	2
CA	0,1	0,225	0,3375	0,275	0,0375	0,025	2

**Πίνακας 38.** Κατανομές ζητήσεων, Pr ( $D_j = i$ ) για την περίπτωση 18, AC-D-CA

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
DCA	0,005	0,0313	0,1069	0,2125	0,2762	0,2338	0,1044	0,0225	0,0075	4

**Πίνακας 39.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 19, A-C-DCA

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	E[D <sub>j</sub> ]	
DCC	0,0031	0,0188	0,0688	0,15	0,2406	0,2563	0,1875	0,075		4,5
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0		0,75
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0		0,75

**Πίνακας 40.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 20, DCC-A-A

	Pr (D <sub>j</sub> = i)								
j/i	0	1	2	3	4	5	6	E[D <sub>j</sub> ]	
DC	0,0125	0,0625	0,1875	0,2875	0,3	0,15	0	3,25	
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	1,25	
AA	0,16	0,4	0,29	0,09	0,0525	0,005	0,0025	1,5	

**Πίνακας 41.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 21, DC-C-AA

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	0	0	0	2
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
CAA	0,04	0,14	0,2525	0,295	0,1806	0,0594	0,0281	0,0031	0,0013	2,75

**Πίνακας 42.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 22, D-C-CAA

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
DCA	0,005	0,0313	0,1069	0,2125	0,2763	0,2337	0,1044	0,0225	0,0075	4
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25

**Πίνακας 43.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 23, DCA-A-C

	Pr (D <sub>j</sub> = i)							
j/i	0	1	2	3	4	5	E[D <sub>j</sub> ]	
DC	0,0125	0,0625	0,1875	0,2875	0,3	0,15	3,25	
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0,75	
AC	0,1	0,225	0,3375	0,275	0,0375	0,025	2	

**Πίνακας 44.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 24, DC-A-AC

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	0	0	0	2
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
AAC	0,04	0,14	0,2525	0,295	0,1806	0,0594	0,0281	0,0031	0,0013	2,75

**Πίνακας 45.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 25, D-C-AAC

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
DAC	0,005	0,0313	0,1069	0,2125	0,2763	0,2337	0,1044	0,0225	0,0075	4
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0,75
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25

**Πίνακας 46.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 26, DAC-A-C

	Pr (D <sub>j</sub> = i)								
j/i	0	1	2	3	4	5	6	E[D <sub>j</sub> ]	
DA	0,02	0,105	0,2825	0,3575	0,1825	0,0375	0,015	2,75	
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	1,25	
AC	0,1	0,225	0,3375	0,275	0,0375	0,025	0	2	

**Πίνακας 47.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 27, DA-C-AC

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	E[D <sub>j</sub> ]	
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	0	0	0	2	
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0,75	
CAC	0,025	0,0813	0,1906	0,2656	0,2469	0,1531	0,025	0,0125	3,25	

**Πίνακας 48.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 28, D-A-CAC

Λύνουμε τα υποπροβλήματα θεωρώντας,  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=20$ ,  $N=3$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης).

Ξέροντας τα αποτελέσματα των υποπροβλημάτων, λύνουμε τις αρχικές περιπτώσεις 13 έως 16 με τον ακριβή τρόπο επίλυσης του προβλήματος και παράλληλα με την προσομοίωση χρησιμοποιώντας το διαφορικό κόστος ( $V$ ) που προκύπτει από τα υποπροβλήματα για 15 επαναλήψεις. Σε όλες τις περιπτώσεις, θα θεωρηθεί  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=20$ ,  $N=5$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στους επομένους πίνακες.

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα,%
1	3,5097	2,652	32,34163
2	3,4717	2,652	30,90875
3	2,9873	2,652	12,64329
4	2,9921	2,652	12,82428
5	2,8544	2,652	7,63197
6	2,7120	2,652	2,26244
7	2,6883	2,652	1,36877
8	2,6616	2,652	0,36199
9	2,6622	2,652	0,38461
10	2,6520	2,652	0,00000
11	2,6506	2,652	0,05279
12	2,6665	2,652	0,54675
13	2,6504	2,652	0,06033
14	2,6562	2,652	0,15837
15	2,6498	2,652	0,08295

**Πίνακας 49.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 13,ACDCA με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα,%
1	3,5986	3,0016	19,88939
2	4,4099	3,0016	46,91831
3	3,2364	3,0016	7,82249
4	3,3114	3,0016	10,32116
5	3,3157	3,0016	10,46442
6	3,0831	3,0016	2,71522
7	3,0326	3,0016	1,03278
8	3,0146	3,0016	0,43311
9	3,0117	3,0016	0,33649
10	3,0010	3,0016	0,01999
11	3,0000	3,0016	0,05330
12	3,0063	3,0016	0,15658
13	3,0107	3,0016	0,30317
14	2,9991	3,0016	0,08328
15	3,0017	3,0016	0,00333

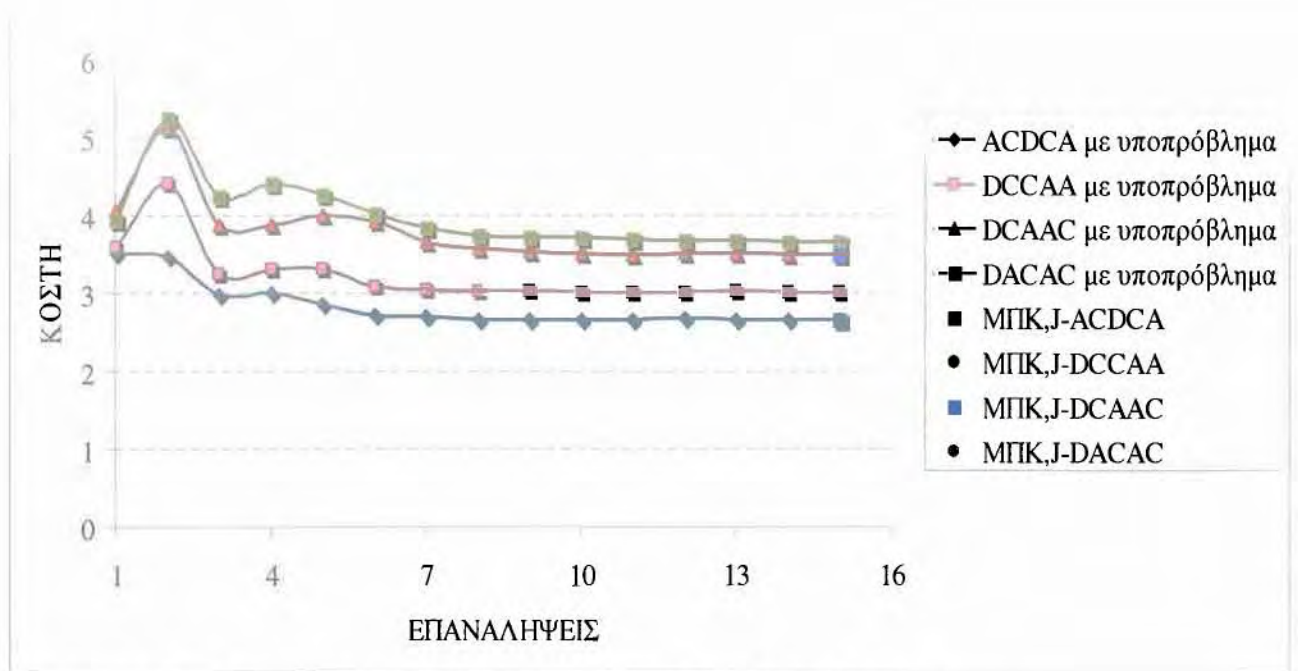
**Πίνακας 50.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 14,DCCAA με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα, %
1	4,0655	3,4916	16,43659
2	5,1293	3,4916	46,90400
3	3,8680	3,4916	10,78016
4	3,8833	3,4916	11,21835
5	3,9972	3,4916	14,48047
6	3,9216	3,4916	12,31527
7	3,6551	3,4916	4,68266
8	3,5773	3,4916	2,45446
9	3,5307	3,4916	1,11983
10	3,5080	3,4916	0,46969
11	3,4973	3,4916	0,16325
12	3,5114	3,4916	0,56707
13	3,5002	3,4916	0,24631
14	3,4954	3,4916	0,10883
15	3,4893	3,4916	0,06587

**Πίνακας 51.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 15,DCAAC με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα, %
1	3,9480	3,6572	7,95144
2	5,2382	3,6572	43,22979
3	4,2453	3,6572	16,08061
4	4,3998	3,6572	20,30515
5	4,2719	3,6572	16,80794
6	4,0290	3,6572	10,16625
7	3,8403	3,6572	5,00656
8	3,7336	3,6572	2,08903
9	3,7104	3,6572	1,45466
10	3,7105	3,6572	1,45739
11	3,6910	3,6572	0,92420
12	3,6797	3,6572	0,61522
13	3,6733	3,6572	0,44022
14	3,6630	3,6572	0,15859
15	3,6519	3,6572	0,14492

**Πίνακας 52.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 16,DACAC με διαφορεικό κόστος από υποπροβλήματα

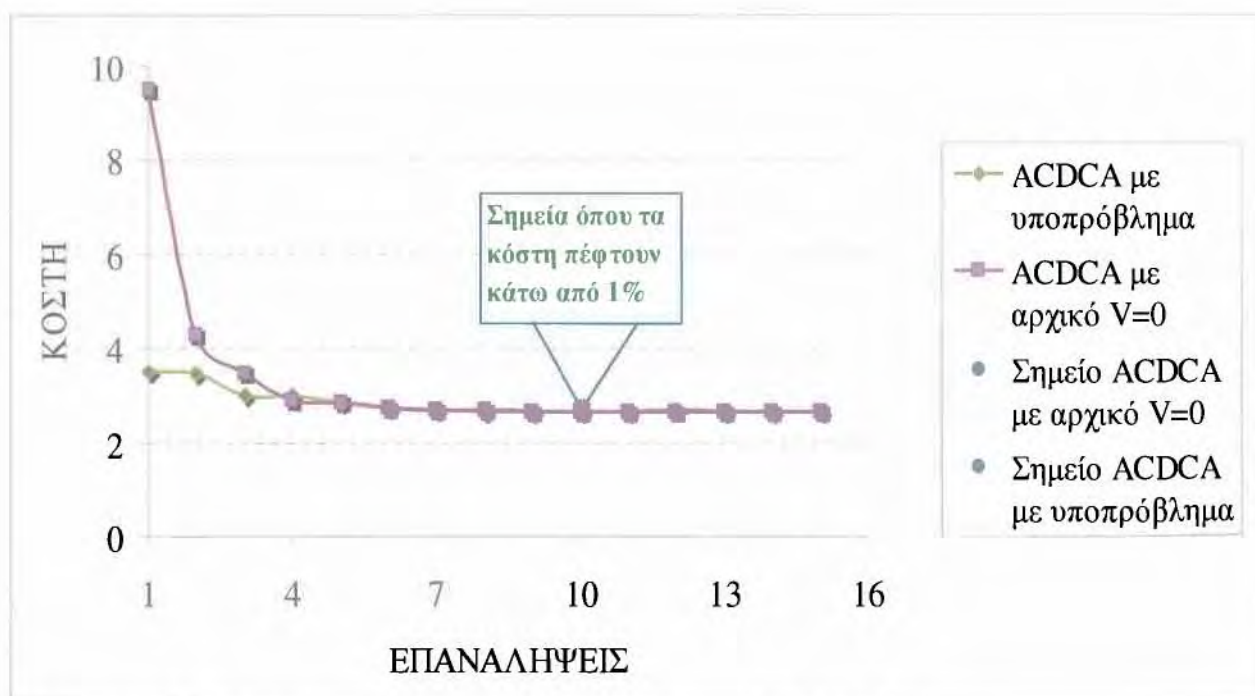


**Διάγραμμα 8.** Διάγραμμα των περιπτώσεων από 13 έως 16 με διαφορετικό κόστος από υποπροβλήματα

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζουμε το συνολικό κόστος που προκύπτει με τους 2 τρόπους επίλυσης όπου για κάθε τρόπο επίλυσης βρίσκουμε σε ποια επανάληψη μετά από τη δέκατη η διαφορά κόστους διαδοχικών επαναλήψεων πέφτει κάτω από 1%. Επίσης παρουσιάζουμε και συγκριτικά διαγράμματα για τους 2 τρόπους επίλυσης.

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	3,5097	9,4938	5,9841
2	3,4717	4,2820	0,8103
3	2,9873	3,4662	0,4789
4	2,9921	2,8815	0,1106
5	2,8544	2,8220	0,0324
6	2,7120	2,7387	0,0267
7	2,6883	2,6941	0,0058
8	2,6616	2,6675	0,0059
9	2,6622	2,6634	0,0012
10	*2,6520*	*2,6588*	0,0068
11	2,6506	2,6530	0,0024
12	2,6665	2,6564	0,0101
13	2,6504	2,6536	0,0032
14	2,6562	2,6573	0,0011
15	2,6498	2,6505	0,0007

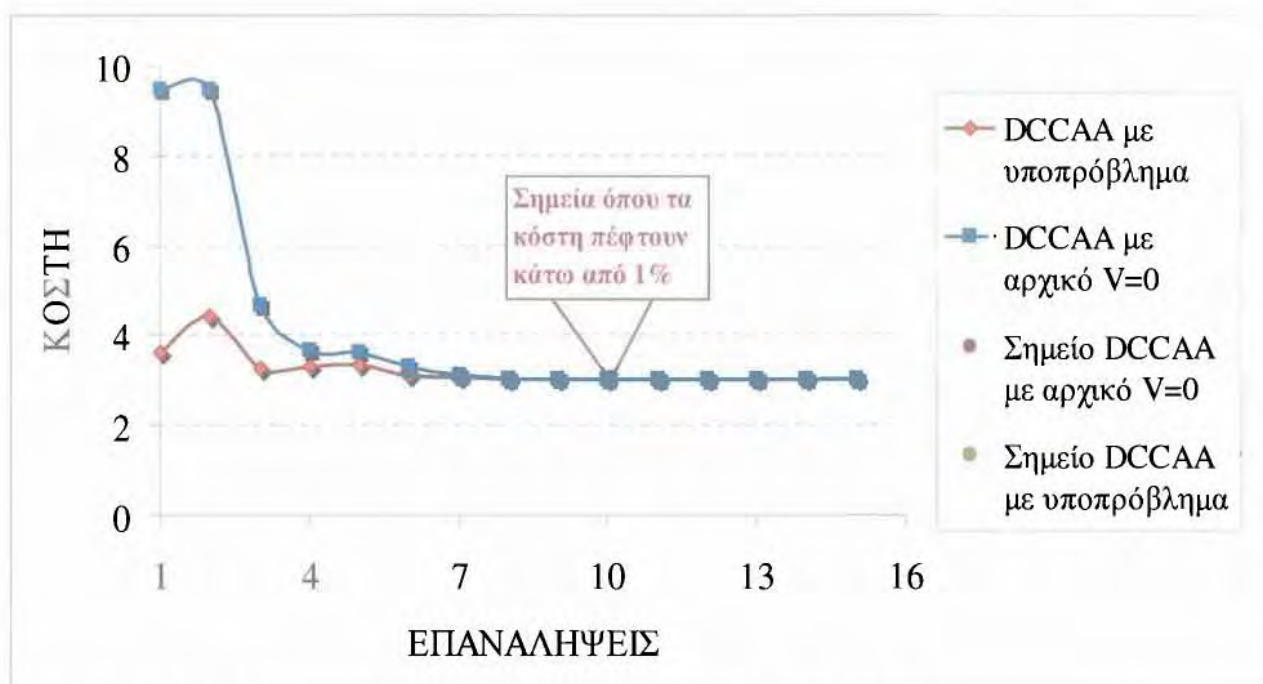
**Πίνακας 53.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 13,ACDCA



**Διάγραμμα 9.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 13,ACDCA

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	3,5986	9,4935	5,8949
2	4,4099	9,4906	5,0807
3	3,2364	4,6564	1,4200
4	3,3114	3,6618	0,3504
5	3,3157	3,6240	0,3083
6	3,0831	3,2803	0,1972
7	3,0326	3,0823	0,0497
8	3,0146	3,0207	0,0061
9	3,0117	3,0170	0,0053
10	3,0010*	*3,0104*	0,0094
11	3,0000	3,0076	0,0076
12	3,0063	3,0116	0,0053
13	3,0107	3,0093	0,0014
14	2,9991	3,0061	0,0070
15	3,0017	2,9966	0,0051

**Πίνακας 54.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 14,DCCAA

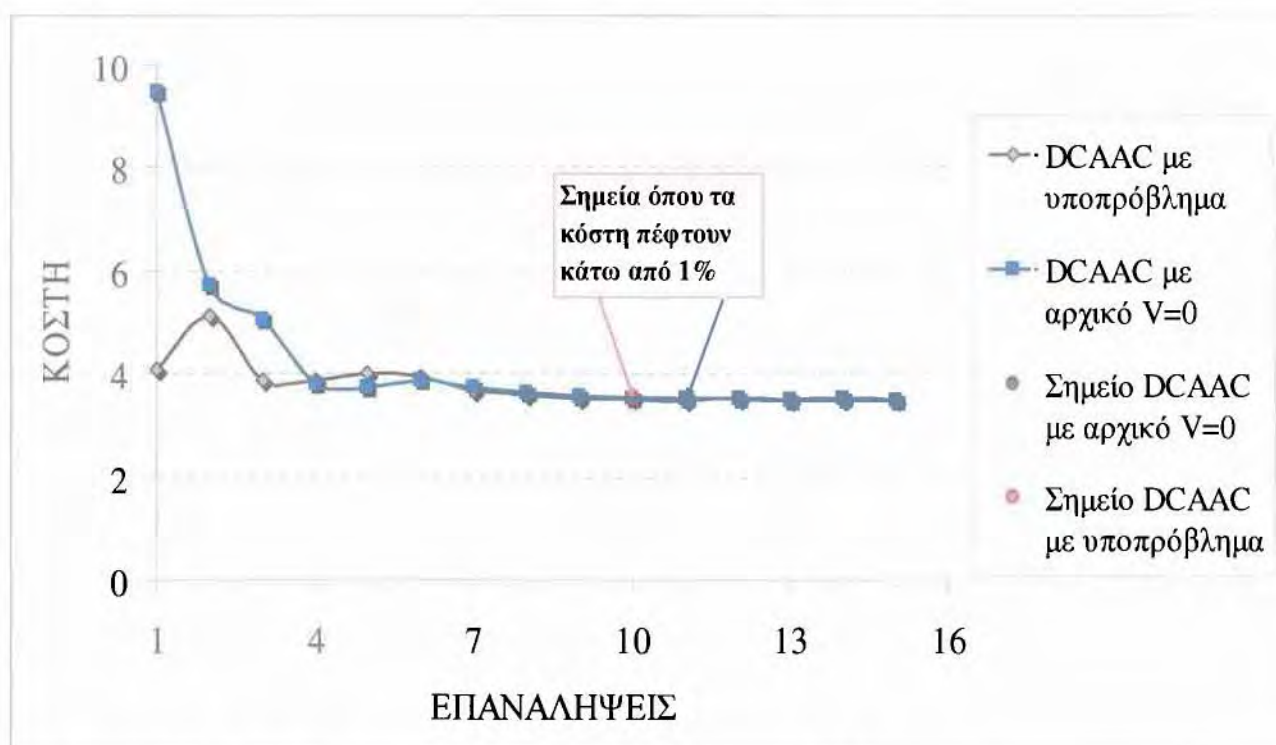


**Διάγραμμα 10.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 14,DCCAA



Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	4,0655	9,4927	5,4272
2	5,1293	5,7022	0,5729
3	3,8680	5,0609	1,1929
4	3,8833	3,8148	0,0685
5	3,9972	3,7344	0,2628
6	3,9216	3,8775	0,0441
7	3,6551	3,7362	0,0811
8	3,5773	3,6105	0,0332
9	3,5307	3,5633	0,0326
10	3,5080	3,5198	0,0118
11	3,4973	*3,5090*	0,0117
12	3,5114	3,5102	0,0012
13	3,5002	3,4969	0,0033
14	3,4954	3,5088	0,0134
15	3,4893	3,4941	0,0048

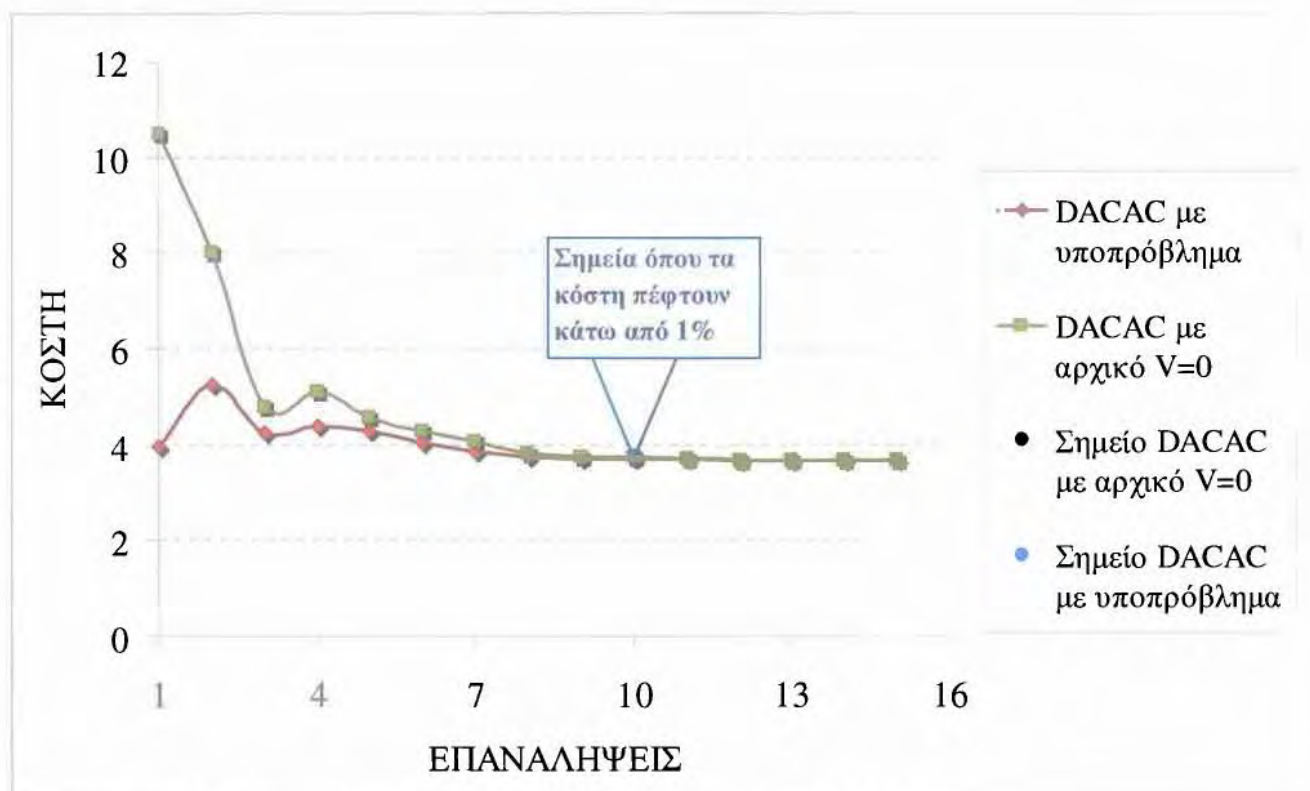
**Πίνακας 55.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 15,DCAAC



**Διάγραμμα 11.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 15,DCAAC

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	3,9480	10,4939	6,5459
2	5,2382	8,0061	2,7679
3	4,2453	4,7881	0,5428
4	4,3998	5,0918	0,6920
5	4,2719	4,5749	0,3030
6	4,0290	4,2809	0,2519
7	3,8403	4,0654	0,2251
8	3,7336	3,8240	0,0904
9	3,7104	3,7308	0,0204
10	*3,7105*	*3,7210*	0,0105
11	3,6910	3,7075	0,0165
12	3,6797	3,6725	0,0072
13	3,6733	3,6751	0,0018
14	3,6630	3,6588	0,0042
15	3,6519	3,6578	0,0059

**Πίνακας 56.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 16,DACAC



**Διάγραμμα 12.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 16,DACAC

Επίσης επιλύθηκαν άλλες 3 περιπτώσεις με τον ακριβή αλγόριθμο και παράλληλα έγιναν 40 επαναλήψεις της μεθόδου που χρησιμοποιεί και προσομοίωση, όπου βρήκαμε τότε η διαφορά κόστους διαδοχικών επαναλήψεων πέφτει κάτω από 1%.  
Στους παρακάτω πίνακες δείχνουμε τις κατανομές ζητήσεων των περιπτώσεων BBDBB, ECFCE και EAEAE

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
B	0,25	0,5	0,25	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	1
D	0,05	0,2	0,45	0,3	2
B	0,25	0,5	0,25	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	1

**Πίνακας 57.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 29, BBDBB

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
E	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
F	0,65	0,25	0,05	0,05	0,5
C	0,25	0,25	0,5	0	1,25
E	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5

**Πίνακας 58.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 30, ECFCE

	Pr (D <sub>j</sub> = i)				
j/i	0	1	2	3	E[D <sub>j</sub> ]
E	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
E	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0,75
E	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5

**Πίνακας 59.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 31, EAEAE

Περίπτωση	Επαναλήψεις	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J
29, BBDBB	48	2,9440
30, ECFCE	87	4,0764
31, EAEAE	65	3,8510

**Πίνακας 60.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 29 έως 31 (BBDBB, ECFCE, EAEAE) με τον ακριβή αλγόριθμο

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα, %
1	9,9918	2,9440	239,3954
2	7,9992	2,9440	171,7120
3	3,8001	2,9440	29,07940
4	3,3548	2,9440	13,95380
5	3,0957	2,9440	5,152853
6	3,0560	2,9440	3,804348
7	3,0397	2,9440	3,250679
8	3,0010	2,9440	1,936141
9	2,9859	2,9440	1,423234
10	2,9596	2,9440	0,529891
11	2,9543	2,9440	0,349864
12	2,9482	2,9440	0,142663
13	2,9445	2,9440	0,016984
14	2,9441	2,9440	0,003397
15	2,9337	2,9440	0,349864
16	2,9401	2,9440	0,132473
17	2,9443	2,9440	0,010190
18	2,9441	2,9440	0,003397
19	2,9463	2,9440	0,078125
20	2,9447	2,9440	0,023777
21	2,9443	2,9440	0,010190
22	2,9457	2,9440	0,057745
23	2,9450	2,9440	0,033967
24	2,9474	2,9440	0,115489
25	2,9478	2,9440	0,129076
26	2,9391	2,9440	0,166440
27	2,9416	2,9440	0,081522
28	2,9446	2,9440	0,020380
29	2,9366	2,9440	0,251359
30	2,9419	2,9440	0,071332
31	2,9417	2,9440	0,078125
32	2,9500	2,9440	0,203804
33	2,9345	2,9440	0,322690
34	2,9444	2,9440	0,013587
35	2,9390	2,9440	0,169837
36	2,9448	2,9440	0,027174
37	2,9428	2,9440	0,040761
38	2,9377	2,9440	0,213995
39	2,9468	2,9440	0,095109
40	2,9445	2,9440	0,016984

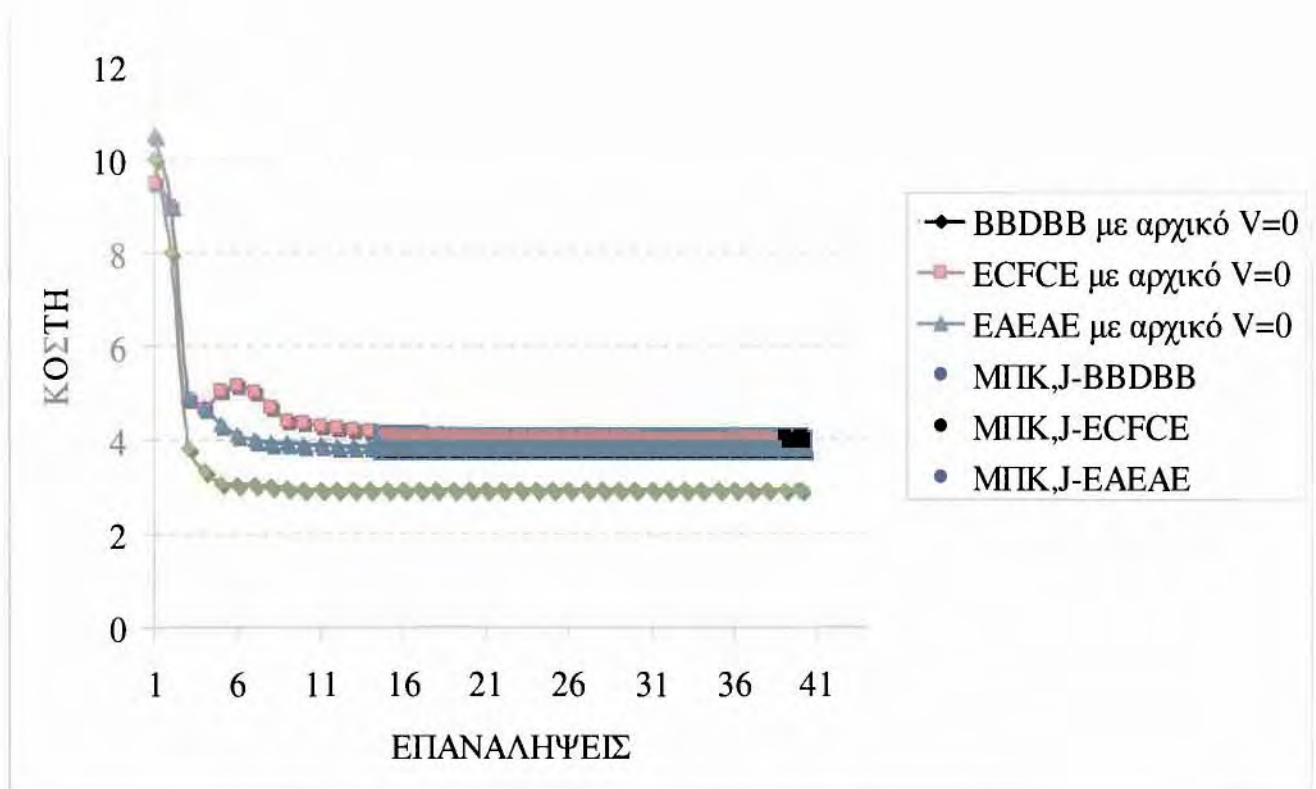
**Πίνακας 61.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 29, BBDBB με διαφορετικό κόστος (V=0)

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα, %
1	9,4929	4,0764	132,8746
2	8,9990	4,0764	120,7585
3	4,8904	4,0764	19,96860
4	4,6523	4,0764	14,12766
5	5,0665	4,0764	24,28859
6	5,1565	4,0764	26,49642
7	5,0145	4,0764	23,01295
8	4,6952	4,0764	15,18006
9	4,4094	4,0764	8,168973
10	4,3471	4,0764	6,640663
11	4,2987	4,0764	5,453341
12	4,2574	4,0764	4,440192
13	4,2042	4,0764	3,135119
14	4,1734	4,0764	2,379551
15	4,1605	4,0764	2,063095
16	4,1436	4,0764	1,648513
17	4,1392	4,0764	1,540575
18	4,1091	4,0764	0,802178
19	4,1104	4,0764	0,834069
20	4,0960	4,0764	0,480816
21	4,0808	4,0764	0,107938
22	4,0891	4,0764	0,311549
23	4,0763	4,0764	0,002453
24	4,0679	4,0764	0,208517
25	4,0698	4,0764	0,161908
26	4,0807	4,0764	0,105485
27	4,0937	4,0764	0,424394
28	4,0814	4,0764	0,122657
29	4,0728	4,0764	0,088313
30	4,0688	4,0764	0,186439
31	4,0791	4,0764	0,066235
32	4,0760	4,0764	0,009813
33	4,0767	4,0764	0,007359
34	4,0815	4,0764	0,125110
35	4,0706	4,0764	0,142282
36	4,0917	4,0764	0,375331
37	4,0759	4,0764	0,012266
38	4,0816	4,0764	0,127564
39	4,0837	4,0764	0,179080
40	4,0680	4,0764	0,206064

**Πίνακας 62.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 30, ECFCE με διαφορετικό κόστος (V=0)

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση με αρχικό V=0	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J από την ακριβή λύση	Ποσοστιαίο σφάλμα, %
1	10,4934	3,8510	172,4851
2	9,0069	3,8510	133,8847
3	4,9104	3,8510	27,50974
4	4,6801	3,8510	21,52947
5	4,3348	3,8510	12,56297
6	4,1057	3,8510	6,613867
7	3,9865	3,8510	3,518567
8	3,9372	3,8510	2,238380
9	3,9175	3,8510	1,726824
10	3,8958	3,8510	1,163334
11	3,8838	3,8510	0,851727
12	3,8709	3,8510	0,516749
13	3,8690	3,8510	0,467411
14	3,8604	3,8510	0,244092
15	3,8530	3,8510	0,051935
16	3,8491	3,8510	0,049338
17	3,8460	3,8510	0,129836
18	3,8497	3,8510	0,033757
19	3,8620	3,8510	0,285640
20	3,8567	3,8510	0,148014
21	3,8594	3,8510	0,218125
22	3,8524	3,8510	0,036354
23	3,8608	3,8510	0,254479
24	3,8571	3,8510	0,158400
25	3,8482	3,8510	0,072708
26	3,8570	3,8510	0,155804
27	3,8620	3,8510	0,285640
28	3,8519	3,8510	0,023371
29	3,8530	3,8510	0,051935
30	3,8512	3,8510	0,005193
31	3,8457	3,8510	0,137627
32	3,8594	3,8510	0,218125
33	3,8545	3,8510	0,090885
34	3,8462	3,8510	0,124643
35	3,8490	3,8510	0,051935
36	3,8507	3,8510	0,007790
37	3,8484	3,8510	0,067515
38	3,8464	3,8510	0,119449
39	3,8478	3,8510	0,083095
40	3,8479	3,8510	0,080499

**Πίνακας 63.** Αποτελέσματα για την περίπτωση 31, ΕΑΕΑΕ με διαφορετικό κόστος (V=0)



**Διάγραμμα 13.** Διάγραμμα των περιπτώσεων από 29 έως 31 με διαφορετικό κόστος ( $V=0$ )

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τους πίνακες για τις κατανομές ζήτησεων των υποπροβλημάτων για τις περιπτώσεις 32 έως 40. Οι κατανομές των 3 προϊόντων προκύπτουν από τον αλγόριθμο εύρεσης αθροιστικής ζήτησης 3 προϊόντων. Τα υποπροβλήματα προκύπτουν ως προβλήματα 3 προϊόντων, τα οποία επιλύονται με τον ακριβή τρόπο επίλυσης του προβλήματος 3 προϊόντων.

j/i	Pr ( $D_j = i$ )								E[ $D_j$ ]
	0	1	2	3	4	5	6	7	
BBD	0,0031	0,025	0,0969	0,2188	0,2969	0,2375	0,1031	0,0188	4
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0	0	1

**Πίνακας 64.** Κατανομές ζήτησεων, Pr ( $D_j = i$ ) για την περίπτωση 32, BBD-B-B

	Pr (D <sub>j</sub> = i)					
j/i	0	1	2	3	4	E[D <sub>j</sub> ]
BB	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625	2
D	0,05	0,2	0,45	0,3	0	2
BB	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625	2

**Πίνακας 65.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 33, BB-D-BB

	Pr (D <sub>j</sub> = i)								
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	E[D <sub>j</sub> ]
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0	0	1
B	0,25	0,5	0,25	0	0	0	0	0	1
DBB	0,0031	0,025	0,0969	0,2188	0,2969	0,2375	0,1031	0,0188	4

**Πίνακας 66.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 34, B-B-DBB

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
ECF	0,0406	0,0969	0,1969	0,2344	0,2031	0,1531	0,0531	0,0156	0,0063	3,25
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
E	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	1,5

**Πίνακας 67.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 35, ECF-C-E

	Pr (D <sub>j</sub> = i)							
j/i	0	1	2	3	4	5	E[D <sub>j</sub> ]	
EC	0,0625	0,125	0,25	0,25	0,1875	0,125	2,75	
F	0,65	0,25	0,05	0,05	0	0	0,5	
CE	0,0625	0,125	0,25	0,25	0,1875	0,125	2,75	

**Πίνακας 68.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 36, EC-F-CE

	Pr (D <sub>j</sub> = i)									
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	E[D <sub>j</sub> ]
E	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	1,5
C	0,25	0,25	0,5	0	0	0	0	0	0	1,25
FCE	0,0406	0,0969	0,1969	0,2344	0,2031	0,1531	0,0531	0,0156	0,0063	3,25

**Πίνακας 69.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (D<sub>j</sub> = i) για την περίπτωση 37, E-C-FCE



	Pr (Dj = i)										
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E[Dj]
EAE	0,025	0,0813	0,1406	0,2031	0,2156	0,1656	0,1094	0,0469	0,0094	0,0031	3,75
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0	0,75
E	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	1,5

**Πίνακας 70.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 38, EAE-A-E

	Pr (Dj = i)								
j/i	0	1	2	3	4	5	6	E[Dj]	
EA	0,1	0,225	0,2375	0,25	0,15	0,025	0,0125	2,25	
E	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	1,5	
AE	0,1	0,225	0,2375	0,25	0,15	0,025	0,0125	2,25	

**Πίνακας 71.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 39, EA-E-AE

	Pr (Dj = i)										
j/i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E[Dj]
E	0,25	0,25	0,25	0,25	0	0	0	0	0	0	1,5
A	0,4	0,5	0,05	0,05	0	0	0	0	0	0	0,75
EAE	0,025	0,0813	0,1406	0,2031	0,2156	0,1656	0,1094	0,0469	0,0094	0,0031	3,75

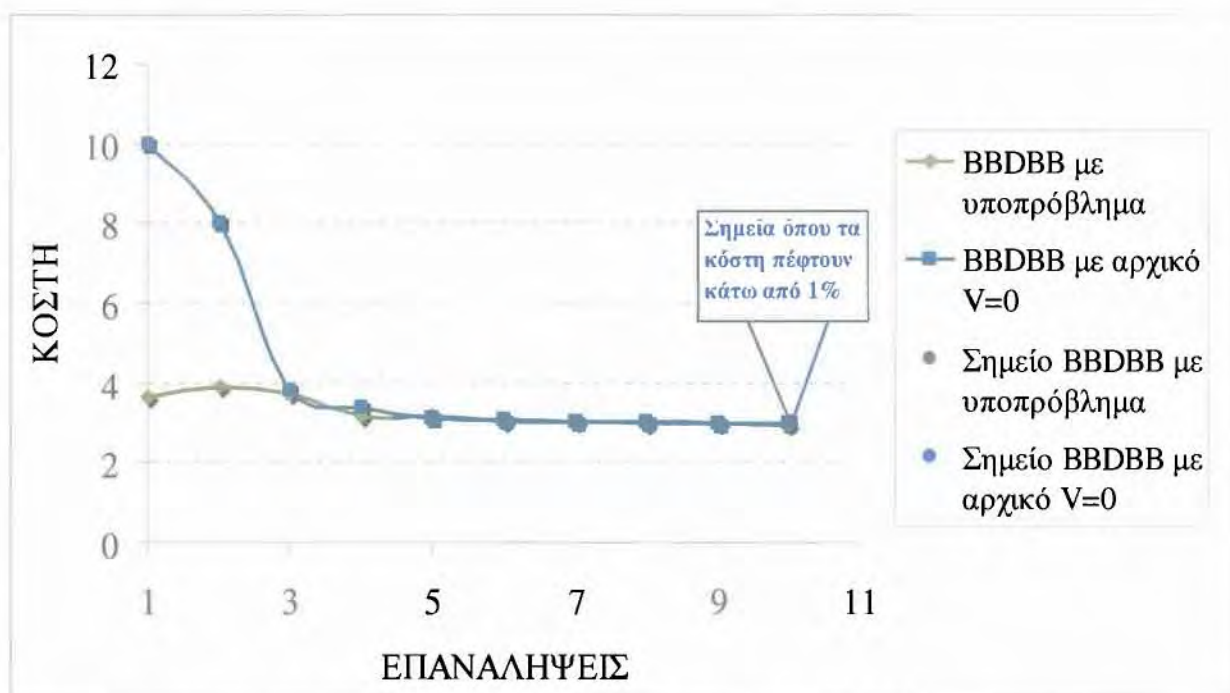
**Πίνακας 72.** Κατανομές ζητήσεων, Pr (Dj = i) για την περίπτωση 40, E-A-EAE

Λύνουμε τα υποπροβλήματα θεωρώντας,  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=20$ ,  $N=3$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης).

Ξέροντας τα αποτελέσματα των υποπροβλημάτων, λύνουμε τις αρχικές περιπτώσεις 29 έως 31 με τον ακριβή τρόπο επίλυσης του προβλήματος και παράλληλα με την προσομοίωση χρησιμοποιώντας το διαφορικό κόστος ( $V$ ) που προκύπτει από τα υποπροβλήματα μέχρι να βρούμε πότε η διαφορά κόστους διαδοχικών επαναλήψεων πέφτει κάτω από 1% με τον όρο να κάνει τουλάχιστον 10 επαναλήψεις. Σε όλες τις περιπτώσεις, θα θεωρηθεί  $CC=CS=CL=1$  (τα οποία είναι, κόστος αλλαγής, κόστος υπερχείλισης ανά μονάδα μη αποθηκευμένου προϊόντος και κόστος χαμένων πωλήσεων ανά μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης αντίστοιχα),  $P_{MAX}=6$ ,  $X=20$ ,  $N=5$ ,  $e=0.001$  (το οποίο είναι το κριτήριο σύγκλισης). Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στους επομένους πίνακες.

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	3,6365	9,9918	6,3553
2	3,8947	7,9992	4,1045
3	3,7149	3,8001	0,0852
4	3,1413	3,3548	0,2135
5	3,1573	3,0957	0,0616
6	3,0349	3,056	0,0211
7	3,0294	3,0397	0,0103
8	2,985	3,001	0,016
9	2,9602	2,9859	0,0257
10	*2,9488*	*2,9596*	0,0108

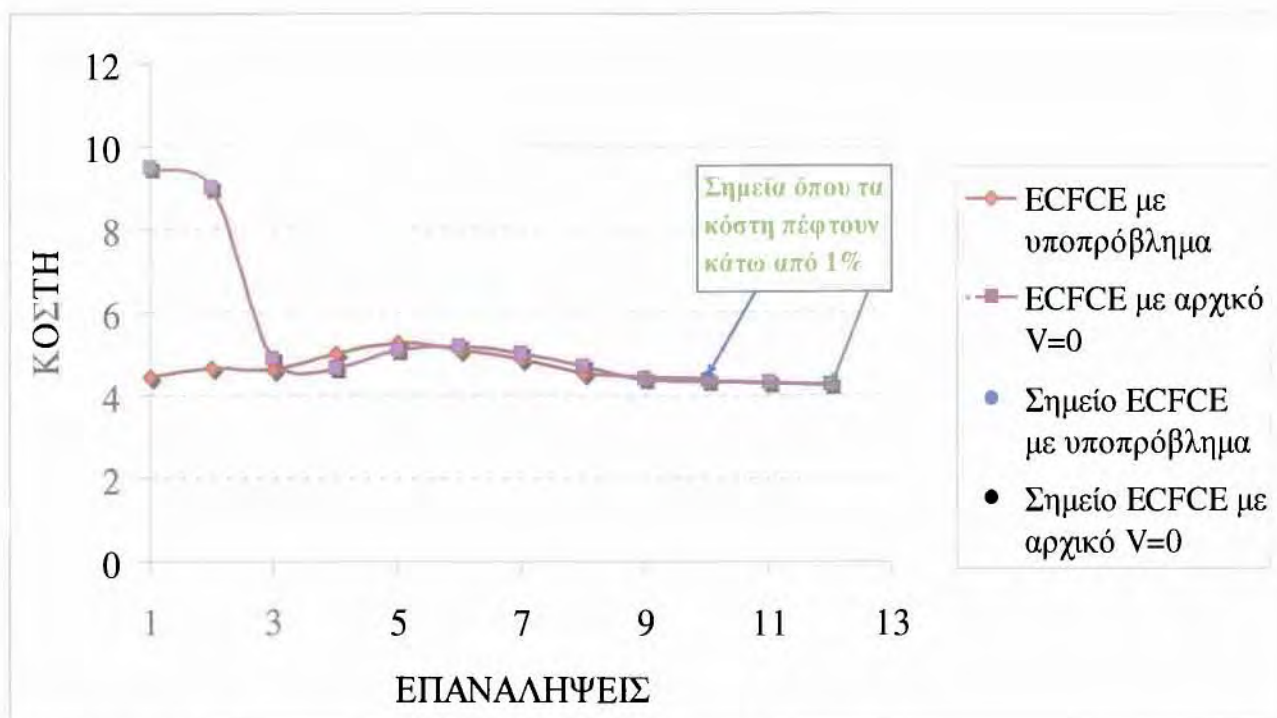
**Πίνακας 73.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 29, BBDBB



**Διάγραμμα 14.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 29, BBDBB

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	4,4265	9,4929	5,0664
2	4,6496	8,999	4,3494
3	4,6115	4,8904	0,2789
4	5,0036	4,6523	0,3513
5	5,2436	5,0665	0,1771
6	5,1074	5,1565	0,0491
7	4,8764	5,0145	0,1381
8	4,5297	4,6952	0,1655
9	4,4361	4,4094	0,0267
10	*4,4020*	4,3471	0,0549
11	-----	4,2987	-----
12	-----	*4,2574*	-----

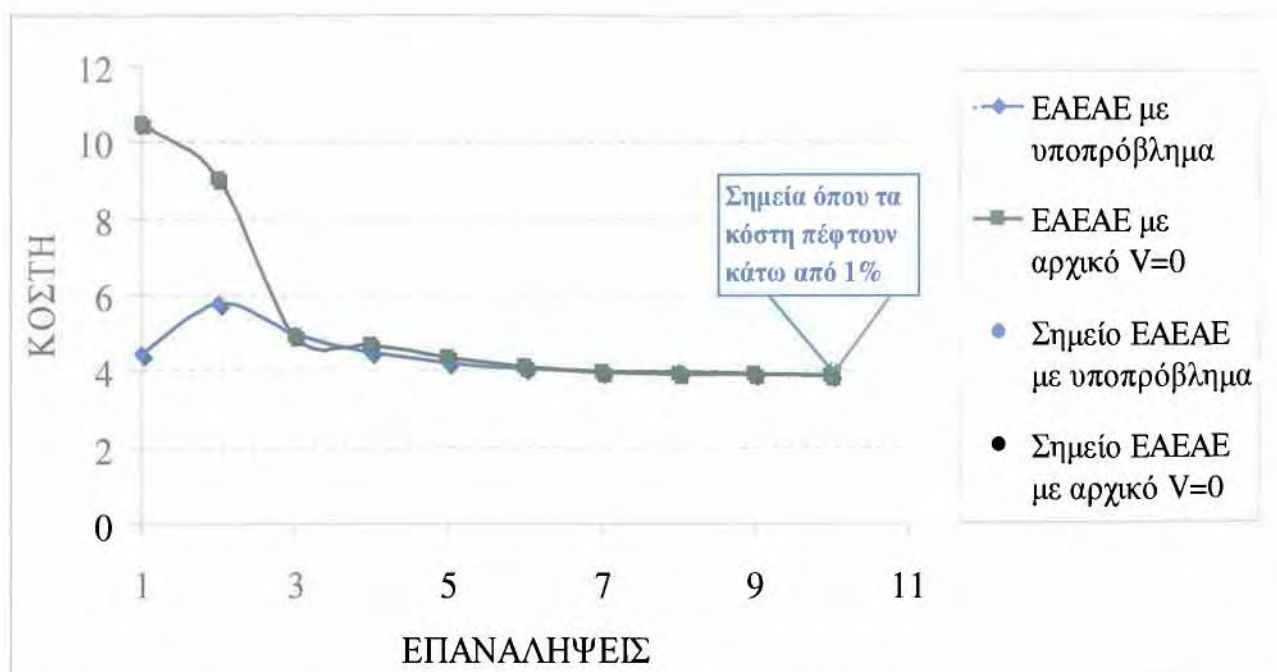
**Πίνακας 74.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 30, ECFCE



**Διάγραμμα 15.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 30, ECFCE

Επανάληψη	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με υποπροβλήματα	Συνολικό κόστος, ΣΤΟΤ από προσομοίωση με αρχικό V=0	Η διάφορα του συνολικού κόστους σε απόλυτη τιμή
1	4,4213	10,4934	6,0721
2	5,7528	9,0069	3,2541
3	4,9734	4,9104	0,063
4	4,5046	4,6801	0,1755
5	4,2078	4,3348	0,127
6	4,0604	4,1057	0,0453
7	3,9893	3,9865	0,0028
8	3,9518	3,9372	0,0146
9	3,9115	3,9175	0,006
10	*3,8896*	*3,8958*	0,0062

**Πίνακας 75.** Σύγκριση αποτελεσμάτων για την περίπτωση 31, ΕΑΕΑΕ



**Διάγραμμα 16.** Διάγραμμα σύγκρισης για την περίπτωση 31, ΕΑΕΑΕ

Στον επόμενο συγκριτικό πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε σε ποια επανάληψη τα κόστη πέφτουν κάτω από 1% με προσομοίωση, επίσης και την επανάληψη από την ακριβή αλγόριθμο για το μέσο προσδοκώμενο κόστος, J και τα αντίστοιχο ποσοστιαίο σφάλμα για τις περιπτώσεις από 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC) και για τις περιπτώσεις 29 έως 31 (BBDBB, ECFCE, EAEAE).

Περίπτωση	Επαναλήψεις	Επαναλήψεις από την ακριβή αλγόριθμο	Συνολικό κόστος, CTOT από προσομοίωση	Μέσο προσδοκώμενο κόστος, J	Ποσοστιαίο Σφάλμα %
13,ACDCA με υποπρόβλημα	10	35	2,6520	2,6520	0,000000
13,ACDCA με V=0	10	35	2,6588	2,6520	0,256410
14,DCCAA με υποπρόβλημα	10	71	3,0010	3,0016	0,019990
14,DCCAA με V=0	10	71	3,0104	3,0016	0,293177
15,DCAAC με υποπρόβλημα	10	129	3,5080	3,4916	0,469690
15,DCAAC με V=0	11	129	3,5090	3,4916	0,498339
16,DACAC με υποπρόβλημα	10	129	3,7105	3,6572	1,457390
16,DACAC με V=0	10	129	3,7210	3,6572	1,744504
29,BBDBB με υποπρόβλημα	10	48	2,9488	2,9440	0,163043
29,BBDBB με V=0	10	48	2,9596	2,9440	0,529891
30,ECFCE με υποπρόβλημα	10	87	4,4020	4,0764	7,987439
30,ECFCE με V=0	12	87	4,2574	4,0764	4,440192
31,EAEAE με υποπρόβλημα	10	65	3,8896	3,8510	1,002337
31,EAEAE με V=0	10	65	3,8958	3,8510	1,163334

**Πίνακας 76.** Συγκριτικό πίνακα αποτελεσμάτων για τις περιπτώσεις από 13 έως 16 και από 29 έως 31.

## 5.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 5 ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα των 5 προϊόντων συμπεραίνουμε ότι όταν επιλύουμε τις περιπτώσεις 13 έως 16 με αρχικό διαφορικό κόστος ( $V=0$ ) το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους στην 1<sup>η</sup> περίοδο είναι υψηλό, δηλαδή 257.98%, 216.28%, 171.87%, 186.93% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC). Ενώ στη συνέχεια αρχίζει να πέφτει και στη 15<sup>η</sup> περίοδο γίνεται 0.056%, 0.166%, 0.071%, 0.0164% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC). Το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους από τα αποτελέσματα που πρόεκυψαν με τον 2<sup>ο</sup> τρόπο επίλυσης του προβλήματος χρησιμοποιώντας το διαφορικό κόστος που προκύπτει από τα υποπροβλήματα είναι ότι στην 1<sup>η</sup> περίοδο έχουμε σφάλμα 32.34%, 19.88%, 16.43%, 7.95% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC). Ενώ στη 15<sup>η</sup> περίοδο γίνεται 0.083%, 0.0033%, 0.065%, 0.145% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC). Από την σύγκριση των δυο τρόπων επίλυσης του προβλήματος συμπεραίνουμε ότι στην 1<sup>η</sup> περίοδο το συνολικό κόστος που προκύπτει με αρχικό διαφορικό κόστος ( $V=0$ ) είναι 2-3 φορές μεγαλύτερο από το συνολικό κόστος που προκύπτει με διαφορικό κόστος από υπό-προβλήματα. Όμως στη συνέχεια η διαφορά μικραίνει κατά πολύ και στη 15<sup>η</sup> περίοδο είναι σχεδόν ίση για κάθε περίπτωση από 13 έως 16 (ACDCA, DCCAA, DCAAC, DACAC). Επίσης από την επίλυση των περιπτώσεων από 29 έως 31 συμπεραίνουμε ότι και σ' αυτές τις περιπτώσεις το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους στην 1<sup>η</sup> περίοδο είναι υψηλό, δηλαδή 239.39%, 132.87%, 172.48% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις από 29 έως 31 (BBDBB, ECFCE, EAEAE). Ενώ στη 40<sup>η</sup> περίοδο γίνεται 0.0169%, 0.206%, 0.080% για τις αντίστοιχες περιπτώσεις από 29 έως 31 (BBDBB, ECFCE, EAEAE). Κατά συνέπεια και οι δυο τρόποι επίλυσης του προβλήματος συγκλίνουν πολύ γρήγορα στο μέσο προσδοκώμενο κόστος και το συνολικό κόστος σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις που επιλύσαμε πέφτει κάτω από 1% στη 10<sup>η</sup> περίοδο.

## 6. ΣΥΝΟΨΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία μελετήσαμε το πρόβλημα του χρονικού προγραμματισμού διεργασιών συνεχούς παραγωγής με χρήση δυναμικού προγραμματισμού. Το πρόβλημα μορφοποιήθηκε ως μια Μαρκοβιανή Διαδικασία Αποφάσεων (MDP) και επιλύθηκε με δυναμικό προγραμματισμό και παράλληλα με προσομοίωση για δυο διαφορετικές βαθμίδες προϊόντων και συγκεκριμένα για 4 και 5 προϊόντα. Ενώ σε κάθε πρόβλημα εξετάστηκαν διάφορες περιπτώσεις ζήτησεων επιλύοντας με δυο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτα επιλύσαμε όλες τις περιπτώσεις με αρχικό διαφορικό κόστος ( $V=0$ ). Στη συνέχεια διασπάμε τα προβλήματα 4 και 5 προϊόντων σε (N-2) τριτοβάθμια υποπροβλήματα και τα λύνουμε χρησιμοποιώντας τον ακριβή αλγόριθμο. Όπου από τα αποτελέσματα αυτών των τριτοβάθμιων προβλημάτων παίρνουμε το διαφορικό κόστος και τα επιλύουμε όλες τις περιπτώσεις 4 και 5 προϊόντων χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα διαφορικά κόστη που προκύπτουν από τα τριτοβάθμια υποπροβλήματα. Για όλες τις περιπτώσεις 4 και 5 προϊόντων δόθηκε το ποσοστιαίο σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους. Επίσης έγινε σύγκριση αποτελεσμάτων που προέκυψαν από δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων. Από τα οποία βγάζουμε συμπέρασμα ότι σε όλες τις περιπτώσεις στην αρχή κάθε περιόδου το σφάλμα του μέσου προσδοκώμενου κόστους ήταν πολύ υψηλό ενώ στη συνέχεια παρατηρούμε ότι το σφάλμα πέφτει και στη 15<sup>η</sup> περίοδο είναι σχεδόν μηδενικό. Κατά συνέπεια και οι δύο τρόποι επίλυσης του προβλήματος συγκλίνουν πολύ γρήγορα στο μέσο προσδοκώμενο κόστος και το συνολικό κόστος σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις που επιλύσαμε πέφτει κάτω από 1% στη 10<sup>η</sup> περίοδο.

Μια κατεύθυνση για μελλοντική εργασία θα ήταν επίλυση του ίδιου προβλήματος χρησιμοποιώντας για κάθε προϊόν μια ξεχωριστή αποθήκη τελικών προϊόντων και όχι μόνο μια κοινή αποθήκη τελικών προϊόντων.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### **Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία**

- Anupindi, R., Tayur, S. 1998. Managing stochastic multiproduct systems: model, measures, and analysis. *Operations Research* 46 (3) S98-S111.
- Bourland, K.E., Yano, C.A. 1994. The strategic use of capacity slack in the economic lot scheduling problem with random demand. *Management Science* 40 (12) 1690-1704.
- Chase, C., Serrano, J., Ramadge, P.J. 1993. Periodicity and chaos from switched flow systems: contrasting examples of discretely controlled continuous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 38 (1), 70-83.
- Elhafsi, M., Bai, S.X. 1997. Optimal and near-optimal control of a two-part-type stochastic manufacturing system with dynamic setups. *Production and Operations Management* 6 (4) 419-438.
- Elmaghraby, S.E. 1978. The economic lot scheduling problem (ELSP): review and extensions. *Management Science* 24 (6), 587-598.
- Federgruen, A., Katalan, Z. 1996. The stochastic economic lot scheduling problem: cyclical base stock policies with idle times. *Management Science* 42 (6) 783-796.
- Fransoo, J.C., Sridharan, V., Bertrand, J.W.M. 1995. A hierarchical approach for capacity coordination in multiple products single-machine production systems with stationary stochastic demands. *European Journal of Operational Research* 86 (1) 57-72.
- Gallego, G. 1990. Scheduling the production of several items with random demands in a single facility. *Management Science* 36 (12) 1579-1592.
- Gallego, G. 1994. When is a base stock policy optimal in recovering disrupted cyclic schedules? *Naval Research Logistics* 41 (1) 317-333.
- Graves, S.C. 1980. The multi-product production cycling problem. *AIIE Transactions* 12 (3), 233-240.
- Karmarkar, U.S., Yoo, J. 1994. The stochastic dynamic product cycling problem. *European Journal of Operational Research* 73 (2), 360-373.
- Kimemia, J.G., Gershwin, S.B. 1983. An algorithm for the computer control of production in flexible manufacturing systems. *IIE Transactions* 15 (4), 353-362.
- Leachman, R.C., Gascon, A. 1998. A heuristic policy for multi-item, single-machine production systems with time-varying stochastic demands. *Management Science* 34 (3) 377-390.



- Liberopoulos, G., Kozanidis, G. Hatzikonstantinou, O. 2009. Production scheduling of a multigrade PET resin plant. *Computers and Chemical Engineering* (in press: doi:10.1016/j.compchemeng.2009.05.017)
- Liberopoulos, G., Caramanis, M. 1997. Numerical investigation of optimal policies for production flow control and set-up scheduling: lessons from two-part-type failure prone FMSs. *International Journal of Production Research* 35 (8), 2109-2133.
- Markowitz, D.M., Reiman, M.I., Wein, L.M. 2000. The stochastic economic lot scheduling problem: heavy traffic analysis of dynamic cyclic policies. *Operations Research* 48 (1) 136-154.
- Markowitz, D.M., Wein, L.M. 2001. Heavy traffic analysis of dynamic cyclic policies: a unified treatment of the single machine scheduling problem. *Operations Research* 49 (2) 246-270.
- Salomon, M. 1991. Deterministic lotsizing models for production planning. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin.
- Sharifnia, A., Caramanis, M., Gershwin, S.B. 1991. Dynamic setup scheduling and flow control in manufacturing systems. *Discrete Event Dynamic Systems* 1 (2) 149-175.
- Sox, C.R., Jackson, P.L., Bowman, A., Muckstadt, J.A. 1999. A review of the stochastic lot scheduling problem. *International Journal of Production Economics* 62 (3), 181-200.
- Sox, C.R., Muckstadt, J.A. 1997. Optimization-based planning for the stochastic lot-sizing problem. *IIE Transactions* 29 (5), 349-357.
- Qiu, J., Loulou, R. 1995. Multiproduct production/inventory control under random demands. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (2), 350-356.
- Vergin, R.C., Lee, T.N. 1978. Scheduling rules for the multiple product single-machine system with stochastic demand. *INFOR* 16 (1), 64-73.
- Winands, E.M.M., Adan, I.J.B.F., van Houtum, G.J. 2005. The stochastic economic lot scheduling problem: a survey. Working paper. Beta Research School for Operations Management and Logistics, Technical University of Eindhoven.
- Zipkin, P.H. 1986. Models for design and control of stochastic multi-item batch production systems. *Operations Research* 34 (1) 91-104.

## Ελληνική Βιβλιογραφία

Καλαντζής Γ. « Το στοχαστικό πρόβλημα του βέλτιστου χρονικού προγραμματισμού παρτίδων παραγωγής σε διεργασίες συνεχούς παραγωγής » , Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2009.

Κοζανίδης Γ. « Ακέραιος Προγραμματισμός & Συνδυαστική Βελτιστοποίηση » , Διδακτικές Σημειώσεις, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος 2005, σελ.48-50.

Κουϊκόγλου Σ.Β. « Προσομοίωση » Διδακτικές Σημειώσεις, Τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά 2002, σελ.5-9.

Χατζηκωνσταντίνου Ο. « Βέλτιστη επιλογή μεγέθους παρτίδας και χρονικός προγραμματισμός συστήματος παραγωγής πολλαπλών προϊόντων με 2 σειριακά στάδια αποθήκευσης και τυχαία ζήτηση » , Μεταπτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2009.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ακολουθούν τα προγράμματα τα οποία είναι σε γλώσσα MATLAB 7.7.0.471(R2008b). Η δομή αυτών των προγραμμάτων δόθηκε για χρήση αυτής της διπλωματικής εργασίας από το εργαστήριο Οργάνωσης Παραγωγής & Βιομηχανικής Διοίκησης του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

- Αλγόριθμος 4 προϊόντων με διαφορεικό κόστος  $V=0$  για συνολικό κόστος που πέφτει κάτω από 1% με χρήση και της προσομοίωσης.

```
for n=1:4
    for x1=0:X
        for x2=0:X-x1
            for x3=0:X-x1-x2
                for x4=0:X-x1-x2-x3
                    V(n,x1+1,x2+1,x3+1,x4+1)=0;
                end
            end
        end
    end
end

%MAIN LOOP
cont=1;
count=0;
tic
cost=0;

while cont==1|count<10
    count=count+1
    costp=cost;
    for n=1:4
        for x1=0:X
            for x2=0:X-x1
                for x3=0:X-x1-x2
                    for x4=0:X-x1-x2-x3
                        C=BIG;
                        for m=max(1,n-1):min(n+1,N)
                            if m~=n
                                C1=CC;
                            else
                                C1=0;
                            end
                            PROD=PMAX;
                            if x1+x2+x3+x4+PMAX>X
                                PROD=X-x1-x2-x3-x4;
                                C1=C1+CS*(PMAX-PROD);
                            end

                            xx=[x1,x2,x3,x4];

                            for d1=1:DIM(1)
                                for d2=1:DIM(2)
                                    for d3=1:DIM(3)
```









