



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

## **Θεωρία διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα**

**Ευάγγελος Αγγελής**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**  
**Υπεύθυνος**  
**Μαρία Αδάμ**  
**Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία**  
**Σεπτέμβριος 2014**





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ  
ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

## **Θεωρία διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα**

**Ευάγγελος Αγγελής**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπουσα  
Μαρία Αδάμ  
Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία  
Σεπτέμβριος 2014**

# **Θεωρία διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα**

**Ευάγγελος Αγγελής**

## **Τριμελής Επιτροπή:**

Μαρία Αδάμ, Επίκουρος Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με  
Εφαρμογές στη Βιοϊατρική (επιβλέπουσα)

Παντελεήμων Μπάγκος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής με  
Εφαρμογές στη Βιοϊατρική

Βασίλειος Πλαγιανάκος, Αναπληρωτής Καθηγητής του Τμήματος Πληροφορικής με  
Εφαρμογές στη Βιοϊατρική

# Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Έχοντας ολοκληρώσει την πτυχιακή εργασία μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, κα Μαρία Αδάμ, Επίκουρο Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, για τη συνεχή παρακολούθηση, υποστήριξη και ενθάρρυνση κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Θα ήθελα, επίσης, να την ευχαριστήσω για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή της, προς την επίλυση των διάφορων θεμάτων καθ' όλη την πορεία της ανάπτυξης και της συγγραφής αυτής της εργασίας,

τους κ. Παντελεήμονα Μπάγκο και κ. Βασίλειο Πλαγιανάκο, μέλη της Τριμελούς Επιτροπής και Αναπληρωτές Καθηγητές στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας για τη συμμετοχή τους στην Εξεταστική Επιτροπή, διαβεβαιώνοντάς τους ότι οι παρατηρήσεις τους θα ληφθούν σοβαρά υπ' όψιν,

το Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και τους υπόλοιπους διδάσκοντες για το θετικό ακαδημαϊκό κλίμα και την άψογη συνεργασία μας.

Επιπλέον, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου, η οποία με στήριξε ποικιλοτρόπως, τόσο ηθικά όσο και υλικά, καθ' όλη τη διάρκεια της μέχρι τώρα ζωής μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη φίλη μου Βασιλική Μυλωνή τόσο για την επικοινωνιακή βοήθεια που μου παρείχε όσο και για την ψυχολογική υποστήριξη της.

Ευάγγελος Αγγελής

Λαμία, Σεπτέμβριος 2014



# Περιεχόμενα

Πρόλογος .....	1
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> .....	<b>3</b>
<b>Βασικές έννοιες και σχέσεις</b> .....	<b>3</b>
1.1 Ορισμοί και συμβολισμοί.....	3
1.2 Ελάχιστο πολυώνυμο .....	13
1.3 Διαγωνοποίηση .....	16
1.4 Ορθοκανονική διαγωνοποίηση .....	18
1.5 Νόρμες πινάκων .....	20
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b> .....	<b>27</b>
<b>Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα</b> .....	<b>27</b>
2.1 Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα με μεταβλητή $\varepsilon$ .....	28
2.2 Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα με τυχαίο πίνακα $E$ .....	45
2.3 Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα με μεταβλητές $a, b$ και πίνακα $E$ .....	50
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b> .....	<b>75</b>
<b>Διαταραχές ιδιοτιμών αόριστου πίνακα</b> .....	<b>75</b>
3.1 Διαταραχές συμμετρικών πινάκων .....	77
3.2 Μετατροπή αόριστου πίνακα σε θετικά ορισμένο .....	81
3.2.1 Μέθοδος υπερισχύοντος διαγώνιου πίνακα.....	81
3.2.2 Μέθοδος θετικών κύριων υπο-οριζουσών .....	84
3.2.3 Μέθοδος πίνακα βαθμού 1 .....	87
3.2.4 Ορισμένα μέτρα σύγκρισης των μεθόδων.....	89
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	<b>95</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b> .....	<b>97</b>
<b>Περίληψη</b> .....	<b>123</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>125</b>





## Πρόλογος

Δύο σημαντικές έννοιες της ανάλυσης πινάκων, που δίνουν πληροφορίες σχετικά με τη διαγωνοποίηση ενός πίνακα, τη συμπεριφορά του συστήματος, όπως την ευστάθεια, την ασυμπτωτική συμπεριφορά, είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα.

Έτσι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα έχουν ευρύ φάσμα εφαρμογών, στη μηχανική, όπου οι ιδιοτιμές καθορίζουν την αντοχή ενός κτηρίου, στην αεροναυπηγική όπου οι ιδιοτιμές καθορίζουν την ομαλότητα της πτήσης του αεροσκάφους και σε διάφορες πολυμεταβλητές τεχνικές ανάλυσης βιοϊατρικών δεδομένων.

Όμως στη πραγματικότητα υπάρχει ένα σφάλμα στους υπολογισμούς που μπορεί να οφείλεται στην εκτέλεση ενός αλγορίθμου, στην ακρίβεια οργάνων μέτρησης, στην πεπερασμένη ικανότητα υπολογισμού των  $H/Y$ , μπορούν να προκαλέσουν ελλιπή στοιχεία στα σύνολα δεδομένων, έτσι αυτή η απουσία των στοιχείων προκαλεί προβλήματα σε διάφορες πολυμεταβλητές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων. Με τη βοήθεια της θεωρίας διαταραχών διαπιστώνεται το μέγεθος της επίδρασης των σφαλμάτων στη ακριβή λύση του προβλήματος.

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία αναφέρεται η θεωρία διαταραχής των ιδιοτιμών των πινάκων, η οποία μελετά τρόπους παράκαμψης των προβλημάτων που περιγράφηκαν παραπάνω. Ειδικότερα, σκοπός της εν λόγω πτυχιακής εργασίας είναι η ανασκόπηση της υπάρχουσας βιβλιογραφίας-αρθρογραφίας σχετικά με τη διαταραχή των ιδιοτιμών των πινάκων, η εφαρμογή της θεωρίας για την ανάπτυξη μεθόδων, τη δημιουργία και υλοποίηση νέων κωδίκων καθώς και τη σύγκριση αυτών των μεθόδων με στόχο την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητάς τους.

Κάθε κεφάλαιο αυτής της πτυχιακής εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες αριθμούνται με δυο αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αλγόριθμοι, τα σχόλια και τα παραδείγματα αριθμούνται με δύο αριθμούς, από τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισης τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της θεωρίας πινάκων, που είναι απαραίτητες να αναφερθούν για τα παρακάτω κεφάλαια, όπως για παράδειγμα, η ορίζουσα, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα καθώς και οι σημαντικότερες ιδιότητες

τους, επιπλέον, αναφέρονται τα σημαντικότερα θεωρήματα σχετικά με τη διαγωνοποίηση πίνακα. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται αναφορά στους ορισμούς και στις ιδιότητες για τις νόρμες πίνακα.

Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται στη θεωρία διαταραχής πίνακα, όπου διατυπώνονται τα σημαντικότερα θεωρήματα και πορίσματα διαταραχής, στα οποία βασίστηκαν οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν και οι κώδικες που γράφτηκαν. Συγκεκριμένα, αναφέρεται το θεώρημα Geršgorin και μέσα από σχόλια και παραδείγματα αναπτύσσονται οι εφαρμογές του. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του θεωρήματος των Ostrowsky-Elsner, γίνεται η διαταραχή οποιουδήποτε πίνακα με τη χρήση τυχαίου πίνακα με κατάλληλα μικρή νόρμα. Στο τέλος του κεφαλαίου, αναπτύσσεται ένας αλγόριθμος διαταραχής πίνακα με τη χρήση ενός τυχαίου πίνακα και δύο τυχαίων πραγματικών μεταβλητών, βασιζόμενος στη θεωρία του γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger.

Στο τρίτο κεφάλαιο, αναφέρονται θεωρήματα διαταραχής για συμμετρικούς πίνακες καθώς επίσης παρατίθενται τρεις εφαρμογές διαταραχής ιδιοτιμών που σχετίζονται με γνωστά θεωρήματα, προκειμένου να υπολογιστούν οι πλησιέστεροι προσεγγιστικά θετικά ημιορισμένοι πίνακες και να παρακαμφθούν τα «προβλήματα» που προκαλεί η αοριστία των πινάκων. Ειδικότερα, οι μέθοδοι διαταραχής ιδιοτιμών συμμετρικών πινάκων, οι οποίες θα παρουσιαστούν στην παρούσα ενότητα είναι τρεις και είναι: η μέθοδος υπερισχύοντος διαγώνιου πίνακα, η μέθοδος θετικών κύριων υπο-οριζουσών και η μέθοδος πίνακα βαθμού 1. Επιπλέον, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται ορισμένα μέτρα για τη σύγκριση όλων των παραπάνω μεθόδων διαταραχής, τα οποία σχετίζονται με : νόρμες (νόρμα γραμμής και τη φασματική νόρμα), τη διαφορά απολύτων τιμών και το δείκτη κατάστασης (condition number) των αντίστοιχων πινάκων.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας ακολουθούν η βιβλιογραφία με τα σχετικά συγγράμματα, καθώς και το παράρτημα. Στο παράρτημα δίνονται οι κώδικες σε Matlab που αναπτύχθηκαν στη παρούσα εργασία για τον υπολογισμό διαταραχών πινάκων, που αφορούν στους αλγόριθμους των Κεφαλαίων 2 και 3.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Βασικές έννοιες και σχέσεις

### 1.1 Ορισμοί και συμβολισμοί

Στην παρούσα πτυχιακή το σύνολο πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με  $\mathbb{R}$ , και το σύνολο των μιγαδικών  $\mathbb{C}$ . Με το σύμβολο  $\mathbb{F}$  δηλώνεται είτε το σύνολο των πραγματικών αριθμών είτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Επίσης το σύνολο των  $m \times n$  πινάκων συμβολίζεται  $M_{m \times n}$  και το σύνολο των τετραγωνικών  $n \times n$  πινάκων συμβολίζεται  $M_n$ .

Ένας πίνακας σημειώνεται με κεφαλαίο γράμμα και στο σύνολο των πινάκων στο οποίο ανήκει και τα στοιχεία του πίνακα  $A \in M_{m \times n}$  σημειώνονται  $a_{ij}$ , όπου  $1 \leq i \leq m$  και  $1 \leq j \leq n$ .

Ένας  $m \times n$  πίνακας λέγεται **μηδενικός**, αν όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με μηδέν και συμβολίζεται με  $\mathbb{O}$ .

Ένας  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$ , ο **ανάστροφος** σημειώνεται  $A^T = [a_{ji}] \in M_{n \times m}$ .

Ένας  $A \in M_{m \times n}$  με μιγαδικά στοιχεία  $a_{ij} + \beta_{ij}i$ ,  $a_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ , λέγεται **συζυγής**, αν για κάθε  $i, j$  ισχύει  $a_{ij} - \beta_{ij}i$ , και συμβολίζεται  $\bar{A}$ .

Ο πίνακας  $\bar{A}^T$  ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^*$ . Ισχύει ότι  $A^* = \bar{A}^T = (\bar{A})^T$ .

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n$  λέγεται **συμμετρικός**, αν για κάθε  $i, j$  ισχύει  $a_{ij} = a_{ji}$ , δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει  $A = A^T$ .

Συνήθως, η έννοια του συμμετρικού πίνακα συνδέεται με την παραπάνω σχέση για έναν πίνακα που έχει πραγματικά στοιχεία. Στην παρούσα πτυχιακή, όταν αναφερόμαστε σε συμμετρικό πίνακα θα εννοούμε, τετραγωνικό πίνακα με πραγματικά στοιχεία που ικανοποιεί  $A = A^T$ .

Ένας  $A \in M_n$  λέγεται **αντισυμμετρικός**, αν για κάθε  $i, j$  ισχύει  $a_{ij} = -a_{ji}$ , δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει  $A = -A^T$ .

Ένας πίνακας με μιγαδικά στοιχεία  $A \in M_n$  για τον οποίο ισχύει  $A^* = A$  ονομάζεται **Ερμιτιανός**, ενώ αν ισχύει  $A^* = -A$  ονομάζεται **αντιερμιτιανός**.

Ένας πραγματικός τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n$  λέγεται **κανονικός**, αν ισχύει  $A^T A = AA^T$ .

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n$  με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς λέγεται **ορθογώνιος**, αν ισχύει

$$A^T A = AA^T = I_n,$$

όπου  $I_n$  συμβολίζει το **μοναδιαίο** πίνακα.

Αν ο πίνακας  $A \in M_n$  έχει μιγαδικά στοιχεία και ισχύει

$$A^* A = AA^* = I_n,$$

ο πίνακας ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**.

Για έναν τετραγωνικό πίνακα  $A \in M_n$  η **ορίζουσα** του πίνακα σημειώνεται με  $\det A$ .

Ένας πίνακας  $A \in M_n$  λέγεται **αντιστρέψιμος** αν και μόνο αν υπάρχει  $B \in M_n$  τέτοιος ώστε:

$$AB = BA = I_n. \quad (1.1)$$

Αποδεικνύεται ότι ο  $A \in M_n$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$$\det A \neq 0.$$

Ο πίνακας  $B$  στην (1.1) ονομάζεται **αντίστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^{-1}$ .

### Ορισμός 1.1 [8, 11]

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n$  και ένα μη μηδενικό διάνυσμα  $x \in M_{n \times 1}$  τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$Ax = \lambda x, \quad (1.2)$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Η τιμή του  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα  $A$  και το  $x$  ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του  $A$ , αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$ , το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος (1.2) ονομάζεται **ιδιόχωρος** της  $\lambda$  και σημειώνεται με  $V(\lambda)$ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα  $A$ .

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  συμβολίζεται  $\sigma(A)$  και ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα. Από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα, αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται  $\rho(A)$ , δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.3)$$

### Ορισμός 1.2 [13]

Το διάνυσμα που ικανοποιεί τη σχέση (1.2) ονομάζεται **δεξιό ιδιοδιάνυσμα** της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Αντίστοιχα ως **αριστερό ιδιοδιάνυσμα** της ιδιοτιμής  $\lambda$  ορίζεται, το διάνυσμα  $y \in M_{n \times 1}$ , που ικανοποιεί τη σχέση:

$$A^T y = \lambda y \quad \text{ή} \quad y^T A = \lambda y^T, \quad (1.4)$$

### Ορισμός 1.3

**Χαρακτηριστικό πολυώνυμο**  $\chi_A(\lambda)$  του πίνακα  $A \in M_n$  ονομάζεται το  $n$ -οστού βαθμού πολυώνυμο με συντελεστές  $\beta_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  για το οποίο ισχύει:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n - \beta_{n-1} \lambda^{n-1} - \beta_{n-2} \lambda^{n-2} - \dots - \beta_0), \quad (1.5)$$

και υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση, που ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση**

$$\det(A - \lambda I) = \chi_A(\lambda) = 0. \quad (1.6)$$

### Πρόταση 1.1

Οι ιδιοτιμές  $\lambda$  ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.6).

**Απόδειξη:**

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.2), αν  $\lambda$  ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και  $x$  το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμά της ισχύει:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax = \lambda Ix \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Το παραπάνω γραμμικό ομογενές σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

από όπου είναι φανερό ότι οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1.6).  $\square$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1 οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.6) είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , συνεπώς επιλύοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση (1.6) το χαρακτηριστικό πολυώνυμο στην (1.5) μπορεί να παραγοντοποιηθεί από τις ρίζες της εξίσωσης στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{n_k} \quad \text{και} \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (1.7)$$

Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται μια ιδιοτιμή στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A \in M_n$  ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  και σημειώνεται με  $n_i$ . Αν η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής είναι ίση με τη μονάδα, τότε αυτή η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **απλή**, σε διαφορετική περίπτωση η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται από την πολλαπλότητά της.

Η διάσταση του ιδιόχωρου (δηλαδή ο μέγιστος αριθμός των γραμμικών ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων) ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ , και συμβολίζεται με  $\dim V(\lambda_i)$ . Αποδεικνύεται ότι για τη γεωμετρική πολλαπλότητα ισχύει

$$\dim V(\lambda_i) = n - \text{rank}(A - \lambda_i I_n), \quad (1.8)$$

όπου  $A \in M_n$  και  $\text{rank}(A - \lambda_i I_n)$  συμβολίζει το βαθμό του πίνακα  $A - \lambda_i I_n$ .

**Πρόταση 1.2**

Αν  $n_i$  είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ , τότε ισχύει

$$1 \leq \dim V(\lambda_i) \leq n_i, \quad (1.9)$$

όπου  $\dim V(\lambda_i)$  σημειώνει τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιόχωρου της  $\lambda_i$ . Δηλαδή, η γεωμετρική πολλαπλότητα της  $\lambda_i$  είναι μικρότερη ή ίση της αλγεβρικής της πολλαπλότητας.

### Παράδειγμα 1.1

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3.$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ .

#### Λύση:

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$  εφαρμόζοντας την (1.6) έχουμε:

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-2).$$

- Σύμφωνα με την πρόταση 1.1, οι ιδιοτιμές θα είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης στην (1.6)

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2.$$

Το φάσμα του πίνακα  $A$  είναι

$$\sigma(A) = \{-1, -1, 2\}.$$

Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή  $\lambda = -1$  είναι διπλή, ενώ η ιδιοτιμή  $\lambda = 2$  είναι απλή.

- Για την ιδιοτιμή  $\lambda = -1$  λύνουμε το σύστημα:

$$(A - (-1)I)x = 0 \Leftrightarrow (A + I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4+1 & -5 & 1 \\ 2 & -3+1 & 1 \\ 0 & 0 & -1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ και } 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ και } x_3 = 0.$$

Άρα είναι το σύνολο των λύσεων του συστήματος για την ιδιοτιμή  $\lambda = -1$

$$V(-1) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{C} \right\},$$

με διάσταση 1 και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Επειδή η ιδιοτιμή  $\lambda = -1$

είναι διπλή (1.9) επαληθεύεται από τη σχέση  $1 \leq \dim V(-1) \leq 2$ , που εδώ είναι  $\dim V(-1) = 1$ .

• Για την ιδιοτιμή  $\lambda = 2$  λύνουμε το σύστημα:

$$(A - 2I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4-2 & -5 & 1 \\ 2 & -3-2 & 1 \\ 0 & 0 & -1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ και } x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2}x_2 \text{ και } x_3 = 0.$$

Άρα το σύνολο των λύσεων του συστήματος για την ιδιοτιμή  $\lambda = 2$  είναι

$$V(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{C} \right\} \text{ με διάσταση 1 και το αντίστοιχο}$$

ιδιοδιάνυσμα είναι  $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ . Επειδή η ιδιοτιμή  $\lambda = 2$  είναι απλή είναι φανερό ότι

$\dim V(2) = 1$  επαληθεύοντας την (1.9) □

Για τα χαρακτηριστικά ποσά ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in M_n$  οι βασικότερες ιδιότητες διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [6, 8, 9, 10, 11, 15].

### Πρόταση 1.3

1. Έστω  $A \in M_n$  και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  να είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ . Τότε ισχύουν:

i.  $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

ii. Ο πίνακας  $A \in M_n$  είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή.



2. Αν  $\lambda, x$  είναι χαρακτηριστικά ποσά του  $A \in M_n$ , τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^k$  ισχύει  $A^k x = \lambda^k x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , όπου  $\mathbb{Z}$  το σύνολο των ακέραιων αριθμών.
3. Αν  $\lambda, x$  είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in M_n$ , τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^{-k}$  είναι  $\lambda^{-k}$  και  $x$  αντίστοιχα, όπου  $k \in \mathbb{Z}$ .
4. Για κάθε  $A \in M_n$  ισχύει ότι οι  $A, A^T$  έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο άρα και τις ίδιες ιδιοτιμές, επομένως ισχύει:
  - i.  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ .
  - ii.  $A^T y = \lambda y$ , το αριστερό ιδιοδιάνυσμα  $y$  του  $A$  ορίζεται και ως δεξιό ιδιοδιάνυσμα του  $A^T$ .
5. Για κάθε Ερμιτιανό (συμμετρικό) πίνακα  $A \in M_n$  ισχύουν:
  - i. Οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.
  - ii. Αν  $x_1, x_2$  δύο ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε, αυτά είναι κάθετα και ισχύει  $(x_1)^T x_2 = 0$ .
  - iii. Το δεξιό και αριστερό ιδιοδιάνυσμα στην ίδια ιδιοτιμή ταυτίζονται.

#### Ορισμός 1.4 [12, Ορισμός 1.6], [8, Ορισμός 9.4]

Έστω  $A \in M_n$  ένας συμμετρικός πίνακας. Αν για κάθε πραγματικό μη μηδενικό  $x \in M_{n \times 1}$  ισχύει

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0,$$

τότε ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **θετικά ορισμένος** (positive definite), ενώ όταν ισχύει

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0,$$

ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος πίνακας** (positive semidefinite matrix) ή **μη-αρνητικά ορισμένος πίνακας** (non-negative definite matrix).

**Ορισμός 1.5**

Έστω  $A \in M_n$  συμμετρικός πίνακας. Αν για κάθε πραγματικό μη μηδενικό  $x \in M_{n \times 1}$  ισχύει  $x^T A x < 0$ , τότε ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **αρνητικά ορισμένος** (negative definite), ενώ όταν ισχύει  $x^T A x \leq 0$  ονομάζεται **αρνητικά ημιορισμένος πίνακας** (negative semidefinite matrix).

Για να διαπιστώσουμε αν ένας συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος εφαρμόζουμε ένα από τα κριτήρια που διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, η απόδειξη της μπορεί να βρεθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας, όπως για παράδειγμα [8, Προτάσεις 9.2 και 9.3], [10, Theorems 7.2.1 και 7.2.5].

**Πρόταση 1.4**

- i) Ένας συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n$  είναι θετικά ορισμένος πίνακας αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν μεταξύ των θετικών ιδιοτιμών του υπάρχει τουλάχιστον μία ίση με μηδέν.
- ii) Έστω  $A \in M_n$  συμμετρικός πίνακας και ένας υποπίνακάς του

$$A_m = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Τότε, ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν  $\det A_m > 0$ , για κάθε  $m = 1, 2, \dots, n$ .

Όμοια με την παραπάνω πρόταση, προκειμένου να διαπιστώσουμε αν ένας συμμετρικός πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος, εφαρμόζουμε ένα από τα κριτήρια που διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, την απόδειξη μπορούμε να τη βρούμε σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας, όπως για παράδειγμα [8, Προτάσεις 9.2 και 9.3], [2, 3].

...  
 $\vdots$   $\ddots$   $\vdots$   
 ... ...

**Πρόταση 1.5**

- i) Ένας συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n$  είναι αρνητικά ορισμένος πίνακας αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και είναι αρνητικά ημιορισμένος αν και μόνο αν μεταξύ των αρνητικών ιδιοτιμών του υπάρχει τουλάχιστον μία ίση με μηδέν.
- ii) Έστω  $A \in M_n$  συμμετρικός πίνακας και ένας υποπίνακας του

$$A_m = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

Τότε, ο πίνακας  $A$  είναι αρνητικά ορισμένος, αν και μόνο αν

$$\det A_1 < 0, \quad \det A_2 > 0, \quad \det A_3 < 0, \quad \dots, \quad (-1)^n \det A_n > 0.$$

**Παράδειγμα 1.2**

Δίνεται ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να εξεταστεί η οριστικότητα του πίνακα  $A$ .

**Λύση:**

Αρχικά, υπολογίζουμε την χαρακτηριστική εξίσωση του  $A$  εφαρμόζοντας την (1.6)

$$\det(A - \lambda x) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0.$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , που είναι  $\lambda = 1$  (διπλή) και  $\lambda = 4$  (απλή). Σύμφωνα με την Πρόταση 1.4(i) Εφόσον όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος.

**Άλλος τρόπος λύσης:**

Αν ακολουθήσουμε τον Ορισμό 1.4 τότε χρησιμοποιώντας

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T, \quad \text{έχουμε}$$

...

⋮   ⋮   ⋮

...

$$\begin{aligned}x^T Ax &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 > 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς σύμφωνα με τον Ορισμό 1.4 ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος.  $\square$

## 1.2 Ελάχιστο πολυώνυμο

Εκτός από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in M_n$  γνωστό και αρκετά χρήσιμο είναι και ένα άλλο πολυώνυμο το γνωστό ως ελάχιστο πολυώνυμο, που συμβολίζεται με  $m_A(\lambda)$  και ορίζεται ως ακολούθως.

### Ορισμός 1.6

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n$ . **Ελάχιστο πολυώνυμο** του πίνακα  $A$ , ονομάζεται το πολυώνυμο, που ικανοποιεί τις δύο ακόλουθες ιδιότητες:

- i) Ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι ίσος με τη μονάδα.
- ii)  $m_A(A) = \mathbb{O}$

Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μικρότερου βαθμού ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα που έχουν τις δύο προηγούμενες ιδιότητες.

### Παρατήρηση 1.1

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι το ελάχιστο πολυώνυμο διαιρεί οποιοδήποτε άλλο πολυώνυμο το οποίο μηδενίζεται από τον πίνακα  $A$ . Είναι γνωστό από το θεώρημα των Cayley-Hamilton ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι ένα από τα πολυώνυμα που έχουν αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή, ισχύει

$$\chi_A(A) = \mathbb{O}.$$

Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο είναι μικρότερου βαθμού πολυώνυμο με την ιδιότητα  $m_A(A) = \mathbb{O}$  αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση που περιγράφει τη σχέση των δυο πολυωνύμων, [8].

### Πόρισμα 1.1

Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in M_n$  διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $A$ , δηλαδή,

$$m_A(\lambda) \mid \chi_A(\lambda).$$

Στην ακόλουθη πρόταση διατυπώνονται ορισμένες επιπλέον ιδιότητες, οι οποίες συμβάλλουν ώστε να μπορούμε ευκολότερα να προσδιορίζουμε το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα  $A$ .

### Πρόταση 1.6

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_n$ . Τότε:

- i) Τα πολυώνυμα  $m_A(\lambda)$ ,  $\chi_A(\lambda)$  έχουν τις ίδιες ρίζες.
- ii) Οι πίνακες  $A, A^T$  έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

### Πρόταση 1.7

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_n$  με  $A = \begin{bmatrix} B & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Gamma \end{bmatrix}$ , όπου  $B \in M_\kappa$  και  $\Gamma \in M_\sigma$  με  $\sigma + \kappa = n$ .

Τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ε.κ.π.) των ελαχίστων πολυωνύμων των πινάκων  $B, \Gamma$ , δηλαδή, ισχύει

$$m_A(\lambda) = \varepsilon.κ.π(m_B(\lambda), m_\Gamma(\lambda)).$$

### Παράδειγμα 1.3

Έστω ο σύνθετος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$ .

#### Λύση:

Για τον πίνακα  $A$  υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, που είναι

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Οπότε το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι ένα από τα ακόλουθα:

$$m_1(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 2), \quad m_2(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 2)^2, \quad m_3(\lambda) = (\lambda - 3) \cdot (\lambda - 2)^3.$$

Ελέγχουμε ποιο από τα πιθανά ελάχιστα πολυώνυμα μηδενίζεται από τον πίνακα  $A$  και έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

$$m_1(A) \neq \mathbb{O}, \quad m_2(A) = \mathbb{O}, \quad m_3(A) = \mathbb{O}.$$

Προφανώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το  $m_2(\lambda)$ , επειδή απαιτείται το ελάχιστο πολυώνυμο να έχει το μικρότερο βαθμό, για το οποίο ισχύει η (ii) ιδιότητα του Ορισμού 1.6, δηλαδή να μηδενίζεται από τον πίνακα  $A$ . □

### 1.3 Διαγωνοποίηση

#### Ορισμός 1.7

Δύο πίνακες  $A, B \in M_n$  λέγονται **όμοιοι**, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P \in M_n$  τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1}AP. \quad (1.10)$$

Στην ακόλουθη πρόταση διατυπώνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες των ομοίων πινάκων, η απόδειξη τους υπάρχει σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας που δίνεται στη βιβλιογραφία [8, 10, 11, 15].

#### Πρόταση 1.8

Εάν  $P \in M_n$  αντιστρέψιμος πίνακας και  $A, B \in M_n$  με  $A, B$  όμοιοι, τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

- i)  $\det A = \det B$
- ii)  $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)$

#### Ορισμός 1.8

Ένας πίνακας  $A \in M_n$  ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα  $D$ , δηλαδή, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας  $P \in M_n$  τέτοιος ώστε:

$$D = P^{-1}AP. \quad (1.11)$$

Αν ισχύει η (1.11), τότε λέμε ότι ο πίνακας  $P$  διαγωνοποιεί τον  $A$ . Ο πίνακας  $P$  είναι γνωστός στη βιβλιογραφία ως *πίνακας ομοιότητας*.

Στη σχέση (1.11) ο  $D$  έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του  $A$  και ο τετραγωνικός πίνακας  $P$  έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ .

Στο ακόλουθο θεώρημα διατυπώνεται ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένας τετραγωνικός πίνακας  $A$  να είναι διαγωνοποιήσιμος.



**Θεώρημα 1.1**

Κάθε πίνακας  $A \in M_n$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν υπάρχουν  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Η διαγωνοποίηση του πίνακα  $A \in M_n$  δίνεται από

$$A = PDP^{-1}, \quad (1.12)$$

όπου οι πίνακες  $P, D \in M_n$  κατασκευάζονται όπως διατυπώνεται στον Ορισμό 1.8.

Η διαγωνοποίηση ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  καλείται αλλιώς **παραγοντοποίηση** του πίνακα.

Επειδή σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, [8, Πρόταση 5.12] η ακόλουθη πρόταση δίνει ένα κριτήριο διαγωνοποίησης σε περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι απλές, για την απόδειξη μπορούμε να δούμε [8, Πρόταση 8.2].

**Πρόταση 1.9**

Αν ένας πίνακας  $A \in M_n$  έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

Ένα άλλο κριτήριο διαγωνοποίησης τυχαίου πίνακα παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση, το οποίο σχετίζεται με το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα  $A$ . Στο κριτήριο αυτό δεν απαιτούνται τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  όπως αυτό διατυπώνεται στο Θεώρημα 1.1.

**Πρόταση 1.10**

Ένας πίνακας  $A \in M_n$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο του  $A$  είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων,

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k),$$

όπου οι ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  είναι όλες μεταξύ τους διαφορετικές.

Ισοδύναμα, ο πίνακας  $A \in M_n$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ισχύει

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_k I) = \mathbb{O}. \quad (1.13)$$

## 1.4 Ορθοκανονική διαγωνοποίηση

### Ορισμός 1.9

Ένας πίνακας  $A \in M_n$  ονομάζεται **ορθογώνια (ορθομοναδιαία) διαγωνοποιήσιμος** αν υπάρχει διαγώνιος πίνακας  $D$  ορθογώνια (ορθομοναδιαίος) όμοιος με τον  $A$ . Δηλαδή, αν υπάρχει ορθογώνιος<sup>1</sup> πίνακας  $Q \in M_n$  τέτοιος ώστε

$$D = Q^{-1}AQ \Leftrightarrow D = Q^T A Q. \quad (1.14)$$

Ο  $D$  έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του  $A$  και ο  $Q$  έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών με τη σειρά που παρουσιάστηκαν στα διαγώνια στοιχεία του  $D$ .

Τα στοιχεία του  $Q$  προκύπτουν:

- i. Από την ορθοκανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων του  $A$ , που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή, με την διαδικασία **ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt**.
- ii. Από τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, τα οποία είναι είδη ανά δύο κάθετα (Πρόταση 1.3)

### Πρόταση 1.11

Αν ο πίνακας  $A \in M_n$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι κανονικός, τότε ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος.

Μια ειδική περίπτωση κανονικού πίνακα είναι ο συμμετρικός, οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.11 ένας συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται πάντα, όπως διαγωνοποιείται στο επόμενο Θεώρημα η διαγωνοποίηση είναι ειδικής μορφής.

### Θεώρημα 1.2 (φασματικό θεώρημα)

Κάθε συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n$  είναι ορθογώνια όμοιος με πραγματικό διαγώνιο πίνακα  $D$ .

---

<sup>1</sup> Βλέπε τον αντίστοιχο ορισμό στην Ενότητα 1.1 για τον ορθογώνιο πίνακα.

Σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα ένας συμμετρικός πίνακας  $A$  διαγωνοποιείται πάντα ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα που παρουσιάζουν οι ιδιοτιμές. Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός το **φασματικό θεώρημα** εξασφαλίζει την ύπαρξη καθώς και την αντιστρεψιμότητα του  $Q$ , ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα των πραγματικών ιδιοτιμών του  $A$ .

## 1.5 Νόρμες πινάκων

### Ορισμός 1.10

**Νόρμα** ενός πίνακα  $A \in M_n$  είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: M_n \rightarrow [0, +\infty),$$

που ικανοποιεί όλες τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i)  $\|A\| \geq 0$  και  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \mathbb{O}$ .
- ii)  $\|cA\| = |c|\|A\|$ ,  $c \in \mathbb{C}$ .
- iii)  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (τριγωνική ανισότητα), για κάθε  $A, B \in M_n$ .
- iv)  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ , για κάθε  $A, B \in M_n$ .

Για έναν πίνακα  $A \in M_n$  οι πιο γνωστές νόρμες [7, 12] είναι αυτές που ορίζονται - διατυπώνονται στο ακόλουθο θεώρημα. Η απόδειξή τους μπορεί να αναζητηθεί [10, 21].

### Θεώρημα 1.3

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_{m \times n}$ . Τότε ισχύουν:

$$\text{i) } \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{c_j = \sum_{i=1}^m |a_{ij}|\}, \quad \text{(νόρμα στήλης)} \quad (1.19)$$

$$\text{ii) } \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \{r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}, \quad \text{(νόρμα γραμμής)} \quad (1.20)$$

$$\text{iii) } \|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}, \quad \text{(Ευκλείδεια νόρμα)} \quad (1.21)$$

$$\text{iv) } \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = s_{\max}(A) = \sqrt{\rho(A^T A)}, \quad \text{(φασματική νόρμα)} \quad (1.22)$$

όπου  $\lambda_{\max}(A^T A)$  η μέγιστη ιδιοτιμή του  $A^T A$ ,  $s_{\max}(A)$  η μέγιστη ιδιοτιμή του  $A$  και  $\rho(A^T A)$  η φασματική ακτίνα του πίνακα  $A^T A$ .

**Πρόταση 1.12**

Έστω, ένας πίνακας  $A \in M_n \mathbb{A}$  και  $\|\cdot\|$  μια νόρμα πίνακα. Τότε ισχύει:

$$\rho(A) \leq \|A\|,$$

όπου  $\rho(A)$  είναι η φασματική ακτίνα του πίνακα  $A$ , όπως αυτή ορίστηκε στην (1.3).

**Απόδειξη:**

Έστω  $\lambda$  τυχαία ιδιοτιμή του  $A$ , δηλαδή  $\lambda \in \sigma(A)$  και  $x \in M_{n \times 1}$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τέτοιο ώστε  $Ax = \lambda x$ . Οπότε συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.1 για τη σχέση των ιδιοποσών με την τριγωνική ανισότητα της νόρμας μπορούμε να γράψουμε:

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \quad (1.15)$$

οπότε

$$|\lambda| \leq \|A\| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|. \quad \square$$

**Ορισμός 1.11**

Έστω  $A \in M_{m \times n}$  μιγαδικός πίνακας και  $x \in M_{n \times 1}$  ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Η  $p$ -νόρμα του πίνακα  $A$  ορίζεται

$$\|A\|_p = \max \|Ax\|_p = \max \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, \quad (1.16)$$

όπου

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.17)$$

ορίζεται η  $p$ -νόρμα του διανύσματος  $x$ .

**Ορισμός 1.12**

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_{m \times n}$ . Ορίζουμε ως **Frobenius νόρμα** του  $A$  και συμβολίζεται με  $\|A\|_F$ , τη νόρμα

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}. \quad (1.18)$$

### Παρατήρηση 1.2

Προφανώς για κάθε  $x \in M_{n \times 1}$  ισχύει

$$\|x\|_2 = \|x\|_F,$$

όπου  $\|\cdot\|_2$  είναι η 2-νόρμα, που υπολογίζεται από την (1.17) για  $p=2$ , και  $\|\cdot\|_F$  είναι η F-νόρμα του διανύσματος  $x$ , η οποία υπολογίζεται από την (1.18) με  $m=n$  και  $n=1$ .

Αντίθετα, για τις αντίστοιχες νόρμες πίνακα, δηλαδή για  $\|\cdot\|_2$  (φασματική νόρμα) και  $\|\cdot\|_F$  (Frobenius νόρμα) **δεν** ισχύει η ισότητα, όπως διαπιστώνουμε και από το παράδειγμα που ακολουθεί.

### Παράδειγμα 1.4

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν η Frobenius και η φασματική νόρμα του πίνακα  $A$ .

**Λύση:**

- i. Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.12 από την (1.18) για τη Frobenius νόρμα του  $A$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A\|_F &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \\ &= \sqrt{|-1|^2 + |2|^2 + |-4|^2 + |-3|^2 + |3|^2 + |-2|^2 + |1|^2 + |-2|^2 + |-1|^2} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

- ii. Σύμφωνα με τη φασματική νόρμα στην (1.22) και τη σχέση της φασματικής ακτίνας (1.3), ο υπολογισμός της  $\|A\|_2$  απαιτεί τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα  $A^T A$ .

Χρησιμοποιώντας την έκδοση R2009b της Matlab υπολογίζουμε τον πίνακα

$$A^T A = \begin{bmatrix} 11 & -13 & 9 \\ -13 & 17 & -12 \\ 9 & -12 & 21 \end{bmatrix}$$

από όπου υπολογίζεται ότι

$$\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 0.6430, \lambda_2 = 8.8588, \lambda_3 = 39.4982\}.$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$\rho(A^T A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A^T A)\} = 39.4982,$$

και σύμφωνα με την (1.22) έχουμε

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{39.4982} = 6.2848.$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα από (i) και (ii) για τις νόρμες του πίνακα  $A$  παρατηρούμε ότι

$$\|A\|_2 \neq \|A\|_F.$$

□

### Παρατήρηση 1.3

- i. Η Ευκλείδεια νόρμα, η οποία δίνεται από τη σχέση (1.21), ταυτίζεται με τη νόρμα Frobenius, που δίνεται από τη σχέση (1.18).
- ii. Από (1.19) και (1.20) είναι φανερό ότι, για κάθε συμμετρικό πίνακα  $A \in M_n$  η νόρμα γραμμής  $\|A\|_\infty$  ταυτίζεται με τη νόρμα στήλης  $\|A\|_1$ .
- iii. Αν ο πίνακας  $A \in M_n$  είναι συμμετρικός, τότε ισχύει  $\rho(A) = \|A\|_2$ .

Τις αποδείξεις των ιδιοτήτων που αναφέρονται στη ακόλουθη πρόταση και των σχολίων που διατυπώνονται στην Παρατήρηση 1.3 ο αναγνώστης μπορεί να τις μελετήσει [21].

### Πρόταση 1.13

Για κάθε συμμετρικό πίνακα  $A \in M_n$  ισχύουν:

- i)  $\|A\|_2 = \max(y^T Ax), \quad \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$
- ii)  $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$
- iii)  $\|A\|_2^2 = \|A^T A\|_2$

- iv) Αν  $U, V$  δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες, τότε  $\|A\|_2 = \|U^T A V\|_2$
- v) Αν  $U, V$  δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες, τότε  $\|A\|_F = \|U^T A V\|_F$
- vi)  $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$

### Παράδειγμα 1.5

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2.35 & 1.5 \\ 2.35 & 3 & 1.82 \\ 1.5 & 1.82 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι νόρμες του πίνακα  $A$ , όπως αυτές δίνονται στις σχέσεις (1.19) - (1.22).

**Λύση:**

- i. Σύμφωνα με τη νόρμα στήλης στην (1.19), ο υπολογισμός της  $\|A\|_1$  γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \{c_j = \sum_{i=1}^3 |a_{ij}|\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{c_j\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} \\ &= \max\{|a_{11}| + |a_{21}| + |a_{31}|, |a_{12}| + |a_{22}| + |a_{32}|, |a_{13}| + |a_{23}| + |a_{33}|\} \\ &= \max\{4.85, 7.17, 5.32\} = 7.17 \end{aligned}$$

- ii. Σύμφωνα με τη νόρμα γραμμής στην (1.20), ο υπολογισμός της  $\|A\|_\infty$  γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \{r_i = \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{r_i\} = \max\{r_1, r_2, r_3\} \\ &= \max\{|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}|, |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{23}|, |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{33}|\} \\ &= \max\{4.85, 7.17, 5.32\} = 7.17 \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα επαληθεύει την Παρατήρηση 1.3 (ii), δηλαδή,

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty.$$

- iii. Σύμφωνα με την Ευκλείδεια νόρμα στην (1.21), ο υπολογισμός της  $\|A\|_E$  γίνεται ως εξής:



$$\begin{aligned}\|A\|_E &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2.35^2 + 1.5^2 + 2.35^2 + 3^2 + 1.82^2 + 1.5^2 + 1.82^2 + 2^2} = 6.0141\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.3(i) ισχύει:  $\|A\|_F = \|A\|_E = 6.0141$ , οπότε

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = 6.0141.$$

- iv. Σύμφωνα με τη φασματική νόρμα στην (1.22) και τη σχέση της φασματικής ακτίνας (1.3), ο υπολογισμός της  $\|A\|_2$  απαιτεί τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του πίνακα  $A^T A$ .

Χρησιμοποιώντας την έκδοση R2009b της Matlab υπολογίζουμε τον πίνακα

$$A^T A = \begin{bmatrix} 8.7725 & 12.1300 & 8.7770 \\ 12.1300 & 17.8349 & 12.6250 \\ 8.7770 & 12.6250 & 9.5624 \end{bmatrix}$$

από όπου υπολογίζεται

$$\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 0.3529, \lambda_2 = 0.4148, \lambda_3 = 35.4021\}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\rho(A^T A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A^T A)\} = 35.4021.$$

Επομένως,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{35.4021} = 5.95.$$

- v. Το φάσμα του πίνακα  $A$  είναι:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -0.5940, \lambda_2 = 0.6441, \lambda_3 = 5.9500\}.$$

Διαπιστώνουμε ότι η φασματική ακτίνα του πίνακα  $A$  είναι

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A)\} = 5.95$$

και ισούται με τη  $\|A\|_2$ , επαληθεύεται το σχόλιο (iii) στην Παρατήρηση 1.3.

- vi. Επιπλέον, σύμφωνα με την Πρόταση 1.13(vi) έχουμε:

$$\|A\|_2^2 = 5.95^2 = 35.4025 \quad \text{και} \quad \|A\|_1 \|A\|_\infty = 7.17 \cdot 7.17 = 51.4089$$

Επαληθεύοντας τη σχέση

$$\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty.$$

Τέλος, ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός επομένως,  $A^T = A$ , και προφανώς επαληθεύεται η ιδιότητα (ii) στην Πρόταση 1.13, δηλαδή,

$$\|A\|_2 = \|A^T\|_2.$$

□

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα

Η θεωρία διαταραχών αποτελεί ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για τη περιγραφή περίπλοκων συστημάτων με αφετηρία ένα απλούστερο, ακριβώς επιλύσιμο σύστημα. Η βασική ιδέα πίσω από τη θεωρία διαταραχών είναι η εξής: Σε ένα γνωστό πίνακα προσθέτουμε σταδιακά «μικρές» αυξήσεις, που τις ονομάζουμε «διαταραχές», [19]. Η διαταραχή μπορεί να γίνει με μικρούς αριθμούς που επηρεάζουν απευθείας τους πίνακες, είτε μέσω τυχαίων πινάκων οι οποίοι έχουν μικρές νόρμες, είτε με συνδυασμό των δύο παραπάνω περιπτώσεων. Έτσι, κάνοντας σε ένα γνωστό πίνακα  $A$  διαταραχή προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας που συμβολίζεται  $\tilde{A}$ . Μπορούμε λοιπόν με αυτόν τον τρόπο να μελετήσουμε ένα περίπλοκο σύστημα έχοντας ως αφετηρία ένα ακριβώς επιλύσιμο πρόβλημα.

Παρακάτω θα δούμε κάποια γενικά θεωρήματα διαταραχής καθώς και διάφορους τρόπους για να διαταράξουμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα. Στην αρχή αναφερόμαστε στις διαταραχές των ιδιοτιμών που προκαλούνται από ποικίλες τιμές στη μεταβλητή  $\varepsilon$  και σταθερούς πίνακες. Έπειτα παρουσιάζεται το θεώρημα Geršgorin [5, 10, 16], που υλοποιείται στον Αλγόριθμο 2.1 καθώς και γενικά θεωρήματα διαταραχής με τυχαίους πίνακες διαταραχής  $E$ . Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου μελετάμε το γενικευμένο μετασχηματισμό Levinger [1], που υλοποιείται στον Αλγόριθμο 2.2 κάνοντας διαταραχή του πίνακα  $A$ , χρησιμοποιώντας τυχαίους πίνακες διαταραχής  $E$  και μεταβλητές  $a$  και  $b$ . Η μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger βρίσκει εφαρμογή και σε αόριστο συμμετρικό πίνακα προκειμένου να τον προσεγγίσει από θετικά ορισμένο (ημιορισμένο) πίνακα.

## 2.1 Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα με μεταβλητή $\varepsilon$

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται διαταραχές που προκαλούνται από τη μεταβλητή  $\varepsilon$  και δύο σταθερούς πίνακες το μοναδιαίο  $I_n$  και έναν κατάλληλο πίνακα  $B$ .

### Ορισμός 2.1

Έστω ένας πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  και  $\varepsilon$  ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Ορίζουμε το **διαταραγμένο πίνακα**,

$$\tilde{A} = A + \varepsilon I_n, \quad (2.1)$$

όπου  $I_n$  ο μοναδιαίος  $n \times n$  πίνακας.

### Ορισμός 2.2

Έστω  $A \in M_n$  με ιδιοτιμή  $\lambda_i$  και  $\tilde{\lambda}_i$  η ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  για  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ορίζουμε ως **σφάλμα της ιδιοτιμής** το θετικό πραγματικό αριθμό, που ισούται με την ποσότητα

$$er_i = |\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|. \quad (2.2)$$

Στη συνέχεια μελετάμε τις σχέσεις που συνδέουν τις ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  στη (2.1).

### Πρόταση 2.1

Έστω  $A \in M_n$  με ιδιοτιμές  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  και  $\tilde{A}$  ο πίνακας στη (2.1). Για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , οι ιδιοτιμές  $\tilde{\lambda}_i$  του πίνακα  $\tilde{A}$  δίνονται από τη σχέση

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \varepsilon, \quad (2.3)$$

όπου  $\varepsilon$  ένας οποιοσδήποτε αριθμός (πραγματικός ή μιγαδικός).

**Απόδειξη:**

Θεωρώντας ότι  $\lambda_i$  είναι κάποια ιδιοτιμή του  $A$  και  $x_i$  το δεξί ιδιοδιάνυσμά της.

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.2 και τη σχέση (1.2) μπορούμε να γράψουμε

$$Ax_i = \lambda_i x_i.$$

Οπότε για τον πίνακα  $\tilde{A}$ , τη 2.1 και το διάνυσμα  $x_i$  έχουμε

$$\tilde{A}x_i = (A + \varepsilon I_n)x_i = Ax_i + \varepsilon I_n x_i = \lambda_i x_i + \varepsilon x_i = (\lambda_i + \varepsilon)x_i,$$

το οποίο επαληθεύει τον Ορισμό 1.1 και τη σχέση (1.2) για τον πίνακα  $\tilde{A}$ . □

**Παράδειγμα 2.1**

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  στη (2.1) για τις ακόλουθες τιμές της μεταβλητής  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = -2, \quad \varepsilon = 0, \quad \varepsilon = 0.001, \quad \varepsilon = 1, \quad \varepsilon = 2, \quad \varepsilon = 2i, \quad \varepsilon = 1+2i.$$

**Λύση:**

Χρησιμοποιώντας την έκδοση R2009b της Matlab υπολογίζουμε ότι ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -1.8948, \quad \lambda_2 = 5.5708 + 0.3713i, \quad \lambda_3 = 5.5708 - 0.3713i, \quad \lambda_4 = 8.7531$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.1)

- Για  $\varepsilon = -2$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A - 2I_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -3.8948, \quad \tilde{\lambda}_2 = 3.5708 + 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 3.5708 - 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 6.7531.$$

- Για  $\varepsilon = 0$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + 0I_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 = -1.8948, \quad \lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 = 5.5708 + 0.3713i, \quad \lambda_3 = \tilde{\lambda}_3 = 5.5708 - 0.3713i, \quad \lambda_4 = \tilde{\lambda}_4 = 8.7531$$

- Για  $\varepsilon = 0.001$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + 0.001I_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + 0.001 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.001 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5.001 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6.001 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5.001 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -1.8938, \quad \tilde{\lambda}_2 = 5.5718 + 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 5.5718 - 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 8.7541.$$

- Για  $\varepsilon = 1$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + 1I_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -0.8948, \quad \tilde{\lambda}_2 = 6.5708 + 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 6.5708 - 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 9.7531.$$

- Για  $\varepsilon = 2$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + 2I_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.1052, \quad \tilde{\lambda}_2 = 7.5708 + 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 7.5708 - 0.3713i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 10.7531.$$

- Για  $\varepsilon = 2i$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + 2iI_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + 2i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2i & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5+2i & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6+2i & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5+2i \end{bmatrix}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -1.8948 + 2i, \quad \tilde{\lambda}_2 = 5.5708 + 2.3713i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 5.5708 + 1.6287i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 8.7531 + 2i.$$

- Για  $\varepsilon = 1 + 2i$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\begin{aligned} \tilde{A} = A + (1+2i)I_n &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + (1+2i) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3+2i & -1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 5+2i & -1 \\ -3 & -1 & 7+2i & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 6+2i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

με αντίστοιχες ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -0.8948 + 2i, \quad \tilde{\lambda}_2 = 6.5708 + 2.3713i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 6.5708 + 1.6287i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 9.7531 + 2i.$$

□

### Σχόλιο 2.1

- Παρατηρώντας τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 2.1 διαπιστώνουμε ότι για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  η διαφορά της ιδιοτιμής του πίνακα  $A$  από την αντίστοιχη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  ισούται κάθε φορά με το αντίστοιχο  $\varepsilon$  που προκαλεί τη διαταραχή εφόσον  $\varepsilon$  πραγματικός αριθμός. Δηλαδή ισχύει  $\tilde{\lambda}_i - \lambda_i = \varepsilon$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Όταν τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  στο καρτεσιανό επίπεδο με τον άξονα  $xx'$  για να αναπαρίστανται οι πραγματικοί αριθμοί και για  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  παρατηρείται η μετατόπιση όλων των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  κατά  $\varepsilon$  στον άξονα  $xx'$ . Όταν το  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  με  $\varepsilon = a + \beta i$ , όπου  $a$  το πραγματικό μέρος και  $\beta$  το φανταστικό μέρος του  $\varepsilon$ , τότε διακρίνεται η μετατόπιση όλων των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  κατά  $a$  στον άξονα  $xx'$  και κατά  $\beta$  στον άξονα  $yy'$ .

Στη συνέχεια μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ένας πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  μπορεί να γραφεί

$$A = D + B, \quad (2.4)$$

όπου  $D \in M_n$  είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του  $A$  και  $B \in M_n$  είναι ο πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδέν και τα υπόλοιπα στοιχεία του να είναι ίσα με τα στοιχεία του  $A$ .

### Ορισμός 2.3

Έστω ένας πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  και  $\varepsilon$  ένας οποιοσδήποτε αριθμός. Ορίζουμε το διαταραγμένο πίνακα,

$$\tilde{A} = D + \varepsilon B, \quad (2.5)$$

όπου  $B \in M_n$  δίνεται όπως στη (2.4), δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία του  $B$  είναι ίσα με μηδέν και όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου ισούνται με τα αντίστοιχα στοιχεία του  $A$ , και

$$D = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn})$$

είναι  $n \times n$  διαγώνιος πίνακας.

Στη συνέχεια μελετάμε τις σχέσεις που συνδέουν τις ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  στη (2.5). Είναι φανερό από τη (2.5) ότι

για  $\varepsilon = 0$ , τότε  $\tilde{A} = D$ , και

για  $\varepsilon = 1$ , τότε  $\tilde{A} = A = D + B$ .

Εύκολα προσδιορίζουμε ότι για  $\varepsilon = 0$ , οι ιδιοτιμές του  $\tilde{A} = D$  είναι τα διαγώνια στοιχεία  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$  του πίνακα  $A$ , ενώ για αρκετά «μικρές τιμές κατά μέτρο» του  $\varepsilon$  οι ιδιοτιμές του  $\tilde{A}$  βρίσκονται σε μια μικρή «γειτονιά-περιοχή» των στοιχείων  $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{nn}$ .



**Παράδειγμα 2.2**

Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Να εφαρμοστεί διαταραχή του πίνακα  $A$  με τη βοήθεια της σχέσης (2.5) και να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές  $\tilde{\lambda}_i$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  καθώς επίσης να υπολογιστεί το σφάλμα των ιδιοτιμών  $er_i = |\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|$  για  $\varepsilon = 0.997$  και  $\varepsilon = 0.0997$ .

**Λύση:**

Χρησιμοποιώντας την έκδοση R2009b της Matlab υπολογίζουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ έχει ιδιοτιμές}$$

$$\lambda_1 = 3.1623, \quad \lambda_2 = 3.0000, \quad \lambda_3 = -3.1623,$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.4) ο πίνακας  $A$  μπορεί να γραφεί ως  $A = D + B$ , όπου

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Για  $\varepsilon = 0.997$  από την (2.5) έχουμε το διαταραγμένο πίνακα

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + 0.997 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0000 & -0.9970 & 0 \\ 0.9970 & 4.0000 & -0.9970 \\ -0.9970 & -0.9970 & -3.0000 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = 3.1939, \quad \tilde{\lambda}_2 = 2.9674, \quad \tilde{\lambda}_3 = -3.1613.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2 το σφάλμα κάθε ιδιοτιμής είναι:

$$er_1 = |\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1| = 0.0316, \quad er_2 = |\tilde{\lambda}_2 - \lambda_2| = 0.0326, \quad er_3 = |\tilde{\lambda}_3 - \lambda_3| = 0.001.$$

- Για  $\varepsilon = 0.0997$  με  $D$  και  $B$  τα προαναφερόμενα, εφαρμόζοντας τη σχέση (2.5) έχουμε

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} + 0.0997 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0000 & -0.0997 & 0 \\ 0.0997 & 4.0000 & -0.0997 \\ -0.0997 & -0.0997 & -3.0000 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = 2.0051, \quad \tilde{\lambda}_2 = 3.9964, \quad \tilde{\lambda}_3 = -3.0014.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2 το σφάλμα κάθε ιδιοτιμής είναι:

$$er_1 = |\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1| = 1.1572, \quad er_2 = |\tilde{\lambda}_2 - \lambda_2| = 0.9964, \quad er_3 = |\tilde{\lambda}_3 - \lambda_3| = 0.1609. \quad \square$$

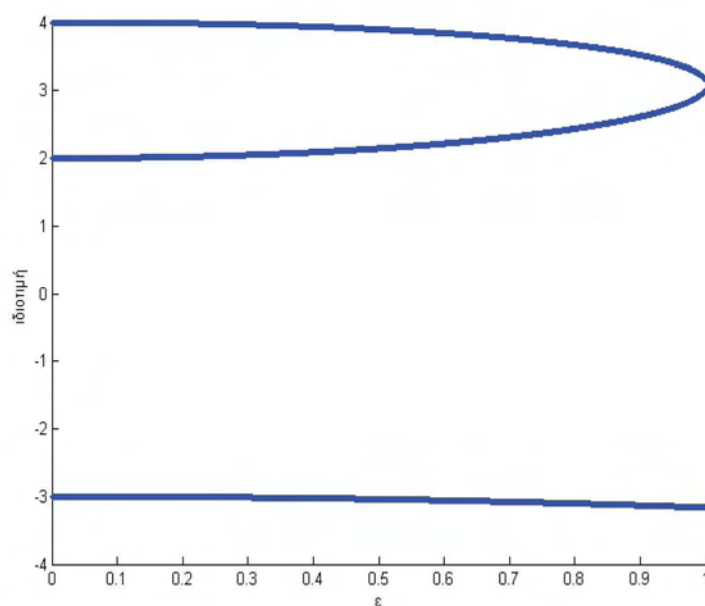
### Σχόλιο 2.2

Παρατηρώντας τις ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  του Παραδείγματος 2.2,

- για  $\varepsilon = 0.997$ , δηλαδή  $\varepsilon \approx 1$ , αυτές βρίσκονται κοντά στις αρχικές ιδιοτιμές με σφάλμα ιδιοτιμής

$$er_1 = |\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1| = 0.0316, \quad er_2 = |\tilde{\lambda}_2 - \lambda_2| = 0.0326, \quad \text{και} \quad er_3 = |\tilde{\lambda}_3 - \lambda_3| = 0.001.$$

- Για  $\varepsilon = 0.0997$ , οι ιδιοτιμές του  $\tilde{A}$  τείνουν να πάρουν ως τιμές αυτές της διαγωνίου του  $A$ .



**Σχήμα 2.1:** Διαταραχή Γράφημα  $\varepsilon$ -ιδιοτιμής

Οι τρεις χρωματιστές μπλε γραμμές του Σχήματος 2.1 απεικονίζουν τις τιμές των τριών ιδιοτιμών του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A} = D + \varepsilon B$  ως συνάρτηση του  $\varepsilon$ ,

όπου  $B, D$  είναι οι πίνακες του Παραδείγματος 2.2 και η μεταβλητή  $\varepsilon$  λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ . Τα σημειωμένα με κόκκινο σημεία είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $A$ , άρα οι ιδιοτιμές  $D$ .

Από το γράφημα συμπεραίνουμε ότι οι διαταραγμένες ιδιοτιμές δεν εξαρτώνται όλες το ίδιο από την τιμή του  $\varepsilon$ .

- Για  $\varepsilon = 1$  οι ιδιοτιμές του  $\tilde{A}$  είναι ίδιες με τον πίνακα  $A$ ,

$$\lambda_1 = 3.1623, \quad \lambda_2 = 3.0000, \quad \lambda_3 = -3.1623.$$

- Ενώ για  $\varepsilon = 0$  από τη (2.5) έχουμε  $\tilde{A} = D$ , όπου οι ιδιοτιμές του  $\tilde{A}$  είναι τα διαγώνια στοιχεία του  $A$ , δηλαδή,

$$\tilde{\lambda}_1 = 2, \quad \tilde{\lambda}_2 = 4, \quad \tilde{\lambda}_3 = -3. \quad \square$$

Στο θεώρημα που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δίσκοι εύκολα κατασκευάσιμοι, με κέντρα τα στοιχεία  $a_{ii}$  του πίνακα  $A$  και οι οποίοι περιέχουν τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

### Θεώρημα 2.1 ( Geršgorin )

Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  και για κάθε  $1 \leq i \leq n$  σημειώνεται

$$R_i(A) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad (2.6)$$

το άθροισμα των απολύτων τιμών των μη διαγωνίων στοιχείων της  $i$ -γραμμής του  $A$ .

Όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  βρίσκονται στην ένωση των  $n$ -δίσκων

$$G(A) \equiv \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}. \quad (2.7)$$

### Σχόλιο 2.3

- (i) Η περιοχή  $G(A)$  είναι γνωστή στη βιβλιογραφία [10] ως **Geršgorin περιοχή**, κάθε δίσκος στην ένωση της σχέσης (2.7) ονομάζεται **Geršgorin δίσκος** και τα σύνορα αυτών των δίσκων ονομάζονται **Geršgorin κύκλοι**. Η απόδειξη του

Θεωρήματος 2.1 (Geršgorin) μπορεί να αναζητηθεί στα βιβλία της Γραμμικής Άλγεβρας που εμπεριέχονται στη βιβλιογραφία, όπως [5, 16], [10, Theorem 6.1.1], [21, Θεώρημα 8.1.3].

- (ii) Αξίζει να σημειωθεί ότι το θεώρημα Geršgorin εφαρμόζεται για την εκτίμηση των ιδιοτιμών ενός πίνακα και ειδικότερα πίνακα μεγάλων διαστάσεων, όπου η πολυπλοκότητα της εύρεσης ιδιοτιμών είναι πολύ μεγάλη. Έτσι με την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.1 (Geršgorin) παρακάμπτουμε την πολυπλοκότητα έχοντας μια καλή εκτίμηση για την περιοχή του επιπέδου, όπου κυμαίνονται οι ιδιοτιμές του πίνακα.

Το Σχόλιο 2.3(ii) αποτέλεσε το κίνητρο για να συνταχθεί ο ακόλουθος αλγόριθμος, ο οποίος υλοποιείται προκειμένου να εντοπιστεί η Geršgorin περιοχή, όπου ανήκει το φάσμα του  $A$ , σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.

### Αλγόριθμος 2.1

1. Για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  από τον τύπο (2.6) υπολογίζεται η ακτίνα:

$$R_i'(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

2. Για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , και σε κάθε ακτίνα  $R_i'(A)$ , σύμφωνα με τη (2.7), αντιστοιχεί ο κυκλικός δίσκος:

$$G_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i'(A)\}$$

3. Σκιαγραφείται η περιοχή του επιπέδου, που ορίζουν οι κυκλικοί δίσκοι του βήματος 2, όπως στη (2.7),

$$G(A) = \bigcup G_i(A)$$

και από το Θεώρημα 2.1 συμπεραίνεται

$$\sigma(A) \in G(A).$$

**Παράδειγμα 2.3**

Έστω ο πίνακας του Παραδείγματος 2.2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι Geršgorin δίσκοι του πίνακα και στη συνέχεια να σχεδιαστεί το χωρίο, όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

**Λύση:**

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 και υλοποιώντας το πρώτο βήμα Αλγορίθμου 2.1 οι ακτίνες των δίσκων υπολογίζονται από τη (2.6) ως ακολούθως:

$$R_1'(A) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 |a_{ij}| = 1$$

$$R_2'(A) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 |a_{ij}| = 2$$

$$R_3'(A) \equiv \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 |a_{ij}| = 2$$

Υλοποιώντας το δεύτερο βήμα του Αλγορίθμου 2.1 οι Geršgorin  $G_i(A), 1 \leq i \leq n$  δίσκοι, υπολογίζονται από τη (2.7):

$$\{|z - a_{11}| \leq R_1'(A)\} = \{|z - 2| \leq 1\} = G_1(A)$$

$$\{|z - a_{22}| \leq R_2'(A)\} = \{|z - 4| \leq 2\} = G_2(A)$$

$$\{|z - a_{33}| \leq R_3'(A)\} = \{|z + 3| \leq 2\} = G_3(A)$$

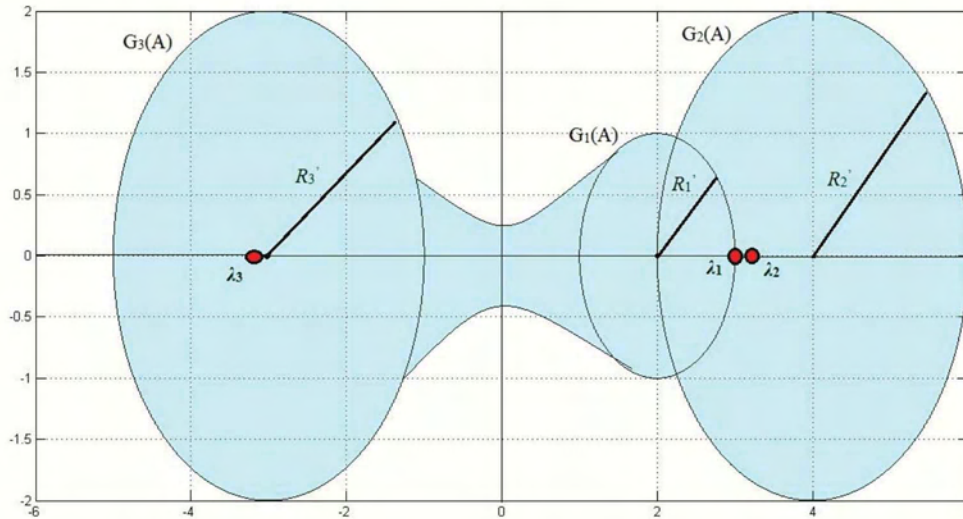
Η Geršgorin περιοχή σκιαγραφείται στο Σχήμα 2.2.

Οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  βρίσκονται στη περιοχή που δημιουργείται από την ένωση των δίσκων

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^3 G_i(A)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι:

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3.1623, \quad \lambda_3 = -3.1623.$$



**Σχήμα 2.2:** Geršgorin δίσκοι και ιδιοτιμές

Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή  $\lambda_1$  ανήκει στους δίσκους  $G_1(A)$  και  $G_2(A)$ , ενώ  $\lambda_2$  βρίσκεται στο δίσκο  $G_2(A)$  και  $\lambda_3$  είναι στο δίσκο  $G_3(A)$ . Μπορούμε λοιπόν να επιβεβαιώσουμε ότι και οι τρεις ιδιοτιμές εμπεριέχονται στη Geršgorin περιοχή

$$G(A) = G_1(A) \cup G_2(A) \cup G_3(A). \quad \square$$

Επειδή οι πίνακες  $A, A^T$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές το θεώρημα Geršgorin μπορεί να εφαρμοστεί για τον πίνακα  $A^T$ , αποτέλεσμα που διατυπώνεται στο παρακάτω πόρισμα.

**Πόρισμα 2.1** [10]

Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  και για κάθε  $1 \leq j \leq n$  σημειώνεται

$$C_j(A) \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|, \quad (2.8)$$

το άθροισμα των απολύτων τιμών των μη διαγωνίων στοιχείων της  $j$ -στήλης του  $A$ .

Όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  βρίσκονται στην ένωση των  $n$ -δίσκων

$$G(A^T) \equiv \bigcup_{j=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq C_j(A)\}. \quad (2.9)$$

**Παράδειγμα 2.4**

Έστω ο πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_3$ , όπου  $a_{ij} = \frac{i}{j}$ . Να βρεθούν οι Geršgorin δίσκοι του πίνακα και στη συνέχεια να σχεδιαστεί το χωρίο, όπου εντοπίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

**Λύση:**

Τα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται από τη σχέση  $a_{ij} = \frac{i}{j}$ , οπότε ο πίνακας  $A$  είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$  είναι  $\chi_A(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 3)$ .

Επομένως, ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 3$  και  $\lambda_2 = 0$  (διπλή ιδιοτιμή).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 (Geršgorin) και υλοποιώντας τον Αλγόριθμο 2.1, έχουμε:

$$R_1' = |\alpha_{12}| + |\alpha_{13}| = \frac{5}{6}, \quad R_2' = |\alpha_{21}| + |\alpha_{23}| = \frac{8}{3}, \quad R_3' = |\alpha_{31}| + |\alpha_{32}| = \frac{9}{2}.$$

Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του  $A$  είναι όλα ίσα με τη μονάδα, οι κυκλικόι δίσκοι του Geršgorin είναι ομόκεντροι με κέντρο  $(1, 0)$ . Οπότε η Geršgorin περιοχή είναι:

$$\begin{aligned} G(A) &\equiv \bigcup_{i=1}^3 \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i'(A)\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{11}| \leq R_1'(A)\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{22}| \leq R_2'(A)\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{33}| \leq R_3'(A)\} \\ &= \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{5}{6}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{8}{3}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{9}{2}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{9}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Άρα, η Geršgorin περιοχή είναι ο μέγιστος κυκλικός δίσκος με κέντρο  $(1, 0)$  και ακτίνα  $\frac{9}{2}$ .

Ομοίως, αν εφαρμόσουμε το Πρόσλημα 2.1 για το πίνακα  $A^T$  έχουμε:

$$C_1' = |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = \frac{5}{3}, \quad C_2' = |\alpha_{12}| + |\alpha_{32}| = \frac{8}{3}, \quad C_3' = |\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| = \frac{9}{2}.$$



Επειδή τα διαγώνια στοιχεία του  $A^T$  είναι όλα ίσα με τη μονάδα, οι κυκλικοί δίσκοι του Geršgorin είναι ομόκεντροι με κέντρο  $(1,0)$ .

Η Geršgorin περιοχή είναι:

$$\begin{aligned} G(A^T) &\equiv \bigcup_{i=1}^3 \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq C_j(A) \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{11}| \leq C_1(A) \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{22}| \leq C_2(A) \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{33}| \leq C_3(A) \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{5}{3} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{8}{3} \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{9}{2} \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{9}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Άρα, η Geršgorin περιοχή είναι ο μέγιστος κυκλικός δίσκος με κέντρο  $(1,0)$  και

ακτίνα  $\frac{9}{2}$ .

Επομένως, παρατηρούμε ότι οι ιδιοτιμές του  $A$  βρίσκονται σε κάθε μια από τις περιοχές  $G(A)$ ,  $G(A^T)$  αλλά και στην περιοχή

$$G(A) \cap G(A^T) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq \frac{9}{2} \right\}. \quad \square$$

Επειδή για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  ισχύει

$$|a_{ii}| + R_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1 (Geršgorin) και Θεώρημα 1.3 μπορούμε να αποδείξουμε άνω φράγματα της φασματικής ακτίνας του πίνακα  $A$ , όπως αυτά διατυπώνονται στο ακόλουθο πόρισμα.

## Πόρισμα 2.2

Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$ . Τότε για τη φασματική ακτίνα του  $A$  ισχύουν:

$$\rho(A) \leq \min \left\{ \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} = \min \{ \|A\|_\infty, \|A\|_1 \}, \quad (2.10)$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & \mathbb{C} & \\ \mathbb{C} & \rho(A) \leq \|A\|_\infty & \text{και} \quad \rho(A) \leq \|A^T\|_\infty \\ \mathbb{C} & \Psi & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} & \Psi & \mathbb{C} \\ \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}$$



**Παράδειγμα 2.5**

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 2.4. Να γίνει η επαλήθευση της (2.10).

**Λύση:**

Επειδή ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 3$  και  $\lambda_2 = 0$  (διπλή ιδιοτιμή), εφαρμόζοντας τον Ορισμό 1.1 και τη (1.3) έχουμε

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{0, 3\} = 3.$$

Συνεπώς, η φασματική ακτίνα του πίνακα  $A$  ισούται με 3.

Επιπλέον

$$\begin{aligned} & \min\left\{\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right\} = \\ & \min\left\{\max_i \{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}, \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}\}, \right. \\ & \quad \left. \max_j \{\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}\}\right\} = \\ & \min\left\{\max_i \left\{\frac{11}{6}, \frac{11}{3}, \frac{11}{2}\right\}, \max_j \{6, 3, 2\}\right\} = \\ & \min\left\{\frac{11}{2}, 6\right\} = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με την τιμή της φασματικής ακτίνας του  $A$  είναι φανερό ότι ισχύει

$$\rho(A) \leq \frac{11}{2},$$

το οποίο επαληθεύει τη (2.10) του Πορίσματος 2.2. □

Θέλοντας τώρα να προσδιορίσουμε μια περιοχή που να μας δίνει καλύτερη προσέγγιση των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$ , εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1 (Geršgorin) για τον πίνακα  $D^{-1}AD$ , επειδή γνωρίζουμε ότι έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε ως

$$D = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n), p_i > 0.$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$D^{-1}AD = \left[ \frac{p_j a_{ij}}{p_i} \right],$$

οπότε τα διαγώνια στοιχεία του  $D^{-1}AD$  είναι τα ίδια με του  $A$ , δηλαδή είναι τα στοιχεία  $a_{ii}$ . Έτσι καταλήγουμε στο ακόλουθο πόρισμα.

### Πόρισμα 2.3

Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  και  $p_1, p_2, \dots, p_n$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  βρίσκονται στην περιοχή

$$\bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{p_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j |a_{ij}| \right\} \equiv G(D^{-1}AD), \quad (2.11)$$

όπως και στην περιοχή

$$\bigcup_{j=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq p_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{p_i} |a_{ij}| \right\} \equiv G((D^{-1}AD)^T). \quad (2.12)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των νορμών από την Ενότητα 1.5, το Πόρισμα 2.2 και τον Ορισμό 1.1 της φασματικής ακτίνας καταλήγουμε στο ακόλουθο πόρισμα φασματικής ακτίνας ενός πίνακα  $A$ .

### Πόρισμα 2.4

Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$ . Τότε για τη φασματική ακτίνα του  $A$  ισχύουν:

$$\rho(A) \leq \min_{p_1, \dots, p_n > 0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^n p_j |a_{ij}| = \min \|D^{-1}AD\|_{\infty} \quad (2.13)$$

$$\rho(A) \leq \min_{p_1, \dots, p_n > 0} \max_{1 \leq j \leq n} p_j \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} |a_{ij}|. \quad (2.14)$$

Ο ορισμός που ακολουθεί εύκολα διαπιστώνουμε ότι απορρέει από το Θεώρημα 2.1 (Gershgorin) από τον τύπο (2.6) μια και διατηρείται ο ίδιος συμβολισμός, και στη βιβλιογραφία δίνεται [5, Definition 1], [10, Definition 6.1.9].

#### Ορισμός 2.4

Ένας πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  ονομάζεται **υπερισχύων διαγώνιος** (diagonally dominant) αν ισχύει

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = R'_i, \quad \text{για κάθε } i=1,2,\dots,n. \quad (2.15)$$

Στη περίπτωση που ισχύει

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| = R'_i, \quad \text{για κάθε } i=1,2,\dots,n,$$

ο πίνακας ονομάζεται **αυστηρά υπερисχύων διαγώνιος** (strictly diagonally dominant).

Ένας αυστηρά υπερисχύων διαγώνιος πίνακας έχει τις ιδιότητες που αναφέρονται στην ακόλουθη Πρόταση, ιδιότητες που είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την ανάπτυξη της αντίστοιχης μεθόδου στο Κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα στην Ενότητα 3.2.

#### Πρόταση 2.2 [10, Theorem 6.1.10]

Έστω ο πίνακας  $A \in M_n$  να είναι αυστηρά υπερисχύων διαγώνιος. Τότε,

- i.  $A$  είναι αντιστρέψιμος.
- ii. Αν όλα τα κύρια διαγώνια στοιχεία του  $A$  είναι θετικά, τότε όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  έχουν θετικό πραγματικό μέρος.

**Παράδειγμα 2.6**

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -8 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  είναι αυστηρά υπερισχύων διαγώνιος.

**Λύση:**

Χρειάζεται να επαληθεύσουμε τη (2.16) του Ορισμού 2.4. Εύκολα παρατηρούμε ότι για κάθε γραμμή ισχύει:

$$1^{\text{η}}: |6| > |-1| + |2| + |2|$$

$$2^{\text{η}}: |5| > |-1| + |-1| + |2|$$

$$3^{\text{η}}: |-8| > |1| + |1| + |5|$$

$$4^{\text{η}}: |3| > |-1| + |0| + |0|$$

Επειδή σε κάθε γραμμή ικανοποιείται η ανισότητα

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^4 |a_{ij}|$$

ο πίνακας  $A$  είναι αυστηρά υπερισχύων διαγώνιος. □

## 2.2 Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα με τυχαίο πίνακα E

Σε αυτήν την ενότητα μελετώνται οι διαταραχές που προκαλούνται στις ιδιοτιμές ενός πίνακα από την παρουσία ενός κατάλληλου πίνακα διαταραχής E.

### Ορισμός 2.5

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_n$ . Ορίζουμε το **διαταραγμένο πίνακα**,

$$\tilde{A} = A + E \quad (2.17)$$

όπου E είναι ένας  $n \times n$  πίνακας διαταραχής.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε θεωρήματα, που αναφέρονται στη βιβλιογραφία [17, 21], και σχετίζονται με τον εντοπισμό του φάσματος του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  στη (2.17) σχετικά με το φάσμα του A.

### Θεώρημα 2.2 (Ostrowsky – Elsner)

Έστω  $\lambda$  μια ιδιοτιμή του  $A \in M_n$  αλγεβρικής πολλαπλότητας m. Για κάθε νόρμα πινάκων  $\|\cdot\|$  και για κάθε «αρκετά μικρό»  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε για κάθε πίνακα E με  $\|E\| < \delta$ , ο δίσκος

$$G(\lambda, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq \varepsilon\}$$

περιέχει ακριβώς m ιδιοτιμές του πίνακα  $\tilde{A} = A + E$  (λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες). □

Η απόδειξη του Θεωρήματος Ostrowsky – Elsner εμπεριέχεται στη βιβλιογραφία [17], [21, Θεώρημα 8.1.2]. Η απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος εμπεριέχεται στη βιβλιογραφία [17], [21, Θεώρημα 8.1.7].

**Θεώρημα 2.3**

Έστω  $\lambda$  μια απλή ιδιοτιμή του πίνακα  $A \in M_n$ , με  $x, y$  το δεξί και αριστερό ιδιοδιάνυσμα, αντίστοιχα. Έστω τυχαίος πίνακας  $E \in M_n$  «αρκετά μικρός» και  $\tilde{A} = A + E$  ο διαταραγμένος πίνακας του  $A$ , όπως στη (2.17). Τότε υπάρχει μοναδική ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}$  του  $\tilde{A}$  τέτοια ώστε

$$\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{y^* E x}{y^* x} + O(\|E\|_2^2). \quad (2.18)$$

**Σχόλιο 2.4**

Στη περίπτωση απλής ιδιοτιμής από τη (2.18) μπορεί κάποιος να γράψει

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| \cong \frac{\|x\|_2 \|y\|_2}{|y^* x|} \|E\|_2,$$

όπου το δεξιό μέλος είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του πρώτου. Επειδή στη παραπάνω σχέση εμφανίζεται η ποσότητα  $|\tilde{\lambda} - \lambda|$ , που από τη (2.2) είναι το σφάλμα της ιδιοτιμής, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την παραπάνω σχέση για εκτίμηση του σφάλματος.

Επίσης ο συντελεστής

$$k(\lambda) = \frac{\|x\|_2 \|y\|_2}{|y^* x|},$$

στη βιβλιογραφία [18, 21] είναι γνωστός ως **δείκτης κατάστασης της ιδιοτιμής**  $\lambda$  ως προς τη 2-νόρμα διανύσματος και αποτελεί ένα μέτρο για την ευαισθησία της ιδιοτιμής  $\lambda$ . Ένας άλλος δείκτης γνωστός στη βιβλιογραφία ως **δείκτης κατάστασης του πίνακα**  $A \in M_n$  είναι ο θετικός πραγματικός αριθμός

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2,$$

ο οποίος αποτελεί ένα μέτρο για την ευστάθεια του τετραγωνικού συστήματος από όπου προέκυψε ο πίνακας. Ο δείκτης κατάστασης θα χρησιμοποιηθεί στην Ενότητα 3.2.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ορισμένα συμπεράσματα που αφορούν αρχικά στους κανονικούς και στη συνέχεια στους διαγωνοποιήσιμους πίνακες.

### Πρόταση 2.3 [21]

Έστω  $A \in M_n$  κανονικός πίνακας και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές του (όχι κατά ανάγκη διακεκριμένες). Αν  $\tilde{\lambda}$  μια ιδιοτιμή του

$$\tilde{A} = A + E,$$

τότε υπάρχει ιδιοτιμή  $\lambda_i \in \sigma(A)$  τέτοια ώστε

$$|\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq \|E\|_2. \quad (2.19)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.11 ο κανονικός πίνακας είναι πάντα διαγωνοποιήσιμος, επομένως η Πρόταση 2.3 δίνει το έναυσμα για να διατυπώσουμε το επόμενο θεώρημα, την απόδειξή του μπορούμε να τη μελετήσουμε [10, Theorem 6.3.2], [17, 21].

### Θεώρημα 2.4

Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ιδιοτιμές ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα  $A \in M_n$  με  $A = PDP^{-1}$ ,  $P \in M_n$  και  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Έστω ακόμη μια νόρμα  $\|\cdot\|$  για την οποία ισχύει

$$\|\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\mu_i|$$

για κάθε διαγώνιο πίνακα. Αν  $\tilde{\lambda}$  μια ιδιοτιμή του  $A$ , τότε υπάρχει  $\lambda_i \in \sigma(A)$  τέτοια ώστε

$$|\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|E\|, \quad (2.20)$$

όπου  $E \in M_n$ .

<sup>1</sup> Εδώ χρειάζεται να σημειώσουμε ότι στη (2.20) ο αριθμός  $\|P\| \|P^{-1}\|$  είναι ο δείκτης κατάστασης  $K(P)$  του πίνακα  $P$ , [18].

**Παράδειγμα 2.7**

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να γίνει διαταραχή με τον πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 0.0096 & 0.0096 & 0.0014 \\ 0.0016 & 0.0049 & 0.0042 \\ 0.0097 & 0.0080 & 0.0092 \end{bmatrix}$$

και να βρεθούν τα σφάλματα  $|\tilde{\lambda} - \lambda_i|$  για  $i=1,2,3$ , όπου  $\tilde{\lambda}$  μια ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A} = A + E$ .

**Λύση:**

Παρατηρούμε ότι ισχύει  $AA^T = A^T A$ , άρα ο πίνακας  $A$  είναι κανονικός, επειδή επαληθεύει τον αντίστοιχο Ορισμό που διατυπώνεται στην Ενότητα 1.1. Η κανονικότητα του  $A$  μας οδηγεί στο να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.3.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι

$$\lambda_1 = 0 + 1.7321i, \lambda_2 = 0 - 1.7321i, \lambda_3 = 3.0000.$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (2.17) για τον πίνακα  $E$  προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1.0096 & 2.0096 & 0.0014 \\ 0.0016 & 1.0049 & 2.0042 \\ 2.0097 & 0.0080 & 1.0092 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.0021 + 1.7357i, \tilde{\lambda}_2 = 0.0021 - 1.7357i, \tilde{\lambda}_3 = 3.0194.$$

Παίρνοντας  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_3 = 3.0194$  από τη (2.19)

- για  $i=1$ ,  $|3.0194 - (0 + 1.7321i)| = |3.0194 + 1.7321i| = 2.4730$
- για  $i=2$ ,  $|3.0194 - (0 - 1.7321i)| = |3.0194 - 1.7321i| = 2.4730$
- για  $i=3$ ,  $|3.0194 - 3.0000| = 0.0194$

Η 2-νόρμα (φασματική νόρμα) του πίνακα διαταραχής  $E$ , που υπολογίζεται με Matlab, είναι ίση με

$$\|E\|_2 = 0.0208.$$

Άρα, για  $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_3$  υπάρχει η ιδιοτιμή  $\lambda_3$  τέτοια ώστε



$$|\tilde{\lambda} - \lambda_i| \leq 0.0208,$$

το οποίο επαληθεύει τη (2.19) στην Πρόταση 2.3.

□

### 2.3 Διαταραχή ιδιοτιμών πίνακα με μεταβλητές $a, b$ και πίνακα $E$ Γενικευμένος μετασχηματισμός Levinger

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται διαταραχές που προκαλούνται στις ιδιοτιμές ενός πίνακα  $A$  από τις μεταβλητές  $a, b$  και την παρουσία ενός τυχαίου πίνακα  $E$ . Εδώ χρησιμοποιούμε τη διαταραχή γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger, [1].

#### Ορισμός 2.5

Για κάθε  $A \in M_n$  ορίζουμε

$$A = H_A + S_A \quad (2.21)$$

όπου

$$H_A = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S_A = \frac{A - A^*}{2}, \quad (2.22)$$

το **ερμιτιανό** και **αντιερμιτιανό** μέρος του  $A$ , αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.21) και (2.22) μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

#### Ορισμός 2.6

Έστω ο πίνακας  $A \in M_n$  και  $a, b$  τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε ως **γενικευμένο μετασχηματισμό Levinger** του πίνακα  $A$  την οικογένεια των πινάκων

$$L(A, a, b) = aH_A + bS_A = \frac{a+b}{2}A + \frac{a-b}{2}A^*. \quad (2.23)$$

#### Ορισμός 2.7

Έστω ο πίνακας  $A \in M_n$ . Για τον πραγματικό αριθμό  $t$  με  $t \in [0, 1]$  ορίζουμε ως **μετασχηματισμό Levinger**

$$L(A, t) = (1-t)A + tA^* \quad (2.24)$$

Στην περίπτωση που στη σχέση (2.23) αντικαταστήσουμε,

$$a = 2t - 1 \quad \text{και} \quad b = 1,$$

τότε αυτή γράφεται

$$L(A, 2t - 1, 1) = (1-t)A + tA^*, \quad \text{όπου } t \in \mathbb{R}.$$

οπότε προκύπτει ο «κλασικός» μετασχηματισμός Levinger (2.24), όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [1, 20].

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε το γενικευμένο μετασχηματισμό Levinger για έναν πίνακα διαταραχής  $E$ , του οποίου η επίδραση σε έναν πίνακα  $A \in M_n$  εξαρτάται από τις παραμέτρους  $a, b$  και τον τυχαίο πίνακα  $E \in M_n$ .

### Ορισμός 2.8

Έστω πίνακας  $A \in M_n$  και  $E \in M_n$  πίνακας διαταραχής. Θεωρούμε το διαταραγμένο πίνακα

$$\tilde{A} = A + L(E, a, b) = A + aH_E + bS_E, \quad (2.25)$$

όπου  $a, b \in \mathbb{R}$  «αρκετά μικρές» μη σταθερές μεταβλητές και με το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του πίνακα  $E$  να επηρεάζει ξεχωριστά τον πίνακα  $A$ .

Το θεώρημα που ακολουθεί, το οποίο διατυπώνεται και αποδεικνύεται [1, Theorem 2] μας δίνει τύπους για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , ποσότητες που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα  $A$ .

### Θεώρημα 2.5

Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_n$  διαγωνοποιήσιμος και  $u_i$  και  $w_i$  τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του  $A$  που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i \in \sigma(A)$ . Αν η ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_i$

και το ιδιοδιάνυσμα  $u_{a,b}$  έχουν συνεχείς δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους στην περιοχή του  $\lambda_i$  και  $u_i$ , τότε:

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \frac{(w_i^* L(E, a, b) u_i)}{s_i} + \sum_{k \neq i} \frac{(w_i^* L(E, a, b) u_k)(w_k^* L(E, a, b) u_i)}{(\lambda_i - \lambda_k) s_i s_k} + O(a^3, b^3) \quad (2.26)$$

$$u_{a,b} = u_i + \sum_{k \neq i} \frac{(u_k w_k^* L(E, a, b) u_i)}{(\lambda_i - \lambda_k) s_k} + \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{(w_j^* L(E, a, b) u_k)(w_k^* L(E, a, b) u_i)}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_j) s_i s_k} u_j - \sum_{k \neq i} \frac{(w_j^* L(E, a, b) u_i)(w_i^* L(E, a, b) u_i)}{(\lambda_i - \lambda_j)^2 s_i s_j} u_j + O(a^3, b^3) \quad (2.27)$$

όπου  $s_i = w_i^* u_i$ .

Από το Θεώρημα 2.5 είναι φανερό ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε την ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A} = A + E$ , όταν  $A \in M_n$  είναι διαγωνοποιήμενος και  $E \in M_n$ , αρκεί να παραλείψουμε το  $O(a^3, b^3)$ . Έτσι ορίζουμε ως **προσεγγιστική τιμή στην ιδιοτιμή**  $\tilde{\lambda}_i$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , την ποσότητα

$$\lambda_i^{-O(a,b)} = \lambda_i + \frac{(w_i^* L(E, a, b) u_i)}{s_i} + \sum_{k \neq i} \frac{(w_i^* L(E, a, b) u_k)(w_k^* L(E, a, b) u_i)}{(\lambda_i - \lambda_k) s_i s_k}, \quad (2.28)$$

όπου  $u_i$  και  $w_i$  τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του  $A$ . Το  $\lambda_i^{-O(a,b)}$  διαφέρει από το  $\tilde{\lambda}_i$  κατά  $O(a^3, b^3)$ .

#### Σχόλιο 2.4

Εδώ και οπουδήποτε αλλού στη συνέχεια χρειάζεται να σημειώσουμε ότι, όταν  $A, E$  είναι πραγματικοί πίνακες στη θέση  $*$  (αναστροφοσυζυγία) χρησιμοποιείται  $^T$  (αναστροφή) και οι λέξεις ερμιτιανό / αντερμιτιανό αντικαθίστανται από συμμετρικό / αντισυμμετρικό, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια ορίζουμε το προσεγγιστικό σφάλμα της ιδιοτιμής  $\lambda_i$ .

**Ορισμός 2.9**

Έστω  $A \in M_n$  με ιδιοτιμή  $\lambda_i$ , για κάθε  $i=1,2,\dots,n$ , και  $\lambda_i^{-O(a,b)}$  την προσεγγιστική τιμή στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_i$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ . Ορίζουμε ως **προσεγγιστικό σφάλμα** της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  το θετικό πραγματικό αριθμό που είναι

$$pr_i = |\lambda_i^{-O(a,b)} - \lambda_i|. \quad (2.29)$$

Με βάση τα παραπάνω πραγματοποιήσαμε τον ακόλουθο αλγόριθμο που υπολογίζεται η ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  σε σχέση με την ιδιοτιμή ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα  $A$ .

**Αλγόριθμος 2.2** (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger)

1. Εύρεση ιδιοτιμών  $\lambda$  του πίνακα  $A \in M_n$ .
2. Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  να είναι οι  $k$  διαφορετικές ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του πίνακα

$$M = (A - \lambda_1 I) (A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_k I).$$

Αν  $M \neq \mathbb{O}$ , τότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται και δεν εφαρμόζεται η μέθοδος διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα με μετασχηματισμό Levinger. Αν  $M = \mathbb{O}$ , τότε ο πίνακας διαγωνοποιείται.

3. Υπολογισμός των δεξιών και αριστερών ιδιοδιανυσμάτων  $u_i, w_i$  που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$ .
4. Εισαγωγή ενός τυχαίου πίνακα  $E \in M_n$  με στοιχεία που ανήκουν στο διάστημα  $[0,1]$ .
5. Υπολογισμός από τη (2.22) του ερμιτιανού και αντερμιτιανού μέρους του  $E$ ,

$$H_E = \frac{E + E^*}{2} \quad \text{και} \quad S_E = \frac{E - E^*}{2}.$$

6. Για τις πραγματικές μεταβλητές  $a, b$ , υπολογισμός του γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger,  $L(E, a, b) = aH_E + bS_E$ , από τη (2.23).
7. Υπολογισμός της προσεγγιστικής τιμής  $\lambda_i^{-O(a,b)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_i$  του πίνακα  $\tilde{A}$  από τη (2.28)

$$\lambda_i^{-O(a,b)} = \lambda_i + \frac{(w_i^* L(E, a, b) u_i)}{s_i} + \sum_{k \neq i} \frac{(w_i^* L(E, a, b) u_k)(w_k^* L(E, a, b) u_i)}{(\lambda_i - \lambda_k) s_i s_k},$$

όπου  $s_i = w_i^* u_i$ .

8. Υπολογισμός του προσεγγιστικού σφάλματος από τη (2.29),  $pr_i = |\lambda_i^{-O(a,b)} - \lambda_i|$ .
9. Ο αλγόριθμος τερματίζει δίνοντας τον  $E$  και το  $pr_i$ . □

### Σχόλιο 2.5

Χρησιμοποιώντας στη (2.22) τον πίνακα διαταραχής  $E$  και αντικαθιστώντας στη (2.25) τις τιμές των μεταβλητών  $a, b$ , καθώς και το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του  $E$  κατασκευάζεται ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + L(E, a, b) = A + aH_E + bS_E.$$

### Παράδειγμα 2.8

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί ο διαταραγμένος πίνακας με τη χρήση του γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger και προσεγγιστική τιμή  $\lambda_i^{-O(a,b)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_i$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  ως συνάρτηση των μεταβλητών  $a, b$ .

**Λύση:**

Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$\chi_A(\lambda) = |A - \lambda I| = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

έχουμε

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2\}.$$

Από την Πρόταση 1.10 προκύπτει

$$A - \lambda_1 I = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - \lambda_2 I = A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου προκύπτει

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \mathbb{O}.$$

Άρα ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος. Συνεπώς, οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.5 ικανοποιούνται, οπότε συνεχίζουμε στο βήμα 3 του Αλγορίθμου 2.2.

- Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του  $A$  προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος  $(A - \lambda I)u_i = 0$ . Για  $\lambda = 1$  το σύστημα γίνεται :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u_{12} = u_{13} = 0, u_{11} = g \in \mathbb{R} \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{για } g = 1.$$

Όμοια για τη διπλή ιδιοτιμή  $\lambda = 2$  βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε τον πίνακα των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων

$$[u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Αντίστοιχα τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του  $A$  προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος  $w_i^T (A - \lambda I) = 0$ , τα οποία τοποθετούμε στήλες στον πίνακα των αριστερών ιδιοδιανυσμάτων

$$[w_1 \ w_2 \ w_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Θεωρούμε τον πίνακα διαταραχής

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.6 ο γενικευμένος μετασχηματισμός Levinger του πίνακα  $E$  είναι:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{E}, a, b) &= a\mathbf{H}_{\mathbf{E}} + b\mathbf{S}_{\mathbf{E}} = \frac{a+b}{2}\mathbf{E} + \frac{a-b}{2}\mathbf{E}^T \\
\Leftrightarrow L(\mathbf{E}, a, b) &= \frac{a+b}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{a-b}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow L(\mathbf{E}, a, b) &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

- Ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  είναι:

$$\tilde{A} = A + L(\mathbf{E}, a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 0 & 1+b \\ 0 & 2+a & 0 \\ -b & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $\tilde{A}$  είναι

$$\chi_{\tilde{A}}(\lambda) = (\lambda - 2 - a)(\lambda^2 - (3+a)\lambda + b^2 + b + 2a),$$

από όπου προκύπτει το φάσμα του  $\tilde{A}$  που είναι:

$$\begin{aligned}
\sigma(\tilde{A}) &= \left\{ \lambda_{1a,b} = \frac{3+a - \sqrt{(a-1)^2 - 4b(b+1)}}{2}, \lambda_{2a,b} = \frac{3+a + \sqrt{(a-1)^2 - 4b(b+1)}}{2}, \right. \\
&\quad \left. \lambda_{3a,b} = 2+a \right\}.
\end{aligned}$$

□

### Παράδειγμα 2.9

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

και οι πραγματικοί αριθμοί  $a = 0.0002$ ,  $b = 0.001$ .

Υλοποιώντας τον Κώδικα 1 που βρίσκεται στο Παράρτημα, και αναπτύσσεται σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.2 (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger),

- να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(0.0002, 0.001)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή



του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.0002. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_2, \|E\|_F, \|E\|_\infty$ .

ii) να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(0.0002, 0.001)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.002. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_2, \|E\|_F, \|E\|_\infty$ .

iii) να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_4^{-O(0.0002, 0.001)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_4$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.00035. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_2, \|E\|_F, \|E\|_\infty$ .

### Λύση:

i) Ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 6 + 2.8284i, \quad \lambda_3 = 6 - 2.8284i, \quad \lambda_4 = 5.$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του είναι διαφορετικές, από τη Πρόταση 1.9 προκύπτει ότι ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος, οπότε μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα με γενικευμένο μετασχηματισμό Levinger.

Για τις παραπάνω ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται τα αντίστοιχα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα  $u_i, w_i$ , που τοποθετούνται ως στήλες στους πίνακες  $u, w$  ως ακολούθως.

$$u = \begin{bmatrix} -0.0308 & -0.7456 & -0.7456 & 0.2673 \\ 0.9857 & 0.095 - 0.0569i & 0.095 + 0.0569i & 0 \\ -0.0616 & -0.4751 - 0.2429i & -0.4751 + 0.2429i & 0.5345 \\ 0.1540 & -0.2631 + 0.2791i & -0.2631 - 0.2791i & 0.8018 \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} 0.2280 & -0.8523 + 0.5518i & -0.8523 - 0.5518i & -0.9874 \\ 1.0031 & -0.0394 - 0.1646i & -0.0394 + 0.1646i & -0.1039 \\ -0.1824 & 0.1901 - 1.2634i & 0.1901 + 1.2634i & 1.0393 \\ 0.0456 & 0.1574 + 0.6583i & 0.1574 - 0.6583i & 0.8834 \end{bmatrix}.$$

Ως εκ τούτου, το δεξιά και αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή είναι η πρώτη στήλη των αντίστοιχων πινάκων  $u$  και  $w$  τα οποία στη συνέχεια σημειώνονται  $u_1, w_1$ , αντίστοιχα.

Για τον τυχαίο πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 0.6122 & 0.9216 & 0.7962 & 0.7141 \\ 0.8492 & 0.3472 & 0.9709 & 0.0981 \\ 0.6386 & 0.0221 & 0.7417 & 0.9140 \\ 0.4979 & 0.0483 & 0.2788 & 0.7847 \end{bmatrix}$$

από τη (2.22) προκύπτει το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του πίνακα  $E_1$ , που είναι αντίστοιχα

$$H_{E_1} = \frac{E_1 + E_1^T}{2} = \begin{bmatrix} 0.6122 & 0.8854 & 0.7174 & 0.6060 \\ 0.8854 & 0.3472 & 0.4965 & 0.0732 \\ 0.7174 & 0.4965 & 0.7417 & 0.5964 \\ 0.6060 & 0.0732 & 0.5964 & 0.7847 \end{bmatrix},$$

και

$$S_{E_1} = \frac{E_1 - E_1^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0362 & 0.0788 & 0.1081 \\ -0.0362 & 0 & 0.4744 & 0.0249 \\ -0.0788 & -0.4744 & 0 & 0.3176 \\ -0.1081 & -0.0249 & -0.3176 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $a=0.0002$  και  $b=0.001$  έχουμε:

$$L(E_1, 0.0002, 0.001) = 0.001 \begin{bmatrix} 0.1224 & 0.2133 & 0.2223 & 0.2293 \\ 0.1408 & 0.0694 & 0.5737 & 0.0395 \\ 0.0647 & -0.3751 & 0.1483 & 0.4369 \\ 0.0131 & -0.0103 & -0.1983 & 0.1569 \end{bmatrix}$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(a,b)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που προκύπτει από (2.28), είναι

$$\lambda_1^{-O(0.0002, 0.001)} = \lambda_1 + \frac{(w_1^T L(E_1, 0.0002, 0) u_1)}{s_1} + \sum_{k \neq 1} \frac{(w_1^T L(E_1, 0.0002, 0) u_k)(w_k^T L(E_1, 0.0002, 0) u_1)}{(\lambda_1 - \lambda_k) s_1 s_k} = -2.9999$$

με προσεγγιστικό σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, που προκύπτει από τον τύπο (2.29), ίσο με

$$pr_1 = 1.4535 \cdot 10^{-4}.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $E$  και τους  $a, b$  ο διαταραγμένος πίνακας, που προκύπτει από τη (2.25) όπως στο Σχόλιο 2.5, είναι

$$\tilde{A} = A + E_1 = A + L(E_1, a, b) = \begin{bmatrix} 4.0001 & 1.0002 & 5.0002 & -2.9998 \\ -1.9999 & -2.9999 & 1.0006 & 0.0000 \\ -1.9999 & 0.9996 & 9.0001 & -1.9996 \\ 1.0000 & -1.0000 & 0.9998 & 4.0002 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -2,9998, \quad \tilde{\lambda}_2 = 6.0001 + 2,8282i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 6.0001 - 2,8282i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 5.0001.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E_1, 0.0002, 0.001)$  που ζητούνται είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 7.2666 \cdot 10^{-4}$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 9.6944 \cdot 10^{-4}$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 10 \cdot 10^{-4}$

ii) Έχοντας υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα τα αντίστοιχα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και για τον τυχαίο πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 30.2194 & 44.3883 & 1.8960 & 10.7941 \\ 49.8159 & 3.0084 & 5.1766 & 19.2834 \\ 6.3900 & 4.1635 & 19.9579 & 45.6890 \\ 9.8997 & 29.2917 & 26.8856 & 18.1067 \end{bmatrix},$$

το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του πίνακα  $E$  που προκύπτει από (2.22) είναι

$$H_{E_2} = \frac{E_2 + E_2^T}{2} = \begin{bmatrix} 30.2194 & 47.1021 & 4.1430 & 10.3469 \\ 47.1021 & 3.0084 & 4.6701 & 24.2875 \\ 4.1430 & 4.6701 & 19.9579 & 36.2873 \\ 10.3469 & 24.2875 & 36.2873 & 18.1067 \end{bmatrix}$$

και

$$S_{E_2} = \frac{E_2 - E_2^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -2.7138 & -2.2470 & 0.4472 \\ 2.7138 & 0 & 0.5066 & -5.0041 \\ 2.2470 & -0.5066 & 0 & 9.4017 \\ -0.4472 & 5.0041 & -9.4017 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha = 0.0002$  και  $b = 0.001$  έχουμε:

$$L(E_2, 0.0002, 0.001) = \begin{bmatrix} 0.0060 & 0.0067 & -0.0014 & 0.0025 \\ 0.0121 & 0.0006 & 0.0014 & -0.0001 \\ 0.0031 & 0.0004 & 0.0040 & 0.0167 \\ 0.0016 & 0.0099 & -0.0021 & 0.0036 \end{bmatrix}.$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(0.0002, 0.001)}$ , που προκύπτει από τον τύπο (2.28), είναι

$$\lambda_1^{-O(0.0002, 0.001)} = -2.9983.$$

Από τον τύπο (2.29) υπολογίζεται το προσεγγιστικό σφάλμα τις μικρότερης ιδιοτιμής, που είναι

$$\rho r_1 = 0.0017.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω πίνακα  $L(E_2, 0.0002, 0.001)$  ο διαταραγμένος πίνακας, που προκύπτει από τη (2.25) όπως στο Σχόλιο 2.5, είναι

$$\tilde{A} = A + L(E_2, 0.0002, 0.001) = \begin{bmatrix} 4.0060 & 1.0067 & 4.9986 & -2.9975 \\ -1.9879 & -2.9994 & 1.0014 & -0.0001 \\ -1.9969 & 1.0004 & 9.0040 & -1.9833 \\ 1.0016 & -0.9901 & 0.9979 & 4.0036 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -2,9983, \quad \tilde{\lambda}_2 = 6.0004 + 2,8286i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 6.0004 - 2,8286i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 5.0158.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E_2, 0.0002, 0.001)$  που ζητούνται είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 0.0192$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 0.0257$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 0.0242$

iii) Τα αντίστοιχα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$ , που αντιστοιχούν στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του, είναι

$$u_4 = \begin{bmatrix} 0.2673 \\ 0.0000 \\ 0.5345 \\ 0.8018 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad w_4 = \begin{bmatrix} -0.9874 \\ -0.1039 \\ 1.0393 \\ 0.8834 \end{bmatrix},$$

Τα οποία σημειώνονται ως η τελευταία στήλη των αντίστοιχων πινάκων  $u$  και  $w$  του ερωτήματος (i).

Για τον τυχαίο πίνακα  $E$

$$E = \begin{bmatrix} 0.6760 & 0.8991 & 0.6255 & 0.4051 \\ 0.2662 & 0.9165 & 0.1091 & 0.9970 \\ 0.2662 & 0.8948 & 0.0142 & 1.0000 \\ 0.4368 & 0.5182 & 0.4934 & 0.2968 \end{bmatrix}$$

το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του πίνακα  $E$ , που προκύπτει από τη (2.22), είναι αντίστοιχα

$$H_{E_3} = \frac{E_3 + E_3^T}{2} = \begin{bmatrix} 0.6760 & 0.5827 & 0.7425 & 0.4210 \\ 0.5827 & 0.9165 & 0.5020 & 0.7576 \\ 0.7425 & 0.5020 & 0.0142 & 0.7467 \\ 0.4210 & 0.7576 & 0.7467 & 0.2968 \end{bmatrix},$$

και

$$S_{E_3} = \frac{E_3 - E_3^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3165 & -0.1170 & -0.0159 \\ -0.3165 & 0 & -0.3929 & 0.2394 \\ 0.1170 & 0.3929 & 0 & 0.2533 \\ 0.0159 & -0.2394 & -0.2533 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $a = 0.0002$  και  $b = 0.001$  έχουμε:

$$L(E_3, 0.0002, 0.001) = 0.001 \begin{bmatrix} 0.1352 & 0.4330 & 0.0315 & 0.0684 \\ -0.1999 & 0.1833 & -0.2924 & 0.3909 \\ 0.2655 & 0.4932 & 0.0028 & 0.4026 \\ 0.1000 & -0.0879 & -0.1039 & 0.0594 \end{bmatrix}$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_4^{-O(0.0002, 0.001)}$ , που προκύπτει από τον τύπο (2.28), είναι

$$\lambda_4^{-O(0.0002, 0.001)} = 5.0003.$$

Το προσεγγιστικό σφάλμα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής είναι

$$pr_4 = |\lambda_4^{-O(0.0002, 0.001)} - \lambda_4| = 3.1029 \cdot 10^{-4}.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $L(E_3, 0.0002, 0.001)$  προκύπτει ο ακόλουθος διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + L(E_3, 0.0002, 0.001) = \begin{bmatrix} 4.0001 & 1.0004 & 5.0000 & -2.9999 \\ -2.0002 & -2.9998 & 0.9997 & 0.0004 \\ -1.9997 & 1.0005 & 9.0000 & -1.9996 \\ 1.0001 & -1.0001 & 0.9999 & 4.0001 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -2,9997, \quad \tilde{\lambda}_2 = 5,9999 + 2,8282i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 5,9999 - 2,8282i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 5.0003.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E_3, 0.0002, 0.001)$  είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 8.6303 \cdot 10^{-4}$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 10 \cdot 10^{-4}$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 12 \cdot 10^{-4}$  □

Στο Παράδειγμα 2.9 γίνεται διαταραχή του πίνακα  $A$  χρησιμοποιώντας ως πίνακα διαταραχής το γενικευμένο μετασχηματισμό Levinger, που ορίζεται  $L(E, a, b) = aH_E + bS_E$ , με  $a = 0.0002$  και  $b = 0.001$  παίρνοντας τον αντίστοιχο διαταραγμένο πίνακα  $\tilde{A} = A + L(E, a, b)$ . Αναρωτιόμαστε τι αποτελέσματα θα προκύψουν αν μεταβληθεί η τιμή των παραμέτρων  $a$  ή  $b$ , το οποίο δοκιμάζεται στο ακόλουθο Παράδειγμα.

### Παράδειγμα 2.10

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 2.9 και οι πραγματικοί αριθμοί  $a = 0.0002$ ,  $b = 0$ .

Υλοποιώντας τον Κώδικα 1 που βρίσκεται στο Παράρτημα, και αναπτύσσεται σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.2 (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger), να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(a,b)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.0002. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_2, \|E\|_F, \|E\|_\infty$ .

#### Λύση:

Στο προηγούμενο Παράδειγμα 2.9 υπολογίστηκαν τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  και αυτά που αντιστοιχούν στη μικρότερη ιδιοτιμή είναι:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.0308 \\ 0.9857 \\ -0.0616 \\ 0.1540 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad w_1 = \begin{bmatrix} 0.2280 \\ 1.0031 \\ -0.1824 \\ 0.0456 \end{bmatrix}.$$

Θεωρώντας τον τυχαίο πίνακα

$$E = \begin{bmatrix} 0.8909 & 0.1493 & 0.8143 & 0.1966 \\ 0.9593 & 0.2575 & 0.2435 & 0.2511 \\ 0.5472 & 0.8407 & 0.9293 & 0.6160 \\ 0.1386 & 0.2543 & 0.3500 & 0.4733 \end{bmatrix}$$

το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του πίνακα  $E$ , που προκύπτει από τη (2.22), είναι αντίστοιχα

$$H_E = \frac{E + E^T}{2} = \begin{bmatrix} 0.8909 & 0.5543 & 0.6808 & 0.1676 \\ 0.5543 & 0.2575 & 0.5421 & 0.2527 \\ 0.6808 & 0.5421 & 0.9293 & 0.4830 \\ 0.1676 & 0.2527 & 0.4830 & 0.4733 \end{bmatrix}$$

και

$$S_E = \frac{E - E^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4050 & 0.1335 & 0.0290 \\ 0.4050 & 0 & -0.2986 & -0.0016 \\ -0.1335 & 0.2986 & 0 & 0.1330 \\ -0.0290 & 0.0016 & -0.1330 & 0 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) με πραγματικούς αριθμούς  $a = 0.0002$  και  $b = 0$  έχουμε:

$$L(E, 0.0002, 0) = 0.0002H_E + 0 \cdot S_E = 0.001 \begin{bmatrix} 0.1782 & 0.1109 & 0.1362 & 0.0335 \\ 0.1109 & 0.0515 & 0.1084 & 0.0505 \\ 0.1362 & 0.1084 & 0.1859 & 0.0966 \\ 0.0335 & 0.0505 & 0.0966 & 0.0947 \end{bmatrix}.$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-0(0.0002,0)}$ , που προκύπτει από τον τύπο (2.28), είναι

$$\lambda_1^{-0(0.0002,0)} = -2.9999.$$

Το προσεγγιστικό σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, που προκύπτει από τον τύπο (2.27), είναι

$$pr_1 = 0.54793 \cdot 10^{-4}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $L(E, 0.0002, 0.001)$  από τη (2.25) προκύπτει ο ακόλουθος διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + L(E, 0.0002, 0) = \begin{bmatrix} 4.0002 & 1.0001 & 5.0001 & -3.0000 \\ -1.9999 & -2.9999 & 1.0001 & 0.0001 \\ -1.9999 & 1.0001 & 9.0002 & -1.9999 \\ 1.0000 & -0.9999 & 1.0001 & 4.0001 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -2,9999, \quad \tilde{\lambda}_2 = 6.0001 + 2,8283i, \quad \tilde{\lambda}_3 = 6.0001 - 2,8283i, \quad \tilde{\lambda}_4 = 5.0002.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E, 0.0002, 0)$  είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 4.2346 \cdot 10^{-4}$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 4.3484 \cdot 10^{-4}$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 5.2703 \cdot 10^{-4}$  □

### Σχόλιο 2.5

Παρατηρώντας στο Παράδειγμα 2.9 τα αποτελέσματα που αναφέρονται στο σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, (βλέπε ερωτήματα (i) και (ii)), για τον ίδιο πίνακα  $A$  και τα ίδιες μεταβλητές  $a, b$  σκεφτήκαμε να επαναλάβουμε τον Κώδικα 1 για 100 φορές, προκειμένου να εντοπίσουμε που κυμαίνονται οι νόρμες  $\|E\|_2, \|E\|_F, \|E\|_\infty$  σε σχέση με το προσεγγιστικό σφάλμα  $pr_1$ , που αντιστοιχεί στη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ .

Στο Σχήμα 2.3 απεικονίζονται τα διαγράμματα σφάλματος - νόρμας που προέκυψαν από τον πίνακα  $A$  του **Παραδείγματος 2.9** για 100 τυχαίους πίνακες  $E$  και με  $a = 0.0002, b = 0.001$ . Σε κάθε φιγούρα οριζόντιος άξονας είναι οι τιμές του προσεγγιστικού σφάλματος και ο κατακόρυφος είναι οι τιμές των αντίστοιχων σημειωμένων νορμών του πίνακα διαταραχής  $E = L(E, 0.0002, 0)$ . Το συμπέρασμα που προκύπτει για το σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, είναι ότι ισχύει

$$0 < pr_1 < 3.5 \cdot 10^{-4}$$

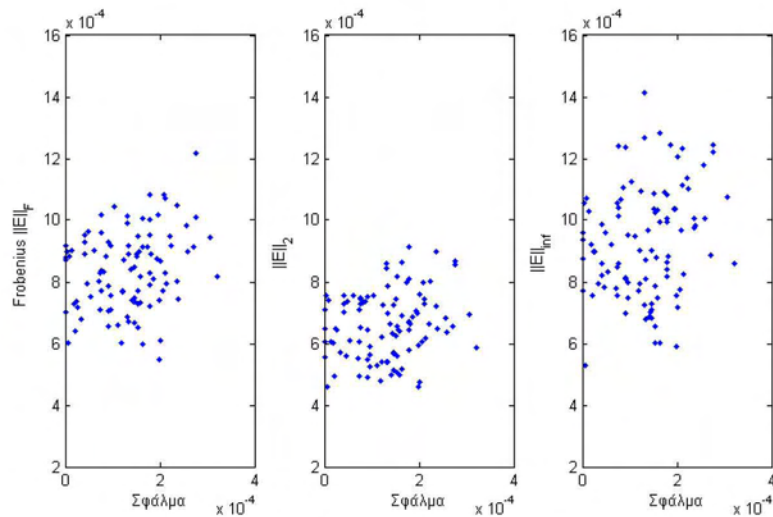
και οι τιμές των αντίστοιχων νορμών  $\|E\|_F, \|E\|_2, \|E\|_\infty$  είναι:

$$4.9 \cdot 10^{-4} < \|E\|_F < 12 \cdot 10^{-4}$$

$$4.2 \cdot 10^{-4} < \|E\|_2 < 8.7 \cdot 10^{-4}$$

$$5.3 \cdot 10^{-4} < \|E\|_\infty < 14.5 \cdot 10^{-4}$$





Σχήμα 2.3: Σφάλματος - νόρμας

Ενώ παρατηρώντας στο Σχήμα 2.4, τα διαγράμματα σφάλματος - νόρμας που προέκυψαν από τον πίνακα  $A$  του Παραδείγματος 2.10 για 100 τυχαίους πίνακες  $E$  και με  $a=0.0002$ ,  $b=0$ , το συμπέρασμα, που προκύπτει για το προσεγγιστικό σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, είναι ότι ισχύει

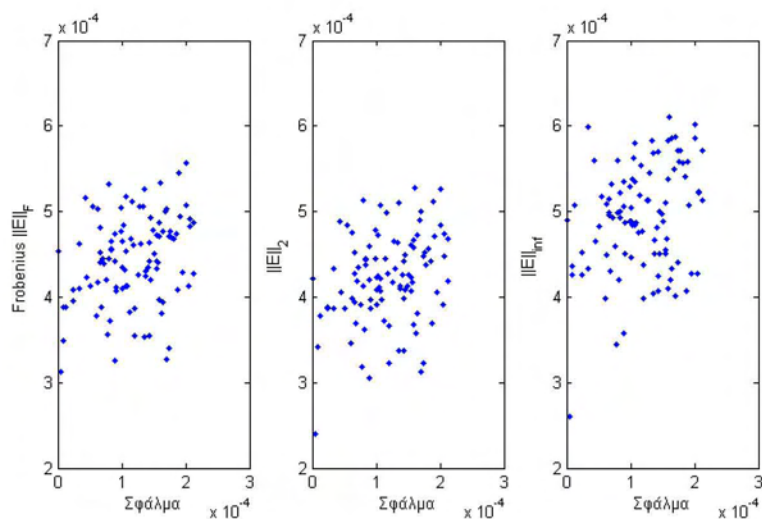
$$0 < pr_1 < 2.4 \cdot 10^{-4}$$

και οι τιμές των αντίστοιχων νορμών  $\|E\|_F$ ,  $\|E\|_2$ ,  $\|E\|_\infty$  είναι:

$$3 \cdot 10^{-4} < \|E\|_F < 5.7 \cdot 10^{-4}$$

$$2.4 \cdot 10^{-4} < \|E\|_2 < 5.6 \cdot 10^{-4}$$

$$2.6 \cdot 10^{-4} < \|E\|_\infty < 6.2 \cdot 10^{-4}$$



Σχήμα 2.4: Σφάλματος – νόρμας

□

**Σχόλιο 2.6**

Ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A} = A + L(E, a, b) = A + aH_E + bS_E$  στα ακόλουθα παραδείγματα υπολογίζεται με την εφαρμογή του Αλγορίθμου 2.2 (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger) χρησιμοποιώντας συμμετρικό πίνακα  $A$  και  $b = 0$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε να σημειώσουμε:

- (i) Ο Αλγόριθμος 2.2 εφαρμόζεται για την περίπτωση συμμετρικών πινάκων χωρίς την εφαρμογή του βήματος 2, μια και οι συμμετρικοί πίνακες είναι πάντα διαγωνοποιήσιμοι (βλέπε φασματικό θεώρημα, Θεώρημα 1.2).
- (ii) Επειδή  $b = 0$  στη (2.25) δεν υπολογίζεται το αντισυμμετρικό μέρος του  $E$ , συνεπώς ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = A + L(E, a, b) = A + aH_E$$

είναι συμμετρικός ως άθροισμα συμμετρικών πινάκων.

**Παράδειγμα 2.11**

Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 6 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 3 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

και οι πραγματικοί αριθμοί  $a = 0.0002$ ,  $b = 0$ .  $a = 0.1800$

Υλοποιώντας τον Κώδικα 1 που βρίσκεται στο Παράρτημα, και αναπτύσσεται σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.2 (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger),

- i) να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(0.0002, 0)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του με 0.0002. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_F$ ,  $\|E\|_2$ ,  $\|E\|_\infty$ .
- ii) να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(0.0002, 0)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μικρότερη πραγματική ιδιοτιμή

του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.002. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_F, \|E\|_2, \|E\|_\infty$ .

iii) να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_6^{-O(0.0002,0)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_6$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ , για κατάλληλο πίνακα  $E$ , έτσι ώστε το προσεγγιστικό σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.0006. Επίσης να δοθούν οι νόρμες  $\|E\|_F, \|E\|_2, \|E\|_\infty$ .

### Λύση:

i) Ο συμμετρικός πίνακας  $A$  έχει τις πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -5.4309, \lambda_2 = -1.9551, \lambda_3 = 2.1905, \lambda_4 = 3.5774, \lambda_5 = 6.4067, \lambda_6 = 26.2115.$$

Σύμφωνα με το Σχόλιο 2.6(i) ο συμμετρικός πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος, οπότε μπορεί να εφαρμοστεί ο Αλγόριθμος 2.2 (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger).

Για τις παραπάνω ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα  $A$  υπολογίζονται τα δεξιά ιδιοδιανύσματα, τα οποία τοποθετούνται ως στήλες στον ακόλουθο πίνακα

$$u = \begin{bmatrix} 0.1755 & 0.6018 & -0.0934 & 0.5497 & 0.5018 & 0.2106 \\ -0.6558 & 0.2250 & 0.6149 & -0.1759 & 0.1406 & 0.3006 \\ 0.1611 & -0.2149 & 0.3006 & 0.5535 & -0.5497 & 0.4785 \\ 0.6105 & -0.0584 & 0.2246 & -0.5106 & 0.2471 & 0.5017 \\ -0.2964 & -0.6463 & -0.3192 & 0.1700 & 0.4801 & 0.3649 \\ -0.2293 & 0.3462 & -0.6086 & -0.2664 & -0.3670 & 0.5015 \end{bmatrix}.$$

Επειδή ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός τα αριστερά ιδιοδιανύσματα είναι ακριβώς ίδια με τα δεξιά. Συνεπώς το δεξιά και αριστερό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή του  $A$  από τον παραπάνω πίνακα  $u$  και στη συνέχεια σημειώνονται  $u_1 = w_1$ .

Για τον τυχαίο πίνακα

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0.6959 & 0.5309 & 0.5313 & 0.0908 & 0.4574 & 0.2407 \\ 0.6999 & 0.6544 & 0.3251 & 0.2665 & 0.8754 & 0.6761 \\ 0.6385 & 0.4076 & 0.1056 & 0.1537 & 0.5181 & 0.2891 \\ 0.0336 & 0.8200 & 0.6110 & 0.2810 & 0.9436 & 0.6718 \\ 0.0688 & 0.7184 & 0.7788 & 0.4401 & 0.6377 & 0.6951 \\ 0.3196 & 0.9686 & 0.4235 & 0.5271 & 0.9577 & 0.0680 \end{bmatrix}$$

το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του πίνακα  $E_1$ , που προκύπτει από τη (2.22), είναι

$$H_{E_1} = \frac{E_1 + E_1^T}{2} = \begin{bmatrix} 0.6959 & 0.6154 & 0.5849 & 0.0622 & 0.2631 & 0.2802 \\ 0.6154 & 0.6544 & 0.3664 & 0.5432 & 0.7969 & 0.8224 \\ 0.5849 & 0.3664 & 0.1056 & 0.3823 & 0.6484 & 0.3563 \\ 0.0622 & 0.5432 & 0.3823 & 0.2810 & 0.6919 & 0.5995 \\ 0.2631 & 0.7969 & 0.6484 & 0.6919 & 0.6377 & 0.8264 \\ 0.2802 & 0.8224 & 0.3563 & 0.5995 & 0.8264 & 0.0680 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $a = 0.0002$  και  $b = 0$ , έχουμε:

$$L(E_1, 0.0002, 0) = 0.0002 H_{E_1} \\ = 0.001 \begin{bmatrix} 0.1392 & 0.1231 & 0.1170 & 0.0124 & 0.0526 & 0.0560 \\ 0.1231 & 0.1309 & 0.0733 & 0.1086 & 0.1594 & 0.1645 \\ 0.1170 & 0.0733 & 0.0211 & 0.0765 & 0.1297 & 0.0713 \\ 0.0124 & 0.1086 & 0.0765 & 0.0562 & 0.1384 & 0.1199 \\ 0.0526 & 0.1594 & 0.1297 & 0.1384 & 0.1275 & 0.1653 \\ 0.0560 & 0.1645 & 0.0713 & 0.1199 & 0.1653 & 0.0136 \end{bmatrix}.$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(a,b)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που προκύπτει από (2.28), είναι

$$\lambda_1^{-O(0.0002,0)} = \lambda_1 + \frac{(w_1^T L(E_1, 0.0002, 0) u_1)}{s_1} \\ + \sum_{k \neq i} \frac{(w_1^T L(E_1, 0.0002, 0) u_k)(w_k^T L(E_1, 0.0002, 0) u_1)}{(\lambda_1 - \lambda_k) s_1 s_k} = -5.4309$$

με προσεγγιστικό σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, που προκύπτει από τον τύπο (2.29), ίσο με

$$pr_1 = 0.10115 \cdot 10^{-4}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $E_1$  και τους  $a, b$  ο διαταραγμένος πίνακας, που προκύπτει από τη (2.25), είναι

$$\tilde{A} = A + L(E_1, 0.0002, 0) = \begin{bmatrix} 3.0001 & 2.0001 & 2.0001 & 2.0000 & 5.0001 & 1.0001 \\ 2.0001 & 1.0001 & 4.0001 & 7.0001 & 2.0002 & 2.0002 \\ 2.0001 & 4.0001 & 9.0000 & 4.0001 & 3.0001 & 7.0001 \\ 2.0000 & 7.0001 & 4.0001 & 6.0001 & 6.0001 & 7.0001 \\ 5.0001 & 2.0002 & 3.0001 & 6.0001 & 4.0001 & 4.0002 \\ 1.0001 & 2.0002 & 7.0001 & 7.0001 & 4.0002 & 8.0000 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -5.4308, \quad \tilde{\lambda}_2 = -1.9552, \quad \tilde{\lambda}_3 = 2.1903, \quad \tilde{\lambda}_4 = 3.5774, \quad \tilde{\lambda}_5 = 6.4066, \quad \tilde{\lambda}_6 = 26.2121.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E_1, 0.0002, 0)$  που ζητούνται είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 6.2736 \cdot 10^{-4}$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 6.6541 \cdot 10^{-4}$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 7.7288 \cdot 10^{-4}$

ii) Έχοντας υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα το δεξιό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και για τον τυχαίο πίνακα

$$E_2 = \begin{bmatrix} 9.9931 & 23.5255 & 23.4604 & 43.8798 & 19.7621 & 27.9968 \\ 23.5255 & 4.4975 & 15.1678 & 20.8240 & 38.6023 & 18.0755 \\ 23.4604 & 15.1678 & 7.3804 & 15.9441 & 36.5820 & 26.4663 \\ 43.8798 & 20.8240 & 15.9441 & 40.7699 & 46.7241 & 47.2441 \\ 19.7621 & 38.6023 & 36.5820 & 46.7241 & 26.3840 & 26.3546 \\ 27.9968 & 18.0755 & 26.4663 & 47.2441 & 26.3546 & 42.2589 \end{bmatrix}$$

το συμμετρικό μέρος του πίνακα  $E_2$  που προκύπτει από (2.22) είναι

$$H_{E_2} = \frac{E_2 + E_2^T}{2} = \begin{bmatrix} 9.9931 & 23.5255 & 23.4604 & 43.8798 & 19.7621 & 27.9968 \\ 23.5255 & 4.4975 & 15.1678 & 20.8240 & 38.6023 & 18.0755 \\ 23.4604 & 15.1678 & 7.3804 & 15.9441 & 36.5820 & 26.4663 \\ 43.8798 & 20.8240 & 15.9441 & 40.7699 & 46.7241 & 47.2441 \\ 19.7621 & 38.6023 & 36.5820 & 46.7241 & 26.3840 & 26.3546 \\ 27.9968 & 18.0755 & 26.4663 & 47.2441 & 26.3546 & 42.2589 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $a = 0.0002$  και  $b = 0$  έχουμε:

$$L(E_2, 0.0002, 0) = 0.0002 H_{E_2} = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0.0047 & 0.0047 & 0.0088 & 0.0040 & 0.0056 \\ 0.0047 & 0.0009 & 0.0030 & 0.0042 & 0.0077 & 0.0036 \\ 0.0047 & 0.0030 & 0.0015 & 0.0032 & 0.0073 & 0.0053 \\ 0.0088 & 0.0042 & 0.0032 & 0.0082 & 0.0093 & 0.0094 \\ 0.0040 & 0.0077 & 0.0073 & 0.0093 & 0.0053 & 0.0053 \\ 0.0056 & 0.0036 & 0.0053 & 0.0094 & 0.0053 & 0.0085 \end{bmatrix}.$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_1^{-O(a,b)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_1$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που προκύπτει από (2.28), είναι

$$\lambda_1^{-O(0.0002,0)} = -5.4319,$$

με προσεγγιστικό σφάλμα της μικρότερης ιδιοτιμής, που προκύπτει από τον τύπο (2.29), ίσο με

$$pr_1 = \left| \lambda_1^{-O(0.0002,0)} - \lambda_1 \right| = 0.001.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $E_2$  και τους  $a, b$  ο διαταραγμένος πίνακας, που προκύπτει από τη (2.25), είναι

$$\tilde{A} = A + L(E_2, 0.0002, 0) = \begin{bmatrix} 3.0020 & 2.0047 & 2.0047 & 2.0088 & 5.0040 & 1.0056 \\ 2.0047 & 1.0009 & 4.0030 & 7.0042 & 2.0077 & 2.0036 \\ 2.0047 & 4.0030 & 9.0015 & 4.0032 & 3.0073 & 7.0053 \\ 2.0088 & 7.0042 & 4.0032 & 6.0082 & 6.0093 & 7.0094 \\ 5.0040 & 2.0077 & 3.0073 & 6.0093 & 4.0053 & 4.0053 \\ 1.0056 & 2.0036 & 7.0053 & 7.0094 & 4.0053 & 8.0085 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -5.4319, \quad \tilde{\lambda}_2 = -1.9551, \quad \tilde{\lambda}_3 = 2.1865, \quad \tilde{\lambda}_4 = 3.5760, \quad \tilde{\lambda}_5 = 6.4072, \quad \tilde{\lambda}_6 = 26.2437.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E_2, 0.0002, 0)$  που ζητούνται είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 0.0346$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 0.0361$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 0.0431$

iii) Έχοντας υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα το δεξιό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και για τον τυχαίο πίνακα

$$E_3 = \begin{bmatrix} 0.6952 & 0.8530 & 0.4170 & 0.1665 & 0.7378 & 0.7856 \\ 0.4991 & 0.8739 & 0.2060 & 0.6210 & 0.0634 & 0.5134 \\ 0.5358 & 0.2703 & 0.9479 & 0.5737 & 0.8604 & 0.1776 \\ 0.4452 & 0.2085 & 0.0821 & 0.0521 & 0.9344 & 0.3986 \\ 0.1239 & 0.5650 & 0.1057 & 0.9312 & 0.9844 & 0.1339 \\ 0.4904 & 0.6403 & 0.1420 & 0.7287 & 0.8589 & 0.0309 \end{bmatrix}$$

το συμμετρικό μέρος του πίνακα  $E_3$  που προκύπτει από (2.22) είναι

$$H_{E_3} = \frac{E_3 + E_3^T}{2} = \begin{bmatrix} 0.6952 & 0.6761 & 0.4764 & 0.3058 & 0.4309 & 0.6380 \\ 0.6761 & 0.8739 & 0.2381 & 0.4147 & 0.3142 & 0.5768 \\ 0.4764 & 0.2381 & 0.9479 & 0.3279 & 0.4831 & 0.1598 \\ 0.3058 & 0.4147 & 0.3279 & 0.0521 & 0.9328 & 0.5636 \\ 0.4309 & 0.3142 & 0.4831 & 0.9328 & 0.9844 & 0.4964 \\ 0.6380 & 0.5768 & 0.1598 & 0.5636 & 0.4964 & 0.0309 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $a = 0.0002$  και  $b = 0$  έχουμε:

$$L(E_3, 0.0002, 0) = 0.0002H_{E_3} = 0.001 \begin{bmatrix} 0.1390 & 0.1352 & 0.0953 & 0.0612 & 0.0862 & 0.1276 \\ 0.1352 & 0.1748 & 0.0476 & 0.0829 & 0.0628 & 0.1154 \\ 0.0953 & 0.0476 & 0.1896 & 0.0656 & 0.0966 & 0.0320 \\ 0.0612 & 0.0829 & 0.0656 & 0.0104 & 0.1866 & 0.1127 \\ 0.0862 & 0.0628 & 0.0966 & 0.1866 & 0.1969 & 0.0993 \\ 0.1276 & 0.1154 & 0.0320 & 0.1127 & 0.0993 & 0.0062 \end{bmatrix}.$$

Η προσεγγιστική τιμή  $\lambda_6^{-O(0.0002,0)}$  στην ιδιοτιμή  $\tilde{\lambda}_6$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ , που προκύπτει από (2.28), είναι

$$\lambda_6^{-O(0.0002,0)} = 26.2120$$

με προσεγγιστικό σφάλμα της μεγαλύτερης ιδιοτιμής, που προκύπτει από τον τύπο (2.29), ίσο με

$$pr_6 = 5.1442 \cdot 10^{-4}.$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $E_3$  και τους  $a, b$  ο διαταραγμένος πίνακας, που προκύπτει από τη (2.25), είναι

$$\tilde{A} = A + L(E_3, 0.0002, 0) = \begin{bmatrix} 3.0001 & 2.0001 & 2.0001 & 2.0001 & 5.0001 & 1.0001 \\ 2.0001 & 1.0002 & 4.0000 & 7.0001 & 2.0001 & 2.0001 \\ 2.0001 & 4.0000 & 9.0002 & 4.0001 & 3.0001 & 7.0000 \\ 2.0001 & 7.0001 & 4.0001 & 6.0000 & 6.0002 & 7.0001 \\ 5.0001 & 2.0001 & 3.0001 & 6.0002 & 4.0002 & 4.0001 \\ 1.0001 & 2.0001 & 7.0000 & 7.0001 & 4.0001 & 8.0000 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = -5.4309, \tilde{\lambda}_2 = -1.9550, \tilde{\lambda}_3 = 2.1904, \tilde{\lambda}_4 = 3.5774, \tilde{\lambda}_5 = 6.4067, \tilde{\lambda}_6 = 26.2120.$$

Οι νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E = L(E_3, 0.0002, 0)$  που ζητούνται είναι:

- φασματική νόρμα  $\|E\|_2 = 5.9941 \cdot 10^{-4}$
- Frobenius νόρμα  $\|E\|_F = 6.5667 \cdot 10^{-4}$
- νόρμα γραμμής  $\|E\|_\infty = 7.2836 \cdot 10^{-4}$

□

**Παράδειγμα 2.12**

Έστω ο αόριστος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 11.7000 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 3.8800 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.1300 \end{bmatrix},$$

και οι πραγματικοί αριθμοί  $a = 0.18$ ,  $b = 0$ .

Υλοποιώντας τον Κώδικα 1, που βρίσκεται στο Παράρτημα, και αναπτύσσεται σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 2.2 (μέθοδος γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger), να υπολογιστεί ένας θετικά ορισμένος  $\tilde{A}$ .

**Λύση:**

Ο πίνακας  $A$  έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -0.5404, \quad \lambda_2 = 2.2265, \quad \lambda_3 = 37.0239.$$

Εισάγοντας τις μεταβλητές  $a = 0.18$ ,  $b = 0$  και υλοποιώντας τον Κώδικα 1, υπολογίζεται ο τυχαίος πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 9.9613 & 0.9241 & 6.0879 \\ 0.9241 & 9.6190 & 4.1097 \\ 6.0879 & 4.1097 & 8.6869 \end{bmatrix}.$$

Το συμμετρικό μέρος του πίνακα  $E$  που προκύπτει από (2.22) είναι

$$H_E = \frac{E + E^T}{2} = \begin{bmatrix} 9.9613 & 0.9241 & 6.0879 \\ 0.9241 & 9.6190 & 4.1097 \\ 6.0879 & 4.1097 & 8.6869 \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη (2.23) για τους πραγματικούς αριθμούς  $a = 0.18$  και  $b = 0$  έχουμε:

$$L(E, 0.18, 0) = 0.18 \cdot H_E = \begin{bmatrix} 1.7930 & 0.1663 & 1.0958 \\ 0.1663 & 1.7314 & 0.7397 \\ 1.0958 & 0.7397 & 1.5637 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω  $E$  και  $a = 0.18$ ,  $b = 0$ , ο διαταραγμένος πίνακας, που προκύπτει από τη (2.25), είναι

$$\tilde{A} = A + L(E, 0.18, 0) = \begin{bmatrix} 13.4930 & 4.1763 & 18.0058 \\ 4.1763 & 5.6114 & 7.2597 \\ 18.0058 & 7.2597 & 24.6937 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.0027, \quad \tilde{\lambda}_2 = 3.8281, \quad \tilde{\lambda}_3 = 39.9673.$$



Άρα, ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  είναι θετικά ορισμένος καθώς  $\tilde{\lambda}_i > 0$ , για κάθε  $i = 1, 2, 3$ . □



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Διαταραχές ιδιοτιμών αόριστου πίνακα

Στο παρόν κεφάλαιο διατυπώνονται τα θεωρήματα που σχετίζονται με τη διαταραχή ιδιοτιμών των συμμετρικών πινάκων [10, 17] και είναι απαραίτητα για να αναπτυχθούν τρεις νέοι μέθοδοι (και οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι και κώδικες), η εφαρμογή των οποίων μετατρέπει έναν αόριστο πίνακα σε θετικά ορισμένο (ή θετικά ημιορισμένο)<sup>1</sup>. Η ιδέα της διαταραχής των αόριστων πινάκων και η μετατροπή τους σε θετικά ορισμένους προήλθε από τα υπολογιστικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι (βιο)στατιστικοί, οι οικονομολόγοι, οι ψυχολόγοι κ.α., κατά τη μελέτη προβλημάτων της πολυμεταβλητής στατιστικής ανάλυσης δεδομένων, για παράδειγμα, προκύπτουν συμμετρικοί πίνακες συνδυακύμανσης αόριστοι, [12].

Οι μέθοδοι διαταραχής ιδιοτιμών ενός αόριστου συμμετρικού πίνακα και η μετατροπή του σε πίνακα θετικά ορισμένο ή ημιορισμένο, που θα αναφερθούν στην Ενότητα 3.2, είναι οι ακόλουθες:

- i. μέθοδος υπερισχύοντος διαγώνιου πίνακα
- ii. μέθοδος θετικών κύριων υπο-οριζουσών
- iii. μέθοδος πίνακα βαθμού 1

Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και ορισμένα μέτρα σύγκρισης των παραπάνω μεθόδων διαταραχής των ιδιοτιμών. Όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία [4, 12] για τις συγκρίσεις χρησιμοποιούνται μέτρα, που σχετίζονται με

- i. τις νόρμες :
  - νόρμα γραμμής
  - φασματική νόρμα

---

<sup>1</sup> Για τους αντίστοιχους ορισμούς, βλέπε Ορισμός 1.4, Ενότητα 1.1, Κεφάλαιο 1.

- ii. το κριτήριο διαφοράς απολύτων τιμών
- iii. το δείκτη κατάστασης (condition number).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι κώδικες αναπτύχθηκαν στη Matlab, προκειμένου να γίνουν οι υπολογισμοί των πινάκων σε κάθε μέθοδο διαταραχής. Οι κώδικες για τις παραπάνω μεθόδους παρατίθενται στο Παράρτημα.

Επιπλέον, επειδή οι συμμετρικοί πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές<sup>2</sup>, αυτές μπορούν να διαταχθούν σε αύξουσα (ή φθίνουσα) σειρά. Στο παρόν κεφάλαιο, οι ιδιοτιμές των συμμετρικών πινάκων θεωρούνται διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά, δηλαδή, για κάθε συμμετρικό πίνακα  $A \in M_n$ , με  $\lambda_i \in \sigma(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

---

<sup>2</sup> Βλέπε, Πρόταση 1.3, ιδιότητα 5.

### 3.1 Διαταραχές συμμετρικών πινάκων [10, 17]

Έστω συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , και ένας συμμετρικός πίνακας διαταραχής  $E \in M_n$  με ιδιοτιμές  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n$ . Ο διαταραγμένος πίνακας

$$A = A + E$$

είναι συμμετρικός ως άθροισμα συμμετρικών πινάκων, με διατεταγμένες τις ιδιοτιμές του ως ακολούθως:

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots \leq \tilde{\lambda}_n$$

Επίσης, χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι για ένα μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα  $x$  ο πίνακας

$$E = xx^T \quad (3.1)$$

είναι συμμετρικός, επειδή επαληθεύεται ο ορισμός που δόθηκε στην Ενότητα 1.1, δηλαδή,

$$E^T = (xx^T)^T = (x^T)^T x^T = xx^T = E.$$

Επιπλέον, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του  $E$  είναι μη αρνητικοί αριθμοί (τα διαγώνια στοιχεία του  $E$  είναι τα τετράγωνα των αντίστοιχων συντεταγμένων του διανύσματος  $x$ ), και ότι για οποιοδήποτε πραγματικό διάνυσμα  $y$  ισχύει

$$y^T E y = y^T x x^T y = (x^T y)^T (x^T y) = (x^T y)^2 \geq 0,$$

το οποίο επαληθεύει τον Ορισμό 1.4. Άρα, ο πίνακας διαταραχής  $E$  στην (3.1) είναι θετικά ημιορισμένος με μη αρνητικά διαγώνια στοιχεία. Επίσης από την κατασκευή του  $E$  είναι γνωστό ότι  $\text{rank}(E) = 1$ , συνεπώς μια μόνο ιδιοτιμή είναι θετική και οι υπόλοιπες  $n - 1$  στο πλήθος είναι ίσες με μηδέν, [10].

Κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.5 και την (2.17), η διαταραχή που προκαλεί ο πίνακας  $E$  της (3.1) σε ένα συμμετρικό πίνακα  $A$  είναι ο διαταραγμένος συμμετρικός πίνακας

$$\tilde{A} = A + E = A + xx^T. \quad (3.2)$$

Έτσι αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο παρουσιάζει έναν τρόπο κατασκευής ενός ειδικού πίνακα διαταραχής  $E$ , που οδηγεί σε συμμετρικό διαταραγμένο πίνακα.

**Θεώρημα 3.1**

Έστω ο συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n$  και  $x \in M_{n \times 1}$  ένα μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

- i. ο πίνακας διαταραχής  $E = xx^T$  είναι θετικά ημιορισμένος με μη αρνητικά διαγώνια στοιχεία,
- ii. ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A} = A + xx^T$  είναι συμμετρικός.

Μία μέθοδος υπολογισμού των πραγματικών «ακριανών» ιδιοτιμών (της μέγιστης και της ελάχιστης) ενός συμμετρικού πίνακα  $A$  διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα, ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει την απόδειξη [10, Theorem 4.2.2], [17], καθώς επίσης και μια γενική εκτίμηση ότι οι υπόλοιπες ιδιοτιμές ανήκουν στο διάστημα  $[\lambda_1, \lambda_n]$ . Ωστόσο, στα πορίσματα, που το ακολουθούν και είναι άμεση συνέπειά του, δίνονται κάποιες σχετικές πληροφορίες.

**Θεώρημα 3.2 (Rayleigh – Ritz)**

Έστω συμμετρικός πίνακας  $A \in M_n$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , και  $x \in M_{n \times 1}$  ένα μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lambda_1 x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_n x^T x,$$

$$\lambda_n \equiv \lambda_{\max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \max_{x^T x=1} x^T A x \quad (3.3)$$

$$\lambda_1 = \lambda_{\min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} = \min_{x^T x=1} x^T A x. \quad (3.4)$$

**Πόρισμα 3.1**

Έστω  $A \in M_n$  συμμετρικός πίνακας,  $x$  ένα δοσμένο μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα, και

$$a \equiv \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

Τότε, υπάρχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή του  $A$  στο διάστημα  $(-\infty, a]$  και τουλάχιστον μία στο διάστημα  $[a, \infty)$ .

**Πόρισμα 3.2**

Έστω οι συμμετρικοί πίνακες  $A, E \in M_n$  με  $\lambda_n, \varepsilon_n$  τις μεγαλύτερες ιδιοτιμές των  $A$  και  $E$ , αντίστοιχα, και ο διαταραγμένος συμμετρικός πίνακας  $\tilde{A} = A + E$ . Τότε ισχύει

$$\tilde{\lambda}_n = \max_{x^T x=1} x^T \tilde{A} x \leq \max_{x^T x=1} x^T A x + \max_{x^T x=1} x^T E x = \lambda_n + \varepsilon_n, \quad (3.5)$$

όπου  $\tilde{\lambda}_n$  είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$ .

**Σχόλιο 3.1**

- (i) Το Πόρισμα 3.1 δίνει πληροφορίες για τον εντοπισμό του φάσματος του συμμετρικού πίνακα σε διαστήματα του πραγματικού άξονα, χωρίς να δίνει πληροφορίες εντοπισμού των ακριανών ιδιοτιμών του συμμετρικού πίνακα.
- (ii) Από την (3.5) του Πορίσματος 3.2 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οποιαδήποτε διαταραχή μέσω συμμετρικού πίνακα  $E$  δεν μπορεί να μεγαλώσει τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του συμμετρικού πίνακα  $A$  περισσότερο από  $\|E\|_2$ , επειδή  $|\varepsilon_n| = \|E\|_2$ .

**Θεώρημα 3.3 (Weyl)**

Έστω  $A, E \in M_n$  συμμετρικοί πίνακες με διατεταγμένες ιδιοτιμές  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  του πίνακα  $A$ , και  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_n$  του πίνακα  $E$ . Για τις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά ιδιοτιμές  $\tilde{\lambda}_i$  του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A} = A + E$  ισχύει

$$\lambda_i + \varepsilon_1 \leq \tilde{\lambda}_i \leq \lambda_i + \varepsilon_n, \quad (3.6)$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Σχόλιο 3.2**

- (i) Το Θεώρημα 3.3 (Weyl), που αποδεικνύεται [10, Theorem 4.3.1], [17], εντοπίζει το διάστημα στον πραγματικό άξονα, όπου ανήκει κάθε ιδιοτιμή του διαταραγμένου πίνακα. Τα άκρα του διαστήματος εξαρτώνται από τις δύο ακριανές (ελάχιστη και μέγιστη) ιδιοτιμές του πίνακα διαταραχής, συνεπώς

μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση για το διάστημα που ανήκει το σφάλμα<sup>3</sup> της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  του συμμετρικού πίνακα  $A$ , επειδή από την (3.6) μπορούμε να γράψουμε

$$\varepsilon_1 \leq \tilde{\lambda}_i - \lambda_i \leq \varepsilon_n. \quad (3.7)$$

- (ii) Συνδυάζοντας το Πρόταση 3.1 με το Θεώρημα 3.3 συμπεραίνουμε ότι αν  $\varepsilon_1 > 0$  ( $\varepsilon_1$  ελάχιστη ιδιοτιμή του πίνακα διαταραχής), τότε για κάθε  $i$  το διάστημα που περιέχει την  $\tilde{\lambda}_i$  του  $\tilde{A}$  δεν περιέχει την  $\lambda_i$  του  $A$ . Αυτό συμβαίνει όταν ο  $E$  είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς, αν ένας συμμετρικός πίνακας διαταράσσεται από ένα θετικά ορισμένο πίνακα, τότε οι ιδιοτιμές του αυξάνουν.
- (iii) Όταν ο πίνακας διαταραχής  $E$  είναι θετικά ορισμένος, συνδυάζοντας τα παραπάνω σχόλια (i) και (ii) γνωρίζουμε εκ των προτέρων το άνω φράγμα του σφάλματος της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  του  $A$ , αυτό είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα διαταραχής, επειδή από την (3.7) μπορούμε να γράψουμε

$$0 < \varepsilon_1 \leq \tilde{\lambda}_i - \lambda_i \leq \varepsilon_n. \quad (3.8)$$

Στην τελευταία παρατήρηση και στο Θεώρημα 3.3 (Weyl) μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαταραχή με σκοπό να μετατρέψει έναν αόριστο πίνακα σε θετικά ορισμένο χρησιμοποιώντας ως πίνακα διαταραχής ένα θετικά ορισμένο πίνακα. Συνδυάζοντας τη (2.1) με το Θεώρημα 3.3 (Weyl) μπορεί να κατασκευαστεί θετικά ορισμένος διαγώνιος πίνακας διαταραχής  $E$ , όπου ικανοποιεί το Σχόλιο 3.2 (ii), έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  να αυξάνονται. Η κατασκευή του διαγώνιου πίνακα διαταραχής  $E$  ξεκινά με τη μικρότερη ιδιοτιμή (την οποία χρησιμοποιούμε με απόλυτη τιμή) αυξάνοντας σταδιακά κατά  $\varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  σταθερή μεταβλητή, τέτοια ώστε οι ιδιοτιμές του διαγώνιου πίνακα διαταραχής  $E$  να είναι

$$-\lambda_1 \leq -(\lambda_1 + \varepsilon) \leq \dots \leq -(\lambda_1 + n \cdot \varepsilon)$$

όπου  $\lambda_1$  είναι η μικρότερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και  $n$  η διάστασή του. Η υλοποίηση της διαταραχής παρατίθεται στο Κώδικα 4 του Παραρτήματος.

<sup>3</sup> Βλέπε στον Ορισμό 2.2,  $\varepsilon_i = |\tilde{\lambda}_i - \lambda_i|$ , σχέση (2.2).



## 3.2 Μετατροπή αόριστου πίνακα σε θετικά ορισμένο

Αυτή η ενότητα εμπεριέχει μεθόδους διαταραχής ιδιοτιμών συμμετρικών πινάκων, που συνδυάζουν τα θεώρημα της Ενότητας 3.1 με τον Ορισμό 2.4 και τις ιδιότητες του υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα, καθώς και στη θεωρία για το συμμετρικό πίνακα διαταραχής βαθμού 1, η οποία διατυπώνεται στο Θεώρημα 3.1.

Το σημαντικότερο θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας ενότητας αποτελεί το επόμενο θεώρημα, την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης μπορεί να τη μελετήσει [10, Corollary 7.2.3].

### Θεώρημα 3.4

Έστω  $A = [a_{ij}] \in M_n$  συμμετρικός πίνακας και αυστηρά υπερσχύων διαγώνιος. Αν όλα τα κύρια διαγώνια στοιχεία του  $A$  είναι θετικοί αριθμοί, τότε ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος.

#### 3.2.1 Μέθοδος υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα

Η παρακάτω μεθοδολογία βασίζεται στο Θεώρημα 3.4 και αναφέρεται σε αόριστους συμμετρικούς πίνακες με μη αρνητικά διαγώνια στοιχεία, ώστε με τη διαταραχή τους να μετατραπούν σε θετικά ορισμένους.

Η μέθοδος υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα είναι η διαδικασία που ακολουθείται για την κατασκευή ενός υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα  $\tilde{A}$ , που είναι ο διαταραγμένος, με γνώμονα κατασκευής τον πίνακα  $A$ . Η μέθοδος υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα έχει υλοποιηθεί στο Κώδικα 2, το οποίο παρατίθενται στο Παράρτημα.

#### Αλγόριθμος 3.1 (μέθοδος υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα)

1. Έλεγχος συμμετρικότητας του πίνακα  $A = [a_{ij}] \in M_n$ .
2. Εύρεση ιδιοτιμών του πίνακα  $A = [a_{ij}]$  και έλεγχος για την ύπαρξη αρνητικών ιδιοτιμών. Αν δεν υπάρχουν αρνητικές ιδιοτιμές ο αλγόριθμος τερματίζει.

3. Εύρεση των πινάκων  $D$  και  $B$ , όπου

$$A = D + B^4,$$

$D$  διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του  $A$ , και  $B$  ο πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδέν και τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με τα στοιχεία του  $A$ .

4. Αρχικοποίηση ενός  $n \times n$  μηδενικού πίνακα  $E_0$ .

5. Κατασκευή ενός  $n \times n$  διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$  ως ακολούθως

i. Υπολογισμός όλων των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του  $\tilde{A}$  από (2.6),

$$\tilde{a}_{ii} = \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Τοποθέτηση των στοιχείων  $\tilde{a}_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , αντίστοιχα, ως διαγώνια στοιχεία στον πίνακα  $E_0$ .

ii. Δημιουργία διαταραγμένου πίνακα

$$\tilde{A} = E_0 + B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

□

### Σχόλιο 3.3

Συνδυάζοντας την (3.9) με την (3.10) συμπεραίνουμε ότι ο Αλγόριθμος 3.1 δημιουργεί ένα διαταραγμένο πίνακα συμμετρικό και υπερσχύων διαγώνιο. Από την ανάλυση του  $A$  στους πίνακες  $B, D$  την ανάλυση του διαταραγμένου πίνακα<sup>5</sup> στη (2.17) και την (3.10), ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  γράφεται

$$\tilde{A} = A + E = D + B + E = E_0 + B,$$

όπου  $E$  είναι πίνακας διαταραχής και ισούται με

$$E = E_0 - D. \quad (3.11)$$

<sup>4</sup> Για την ανάλυση του πίνακα  $A$ , βλέπε στο Κεφάλαιο 2, τη σχέση (2.4).

<sup>5</sup> Για την ανάλυση του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A} = A + E$ , βλέπε στο Κεφάλαιο 2, τη σχέση (2.17).

~  
...  
~  
...  
~  
...  
~  
...  
~  
...  
~  
...

**Παράδειγμα 3.1**

Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 11.7000 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 3.8800 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.1300 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί θετικά ορισμένος πίνακας χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο 3.1 και υλοποιώντας τον Κώδικα 2 του Παραρτήματος.

**Λύση:**

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα  $A$  είναι

$$\lambda_1 = -0.5404, \lambda_2 = 2.2265, \lambda_3 = 37.0239,$$

με

$$D = \begin{bmatrix} 11.7000 & 0 & 0 \\ 0 & 3.8800 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1300 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 0 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3.12)

Από (3.9) έχουμε:

- Για  $i = 1$ ,  $\tilde{a}_{11} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 |a_{1j}| = 20.92$ ,
- Για  $i = 2$ ,  $\tilde{a}_{22} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 |a_{2j}| = 10.53$ , και
- Για  $i = 3$ ,  $\tilde{a}_{33} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 |a_{3j}| = 23.43$ .

Συνεπώς, σύμφωνα με το βήμα 5i του Αλγορίθμου 3.1 κατασκευάζεται ο πίνακας

$$E_0 = \begin{bmatrix} 20.9200 & 0 & 0 \\ 0 & 10.5300 & 0 \\ 0 & 0 & 23.4300 \end{bmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας την (3.10) και χρησιμοποιώντας την (3.12) προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A}_{3,1} = \begin{bmatrix} 20.9200 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 10.5300 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.4300 \end{bmatrix}.$$

Ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}_{3,1}$  είναι ένας υπερσχύων διαγώνιος πίνακας με ιδιοτιμές

$$\tilde{\lambda}_1 = 4.6854, \quad \tilde{\lambda}_2 = 9.2091, \quad \tilde{\lambda}_3 = 40.9855.$$

Από την (3.11) και χρησιμοποιώντας την (3.12) υπολογίζεται ο πίνακας διαταραχής, που είναι

$$E_1 = E_0 - D = \begin{bmatrix} 9.2200 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3000 \end{bmatrix}.$$

□

### 3.2.2 Μέθοδος θετικών κύριων υπο-οριζουσών

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1 στην Πρόταση 1.4(ii), όταν το σύνολο των υποπινάκων ενός συμμετρικού πίνακα  $A$  έχει θετικές ορίζουσες, τότε ο πίνακας  $A$  είναι θετικά ορισμένος [8, 10]. Η παρούσα μέθοδος προτείνει την αντικατάσταση των αρνητικών οριζουσών του υποπίνακα από θετικές τιμές. Αυτό επιτυγχάνεται με τη μείωση κατά απόλυτη τιμή των μη διαγώνιων στοιχείων του πίνακα  $A$ , οπότε εφαρμόζοντας τη (2.5) στον Ορισμό 2.3 για κατάλληλο  $\varepsilon$  υπολογίζεται ένας νέος διαταραγμένος πίνακας, ο οποίος λόγω κατασκευής του είναι θετικά ορισμένος.

Ενώ στον Αλγόριθμο 3.1 η μέθοδος διαταραχής του συμμετρικού πίνακα δημιουργεί υπερσχύων διαγώνιο, όπου η μεγαλύτερη διαταραχή γίνεται στα διαγώνια στοιχεία, ο αλγόριθμος που ακολουθεί επιδιώκει την επίτευξη της οριστικότητας με μεταβολή των στοιχείων εκτός διαγωνίου. Η διατάραξη των στοιχείων του πίνακα σταματά, όταν όλες οι κύριες υπο-ορίζουσες είναι θετικές. Ο Κώδικας 3 της μεθόδου θετικών κύριων υπο-οριζουσών παρατίθεται στο Παράρτημα.

#### Αλγόριθμος 3.2 (μέθοδος θετικής κύριας υπο-ορίζουσας)

1. Έλεγχος επαλήθευσης όλων των ακόλουθων παραμέτρων του πίνακα

$$A = [a_{ij}] \in M_n, \text{ που σχετίζονται με}$$

- i. τη συμμετρικότητα του πίνακα
- ii. την οριστικότητά του, να έχει τουλάχιστον μία αρνητική ιδιοτιμή
- iii. αν έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου θετικά.

Αν ικανοποιούνται όλα τα παραπάνω κριτήρια πηγαίνει στο επόμενο βήμα, αλλιώς ο αλγόριθμος τερματίζει.

2. Εύρεση των πινάκων  $D$  και  $B$ , όπου

$$A = D + B,$$

$D$  διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα διαγώνια στοιχεία του  $A$ , και  $B$  πίνακας με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με μηδέν και τα υπόλοιπα στοιχεία του ίσα με τα στοιχεία του  $A$ .

3. Αρχικοποίηση της μεταβλητής  $\varepsilon$  με  $\varepsilon = 1$ .

4. Κατασκευή του διαταραγμένου πίνακα<sup>6</sup>

$$\tilde{A} = D + \varepsilon B. \quad (3.13)$$

5. Έλεγχος των υπο-οριζουσών του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}$

- i. Αν  $\det \tilde{A}_m > 0$ , για κάθε  $m = 1, 2, \dots, n$ , ο αλγόριθμος τερματίζει

και εμφανίζει την τιμή της μεταβλητής  $\varepsilon$  και τον πίνακα διαταραχής

$$E = (\varepsilon - 1)B. \quad (3.14)$$

- ii. Αν έστω και μια  $\det \tilde{A}_m < 0$ , για κάποιο  $m = 1, 2, \dots, n$ , μειώνει τη μεταβλητή  $\varepsilon$ , ώστε να παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0, 1]$ , και επιστρέφει στο βήμα 4.

### Παράδειγμα 3.2

Έστω ο αόριστος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 11.7000 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 3.8800 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.1300 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 3.1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της θετικής κύριας υπο-ορίζουσας, που παρουσιάζεται στον Αλγόριθμο 3.2 και υλοποιείται στον Κώδικα 3, να υπολογιστεί για κατάλληλο  $\varepsilon$  θετικά ορισμένος πίνακας  $\tilde{A}$ .

<sup>6</sup> Βλέπε, τη σχέση (2.5) στον Ορισμό 2.3, του Κεφαλαίου 2. Μελετώντας τα σχόλια που ακολουθούν τον Ορισμό 2.3 διαπιστώνουμε ότι η μεταβλητή  $\varepsilon$  έχει νόημα να δέχεται τιμές στο διάστημα  $[0, 1]$ .

**Λύση:**

Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 3.2 διαπιστώνουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα κριτήρια του βήματος 1. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός, έχει μια αρνητική ιδιοτιμή και έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου θετικά. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της θετικής ορίζουσας.

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα  $A$  είναι

$$\lambda_1 = -0.5404, \quad \lambda_2 = 2.2265, \quad \lambda_3 = 37.0239,$$

και από την (3.12) έχουμε :

$$D = \begin{bmatrix} 11.7000 & 0 & 0 \\ 0 & 3.8800 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1300 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 0 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 0 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας στη (2.5)  $\varepsilon = 1$  κατασκευάζεται ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A} = D + 1 \cdot B = \begin{bmatrix} 11.7000 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 3.8800 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.1300 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τις υπο-ορίζουσες του πίνακα  $\tilde{A}$ , που είναι

$$\det \tilde{A}_1 = 11.7, \quad \det \tilde{A}_2 = 29.3159, \quad \det \tilde{A}_3 = -44.5429.$$

Επειδή  $\det \tilde{A}_3 < 0$  εφαρμόζοντας το βήμα 5ii μειώνουμε το  $\varepsilon$ . Η μείωση του  $\varepsilon$  γίνεται τόσο ώστε οι υπο-ορίζουσες του πίνακα  $A$  να είναι όλες θετικές. Έτσι λοιπόν μετά από μια επαναληπτική διαδικασία που εκτελείται στον Κώδικα 3 υπολογίζεται

$$\varepsilon = 0.966.$$

Στην συνέχεια, από την (3.13) και για την παραπάνω τιμή της μεταβλητής  $\varepsilon$  κατασκευάζουμε το διαταραγμένο πίνακα

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{3.2} &= \begin{bmatrix} 11.7000 & 0 & 0 \\ 0 & 3.8800 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1300 \end{bmatrix} + 0.966 \begin{bmatrix} 0 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 0 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11.7000 & 3.8737 & 16.3351 \\ 3.8737 & 3.8800 & 6.2983 \\ 16.3351 & 6.2983 & 23.1300 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επειδή οι υπο-ορίζουσες του πίνακα  $\tilde{A}_{3,2}$  είναι  $\det \tilde{A}_m > 0$ , για κάθε  $m=1,2,3$ , σύμφωνα με την Πρόταση 1.4 ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}_{3,2}$  είναι θετικά ορισμένος και για την τιμή  $\varepsilon = 0.966$  από την (3.14) ο αντίστοιχος πίνακας διαταραχής είναι

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.1363 & -0.5749 \\ -0.1363 & 0 & -0.2217 \\ -0.5749 & -0.2217 & 0 \end{bmatrix}.$$

και οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}_{3,2}$  είναι:

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.0068, \quad \tilde{\lambda}_2 = 2.3078, \quad \text{και} \quad \tilde{\lambda}_3 = 36.3955.$$

Άρα, ο πίνακας  $\tilde{A}_{3,2}$ , που προέκυψε με την εφαρμογή της μεθόδου θετικής κύριας υπο-ορίζουσας, είναι θετικά ορισμένος, καθώς  $\tilde{\lambda}_i > 0$ , για κάθε  $i = 1, 2, 3$ .  $\square$

### 3.2.3 Μέθοδος πίνακα βαθμού 1

Η παρακάτω μεθοδολογία βασίζεται στο Θεώρημα 3.1 και αναφέρεται στη διαταραχή που προκαλείται σε έναν αόριστο συμμετρικό πίνακα  $A$  από έναν κατάλληλο πίνακα διαταραχής  $E$ , με σκοπό ο διαταραγμένος πίνακας που προκύπτει (βλέπε Ορισμό 2.5, σχέση (2.17)) να είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας. Για το σκοπό αυτό, σύμφωνα με την (3.1), χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο μη μηδενικό πραγματικό διάνυσμα  $x$  κατασκευάζεται ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας  $E = xx^T$ , ο οποίος διαταράσσει όλα τα στοιχεία του πίνακα  $A$ , και προκύπτει ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A} = A + E$  από τη (2.17).

Στη συνέχεια παρατίθεται σε Matlab ο κώδικας της μεθόδου πίνακα βαθμού 1.

#### Κώδικας της μεθόδου πίνακα βαθμού 1

```
A=input('dose ton pinaka : ');
[n m]=size(A);
ok=0;
i=1;
while ok==0
    x=i*rand(n, 1);
```

```

E=x*x';
DA=A+E;
i=i+0.001;
if min(eig(DA))>0
    ok=1 ;
end
if i>200;
    ok=1;
end
end

```

□

### Παράδειγμα 3.3

Έστω ο αόριστος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 11.7000 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 3.8800 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.1300 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 3.1. Χρησιμοποιώντας το Κώδικα της μεθόδου πίνακα βαθμού 1, να υπολογιστεί η διαταραχή ώστε ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  να είναι θετικά ορισμένος.

#### Λύση:

Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα  $A$  είναι

$$\lambda_1 = -0.5404, \quad \lambda_2 = 2.2265, \quad \lambda_3 = 37.0239,$$

και τυχαίου μη μηδενικού πραγματικού διανύσματος

$$x = [1.0185 \quad 0.1730 \quad 0.1099]$$

από την (3.1), ο πίνακας διαταραχής είναι

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1.0374 & 0.1762 & 0.1120 \\ 0.1762 & 0.0299 & 0.0190 \\ 0.1120 & 0.0190 & 0.0121 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια, από τη (3.2) κατασκευάζεται ο διαταραγμένος πίνακας

$$\tilde{A}_{3.3} = A + E_3 = \begin{bmatrix} 12.7374 & 4.1862 & 17.0220 \\ 4.1862 & 3.9099 & 6.5390 \\ 17.0220 & 6.5390 & 23.1421 \end{bmatrix},$$

και οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα  $\tilde{A}_{3.2}$  είναι:

$$\tilde{\lambda}_1 = 0.0161, \quad \tilde{\lambda}_2 = 2.2488, \quad \text{και} \quad \tilde{\lambda}_3 = 37.5245.$$



Άρα, ο πίνακας  $\tilde{A}_{3,3}$ , που προέκυψε με την εφαρμογή της μεθόδου θετικής κύριας υπο-οριζουσας, είναι θετικά ορισμένος, καθώς  $\tilde{\lambda}_i > 0$ , για κάθε  $i = 1, 2, 3$ .  $\square$

### Σχόλιο 3.4

Παρατηρώντας τις τρεις μεθόδους διαταραχής των αόριστων πινάκων, που προαναφέρθηκαν, διαπιστώνουμε :

- (i) Στη μέθοδο του υπερισχύοντος διαγώνιου πίνακα, ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  διατηρεί όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα  $A$ , και όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι διαφορετικά από αυτά του  $A$ .
- (ii) Στη μέθοδο των θετικών κύριων υπο-οριζουσών, ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  έχει όλα τα στοιχεία εκτός διαγωνίου διαφορετικά από τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα  $A$ , τα διαγώνια στοιχεία των δύο πινάκων είναι ίσα.
- (iii) Στη μέθοδο του πίνακα βαθμού 1, ο διαταραγμένος πίνακας  $\tilde{A}$  έχει για στοιχεία τα διαταραγμένα στοιχεία του  $A$ .

### 3.2.4 Ορισμένα μέτρα σύγκρισης των μεθόδων

Έστω οι διαταραγμένοι πίνακες  $\tilde{A}_{3,1}, \tilde{A}_{3,2}, \tilde{A}_{3,3}$ , οι οποίοι υπολογίστηκαν στα Παραδείγματα 3.1, 3.2, 3.3 της Ενότητας 3.2 και  $A$  ο αόριστος πίνακας του Παραδείγματος 3.1, όπου εφαρμόστηκαν οι αλγόριθμοι του παρόντος κεφαλαίου.

Όπως αναφέρθηκε στην πτυχιακή εργασία με τίτλο «*Διαταραχή ιδιοτιμών συμμετρικού πίνακα*», της αποφοιτήσασας του Τμήματός μας Ειρήνης Καλαθά, [12], ένα μέτρο σύγκρισης των μεθόδων διαταραχής μπορεί να είναι το κριτήριο διαφοράς μεταξύ των αντίστοιχων στοιχείων των συγκρινόμενων συμμετρικών πινάκων, που δίνεται από τον τύπο

$$(DA) = \sum_{i \leq j} (\tilde{a}_{ij} - a_{ij})^2 = \sum_{i \leq j} e_{ij}^2,$$

δηλαδή, πρόκειται για το άθροισμα των τετραγώνων των αντίστοιχων  $n(n+1)/2$  στοιχείων του πίνακα διαταραχής. Στην παρούσα εργασία ως κριτήριο διαφοράς απολύτων τιμών χρησιμοποιούμε

$$(KDA) = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i \leq j} \left| \tilde{a}_{ij} - a_{ij} \right|. \quad (3.15)$$

Επιπλέον, ένα άλλο μέτρο σύγκρισης μπορεί να αποτελέσει ο **δείκτης κατάστασης** (condition number) του **πίνακα**  $A \in M_n$ , που ορίζεται ως ο θετικός πραγματικός αριθμός

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2. \quad (3.16)$$

Ο δείκτης κατάστασης είναι δείκτης της ευστάθειας ενός γραμμικού  $n \times n$  συστήματος και προσδιορίζει την αξιοπιστία της αριθμητικής του επίλυσης (για παράδειγμα, με τη μέθοδο Gauss). Αν ο  $K(A)$  είναι μικρός, κοντά στο 1, λέμε ότι το σύστημα είναι **ευσταθές**. Αν ο  $K(A)$  είναι πολύ μεγαλύτερος του 1, τότε το σύστημα θεωρείται **ασταθές**. Συνήθως, ο δείκτης κατάστασης υπολογίζεται από τη φασματική νόρμα, [4].

Στο επόμενο παράδειγμα για τον αόριστο πίνακα  $A$  του Παραδείγματος 3.1 υπολογίζονται με Matlab όλα τα παραπάνω μέτρα, που σχετίζονται με τη νόρμα γραμμής και τη φασματική νόρμα (βλέπε Θεώρημα 1.3), τους τύπους (3.15) και (3.16), και για τους αντίστοιχους πίνακες διαταραχής  $E$ , που υπολογίστηκαν στα Παραδείγματα 3.1, 3.2, 3.3 και για τους διαταραγμένους πίνακες που προέκυψαν στα αντίστοιχα παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 3.4

Έστω ο συμμετρικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 11.7000 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 3.8800 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.1300 \end{bmatrix}$$

του Παραδείγματος 3.1 και οι διαταραγμένοι πίνακες  $\tilde{A}_{3.1}$ ,  $\tilde{A}_{3.2}$ ,  $\tilde{A}_{3.3}$  των Παραδειγμάτων 3.1, 3.2, 3.3, αντίστοιχα.

Να συγκριθούν οι πίνακες χρησιμοποιώντας :

- i) νόρμα γραμμής,

- ii) φασματική νόρμα,
- iii) κριτήριο διαφοράς απόλυτων τιμών, και
- iv) δείκτη κατάστασης.

**Λύση:**

Εκτός από τον πίνακα  $A$ , οι διαταραγμένοι πίνακες που απαιτούνται για τη σύγκριση είναι οι ακόλουθοι:

$$\tilde{A}_{3,1} = \begin{bmatrix} 20.9200 & 4.0100 & 16.9100 \\ 4.0100 & 10.5300 & 6.5200 \\ 16.9100 & 6.5200 & 23.4300 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{3,2} = \begin{bmatrix} 11.7000 & 3.8737 & 16.3351 \\ 3.8737 & 3.8800 & 6.2983 \\ 16.3351 & 6.2983 & 23.1300 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{3,3} = \begin{bmatrix} 13.4930 & 4.1763 & 18.0058 \\ 4.1763 & 5.6114 & 7.2597 \\ 18.0058 & 7.2597 & 24.6937 \end{bmatrix}$$

- i. Αρχικά υπολογίζουμε, με χρήση της Matlab, τη νόρμα γραμμής και τη φασματική νόρμα των πινάκων, όπου  $E_1 = \tilde{A}_{3,1} - A$ , με τη χρήση των αντίστοιχων σχέσεων:

$$\|E_1\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \{r_i = \sum_{j=1}^n |e_{ij}|\} = 9.2200,$$

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \{r_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\} = 46.5600,$$

$$\|\tilde{A}_{3,1}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \{r_i = \sum_{j=1}^n |\tilde{a}_{ij}|\} = 46.8600,$$

$$\|E_1\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(E_1^T E_1)} = 9.2200,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = 37.0239,$$

$$\|\tilde{A}_1\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\tilde{A}_1^T \tilde{A}_1)} = 40.9855$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το κριτήριο της διαφοράς με τη χρήση απόλυτων τιμών από τον (3.15).

$$(\text{KDA}) = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i \leq j} |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| = \frac{16.1700}{6} = 2.6950$$

Τέλος, υπολογίζουμε το δείκτη κατάστασης από τη σχέση (3.16) για τους πίνακες  $A$ ,  $\tilde{A}_{3,1}$  και  $E_1$

$$K(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = 68.5173$$

$$K(\tilde{A}_{3,1}) = \|\tilde{A}_{3,1}\|_2 \|\tilde{A}_{3,1}^{-1}\|_2 = 8.7475$$

$$K(E_1) = \|E_1\|_2 \|E_1^{-1}\|_2 = 30.7333$$

ii. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για τον πίνακα  $\tilde{A}_{3,2}$

$$\|E_2\|_\infty = 0.7966, \quad \|\tilde{A}_{3,2}\|_\infty = 45.7634,$$

$$\|E_2\|_2 = 0.6708 \quad \|\tilde{A}_{3,2}\|_2 = 36.3955$$

$$(\text{KDA}) = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i \leq j} |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| = \frac{0.9329}{6} = 0.1555$$

$$K(\tilde{A}_2) = \|\tilde{A}_2\|_2 \|\tilde{A}_2^{-1}\|_2 = 5.4058 \cdot 10^3$$

$$K(E_2) = \|E_2\|_2 \|E_2^{-1}\|_2 = 7.5362$$

iii. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για τον πίνακα  $\tilde{A}_{3,3}$

$$\|E_3\|_\infty = 1.3256, \quad \|\tilde{A}_{3,3}\|_\infty = 46.703,$$

$$\|E_3\|_2 = 1.0794, \quad \|\tilde{A}_{3,3}\|_2 = 37.5245$$

$$(\text{KDA}) = \frac{2}{n^2 + n} \sum_{i \leq j} |\tilde{a}_{ij} - a_{ij}| = 0.2823$$

$$K(\tilde{A}_{3,3}) = \|\tilde{A}_{3,3}\|_2 \|\tilde{A}_{3,3}^{-1}\|_2 = 2.3299 \cdot 10^3$$

$$K(E_3) = \|E_3\|_2 \|E_3^{-1}\|_2 = 5.5355 \cdot 10^4$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα συγκεντρωτικά παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.1. Παρατηρώντας στον Πίνακα 3.1, τις νόρμες του πίνακα διαταραχής  $E$ , γνωρίζονται ότι η νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  εξαρτάται από το μέτρο των στοιχείων του πίνακα, συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος που αποδίδει διαταραγμένο πίνακα  $\tilde{A}$  πιο κοντά προσεγγιστικά στον

αρχικό πίνακα  $A$  είναι η μέθοδος κύριων υπο-οριζουσών. Έπειτα ακολουθεί η μέθοδος πίνακα βαθμού 1 και κατόπιν η μέθοδος υπερισχύοντος διαγώνιου πίνακα.

Το ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε παρατηρώντας το κριτήριο διαφοράς απόλυτων τιμών (KDA). Παρατηρώντας το δείκτη κατάστασης  $K(\tilde{A})$ , για το διαταραγμένο πίνακα  $\tilde{A}_{3,1}$  που προκύπτει από τη μέθοδο υπερισχύοντος διαγώνιου πίνακα μας δίνει καλύτερη ευστάθεια του συστήματος από τον αρχικό  $A$ , όπως αναφέρθηκε στη βιβλιογραφία [4].

<b>Μέθοδοι</b>	Μέθοδο υπερισχύοντος διαγώνιου	Μέθοδος θετικών κύριων υπο-οριζουσών	Μέθοδος πίνακα βαθμού 1
<b>Νόρμες</b>			
$\ A\ _2$	37.0239	37.0239	37.0239
$K(A)$	68.5173	68.5173	68.5173
$\ A\ _\infty$	46.5600	46.5600	46.5600
$\ E\ _2$	9.2200	0.6708	1.0794
$K(E)$	30.7333	7.5362	5.3355 e+004
$\ E\ _\infty$	9.2200	0.7966	1.3256
$\ \tilde{A}\ _2$	40.9855	36.3955	37.5245
$K(\tilde{A})$	8.7475	5.4058 e+003	2.3299e+004
$\ \tilde{A}\ _\infty$	46.8600	45.7634	46.703
<b>KDA (3.15)</b>	2.6950	0.1555	0.2823

Πίνακας 3.1: Αποτελέσματα σύγκρισης μεθόδων



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Maria Adam and John Maroulas, The generalized Levinger transformation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 233, no. 11, (2010), 3018-3029.
2. Δημήτριος Βάρσος, Δημήτριος Δεριζιώτης, Μιχαήλ Μαλιάκας, Στ. Παπασταυρίδης, Ευάγγελος Ράπτης και Ολυμπία Ταλέλλη, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, τόμος Α, εκδόσεις Σοφία, 2003.
3. Δημήτριος Βάρσος, Δημήτριος Δεριζιώτης, Μιχαήλ Μαλιάκας και Ολυμπία Ταλέλλη, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, τόμος Β, εκδόσεις Σοφία, 2005.
4. Jacob Benesty and Tomas Gansler, Computation of the Condition Number of a Nonsingular Symmetric Toeplitz Matrix with the Levinson-Durbin Algorithm, *IEEE Transactions on signal processing*, vol. 54, no. 6, (June 2006), 2362-2364.
5. Sean Brakken-Thal, *Gershgorin's Theorem for Estimating Eigenvalues*, 2007, <http://buzzard.ups.edu/courses/2007spring/projects/brakkenthal-paper.pdf>.
6. Tamara A. Carter Carter, Richard A. Tapia and Anne Papakonstantinou, *Linear Algebra-An Intoduction to Linear Algebra for Pre-Calculus Students*, Rice University, 1995, [http://cgvr.cs.uni-bremen.de/teaching/cg\\_literatur/Linear%20Algebra.pdf](http://cgvr.cs.uni-bremen.de/teaching/cg_literatur/Linear%20Algebra.pdf).
7. Χρήστος Δέδες, *Μη αρνητικοί πίνακες*, Πτυχιακή εργασία, Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Στερεάς Ελλάδας, Λαμία, 2011.
8. Γεώργιος Δονάτος και Μαρία Αδάμ, *Γραμμική Άλγεβρα. Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Guttenberg, Αθήνα, 2008.
9. Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 3rd edition, Baltimore, Maryland, 1996.
10. Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2005.

11. Νικόλαος Καδιανάκης και Σωτήριος Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, Αθήνα, 2008.
12. Ειρήνη Καλαθά, *Διαταραχή ιδιοτιμών συμμετρικού πίνακα*, Πτυχιακή εργασία, Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, Πανεπιστήμιο Στερεάς Ελλάδας, Λαμία, 2012.
13. Μαρία Ε. Κουβελέτσου, *Σχεδίαση Σταθεροποιητή Ταλαντώσεων για τη Διασύνδεση Ελλάδος-Τουρκίας*, Διπλωματική εργασία, Τομέας Ηλεκτρικής Ισχύος Σ.Η.Μ.Μ.Υ., Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2008.
14. Ισίδωρος Μάρας, *Θέματα ελαχίστων τετραγώνων και μέθοδοι επίλυσης*, Διπλωματική εργασία, Τομέας Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2009.
15. Carl Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM Press, 2000.
16. Peter J. Olver, *Numerical Analysis Lecture Notes*, 2008,  
[http://www-users.math.umn.edu/~olver/num\\_/lnm.pdf](http://www-users.math.umn.edu/~olver/num_/lnm.pdf).
17. Νικόλαος Παπαθανασίου, *Θεωρία Διαταραχής Ιδιοτιμών Πίνακα και Ψευδοφάσμα*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Τομέας Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ. Πολυτεχνείο, 2005.
18. Μιχαήλ Ο. Ροκίδης, *Κανονικότητα Πινάκων και Συγγενείς Αποστάσεις*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία, Τομέας Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2010.
19. Στέφανος Τραχανάς, *Κβαντομηχανική I*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009.
20. Panayiotis J. Psarrakos and Michael J. Tsatsomeros, Bounds for Levinger's function of nonnegative almost skew-symmetric matrices, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 416, (2006), 759-772.
21. Παναγιώτης Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, Τομέας Μαθηματικών, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ. Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2014,  
<http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/metaptyx.pdf>.



# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στη συνέχεια παρατίθεται σε Matlab οι κώδικες που αναπτύχθηκαν στην παρούσα πτυχιακή εργασία.

Ο ακόλουθος Κώδικας 1 δημιουργήθηκε για τον Αλγόριθμο 2.2, που βρίσκεται στο Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.3, σύμφωνα με τη μέθοδο “γενικευμένου μετασχηματισμού Levinger.”

## Κώδικας 1

```
pinakas=input('Δώσε τον πίνακα A : ');           (Εισαγωγή πίνακα)

[n m]=size(pinakas);                               (Υπολογισμός μεγέθους
[U,L]=eig(pinakas);                                και ιδιοτιμών πίνακα)
[n_idiot,m_idiot]=size(L);

k=1;                                                (Αρχικοποίηση
LA=0;                                               μεταβλητών)

for j=1:1:n_idiot-1                                 (Έλεγχος
    l=0;                                             διαγωνοποίησης
    for i=j+1:1:n_idiot                              αρχικού πίνακα,
        if l==0                                     σύμφωνα με
            if i==n_idiot                           τη Πρόταση 1.10)
                LA(k,k)=L(j,j);
                k=k+1;
            end
            if L(i,i)==L(j,j)
                l=1;
            end
        end
    end
    LA(k,k)=L(n_idiot,n_idiot);
end
```



```

Mol=(pinakas-(LA(1,1)*eye(n)));
for i=2:1:k
    M=(pinakas-(LA(i,i)*eye(n)));
    Mol=Mol*M;
end

a=input('Δώσε το a = ');
b=input('Δώσε το b = ');

[U,L]=eig(pinakas);

[n_idiot,m_idiot]=size(L);
j=input('Δώσε τον αριθμό της ιδιοτιμής που θέλεις. π.χ.
1,2,3....n για την κάθε ιδιοτιμή αντίστοιχα : ');

V=inv(U);
W=V';
W(:,n);
U(:,n);

for e=1:1:1
    Earxiko=1*rand(n,n);
    Ea1=(Earxiko+Earxiko')/2;
    Ea2=(Earxiko-Earxiko')/2;
    Eab=(a*Ea1+b*Ea2);

DA=pinakas+Eab;

```

(Εισαγωγή παραμέτρων  
a και b)

(Υπολογισμός ιδιοτιμών  
και L δεξιών  
ιδιοδιανυσμάτων του  
πίνακα)

(Υπολογισμός αριστερών  
ιδιοδιανυσμάτων)

(Δημιουργία  $H_E$  και  
 $S_E$ , Ορισμός 2.5)

(Γενικευμένος  
μετασχηματισμός  
Levinger, Ορισμός 2.6)

(Διαταραχή πίνακα,  
Ορισμός 2.7)



```

SLO=0;
for k=1:1:n_idiot
    if k~=j
        SL=(W(:,j)'*(Eab)*U(:,k))* (W(:,k)'*(Eab)*U(:,j))/(L(j,j)-
        L(k,k))* (W(:,j)'*U(:,j))* (W(:,k)'*U(:,k));
        SLO=SLO+SL;
    end
end
Lnew=(L(j,j)+(W(:,j)'*Eab*U(:,j))/(W(:,j)'*U(:,j)))+SLO;

pr=abs(Lnew-L(j,j));

NEab=norm(Eab);
NEabF=norm(Eab,'fro');
NEabAP=norm(Eab,'inf');
end

disp('Με αρχικό τυχαίο πίνακα E :');
Earxiko
disp('Ο πίνακας A είναι:');
A
disp('Ο πίνακας E είναι:');
Eab
disp('Ο καινούργιος διαταραγμένος πίνακας,AE=A+E,είναι :');
AE=DA
disp('Οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα AE είναι :');
eig(AE)
disp('Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι :');
eig(A)
disp('Το προσεγγιστικού σφάλμα είναι :');
pr
disp('Η 2-νόρμα του E είναι :');
NEab

```

(Υπολογισμός ιδιοτιμών,  
Θεώρημα 2.5)

(Υπολογισμός  
προσεγγιστικού  
σφάλματος)

(Υπολογισμός  $\|E\|_2$ ,  
 $\|E\|_F$  και  $\|E\|_\infty$ )

(Εκτύπωση  
αποτελεσμάτων)



```
disp('H Frobenius του E είναι :');  
NEabF  
disp('H φασματική νόρμα του E είναι :');  
NEabAP
```





Παρατίθεται σε Matlab ο Κώδικας 2, που υλοποιήθηκε για τον υπολογισμό-κατασκευή διαταραγμένου πίνακα σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 3.1, ο οποίος βασίζεται στην αντίστοιχη θεωρία του υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα, όπως αυτή διατυπώθηκε στο Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.1 και στο Κεφάλαιο 3, στις Ενότητες 3.1-3.2.

### Κώδικας 2

<code>A=input('Δώσε τον άοριστο πίνακα A :');</code>	(Εισαγωγή πίνακα)
<code>disp('Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι :');</code>	
<code>oidiotimes=eig(A)</code>	(Υπολογισμός ιδιοτιμών πίνακα)
<code>[n,m]=size(A);</code>	(Υπολογισμός διάστασης πίνακα)
<code>E=zeros(n,n);</code>	(Δήλωση μεταβλητών)
<code>d=0;</code>	
<code>z=0;</code>	
<code>vres_pinaka_E=0;</code>	
<code>nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E=0;</code>	
<code>if n==m</code>	(Ελεγχος συμμετρικότητας)
<code>  for i=1:1:n</code>	
<code>    for j=1:1:n</code>	
<code>      if A(i,j)==A(j,i)</code>	
<code>        d=d+1;</code>	(Δήλωση μετρητή, που μετρά το πλήθος των στοιχείων του πίνακα )
<code>      if d==n*n</code>	
<code>        disp('Ο πίνακας είναι συμμετρικός ');</code>	
<code>        vres_pinaka_E=1 ;</code>	(Δήλωση μεταβλητής 1)
<code>        nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E=</code>	
<code>        nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E+1;</code>	
<code>      end;</code>	
<code>    else</code>	



```

        z=z+1;
end;

end;
end;
if z>0
    disp('O πίνακας είναι συμμετρικός ');
end;

if vres_pinaka_E==1
    for i=1:1:n
        for j=1:1:n
            if E(i,j)<=A(i,j)
                diafora= abs(abs(E(i,j))-abs(A(i,j)));
                E(i,j)=E(i,j)+diafora+0.1;
                E(i+1,i)=E(i,i+1);
            end
            if i~=j
                E(i,i)=E(i,i)+A(i,j)+E(i,j);
            end;
            E(i,i)=E(i,i)-A(i,i)+0.00001;
        end;
    end
end
if nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E==1
    disp('O πίνακας A είναι :');
    A
    disp('O πίνακας E είναι :');
    E
    disp('O καινούργιος διαταραγμένος πίνακας, AE=A+E, είναι
:');
    AE=A+E

```

(Αλλαγή τιμής  
στη μεταβλητή)

(Ελεγχος μεταβλητής)

(Ελεγχος μεταβλητής 1  
για συνέχιση του  
προγράμματος)

(Υπολογισμός πίνακα  
διαταραχής)

(Προσθήκη του  $10^{-5}$   
για την ικανοποίηση  
της σχέσης(2.16))

(Εκτύπωση  
αποτελεσμάτων)



```
disp('Οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα AE είναι :');  
eig(AE)  
disp('Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι :');  
eig(A)  
end  
else  
disp('Ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός');  
end;
```



Παρατίθεται σε Matlab ο Κώδικας 3, που υλοποιήθηκε για τον υπολογισμό-κατασκευή διαταραγμένου πίνακα, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 3.2 που αναφέρθηκε στη μέθοδο θετικών κύριων υπο-οριζουσών στο Κεφάλαιο 3, Ενότητα 3.2.2.

### Κώδικας 3

<pre>A=input('Δώσε τον πίνακα :');</pre>	(Εισαγωγή πίνακα)
<pre>[n m]=size(A);</pre>	(Υπολογισμός διάστασης πίνακα)
<pre>vres_pinaka_E=0;</pre>	(Αρχικοποίηση
<pre>z=0;</pre>	μεταβλητών)
<pre>d=0;</pre>	
<pre>q=0;</pre>	
<pre>if n==m</pre>	(Έλεγχος
<pre>for i=1:1:n</pre>	συμμετρικότητας
<pre>for j=1:1:n</pre>	του πίνακα)
<pre>if A(i,j)==A(j,i)</pre>	
<pre>    d=d+1;</pre>	(Δήλωση μετρητή, που μετρά το
<pre>if d==n*n</pre>	πλήθος των στοιχείων του πίνακα)
<pre>    disp('Ο πίνακας είναι συμμετρικός');</pre>	
<pre>if min(eig(A))&gt;0</pre>	(Έλεγχος προσήμου των ιδιοτιμών του
<pre>    q=q+1;</pre>	πίνακα)
<pre>    disp('Ο πίνακας έχει θετικές ιδιοτιμές');</pre>	
<pre>end</pre>	
<pre>if A(i,i)&lt;0</pre>	(Έλεγχος για αρνητικό διαγώνιο στοιχείο στον πίνακα)
<pre>    disp('Ο πίνακας έχει τουλάχιστον μία αρνητική τιμή στα διαγώνια στοιχεία του');</pre>	
<pre>    q=q+1;</pre>	(Αλλαγή τιμής στη μεταβλητή)
<pre>end</pre>	





<code>if q==0</code>	(Ελεγχος μεταβλητής
<code>    vres_pinaka_E=1 ;</code>	για συνέχιση του
<code>    end</code>	προγράμματος)
<code>end;</code>	
<code>    else</code>	(Αλλαγή τιμής στη
<code>        z=z+1;</code>	μεταβλητή)
<code>    end;</code>	
<code>end;</code>	
<code>    if A(i,i)&lt;0</code>	(Τερματισμός
	προγράμματος όταν
	υπάρχει αρνητικό
	διαγώνιο στοιχείο)
<code>        disp('O πίνακας έχει αρνητική τιμή στη διαγώνιο');</code>	
<code>        vres_pinaka_E=0;</code>	
<code>    end</code>	
<code>end;</code>	
<code>    if z&gt;0</code>	
<code>        disp('O πίνακας δεν είναι συμμετρικός');</code>	
<code>    end;</code>	
<code>    else</code>	
<code>        disp('O πίνακας δεν είναι τετραγωνικός');</code>	
<code>    end;</code>	
<code>DD=0;</code>	(Δήλωση μεταβλητών)
<code>e=1;</code>	
<code>nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E=0;</code>	
<code>if vres_pinaka_E==1</code>	(Ελεγχος του δείκτη
	για συνέχιση του
	προγράμματος)
<code>    for i=1:1:n;</code>	(Υλοποίηση μεθόδου
<code>        DD(i,i)=A(i,i);</code>	θετικών κύριων
<code>    end</code>	υπο-οριζουσών,
<code>        BB=A-DD</code>	Ενότητα 3.2.2)



```

end
ok=0;
for e=1:-0.001:0
    if ok==0;
        DA= DD+e*BB;
        for i=1:1:n
            if det(DA(1:i,1:i))<0
                ok=0;
            else
                ok=1;
                DA1=DA;
                e1=e;
                nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E=1;
            end
        end
    end
end
end

if nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E==1
    E=DA1-A;
    e=e1;
    disp('O πίνακας A είναι:');
    A
    disp('O πίνακας E είναι:');
    E
    disp('O καινούργιος διαταραγμένος πίνακας, AE=A+E, είναι
:');
    AE=A+E
    disp('Οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα AE είναι :');
    eig(AE)
    disp('Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι :');
    eig(A)
    disp('Με μεταβλητή διαταραχής e:');
    e
end

```

(Εκτύπωση  
αποτελεσμάτων)



Τέλος, παρατίθεται σε Matlab ο Κώδικας 4, που δημιουργήθηκε για τον υπολογισμό διαταραγμένου πίνακα σύμφωνα με το Θεώρημα Weyl στο Κεφάλαιο 3, Ενότητα 3.1, με σκοπό να πραγματοποιηθεί διαταραχή ενός αόριστου (συμμετρικού) πίνακα, ώστε να μετατραπεί σε θετικά ορισμένο.

#### Κώδικας 4

<code>A=input('Δώσε τον πίνακα : ');</code>	(Εισαγωγή πίνακα)
<code>[n m]=size(A);</code>	(Υπολογισμός μεγέθους)
<code>vres_pinaka_E=0;</code>	(Δήλωση μεταβλητών)
<code>z=0;</code>	
<code>d=0;</code>	
<code>q=0;</code>	
<code>if n==m</code>	(Ελεγχος
<code>for i=1:1:n</code>	συμμετρικότητας
<code>for j=1:1:n</code>	του πίνακα)
<code>if A(i,j)==A(j,i)</code>	
<code>d=d+1;</code>	(Δήλωση μετρητή,
<code>if d==n*n</code>	που μετρά το πλήθος
<code>disp('Ο πίνακας είναι συμμετρικός');</code>	των στοιχείων του
<code>if min(eig(A))&gt;0</code>	πίνακα)
<code>q=q+1;</code>	(Ελεγχος προσήμου των
	ιδιοτιμών του πίνακα)
<code>disp('Ο πίνακας έχει θετικές ιδιοτιμές');</code>	
<code>end</code>	
<code>if A(i,i)&lt;0</code>	(Ελεγχος για αρνητικό
	διαγώνιο στοιχείο στον
	πίνακα)



```

disp('Ο πίνακας έχει αρνητική τιμή στη διαγώνιο');
q=q+1;
end
if q==0 (Έλεγχος μεταβλητής
vres_pinaka_E=1 ; για συνέχιση του
end προγράμματος)
end;
else
z=z+1; (Αλλαγή τιμής στη
end; μεταβλητή)
end;
if A(i,i)<0 (Τερματισμός
προγράμματος όταν
υπάρχει αρνητικό
διαγώνιο στοιχείο)

disp('Ο πίνακας έχει αρνητική τομή στη διαγώνιο');
vres_pinaka_E=0;
end
end;
if z>0
disp('Ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός');
end;
else
disp('Ο πίνακας δεν είναι τετραγωνικός');
end;

metritis_if=0; (Δήλωση μεταβλητών)
met_lakis=0;
ok=0 ;
pro=-1;
while_epa=0;
nai_i_oxi_enfanisi_pinaka_E=0;

if vres_pinaka_E==1
E=zeros(n,n); (Δημιουργία μηδενικού
πίνακα)

```





```

lmin=abs (min (eig (A) ) ) ;
x=0.005;
for i=1:1:n;
    E(i,i)=lmin+x;
    x=x+0.001;
end
    DA=A+E;
End

det (DA) ;
e=e1;
disp('Ο πίνακας A είναι :');
A
disp('Ο πίνακας E είναι :');
E
disp('Ο καινούργιος διαταραγμένος πίνακας, AE=A+E, είναι :');
AE=DA
disp('Οι ιδιοτιμές του διαταραγμένου πίνακα AE είναι :');
eig(AE)
disp('Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι :');
eig(A)

```

(Υπολογισμός  
μικρότερης ιδιοτιμής  
κατά απόλυτο τιμή)

(Διαταραχή πίνακα)

(Εκτύπωση  
αποτελεσμάτων)



## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής είναι η μελέτη των διαταραχών των ιδιοτιμών ενός πίνακα. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται γενικά θεωρήματα διαταραχών τυχαίου πίνακα, καθώς και θεωρήματα διαταραχών Ερμιτιανών και συμμετρικών πινάκων με απώτερο σκοπό την εφαρμογή τους, σε ποικίλες επιστημονικές περιοχές.

Το Geršgorin θεώρημα και η γενικευμένη θεώρημα Levinger είναι οι δύο θεωρήματα που χρησιμοποιούνται προκειμένου να διαταραχθεί ο πίνακας. Αναπτύσσονται δυο αλγόριθμοι, που εντοπίζουν την περιοχή του επιπέδου στην οποία ανήκει το φάσμα ενός τυχαίου πίνακα καθώς και του διαταραγμένου του. Αναφέρονται μέθοδοι διαταραχής, που αναπτύχθηκαν για την μετατροπή ενός αόριστου πίνακα σε θετικά ορισμένο. Οι αόριστοι πίνακες, ενδεχομένως να έχουν προκύψει από μεθόδους ανάλυσης βιοϊατρικών δεδομένων, διαταράσσονται με την εφαρμογή των ακόλουθων μεθόδων: μέθοδος υπερσχύοντος διαγώνιου πίνακα, μέθοδος θετικών κύριων υποοριζουσών, μέθοδος πίνακα βαθμού 1.

Η σύγκριση των μεθόδων διαταραχής γίνεται με τη χρήση ορισμένων μέτρων, όπως είναι η νόρμα γραμμής, η φασματική νόρμα, το κριτήριο διαφοράς απολύτων τιμών καθώς και ο δείκτης κατάστασης. Για όλες τις παραπάνω μεθόδους αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν νέοι κώδικες σε Matlab.



## **Abstract**

This dissertation aims to examine the perturbation of matrix eigenvalues. We present and implement the theorems which are related to the perturbation of the matrix as well as the theorems that apply to the perturbation of Hermitian and symmetric one.

The Geršgorin theorem and the generalised Levinger's theorem are the two theorems that are used in order for the perturbation matrix to be developed. We refer to perturbation methods that have been developed in order an infinite matrix to be transformed to a positive definite one. The infinite matrices have possibly derived from statistical analysis and are perturbed by following methods such as the method of strictly diagonally dominant, the method of the positive sub-determinant, the method of full rank matrix.

The matrix norms (the spectral norm, the infinite norm) and the condition number are some measures that are used, so as to compare the perturbation methods. For all the above mentioned measures new codes on Matlab have been implemented and developed.





## ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ (άρθρο 8 Ν.1599/1986)

Η ακρίβεια των στοιχείων που υποβάλλονται με αυτή τη δήλωση μπορεί να ελεγχθεί με βάση το αρχείο άλλων υπηρεσιών (άρθρο 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986)

ΠΡΟΣ:	Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Σχολή Θετικών Επιστημών						
Ο – Η Όνομα:				Επώνυμο:			
Όνομα και Επώνυμο Πατέρα:							
Όνομα και Επώνυμο Μητέρας:							
Ημερομηνία γέννησης <sup>(1)</sup> :							
Τόπος Γέννησης:							
Αριθμός Δελτίου Ταυτότητας:				Τηλ:			
Τόπος Κατοικίας:			Οδός:			Αριθ:	TK:
Αρ. Τηλεομοιοτύπου (Fax):				Δ/ση Ηλεκτρ. Ταχυδρομείου (Email):			

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις<sup>(2)</sup>, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

- Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
- Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
- Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια
- Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία: ...../...../20.....

Ο – Η Δηλ.

(Υπογραφή)

(1) Αναγράφεται ολογράφως.

(2) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.





