



**Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Αξιολόγηση μεθόδων εξειδίκευσης σε υποδείγματα
ARMA(p,q) με χρήση προσομοιώσεων Monte-Carlo
και διενέργεια προβλέψεων.**

Παναγιώτης Μ. Τσιτσίρης

Επιβλέπων καθηγητής: Ηλίας Κεβόρκ

**Βόλος
Ιανουάριος, 2010**

Υπεύθυνη Δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών στην Εφαρμοσμένη Οικονομική του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Βόλος, Ιανουάριος 2010

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας κ. Ηλία Κεβόρκ για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθεια που μου προσέφερε σε όλη την διάρκεια εκπόνησης αυτής, καθώς και την καθοδήγηση του, την φιλική του στάση και τα ουσιαστικά σχόλια του.

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη	5
Abstract	5
Κεφάλαιο 1	7
Εισαγωγή στα υποδείγματα χρονοσειρών και περιγραφή του προβλήματος	7
1.1 Περιγραφή των υποδειγμάτων της εργασίας και ορισμοί	7
1.2 Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης	11
1.3 Παρουσίαση του προβλήματος	14
Κεφάλαιο 2	18
Περιγραφή των μεθόδων εξειδίκευσης των υποδειγμάτων	18
2.1 Το πρόβλημα της εξειδίκευσης	18
2.2 Το κριτήριο Predictive Least Squares	24
Κεφάλαιο 3	27
Εκτίμηση Υποδειγμάτων ARMA(p,q)	27
3.1 Υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το AR(p)	27
3.2 Υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το MA(q)	29
3.3 Υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το ARMA(p,q)	30
Κεφάλαιο 4	32
Μεθοδολογία της έρευνας και αποτελέσματα	32
4.1 Περιγραφή της ακολουθούμενης μεθόδου	32
4.2 Αποτελέσματα	37
Κεφάλαιο 5	51
Επιπτώσεις λανθασμένης εξειδίκευσης στις προβλέψεις	51
5.1 Προβλέψεις με ARMA υποδείγματα	51
5.2 Αποτελέσματα	57
Κεφάλαιο 6	59
Συμπεράσματα	59
6.1 Συμπερασματικά σχόλια	59
6.2 Σκέψεις για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος	60
Βιβλιογραφία	61

Περίληψη

Η συγκεκριμένη εργασία ερευνά την επίδοση διαφόρων κριτηρίων επιλογής τάξεως, τα οποία χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά για την εξειδίκευση ενός υποδείγματος. Ο έλεγχος για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών του υποδείγματος χρησιμοποιείται, σε συνδυασμό με τα κριτήρια επιλογής Akaike Information Criterion (AIC), Bayesian Information Criterion (BIC), Hannan and Quinn Criterion (HQ) και Predictive Least Squares (PLS), για να βρεθεί η αποδεκτή, σύμφωνα με την στατιστική θεωρία, επίδοση αυτών. Τα συμπεράσματα της εργασίας αυτής είναι πως το PLS έχει σημαντική ισχύ μόνο όταν είναι υποψήφια για εκλογή αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, ενώ το SIC έχει τη μεγαλύτερη επίδοση και από τα τέσσερα κριτήρια. Επίσης στις τελικές προβλέψεις που γίνονται έχοντας χρησιμοποιήσει στην εξειδίκευση του υποδείγματος το SIC, η κάλυψη της πρόβλεψης κυμαίνεται από 90% έως 94,5% ανεξαρτήτως, μεγέθους δείγματος και βαθμού αυτοσυσχέτισης.

Abstract

This study investigates the performance of various commonly applied order selection criteria in identifying the order of a model. The hypothesis test for the statistical significance of the coefficients of the model is used, in conjunction with four selection criteria, Akaike Information Criterion (AIC), Bayesian Information Criterion (BIC), Hannan and Quinn Criterion (HQ) and Predictive Least Squares (PLS), in order to find the acceptable, according to statistical theory, performance of those criteria. The conclusions of this study are that PLS has a significant performance, only when the candidate models are autoregressive, while the SIC has the best performance of the four. Also in the final predictions which have been made, using models being identified with SIC, the coverage of the forecast is between 90% and 94.5%, whatever the sample size or the degree of autocorrelation are.

Λέξεις Κλειδιά: Εξειδίκευση ARMA υποδειγμάτων, p-value, Monte Carlo, Προβλέψεις, κριτήρια επιλογής τάξης, AIC, SIC, HQ, PLS.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα υποδείγματα χρονοσειρών και περιγραφή του προβλήματος

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που θα μας είναι απαραίτητοι για την περιγραφή και κατανόηση του προβλήματος, το οποίο στο κεφάλαιο τέσσερα θα προσεγγίσουμε εμπειρικά.

1.1 Περιγραφή των υποδειγμάτων της εργασίας και ορισμοί

Για την περιγραφή των παρακάτω υποδειγμάτων ακολουθούμε τον Wei (2006) καθώς και τους Box, Jenkins και Reinsel (2008). Εκεί μπορεί ο αναγνώστης να βρει αναλυτικότερες πληροφορίες για κάθε υπόδειγμα.

1.1.1 Λευκός θόρυβος

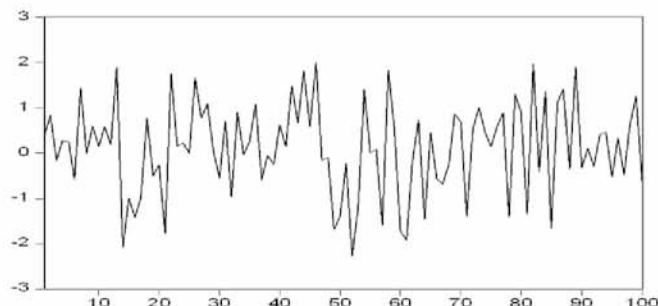
Η διαδικασία του λευκού θορύβου ε_t είναι μια ακολουθία ασυσχέτιστων τυχαίων μεταβλητών για την οποία υποθέτουμε για κάθε t :

- $E(\varepsilon_t) = 0$,
- $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \sigma^2$ και
- $E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = 0$, για $s \neq t$,

όπου ε_t τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και κατανέμονται κανονικά με μέσο 0 και σταθερή διακύμανση σ^2 (*i.i.d* $N(0, \sigma^2)$). Μαθηματικά εάν μ η μέση τιμή της σειράς, η μορφή μιας διαδικασίας λευκού θορύβου αναπαριστάται ως:

$$Y_t - \mu = \varepsilon_t \quad \text{για } t = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Διάγραμμα 1.1: Γραφική απεικόνιση μιας διαδικασίας λευκού θορύβου με $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = 1$



1.1.2 Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα AR (p)

Θεωρούμε την αυτοπαλίνδρομη διαδικασία Y_t ($t=1, 2, \dots, n$) τάξεως p , συμβολισμένη με $AR(p)$, η οποία έχει την παρακάτω μορφή:

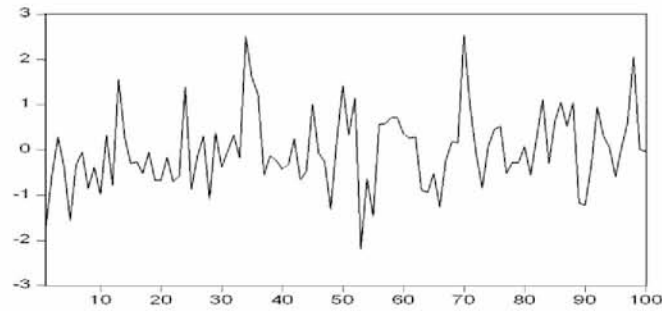
$$Y_t - \mu = \sum_{i=1}^p \phi_i (Y_{t-i} - \mu) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

όπου ϕ_i είναι οι αυτοπαλίνδρομοι συντελεστές και Όταν οι ρίζες της εξίσωσης $1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i = 0$ βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου η διαδικασία είναι στάσιμη στο μέσο και στη διακύμανση, οπότε επαναπαραμετροποιώντας την (1.2) λαμβάνουμε τη σχέση:

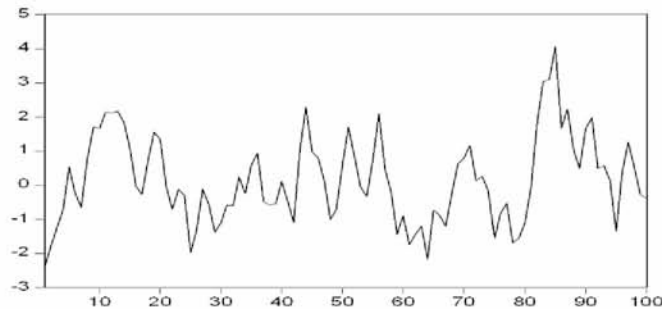
$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (1.3)$$

$$\text{όπου } \phi_0 = \mu \left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i \right)$$

Διάγραμμα 1.2: Γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων μιας AR(1) διαδικασίας, με $\phi = 0,2$



Διάγραμμα 1.3: Γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων μιας AR(1) διαδικασίας, με $\phi = 0,8$



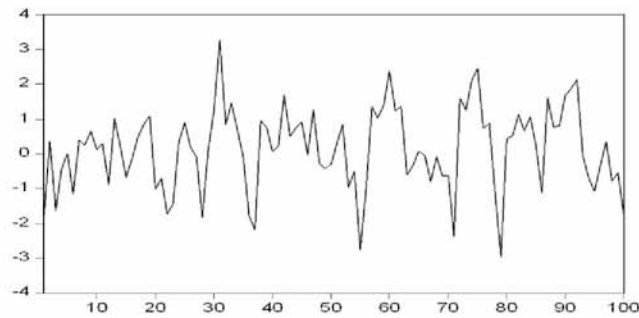
1.1.3 Υποδείγματα κινητού μέσου MA(q)

Το υπόδειγμα κινητού μέσου τάξεως q γράφεται ως:

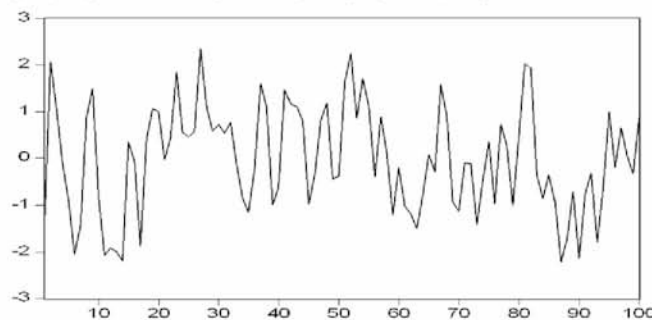
$$Y_t - \mu = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}, \quad t=1,2,\dots,n \quad (1.4)$$

όπου θ_j είναι οι συντελεστές κινητού μέσου και ε_t όπως παραπάνω. Το $MA(q)$ είναι πάντα στάσιμο για όλες τις τιμές των συντελεστών θ_j αλλά αντιστρέψιμο όταν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης: $1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i = 0$ βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Το $MA(1)$ μπορεί να γραφεί και σαν $AR(\infty)$, (Box, Jenkins και Reinsel, 2008)

Διάγραμμα 1.4: Γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων μιας MA(1) διαδικασίας με $\theta = 0,2$



Διάγραμμα 1.5: Γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων μιας MA(1) διαδικασίας με $\theta = 0,8$



1.1.4 Αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα κινητού μέσου ARMA(p,q)

Το μεικτό αυτοπαλίνδρομο κινητού μέσου υπόδειγμα τάξεως (p, q) δίνεται από τον τύπο:

$$Y_t - \mu = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \phi_i (Y_{t-1} - \mu) + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad t=1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

Το υπόδειγμα αυτό είναι συνδυασμός p αυτοπαλίνδρομων όρων και q όρων κινητού μέσου.

Η σειρά είναι στάσιμη όταν όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $1 - \sum_{i=1}^p \phi_i x^i = 0$ είναι

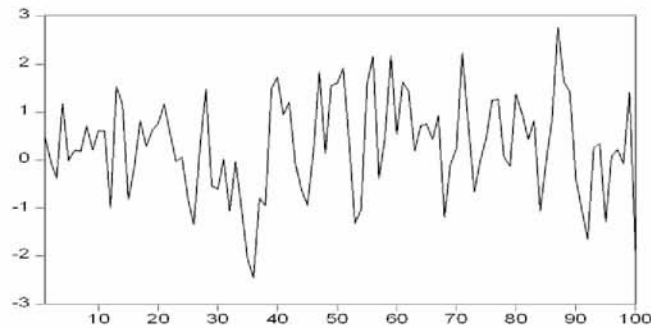
κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερες από την μονάδα. Για να είναι η σειρά αντιστρέψιμη θα πρέπει

όλες οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $1 - \sum_{i=1}^q \theta_i x^i = 0$ να είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγα-

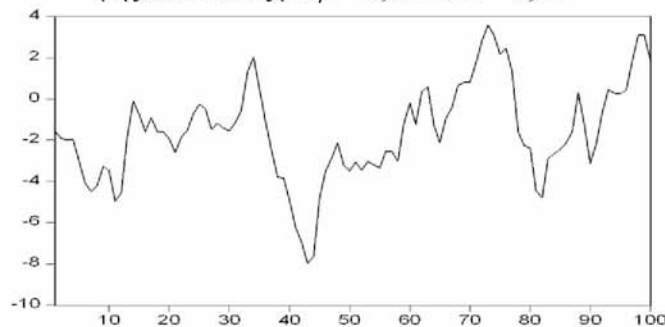
λύτερες από την μονάδα.

Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε με στάσιμα και αντιστρέψιμα υποδείγματα ARMA.

Διάγραμμα 1.6: Γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων μιας ARMA(1,1) στάσιμης και αντιστρέψιμης διαδικασίας με $\phi = 0,2$ και $\theta = 0,2$.



Διάγραμμα 1.7: Γραφική απεικόνιση των παρατηρήσεων μιας ARMA(1,1) στάσιμης και αντιστρέψιμης διαδικασίας με $\phi = 0,8$ και $\theta = 0,8$.



1.2 Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης

Στο τμήμα αυτό, υπενθυμίζουμε τους ορισμούς των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας διαδικασίας, όπως αυτοί δίνονται από τον Hamilton (1994), και περιγράφουμε την συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών για διάφορα υποδείγματα χρονολογικών σειρών.

Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ορίζεται σαν τον λόγο της συνδιακυμάνσεως δύο μεταβλητών Y_t και Y_{t+s} , προς το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών των διακυμάνσεών τους, όπου s παριστάνει την χρονική υστέρηση της μεταβλητής. Αλγεβρικά:

$$\rho_s = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+s})}{\sqrt{Var(Y_t)Var(Y_{t+s})}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} \quad (1.6)$$

με γ_s να παριστάνει την αυτοσυνδιακύμανση των παρατηρήσεων Y_t και Y_{t+s} της ίδιας μεταβλητής που απέχουν μεταξύ τους κατά s . Για $s=0$ τότε $\gamma_0 = Var(Y_t)$. Αναφέρουμε επίσης και την έννοια των συντελεστών μερικής αυτοσυσχέτισης ρ_{ss} , οι οποίοι προκύπτουν από την λύση του συστήματος των εξισώσεων Yule-Walker:

$$\rho_s = \rho_{1s}\rho_{s-1} + \rho_{2s}\rho_{s-2} + \dots + \rho_{ss}\rho_{s-p} \quad (1.7)$$

για $s = 1, 2, \dots, p$, εκφραζόμενοι ως συνάρτηση των συντελεστών αυτοσυσχέτισης.

Στον πίνακα 1.1¹ συνοψίζεται η συμπεριφορά των συντελεστών αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης για τις διαδικασίες του λευκού θορύβου, την αυτοπαλίνδρομη διαδικασία, την διαδικασία κινητού μέσου και την μεικτή αυτοπαλίνδρομη κινητού μέσου διαδικασία

Πίνακας 1.1: Η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης

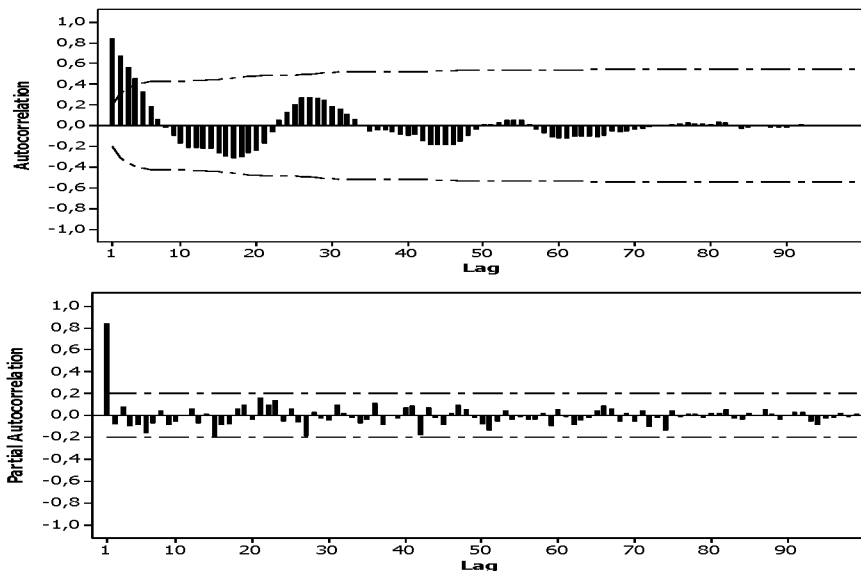
Διαδικασία	ρ_s	ρ_{ss}
Λευκού θορύβου	0	0
AR(1)	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_1 : <ul style="list-style-type: none"> ○ ευθέως αν $\phi > 0$ ○ εναλλάξ αν $\phi < 0$ 	$\rho_{11} \neq 0$ και $\rho_{ss} = 0$ για $s > 1$
AR(p)	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_p	$\rho_{ss} \neq 0$ για $s = 1, \dots, p$ και $\rho_{ss} = 0$ για $s > p$
MA(1)	$\rho_1 \neq 0$ και $\rho_s = 0$ για $s > 1$	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_{11}
MA(q)	$\rho_s \neq 0$ για $s = 1, \dots, q$ και $\rho_s = 0$ για $s > q$	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_{qq}
ARMA(1,1)	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_1	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_{11}
ARMA(p,q)	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_q	Φθίνουν προς το μηδέν από ρ_{pp}

Πηγή: Box, Jenkins και Reinsel (2008).

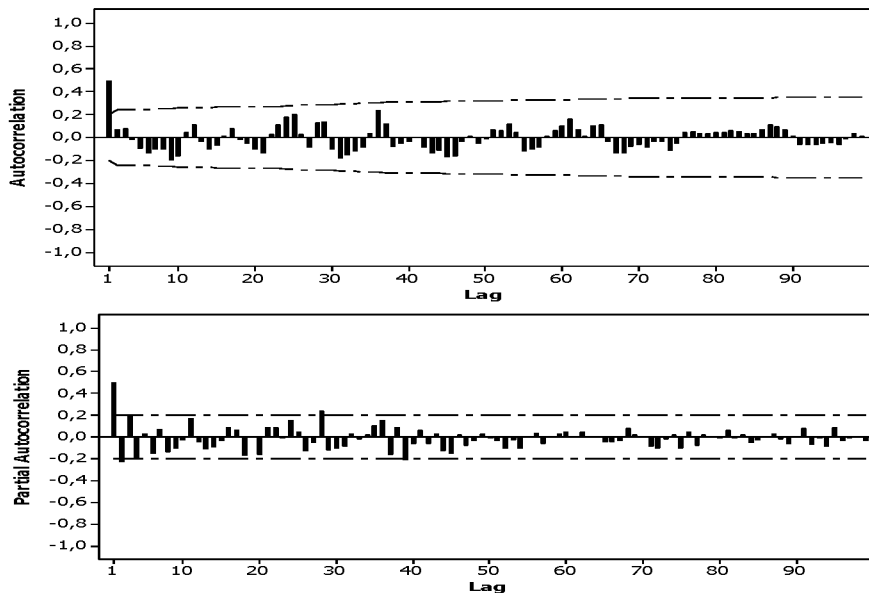
¹ Στο πίνακα παρουσιάζεται η συμπεριφορά των αληθινών συντελεστών αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης. Στην πράξη επειδή δεν είναι γνωστές εκτιμώνται από το δείγμα. Όπου αναφέρεται ότι οι συντελεστές είναι ίσοι ή διάφοροι του μηδενός εννοείται πως για το δείγμα ισχύει στατιστικά ίσοι με το μηδέν και στατιστικά διάφοροι του μηδενός. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε Box, Jenkins και Reinsel (2008).

Στα διαγράμματα 1.8 και 1.9, παρουσιάζουμε και διαγραμματικώς την συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης, όπως αυτές εκτιμώνται μέσω correlograms. Τα διαγράμματα αυτά έχουν δημιουργηθεί από προσομοιώσεις σειρών. Ο τρόπος κατασκευής αυτών των σειρών περιγράφεται στο τέταρτο κεφάλαιο.

Διάγραμμα 1.8: Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας AR(1) διαδικασίας με $\phi = 0,8$



Διάγραμμα 1.9: Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας MA(1) διαδικασίας με $\theta = 0,8$



Στην διαδικασία του λευκού θορύβου, η αυτοσυσχέτιση μεταξύ των τιμών των τυχαίων μεταβλητών ε_t και ε_{t-1} είναι μηδενική, γεγονός που παριστάνεται και στα γραφήματα των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης. Σε αυτοπαλίνδρομες διαδικασίες

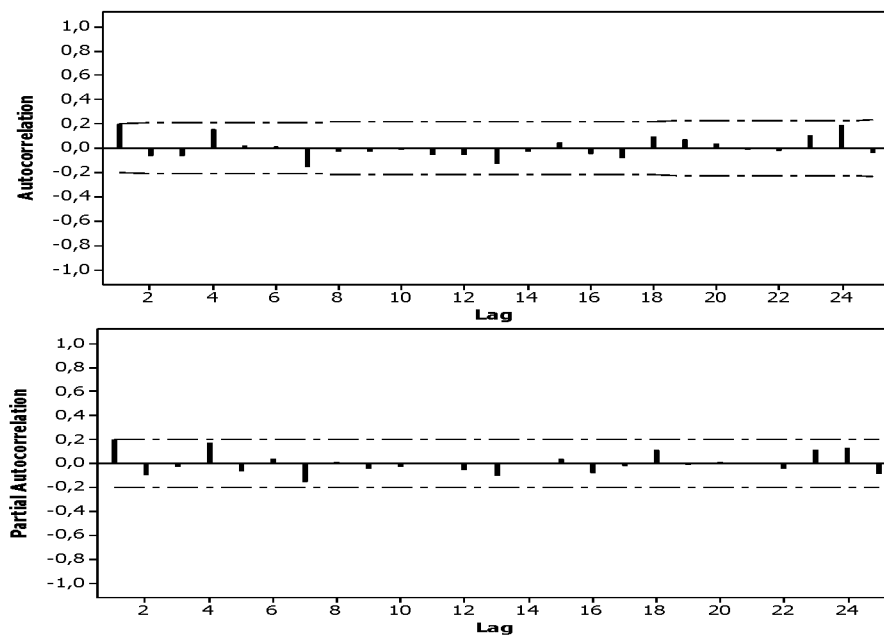
όπου η αυτοσυσχέτιση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών y_t και y_{t-1} είναι μικρή τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης δεν δίνουν εμφανώς την τάξη της αυτοπαλίνδρομης σειράς. Αντιθέτως όταν η τιμή της αυτοσυσχέτισης είναι μεγάλη οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης προσδιορίζουν ικανοποιητικά την τάξη της διαδικασίας. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε διαδικασίες MA(q) αλλά και ARMA(p,q).

1.3 Παρουσίαση του προβλήματος

Μετά την ανάγνωση της προηγούμενης παραγράφου θα πρέπει να έμεινε η εντύπωση στον αναγνώστη ότι η μελέτη των correlograms και μόνο θα μπορούσε σε ορισμένες περιπτώσεις να αποδειχτεί ανεπαρκής στην προσπάθεια σωστής εξειδίκευσης του υποδείγματος, για μικρά ϕ σε αυτοπαλίνδρομες διαδικασίες και αντίστοιχα για μικρά θ σε διαδικασίες κινητού μέσου. Πράγματι, η εμπειρική εξειδίκευση με την βοήθεια των correlograms είναι σχεδόν αδύνατη. Με μερικά παραδείγματα θα δείξουμε τι εννοούμε.

Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται το correlogram μιας προσομοιωμένης AR(1) σειράς σε μέγεθος δείγματος 25 παρατηρήσεων, όπου φαίνονται οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της σειράς.

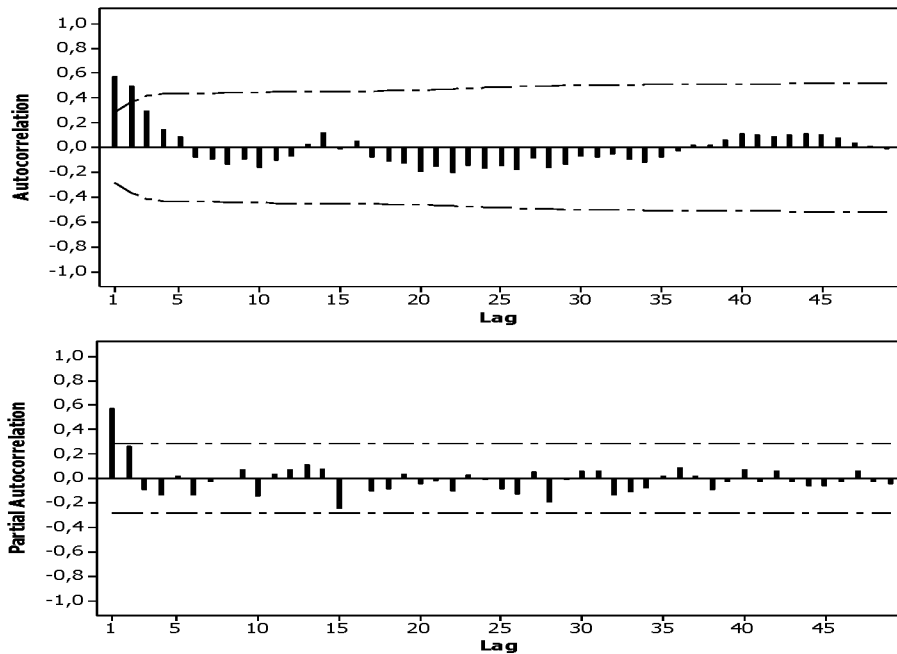
Διάγραμμα 1.10: Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας AR(1) διαδικασίας με $\phi = 0,2$



Παρατηρώντας το διάγραμμα 1.10 είναι φανερό πως δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βεβαιότητα μόνο από το correlogram εάν η σειρά προέρχεται από μια διαδικασία λευκού θορύβου,

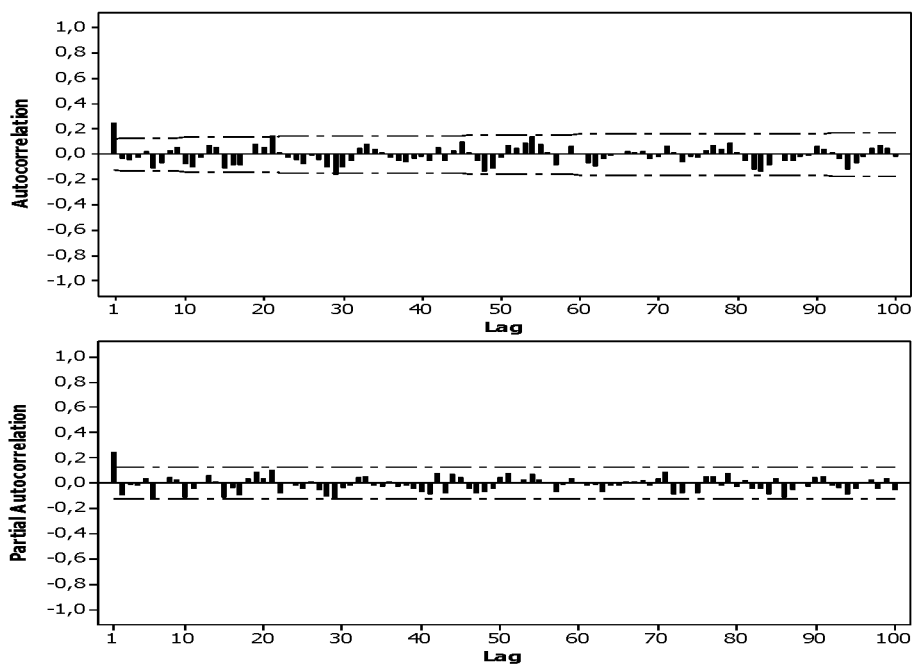
ή μία AR(1) διαδικασία ή μία MA(1) διαδικασία. Ανάλογο πρόβλημα υπάρχει και στο διάγραμμα 1.11, όπου χρησιμοποιείται δείγμα μεγέθους 50 παρατηρήσεων.

Διάγραμμα 1.11: Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας AR(1) διαδικασίας με $\phi = 0,2$



Το correlogram θα μπορούσε να προέρχεται από μια AR(1) σειρά αλλά και από μια AR(2). Ένα ακόμη παράδειγμα είναι αυτό του διαγράμματος 1.12.

Διάγραμμα 1.12: Γραφική απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας MA(1) διαδικασίας με $\theta = 0,2$



Από τη μελέτη του correlogram του διαγράμματος 1.12 θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι πρόκειται για μια MA(1) σειρά αλλά με την ίδια βεβαιότητα θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα γραφήματα αυτά παριστάνουν τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης μιας ARMA(1,1) σειράς ή ακόμα και μίας AR(1) σειράς. Βλέπουμε λοιπόν ότι όταν τα θ και ϕ είναι μικρά υπάρχει σοβαρό πρόβλημα στην διαδικασία εξειδίκευσης του υποδείγματος με χρήση των correlograms.

Όταν διαπιστωθεί μία τέτοια δυσκολία στην εξειδίκευση της διαδικασίας που παρήγαγε τα δεδομένα, τότε προσαρμόζουμε διαφορετικούς όρους πάνω στην σειρά και βλέπουμε με την βοήθεια της t-κατανομής εάν οι εκτιμημένοι συντελεστές του υποδείγματος είναι στατιστικά σημαντικοί. Για παράδειγμα στη σειρά του διαγράμματος 1.10 προσαρμόζουμε τον όρο AR(1) και έπειτα τον όρο MA(1). Εάν ο συντελεστής του AR(1) είναι στατιστικά σημαντικός και ο συντελεστής του MA(1) είναι στατιστικά μη σημαντικός τότε η σειρά προέρχεται από μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξεως. Στην περίπτωση που η σειρά προέρχεται από μια διαδικασία κινητού μέσου πρώτης τάξεως θα συμβεί το αντίθετο. Όμοια και στην σειρά του διαγράμματος 1.11 προσαρμόζουμε τον όρο AR(1) και στη συνέχεια τον όρο AR(2). Εάν μόνο ο AR(1) όρος είναι στατιστικά σημαντικός τότε η σειρά προέρχεται από μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξεως. Υπάρχει βέβαια και η πιθανότητα όλοι οι όροι που θα προσαρμόσουμε στη σειρά να μην είναι τελικά στατιστικά σημαντικοί. Τότε έχουμε την περίπτωση του λευκού θορύβου. Έτσι με τον τρόπο αυτό, με την οπτική εξέταση του correlogram δηλαδή και με τη βοήθεια της t-κατανομής, εξειδικεύουμε αναλόγως το υπόδειγμα.

Η εφαρμογή της διαδικασίας που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να δημιουργήσει ένα πολύ σοβαρό πρόβλημα. Εάν για παράδειγμα, το correlogram είναι αυτό του διαγράμματος 1.8 είναι πολύ πιθανό τα δεδομένα να προέρχονται από μία AR(1) διαδικασία. Εάν συν τοις άλλοις, ο συντελεστής του AR(1) είναι στατιστικά διάφορος του μηδενός, τότε ο μελετητής θα καταλήξει με βεβαιότητα σε αυτό το αποτέλεσμα. Τι γίνεται όμως όταν στην σειρά αυτή, η προσαρμογή και του MA(1) όρου δίνει στατιστικά διάφορο του μηδενός και τον συντελεστή του MA(1); Είναι σύμφωνα με την επιστήμη της στατιστικής ορθό να παραβλεφθεί η στατιστική σημαντικότητα του MA(1) όρου και να εξειδικευτεί τελικά το υπόδειγμα σαν αυτοπαλίνδρομο πρώτης τάξης;

Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται τα κριτήρια επιλογής τάξης τα οποία και θα παρουσιαστούν στη συνέχεια αναλυτικότερα. Τα κριτήρια αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο στα δείγματα στα οποία ο έλεγχος για τη στατιστική σημαντικότητα δεν καθορίζει μια και

μόνο εξειδίκευση για το υπόδειγμα, αλλά επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ανεξαρτήτως αυτού του περιορισμού.

Στην εργασία αυτή θα διερευνήσουμε την εγκυρότητα των κριτηρίων επιλογής τάξης σε συνδυασμό με την στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων των εκτιμηθέντων υποδειγμάτων. Από την στιγμή που η στατιστική σημαντικότητα εμπλέκεται στην όλη ανάλυση το ενδιαφέρον βρίσκεται στον τρόπο εκτίμησης των υποδειγμάτων αυτών. Ο τρόπος εκτίμησης είναι αυτός που υπαγορεύεται από την υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

Το πρόβλημα είναι η συμβολή του κάθε κριτηρίου στην ορθή ταυτοποίηση του πληθυσμιακού υποδείγματος. Στην περίπτωση της συγκεκριμένης εργασίας, τα πληθυσμιακά υποδείγματα είναι τα $AR(1)$ και $MA(1)$ με διαφορετικού βαθμούς αυτοσυσχέτισης και σε διάφορα μεγέθη δείγματος.

Το επιστέγασμα όλων των παραπάνω είναι οι προβλέψεις. Το ερώτημα τελικά είναι, οι μη ορθές εξειδικεύσεις, τι επίδραση έχουν στην εγκυρότητα των προβλέψεων. Ή αλλιώς, η εξειδίκευση ενός υποδείγματος και τα προβλήματα που προκύπτουν από αυτή τη διαδικασία είναι προβλήματα ουσιαστικά;

Στη συνέχεια της εργασίας, και πιο συγκεκριμένο στο κεφάλαιο 2, περιγράφονται διάφορες μέθοδοι εξειδίκευσης των $ARMA$ υποδειγμάτων και γίνεται μία επισκόπηση της βιβλιογραφίας γύρω από το θέμα αυτό. Στο κεφάλαιο 3 αναλύονται οι μέθοδοι εκτίμησης των $ARMA$ υποδειγμάτων και συγκεκριμένα αυτή της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας, καθώς είναι και αυτή που θα μας απασχολήσει στο ερευνητικό τμήμα της εργασίας. Στο κεφάλαιο 4 περιγράφεται η μεθοδολογία της έρευνας που ακολουθήθηκε καθώς και όλοι οι πίνακες με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτούς. Στο κεφάλαιο 5 αναλύονται οι επιπτώσεις που έχει μια λανθασμένη εξειδίκευση ενός υποδείγματος, στις προβλέψεις. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται κάποια βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν από την έρευνα και προτείνονται σκέψεις για περαιτέρω μελέτη του θέματος.

Κεφάλαιο 2

Περιγραφή των μεθόδων εξειδίκευσης των υποδειγμάτων

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια επισκόπηση των μεθόδων εξειδίκευσης των υποδειγμάτων που περιγράφηκαν στο εισαγωγικό κεφάλαιο και θα περιγραφεί εκτενέστερα το κριτήριο Predictive Least Squares.

2.1 Το πρόβλημα της εξειδίκευσης

Σύμφωνα με τους Yuan και Nelson (1994), το πρόβλημα της εξειδίκευσης ενός υποδείγματος κυρίως αντιμετωπίζεται :

- 1) σαν μια επαναληπτική διαδικασία (μέθοδος Box-Jenkins),
- 2) με την χρησιμοποίηση στατιστικών δεικτών για την μέτρηση της καλής προσαρμογής του υποδείγματος στα δεδομένα. Η επιλογή της τάξης βασίζεται στα σφάλματα πρόβλεψης (Akaike Information Criterion, Schwarz Information Criterion, Hannan-Quinn Criterion),
- 3) με την επιλογή της τάξης να βασίζεται στην προβλεπτική ικανότητα του υποδείγματος (Predictive Minimum Description Length, Predictive Least Squares)

Στη συνέχεια θα περιγραφούν οι τρεις παραπάνω μέθοδοι εκτιμήσεως της τάξης ενός υποδείγματος.

2.1.1 Μέθοδος Box-Jenkins

Δεν θα δώσουμε με πλήρη λεπτομέρεια την μέθοδο Box-Jenkins η οποία περιγράφεται αναλυτικότερα στο βιβλίο των Box, Jenkins και Reinsel (2008). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αρχή της φειδούς, όπου βάση αυτής η τάξη του υποψηφίου υποδείγματος επιλέγεται από την εξέταση της συμπεριφοράς των γραφημάτων των συντελεστών αυτοσυσχέτισης και μερικής

αυτοσυσχέτισης. Μετά την εκτίμηση όλων των υποψηφίων υποδειγμάτων εκτελούνται διαγνωστικοί έλεγχοι και όποιο από τα υποδείγματα περάσει όλα τους ελέγχους, αυτό τελικά επιλέγεται σαν το καταλληλότερο.

Το πρώτο βήμα της μεθόδου Box-Jenkins είναι να πραγματοποιηθεί στατιστικός έλεγχος των συντελεστών αυτοσυσχέτισης και μερικής αυτοσυσχέτισης της εξεταζόμενης σειράς. Με βάση τις πληροφορίες από τον πίνακα 1.1, εξάγεται το συμπέρασμα για το ποιά διαδικασία ακολουθεί η σειρά.

Το επόμενο βήμα είναι η εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος. Εάν η σειρά είναι $AR(p)$ τότε η εκτίμηση μπορεί να γίνει με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ή μέγιστης πιθανοφάνειας ή του συστήματος εξισώσεων Yule-Walker. Εάν όμως είναι $MA(q)$ τότε η εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να γίνει μόνο με μη γραμμικές μεθόδους, όπως αυτή της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας. Όμοια περίπτωση με αυτή των $MA(q)$ είναι και εκτίμηση των $ARMA(p, q)$ μοντέλων.

Το τελευταίο στάδιο είναι ο διαγνωστικός έλεγχος καλής προσαρμογής του μοντέλου στα δεδομένα. Αν το εκτιμημένο υπόδειγμα ταιριάζει πράγματι με τα δεδομένα τότε τα κατάλοιπα θα πρέπει να συμπεριφέρονται ως μια διαδικασία λευκού θορύβου. Ο έλεγχος αυτός των καταλοίπων μπορεί να γίνει με την $Q(\hat{\rho})$ στατιστική, την οποία κατασκεύασαν οι Ljung-Box (1978). Ο τύπος της συνάρτησης αυτής είναι ο:

$$Q(\hat{\rho}) = n(n+2) \sum_{k=1}^m (n-k)^{-1} \hat{\rho}_k^2 \quad (2.1)$$

όπου $\hat{\rho}_k$ είναι οι δειγματικές αυτοσυσχετίσεις των καταλοίπων και m είναι ο αριθμός των συντελεστών αυτοσυσχέτισης των οποίων την σημαντικότητα προσδιορίζει η στατιστική $Q(\hat{\rho})$. Η στατιστική $Q(\hat{\rho})$ ακολουθεί την κατανομή X^2 με $m-p-q$ βαθμούς ελευθερίας.

2.1.2 Μέθοδος στατιστικών δεικτών

Οι Broersen και Wensink (1991) αναφέρουν πως υπάρχουν τρεις τρόποι προσέγγισης του υπολογισμού της τάξης μιας διαδικασίας. Στον πρώτο τρόπο η διαδικασία αντιμετωπίζεται όπως ένα κλασσικό πρόβλημα γραμμικής παλινδρόμησης. Οι ίδιες οι παρατηρήσεις αντιμετωπίζονται σαν ανεξάρτητες και σαν εξαρτημένες ταυτόχρονα μεταβλητές. Εάν ο αριθμός των

παρατηρήσεων τείνει στο άπειρο τότε οι εκτιμήσεις των παραμέτρων γίνονται ίσες με τις πραγματικές τιμές τους. Δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ του σφάλματος πρόβλεψης και της διακύμανσης των καταλοίπων. Οι εξισώσεις Yule-Walker δίνουν την ακριβή σχέση μεταξύ των πραγματικών τιμών των παραμέτρων και των εκτιμήσεων των συνδιακυμάνσεων των παρατηρήσεων. Η προσέγγιση αυτή έχει σαν συνέπεια ότι οι εκτιμητές των παραμέτρων του μοντέλου που προκύπτουν είναι συνεπείς αλλά ασυμπτωτικά αναποτελεσματικοί

Μια δεύτερη προσέγγιση είναι μέσω της *ασυμπτωτικής θεωρίας*. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των παρατηρήσεων n είναι μεγάλος συγκρινόμενος με την μέγιστη υποψήφια τάξη. Η εξέταση των διαφορών μεταξύ μοντέλων όπου αυξάνεται η τάξη τους, θα προσδιορίσει ποιά θα είναι τελικά η τάξη που πρέπει να επιλεγεί. Έπειτα γίνεται η εκτίμηση των παραμέτρων του πραγματικού υποδείγματος σαν να ήταν αυτό που τελικά επιλέχθηκε. Στην προσέγγιση αυτή, σε αντίθεση με την πρώτη, υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ του σφάλματος πρόβλεψης και της διακύμανσης των καταλοίπων.

Η τρίτη προσέγγιση είναι βασισμένη στην *θεωρία των πεπερασμένων δειγμάτων*. Πεπερασμένα καλούνται τα δείγματα για τα οποία ισχύει $n < \infty$ και $q/n > \delta$, όπου δ μια μικρή τιμή (έστω 0,1). Η επίδραση που έχει η μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων παίζει σημαντικό ρόλο στην επιλογή της τελικής τάξης του υποδείγματος. Στην θεωρία αυτή βρίσκουμε και την έννοια της πεπερασμένου δείγματος διακύμανσης, v_i , μέσω της οποίας περιγράφεται η συμπεριφορά των διαφορετικών μεθόδων εκτίμησης των παραμέτρων. Σύμφωνα με το μέγεθος του δείγματος επομένως μπορεί να γίνει η επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου, η κατασκευή του οποίου είναι βασισμένη στην ανάλογη θεωρία.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικά από τα ασυμπτωτικά κριτήρια επιλογής τάξης μιας ARMA(p,q) διαδικασίας καθώς αυτά είναι που θα μας απασχολήσουν στο ερευνητικό κομμάτι της εργασίας. Για μια AR(p) και μια MA(q) διαδικασία τα παρακάτω κριτήρια μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν.

Υπάρχει αρκετά μεγάλη βιβλιογραφία γύρω από τα κριτήρια επιλογής τάξης. Αναλυτικότερη προσέγγιση των διαφορών αυτών κριτηρίων, με περισσότερες θεωρητικές αλλά και πρακτικές λεπτομέρειες, μπορεί να βρεθεί στους Beveridge και Oickle (1994), στους de Gooijer et al. (1985) στους Stoica et al. (1986) και στους Brockwell και Davis (1996).

Το *final prediction error* (FPE), αρχικά προτάθηκε από τον Akaike (1969,1970) για επιλογή τάξης σε AR(p) υποδείγματα. Ο Soderstrom το 1977 Beveridge και Oickle, 1994) το επέκτεινε στην επιλογή τάξης σε ARMA(p,q) υποδείγματα. Η λογική του κριτηρίου είναι πως με κάθε επιπλέον παράμετρο πάνω από τη καταλληλότερη τάξη του ARMA, το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων ελαττώνεται και το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων πρόβλεψης αυξάνεται. Επομένως αυτό μπορεί να γίνει ένα μέτρο για την καλή προσαρμογή του υποδείματος σε νέα δεδομένα. Το κριτήριο που ελαχιστοποιείται είναι το:

$$FPE = \hat{\sigma}^2 \frac{n+p+q}{n-p-q} \quad (2.2)$$

όπου $\hat{\sigma}^2$ είναι η εκτίμηση της διακύμανσης σ^2 των καταλοίπων της παλινδρόμησης,

n είναι το μέγεθος του δείγματος, p η τάξης της αυτοπαλινδρομής διαδικασίας και q η τάξη της κινητού μέσου διαδικασίας. Το Akaike information criterion (AIC) προτάθηκε από τον Akaike (1973) σαν βελτίωση του FPE:

$$AIC = -2n \log \hat{\sigma}^2 + 2(p+q+1) \quad (2.3)$$

Το κριτήριο αυτό σχεδιάστηκε ώστε να είναι ένας ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής του δείκτη Kullback-Leibler² του εκτιμημένου μοντέλου.

Ασυμπτωτικά έχουμε: $AIC = n \log FPE$

Το AIC σύμφωνα με τον Shibata (1980) είναι *ασυμπτωτικά αποτελεσματικό*, που σημαίνει πως επιλέγει το υποψήφιο μοντέλο το οποίο ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της πρόβλεψης. Μερικές από τις εμπειρικές μελέτες στις οποίες το κριτήριο AIC κάνει επιτυχή ταυτοποίηση είναι του Akaike (1977), του Ozaki (1977) και των Larimore & Mehra (1985).

Οι Jones (1975), Shibata (1976) και Sneek (1984) έδειξαν με εμπειρικές μελέτες τους πως όταν το δείγμα είναι μικρό ή όταν το δείγμα είναι μεγάλο και η διάσταση του υποψήφιου μοντέλου σχετικά μικρή τότε το AIC δίνει μεροληπτικούς εκτιμητές και συνεπώς έχει την τάση να υπερεκτιμά την τάξη του υποδείματος, (Geweke και Meese, 1981). Προσπαθώντας να βελτιώσει τις ατέλειες του AIC, ο Akaike (1979) κατασκεύασε ένα *συνεπές* κριτήριο, ένα κριτήριο δηλαδή, του οποίου η πιθανότητα να επιλέξει την πραγματική τάξη, εάν αυτή είναι

² Για μια αναλυτική ερμηνεία και περιγραφή του δείκτη Kullback-Leibler βλέπε Cavanaugh (1999).

μέσα στις υπονήφιες τείνει στο ένα καθώς το δείγμα τείνει στο άπειρο. Το κριτήριο αυτό ονομάζεται Bayesian information criterion ή BIC:

$$BIC = (n - p - q) \log \left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{n - p - q} \right) + n \left(1 + \log(\sqrt{2\pi}) \right) + (p + q) \log \left(\frac{\sum_{t=1}^n Y_t^2 - n\hat{\sigma}^2}{p + q} \right) \quad (2.4)$$

όπου $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ είναι παρατηρήσεις που ανήκουν σε μια ARMA(p,q) διαδικασία. Ο Hannan (1980) δείχνει στην εργασία του την ανωτερότητα του SIC έναντι στο AIC. Οι Schwarz (1978) χρησιμοποιώντας την μπεϋνζιανή ανάλυση και Rissanen (1978) χρησιμοποιώντας διαφορετικό τρόπο προσέγγισης κατέληξαν στο κριτήριο Schwarz Information Criterion (SIC):

$$SIC = \log \hat{\sigma}^2 + \frac{p + q}{n} \log(n) \quad (2.5)$$

Οι Koehler και Murphree (1988) εκτίμησαν την τάξη ARMA(p,q) υποδειγμάτων με τα δύο κριτήρια χρησιμοποιώντας πραγματικές σειρές δεδομένων και συγκρίνοντας το μέσο απόλυτο ποσοστιαίο σφάλμα. Τα αποτελέσματα που πήραν ενίσχυσαν την άποψη πως το SIC υπερέρχει συγκρινόμενο με το AIC.

Οι Hannan και Quinn (1979) ασχολήθηκαν με την κατασκευή του κριτηρίου Hannan-Quinn:

$$HQ = \log \hat{\sigma}^2 + \frac{2(p + q)}{n} \log(\log(n)) \quad (2.6)$$

Το κριτήριο αυτό δίνει μία συνάρτηση σφάλματος η οποία μειώνεται αρκετά γρήγορα καθώς το μέγεθος του δείγματος μειώνεται ώστε να προκύψει τελικά ένα ισχυρά συνεπής εκτιμητής. Οι Hannan και Rissanen (1982) αντικατέστησαν τον όρο $\log(\log(n))$ στο κριτήριο με $\log(n)$ ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση του HQ. Ο Kavalieris (1991) όμως έδειξε πως το νέο κριτήριο έχει την τάση να υπερεκτιμά την τάξη του μοντέλου. Ο Hannan (1980) έδειξε πως το HQ και το SIC δίνουν συνεπείς εκτιμητές. Οι Hurvich και Tsai (1989) και οι Bedrick και Tsai (1994) μέσω προσομοιώσεων έδειξαν πως το κριτήριο HQ κινείται σε απόδοση μεταξύ των AIC και SIC με ανώτερο το τελευταίο.

Ένα γενικευμένο κριτήριο για την περίπτωση των ασυμπτωτικών κριτηρίων επιλογής τάξης είναι το General Information Criterion (GIC), (Broersen και Wensink, 1993):

$$GIC = \log \hat{\sigma}^2 + \frac{p+q}{n} a \quad (2.7)$$

Το GIC για $a=2$ είναι το AIC για $a=2\log(\log(n))$ είναι το HQ και για $a=\log(n)$ είναι το SIC.

2.1.3 Μέθοδος προβλεπτικής ικανότητας του υποδείγματος

Όταν τα δεδομένα προέρχονται από μια AR(p) διαδικασία τότε ο Rissanen (1986a) δημιούργησε το κριτήριο PMDL βασισμένο στην MDL μέθοδο του, (Rissanen, 1978). Η μέθοδος PMDL αναπτύχθηκε έτσι ώστε η επιλογή της τάξης να βασίζεται στην προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου. Το κριτήριο αυτό επιλέγει την τάξη αυτή για το μοντέλο, η οποία ελαχιστοποιεί την συνάρτηση:

$$PMDL_p = \sum_{t=p+1}^n \left\{ \log \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \frac{\hat{e}_{t-1}(p)}{\hat{\sigma}_{t-1}^2} \right\} \quad (2.8)$$

όπου $\hat{\sigma}_{t-1}^2$ είναι η εκτιμήτρια του καταλοίπων και $\hat{e}_{t-1}(p)$ η εκτίμηση του σφάλματος παλινδρόμησης της διαδικασίας για την παρατήρηση Y_{t-1} . Οι Davis και Hemerly (1989), οι Hannan, Mcdougall και Poskit (1989), οι Lai και Wei (1982) και ο Wei (1992) μελετούν διεξοδικά το PMDL και τις ιδιότητες του. Στην ειδική περίπτωση όπου η διακύμανση είναι σταθερή δηλαδή: $\hat{\sigma}_{t-1}^2 = \sigma^2$ τότε έχουμε το κριτήριο predictive least squares ή συντομογραφικά PLS με τύπο, (Rissanen, 1986b, Wei 1992):

$$PLS_p = \sum_{t=p+1}^n e_i^2(p) \quad (2.9)$$

Το κριτήριο PLS θα περιγραφεί αναλυτικότερα στην συνέχεια της εργασίας, καθώς είναι αυτό του οποίου η συμπεριφορά θα μελετηθεί σε σχέση με ορισμένα από τα προαναφερθέντα ασυμπτωτικά κριτήρια.

2.2 Το κριτήριο Predictive Least Squares

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε το κριτήριο Predictive Least Squares (PLS) όπως το αναφέρουν οι Yuan και Nelson (1994). Αρχικά ορίζουμε τους πίνακες $Y(n, p)$ και $X(n, p)$ ως:

$$Y(n, p) = [Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_n]' \quad (2.10)$$

και

$$X(n, p) = \begin{bmatrix} 1 & Y_p & Y_{p-1} & \dots & Y_1 \\ 1 & Y_{p+1} & Y_p & & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_{n-1} & Y_{n-2} & \dots & Y_{n-p} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος και $p < n$. Για μία $AR(p)$ διαδικασία η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει τον εκτιμητή:

$$\hat{\phi}(n, p) = [\hat{\phi}_0(n, p), \hat{\phi}_1(n, p), \dots, \hat{\phi}_n(n, p)]' \quad (2.12)$$

υπολογίζοντας τη σχέση:

$$\hat{\phi}(n, p) = [X'(n, p)X(n, p)]^{-1} X'(n, p)Y(n, p) \quad (2.13)$$

Ορίζουμε τώρα σαν: $e_i^2(p) = (Y_i - \hat{Y}_i(p))^2$ το “αξιόπιστο σφάλμα πρόβλεψης”³ για το Y_i υποθέτοντας ότι η τάξη του υποδείγματος είναι p , όπου $\hat{Y}_i(p)$ είναι η προβλεπόμενη τιμή του Y_i από το $AR(p)$ μοντέλο, η οποία έχει εκτιμηθεί με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο τις παρατηρήσεις Y_1, Y_2, \dots, Y_{i-1} . Η τιμή της προβλεπόμενης τιμής του Y_i θα προκύψει από τον τύπο:

$$\hat{Y}_i(p) = \left\{ [X'(i-1, p)X(i-1, p)]^{-1} X'(i-1, p)Y(i-1, p) \right\}' \begin{bmatrix} 1 \\ Y_{i-1} \\ Y_{i-2} \\ \vdots \\ Y_{i-h} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

³ Το σφάλμα $\hat{e}_i(p)$ καλείται αξιόπιστο (honest) γιατί μόνο παρατηρήσεις που προηγούνται της Y_i υπεισέρχονται στην προβλεπόμενη τιμή της Y_i .

Το κριτήριο *Predictive Least Squares* (PLS)⁴ επιλέγει την τάξη \hat{p} από μια οικογένεια $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots\}$ πιθανών τάξεων του μοντέλου και θεωρείται ότι $\hat{p} \in \mathfrak{S}$. Ο τύπος με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός της τιμής του κριτηρίου είναι:

$$PLS_p = \frac{\sum_{i=2p+2}^n \hat{e}^2(p)}{n-2p-1} \quad (2.15)$$

και το $\hat{e}_i(p)$ μπορεί να υπολογιστεί μόνο για $i \geq 2p+2$. Η τάξη που θα επιλεγεί σαν η πραγματική τάξη του αυτοπαλίνδρομου μοντέλου θα είναι η: $PLS_{\hat{p}} = \min_{p \in \mathfrak{S}} PLS_p$.

Οι Hemerly και Davis (1989) και οι Hemerly και Fragoso (1990) έδειξαν πως οι εκτιμητές του κριτηρίου PLS είναι ισχυρά συνεπείς. Αυτό σημαίνει ότι εάν $p(n)$ είναι η επιλεγείσα εκτιμημένη τάξη του μοντέλου τη χρονική στιγμή n , η οποία δίνει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης (MSPE) μέχρι το χρόνο n , τότε $p(n) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$, όπου p είναι η πραγματική τάξη του μοντέλου από το οποίο προήλθαν τα δεδομένα.

Οι Hannan, Mcdougall και Poskit (1989) έδειξαν πως ανάμεσα στο PLS και το SIC υπάρχει η εξής σχέση: σε μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία p_0 τάξεως, εάν τελικά επιλεγεί η τάξη p και είναι μεγαλύτερη της πραγματικής p_0 τότε:

$$PLS = n\hat{\sigma}^2 + \sigma^2 p \log n (1 + o(1))^5 \quad (2.16)$$

⁴ Ο αλγόριθμος υπολογισμού της τιμής του PLS που χρησιμοποιήθηκε στο EVIEWS είναι ο εξής:

```

όρισε πίνακες etetr, Y, e, X
όρισε αριθμό sum
for i=2p+2 to n
  for j=1 to j-1
    όρισε X(j)
  next
  παλινδρόμησε X AR(1) AR(2) ... AR(p)
  υπολόγισε  $\hat{Y}(i) = \hat{\phi}_1 * X(i-1) + \hat{\phi}_2 * X(i-2) + \dots + \hat{\phi}_p * X(i-p)$ 
  υπολόγισε  $e(i) = X(i) - \hat{Y}(i)$ 
  υπολόγισε  $etetr(i) = e(i)^2$ 
  υπολόγισε  $sum = etetr(i) + sum$ 
next
PLS=sum/(n-2p-1)

```

⁵ Ο συμβολισμός $o(1)$ δηλώνει μια συνάρτηση που συγκλίνει στο μηδέν.

Στην περίπτωση που τα δεδομένα προέρχονται από μια πραγματική $AR(\infty)$ διαδικασία και όταν: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} s^2(n, p) = \sigma^2$, τότε ο Wei (1992) έδειξε πως το PLS και το SIC είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμα.

Οι Roos και Rissanen (2008) προσομοιώνοντας 3000 AR σειρές τάξεως από $p=1$ μέχρι 10 και για διάφορα μεγέθη δείγματος με μικρότερο αυτό των 50 παρατηρήσεων και συμπέραναν πως για μικρά p το PLS εντοπίζει σε ένα μεγάλο αριθμό δειγμάτων την πραγματική τάξη. Καθώς όμως η πραγματική τάξη μεγαλώνει η δύναμη του κριτηρίου ελαττώνεται σημαντικά. Στην συγκεκριμένη εργασία συμπεριλαμβάνονται και τα κριτήρια AIC και SIC. Το AIC έχει κατώτερη απόδοση από αυτή του PLS για όλες τις πραγματικές τάξεις που δοκιμάζεται, ενώ το SIC έχει ανώτερη. Οι Djuric και Kay (1992), οι Yuan και Nelson (1994) και οι Giurcaneanu και Rissanen (2006) σε ανάλογες με την προαναφερθείσα μελέτες εξέτασης διαφόρων κριτηρίων επιλογής τάξης παρατηρούν την ίδια μέτρια απόδοση του PLS.

Κεφάλαιο 3

Εκτίμηση

Υποδειγμάτων ARMA(p,q)

Στην εργασία αυτή σαν μέθοδο εκτίμησης των συντελεστών ϕ_i και θ_i θα χρησιμοποιηθεί αυτή της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας, (Hamilton, 1994). Για τα αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα τάξεως p , για τα κινητού μέσου υποδείγματα τάξεως q και για τα μεικτά υποδείγματα τάξεως p,q , θα βρεθεί η υπό συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

3.1 Υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το AR(p)

Για να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας, θεωρούμε ως δοθείσες τις μεταβλητές Y_p, Y_{p-1}, \dots, Y_1 . Οι υπόλοιπες παρατηρήσεις Y_{p+1}, \dots, Y_n του δείγματος προέρχονται από την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η:

$$f(Y_j / Y_{j-1}, Y_{j-2}, \dots, Y_{j-p}; \underline{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(Y_j - \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{j-i} \right)^2}, \quad \forall j > p \quad (3,1)$$

όπου $\underline{\theta} = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \sigma^2)'$ το διάνυσμα των προς εκτίμηση παραμέτρων του υποδείγματος.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για ολόκληρο το δείγμα δεδομένων των Y_p, Y_{p-1}, \dots, Y_1 δίνεται από τη σχέση:

$$f(Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_{p+1} / Y_p, Y_{p-1}, \dots, Y_1, \underline{\theta}) = \prod_{j=p+1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(Y_j - \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{j-i} \right)^2} \quad (3,2)$$

Λογαριθμίζοντας την (3,2) προκύπτει η:

$$L(\underline{\theta}) = -\frac{n-p}{2} \ln(2\pi) - \frac{n-p}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=p+1}^n \left(Y_j - \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{j-i} \right)^2 \quad (3,3)$$

Μεγιστοποίηση της (3,3) ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της $\sum_{j=p+1}^n \left(Y_j - \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{j-i} \right)^2$, δη-

λαδή οι εκτιμητές $\hat{\phi}(n, p)$ των συντελεστών του υποδείγματος και $\hat{\sigma}^2$ της διακύμανσης του σφάλματος της παλινδρόμησης που θα προκύψουν από την μεγιστοποίηση της συνάρτησης της μέγιστης πιθανοφάνειας θα είναι οι ίδιοι με αυτούς που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση των τετραγώνων των σφαλμάτων της αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας. Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\phi}(n, p) = [\hat{\phi}_0 \quad \hat{\phi}_1 \quad \dots \quad \hat{\phi}_p]'$ για αυτοπαλίνδρομα μοντέλα p τάξεως που

θα προκύψει από την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος $\sum_{j=p+1}^n \left(Y_j - \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{j-i} \right)^2$ υπολογίζεται από το γινόμενο (Greene, 2002):

$$\hat{\phi}(n, p) = \begin{bmatrix} n-p & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1} & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-2} & \dots & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-p} \\ \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1} & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1}^2 & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1}Y_{i-2} & \dots & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1}Y_{i-p} \\ \sum_{i=p+1}^n Y_{i-2} & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1}Y_{i-2} & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-2}^2 & \dots & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-2}Y_{i-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=p+1}^n Y_{i-p} & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-1}Y_{i-p} & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-2}Y_{i-p} & \dots & \sum_{i=p+1}^n Y_{i-p}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=p+1}^n Y_i \\ \sum_{i=p+1}^n Y_i Y_{i-1} \\ \sum_{i=p+1}^n Y_i Y_{i-2} \\ \vdots \\ \sum_{i=p+1}^n Y_i Y_{i-p} \end{bmatrix} \quad (3,4)$$

Η εκτιμήτρια της διακύμανσης των καταλοίπων της παλινδρόμησης δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^n \left(Y_t - \hat{\phi}_0 - \sum_{i=1}^p \hat{\phi}_i Y_{t-i} \right)^2 \quad (3,5)$$

Στο $AR(1)$ η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{n-1}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=2}^n (Y_t - \phi_0 - \phi_1 Y_{t-1})^2 \quad (3,6)$$

με $\underline{\theta} = (\phi_0, \phi_1, \sigma^2)'$ και στο $AR(2)$ η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n-2}{2} \ln(2\pi) - \frac{n-2}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=3}^n (Y_t - \phi_0 - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2})^2 \quad (3,7)$$

με $\underline{\theta} = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \sigma^2)'$

3.2 Υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το $MA(q)$

Δεδομένης της τιμή του σφάλματος ε_{t-1} , η Y_t κατανέμεται κανονικά με μέσο:

$$m = \mu + \sum_{i=1}^p \theta_i \varepsilon_{t-i} \text{ και διακύμανση } \sigma^2, \text{ δηλαδή: } Y_t / \varepsilon_{t-1} \sim N\left(\mu + \sum_{i=1}^p \theta_i \varepsilon_{t-i}, \sigma^2\right).$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y_t / ε_{t-1} δίνεται από την σχέση:

$$f(Y_t / \varepsilon_{t-1}, \mu, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(Y_t - \mu - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \right)^2} \quad (3,8)$$

Για να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας μιας $MA(q)$ διαδικασίας θεωρούμε τα πρώτα q στοιχεία των σφαλμάτων ίσα με το μηδέν, δηλαδή: $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \dots = \varepsilon_{-q+1} = 0$. Έπειτα αντικαθιστούμε τις αρχικές τιμές στην:

$$\varepsilon_t = Y_t - \mu - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (3,9)$$

για $t = 1, 2, \dots, n$ και προκύπτουν οι τιμές των ε_t για όλα τα t .

Η υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της t -στής μεταβλητής είναι η:

$$f(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1, \underline{\varepsilon}_0 = 0; \underline{\theta}) = f(Y_t / \varepsilon_{t-1}; \underline{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon_t^2} \quad (3,10)$$

όπου $\underline{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q+1})'$ και $\underline{\theta} = (\mu, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2)'$. Επομένως η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας δίνεται από:

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{t=1}^n f(Y_t/\varepsilon_{t-1}; \underline{\theta}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}} \quad (3,11)$$

Λογαριθμίζοντας την (3,11) καταλήγουμε στην συνάρτηση:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n}{2} \ell \log(2\pi) - \frac{n}{2} \ell \log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \quad (3,12)$$

Η (3,12) είναι μία συνάρτηση του διανύσματος $\underline{\theta}$ των παραμέτρων και επομένως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων που την μεγιστοποιούν βρίσκονται μέσω αριθμητικής μεγιστοποίησης.

Για μια $MA(1)$ διαδικασία, η λογαριθμημένη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας δίνεται από τον τύπο:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n}{2} \ell \log(2\pi) - \frac{n}{2} \ell \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n (Y_t - \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 \quad (3,13)$$

με $\underline{\theta} = (\mu, \theta_1, \sigma^2)'$

3.3 Υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το ARMA(p,q)

Το διάνυσμα των παραμέτρων που μεγιστοποιούν την συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας ενός ARMA(p,q) υποδείγματος είναι το: $\underline{\theta} = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma^2)'$. Ο Hamilton (1994) ορίζει τα διανύσματα $Y_0 = (Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{-p+1})'$ και $\varepsilon_0 = (\varepsilon_0, \varepsilon_{-1}, \dots, \varepsilon_{-q+1})'$ ίσα με το μηδενικό διάνυσμα, οπότε η ακολουθία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$\varepsilon_t = Y_t - \phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (3,14)$$

για τις διάφορες τιμές των Y_1, Y_2, \dots, Y_n και για $t = 1, \dots, n$. Η υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για το δείγμα είναι τότε η:

$$L(\underline{\theta}) = \prod_{t=1}^n f(Y_t/\varepsilon_{t-1}; \underline{\theta}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}} \quad (3,15)$$

ή λογαριθμίζοντας:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n}{2} \ell \log(2\pi) - \frac{n}{2} \ell \log(\sigma^2) - \sum_{t=1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \quad (3,16)$$

Για μια $ARMA(1,1)$ διαδικασία η λογαριθμημένη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n}{2} \ell \log(2\pi) - \frac{n}{2} \ell \log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n (Y_t - \phi_0 - \phi_1 Y_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-1})^2 \quad (3,17)$$

$$\text{με } \underline{\theta} = (\phi_0, \phi_1, \theta_1, \sigma^2)'$$

Εναλλακτικά οι Box, Jenkins και Reinsel (2008) προτείνουν οι τιμές των ε_t για $t = p, p-1, \dots, p-q+1$ να τεθούν ίσες με το μηδέν και οι τιμές των αντίστοιχων Y_t ίσες με τις πραγματικές. Ακολουθώντας αυτή τη πρακτική, η λογαριθμημένη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας για ένα $ARMA(p,q)$ που προκύπτει είναι:

$$\ln L(\underline{\theta}) = -\frac{n-p}{2} \ell \log(2\pi) - \frac{n-p}{2} \ell \log(\sigma^2) - \sum_{t=p+1}^n \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma^2} \quad (3,18)$$

Κεφάλαιο 4

Μεθοδολογία της έρευνας και αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγραφεί η μέθοδος η οποία ακολουθήθηκε στην συγκεκριμένη εργασία, θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της εφαρμογής της και θα γίνει σχολιασμός των αποτελεσμάτων αυτών.

4.1 Περιγραφή της ακολουθούμενης μεθόδου

Στο τμήμα αυτό εξετάζεται η απόδοση των κριτηρίων AIC, SIC, HQ και PLS, με τη χρήση προσομοιώσεων Monte-Carlo. Η μορφή της γεννήτριας τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήθηκε, αλλά και ο βαθμός εγκυρότητας και αξιοπιστίας των σειρών προσομοίωσης που παρήχθησαν περιγράφεται από τον Kenork (2009). Στα πλαίσια της ανάλυσης, σε πρώτο στάδιο παρήχθησαν 1000 σειρές προσομοίωσης μεγίστου μεγέθους 250 παρατηρήσεων από την κανονική κατανομή $N(0,1)$. Το σφάλμα της παλινδρόμησης ε_t λαμβάνει τιμές από τις σειρές αυτές για $t=1$ έως 250. Στη συνέχεια, δημιουργήσαμε για $\phi_1 = 0,2, 0,5$ και $0,8$, 1000 ανά ϕ_1 , αυτοπαλίνδρομες σειρές $AR(1)$ με $\phi_0 = 0$ χωρίς περιορισμό της γενικότητας. Όμοια δημιουργήσαμε άλλες 1000 ανά θ_1 , σειρές κινητού μέσου $MA(1)$ για $\theta_1 = 0,2, 0,5$ και $0,8$ με $\mu = 0$ και πάλι χωρίς περιορισμό της γενικότητας. Για τη διασφάλιση της στασιμότητας κάθε σειράς, η πρώτη παρατήρηση της αυτοπαλίνδρομης σειράς επιλέγεται τυχαία από την κανονική κατανομή $N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}\right)$ πράγμα που σημαίνει πώς:

$$Y_1 = z \sqrt{\frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}} \quad (4.1)$$

και η πρώτη παρατήρηση της σειράς κινητού μέσου επιλέγεται τυχαία από την κανονική κατανομή $N\left(0, \frac{\sigma^2}{1+\theta_1^2}\right)$ δηλαδή:

$$Y_1 = z \sqrt{\frac{\sigma^2}{1+\theta_1^2}} \quad (4.2)$$

Το κύριο θέμα αυτής της εργασίας είναι να υπολογίσουμε τον αριθμό δειγμάτων στα οποία καθένα από τα κριτήρια AIC, SIC, HQ και PLS υπολογίζει την πραγματική τάξη μιας αυτοπαλίνδρομης διαδικασίας AR(1) και μιας διαδικασίας κινητού μέσου MA(1). Η διαδικασία αυτή θα πραγματοποιηθεί για τα δείγματα στα οποία η εναλλακτική υπόθεση του έλεγχου είναι αληθινή. Ο έλεγχος που γίνεται είναι μεταξύ της υπόθεσης H_0 έναντι της εναλλακτικής H_1 . Έχουμε δηλαδή:

$$H_0 : \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_k = 0 \quad (4.3)$$

$$H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } \hat{\beta}_j \neq 0 \text{ με } j \in [1, k]$$

όπου $\hat{\beta}_j$ είναι οι συντελεστές στην προσαρμογή του AR(1) ή γενικότερα του AR(p), του MA(1) και του ARMA(1,1) πάνω σε κάθε δείγμα. Τα $\hat{\beta}_j$ θα εκτιμηθούν με τη μέθοδο της υπό συνθήκη μέγιστης πιθανοφάνειας, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Marquardt (Box, Jenkins, Reinsel, 2008). Ο σταθερός όρος είναι ίσος με το μηδέν χωρίς διατάραξη της γενικότητας. Η απόρριψη της μηδενικής υποθέσεως γίνεται με την βοήθεια της p-τιμής της t-κατανομής. Δεδομένης της τιμής της στατιστικής ελέγχου, η p-τιμή είναι η ακριβής πιθανότητα να ευρεθεί από το δείγμα μια τιμή ίση ή μεγαλύτερη. Εάν η p-τιμή είναι μικρότερη ή ίση του 0,05 τότε η εναλλακτική υπόθεση γίνεται δεκτή σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και τα $\hat{\beta}_i$ είναι στατιστικά σημαντικά (Woolridge, 2004 Κεφάλαιο 4). Μετά από πραγματοποίηση των παραπάνω ελέγχων σε 1000 προσομοιωμένα AR(1) δείγματα, για διάφορα p, τελικώς εκτός από τον AR(1) όρο, στατιστικά σημαντικός είναι μόνο ο AR(2) όρος σε ένα σημαντικό ποσοστό των δειγμάτων. Ο όρος AR(3) είναι σε λιγότερο του 0,5% των δειγμάτων στατιστικά σημαντικός για αυτό και δεν ελήφθη υπόψη. Οι όροι από p=4 και πάνω είναι σε όλα τα δείγμα-

⁶ Και στις δύο περιπτώσεις $\sigma^2 = 1$

τα στατιστικώς μη σημαντικοί. Στα προσομοιωμένα MA(1) δείγματα, επειδή ισχύει ότι το MA(1) μπορεί να γραφεί σαν AR(∞), οι αυτοπαλίνδρομοι όροι AR(p) είναι στατιστικά σημαντικοί για όλα τα p . Στη συγκεκριμένη εργασία η επεξεργασία έγινε μέχρι και για $p = 6$, καθώς για $p \geq 7$ ο απαιτούμενος χρόνος ηλεκτρονικής επεξεργασίας ήταν ασύμφορα μεγάλος, στα πλαίσια της συγκεκριμένης έρευνας.

Πιο συγκεκριμένα οι υποθέσεις οι οποίες ελέγχονται σε 1000 προσομοιωμένα δείγματα AR(1), χρησιμοποιώντας την υπό συνθήκη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας, είναι οι εξής:

- όταν προσαρμόζουμε ένα υπόδειγμα MA(1), δηλαδή $y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$H_0 : \theta_1 = 0$$

$$H_1 : \theta_1 \neq 0$$

(4.4)

- όταν προσαρμόζουμε ένα υπόδειγμα AR(1), δηλαδή $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$H_0 : \phi_1 = 0$$

$$H_1 : \phi_1 \neq 0$$

(4.5)

- όταν προσαρμόζουμε ένα υπόδειγμα AR(2), δηλαδή $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$:

$$H_0 : \phi_1 = 0 \quad H_0 : \phi_2 = 0$$

$$H_1 : \phi_1 \neq 0 \quad H_1 : \phi_2 \neq 0$$

(4.6)

- και όταν προσαρμόζουμε ένα υπόδειγμα ARMA(1,1), δηλαδή $y_t = \psi_1 y_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$:

$$H_0 : \psi_1 = 0 \quad H_0 : \theta_1 = 0$$

$$H_1 : \psi_1 \neq 0 \quad H_1 : \theta_1 \neq 0$$

(4.7)

Αντίστοιχα οι υποθέσεις που ελέγχονται στα 1000 προσομοιωμένα δείγματα MA(1) είναι ίδιες με τις (4.4), (4.5), (4.6) και (4.7)

Στην οικογένεια των 1000 AR(1) προσομοιωμένων δειγμάτων, ας την ονομάσουμε \mathbb{S} , προσαρμόζουμε έναν AR(1) υπόδειγμα. Ακολούθως, προσαρμόζουμε ξεχωριστά ένα MA(1) υπόδειγμα, ένα AR(2) υπόδειγμα και ένα ARMA(1,1) υπόδειγμα. Στη συνέχεια, δημιουργούμε σύνολα S_i τα οποία περιέχουν δείγματα της οικογένειας \mathbb{S} , έστω s_i , τα οποία δίνουν στατιστικά σημαντικό όρο AR(1) αλλά και στατιστικά σημαντικό όρο MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1), καθώς και όλους τους συνδυασμούς που μπορούν να προκύψουν. Τα σύνολα αυτά είναι τα παρακάτω για τις διάφορες περιπτώσεις:

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και MA(1) όρο:

$$S_1 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = 0, \psi_1 = 0, \vartheta_1 = 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.8)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και AR(2) όρο:

$$S_2 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 = 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.9)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_3 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 = 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.10)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό MA(1) και AR(2) όρο:

$$S_4 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 = 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 = 0, \vartheta_1 = 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.11)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό MA(1) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_5 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 = 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.12)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(2) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_6 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.13)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και MA(1) και AR(2) όρο:

$$S_7 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 = 0, \vartheta_1 = 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.14)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και MA(1) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_8 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.15)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και AR(2) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_9 = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.16)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό MA(1) και AR(2) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_{10} = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 = 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.17)$$

τα δείγματα που έχουν στατιστικά σημαντικό AR(1) και MA(1) και AR(2) και ARMA(1,1) όρο:

$$S_{11} = \{s_i \in \mathbb{S} : \phi_1 \neq 0, \theta_1 \neq 0, \varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0, \psi_1 \neq 0, \vartheta_1 \neq 0, i \in [1, 1000]\} \quad (4.18)$$

Στα έντεκα παραπάνω σύνολα δειγμάτων εφαρμόζουμε τα κριτήρια επιλογής τάξης και συγκρίνουμε τις μεταξύ τους τιμές. Εάν για παράδειγμα υπολογίσουμε την τιμή του AIC σε ένα δείγμα του πρώτου συνόλου για την AR(1) περίπτωση καθώς και για την MA(1) περίπτωση, η μικρότερη των δύο τιμών προσδιορίζει και την διαδικασία την οποία επιλέγει το κριτήριο. Το κριτήριο PLS μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στο δεύτερο σύνολο δειγμάτων, δηλαδή σε δείγματα όπου οι συντελεστές τους είναι στατιστικά σημαντικοί και για τον AR(1) όρο αλλά και για τον AR(2) όρο. Ο παραπάνω περιορισμός είναι ένα αρχικό μειονέκτημα για το PLS, συγκρινόμενο με τα υπόλοιπα τρία κριτήρια.

Στην περίπτωση των προσομοιωμένων MA(1) σειρών τα σύνολα που προκύπτουν από τους ελέγχους (4.4), (4.5), (4.7) και (4.8) είναι ανάλογα με τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , τα οποία και δεν αναγράφονται για λόγους συντομίας.

Αυτό που ενδιαφέρει και στην περίπτωση των MA(1) προσομοιωμένων δειγμάτων, είναι η απόδοση των τριών κριτηρίων, δηλαδή το πόσο συμβάλει κάθε κριτήριο από τα AIC, SIC και HQ στην ορθή εξειδίκευση του πληθυσμιακού υποδείγματος. Το κριτήριο PLS στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί θα δώσει λάθος αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι πίνακες της εργασίας και θα σχολιαστούν αναλόγως.

4.2 Αποτελέσματα

Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζεται το ποσοστό των αποδεκτών δειγμάτων όταν εφαρμοστεί σε καθένα από αυτά ο έλεγχος για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών του υποδείγματος ανάλογα με την περίπτωση, όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι AR(1). Παρατηρούμε πως για μικρές αυτοσυσχετίσεις και για μικρά δείγματα, το ενδεχόμενο να καταλήξουμε σε λευκό θόρυβο έχει σημαντική πιθανότητα. Σημαντική πιθανότητα υπάρχει και για το ενδεχόμενο να καταλήξουμε σε υπόδειγμα ARMA(1,1). Σε μεγάλα δείγματα οι πιθανότητες είναι να καταλήξουμε σε δείγματα στα οποία η ρ -τιμή θα είναι μικρότερη του 0,05 και για το υπόδειγμα AR(1) αλλά και για το υπόδειγμα MA(1). Καθώς οι αυτοσυσχετίσεις αυξάνονται, αυτό γίνεται όλο και πιο έντονο. Σε τιμές αυτοσυσχετίσης της τάξης του 0,8 είναι σχεδόν σίγουρο πως το υπόδειγμα θα είναι AR(1) αλλά και MA(1). Από τον πίνακα επίσης παρατηρούμε πως είναι απίθανο να καταλήξουμε σε δείγματα τα οποία θα έχουν στατιστικά σημαντικό συντελεστή και για το υπόδειγμα AR(1), αλλά και για το υπόδειγμα AR(2).

Στον πίνακα 4.2 αναφέρονται τα ποσοστά να βρεθούν δείγματα με στατιστικά σημαντικούς συντελεστές για τα διάφορα υποδείγματα που προσαρμόζονται σε αυτά, όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι το MA(1). Πάλι σε μικρές αυτοσυσχετίσεις και σε μικρά δείγματα, η πιθανότητα να καταλήξουμε σε λευκό θόρυβο είναι σημαντική. Επίσης σημαντική είναι η πιθανότητα να εξειδικεύσουμε το υπόδειγμα σαν ARMA(1,1). Μικρότερες είναι οι πιθανότητες να εξειδικευτεί το υπόδειγμα σαν AR(1) ή MA(1) και μηδενικές να εξειδικευτεί σαν AR(2). Όσο όμως οι τιμές της αυτοσυσχετίσης αυξάνονται τόσο η επιλογή ανάμεσα σε AR(1), AR(2) και MA(1) γίνεται δυσκολότερη. Επίσης σημαντικό είναι το ποσοστό των δειγμάτων που έχουν στατιστικά σημαντικό συντελεστή στην προσαρμογή του AR(1) και στην προσαρμογή του MA(1) υποδείγματος.

Οι πίνακες 4.3α, 4.3β και 4.3γ παρουσιάζουν τον αριθμό των δειγμάτων όπου τα κριτήρια AIC, SIC και HQ σωστά εξειδικεύουν σαν AR(1), στο κάθε σύνολο ξεχωριστά για τις διάφορες τιμές αυτοσυσχετίσης και για διάφορα μεγέθη δείγματος. Το κριτήριο PLS δεν συμπεριλαμβάνεται στους πίνακες γιατί το ποσοστό των δειγμάτων που ανήκουν στο σύνολο S_2 είναι μηδενικό. Όμοια και οι πίνακες 4.4α, 4.4β και 4.4γ παρουσιάζουν τον αριθμό των δειγμάτων όπου τα τρία κριτήρια σωστά εξειδικεύουν σαν MA(1). Οι πίνακες 4.5 και 4.7 συνοψίζουν τα αποτελέσματα των πινάκων 4.1, 4.3α, 4.3β, 4.3γ και 4.2, 4.4α, 4.4β, 4.4γ αντίστοιχα. Από την μελέτη των συνοπτικών πινάκων 4.5 και 4.7 παρατηρούμε τις αποδόσεις των τριών κριτηρίων στη σωστή εξειδίκευση των υποδειγμάτων. Στον πίνακα 4.5 φαίνεται πως όταν σε

μικρές αυτοσυσχετίσεις η πιθανότητα να εξειδικεύσουμε σωστά το υπόδειγμα με τη χρήση των κριτηρίων λαμβάνοντας υπόψη τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών είναι εξαιρετικά χαμηλή. Όσο αυξάνει η αυτοσυσχέτιση αυξάνει και η πιθανότητα σωστής εξειδίκευσης. Σε τιμές αυτοσυσχέτισης της τάξης του 0,5 ή και μεγαλύτερες και για σχετικά μεγάλα δείγματα, η πιθανότητα αυτή είναι πολύ μεγάλη. Από τον ίδιο πίνακα επίσης παρατηρούμε πως δεν υπάρχει σημαντικά μεγάλη διαφορά ανάμεσα στα τρία κριτήρια. Το κριτήριο όμως που φαίνεται να έχει ελαφρώς καλύτερες αποδόσεις είναι το SIC, με το AIC να έχει τις χειρότερες, ανάμεσα στα τρία. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και από την μελέτη του πίνακα 4.7. Όσο οι αυτοσυσχετίσεις είναι μικρές οι πιθανότητες σωστής εξειδίκευσης του υποδείγματος είναι περιορισμένες. Όσο όμως αυξάνεται η τιμή της αυτοσυσχέτισης αυξάνεται και η συγκεκριμένη πιθανότητα. Και πάλι το SIC υπερέχει ελαφρώς μεταξύ των τριών.

Οι αποδόσεις των τριών κριτηρίων φαίνονται και διαγραμματικά, με τη βοήθεια των διαγραμμάτων 4.1, 4.2 και 4.3.

Θα ήταν χρήσιμο να μελετήσουμε και τον πίνακα 4.6 όπου παρουσιάζει τις αποδόσεις των τριών κριτηρίων, σε πληθυσμιακό υπόδειγμα $AR(1)$, χωρίς όμως να λαμβάνεται υπόψη η στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών. Σε χαμηλές ειδικά αυτοσυσχετίσεις οι αποδόσεις και των τριών κριτηρίων φαίνεται να είναι καλύτερες σε σχέση με αυτές του πίνακα 4.5. Όμως η μη χρησιμοποίηση του ελέγχου για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών ενδεχομένως να οδηγήσει σε αντικρουόμενα αποτελέσματα όσον αφορά την κλασσική στατιστική μεθοδολογία. Δεν είναι στατιστικά ορθό να γίνει αποδεκτό ένα υπόδειγμα όταν ο συντελεστής του υποδείγματος αυτού, είναι μη στατιστικά σημαντικός. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και από τον πίνακα 4.8 για το πληθυσμιακό υπόδειγμα $MA(1)$.

Ένα σημαντικό επίσης αποτέλεσμα που προκύπτει από τους παραπάνω πίνακες είναι πως το PLS δεν είναι καθόλου χρήσιμο στην εξειδίκευση ενός υποδείγματος το οποίο προέρχεται από μια διαδικασία $AR(1)$ ή από μια διαδικασία $MA(1)$. Το PLS μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμο σε περιπτώσεις όπου γίνεται αναζήτηση της τάξης ανάμεσα σε αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα, όταν αυτά έχουν σαν πληθυσμιακό υπόδειγμα το $AR(1)$. Οι πίνακες 4.9, 4.10 και 4.11 επαληθεύουν αυτόν τον ισχυρισμό. Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 4.1 όταν το πραγματικό υπόδειγμα από το οποίο προέρχονται τα δεδομένα είναι $AR(1)$, στατιστικά σημαντικούς συντελεστές βρίσκουμε μόνο στην προσαρμογή ενός $AR(1)$ και ενός $AR(2)$ υποδείγματος. Για μεγαλύτερες τάξεις υποδειγμάτων, οι συντελεστές δεν είναι στατιστικά διάφοροι του μηδενός. Έτσι λοιπόν στον πίνακα 4.9 βλέπουμε πως υπάρχει ένα μικρό ποσοστό δειγμάτων ανά

περίπτωση τα οποία εξειδικεύονται και σαν AR(1) αλλά και σαν AR(2) από τον έλεγχο για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα του πίνακα 4.10, το PLS είναι αρκετά ισχυρό στην επιλογή της σωστής τάξης και ανώτερο των υπολοίπων τριών όταν πρόκειται για μικρά δείγματα. Στα μεγάλα δείγματα οι επιδόσεις του μικραίνουν. Αντιθέτως το SIC σε μεγάλα δείγματα είναι πολύ ισχυρό κριτήριο έχοντας όμως περιορισμένες επιδόσεις στα μικρά.

Μελετώντας επίσης, συγκριτικά τους πίνακες 4.11 και 4.12 καταλήγουμε σε προηγούμενο συμπέρασμα, δηλαδή δεν είναι σύμφωνο με τη στατιστική θεωρία να μην ληφθεί υπόψη η στατιστική σημαντικότητα του συντελεστή του υποδείγματος, παρόλο που οι αποδόσεις του PLS, χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο είναι υψηλότερες.

Πίνακας 4.1: Ποσοστό αποδεκτών δειγμάτων με βάση τη στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι AR(1).

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
W.N.	0.372	0.406	0.303	0.059	0.136	0.025	0	0	0.012	0	0	0
AR(1)	0.057	0.076	0.059	0.023	0.105	0.026	0.001	0	0.020	0	0	0
AR(2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MA(1)	0.122	0.042	0.029	0.008	0.054	0.006	0	0	0.007	0.001	0	0
ARMA(1,1)	0.286	0.208	0.138	0.032	0.067	0.008	0.001	0	0.005	0	0	0
AR(1) ή MA(1)	0.103	0.180	0.363	0.718	0.521	0.798	0.890	0.922	0.775	0.857	0.908	0.932
AR(1) ή AR(2)	0	0	0.001	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή ARMA(1,1)	0.012	0.014	0.018	0.003	0.028	0.012	0	0	0.006	0	0	0
MA(1) ή AR(2)	0.004	0.005	0.007	0	0.05	0	0	0	0.001	0	0	0
MA(1) ή ARMA(1,1)	0.027	0.024	0.008	0.004	0.016	0.002	0	0	0.001	0	0	0
AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή MA(1) ή AR(2)	0.004	0.011	0.019	0.040	0.018	0.031	0.040	0.021	0.015	0.019	0.009	0.009
AR(1) ή MA(1) ή ARMA(1,1)	0.012	0.031	0.051	0.100	0.047	0.081	0.055	0.028	0.141	0.091	0.046	0.018
AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0.001	0	0	0	0	0.002	0	0	0	0	0
MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0.001	0.001	0	0	0.002	0	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0.001	0.004	0.012	0.001	0.011	0.011	0.029	0.017	0.032	0.037	0.041

Πίνακας 4.2: Ποσοστό αποδεκτών δειγμάτων με βάση τη στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι MA(1).

	$y_t = 0.2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
W.N.	0.377	0.394	0.283	0.061	0.103	0.014	0	0	0.002	0	0	0
AR(1)	0.042	0.049	0.039	0.015	0.018	0.003	0	0	0	0	0	0
AR(2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MA(1)	0.125	0.067	0.054	0.011	0.173	0.031	0.001	0	0.127	0.003	0	0
ARMA(1,1)	0.295	0.223	0.140	0.025	0.093	0.020	0.003	0	0.011	0	0	0
AR(1) ή MA(1)	0.099	0.164	0.354	0.701	0	0.591	0.475	0.119	0.528	0.371	0.095	0
AR(1) ή AR(2)	0	0	0.001	0.001	0.429	0	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή ARMA(1,1)	0.004	0.014	0.011	0.001	0.004	0.001	0	0	0.001	0	0	0
MA(1) ή AR(2)	0.007	0.008	0.010	0.004	0.038	0.019	0.002	0	0.065	0.017	0	0
MA(1) ή ARMA(1,1)	0.034	0.032	0.020	0.010	0.053	0.023	0.002	0	0.023	0.005	0	0
AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή MA(1) ή AR(2)	0.003	0.012	0.026	0.060	0.048	0.174	0.434	0.813	0.153	0.512	0.822	0.939
AR(1) ή MA(1) ή ARMA(1,1)	0.013	0.030	0.057	0.091	0.036	0.0102	0.055	0.011	0.061	0.035	0.012	0
AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0.001	0.005	0.001	0.003	0	0.008	0.001	0	0.010	0.006	0	0
AR(1) ή MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0.002	0.004	0.017	0.005	0.014	0.027	0.057	0.019	0.051	0.071	0.061

Πίνακας 4.3α: Αριθμός δειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν AR(1) για κάθε ένα από τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , με βάση τα κριτήρια AIC, SIC και HQ.

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$											
	n=25			n=50			n=100			n=250		
	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ
AR(1) ή MA(1)	35 (33.98) ⁷	35 (33.98)	35 (33.98)	69 (38.33)	69 (38.33)	69 (38.33)	168 (46.28)	165 (45.45)	167 (46.00)	385 (53.62)	384 (53.48)	385 (53.62)
AR(1) ή AR(2)	ΔB ⁸	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή ARMA(1,1)	1 (8.33)	4 (33.33)	2 (16.67)	2 (14.28)	8 (57.14)	2 (14.29)	3 (16.67)	12 (66.67)	7 (38.89)	0	3 (100)	2 (66.67)
AR(1) ή MA(1) ή AR(2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11 (27.5)	4 (10.00)
AR(1) ή MA(1) ή ARMA(1,1)	0	0	0	3 (9.68)	8 (25.8)	6 (19.35)	6 (11.76)	14 (27.45)	9 (17.64)	10 (10.00)	41 (41.00)	30 (30.00)
AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	ΔB	ΔB	ΔB	0	0	0	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	ΔB	ΔB	ΔB	0	0	0	0	0	0	0	5 (41.67)	0

⁷ Σε παρένθεση το % ποσοστό

⁸ Δεν βρέθηκε δείγμα που να ανήκει σε αυτό το σύνολο

Πίνακας 4.3β: Αριθμός δειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν AR(1) για κάθε ένα από τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , με βάση τα κριτήρια AIC, SIC και HQ.

	$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$											
	n=25			n=50			n=100			n=250		
	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ
AR(1) ή MA(1)	310 (59.5)	310 (59.5)	311 (59.70)	611 (76.57)	608 (76.19)	610 (76.44)	796 (89.44)	795 (89.33)	796 (89.44)	906 (98.26)	906 (98.26)	906 (98.26)
AR(1) ή AR(2)	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή ARMA(1,1)	3 (10.71)	11 (39.28)	4 (14.29)	1 (8.33)	5 (41.67)	1 (8.33)	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή MA(1) ή AR(2)	0	0	0	0	3 (9.68)	0	0	7 (17.5)	1 (2.5)	0	7 (33.33)	1 (4.76)
AR(1) ή MA(1) ή ARMA(1,1)	7 (14.89)	13 (27.66)	10 (21.28)	20 (24.69)	45 (55.56)	27 (33.33)	9 (16.36)	40 (72.73)	19 (34.54)	1 (3.57)	26 (92.86)	11 (39.29)
AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	0	0	0	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0	0	0	0	0	0	2 (18.18)	0	0	11 (37.93)	0

Πίνακας 4.3γ: Αριθμός δειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν AR(1) για κάθε ένα από τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , με βάση τα κριτήρια AIC, SIC και HQ.

	$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$											
	n=25			n=50			n=100			n=250		
	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ
AR(1) ή MA(1)	702 (90.58)	702 (90.58)	702 (90.58)	848 (98.95)	848 (98.95)	848 (98.95)	908 (100)	908 (100)	908 (100)	932 (100)	932 (100)	932 (100)
AR(1) ή AR(2)	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή ARMA(1,1)	0	0	0	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή MA(1) ή AR(2)	0	0	0	5 (26.32)	6 (31.58)	0	0	5 (55.56)	0	0	9 (100)	3 (33.33)
AR(1) ή MA(1) ή ARMA(1,1)	12 (8.51)	34 (24.11)	19 (13.47)	12 (13.19)	50 (54.95)	19 (20.88)	4 (8.70)	35 (76.09)	14 (30.43)	0	18 (100)	4 (22.22)
AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
AR(1) ή MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0	0	0	1 (3.12)	0	0	6 (16.22)	0	0	17 (41.46)	0

Πίνακας 4.4α: Αριθμός δειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν MA(1) για κάθε ένα από τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , με βάση τα κριτήρια AIC, SIC και HQ.

	$y_t = 0.2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$											
	n=25			n=50			n=100			n=250		
	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ
MA(1) ή AR(1)	79 (79.80)	79 (79.80)	79 (79.80)	114 (69.51)	115 (70.12)	114 (69.51)	232 (65.54)	232 (65.54)	232 (65.54)	433 (61.77)	433 (61.77)	433 (61.77)
MA(1) ή AR(2)	5 (71.43)	6 (85.71)	6 (85.71)	4 (50.00)	6 (75.00)	6 (75.00)	1 (10.00)	3 (30.00)	2 (20.00)	0	1 (25.00)	1 (25.00)
MA(1) ή ARMA(1,1)	8 (23.53)	12 (35.29)	8 (23.53)	4 (12.5)	13 (40.62)	9 (28.12)	2 (10.00)	14 (70.00)	8 (40.00)	0	3 (30.00)	2 (20.00)
MA(1) ή AR(1) ή AR(2)	1 (33.33)	1 (33.33)	1 (33.33)	7 (58.33)	9 (75.00)	9 (75.00)	18 (69.23)	22 (84.61)	20 (76.92)	28 (46.67)	52 (86.67)	44 (73.33)
MA(1) ή AR(1) ή ARMA(1,1)	2 (15.38)	2 (15.38)	2 (15.38)	4 (13.33)	11 (36.67)	6 (20.00)	14 (24.56)	30 (52.63)	22 (38.60)	22 (24.18)	58 (63.74)	41 (45.05)
MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	1 (100)	0	0	1 (20.00)	0	0	1 (100)	0	0	2 (66.67)	0
MA(1) ή AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	ΔB	ΔB	ΔB	0	1 (50.00)	1 (50.00)	1 (25.00)	2 (50.00)	1 (25.00)	0	12 (70.59)	5 (29.41)

Πίνακας 4.4β Αριθμός δειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν MA(1) για κάθε ένα από τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , με βάση τα κριτήρια AIC, SIC και HQ.

	$y_t = 0.5\epsilon_{t-1} + \epsilon_t$											
	n=25			n=50			n=100			n=250		
	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ
MA(1) ή AR(1)	327 (76.22)	327 (76.22)	326 (75.99)	453 (76.65)	454 (76.82)	453 (76.65)	377 (79.39)	377 (79.37)	377 (79.37)	101 (84.87)	101 (84.87)	101 (84.87)
MA(1) ή AR(2)	22 (57.89)	30 (78.95)	23 (60.53)	6 (31.58)	15 (78.95)	10 (52.63)	1 (50.00)	1 (50.00)	1 (50.00)	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή ARMA(1,1)	13 (24.53)	26 (49.06)	19 (35.85)	0	6 (26.09)	1 (4.34)	0	1 (50.00)	0	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή AR(1) ή AR(2)	36 (75.00)	39 (81.25)	36 (75.00)	125 (71.84)	156 (89.65)	138 (79.31)	323 (74.42)	396 (91.24)	368 (84.79)	693 (85.24)	780 (95.94)	744 (91.51)
MA(1) ή AR(1) ή ARMA(1,1)	11 (30.56)	16 (44.44)	13 (36.11)	16 (15.69)	42 (41.18)	25 (24.51)	8 (14.54)	29 (52.72)	16 (29.09)	2 (18.18)	7 (63.63)	5 (45.45)
MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	ΔB	ΔB	ΔB	2 (25.00)	4 (50.00)	2 (25.00)	0	0	0	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	0	0	2 (14.29)	9 (64.29)	6 (42.86)	1 (3.70)	12 (44.44)	6 (22.22)	1 (1.75)	29 (50.88)	10 (17.54)

Πίνακας 4.4γ: Αριθμός δειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν AR(1) για κάθε ένα από τα σύνολα S_1 έως και S_{11} , με βάση τα κριτήρια AIC, SIC και HQ.

	$y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$											
	n=25			n=50			n=100			n=250		
	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ	AIC	SIC	HQ
MA(1) ή AR(1)	496 (93.93)	496 (93.93)	495 (93.75)	365 (98.38)	365 (98.38)	365 (98.38)	95 (100)	95 (100)	95 (100)	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή AR(2)	53 (81.54)	59 (90.77)	56 (86.15)	13 (76.47)	16 (94.18)	13 (76.47)	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή ARMA(1,1)	4 (17.39)	5 (21.74)	4 (17.39)	0	0	0	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή AR(1) ή AR(2)	127 (83.01)	139 (90.85)	130 (84.97)	487 (95.12)	505 (98.63)	496 (96.87)	812 (98.78)	821 (99.88)	817 (99.39)	939 (100)	939 (100)	939 (100)
MA(1) ή AR(1) ή ARMA(1,1)	8 (13.11)	10 (16.39)	8 (13.11)	4 (11.43)	10 (28.57)	5 (14.29)	2 (16.67)	6 (50.00)	3 (25.00)	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	2 (20.00)	2 (20.00)	2 (20.00)	0	0	0	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB	ΔB
MA(1) ή AR(1) ή AR(2) ή ARMA(1,1)	0	2 (10.53)	1 (5.26)	5 (9.80)	15 (29.41)	6 (11.76)	8 (11.27)	32 (45.07)	14 (19.72)	2 (3.28)	39 (63.93)	10 (16.39)

Πίνακας 4.5: Συνοπτικός πίνακας, για το πληθυσμιακό υπόδειγμα AR(1), με το ποσοστό των δειγμάτων που εξειδικεύονται ορθά λαμβάνοντας υπόψη τη στατιστική σημαντικότητα και τα κριτήρια.

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
Total AR(1) with AIC	0.093	0.150	0.236	0.418	0.425	0.658	0.806	0.907	0.734	0.865	0.912	0.932
Total AR(1) with SIC	0.096	0.161	0.250	0.467	0.439	0.687	0.845	0.950	0.756	0.905	0.954	0.976
Total AR(1) with HQ	0.094	0.153	0.242	0.444	0.430	0.664	0.817	0.918	0.741	0.867	0.922	0.939

Πίνακας 4.6: Τα AIC, SIC και HQ χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η στατιστική σημαντικότητα όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι AR(1)

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
AIC	0.183	0.229	0.279	0.363	0.379	0.543	0.654	0.721	0.587	0.696	0.712	0.738
SIC	0.236	0.308	0.354	0.478	0.447	0.661	0.812	0.924	0.695	0.852	0.909	0.946
HQ	0.193	0.261	0.321	0.434	0.402	0.590	0.737	0.857	0.622	0.759	0.818	0.873

Πίνακας 4.7: Συνοπτικός πίνακας, για το πληθυσμιακό υπόδειγμα MA(1), με το ποσοστό των δειγμάτων που εξειδικεύονται ορθά λαμβάνοντας υπόψη τη στατιστική σημαντικότητα και τα κριτήρια.

	$y_t = 0.2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
Total MA(1) with AIC	0.220	0.200	0.322	0.494	0.582	0.635	0.711	0.797	0.817	0.877	0.917	0.941
Total MA(1) with SIC	0.226	0.223	0.358	0.572	0.611	0.717	0.817	0.917	0.840	0.914	0.954	0.978
Total MA(1) with HQ	0.221	0.212	0.339	0.537	0.590	0.666	0.769	0.860	0.823	0.888	0.929	0.949

Πίνακας 4.8: Τα AIC, SIC και HQ χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η στατιστική σημαντικότητα όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι MA(1)

	$y_t = 0.2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
AIC	0.438	0.429	0.711	0.487	0.519	0.510	0.595	0.654	0.619	0.674	0.695	0.711
SIC	0.516	0.545	0.944	0.619	0.619	0.680	0.798	0.902	0.721	0.835	0.906	0.944
HQ	0.451	0.493	0.855	0.564	0.542	0.589	0.711	0.801	0.644	0.746	0.804	0.855

Πίνακας 4.9: Αριθμός αποδεκτών υποδειγμάτων με βάση τη στατιστική σημαντικότητα των παραμέτρων όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι AR(1).

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
W.N.	0.767	0.616	0.368	0.062	0.232	0.032	0	0	0.021	0	0	0
AR(1)	0.210	0.341	0.569	0.843	0.713	0.844	0.899	0.903	0.892	0.900	0.901	0.909
AR(2)	0.007	0.007	0.006	0.002	0.007	0	0	0	0	0	0	0
AR(1) ή AR(2)	0.016	0.036	0.057	0.093	0.048	0.084	0.101	0.097	0.087	0.100	0.099	0.091

Πίνακας 4.10: Αριθμός υποδειγμάτων, σωστά εξειδικευμένων σαν AR(1) με βάση τα κριτήρια AIC, SIC, HQ και PLS.

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$															
	n=25				n=50				n=100				n=250			
	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS
AR(1) ή AR(2)	0	5 (31.25)	0	13 (81.25)	1 (2.78)	18 (50.00)	9 (25.00)	27 (75.00)	1 (17.54)	33 (57.89)	14 (24.56)	36 (63.16)	4 (4.30)	72 (77.41)	40 (43.01)	64 (68.82)
	$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$															
	n=25				n=50				n=100				n=250			
	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS
AR(1) ή AR(2)	0	10 (20.83)	0	32 (66.67)	3 (6.25)	41 (48.81)	14 (16.67)	55 (65.48)	3 (2.97)	67 (66.34)	29 (28.71)	62 (61.39)	10 (10.31)	79 (81.44)	41 (42.27)	70 (72.16)
	$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$															
	n=25				n=50				n=100				n=250			
	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS	AIC	SIC	HQ	PLS
AR(1) ή AR(2)	0	26 (29.88)	4 (4.60)	50 (57.47)	2 (2.00)	49 (49.00)	17 (17.00)	63 (63.00)	5 (5.05)	68 (68.69)	26 (26.26)	67 (67.68)	8 (8.79)	69 (75.82)	40 (43.96)	67 (73.63)

Πίνακας 4.11: Συνοπτικός πίνακας, για το πληθυσμιακό υπόδειγμα AR(1), με το ποσοστό των δειγμάτων που εξειδικεύονται ορθά λαμβάνοντας υπόψη τη στατιστική σημαντικότητα και τα κριτήρια.

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
Total AR(1) with AIC	0.210	0.342	0.570	0.847	0.713	0.847	0.902	0.913	0.892	0.902	0.906	0.917
Total AR(1) with SIC	0.215	0.359	0.602	0.915	0.723	0.885	0.966	0.982	0.918	0.949	0.969	0.978
Total AR(1) with HQ	0.210	0.350	0.583	0.883	0.713	0.858	0.928	0.944	0.896	0.917	0.927	0.949
Total AR(1) with PLS	0.223	0.368	0.605	0.907	0.745	0.899	0.961	0.973	0.942	0.963	0.968	0.976

Πίνακας 4.12: Τα AIC, SIC, HQ και PLS για το πληθυσμιακό υπόδειγμα AR(1), χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η στατιστική σημαντικότητα.

	$y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$				$y_t = 0.8y_{t-1} + \varepsilon_t$			
	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250	n=25	n=50	n=100	n=250
AIC	590	608	629	620	594	616	619	632	576	611	622	631
SIC	777	875	915	947	786	879	923	950	777	869	898	918
HQ	634	748	808	846	635	741	795	847	627	733	788	850
PLS	634	709	779	821	638	731	781	833	657	749	795	834

Κεφάλαιο 5

Επιπτώσεις λανθασμένης εξειδίκευσης στις προβλέψεις

Βασικός σκοπός στην διερεύνηση των χρονολογικών σειρών είναι η δημιουργία προβλέψεων για τις επόμενες χρονικές περιόδους. Ακολουθώντας τον Diebold (1998) περιγράφουμε πως διεξάγονται οι προβλέψεις με τα προαναφερθέντα υποδείγματα. Στη συνέχεια επιχειρούμε να βρούμε τις επιπτώσεις που έχει στις προβλέψεις η χρησιμοποίηση διαφορετικών του πληθυσμιακού υποδειγμάτων.

5.1 Προβλέψεις με ARMA υποδείγματα

Πρόβλεψη είναι η εκτίμηση του στοιχείου Y_{t+h} της μεταβλητής Y με βάση τα προηγούμενα στοιχεία της. Επιθυμητές ιδιότητες της καλής πρόβλεψης είναι :

- η *αμεροληψία* και
- η *αποτελεσματικότητα*, δηλαδή η μικρή διασπορά λάθους πρόβλεψης

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ιδιότητες, σκοπός μας είναι να βρεθεί μια εκτιμημένη τιμή τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$MSE = E(\hat{e}_{t+h})^2 = E(Y_{t+h} - \hat{Y}_{t+h})^2 \quad (5.1)$$

όπου Y_{t+h} η πραγματική τιμή της μεταβλητής την χρονική στιγμή $t+h$ και \hat{Y}_{t+h} η εκτιμημένη με την χρήση ενός από τα προαναφερθέντα υποδείγματα τιμή και \hat{e}_{t+h} το σφάλμα πρόβλεψης για την περίοδο $t+h$. Αποδεικνύεται πως (Pindyck και Rubinfeld, 1998) η άριστη πρόβλεψη για την περίοδο $t+h$, η οποία ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, είναι η εκτίμηση της υπό συνθήκης μέσης τιμής της μεταβλητής Y την χρονική στιγμή $t+h$ δεδομένων όλων

των προηγούμενων τιμών της Y από την χρονική περίοδο 1 μέχρι και την χρονική περίοδο t . Μαθηματικά αυτό αποδίδεται σαν:

$$\hat{Y}_{t+h} = E(Y_{t+h} / Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1), \text{ για } p < t \quad (5.2)$$

Αυτό κυρίως που μας ενδιαφέρει στις προβλέψεις είναι το *διάστημα εμπιστοσύνης* ή αλλιώς *όριο πρόβλεψης* που διατυπώνεται γύρω από την προβλεπόμενη τιμή \hat{Y}_{t+h} για την αληθινή τιμή Y_{t+h} , δηλαδή το διάστημα μέσα στο οποίο θα βρίσκεται η πραγματική τιμή με πιθανότητα $100(1-a)$. Αναζητούμε επομένως το διάστημα $I(Y_{n+h}) = [L(Y), U(Y)]$ για το οποίο ισχύει:

$$P[L(Y) \leq Y_{t+h} \leq U(Y)] = 1-a \quad (5.3)$$

Το διάστημα αυτό δίνεται από τον τύπο:

$$I(Y_{n+h}) = \left[\hat{Y}_{t+h} - c_{\frac{1-a}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{e}_{t+h})}, \hat{Y}_{t+h} + c_{\frac{1-a}{2}} \sqrt{\text{Var}(\hat{e}_{t+h})} \right] \quad (5.4)$$

όπου $\text{Var}(\hat{e}_{t+h})$ είναι η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης για την περίοδο $t+h$. Εάν $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ τότε το $c_{\frac{1-a}{2}}$ είναι η κρίσιμη τιμή $z_{\frac{a}{2}}$ της τυπικής κατανομής.

Στη συνέχεια θα βρεθεί η πρόβλεψη για μια, για δυο και για τρεις περιόδους μπροστά καθώς και το 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τις διαδικασίες που θα μας απασχολήσουν στο ερευνητικό τμήμα της εργασίας δηλαδή τον λευκό θόρυβο, την $AR(1)$, την $AR(2)$, την $MA(1)$ και την $ARMA(1,1)$.

5.1.1 Πρόβλεψη με λευκό θόρυβο

Στην πρόβλεψη με λευκό θόρυβο η τιμή της μεταβλητής τη χρονική στιγμή t με $t \geq n+1$ είναι η:

$$\hat{Y}_t = E(Y_t / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = E(Y_t) = \mu \quad (5.5)$$

Η τιμή του σφάλματος πρόβλεψης είναι ίση με: $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t = \varepsilon_t$. Η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι: $Var(\hat{\varepsilon}_t) = Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Το 95% όριο πρόβλεψης είναι το:

$$I(Y_t) = \left[\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \right] \quad (5.6)$$

5.1.2 Πρόβλεψη με αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα πρώτης τάξεως AR(1)

Για την βέλτιστη πρόβλεψη της επόμενης χρονικής τιμής όταν γνωρίζουμε τη σειρά ως τη χρονική στιγμή n , ισχύει:

$$\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 Y_n \quad (5.7)$$

Το σφάλμα πρόβλεψης για ένα χρονικό βήμα είναι: $\hat{\varepsilon}_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$, δηλαδή το $\hat{\varepsilon}_{n+1}$ είναι λευκός θόρυβος με μέση τιμή 0 και διακύμανση $Var(\hat{\varepsilon}_{n+1}) = Var(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$. Το 95% όριο πρόβλεψης σύμφωνα με τα παραπάνω είναι το:

$$I(Y_{n+1}) = \left[\hat{Y}_{n+1} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma, \hat{Y}_{n+1} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \right] \quad (5.8)$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη για δύο χρονικά βήματα μπροστά δίνεται από τον τύπο:

$\hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_{n+1}$. Με το σφάλμα πρόβλεψης για δύο βήματα μπροστά να είναι το $\hat{\varepsilon}_{n+2} = Y_{n+2} - \hat{Y}_{n+2} = \varepsilon_{n+2} + \phi_1 \varepsilon_{n+1}$ και να έχει διακύμανση: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+2}) = \sigma^2 (1 + \phi_1^2)$. Το 95% όριο πρόβλεψης είναι το:

$$I(Y_{n+2}) = \left[\hat{Y}_{n+2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2}, \hat{Y}_{n+2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2} \right] \quad (5.9)$$

Για τρία χρονικά βήματα μπροστά η πρόβλεψη που ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι η: $\hat{Y}_{n+3} = E(Y_{n+3} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_{n+2}$. Το σφάλμα της πρόβλεψης αυτής είναι: $\hat{\varepsilon}_{n+3} = Y_{n+3} - \hat{Y}_{n+3} = \varepsilon_{n+3} + \phi_1 \varepsilon_{n+2} + \phi_1^2 \varepsilon_{n+1}$ και έχει διακύμανση: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+3}) = \sigma^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4)$. Το 95% όριο πρόβλεψης που σχηματίζεται από την διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι το:

$$I(Y_{n+3}) = \left[\hat{Y}_{n+3} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2 + \phi_1^4}, \hat{Y}_{n+3} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2 + \phi_1^4} \right] \quad (5.10)$$

5.1.3 Πρόβλεψη με αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα δευτέρας τάξεως AR(2)

Υποθέτοντας πως η παρατηρούμενη χρονοσειρά είναι η πραγματοποίηση μιας διαδικασίας AR(2), η βέλτιστη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για ένα χρονικό βήμα μπροστά είναι η:

$$\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 Y_n + \phi_2 Y_{n-1} \quad (5.11)$$

Σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα πρόβλεψης είναι: $\hat{\varepsilon}_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$, δηλαδή λευκός θόρυβος με διακύμανση: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+1}) = Var(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$. Το 95% όριο πρόβλεψης είναι το διάστημα:

$$I(Y_{n+1}) = \left[\hat{Y}_{n+1} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma, \hat{Y}_{n+1} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \right] \quad (5.12)$$

Ακολουθώντας για δύο χρονικά βήματα μπροστά η βέλτιστη πρόβλεψη με AR(2) είναι η:

$$\hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_{n+1} + \phi_2 Y_n. \text{ Το σφάλμα πρόβλεψης δίνεται από τον τύπο:}$$

$$\hat{\varepsilon}_{n+2} = Y_{n+2} - \hat{Y}_{n+2} = \varepsilon_{n+2} + \phi_1 \varepsilon_{n+1}. \text{ Η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι η:}$$

$$Var(\hat{\varepsilon}_{n+2}) = \sigma^2 (1 + \phi_1^2), \text{ και το 95\% όριο πρόβλεψης το διάστημα:}$$

$$I(Y_{n+2}) = \left[\hat{Y}_{n+2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2}, \hat{Y}_{n+2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2} \right] \quad (5.13)$$

Όμοια και για την χρονική περίοδο $n+3$ η βέλτιστη πρόβλεψη είναι η:

$$\hat{Y}_{n+3} = E(Y_{n+3} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 \hat{Y}_{n+2} + \phi_2 \hat{Y}_{n+1}. \text{ Σαν σφάλμα πρόβλεψης έχουμε το:}$$

$$\hat{\varepsilon}_{n+3} = Y_{n+3} - \hat{Y}_{n+3} = \varepsilon_{n+3} + \phi_1 \varepsilon_{n+2} + (\phi_1^2 + \phi_2) \varepsilon_{n+1} \text{ που έχει διακύμανση:}$$

$$Var(\hat{\varepsilon}_{n+3}) = \sigma^2 (1 + \phi_1^4 + \phi_1^2 + \phi_2^2). \text{ Τέλος, το 95\% όριο πρόβλεψης βρίσκεται από το διάστημα:}$$

$$I(Y_{n+3}) = \left[\hat{Y}_{n+3} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^4 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \hat{Y}_{n+3} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^4 + \phi_1^2 + \phi_2^2} \right] \quad (5.14)$$

5.1.4 Πρόβλεψη με υποδείγματα κινητού μέσου όρου πρώτης τάξεως MA(1)

Η πρόβλεψη με το υποδείγμα MA(1) για χρόνο $n+1$ είναι:

$$\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \mu + \theta_1 \varepsilon_n \quad (5.15)$$

Το σφάλμα $\hat{\varepsilon}_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$ για την πρόβλεψη αυτή είναι λευκός θόρυβος με διακύμανση: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+1}) = Var(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$. Σαν 95% διάστημα πρόβλεψης έχουμε το:

$$I(Y_{n+1}) = \left[\hat{Y}_{n+1} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma, \hat{Y}_{n+1} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \right] \quad (5.16)$$

Για προβλέψεις σε χρόνους μεγαλύτερους της τάξης της διαδικασίας κινητού μέσου η πρόβλεψη είναι η μέση τιμή του σφάλματος. Έτσι η πρόβλεψη για $n+2$ χρονικές στιγμές προστά με μία MA(1) διαδικασία είναι: $\hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \mu$. Το σφάλμα της πρόβλεψης έχει τιμή: $\hat{\varepsilon}_{n+2} = Y_{n+2} - \hat{Y}_{n+2} = \varepsilon_{n+2} + \theta_1 \varepsilon_{n+1}$. Η διακύμανση του δίνεται από τον τύπο: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+2}) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2)$. Το 95% όριο πρόβλεψης είναι το διάστημα:

$$I(Y_{n+2}) = \left[\hat{Y}_{n+2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \theta_1^2}, \hat{Y}_{n+2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \theta_1^2} \right] \quad (5.17)$$

Αντίστοιχα και για πρόβλεψη σε $n+3$ χρονικές στιγμές προστά έχουμε: $\hat{Y}_{n+3} = E(Y_{n+3} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \mu$. Το σφάλμα πρόβλεψης βρίσκεται από τον τύπο: $\hat{\varepsilon}_{n+3} = Y_{n+3} - \hat{Y}_{n+3} = \varepsilon_{n+3} + \theta_1 \varepsilon_{n+2}$ και η διακύμανση του παραμένει η ίδια όπως και στην πρόβλεψη για $n+2$ χρονικές στιγμές προστά, δηλαδή: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+3}) = \sigma^2 (1 + \theta_1^2)$. Κατά συνέπεια το διάστημα πρόβλεψης με 0,05 επίπεδο σημαντικότητας είναι το:

$$I(Y_{n+3}) = \left[\hat{Y}_{n+3} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \theta_1^2}, \hat{Y}_{n+3} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \theta_1^2} \right] \quad (5.18)$$

5.1.5 Πρόβλεψη με μεικτά αυτοπαλίνδρομα υποδείγματα κινητού μέσου όρου πρώτης τάξεως, ARMA(1,1)

Η πρόβλεψη με ένα ARMA(1,1) υπόδειγμα είναι η σύνθεση των προβλέψεων με ένα AR(1) υπόδειγμα και με ένα MA(1) υπόδειγμα. Η βέλτιστη πρόβλεψη με ARMA(1,1) για ένα χρονικό βήμα όταν δίνονται τα Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1 είναι:

$$\hat{Y}_{n+1} = E(Y_{n+1} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 Y_n + \theta_1 \varepsilon_n \quad (5.19)$$

Το σφάλμα της πρόβλεψης είναι λευκός θόρυβος, δηλαδή: $\hat{\varepsilon}_{n+1} = Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$ με διακύμανση: $Var(\hat{\varepsilon}_{n+1}) = Var(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$. Το 95% όριο πρόβλεψης που σχηματίζεται είναι το:

$$I(Y_{n+1}) = \left[\hat{Y}_{n+1} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma, \hat{Y}_{n+1} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \right] \quad (5.20)$$

Η βέλτιστη πρόβλεψη για την $n+2$ χρονική στιγμή είναι:

$$\hat{Y}_{n+2} = E(Y_{n+2} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 Y_{n+1}. \text{ Το σφάλμα πρόβλεψης είναι:}$$

$$\hat{\varepsilon}_{n+2} = Y_{n+2} - \hat{Y}_{n+2} = \varepsilon_{n+2} + \phi_1 \varepsilon_{n+1} \text{ και η διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης είναι:}$$

$$Var(\hat{\varepsilon}_{n+2}) = \sigma^2 (1 + \phi_1^2). \text{ Το 95\% όριο εμπιστοσύνης είναι:}$$

$$I(Y_{n+2}) = \left[\hat{Y}_{n+2} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2}, \hat{Y}_{n+2} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2} \right] \quad (5.21)$$

Όμοια για την πρόβλεψη μετά από $n+3$ χρονικές στιγμές έχουμε:

$$\hat{Y}_{n+3} = E(Y_{n+3} / Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_1) = \phi_0 + \phi_1 Y_{n+2}, \quad \text{με σφάλμα πρόβλεψης το:}$$

$$\hat{\varepsilon}_{n+3} = Y_{n+3} - \hat{Y}_{n+3} = \varepsilon_{n+3} + \phi_1 \varepsilon_{n+2} + \phi_1^2 \varepsilon_{n+1}, \quad \text{διακύμανση του σφάλματος πρόβλεψης την :}$$

$$Var(\hat{\varepsilon}_{n+3}) = \sigma^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4) \text{ και 95\% όριο πρόβλεψης το:}$$

$$I(Y_{n+3}) = \left[\hat{Y}_{n+3} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2 + \phi_1^4}, \hat{Y}_{n+3} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1 + \phi_1^2 + \phi_1^4} \right] \quad (5.22)$$

Η πρόβλεψη με υποδείγματα AR(p) MA(q) και ARMA(p,q) είναι η γενίκευση των παραπάνω προβλέψεων που περιγράφηκαν.

5.2. Αποτελέσματα

Στο τμήμα αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις προβλέψεις που γίνονται στα πληθυσμιακά υποδείγματα AR(1) και MA(1), χρησιμοποιώντας τα υποδείγματα του λευκού θορύβου, του αυτοπαλίνδρομου πρώτης και δεύτερης τάξης, αυτό του κινητού μέσου πρώτης τάξης και το μεικτό αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητού μέσου (1,1) τάξης. Για κάθε πληθυσμιακό υπόδειγμα, με διάφορες τιμές αυτοσυσχέτισης και για διάφορα μεγέθη δείγματος, θα υπολογιστεί το διάστημα εμπιστοσύνης της πρόβλεψης, χρησιμοποιώντας τα παραπάνω υποδείγματα και εφαρμόζοντας το θεωρητικό κομμάτι που αναπτύχθηκε προηγουμένως.

Οι πίνακες 5.1 και 5.2 παρουσιάζουν το ποσοστό των δειγμάτων για τα οποία το διάστημα εμπιστοσύνης της πρόβλεψης, για το ανάλογο κάθε φορά υπόδειγμα, περιλαμβάνει την πραγματική τιμή έχοντας λάβει υπόψη το κριτήριο επιλογής τάξης SIC για την εξειδίκευση του υποδείγματος. Το ποσοστό αυτό ονομάζεται *κάλυψη* (coverage). Στους πίνακες αυτούς, παρουσιάζονται τα ποσοστά της κάλυψης, σε ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης 95%. Η τιμή για το ϕ και για το θ που χρησιμοποιήθηκε είναι 0,5 και στις δύο περιπτώσεις. Τα αποτελέσματα με διαφορετικές τιμές ϕ και θ είναι παρόμοια.

Στον πίνακα 5.1 παρατηρούμε πως η πρόβλεψη όταν πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα πρώτου βαθμού έχει υψηλά ποσοστά κάλυψης σε μεγάλα δείγματα. Στα μικρά δείγματα τα ποσοστά κάλυψης ξεκινούν από 81% και αγγίζουν το 94,2%. Όσο το δείγμα αυξάνεται τα ποσοστά αυτά μεγαλώνουν και προσεγγίζουν το ονομαστικό επίπεδο εμπιστοσύνης της πρόβλεψης. Είναι φανερό από τον ίδιο πίνακα ότι η πρόβλεψη με ARMA(1,1) αυξάνει το εύρος της κάλυψης.

Στον πίνακα 5.2 αυτό που παρατηρούμε είναι πως η πρόβλεψη με το AR(1) είναι αυτή που αυξάνει το εύρος της κάλυψης. Ακόμα και σε μικρά δείγματα το ποσοστό της κάλυψης κυμαίνεται μεταξύ 87% και 94,2. Συμπεραίνουμε πως το SIC λειτουργεί πιο αποτελεσματικά όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι το MA(1), όσον αφορά την πρόβλεψη.

Πίνακας 5.1: Απόδοση των 95% ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης της πρόβλεψης για AR(1)

$y_t = 0.5y_{t-1} + \varepsilon_t$						
		W.N.	AR(1)	MA(1)	AR(2)	ARMA(1,1)
n=25	Y_{26}	88.35	94.20	91.32	ΔB	81.15
	Y_{26}	87.61	94.10	92.03	ΔB	87.59
	Y_{26}	88.46	94.01	92.04	ΔB	93.56
n=50	Y_{51}	89.49	94.29	92.06	ΔB	82.15
	Y_{52}	90.15	94.14	92.35	ΔB	88.22
	Y_{53}	90.24	94.25	91.02	ΔB	93.97
n=100	Y_{101}	ΔB	94.46	92.97	90.00	82.35
	Y_{102}	ΔB	94.08	92.66	90.00	88.24
	Y_{103}	ΔB	94.32	91.88	90.00	94.12
n=250	Y_{251}	ΔB	94.79	93.16	91.5	83.06
	Y_{252}	ΔB	94.68	92.98	91.5	89.16
	Y_{253}	ΔB	94.82	92.76	91.5	94.32

Πίνακας 5.2: Απόδοση των 95% ασυμπτωτικών διαστημάτων εμπιστοσύνης της πρόβλεψης για MA(1)

$y_t = 0.5\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$						
		W.N.	AR(1)	MA(1)	AR(2)	ARMA(1,1)
n=25	Y_{26}	90.32	87.35	93,99	90.12	90.55
	Y_{26}	91.65	88.59	94,15	90.98	91.42
	Y_{26}	92.20	88.12	94,10	90.75	93.01
n=50	Y_{51}	91.15	89.22	94.21	91.24	91.22
	Y_{52}	91.75	89.70	94.30	91.75	92.45
	Y_{53}	93.63	89.51	94.15	91.86	93.58
n=100	Y_{101}	ΔB	90.40	94.32	93.32	93.54
	Y_{102}	ΔB	91.05	94.59	94.29	93.11
	Y_{103}	ΔB	91.60	94.15	94.35	93.02
n=250	Y_{251}	ΔB	91.21	94.52	93.96	94.81
	Y_{252}	ΔB	91.23	94.66	94.35	93.09
	Y_{253}	ΔB	91.83	94.49	94.69	92.94

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας θα παρουσιαστούν κάποια βασικά συμπεράσματα που εξήχθησαν από την έρευνα και θα συγκριθούν με αυτά παλαιότερων ερευνών που αναφέρονται στη βιβλιογραφία. Τέλος θα αναφερθούν και κάποιες σκέψεις που πιθανόν να βοηθήσουν στην περαιτέρω διερεύνηση της συγκεκριμένης εργασίας.

6.1 Συμπερασματικά σχόλια

Το κύριο συμπέρασμα της εργασίας αυτής είναι ότι τα κριτήρια επιλογής τάξης είναι αρκετά διαφωτιστικά στην εξειδίκευση ενός υποδείγματος όταν ο έλεγχος για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών δεν μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα της εργασίας συμφωνούν με αρκετά από αυτά της υπάρχουσας βιβλιογραφίας.

Αναφέρουμε συνοπτικά, τα αποτελέσματα της εργασίας μαζί με την βιβλιογραφία που τα υποστηρίζει.

- 1) όταν η τάξη του υποψήφιου μοντέλου είναι σχετικά μικρή τότε το AIC υπερεκτιμά την τάξη του υποδείγματος, βλέπε Jones (1975), Shibata (1976) και Sneek (1984),
- 2) το SIC είναι αποδοτικότερο του AIC, βλέπε Hannan (1980), Koehler & Murphree.
- 3) το κριτήριο HQ έχει καλύτερη απόδοση από το AIC αλλά είναι κατώτερο του SIC, βλέπε Hurvich και Tsai (1989), Bedrick και Tsai (1994),
- 4) το PLS είναι ένα μέτριο κριτήριο επιλογής τάξης με καλύτερο από τα τέσσερα το SIC και λιγότερο καλό το AIC, βλέπε Djuric και Kay (1992), Yuan και Nelson (1994), Giurcaneanu και Rissanen (2006), Roos και Rissanen (2008),
- 5) το SIC το HQ και το PLS είναι συνεπή κριτήρια, καθώς όσο αυξάνει το μέγεθος του δείγματος τόσο η πιθανότητα να επιλέξουν τη πραγματική τάξη πλησιάζει στο ένα, βλέπε Hemerly και Davis (1989) και Hemerly και Fragoso (1990).

Σε μικρά δείγματα, για μικρά ϕ και θ του πληθυσμιακού υποδείγματος, η σωστή εξειδίκευση είναι δύσκολη. Οι πιθανότητες να πραγματοποιηθεί σωστή εξειδίκευση του υποδείγματος, λαμβάνοντας υπόψη τον έλεγχο για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών αλλά και

τα κριτήρια επιλογής τάξης, είναι αρκετά αυξημένες όταν πρόκειται για μεγάλα ϕ και θ αλλά και όταν το προς εξέταση δείγμα είναι σχετικά μεγάλο.

Κατασκευάσαμε επίσης κατάλληλα διαστήματα πρόβλεψης για τις πραγματικές τιμές των μεταβλητών, βασιζόμενοι σε διαφορετικό υπόδειγμα κάθε φορά. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως κριτήριο SIC δίνει ένα αρκετά ικανοποιητικό ποσοστό κάλυψης το οποίο κυμαίνεται για μικρά δείγματα από 87% μέχρι 94% και για μεγάλα δείγματα από 91% μέχρι και 94,5%. Το συμπέρασμα αυτό είναι ίδιο και όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι το AR(1) αλλά και όταν το πληθυσμιακό υπόδειγμα είναι το MA(1).

6.2 Σκέψεις για περαιτέρω διερεύνηση του θέματος

Οι δυνατότητες επεκτάσεως της συγκεκριμένης εργασίας είναι απεριόριστες. Εκτός των τριών κριτηρίων, οποίων η απόδοση συγκρίθηκε με αυτήν του PLS, θα μπορούσαν να προστεθούν και άλλα κριτήρια στην σύγκριση, συνεπή ή μη. Επίσης, τα πληθυσμιακά υποδείγματα θα μπορούσαν να επεκταθούν σε μεγαλύτερης τάξεως και να εξεταστούν και εκεί οι αποδόσεις των κριτηρίων χρησιμοποιώντας παράλληλα και τον έλεγχο για τη στατιστική σημαντικότητα των συντελεστών των υποδειγμάτων. Τέλος, θα μπορούσε να εξεταστεί η επίδραση της τιμής του συντελεστή εμπιστοσύνης $1-\alpha$ της t-κατανομής, στο ποσοστό των σωστά εξειδικευμένων δειγμάτων με τη χρήση του ελέγχου στατιστικής σημαντικότητας των συντελεστών.

Βιβλιογραφία

- Akaike, H. (1969). Fitting Autoregressive Models for Prediction. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **21**, 243 – 247.
- Akaike, H. (1970). Statistical Predictor Identification. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **22**, 203 – 217.
- Akaike, H. (1973). Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. In Perron, B. N. and Csaki, F. (eds), 2nd International Symposium in Information Theory, Budapest: Akademiai Kiado, 207 – 261.
- Akaike, H. (1977). On entropy maximization principle. In: *Proc. Symp. On Applications of Statistics* ed. P. R. Krishnaiah, 27-47. Amsterdam, The Netherlands.
- Akaike, H. (1979). A Bayesian Extension of the Minimum AIC procedure of Autoregressive Model Fitting. *Biometrika*, **66**, 237 – 242.
- Bedrick, E., J., Tsai, C., L. (1994). Model Selection for Multivariate Regression in Small Samples. *Biometrics*, **50**, 226-231.
- Beveridge, S. και Oickle, C. (1994). A Comparison of Box-Jenkins and Objective Methods for Determining the Order of a Non-seasonal ARMA Model. *Journal of Forecasting*, **13**, 419 – 434.
- Box, G.E.P, Jenkins G.M. και Reinsel, G.C. (2008). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley, 4th έκδοση.
- Brockwell, P. J. και Davis, R. A. (1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer.
- Broersen, P.M.T., Wensink, H.E., (1991). Finite sample theory for autoregressive model estimation. *13-th Colloque GRETSI, Juan-les-Pins, France*, 297-300.
- Broersen, P.M.T., Wensink, H.E., (1993). On finite sample theory for autoregressive model order selection. *IEEE Transactions on signal processing*, **41**, 194-204.
- Cavanaugh, J.E. (1999). A large-sample model selection criterion based on Kullback's Symmetric Divergence. *Statistics & Probability Letters*, **44**, 333-344.
- Davis, M., H., A., E. Michael Hemerly, E., M. (1989). Order determination and adaptive control of ARX models using the PLS criterion. *Stochastic Differential Systems*, **126**, 91-101.
- Davis, M.H.A. και Hemerly, E.M. (1990). Order determination and adaptive control of ARX models using the PLS criterion, *Stochastic Differential Systems*, **126**, 91-101.
- de Gooijer, J.G., Abraham, B., Gould, A. και Robinson, L. (1985). Methods for Determining the order of an Autoregressive Moving Average Process: A Survey, *International Statistical Review*, **53**, 301 – 329.

- Djuric, P., Kay, S. (1992). Order selection of autoregressive models. *IEEE Trans. Signal. Proc.*, **40**, 2829-2833.
- Geweke, J. F. και Mease, R. A. (1981). Estimating Regression Models of Finite but Unknown Order. *International Economic Review*, **22**, 55 – 77.
- Giurcaneanu, C., D., Rissanen, J.(2006). Estimation of AR and ARMA models by stochastic complexity. *IMS lecture notes-monograph series time series and related topics*, **52**,48-59.
- Green, W., H. (2002). *Econometric Analysis*. Prentice-Hall, 5^η έκδοση.
- Halkos, G., Kevork, I. (2006). Estimating population means in covariance stationary processes. Conference Proceedings for International Conference in Consolidation of the statistical systems of EU Candidate Countries, University of Thessaly, Volos, Greece, 179-190.
- Halkos, G., Kevork, I. (2007). Critical values for testing a unit root in finite samples from the MA(1). *Applied Economics Letters*, **14**, 191 – 195.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hannan, E. J. (1980). The Estimation of the Order of an ARMA process. *Annals of Statistics*, **8**, 1071 – 1081.
- Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979). The Determination of the Order of an Autoregression. *Journal of Royal Statistical Society*, **41**, 190 – 195.
- Hannan, E. J. and Rissanen, J. (1982). Recursive estimation of Mixed Autoregressive-Moving Average Order, *Biometrika*, **69**, 81 – 94.
- Hannan, E.J., Mcdougall, A.J. και Poskit, D.S. (1989). Recursive estimation of autoregressions. *Journal of Royal Statistic Societ,y* **51**, 217-233.
- Hemerly, E., M., Davis, M., H. (1989). Strong consistency of the PLS criterion for order determination of autoregressive processes. *The Annals of Statistics*, **17**, 941-946.
- Hemerly, E., M., Fragoso, M., D. (1990). Will the PLS criterion for order estimation work with AML and a posteriori prediction error? *Systems & Control Letters*, **14**, 79-92.
- Hurvich, C. M. and Tsai, C. L. (1989). Regression and Time Series Model Selection in Small Samples. *Biometrika*, **76**, 297 – 307.
- Jones, R. H. (1975). Fitting autoregressions, *Journal of American Statistics Association* **70**, 590-592.
- Kavalieris, L. (1991). A Note on Estimating Autoregressive-moving Average Order. *Biometrika* **78**, 920 – 922.
- Kevork, I., S. (2009). Estimating the optimal order quantity and the maximum expected profit for single-period inventory decisions. *Omega*, **38**, 218-227.

- Koehler, A.,B., Murphree, E., S. (1988). A Comparison of the Akaike and Schwarz Criteria for Selecting Model Order. *Journal of the Royal Statistical Society*, **37**, 187-195.
- Lai, T., L., Wei, C., Z. (1982). Least Squares Estimates in Stochastic Regression Models with Applications to Identification and Control of Dynamic Systems. *The Annals of Statistics*, **10**, 154-166.
- Larimore, W. E., Mehra, R. K., (1985). Problem of overfitting data. *Byte*, **10**, 167-180.
- Ljung, G.M., Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, **65**, 297-303.
- Ozaki, T. (1977). On the order determination of ARIMA models. *Applied Statistics*, **26**, 290-301.
- Rissanen, J. (1978). Modelling by Shortest Data Description. *Automatica*, **14**, 467 – 471.
- Rissanen, J. (1986a). Stochastic complexity and modeling. *Annals of Statistics*, **14**, 1080-1100.
- Rissanen, J. (1986b). Order estimation by accumulated prediction errors. *J. Appl. Prob.*, **23A**, 465-471.
- Roos, T., Rissanen, J. (2008). On sequentially normalized maximum likelihood models. In proceedings of the workshop on Information Theoretic Methods in Science and Engineering (WITMSE-08) ,Tampere, Finland, August, 18-20.
- Schwarz, G. (1978). Estimating The Dimension of a Model. *The Annals of Statistics*, **6**, 461 – 464.
- Shibata, R. (1976). Selection of the Order of an Autoregressive Model by Akaike's Information Criterion. *Biometrika*, **63**, 117 – 126.
- Shibata, R. (1980). Asymptotically efficient selection of the order of the model for estimating parameters of a linear process, *Annals of Statistics*, **80**, 147-164.
- Sneek, J., M. (1984). *Modeling procedures for univariate time series*. Free Press, Amsterdam.
- Stoica, P., Eykhoff, P., Jansen, P. και Söderström, T. (1986). Model Selection by Cross- validation. *International Journal of Control*, **43**, 1841 – 1878.
- Wei, C., Z. (1992). On Predictive Least Squares Principles. *The Annals of Statistics*, **20**, 1-42.
- Wei, W. S. (2006). *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*. Pearson, 2^η έκδοση.
- Wooldridge, J. (2004). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. South-Western, 3^η έκδοση.
- Yuan, M., Nelson, B., L. (1994). Autoregressive-output-analysis methods revisited. *Annals of Operations Research*, **53**, 391-418.

