



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Μη αρνητικοί πίνακες**

**Δέδες Χρήστος**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
Υπεύθυνη  
Αδάμ Μαρία  
Επίκουρος Καθηγήτρια**

**Λαμία, Φεβρουάριος 2011**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ**

**Μη αρνητικοί πίνακες**

**Χρήστος Δέδες**

**Υπεύθυνη Καθηγήτρια: Μαρία Αδάμ**  
Επίκουρος Καθηγήτρια

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24<sup>η</sup> Φεβρουαρίου 2011.

Βασίλειος Πλαγιανάκος  
Επίκουρος Καθηγητής

Μπάγκος Παντελής  
Επίκουρος Καθηγητής

Μαρία Αδάμ  
Επίκουρος Καθηγήτρια

**Λαμία, Φεβρουάριος 2011**

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος από τον Οκτώβριο του 2009 έως το Φεβρουάριο 2011.

Έχοντας ολοκληρώσει την πτυχιακή εργασία μου, θα ήθελα να ευχαριστήσω:

Την επιβλέπουσα καθηγήτριά μου, κα Μαρία Αδάμ, Επίκουρο Καθηγήτρια του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος, για τη συνεχή παρακολούθηση, υποστήριξη και ενθάρρυνση καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κ. Βασίλειο Πλαγιανάκο και κ. Παντελή Μπάγκο Επίκουρους Καθηγητές στο Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος, για τις γόνιμες συζητήσεις μας πάνω σε θέματα που σχετίζονταν με το θέμα της παρούσας πτυχιακής εργασίας καθώς και για τη συμμετοχή τους στην Εξεταστική Επιτροπή, διαβεβαιώνοντάς τους ότι οι παρατηρήσεις τους θα ληφθούν σοβαρά υπ' όψιν και θα ενσωματωθούν στο τελικό κείμενο.

Το Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Πανεπιστημίου Στερεάς Ελλάδος και ιδιαίτερα τους διδάσκοντες για το θετικό ακαδημαϊκό κλίμα και την άψογη συνεργασία μας.

Την οικογένειά μου, για την στήριξή τους όχι μόνο στα χρόνια των σπουδών μου, αλλά καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής μου.

Τους φίλους, που απέκτησα κατά τη φοίτησή μου στο Τμήμα αυτό, για τις όμορφες στιγμές που περάσαμε όλα αυτά τα χρόνια.

Χρήστος Δέδες

Φεβρουάριος 2011



# Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη μη-αρνητικών πινάκων, πινάκων που περιέχουν μη αρνητικά στοιχεία. Οι πίνακες αυτοί εμφανίζονται κατά την αναπαράσταση και μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Στην παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάζονται τα σημαντικότερα θεωρήματα και πορίσματα της θεωρίας μη-αρνητικών πινάκων, τα οποία συμβάλλουν στον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας του πίνακα.

Εντοπίζεται διάστημα, όπου ανήκει η φασματική ακτίνα, τα άκρα του οποίου εξαρτώνται από τα στοιχεία του μη-αρνητικού πίνακα ή από τις συντεταγμένες ενός διανύσματος, το οποίο μπορεί να είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της.

Ένας νέος αλγόριθμος προτείνεται για τον υπολογισμό της και αναφέρονται διαστήματα τιμών για τις παραμέτρους του, ώστε αυτός να είναι βέλτιστος. Ο αλγόριθμος είναι αποδοτικότερος για αρκετά μεγάλους πίνακες.

Διατυπώνεται το θεμελιώδες θεώρημα Perron – Frobenius, που αναφέρεται σε θετικούς και κατόπιν σε μη-αρνητικούς πίνακες, στο οποίο αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι θετική πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της είναι θετικό ή μη αρνητικό. Στην περίπτωση θετικού πίνακα ή μη-αρνητικού και ανάγωγου πίνακα η φασματική ακτίνα έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με ένα. Δίνονται εφαρμογές των προτάσεων στη θεωρία γραφημάτων.

**Λέξεις κλειδιά:** μη αρνητικός πίνακας, ιδιοτιμή, ιδιοδιάνυσμα, φασματική ακτίνα, ανάγωγος, συνεκτικό γράφημα, πίνακας γειτνίασης



# Abstract

The aim of present thesis is the study of nonnegative matrices, which have nonnegative entries. These matrices arise in the representation and modelling of problems which are related to various scientific areas, such as statistics, biology, economics and social sciences. In present thesis the important theorems and corollaries of theory of nonnegative matrices, which contribute to computing of spectral radius of nonnegative matrix are presented.

The spectral radius is located in interval, whose ends depend on the entries of a nonnegative matrix or on coordinates of a vector, which can be its corresponding eigenvector.

A new algorithm is proposed for spectral radius' computing and intervals of values for its parameters are mentioned, so that this is the best. The algorithm is more productive for matrices with big dimension.

The fundamental theorem Perron - Frobenius, which is related to positive or nonnegative matrices, is formulated, where it is proved that the spectral radius is positive real eigenvalue of matrix and its corresponding eigenvector is a positive or nonnegative vector. In case of a positive matrix or a nonnegative and irreducible matrix the spectral radius has algebraic and geometric multiplicity equal to one. Applications of propositions are given in graph theory.

**Keywords :** nonnegative matrix, eigenvalue, eigenvector, spectral radius, irreducible, connected graph, adjacency matrix.





# Περιεχόμενα

Πρόλογος .....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Βασικές έννοιες πινάκων .....	5
1.1 Άλγεβρα πινάκων.....	5
1.1.1 Βασικοί ορισμοί.....	5
1.1.2 Διάταξη πινάκων.....	12
1.1.3 Πράξεις πινάκων .....	14
1.1.4 Ιδιότητες άλγεβρας πινάκων .....	16
1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός τετραγωνικού πίνακα.....	19
1.2.1 Ορίζουσες .....	19
1.2.2 Χαρακτηριστικά ποσά .....	21
1.2.3 Εντοπισμός ιδοτιμών Ερμιτιανών πινάκων .....	28
1.3 Νόρμες .....	33
1.3.1 Νόρμες διανυσμάτων .....	33
1.3.2 Νόρμες πινάκων.....	35
1.3.3 Ιδιότητες νορμών .....	38
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Θεωρία Perron-Frobenius .....	39
2.1 Φράγματα φασματικής ακτίνας μη-αρνητικών πινάκων .....	39
2.2 Θετικοί πίνακες.....	65
2.3 Μη-αρνητικοί πίνακες και θεωρία Perron-Frobenius .....	73
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Θεωρία Πινάκων και Γραφήματα.....	89
3.1 Εισαγωγικές έννοιες.....	89
3.1.1 Ορισμοί .....	89
3.1.2 Κατηγορίες γραφημάτων .....	93
3.2 Γραφήματα και πίνακες .....	97
3.2.1 Αναπαράσταση γραφημάτων με μη-αρνητικούς πίνακες.....	97
3.2.2 Αναπαράσταση μη-αρνητικών πινάκων με γραφήματα .....	105
3.2.3 Φασματική ακτίνα και θεωρία Perron-Frobenius .....	107
Συμπεράσματα .....	123
Βιβλιογραφία .....	125
Παράρτημα Α.....	127
Παράρτημα Β.....	131

## Πρόλογος

Η θεωρία Πινάκων είναι ένας σημαντικός κλάδος της Γραμμικής Άλγεβρας ο οποίος αποτελεί ουσιώδες μέρος του μαθηματικού υπόβαθρου πολλών επιστημονικών κλάδων με εφαρμογές στις φυσικές, τεχνολογικές και οικονομικές επιστήμες και η εξέλιξή της υπήρξε ραγδαία στη Μαθηματική Ανάλυση, στη θεωρία Πιθανοτήτων, στη Στατιστική, στη θεωρία Γραφημάτων κ.α.

Οι στοχαστικοί πίνακες, η μελέτη των οποίων εξάγει συμπεράσματα για διάφορους τομείς όπως η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές επιστήμες, και οι κοινωνικές επιστήμες, είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τη θεωρία Πινάκων, καθώς ο τρόπος για να αναπαρασταθούν, να μοντελοποιηθούν και να επιλυθούν τα προβλήματα που παρουσιάζονται στους παραπάνω τομείς βασίζεται σε αυτή μέσω ειδικών πινάκων.

Η θεωρία Γραφημάτων χρησιμοποιείται σε πολλούς τομείς για την αναπαράσταση και επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Συγκεκριμένα, τα γραφήματα που προκύπτουν χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες, στα ηλεκτρονικά κυκλώματα, στα υδραυλικά συστήματα, στα οικονομικά, ακόμα και στις συγκοινωνίες. Η αναπαράσταση των γραφημάτων με πίνακες αλλά και η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η αναπαράσταση πινάκων με γραφήματα έδειξε στους μελετητές ένα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων που αφορούσαν πίνακες ή γραφήματα.

Ιδιαίτερα η φασματική θεωρία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με πάρα πολλούς τομείς θετικών και εφαρμοσμένων επιστημών, συγκεκριμένα, η μελέτη των ιδιοποσών των πινάκων, δηλαδή των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων έχει συμβάλει στην εξαγωγή συμπερασμάτων σε αρκετά επιστημονικά πεδία, όπως στη μηχανική, στη κβαντομηχανική, στην οικολογία, στην αεροναυπηγική κ.α.

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη πινάκων με πραγματικά θετικά ή μηδενικά στοιχεία, οι ονομαζόμενοι μη-αρνητικοί πίνακες. Ειδικότερα, η εξαγωγή συμπερασμάτων για τη μέγιστη απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών μη-αρνητικού πίνακα, με τη βοήθεια κυρίως του θεωρήματος Perron – Frobenius αλλά και άλλων θεωρημάτων, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Εφαρμογές των προτάσεων στη θεωρία Γραφημάτων εξετάζονται και δύο αλγόριθμοι προτείνονται.

Κάθε κεφάλαιο της πτυχιακής αυτής εργασίας αριθμείται και υποδιαιρείται σε τμήματα τα οποία αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ μερικά αριθμούνται με τρεις αριθμούς. Ο πρώτος αριθμός αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στο τμήμα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεση του τμήματος. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, τα πορίσματα, οι τύποι, τα σχήματα και τα παραδείγματα αριθμούνται με δύο αριθμούς, απ' τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισης.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας Πινάκων, όπως για παράδειγμα, κάποιες σημαντικές κατηγορίες πινάκων, η άλγεβρα πινάκων, τα χαρακτηριστικά μεγέθη τους, ορίζουσες, ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα καθώς και οι σημαντικότερες ιδιότητές τους. Γενικεύοντας γνωστά φράγματα για τον εντοπισμό των ιδιοτιμών Ερμιτιανών πινάκων, οδηγούμαστε σε συμπεράσματα για τις ιδιάζουσες τιμές μη τετραγωνικού πίνακα. Τέλος, αναφέρονται ορισμοί και ιδιότητες για τις νόρμες διανύσματος και πίνακα.

Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται σε προτάσεις και θεωρήματα που αναφέρονται στη μέγιστη απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών ενός τετραγωνικού πίνακα, στη φασματική ακτίνα και στο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της. Εντοπίζονται άνω και κάτω φράγματα ενός διαστήματος στο οποίο αυτή ανήκει. Οι πίνακες που εξετάζονται στην παρούσα πτυχιακή είναι μη-αρνητικοί, ωστόσο σε αυτό το κεφάλαιο μελετώνται ιδιαίτερα και οι θετικοί πίνακες, για τους οποίους αποδεικνύεται το θεώρημα Perron, καθώς και η επέκταση-γενίκευση αυτού, θεώρημα Frobenius, που αποδεικνύεται για τους μη-αρνητικούς. Ως εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων αναπτύσσονται δύο αλγόριθμοι εύρεσης της φασματικής ακτίνας. Επίσης εξετάζεται και κατηγορία μη-αρνητικών πινάκων, των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν μέτρο, που ταυτίζεται με αυτό της φασματικής ακτίνας.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρονται βασικοί ορισμοί των γραφημάτων και η φασματική ανάλυση των γραφημάτων εξετάζεται μέσω κατάλληλων μη-αρνητικών πινάκων (πίνακες γειτνίασης, βαρών). Επίσης, αποδεικνύεται το θεώρημα Perron – Frobenius προσαρμοσμένο για γραφήματα και παρουσιάζονται φράγματα για τη φασματική ακτίνα του γραφήματος.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας υπάρχουν τα συμπεράσματα, ένας κατάλογος με τα σχετικά συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο κείμενο που πολλά από αυτά είναι χρήσιμα για περαιτέρω μελέτη των προαναφερόμενων εννοιών και εμβάθυνση, καθώς και δυο παραρτήματα. Στο πρώτο δίνεται ένας νέος βέλτιστος

αλγόριθμος υπολογισμού της φασματικής ακτίνας πίνακα που έχει ως στοιχεία μη αρνητικούς αριθμούς, ο οποίος δημιουργήθηκε στα πλαίσια της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Στο δεύτερο υπάρχει βιογραφικό σημείωμα των δύο κορυφαίων μαθηματικών, από το όνομα των οποίων πήρε το θεώρημα Perron – Frobenius, των Oskar Perron και Ferdinand Georg Frobenius.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Βασικές έννοιες πινάκων

### 1.1 Άλγεβρα πινάκων

#### 1.1.1 Βασικοί ορισμοί

##### Ορισμός 1.1

Πίνακα  $A$  με στοιχεία από το  $\mathbb{F}$  (σύνολο  $\mathbb{R}$  των πραγματικών ή σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών) ονομάζουμε μια διάταξη των  $mn$  στοιχείων (αριθμών)  $a_{ij}$  του συνόλου  $\mathbb{F}$  σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Οι αριθμοί  $a_{ij}$  ονομάζονται στοιχεία του πίνακα. Με βάση τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα ( $m \times n$ ) βρίσκουμε το **μέγεθος** ή **τύπο** του πίνακα. Συγκεκριμένα λέμε ότι ο πίνακας  $A$  είναι ένας  $m \times n$  πίνακας.

Στη συνέχεια, ο πίνακας  $A$  συμβολίζεται  $(a_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ . Ακόμη, με  $M_{m \times n}(\mathbb{F})$  συμβολίζεται το σύνολο όλων των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{F}$ . Δύο ή περισσότεροι πίνακες που έχουν ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών χαρακτηρίζονται ως πίνακες **ιδίου τύπου**.

Αν διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες από τον πίνακα  $A$ , ο πίνακας που προκύπτει ονομάζεται **υποπίνακας** του  $A$ .

Ένας **υποπίνακας** του  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ , που προκύπτει από τη διαγραφή των  $k$  τελευταίων γραμμών και στηλών του  $A$  ονομάζεται **κύριος υποπίνακας** του  $A$  για κάθε  $1 \leq k < n$ .

Ένας πίνακας  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  ονομάζεται **σύνθετος** πίνακας ή πίνακας block, αν τα στοιχεία του είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από αυτό του  $A$ . Οι υποπίνακες αυτοί είναι τέτοιοι ώστε τα στοιχεία-υποπίνακες, που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, έχουν όλα τον ίδιο αριθμό γραμμών και τα στοιχεία-υποπίνακες που βρίσκονται στην ίδια στήλη, έχουν όλα τον ίδιο αριθμό στηλών. Ο σύνθετος πίνακας θα συμβολίζεται  $A = (A_{ij})$ , όπου  $A_{ij}$  είναι το στοιχείο-υποπίνακας, που προκύπτει από τη διαμέριση του αρχικού πίνακα  $A$  και βρίσκεται στην  $i$ - γραμμή και  $j$ - στήλη του πίνακα  $A$ . Η διαμέριση του αρχικού πίνακα γίνεται με την χάραξη κατακόρυφων και οριζόντιων γραμμών, που διαχωρίζουν τις γραμμές και τις στήλες του αρχικού πίνακα. Για παράδειγμα, έστω ο σύνθετος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|c|ccc} 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 4i & 1 & 1 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right),$$

όπου  $A_{11} = (2 \ 1)$ ,  $A_{12} = (6)$ ,  $A_{13} = (1 \ 0 \ 3)$ ,  $A_{21} = \begin{pmatrix} 4i & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  και

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες κατηγορίες πινάκων, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα συναντήσουμε στην παρούσα εργασία.

- Ένας  $1 \times n$  πίνακας λέγεται και **πίνακας-γραμμή**, ενώ ένας  $m \times 1$  πίνακας λέγεται και **πίνακας-στήλη** ή **διάνυσμα**.
- Εάν όλα τα στοιχεία ενός  $m \times n$  πίνακα είναι ίσα με μηδέν, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με  $0_{m \times n}$  ή απλά με  $0$ .
- Έστω  $A = (a_{ij})$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Ο  $n \times m$  πίνακας  $(a_{ji})$  ονομάζεται **ανάστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^T$ .

Για παράδειγμα, αν  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  τότε  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Έστω  $A = (a_{ij})$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Ο  $m \times n$  πίνακας, ο οποίος έχει ως στοιχεία του τα συζυγή στοιχεία του πίνακα  $A$ , δηλαδή  $\bar{a}_{ij}$ , ονομάζεται **συζυγής** του  $A$  και συμβολίζεται με  $\bar{A}$ .

Για παράδειγμα, αν, ο συζυγής του είναι  $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2i \\ 2+i & 3 & 5+i \end{pmatrix}$ .

Ο  $n \times m$  πίνακας  $(\bar{a}_{ji})$  ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του πίνακα  $A$  και συμβολίζεται  $A^* = \bar{A}^T$ .

Για παράδειγμα, ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2i \\ 2-i & 3 & 5-i \end{pmatrix} \text{ είναι } A^* = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 6 & 3 \\ -2i & 5+i \end{pmatrix}.$$

### Ορισμός 1.2

Ένας πίνακας  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ , που όλα τα στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί ονομάζεται **θετικός** (positive) πίνακας και συμβολίζεται  $A > 0$ .

Αν ο πίνακας  $A$  έχει όλα τα στοιχεία του μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός ονομάζεται **μη-αρνητικός** (nonnegative) πίνακας και συμβολίζεται  $A \geq 0$ .

Για παράδειγμα, ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  είναι θετικός, ενώ  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  είναι μη-αρνητικός.

### Ορισμός 1.3

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Η **απόλυτη τιμή** του πίνακα  $A$  συμβολίζεται  $|A|$  και ορίζεται ως ο  $m \times n$  μη-αρνητικός πίνακας με  $|A| = (|a_{ij}|)$ .

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1+3i & 1 & 4i \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ έχει απόλυτη τιμή } |A| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sqrt{10} & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Σχόλια:** Συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.2 με τον Ορισμό 1.3 συμπεραίνουμε ότι η απόλυτη τιμή οποιουδήποτε πίνακα είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας, δηλαδή για κάθε πίνακα  $A$  ισχύει  $|A| \geq 0$ .



---



---

**Ορισμός 1.4**

- Εάν ένας  $m \times n$  πίνακας έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ( $m = n$ ), ο πίνακας αυτός ονομάζεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο όλων των  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{F}$  συμβολίζεται με  $M_n(\mathbb{F})$ .

Για παράδειγμα, οι πίνακες  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  είναι τετραγωνικοί.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, αν για κάθε  $i \neq j$  ισχύει  $a_{ij} = 0$ , δηλαδή αν κάθε στοιχείο, που δε βρίσκεται στη διαγώνιο, είναι ίσο με μηδέν. Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται και ως  $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ .  
Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται  $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ .
- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός**, αν για κάθε  $i > j$  ισχύει  $a_{ij} = 0$ , δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.  
Αντίθετα ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός**, αν για κάθε  $i < j$  ισχύει  $a_{ij} = 0$ , δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

**Ορισμός 1.5**

- Ένας πίνακας  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  λέγεται **συμμετρικός**, αν για κάθε  $i, j$  ισχύει  $a_{ij} = a_{ji}$ . Ισοδύναμα,

ένας πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισχύει  $A = A^T$ .

Για παράδειγμα,  $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός.

- Ένας πίνακας  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$  λέγεται **Ερμιτιανός**, αν για κάθε  $i, j$ , ισχύει  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ . Ισοδύναμα ένας πίνακας λέγεται Ερμιτιανός αν και μόνο αν  $A = A^*$ .

Για παράδειγμα, ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 4 & 2-i & -4i \\ 2+i & -1 & 2 \\ 4i & 2 & 7 \end{pmatrix}$  είναι Ερμιτιανός.

### Ορισμός 1.6

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$  Ερμιτιανός πίνακας. Αν για κάθε μη μηδενικό  $x \in \mathbb{C}^n$  ισχύει

$$x^* Ax > 0,$$

τότε ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **θετικά ορισμένος πίνακας** (positive definite matrix), ενώ όταν ισχύει  $x^* Ax \geq 0$  ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος πίνακας** (positive semidefinite matrix) ή **μη-αρνητικά ορισμένος πίνακας** (nonnegative definite matrix).

Για παράδειγμα, ο πίνακας  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$  είναι θετικά ορισμένος, ενώ ο πίνακας

$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  είναι θετικά ημιορισμένος ή μη-αρνητικά ορισμένος.

### Ορισμός 1.7

Αν για έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ισχύει

$$A^* A = AA^* = I_n,$$

ο πίνακας ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**, ενώ αν  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και ισχύει

$$A^T A = AA^T = I_n,$$

ο πίνακας ονομάζεται **ορθογώνιος**.

### Ορισμός 1.8

Ένας τετραγωνικός πίνακας  $P \in M_n(\mathbb{R})$  λέγεται **πίνακας μετάθεσης** (permutation matrix), αν τα στοιχεία του είναι 0 ή 1, έτσι ώστε σε κάθε γραμμή και στήλη να υπάρχει ένα μόνο 1.

Για παράδειγμα, ο πίνακας  $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

---



---

**Ορισμός 1.9**

Έστω πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . Αν για οποιονδήποτε πίνακα μετάθεσης  $P \in M_n(\mathbb{R})$  ισχύει

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \text{ με } A_i \neq 0, \text{ για κάθε } i=1,2,3,4,$$

όπου  $A_1 \in M_r(\mathbb{F})$ ,  $1 \leq r \leq n-1$ ,  $A_4 \in M_{n-r}(\mathbb{F})$ , ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **ανάγωγος** (irreducible).

Σε διαφορετική περίπτωση ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **μη-ανάγωγος** (reducible), δηλαδή, υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P \in M_n(\mathbb{R})$  έτσι ώστε

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}.$$

**Σχόλια:** Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.9, ένας ανάγωγος πίνακας δε συμπεριλαμβάνει μηδενικές γραμμές ή στήλες, γιατί αν περιείχε τουλάχιστον μία τέτοια γραμμή (στήλη), τότε θα ήταν μη-ανάγωγος, μια και θα υπήρχε κατάλληλος πίνακας μετάθεσης  $P$ , ώστε να εναλλάξει τη μηδενική γραμμή και να τη «μεταφέρει» στο «κάτω» μέρος του πίνακα, άρα ο σύνθετος πίνακας  $P^T A P$  θα είχε ως block πίνακα-γραμμή το μηδενικό, δηλαδή  $A_3 = 0$ . Επίσης ο έλεγχος της αναγωγιμότητας ή μη ενός τετραγωνικού πίνακα δεν είναι επίπονος, καθώς δεν απαιτεί τον εντοπισμό κάποιου πίνακα μετάθεσης  $P$ , που να επαληθεύει τον παραπάνω ορισμό, επειδή στο βιβλίο των R.Horn και C.Johnson [9, Theorem 6.2.23] αποδεικνύεται μία χρήσιμη πρόταση, στην οποία παρουσιάζεται ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον παραπάνω χαρακτηρισμό. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται.

**Πρόταση 1.1**

Ο πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι ανάγωγος αν και μόνο αν ισχύει  $(I + |A|)^{n-1} > 0$ .

---



---

**Ορισμός 1.10**

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  με  $0 \leq a_{ij} \leq 1$ . Αν το άθροισμα κάθε γραμμής είναι ίσο με 1, ο πίνακας ονομάζεται **στοχαστικός κατά γραμμή** (row stochastic) ή **δεξιά στοχαστικός** (right stochastic). Αν το άθροισμα κάθε στήλης είναι ίσο με 1, ο πίνακας ονομάζεται **στοχαστικός κατά στήλη** (column stochastic) ή **αριστερά στοχαστικός** (left stochastic). Τέλος, αν το άθροισμα κάθε γραμμής, αλλά και το άθροισμα κάθε στήλης είναι ίσα με 1, ο πίνακας ονομάζεται **διπλά στοχαστικός** (double stochastic).

Για παράδειγμα, ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  είναι στοχαστικός κατά γραμμή, οι

πίνακες  $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.2 & 1 & 0.3 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$  είναι δύο στοχαστικοί κατά

στήλη και ο πίνακας  $C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$  είναι διπλά στοχαστικός πίνακας.

Για περισσότερες λεπτομέρειες των ιδιοτήτων των στοχαστικών πινάκων βλέπε [4].

### 1.1.2 Διάταξη πινάκων

#### Ορισμός 1.11

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  πίνακες ίδιου τύπου. Οι πίνακες λέμε ότι είναι **ίσοι** και σημειώνουμε  $A = B$  αν ισχύει

$$a_{ij} = b_{ij},$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

#### Ορισμός 1.12

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Οι πίνακες λέμε ότι έχουν **διάταξη** και σημειώνουμε

i)  $A > B$ , αν  $A - B$  είναι θετικός πίνακας, δηλαδή αν ισχύει

$$a_{ij} - b_{ij} > 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

ii)  $A \geq B$ , αν  $A - B$  είναι μη-αρνητικός πίνακας, δηλαδή αν ισχύει

$$a_{ij} - b_{ij} \geq 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

**Σχόλια:** i) Ανάλογα ισχύουν για τη διάταξη  $A < B$  και  $A \leq B$ .

ii) Στις παραπάνω σχέσεις του Ορισμού 1.12, αν  $B$  είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε από την (i) προκύπτει  $A > 0$ , άρα  $A$  είναι θετικός πίνακας και από τη (ii) έχουμε  $A \geq 0$ , δηλαδή  $A$  είναι μη-αρνητικός, (βλέπε Ορισμό 1.2).

#### Παράδειγμα 1.1

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό από τον Ορισμό 1.2 ότι,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow A > 0 \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow B \geq 0.$$

Επίσης ισχύουν:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} > 0, \text{ άρα } A - B > 0 \Rightarrow A > B, \text{ (Ορισμός 1.12-(i)).}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0, \text{ άρα } A - C \geq 0 \Rightarrow A \geq C, \text{ (Ορισμός 1.12-(ii)).}$$

=====

Προφανώς αν πάρουμε τον αντίθετο πίνακα του  $A - C$  θα προκύψει η αντίστροφη διάταξη, δηλαδή:

$$C - A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} < 0, \text{ \u03c1\u03b1 } C - A < 0 \Rightarrow C < A, \text{ (\u03a3\u03c7\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1 (i) -}$$

Ορισμού 1.12).

$$D - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \leq 0, \text{ \u03c1\u03b1 } D - B \leq 0 \Rightarrow D \leq B, \text{ (\u03a3\u03c7\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1 (i) -}$$

Ορισμού 1.12).

\u2666

### 1.1.3 Πράξεις πινάκων

Όπως και στους αριθμούς, έτσι και στους πίνακες υπάρχουν κάποιες βασικές πράξεις που μπορούν να εφαρμοστούν. Αυτές οι πράξεις είναι το άθροισμα πινάκων, ο πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό και ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

#### Ορισμός 1.13

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ,  $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Ως **άθροισμα**  $A + B$  των πινάκων  $A$  και  $B$  ορίζεται ο πίνακας

$$A + B = (\gamma_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F}),$$

ο οποίος είναι επίσης του ίδιου τύπου με τους αρχικούς πίνακες και έχει ως στοιχεία τα αθροίσματα των ομολόγων στοιχείων των  $A$  και  $B$ , δηλαδή

$$A + B = (\gamma_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

#### Ορισμός 1.14

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  και  $k \in \mathbb{F}$ . Το γινόμενο  $kA$  του  $k$  επί τον  $A$  είναι πίνακας ίδιου τύπου με τον αρχικό πίνακα  $A$ , του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν από τα αντίστοιχα του  $A$  με πολλαπλασιασμό τους επί  $k$ . Δηλαδή, προκύπτει ο πίνακας  $kA = (ka_{ij})$ . Ο πολλαπλασιασμός αυτός ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** ή **πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό**.

**Σχόλια:** Ειδικά όταν  $k = -1$ , ο πίνακας  $(-1)A$  συμβολίζεται  $-A$  και ονομάζεται **αντίθετος** του  $A$ . Ως διαφορά δύο πινάκων θεωρείται ο πίνακας  $A - B$  και είναι αποτέλεσμα των πράξεων  $A + (-1)B$ .

#### Ορισμός 1.15

Έστω  $A = (a_{ij}) \in M_{f \times m}(\mathbb{F})$  και  $B = (b_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε το **γινόμενο**,  $AB$ , των πινάκων  $A$  και  $B$ , είναι ο πίνακας

$$AB = (\gamma_{it}) \in M_{f \times n}(\mathbb{F}),$$

όπου στη θέση  $(i,t)$  υπάρχει το στοιχείο

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kt} = a_{i1} b_{1t} + a_{i2} b_{2t} + \dots + a_{im} b_{mt}.$$

=====

**Σχόλια :** i) Να σημειωθεί ότι το γινόμενο ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα  $A$  είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του  $B$  και ότι το μέγεθος του  $AB$  είναι  $f \times n$ . Έτσι για παράδειγμα, αν  $A$  είναι  $2 \times 3$  και  $B$  είναι  $3 \times 3$ , το γινόμενο  $AB$  ορίζεται και ο πίνακας  $AB$  είναι τύπου  $2 \times 3$ , ενώ το γινόμενο  $BA$  **δεν** ορίζεται.

ii) Επίσης, για δύο τετραγωνικούς πίνακες  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , για τους οποίους ορίζονται τα γινόμενα  $AB$  και  $BA$ , **δεν** ισχύει πάντα  $AB = BA$ .

Για παράδειγμα, έστω οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Επειδή,  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  και  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ ,

είναι προφανές ότι  $AB \neq BA$ .

Στην περίπτωση που ισχύει  $AB = BA$  οι πίνακες  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

iii) Για έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , αν υπάρχει ένας άλλος πίνακας  $B \in M_n(\mathbb{F})$ , για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες

$$AB = BA = I_n,$$

τότε ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **αντιστρέψιμος**, ο δε  $B$  **αντίστροφος** του  $A$  και συμβολίζεται με  $A^{-1}$ .

iv) Για έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ορίζεται η  $k$  - **δύναμη** του  $A$  ως

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-φορές}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad A^0 = I_n.$$



---

### 1.1.4 Ιδιότητες άλγεβρας πινάκων

Από τις πράξεις των πινάκων προέκυψαν κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες που είναι αρκετά χρήσιμες στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με πίνακες.

Από τους ορισμούς της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων (Ορισμός 1.13 και 1.14), προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες, όταν  $A, B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  και  $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$ .

- 1)  $A + B = B + A$
- 2)  $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$
- 3)  $A + 0_{m \times n} = A$
- 4)  $A - A = 0_{m \times n}$
- 5)  $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
- 6)  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- 7)  $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
- 8)  $1A = A$  και  $0A = 0_{m \times n}$

Αν συνυπολογίσουμε και τον ορισμό του ανάστροφου και του αναστροφοσυζυγούς πίνακα (Ορισμός 1.1) καταλήγουμε στις παρακάτω ιδιότητες:

- 1) Για κάθε πίνακα  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ , έχουμε  $A = (A^T)^T$  και  $A = (A^*)^*$ .
- 2) Έστω  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε  $(A + B)^T = A^T + B^T$  και  $(A + B)^* = A^* + B^*$ .
- 3) Έστω  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  και  $k \in \mathbb{F}$ . Τότε  $(kA)^T = kA^T$  και  $(kA)^* = \bar{k}A^*$ .
- 4) Έστω  $A \in M_{f \times m}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε  $(AB)^T = B^T A^T$  και  $(AB)^* = B^* A^*$ .
- 5) Για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , ο πίνακας  $A + A^T$  είναι συμμετρικός.

Από την πρόσθεση πινάκων, το βαθμωτό πολλαπλασιασμό (πολλαπλασιασμό πίνακα επί αριθμό) και το γινόμενο πινάκων (Ορισμοί 1.13, 1.14, 1.15, αντίστοιχα) προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

1) Έστω  $A \in M_{k \times l}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ ,  $\Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε  $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$ .

(προσεταιριστική ιδιότητα)

2) Έστω  $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ ,  $B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε  $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$ .

(αριστερά επιμεριστική ιδιότητα)

3) Έστω  $A, B \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ ,  $\Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε  $(A + B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$ .

(δεξιά επιμεριστική ιδιότητα)

4) Έστω  $k \in \mathbb{F}$ ,  $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$ ,  $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε  $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ .

5) Έστω  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  είναι άνω (κάτω) τριγωνικοί πίνακες.

Το γινόμενο  $AB \in M_n(\mathbb{F})$  είναι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας.

Αν  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  είναι διαγώνιοι, τότε  $AB \in M_n(\mathbb{F})$  είναι διαγώνιος πίνακας.

Χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 1.2 και 1.3, όπου ορίστηκαν ο μη-αρνητικός και η απόλυτη τιμή πίνακα καθώς και τους Ορισμούς 1.13 και 1.14, τις ιδιότητες των πραγματικών, μιγαδικών αριθμών και τον Ορισμό 1.12 της διάταξης πινάκων, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι ιδιότητες που αναφέρονται στην επόμενη πρόταση.

### Πρόταση 1.2

Έστω οι μη-αρνητικοί πίνακες  $A, B, C, D \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i)  $|A| \geq 0$  για κάθε  $A$ . Ισχύει  $|A| = 0$  αν και μόνο αν  $A = 0$ .

ii)  $|aA| = |a||A|$ , για κάθε  $a \in \mathbb{C}$ .

iii)  $|A + B| \leq |A| + |B|$ , (τριγωνική ανισότητα).

iv) Αν  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$  και  $a, b \geq 0$ , τότε  $aA + bB \geq 0$ .

v) Αν  $A \geq B$  και  $C \geq D$ , τότε  $A + C \geq B + D$ .

vi) Αν  $A \geq B$  και  $B \geq C$ , τότε  $A \geq C$ .

Χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 1.3, 1.12 και 1.15, όπου ορίστηκαν η απόλυτη τιμή πίνακα, η διάταξη και το γινόμενο πινάκων, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι ιδιότητες που αναφέρονται στην επόμενη πρόταση και σχετίζονται με ιδιότητες μη-αρνητικών πινάκων.

---



---

**Πρόταση 1.3**

Έστω οι πίνακες  $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{F})$  και τα διανύσματα  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i)  $|Ax| \leq |A||x|$ .
- ii)  $|AB| \leq |A||B|$ .
- iii)  $|A^k| \leq |A|^k$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .
- iv) Αν  $0 \leq A \leq B$  και  $0 \leq C \leq D$ , τότε  $0 \leq AC \leq BD$ .
- v) Αν  $0 \leq A \leq B$ , τότε  $0 \leq A^k \leq B^k$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .
- vi) Αν  $A \geq 0$ , τότε  $A^k \geq 0$ . Ιδιαίτερα, αν  $A > 0$ , τότε  $A^k > 0$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ .
- vii) Αν  $A > 0$ ,  $x \geq 0$  με  $x \neq 0$ , τότε  $Ax > 0$ .
- viii) Αν  $A \geq 0$ ,  $x > 0$  και  $Ax = 0$ , τότε  $A = 0$ .

---

## 1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός τετραγωνικού πίνακα

### 1.2.1 Ορίζουσες

#### Ορισμός 1.16

**Ορίζουσα** (determine) ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι μια απεικόνιση

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F} : A \rightarrow \det A$$

για την οποία ισχύει

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

για κάθε  $j=1,2,\dots,n$ , όπου  $A_{ij}$  είναι ο  $(n-1) \times (n-1)$  πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα  $A$ , αν διαγράψουμε τα στοιχεία της  $i$ -γραμμής και της  $j$ -στήλης.

Η ορίζουσα του  $A \in M_n(\mathbb{F})$  συμβολίζεται με  $|A|$ , ειδικά όταν ξέρουμε τα

στοιχεία του πίνακα  $A$ , γράφουμε  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ,  $\det(A)$  ή  $\det A$ .

Το κριτήριο που μας υποδεικνύει ποια είναι η κατάλληλη στήλη για την ανάπτυξη, είναι η επιλογή της στήλης για την οποία έχουμε λιγότερες ελάχισσες ορίζουσες για υπολογισμό. Έτσι, η στήλη που θα επιλέξουμε θα είναι αυτή που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία, εφόσον υπάρχουν.

#### Παράδειγμα 1.2

Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ .

Ο υπολογισμός της ορίζουσάς του,  $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ , θα είναι συντομότερος, αν γίνει

ανάπτυξη ως προς την τρίτη στήλη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(2 \cdot 4 - 1 \cdot 1) + 0 + (-2)[(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2] = 3 \end{aligned} \quad \diamond$$

Οι σημαντικότερες **ιδιότητες** των οριζουσών, η απόδειξη των οποίων δίνεται στα βιβλία [3, 5, 12], είναι οι ακόλουθες:

- 1) Για κάθε πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  οι ιδιότητες που αναφέρονται στις γραμμές της ορίζουσάς του, ισχύουν και για της στήλες του πίνακα.
- 2) Ένας πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν  $\det A \neq 0$ .
- 3) Αν ένας πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  έχει μηδενική γραμμή, τότε  $\det A = 0$ .
- 4) Αν ένας πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  έχει δύο γραμμές ανάλογες, τότε  $\det A = 0$ .
- 5) Για κάθε άνω (κάτω) τριγωνικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει  $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ , όπου  $a_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.
- 6) Η ορίζουσα διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα ισούται με 1.
- 7) Για κάθε πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει  $\det(A^T) = \det A$ ,  $\det(\overline{A}) = \overline{\det A}$  και  $\det(A^*) = \overline{\det A}$ .
- 8) Αν  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ , τότε  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ .
- 9) Για κάθε πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει  $\det(A^k) = (\det A)^k$ .
- 10) Για έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και  $\lambda \in \mathbb{F}$  ισχύει  $\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$ .

---

## 1.2.2 Χαρακτηριστικά ποσά

### Ορισμός 1.17

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και ένα διάνυσμα  $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$  τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x, \text{ με } x \neq 0 \quad (1.1)$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{F}$ . Η τιμή του  $\lambda$  ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα  $A$  και το  $x$  ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του  $A$ , αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda$ .

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  συμβολίζεται  $\sigma(A)$  και ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα.

Από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα, αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται με  $\rho(A)$ , δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.2)$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα  $A$ .

Η ισότητα (1.1) γράφεται ισοδύναμα

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή  $\lambda$  είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα λύνοντας το γραμμικό σύστημα, που προκύπτει από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)x = 0, \text{ για } x \neq 0.$$

### Παράδειγμα 1.3

Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  και έστω ότι θέλουμε να βρούμε τις ιδιοτιμές  $\lambda$  καθώς

και τα ιδιοδιανύσματα  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$ . Από την (1.1) έχουμε

$$\begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος είναι

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ο πίνακας  $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$  είναι αντιστρέψιμος για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (ιδιότητα οριζουσών (2),

παράγραφο 1.2.1), οπότε το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, άρα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα όμως με το (1.1) ως ιδιοδιανύσματα θεωρούνται τα μη μηδενικά διανύσματα. Άρα ο πίνακας  $A$  δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα στο  $\mathbb{R}$ . Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ( $\mathbb{C}$ ) το παραπάνω σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i.$$

Συνεπώς ο πίνακας  $A$  έχει δύο ιδιοτιμές:  $\lambda_1 = i$  και  $\lambda_2 = -i$ .

➤ Για  $\lambda_1 = i$ , το παραπάνω σύστημα είναι

$$\left. \begin{array}{l} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = ix_1 \\ x_1 \in \mathbb{C} \end{array},$$

από όπου συμπεράνουμε ότι υπάρχουν αντίστοιχα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα τα οποία

είναι  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{pmatrix}$ ,  $x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

➤ Αντίστοιχα στην ιδιοτιμή  $\lambda_2 = -i$  αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix}$ ,

$x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$ . ◇

Από το παραπάνω παραδείγματα γίνεται φανερό ότι, για να υπολογίσουμε όλες τις ιδιοτιμές  $\lambda \in \mathbb{F}$  ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$ , πρέπει να ισχύει η διανυσματική εξίσωση στην (1.2) η οποία οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

και αναλυτικότερα

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Δηλαδή, όλες οι ιδιοτιμές  $\lambda \in \mathbb{F}$  του πίνακα  $A$  πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (1.3), η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του τετραγωνικού πίνακα  $A$ .

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέρος της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.3) καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο  $n$ -οστού βαθμού, το οποίο γράφεται

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0, \quad (1.4)$$

και ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του  $A$  με συντελεστές  $b_j \in \mathbb{F}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο  $\mathbb{C}$  και να γραφεί στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i},$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$ , είναι οι διακεκριμένες ρίζες του  $\chi_A(\lambda)$  στο  $\mathbb{C}$  και  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i$ , η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα**.

Είναι φανερό ότι, για έναν πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_i = n$ .

Αν για κάποιο  $i$  ισχύει  $\nu_i = 1$ , η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **απλή**, διαφορετικά ονομάζεται πολλαπλή.

Αντικαθιστώντας κάθε μια διακεκριμένη ιδιοτιμή,  $\lambda = \lambda_i$ , στο σύστημα (1.1) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε με  $V(\lambda_i)$ .

### Ορισμός 1.18

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \{x \in M_{n \times 1}(\mathbb{F}) : (A - \lambda_i I)x = 0\}$$

ονομάζεται **ιδιόχωρος**<sup>1</sup>, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  και είναι ένας μη κενό υποσύνολο του  $M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ .

<sup>1</sup> Ο ιδιόχωρος είναι ο χώρος λύσεων του πίνακα  $A - \lambda_i I$ .



Τα μη μηδενικά στοιχεία του  $V(\lambda_i)$  είναι τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ , και η διάσταση του υποχώρου  $V(\lambda_i)$  είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - r(A - \lambda_i I).$$

Ο αριθμός  $\dim V(\lambda_i)$  ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής  $\lambda_i$  και φανερώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$ . Επίσης μια σημαντική ιδιότητα που αφορά την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας και ταυτόχρονα είναι μικρότερη ή ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα. Δηλαδή

$$1 \leq \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} \leq \text{αλγεβρική πολλαπλότητα}.$$

Για τα **χαρακτηριστικά ποσά** ενός τετραγωνικού πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  οι βασικότερες **ιδιότητες** διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [3, 5, 8, 9, 12, 21].

#### Πρόταση 1.4

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  είναι οι ιδιοτιμές<sup>2</sup> του.

- 1) Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- 2) Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- 3) i)  $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n b_0$ , όπου  $b_0$  είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στην (1.4).  
Ο πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή, αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $A$  είναι διάφορος του μηδενός.  
ii)  $\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$ , δηλαδή το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του  $A$  ισούται με το ίχνος του,  $\text{tr}A$ .
- 4) Για κάθε  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , ισχύει  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ .
- 5) Ο πίνακας  $I + A$  έχει ιδιοτιμές  $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$ .

<sup>2</sup> Οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένες

- 6) Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$  με  $A \geq 0$ , τότε  $\rho(I + A) = 1 + \rho(A)$ , [9, Lemma 8.4.2].
- 7) Αν  $\lambda, x$  είναι χαρακτηριστικά ποσά του  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^k$  ισχύει  $A^k x = \lambda^k x$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$ .
- 8) Αν  $\lambda, x$  είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$ , τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα  $A^{-k}$  είναι  $\lambda^{-k}$  και  $x$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$ .
- 9) Οι ιδιοτιμές ενός  $A \in M_n(\mathbb{F})$  Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.
- 10) Αν  $A$  είναι θετικά ορισμένος, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί, ενώ αν είναι μη-αρνητικά ορισμένος, τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του είναι ίση με μηδέν και οι υπόλοιπες είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$  με ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Δύο σημαντικά θεωρήματα, που αναδεικνύουν τη χρησιμότητα των χαρακτηριστικών μεγεθών στη μελέτη των προβλημάτων διατυπώνονται στη συνέχεια, η απόδειξη των οποίων μπορεί να αναζητηθεί σε οποιοδήποτε σύγγραμμα Γραμμικής Άλγεβρας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [5, 9, 12]. Τα θεωρήματα αφορούν οποιοδήποτε τετραγωνικό πίνακα (θεώρημα Schur) και μια ειδική κατηγορία πινάκων τους Ερμιτιανούς (συμμετρικούς), που παρουσιάζουν τον πίνακα  $A$  με μια ισοδύναμη απλοποιημένη μορφή.

**Θεώρημα 1.1 (Schur)**

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  υπάρχει ορθομοναδιαίος<sup>3</sup> πίνακας  $U \in M_n(\mathbb{F})$  και άνω τριγωνικός πίνακας  $T \in M_n(\mathbb{F})$  με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A = UTU^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

Αν για τον πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύει

$$A = P\Delta P^{-1},$$

---

<sup>3</sup> Βλέπε Ορισμό 1.7.

όπου  $\Delta$  ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του  $A$ , δηλαδή

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

και  $P$  ένας τετραγωνικός πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ , δηλαδή

$$P = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n),$$

τότε ο πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος**.

Αποδεικνύεται ότι ένας πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο πίνακας  $A$  έχει  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα [5]. Σημειώνεται ότι σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, συνεπώς αν ο πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{F})$  έχει  $n$  διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε είναι διαγωνοποιήσιμος. Σε περίπτωση όπου οι ιδιοτιμές έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από 1, δεν υπάρχει αντίστοιχη πρόταση ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ιδιοτιμή, γεγονός που δεν εγγυάται την ύπαρξη τετραγωνικού και αντιστρέψιμου πίνακα  $P$  που να διαγωνοποιεί τον  $A$ .

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας  $A$  είναι Ερμιτιανός (συμμετρικός) το **φασματικό θεώρημα** εξασφαλίζει την ύπαρξη καθώς και την αντιστρεψιμότητα του  $P$ , ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα των πραγματικών<sup>4</sup> ιδιοτιμών του  $A$ .

### Θεώρημα 1.2 (φασματικό θεώρημα)

Για κάθε Ερμιτιανό (συμμετρικό) πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{F})$  υπάρχει ορθομοναδιαίος<sup>3</sup> (ορθογώνιος) πίνακας  $U \in M_n(\mathbb{F})$  και πραγματικός διαγώνιος πίνακας  $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$  με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A = U\Delta U^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

<sup>4</sup> Βλέπε ιδιότητα 9, Πρότασης 1.4.

=====

Ο ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας  $U$ , που αναφέρεται στο παραπάνω θεώρημα, κατασκευάζεται από τον  $P$ , δηλαδή έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  και επιπλέον στα διανύσματα-στήλες του εφαρμόζεται η μέθοδος ορθοκανονικοποίησης, γνωστή ως μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt, προκειμένου να προκύψει ορθομοναδιαίος (ορθογώνιος) πίνακας.

### 1.2.3 Εντοπισμός ιδοτιμών Ερμιτιανών πινάκων

Εκτός από τη δυνατότητα διαγωνοποίησης των Ερμιτιανών πινάκων υπάρχουν και ορισμένες χρήσιμες πληροφορίες που διατυπώνονται για το άνω και κάτω φράγμα των ιδιοτιμών του πίνακα. Επειδή οι ιδιοτιμές ενός  $A \in M_n(\mathbb{R})$  Ερμιτιανού (συμμετρικού) είναι πραγματικοί αριθμοί, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν την ακόλουθη διάταξη  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Εφαρμόζοντας το θεώρημα Cauchy [11] και τη γενίκευσή του προκύπτει η σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών του Ερμιτιανού πίνακα  $A$  και ενός υποπίνακά του, σχέσεις οι οποίες συνοψίζονται στην επόμενη πρόταση και αποδεικνύονται (βλέπε [9, Theorem 4.3.15] και [22]).

#### Πρόταση 1.5

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ένας Ερμιτιανός πίνακας με  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  και  $B$  ένας κύριος υποπίνακας του  $A$  με  $\text{rank}(B) = n-1$  και ιδιοτιμές  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$ . Για τις ιδιοτιμές των πινάκων  $A, B$  ισχύει

$$\lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq \lambda_n. \quad (1.5)$$

Αν ο κύριος υποπίνακας  $B$  έχει  $\text{rank}(B) = n-k$ , τότε για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n-k$ , ισχύει

$$\lambda_i \leq b_i \leq \lambda_{k+i}. \quad (1.6)$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας  $A$  δεν είναι τετραγωνικός, έστω  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  με  $m \geq n$  και  $\text{rank}(A) = n$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **ιδιάζουσα ανάλυση** του  $A$ , γνωστή ως singular value decomposition (s.v.d.) και να εφαρμόσουμε τις πληροφορίες της Πρότασης 1.5 για τον πίνακα  $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$ . Πράγματι, επειδή

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A,$$

ο πίνακας  $A^T A$  είναι συμμετρικός, συνεπώς ισχύει γι' αυτόν το φασματικό θεώρημα (Θεώρημα 1.2), δηλαδή υπάρχει πάντα ορθογώνιος πίνακας  $U_{A^T A} \in M_n$  που διαγωνοποιεί τον  $A^T A$  στη μορφή

$$A^T A = U_{A^T A} \Delta_{A^T A} U_{A^T A}^*$$

με

$$\Delta_{A^T A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \sigma(A^T A)$ . Επιπλέον επειδή για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$  ισχύει

$$x^T A^T A x = (Ax)^T Ax \geq 0,$$

είναι φανερό ότι  $A^T A$  είναι θετικά (ημι-)ορισμένος, οπότε οι ιδιοτιμές του είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί (βλέπε ιδιότητα 10, Πρόταση 1.4), συνεπώς ισχύει  $\lambda_n = \rho(A^T A)$  και  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Αν  $B$  είναι υποπίνακας του  $A$ , που προκύπτει από τη διαγραφή της τελευταίας στήλης του  $A$ , έχει  $\text{rank}(B) = n - 1$  και ισχύει  $B^T B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ . Ο τελευταίος πίνακας είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος και από την κατασκευή του είναι κύριος υποπίνακας του  $A^T A$ . Αν  $b_i \in \sigma(B^T B)$  με  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$ , σύμφωνα με το πρώτο τμήμα της Πρότασης 1.5 (προαναφερθέν θεώρημα Cauchy) ισχύει η σχέση (1.5), δηλαδή,

$$0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq \rho(A^T A).$$

Αν  $C$  είναι υποπίνακας του  $A$ , που προκύπτει από τη διαγραφή των  $k$  τελευταίων στηλών του  $A$ , τότε  $C^T C \in M_{n-k}(\mathbb{R})$  είναι συμμετρικός πίνακας τάξης  $n - k$  με ιδιοτιμές  $0 < c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{n-k}$ , οι οποίες είναι θετικοί αριθμοί.

Για τις ιδιοτιμές των πινάκων  $A^T A, C^T C$  εφαρμόζεται το δεύτερο τμήμα της Πρότασης 1.5 (γενίκευση του Cauchy), δηλαδή από (1.6) ισχύει η ανισότητα,

$$\lambda_i \leq c_i \leq \lambda_{k+i} \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n - k. \quad (1.7)$$

Μία γενίκευση του θεωρήματος Cauchy αποτελεί η διαγραφή οποιασδήποτε στήλης του  $A$ , αρκεί να χρησιμοποιήσουμε έναν κατάλληλο πίνακα μετάθεσης  $P$  και να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη. Επιπλέον, αν διαγράψουμε μία γραμμή αντί για στήλη, τα συμπεράσματα είναι ίδια, αρκεί στην απόδειξη να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα  $A^T$  αντί  $A$ . Αυτό διατυπώνεται στο επόμενο θεώρημα και παρουσιάζεται και στο παράδειγμα που ακολουθεί.

---



---

**Πρόταση 1.6**

Έστω ένας πίνακας  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  με  $m \geq n$ .

i) Αν  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \equiv \rho(A^T A)$  οι ιδιοτιμές του  $A^T A$  και  $B$  είναι ο πίνακας που δημιουργείται με τη διαγραφή μιας οποιασδήποτε στήλης του  $A$  και  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$  οι ιδιοτιμές του  $B^T B$ , τότε ισχύει

$$0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq \rho(A^T A). \quad (1.8)$$

ii) Αν  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \equiv \rho(AA^T)$  οι ιδιοτιμές του  $AA^T$  και  $B$  είναι ο πίνακας που δημιουργείται με τη διαγραφή μιας οποιασδήποτε γραμμής του  $A$  και  $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{m-1}$  οι ιδιοτιμές του  $BB^T$ , τότε ισχύει

$$0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{m-1} \leq \rho(AA^T). \quad (1.9)$$

**Παράδειγμα 1.4**

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  με βαθμό  $\text{rank}(A) = 4$ .

Ο  $4 \times 4$  πίνακας  $A^T A = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 28 & 11 \\ 25 & 74 & 42 & 24 \\ 28 & 42 & 49 & 21 \\ 11 & 24 & 21 & 30 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 5.4785, \lambda_2 = 18.8128, \lambda_3 = 21.8976, \lambda_4 = 130.8112\}.$$

➤ Έστω  $B_1$  ο πίνακας που προκύπτει μετά τη διαγραφή της τελευταίας ( $4^{\text{ης}}$ ) στήλης του  $A$ :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cancel{3} \\ 3 & 1 & 5 & \cancel{0} \\ 0 & 4 & 2 & \cancel{1} \\ 3 & 2 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 1 & \cancel{4} \\ 2 & 7 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας  $B_1^T B_1 = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 28 \\ 25 & 74 & 42 \\ 28 & 42 & 49 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(B_1^T B_1) = \{b_1 = 5.7161, b_2 = 21.7249, b_3 = 119.559\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει  $\lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \lambda_3 \leq b_3 \leq \lambda_4$ , όπως αναμενόταν από τη σχέση (1.5) της Πρότασης 1.5.

➤ Αν διαγράψουμε τη 2<sup>η</sup> στήλη του  $A$  αντί για την τελευταία, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 & 3 \\ 3 & \cancel{1} & 5 & 0 \\ 0 & \cancel{4} & 2 & 1 \\ 3 & \cancel{2} & 1 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & 1 & 4 \\ 2 & \cancel{7} & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας  $B_2^T B_2 = \begin{pmatrix} 24 & 28 & 11 \\ 28 & 49 & 21 \\ 11 & 21 & 30 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(B_2^T B_2) = \{b_1 = 5.5229, b_2 = 18.842, b_3 = 78.6351\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει  $0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \lambda_3 \leq b_3 \leq \lambda_4$ , όπως αναμενόταν από τη σχέση (1.8) της Πρότασης 1.6.

➤ Έστω ο πίνακας που προκύπτει μετά τη διαγραφή της τελευταίας (4<sup>ης</sup>) και της προτελευταίας (3<sup>ης</sup>) στήλης του  $A$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} & \cancel{3} \\ 3 & 1 & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 2 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 2 & 7 & \cancel{3} & \cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

Ο τετραγωνικός πίνακας  $C^T C = \begin{pmatrix} 24 & 25 \\ 25 & 74 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(C^T C) = \{c_1 = 13.6447, c_2 = 84.3553\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν  $\lambda_1 \leq c_1 \leq \lambda_3$  και  $\lambda_2 \leq c_2 \leq \lambda_4$ , όπως αναμενόταν από τη σχέση (1.7).



---

➤ Ο  $6 \times 6$  πίνακας  $AA^T = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 17 & 10 & 16 & 31 \\ 20 & 35 & 14 & 16 & 8 & 28 \\ 17 & 14 & 21 & 10 & 6 & 36 \\ 10 & 16 & 10 & 14 & 4 & 23 \\ 16 & 8 & 6 & 4 & 18 & 13 \\ 31 & 28 & 36 & 23 & 13 & 66 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός και έχει

ιδιοτιμές

$$\sigma(AA^T) = \{\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 5.4785, \lambda_4 = 18.8128, \lambda_5 = 21.8976, \lambda_6 = 130.8112\}$$

Θεωρούμε ως υποπίνακα τον πίνακα που προκύπτει μετά την αφαίρεση της τελευταίας (6<sup>ης</sup>) γραμμής του  $A$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας  $BB^T = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 17 & 10 & 16 \\ 20 & 35 & 14 & 16 & 8 \\ 17 & 14 & 21 & 10 & 6 \\ 10 & 16 & 10 & 14 & 4 \\ 16 & 8 & 6 & 4 & 18 \end{pmatrix}$  είναι συμμετρικός και έχει

ιδιοτιμές

$$\sigma(BB^T) = \{b_1 = 0, b_2 = 5.1097, b_3 = 12.1557, b_4 = 18.8134, b_5 = 74.9212\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει  $0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \lambda_3 \leq b_3 \leq \lambda_4 \leq b_4 \leq \lambda_5 \leq b_5 \leq \lambda_6$  όπως αναμενόταν από τη σχέση (1.9) της Πρότασης 1.6.  $\diamond$

## 1.3 Νόρμες

### 1.3.1 Νόρμες διανυσμάτων

#### Ορισμός 1.19

**Νόρμα** ενός διανύσματος  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

i)  $\|x\| \geq 0$

ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$

iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , (τριγωνική ανισότητα).

Για το διάνυσμα  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ , όπου  $x_i \in \mathbb{R}$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  αποδεικνύεται εύκολα ότι η έκφραση

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες του Ορισμού 1.20, οπότε ορίζει μια νόρμα στο χώρο  $\mathbb{R}^n$ , [13, 26].

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πιθανών νορμών για το  $x$ . Οι τρεις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες νόρμες είναι:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \quad (\text{νόρμα άπειρο}) \quad (1.10)$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{νόρμα ένα}) \quad (1.11)$$

$$\|x\|_E = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Ευκλείδεια νόρμα}) \quad (1.12)$$

---

---

**Παράδειγμα 1.5**

Έστω το διάνυσμα  $x = (1 \ 2 \ -1 \ 3)$ . Σύμφωνα με (1.10)-(1.12) οι αντίστοιχες νόρμες  $\|x\|_1$ ,  $\|x\|_2$  και  $\|x\|_\infty$  είναι:

$$\|x\|_1 = |1| + |2| + |-1| + |3| = 7$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |2|^2 + |-1|^2 + |3|^2} = \sqrt{1 + 4 + 1 + 9} = \sqrt{15}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-1|, |3|\} = \max\{1, 2, 1, 3\} = 3$$

◇

---



---

### 1.3.2 Νόρμες πινάκων

#### Ορισμός 1.20

**Νόρμα** ενός τετραγωνικού **πίνακα**  $A \in M_n(\mathbb{F})$  είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\| : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

i)  $\|A\| \geq 0$

ii)  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

iii)  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{F}$

iv)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ , για κάθε  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

v)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , για κάθε  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$ . Κάθε μία από τις παραπάνω νόρμες διανυσμάτων (1.10), (1.11) και (1.12) παράγει μια αντίστοιχη νόρμα για τον πίνακα  $A$ :

$$\| \| A \| \|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{ή} \quad \| A \|_{\Gamma} \quad (\text{νόρμα γραμμής}) \quad (1.13)$$

$$\| \| A \| \|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{ή} \quad \| A \|_{\Sigma} \quad (\text{νόρμα στήλης}) \quad (1.14)$$

$$\| \| A \| \|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (\text{Ευκλείδεια νόρμα}) \quad (1.15)$$

Επίσης υπάρχει και μια εξίσου σημαντική νόρμα πίνακα, η οποία όμως δεν προκύπτει από κάποια νόρμα διανύσματος. Αυτή είναι

$$\| \| A \| \|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}, \quad (1.16)$$

όπου  $\rho(A^T A)$  είναι η φασματική ακτίνα (βλέπε (1.3)) του συμμετρικού πίνακα  $A^T A$ .

---

**Παράδειγμα 1.6**

Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , για τον οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τις

παραγόμενες νόρμες  $\|A\|_\infty$ ,  $\|A\|_1$  και  $\|A\|_E$ .

➤ Σύμφωνα με τον τύπο (1.13), ο υπολογισμός της  $\|A\|_\infty$  γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{c_i\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} \\ &= \max\{|a_{11} + a_{12} + a_{13}|, |a_{21} + a_{22} + a_{23}|, |a_{31} + a_{32} + a_{33}|\} \\ &= \max\{|1+1+2|, |0+2+0|, |1+2+1|\} = \max\{4, 2, 4\} = 4 \end{aligned}$$

όπου  $c_i = \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|$ , με  $i = 1, 2, 3$ .

➤ Σύμφωνα με τον τύπο (1.14), ο υπολογισμός της  $\|A\|_1$  γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{b_j\} = \max\{b_1, b_2, b_3\} = \\ &= \max\{|a_{11} + a_{21} + a_{31}|, |a_{12} + a_{22} + a_{32}|, |a_{13} + a_{23} + a_{33}|\} = \\ &= \max\{|1+0+1|, |1+2+2|, |2+0+1|\} = \max\{2, 5, 3\} = 5 \end{aligned}$$

όπου  $b_j = \sum_{i=1}^3 |a_{ij}|$ , με  $j = 1, 2, 3$ .

➤ Για τον υπολογισμό του  $\|A\|_E$  χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.15) έχουμε:

$$\|A\|_E = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{16} = 4$$

➤ Τέλος για τον υπολογισμό της  $\|A\|_2$ , σύμφωνα με τον (1.16) θα χρησιμοποιήσουμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα  $A^T A$ .

Από τον ανάστροφο πίνακα  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  προκύπτει

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα  $A^T A$  είναι

$$\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 0.1073, \lambda_2 = 2.8621, \lambda_3 = 13.0306\}.$$

=====

Επομένως ισχύει

$$\rho(A^T A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{0.1073, 2.8621, 13.0306\} = 13.0306.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο (1.16) έχουμε:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{13.0306} = 3.6098. \quad \diamond$$

---

### 1.3.3 Ιδιότητες νορμών

Για κάθε πίνακα  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- 1)  $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=\|y\|_2=1} \{y^*Ax\}$ .
- 2)  $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \|A^T\|_2$ .
- 3)  $\|A\|_2^2 = \|A^*A\|_2$ .
- 4) Αν  $U, V$  δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες, τότε  $\|A\|_2 = \|U^*AV\|_2$ .
- 5)  $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$ .
- 6)  $\rho(A) = \sqrt[k]{\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|}$
- 7)  $\rho(A) \leq \|A\|$ , για κάθε νόρμα πίνακα που προέρχεται από  $\|\cdot\|$
- 8)  $\rho(A) = \|A\|_2$ , αν ο  $A$  είναι συμμετρικός.
- 9) Αν  $|A| \leq |B|$ , τότε  $\|A\|_2 \leq \|B\|_2$ , για κάθε νόρμα πίνακα.
- 10)  $\|A\|_2 = \| |A| \|_2$ , για κάθε νόρμα πίνακα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Θεωρία Perron-Frobenius

Μη-αρνητικοί και θετικοί πίνακες εμφανίζονται κατά την αναπαράσταση και μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Η επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη γενικότερη θεωρία Πινάκων, γεγονός που μας επιτρέπει να αντλήσουμε άμεσα ορισμένες ιδιότητες για τους πίνακες αυτούς από την εφαρμογή του Ορισμού 1.2 και τις ιδιότητές τους, που διατυπώθηκαν στις Προτάσεις 1.2 και 1.3. Ωστόσο η θεωρία της φασματικής ανάλυσης δίνει σημαντικότερες πληροφορίες για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων, συνήθως συμβάλει στην απλοποίησή τους και επιταχύνει τη λύση τους. Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε ιδιότητες που σχετίζονται με τη φασματική ακτίνα των πινάκων αυτών.

#### 2.1 Φράγματα φασματικής ακτίνας μη-αρνητικών πινάκων

Η επόμενη πρόταση δίνει την πληροφορία ότι όταν τα στοιχεία ενός πίνακα  $B$  είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις (ίδια γραμμή και στήλη) στον πίνακα  $|A| = (|a_{ij}|)$ , (υπενθυμίζουμε ότι  $|A| \geq 0$ , σχόλια του Ορισμού 1.3), η φασματική ακτίνα του  $B$ ,  $\rho(B)$ , είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη φασματική ακτίνα του  $A$ . Επίσης η  $\rho(A)$  είναι μικρότερη από τη φασματική ακτίνα του  $|A|$  (στην περίπτωση που ο πίνακας  $A$  έχει αρνητικά στοιχεία) ή ίση (στην περίπτωση που όλα τα στοιχεία του  $A$  είναι μηδέν ή θετικά).



---

**Πρόταση 2.1**

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{F})$  και  $B \in M_n(\mathbb{R})$  με  $B \geq 0$ . Αν ισχύει  $|A| \leq B$ , τότε

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

**Απόδειξη :**

Από τις ιδιότητες (iii) και (v) της Πρότασης 1.3 μπορούμε να γράψουμε

$$|A^k| \leq |A|^k \leq B^k, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (9)-(10) στις νόρμες πίνακα (παράγραφος 1.3.3) η παραπάνω ανισότητα γράφεται

$$\| \| A^k \| \|_2 \leq \| \| |A|^k \| \|_2 \leq \| \| B^k \| \|_2$$

και

$$\sqrt[k]{\| \| A^k \| \|_2} \leq \sqrt[k]{\| \| |A|^k \| \|_2} \leq \sqrt[k]{\| \| B^k \| \|_2} \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Παίρνοντας όρια στην (2.1) καθώς  $k \rightarrow \infty$  και συνδυάζοντας με την ιδιότητα (6) της παραγράφου 1.3.3, καταλήγουμε

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B). \quad \square$$

Επειδή για  $A \geq 0 \Rightarrow |A| = A$ , άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.1 είναι η ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει συμπέρασμα για τη διάταξη των φασματικών ακτίνων δύο μη-αρνητικών πινάκων  $A, B$ , που σχετίζονται με τη διάταξη των στοιχείων των αντίστοιχων πινάκων.

**Πρόταση 2.2**

Έστω  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  με  $0 \leq A \leq B$ . Τότε  $\rho(A) \leq \rho(B)$ .

**Παράδειγμα 2.1**

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 1.1, ισχύει  $0 \leq B < A$  οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 2.2 και αναμένεται να ισχύει  $\rho(B) < \rho(A)$ . Πράγματι, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται από την ισότητα

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 2 = 0,$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι  $\lambda_1 = -0.2749$  και  $\lambda_2 = 7.2749$  κατά συνέπεια η φασματική ακτίνα του  $A$  είναι:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2\} = \max\{|-0.2749|, 7.2749\} = 7.2749.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  υπολογίζονται από

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0,$$

άρα οι ιδιοτιμές του  $B$  είναι  $\lambda_1 = -2$  και  $\lambda_2 = 3$ . Συνεπώς η φασματική ακτίνα του  $B$  είναι:

$$\rho(B) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2\} = \max\{|-2|, 3\} = 3$$

Οπότε από  $0 \leq B < A$  καταλήγουμε  $\rho(B) \leq \rho(A)$ , συνεπώς το συμπέρασμα της Πρότασης 2.2 επαληθεύεται.  $\diamond$

Η σχέση που συνδέει τη φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα με τον κύριο υποπίνακά του δίνεται στην επόμενη πρόταση και μάλιστα παρουσιάζεται το πρώτο κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα, το οποίο σχετίζεται με τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.

### Πρόταση 2.3

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$ . Αν  $\tilde{A}$  είναι ένας οποιοσδήποτε κύριος υποπίνακας του  $A$ , τότε  $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$ . Ειδικότερα,  $\max_{1 \leq i \leq n} \{a_{ii}\} \leq \rho(A)$ .

#### Απόδειξη:

Εστω  $\tilde{A}$  ένας  $r \times r$  κύριος υποπίνακας του  $A$  με  $1 \leq r \leq n$ , (ο ορισμός του κύριου υποπίνακα δίνεται στον Ορισμό 1.1). Ορίζουμε ως πίνακα  $\hat{A}$  έναν  $n \times n$  πίνακα ο οποίος έχει δημιουργηθεί τοποθετώντας τα στοιχεία του  $\tilde{A}$  στις αρχικές τους θέσεις (ως στοιχεία του  $A$ ) και τοποθετώντας μηδενικά στις υπόλοιπες. Τότε θα ισχύει  $\rho(\tilde{A}) = \rho(\hat{A})$  και  $0 \leq \hat{A} \leq A$ , επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 2.2 ισχύει

$$\rho(\tilde{A}) = \rho(\hat{A}) \leq \rho(A).$$

$\square$

---

**Παράδειγμα 2.2**

Έστω ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ . Κύριος υποπίνακας είναι  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ , όταν  $r = 2$ .

Ο πίνακας  $\tilde{A}$  ως άνω τριγωνικός έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1 = 1$  και  $\lambda_2 = 4$ , (ιδιότητα (1),

Πρόταση 1.4), καθώς και  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  έχει τις  $\lambda_1, \lambda_2$  και την  $\lambda_3 = 0$ . Προφανώς

οι φασματικές ακτίνες είναι  $\rho(\tilde{A}) = \rho(\hat{A}) = 4$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1.4853$  και  $\lambda_3 = 15.4853$ , οπότε  $\rho(A) = 15.4853$ . Είναι φανερό ότι επαληθεύεται  $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$  και επιπλέον ότι ισχύει

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{a_{ii}\} = \max\{1, 4, 7\} = 7 \leq 15.4853 = \rho(A). \quad \diamond$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα ταυτίζεται με κάποια από τις γνωστές νόρμες των πινάκων, ιδιότητα που περιγράφεται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.4**

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$ .

i) Αν τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζονται στον ίδιο σταθερό αριθμό,

$$\text{τότε } \rho(A) = \| \| A \| \|_{\infty}.$$

ii) Αν τα στοιχεία κάθε στήλης αθροίζονται στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε

$$\rho(A) = \| \| A \| \|_1.$$

**Απόδειξη:**

i) Από την ιδιότητα (7) στις νόρμες πίνακα (παράγραφος 1.3.3) γνωρίζουμε ότι ισχύει  $\rho(A) \leq \| \| A \| \|$  για κάθε νόρμα πίνακα, αλλά αν τα αθροίσματα κατά γραμμή είναι ένας σταθερός αριθμός, τότε το διάνυσμα  $x = [1 \ \dots \ 1]^T$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή  $\| \| A \| \|_{\infty}$ , επομένως  $\rho(A) = \| \| A \| \|_{\infty}$ .

ii) Ανάλογα με την απόδειξη στο (i), αν τα αθροίσματα κατά στήλη είναι ένας σταθερός αριθμός, τότε  $x = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A^T$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή  $\| \| A \| \|_1$ , επομένως  $\rho(A) = \| \| A \| \|_1$ .  $\square$

### Παράδειγμα 2.3

Έστω οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

➤ Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  είναι μη-αρνητικός και ότι τα

στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στον αριθμό 4. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-1] + 1 - (3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-5\lambda+\lambda^2) - 2 + \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)[(\lambda^2 - 5\lambda + 5) - 1] = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

Άρα  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  και  $\lambda_3 = 4$ . Συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(A) = \max \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \} = \max \{ 1, 2, 4 \} = 4.$$

Αν υπολογίσουμε  $\| \| A \| \|_\infty$  χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.13) έχουμε:

$$\begin{aligned} \| \| A \| \|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{c_i\} = \max \{c_1, c_2, c_3\} \\ &= \max \{ |a_{11} + a_{12} + a_{13}|, |a_{21} + a_{22} + a_{23}|, |a_{31} + a_{32} + a_{33}| \} \\ &= \max \{ 4, 4, 4 \} = 4 \end{aligned}$$

Προφανώς  $\rho(A) = \| \| A \| \|_\infty = 4$  επαληθεύοντας έτσι το (i) της Πρότασης 2.4.

=====

➤ Επίσης ο πίνακας  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  είναι μη-αρνητικός και τα στοιχεία κάθε στήλης

αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στο 3. Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(B - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

Οι ιδιοτιμές του  $B$  είναι :  $\lambda_1 = -i$ ,  $\lambda_2 = i$  και  $\lambda_3 = 3$ . Συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(B) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} = \max\{|i|, |-i|, 3\} = \max\{\sqrt{0^2+1^2}, \sqrt{0^2+(-1)^2}, 3\} = 3$$

Αν υπολογίσουμε  $\|B\|_1$  χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.14) έχουμε:

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 |b_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{b_j\} = \max\{b_1, b_2, b_3\}$$

$$= \max\{|b_{11} + b_{21} + b_{31}|, |b_{12} + b_{22} + b_{32}|, |b_{13} + b_{23} + b_{33}|\} = \max\{3, 3, 3\} = 3$$

Προφανώς επαληθεύεται το (ii) της Πρότασης 2.4, επειδή ισχύει  $\rho(B) = \|B\|_1 = 3$ .  $\diamond$

Στην Πρόταση 2.3 δόθηκε ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα, φράγμα το οποίο εξαρτάται από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα, στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζεται ένα διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η φασματική ακτίνα, τα άκρα του διαστήματος είναι τα δύο φράγματά της, άνω και κάτω, και εξαρτώνται από τα στοιχεία ενός μη-αρνητικού πίνακα.

### Θεώρημα 2.1

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας μη-αρνητικός πίνακας ( $A \geq 0$ ). Τότε ισχύουν:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \quad (2.2)$$

και

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \quad (2.3)$$

=====

**Απόδειξη :**

Θεωρούμε  $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$  και κατασκευάζουμε έναν καινούργιο πίνακα  $B$  τέτοιον

ώστε  $0 \leq B \leq A$  με  $\sum_{j=1}^n b_{ij} \equiv \alpha$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Επομένως, αν  $\alpha = 0$ , τότε

$A = 0$ , συνεπώς και  $B = 0$ , ενώ αν  $\alpha > 0$  μπορούμε να θέσουμε  $b_{ij} = \alpha a_{ij} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$ .

Από το πρώτο μέρος της Πρότασης 2.4 έχουμε  $\rho(B) = \alpha$  και εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.2 έχουμε:

$$\rho(B) \leq \rho(A) \Rightarrow \alpha \leq \rho(A) \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \quad (2.4)$$

Θεωρούμε  $\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$  και κατασκευάζουμε έναν καινούργιο πίνακα  $C$  τέτοιον

ώστε  $0 \leq A \leq C$  με  $\sum_{j=1}^n c_{ij} \equiv \gamma$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Επομένως, αν  $\gamma = 0$ , τότε

$A = C = 0$ , ενώ αν  $\gamma > 0$  μπορούμε να θέσουμε  $c_{ij} = \gamma a_{ij} \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$ .

Από την Πρόταση 2.4 έχουμε  $\rho(C) = \gamma$  και συνδυάζοντας με την Πρόταση 2.2 έχουμε:

$$\rho(A) \leq \rho(C) \Rightarrow \rho(A) \leq \gamma \Rightarrow \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \quad (2.5)$$

Από τις σχέσεις (2.4) και (2.5) προκύπτει η (2.2) επειδή

$$\rho(B) \leq \rho(A) \leq \rho(C) \Rightarrow \alpha \leq \rho(A) \leq \gamma \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}.$$

Όμοια για να αποδείξουμε την (2.3) θεωρούμε  $\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\}$  και κατασκευάζουμε

έναν καινούργιο πίνακα  $D$  τέτοιον ώστε  $0 \leq D \leq A$  και  $\sum_{i=1}^n d_{ij} \equiv \delta$  για κάθε

$j = 1, 2, \dots, n$ . Επομένως, αν  $\delta = 0$  συμπεραίνεται  $D = 0$ , ενώ αν  $\delta > 0$  μπορούμε να

θέσουμε  $d_{ij} = \delta a_{ij} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$ . Από το δεύτερο μέρος της Πρότασης 2.4 έχουμε

$\rho(D) = \delta$  και συνδυάζοντας με την Πρόταση 2.2 προκύπτει :

$$\rho(D) \leq \rho(A) \Rightarrow \delta \leq \rho(A) \Rightarrow \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \quad (2.6)$$

Έστω  $\varepsilon = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\}$  και κατασκευάζουμε έναν καινούργιο πίνακα  $E$  τέτοιον ώστε

$0 \leq A \leq E$  και  $\sum_{i=1}^n e_{ij} \equiv \varepsilon$  για κάθε  $j = 1, 2, \dots, n$ . Επομένως, αν  $\varepsilon = 0 \Rightarrow A = E = 0$ ,

ενώ αν  $\varepsilon > 0$  μπορούμε να θέσουμε  $e_{ij} = \varepsilon a_{ij} \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$ . Από την Πρόταση 2.4 έχουμε

$\rho(E) = \varepsilon$  και συνδυάζοντας με την Πρόταση 2.2 προκύπτει :

$$\rho(A) \leq \rho(E) \Rightarrow \rho(A) \leq \varepsilon \Rightarrow \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \quad (2.7)$$

Τελικά η ανισότητα (2.3) προκύπτει από το συνδυασμό των (2.6) και (2.7), επειδή

$$\rho(D) \leq \rho(A) \leq \rho(E) \Rightarrow \delta \leq \rho(A) \leq \varepsilon \Rightarrow \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\}. \quad \square$$

#### Παράδειγμα 2.4

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες  $\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \right\}$  και  $\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \right\}$ .

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \right\} = \min \{ a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33} \} = \min \{ 3, 4, 2 \} = 2$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \right\} = \max \{ a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33} \} = \max \{ 3, 4, 2 \} = 4$$

Επομένως σύμφωνα με την ανισότητα (2.2) του Θεωρήματος 2.1 για τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  θα πρέπει να ισχύει  $2 \leq \rho(A) \leq 4$ . Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 7 = 0$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι :  $\lambda_1 = 0.0914 + 1.5737i$ ,  $\lambda_2 = 0.0914 - 1.5737i$ <sup>1</sup> και  $\lambda_3 = 2.8171$ . Επομένως η φασματική ακτίνα υπολογίζεται ότι είναι

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} \\ &= \max\{\sqrt{0.0914^2 + 1.5737^2}, \sqrt{0.0914^2 + (-1.5737)^2}, 2.8171\} \\ &= \max\{1.5764, 1.5764, 2.8171\} = 2.8171, \end{aligned}$$

αποτέλεσμα που επαληθεύει το Θεώρημα 2.1, καθώς  $2 < 2.8171 < 4$ .

Επίσης, για τον ίδιο πίνακα προκειμένου να επαληθεύσουμε τη (2.3) υπολογίζουμε τις

ποσότητες  $\min_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \right\}$  και  $\max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \right\}$  :

$$\min_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \right\} = \min \{a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33}\} = \min \{4, 2, 3\} = 2$$

$$\max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \right\} = \max \{a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33}\} = \max \{4, 2, 3\} = 4$$

Πράγματι ισχύει  $2 \leq \rho(A) \leq 4$ . ◇

### Πόρισμα 2.1

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας στοχαστικός πίνακας. Τότε ισχύει :

$$\rho(A) = 1 \tag{2.8}$$

#### Απόδειξη:

Όταν  $A$  είναι ένας κατά γραμμή στοχαστικός πίνακας (Ορισμός 1.10), τότε  $A \geq 0$  και ισχύει:

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = \dots = a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} = 1,$$

$$\text{από όπου προκύπτει } \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = 1.$$

Άρα από (2.2) του Θεωρήματος 2.1 έχουμε  $1 \leq \rho(A) \leq 1 \Rightarrow \rho(A) = 1$ .

Όταν  $A$  είναι κατά στήλη στοχαστικός πίνακας ισχύει:

$$a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} = a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} = \dots = a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} = 1,$$

$$\text{άρα } \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} = 1, \text{ επομένως από (2.3) έχουμε}$$

$$1 \leq \rho(A) \leq 1 \Rightarrow \rho(A) = 1.$$

---

<sup>1</sup> Όταν ο πίνακας έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ως ρίζα ένα μιγαδικό αριθμό  $z$ , σίγουρα θα υπάρχει ως ρίζα (ιδιοτιμή) και ο συζυγής του  $\bar{z}$ .



Προφανώς για έναν πίνακα διπλά στοχαστικό ισχύει

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = \min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} = 1,$$

επομένως  $1 \leq \rho(A) \leq 1 \Rightarrow \rho(A) = 1$ . Συνεπώς για κάθε περίπτωση στοχαστικού πίνακα η ισότητα (2.8) ισχύει.  $\square$

Επειδή τα φράγματα των ανισοτήτων (2.2)-(2.3) στο Θεώρημα 2.1 εξαρτώνται από τα στοιχεία του πίνακα, αναρωτιόμαστε αν οι μη-αρνητικοί πίνακες πρέπει να έχουν κάποια συγκεκριμένη μορφή (ως προς τα μηδέν) ώστε το κάτω φράγμα των ανισοτήτων (2.2)-(2.3) να είναι θετικός αριθμός, ή μήπως το κάτω φράγμα εξαρτάται μόνο από το φάσμα του πίνακα και δεν μπορεί να αντλείται η πληροφορία από τη μορφή του πίνακα; Γιατί είναι φανερό ότι, όπως παρουσιάζεται και στο επόμενο παράδειγμα, αν οι πίνακες δεν έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή η φασματική ακτίνα τους είναι διάφορη του μηδενός, στην περίπτωση όπου οι πίνακες έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή παρατηρούμε ότι άλλοι έχουν φασματική ακτίνα διάφορη του μηδενός και άλλοι όχι.

### Παράδειγμα 2.5

$$\text{Έστω } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

➤ Παρατηρούμε ότι  $A > 0$  και εύκολα διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα της κάθε στήλης του  $A$  ισούται με το σταθερό αριθμό 3, επομένως σύμφωνα με το (ii) της Πρότασης 2.4 η φασματική ακτίνα είναι  $\rho(A) = 3$ .

Επιπλέον οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{15}{4}\lambda - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 3$$

=====

Άρα, το φάσμα του πίνακα  $A$  αποτελείται από τρεις διακεκριμένες μη μηδενικές τιμές και είναι  $\sigma(A) = \{\lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 3\}$ , από όπου επιβεβαιώνεται ότι η φασματική ακτίνα είναι ο θετικός αριθμός  $\rho(A) = 3$ .

➤ Για το μη-αρνητικό πίνακα  $B$  ισχύει :  $\min_{1 \leq i \leq 3} \{\sum_{j=1}^3 b_{ij}\} = 1, \max_{1 \leq i \leq 3} \{\sum_{j=1}^3 b_{ij}\} = 2$ . Επομένως,

σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε  $1 \leq \rho(B) \leq 2$ .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $B$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης

$\det(B - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 (-\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα  $B$  είναι  $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$ , από όπου προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα είναι  $\rho(B) = 1$ . Επιπλέον η μία ιδιοτιμή είναι διπλή, όλες δε οι ιδιοτιμές βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας ίσης με τη φασματική ακτίνα  $\rho(B)$ .

➤ Για τον πίνακα  $C$  ισχύει :  $\min_{1 \leq i \leq 3} \{\sum_{j=1}^3 c_{ij}\} = 1, \max_{1 \leq i \leq 3} \{\sum_{j=1}^3 c_{ij}\} = 3$ . Επομένως, σύμφωνα με

το Θεώρημα 2.1 έχουμε  $1 \leq \rho(C) \leq 3$ .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $C$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης

$\det(C - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα  $C$  αποτελείται από τρεις διακεκριμένες τιμές και είναι  $\sigma(C) = \{-2, 0, 2\}$ , από όπου προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα ισούται με  $\rho(C) = 2$ . Εδώ η μία ιδιοτιμή βρίσκεται στην αρχή των αξόνων  $(0,0)$ , και οι άλλες δύο  $\lambda_1, \lambda_3$  έχουν το ίδιο μέτρο με αυτό της φασματικής ακτίνας, άρα αυτές ανήκουν στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας ίσης με τη φασματική ακτίνα  $\rho(C)$ .

=====

➤ Για τον πίνακα  $D$  ισχύει :  $\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 d_{ij} \right\} = 0$ ,  $\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 d_{ij} \right\} = 1$ . Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε  $0 \leq \rho(D) \leq 1$ . Επιπλέον, ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, συνεπώς οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του (ιδιότητα (1), Πρόταση 1.4), άρα  $\sigma(D) = \{0, 0, 0\}$ , δηλαδή η φασματική ακτίνα είναι  $\rho(D) = 0$ , και μάλιστα το μηδέν είναι τριπλή ιδιοτιμή του πίνακα  $D$ .  $\diamond$

### Πρόταση 2.5

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Αν  $A \geq 0$  και  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ , τότε  $\rho(A) > 0$ .

#### Απόδειξη:

Υποθέτοντας ότι σε κάθε γραμμή  $i = 1, 2, \dots, n$  ισχύει  $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$  προφανώς το ελάχιστο όλων των γραμμών είναι θετικός αριθμός, οπότε συνδυάζοντας αυτό με το αριστερό τμήμα της ανίσωσης στην (2.2) προκύπτει  $\rho(A) > 0$ .  $\square$

### Πόρισμα 2.2

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

i) Αν  $A > 0$ , τότε  $\rho(A) > 0$ .

ii) Αν  $A$  είναι ανάγωγος και μη-αρνητικός ( $A \geq 0$ ), τότε  $\rho(A) > 0$ .

#### Απόδειξη :

i) Είναι φανερό ότι όταν  $A > 0$ , προφανώς ισχύει  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$  για κάθε γραμμή του  $A$ , οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.5 οι θετικοί πίνακες έχουν  $\rho(A) \neq 0$ .

ii) Αν υποθέσουμε ότι  $A$  είναι ανάγωγος, επειδή όλοι οι block πίνακες της διαμέρισης του ανάγωγου πίνακα είναι μη μηδενικοί πίνακες (Ορισμός 1.9) και επιπλέον  $A \geq 0$ , συμπεραίνουμε ότι για κάθε γραμμή ισχύει  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$ . Επομένως σύμφωνα με την Πρόταση 2.5 είναι  $\rho(A) > 0$ .  $\square$

=====

**Σχόλια:** Στο ερώτημα «για ποιους πίνακες ισχύει  $\rho(A) \neq 0$ » απαντούν οι υποθέσεις της Πρότασης 2.5 και του Πορίσματος 2.2, από όπου είναι φανερό ότι η απάντηση δε σχετίζεται με το αν το μηδέν υπάρχει στο φάσμα του πίνακα ή όχι, αλλά μόνο από τα στοιχεία του πίνακα. Οι πίνακες του Παραδείγματος 2.5 επαληθεύουν τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Συγκεκριμένα, ο πίνακας  $A$  είναι θετικός, επομένως από το (i) του Πορίσματος 2.2 ήταν αναμενόμενο να έχει  $\rho(A) > 0$ .

Οι μη-αρνητικοί πίνακες  $B, C$  ικανοποιούν την υπόθεση της Πρότασης 2.5, μια και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής τους είναι θετικός αριθμός, επομένως είναι αναμενόμενο η φασματική τους ακτίνα να είναι θετική. Εδώ σημειώστε ότι ο πίνακας  $B$  είναι αντιστρέψιμος και μη-ανάγωγος (επειδή  $(I + B)^2 \geq 0$ , οπότε από Πρόταση 1.1 είναι μη-ανάγωγος), ενώ ο πίνακας  $C$  είναι μη-αντιστρέψιμος και ανάγωγος.

Ο πίνακας  $D \geq 0$  δεν ικανοποιεί την υπόθεση της Πρότασης 2.5, διότι η τελευταία γραμμή έχει το άθροισμα των στοιχείων της ίσο με μηδέν, και επιπλέον  $B$  είναι μη-ανάγωγος πίνακας, γιατί έχει μηδενική γραμμή, (βλέπε σχόλια του Ορισμού 1.9), συνεπώς είναι αναμενόμενο ότι  $\rho(D) = 0$ .

Χρειάζεται να τονίσουμε ότι ένας  $A \geq 0$  και μη-ανάγωγος μπορεί να έχει  $\rho(A) \neq 0$ , αρκεί να ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.5, όπως συνέβη με τον πίνακα  $B$  του Παραδείγματος 2.5.

Το επόμενο θεώρημα, όπως και το Θεώρημα 2.1 παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού ενός διαστήματος στο οποίο κυμαίνεται η τιμή της φασματικής ακτίνας του  $A$ ,  $\rho(A)$ , σχετικά με τα στοιχεία ενός διανύσματος.

### Θεώρημα 2.2

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και  $A \geq 0$ . Τότε για κάθε θετικό διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$  έχουμε:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} \quad (2.9)$$

και

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \right\} \quad (2.10)$$

Κατά συνέπεια με τη βοήθεια ενός οποιουδήποτε θετικού διανύσματος  $x \in \mathbb{R}^n$  μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα στο οποίο ανήκει η φασματική ακτίνα, συνεπώς το άνω και το κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας εξαρτάται από τις συντεταγμένες του θετικού διανύσματος καθώς και από τα στοιχεία του πίνακα  $A \geq 0$ .

### Παράδειγμα 2.6

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  και το θετικό διάνυσμα  $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Για

να επαληθεύσουμε την ανίσωση (2.9) απαιτούνται οι ακόλουθοι υπολογισμοί, που σχετίζονται με τις γραμμές του πίνακα:

$$\begin{aligned} & \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{x_1} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \frac{1}{x_2} (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \frac{1}{x_3} (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{1}{3} (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4), \frac{1}{2} (0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4), \frac{1}{4} (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{20}{3}, 3, 1.75 \right\} = 1.75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{x_1} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \frac{1}{x_2} (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \frac{1}{x_3} (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{1}{3} (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4), \frac{1}{2} (0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4), \frac{1}{4} (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4) \right\} \\ &= \max \left\{ 6.\bar{6}, 3, 1.75 \right\} = 6.\bar{6} \end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 θα πρέπει να ισχύει  $1.75 \leq \rho(A) \leq 6.\bar{6}$ .

Για να επαληθεύσουμε την ανίσωση (2.10) απαιτούνται οι ακόλουθοι υπολογισμοί, που σχετίζονται με τις στήλες του πίνακα:

$$\begin{aligned}
& \min_{1 \leq j \leq 3} \left\{ x_j \sum_{i=1}^3 \frac{a_{ij}}{x_i} \right\} \\
&= \min \left\{ x_1 \left( \frac{a_{11}}{x_1} + \frac{a_{21}}{x_2} + \frac{a_{31}}{x_3} \right), x_2 \left( \frac{a_{12}}{x_1} + \frac{a_{22}}{x_2} + \frac{a_{32}}{x_3} \right), x_3 \left( \frac{a_{13}}{x_1} + \frac{a_{23}}{x_2} + \frac{a_{33}}{x_3} \right) \right\} \\
&= \min \left\{ 3 \left( \frac{2}{3} + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} \right), 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \right), 4 \left( \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} \right) \right\} \\
&= \min \left\{ 3 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right), 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), 4 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \min \left\{ 3 \frac{11}{12}, 2 \frac{4}{3}, 4 \frac{3}{2} \right\} = \min \{ 2.75, 2.\bar{6}, 6 \} = 2.\bar{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \right\} \\
&= \max \left\{ x_1 \left( \frac{a_{11}}{x_1} + \frac{a_{21}}{x_2} + \frac{a_{31}}{x_3} \right), x_2 \left( \frac{a_{12}}{x_1} + \frac{a_{22}}{x_2} + \frac{a_{32}}{x_3} \right), x_3 \left( \frac{a_{13}}{x_1} + \frac{a_{23}}{x_2} + \frac{a_{33}}{x_3} \right) \right\} \\
&= \max \left\{ 3 \left( \frac{2}{3} + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} \right), 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \right), 4 \left( \frac{3}{3} + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} \right) \right\} \\
&= \max \left\{ 3 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right), 2 \left( \frac{1}{3} + 1 \right), 4 \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= \max \left\{ 3 \frac{11}{12}, 2 \frac{4}{3}, 4 \frac{3}{2} \right\} = \max \{ 2.75, 2.\bar{6}, 6 \} = 6
\end{aligned}$$

Επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 θα πρέπει να ισχύει  $2.\bar{6} \leq \rho(A) \leq 6$ .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 0-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) + (3\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 6 = 0
\end{aligned}$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι:  $\lambda_1 = -1.5289$ ,  $\lambda_2 = 1.1674$  και  $\lambda_3 = 3.3615$ .

Επομένως η φασματική ακτίνα υπολογίζεται ότι είναι:

$$\rho(A) = \max \{ |\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3 \} = \max \{ 1.5289, 1.1674, 3.3615 \} = 3.3615$$

Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, επαληθεύεται η (2.9), επειδή τα αποτελέσματα των αρχικών υπολογισμών, που αναφέρονταν στις γραμμές ικανοποιούν

$$1.75 \leq 3.3615 \leq 6.\bar{6} \Rightarrow 1.75 \leq \rho(A) \leq 6.\bar{6}$$

καθώς και η (2.10) επαληθεύεται χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα που αναφέρονται στις στήλες, επειδή  $2.\bar{6} \leq 3.3615 \leq 6 \Rightarrow 2.\bar{6} \leq \rho(A) \leq 6$ .  $\diamond$

Η επόμενη πρόταση είναι σημαντική γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε δύο αριθμούς  $\alpha, \beta \geq 0$  ώστε  $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ , οι οποίοι θα είναι ουσιαστικά το διάστημα στο οποίο ανήκει η τιμή της φασματικής ακτίνας  $\rho(A)$ .

### Πρόταση 2.6

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$  και έστω  $x \in \mathbb{R}^n$  με  $x > 0$ .

Αν  $\alpha, \beta \geq 0$  είναι τέτοια ώστε  $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ , τότε  $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$ .

Αν  $\alpha x < Ax$ , τότε  $\alpha < \rho(A)$ .

Αν  $Ax < \beta x$ , τότε  $\rho(A) < \beta$ .

#### Απόδειξη:

Αν  $\alpha x \leq Ax$ , τότε  $\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}$ . Επίσης από το Θεώρημα 2.2 έχουμε ότι  $\alpha \leq \rho(A)$ . Αν  $\alpha x < Ax$  τότε υπάρχει κάποιο  $a' > \alpha$  τέτοιο ώστε  $a'x \leq Ax$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει  $\rho(A) \geq a' > \alpha$ , άρα και  $\rho(A) > \alpha$ .

Αν  $Ax \leq \beta x$ , τότε  $\beta \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}$ . Αν  $Ax < \beta x$  τότε υπάρχει κάποιο  $\beta' < \beta$  τέτοιο ώστε  $Ax < \beta'x$ . Συνεπώς ισχύει  $\rho(A) \leq \beta' < \beta$ , άρα και  $\rho(A) < \beta$ .  $\square$

### Παράδειγμα 2.7

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , το θετικό διάνυσμα  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

➤ Επιλέγουμε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $\alpha = 2$  και  $\beta = 5$ .

---


$$\text{Έχουμε } \alpha x = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ και } \beta x = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι:

$$Ax - \beta x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax - \beta x \leq 0 \Rightarrow Ax \leq \beta x,$$

$$\alpha x - Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha x - Ax \leq 0 \Rightarrow \alpha x \leq Ax.$$

Επομένως από τις δύο τελευταίες σχέσεις ισχύει  $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6 ισχύει  $2 \leq \rho(A) < 5$ .

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda) [(1-\lambda)^2 - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$  και  $\lambda_3 = 3$ .

Επομένως η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max \{1, 2, 3\} = 3.$$

➤ Αν είχαμε επιλέξει  $\alpha = 1$ , τότε είναι  $\alpha x = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , επομένως και

$$\alpha x - Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha x - Ax < 0 \Rightarrow \alpha x < Ax.$$

Άρα σύμφωνα με την Πρόταση έχουμε  $\alpha < \rho(A)$ , το οποίο όντως ισχύει.



=====

➤ Τέλος επιλέγοντας  $\beta = 6$  ισχύει  $\beta x = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ , επομένως και

$$Ax - \beta x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax - \beta x < 0 \Rightarrow Ax < \beta x. \text{ Σ' αυτήν την περίπτωση}$$

σύμφωνα με την παραπάνω Πρόταση έχουμε  $\rho(A) < \beta$ , το οποίο όντως ισχύει.  $\diamond$

Η επόμενη πρόταση επιτρέπει να εντοπίσουμε τη φασματική ακτίνα μέσω του αντίστοιχου *ιδιοδιανύσματος* της. Αυτό μπορεί να φανεί περίεργο, καθώς μπορεί κάποιος να αναρωτηθεί γιατί μπαίνουμε στον κόπο να υπολογίσουμε ιδιοδιάνυσμα και δεν υπολογίζουμε απευθείας τη φασματική ακτίνα. Η απάντηση θα δοθεί στην επόμενη παράγραφο, όπου η πρόταση είναι αναγκαία και δίνει την πληροφορία ότι όταν έχουμε ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα, αυτό αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα.

### Πρόταση 2.7

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$ . Αν ο πίνακας  $A$  έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα, τότε η αντίστοιχη ιδιοτιμή είναι η  $\rho(A)$ . Δηλαδή, αν  $Ax = \lambda x$  με  $x > 0$ , τότε  $\lambda = \rho(A)$ .

#### Απόδειξη :

Υποθέτουμε ότι για κάποια ιδιοτιμή  $\lambda, x$  ισχύει  $Ax = \lambda x$  με  $x > 0$ . Επειδή  $A \geq 0$ , και  $x > 0$  προφανώς ισχύει  $Ax \geq 0$ . Άρα και  $\lambda x \geq 0$ . Επειδή υποθέσαμε  $x > 0$ ,  $\lambda x \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$ . Η ισότητα  $Ax = \lambda x$  μπορεί να γραφεί  $\lambda x \leq Ax \leq \lambda x$ , όπου  $\lambda \geq 0$ . Συνεπώς εφαρμόζεται η Πρόταση 2.6, από όπου συμπεραίνεται ότι  $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$ , άρα  $\lambda = \rho(A)$ .  $\square$

### Παράδειγμα 2.8

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του  $A$  χρειάζεται να γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα. Οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$ , που είναι:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) + 2(2\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) - 4(1-\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι :

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ και } \lambda_3 = 5.$$

Επομένως η φασματική ακτίνα είναι :

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max \{1, 1, 5\} = 5.$$

Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  υπάρχει και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $x$ , που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης  $(A - \lambda_i I)x = 0$ . Έτσι έχουμε:

- Για  $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)x = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 & 2 \\ 0 & 3-(-1) & 2 \\ 2 & 2 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Επιλέγουμε  $x_2 = 1$ , οπότε για  $\lambda_1 = -1$ , το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- Για  $\lambda_2 = 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda_2 I)x = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 2 \\ 0 & 3-1 & 2 \\ 2 & 2 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \\
 \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}^*
 \end{aligned}$$

Επιλέγουμε  $x_2 = 1$ , οπότε για  $\lambda_2 = 1$ , το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

• Για  $\lambda_3 = 5$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda_3 I)x = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 2 \\ 0 & 3-5 & 2 \\ 2 & 2 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\
 \Rightarrow x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}^*
 \end{aligned}$$

Επιλέγουμε  $x_1 = 1$ , οπότε για  $\lambda_3 = 5$  ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Παρατηρούμε ότι από τα τρία ιδιοδιανύσματα, μόνο αυτό που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα είναι θετικό καθώς ισχύει  $x > 0$ , όπως αναφέρεται στην Πρόταση 2.7.

Για τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας μέσω του θετικού ιδιοδιανύσματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη Δυναμική Μέθοδο (Αλγόριθμος 2.1), που παρουσιάζεται στη συνέχεια μετά το θεώρημα Perron-Frobenius, ως εξής:

Αρχικά για  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  έχουμε:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα, το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα είναι το  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

το οποίο, όπως αναφέρει και η Πρόταση 2.7, είναι θετικό και η αντίστοιχη ιδιοτιμή, που είναι η φασματική ακτίνα είναι:

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{15}{3} \Rightarrow \lambda = 5 \quad \diamond$$

Το επόμενο πόρισμα είναι σημαντικό, επειδή δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της φασματικής ακτίνας ενός πίνακα με τη βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων του, με την προϋπόθεση ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι θετικά.

### Πόρισμα 2.3

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$ . Αν ο πίνακας  $A$  έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα  $x$ , τότε

$$\rho(A) = \max_{x>0} \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} = \min_{x>0} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}. \quad (2.11)$$

**Απόδειξη :**

Αν θεωρήσουμε ένα ιδιοδιάνυσμα  $x > 0$ , τότε από την ανισότητα (2.9) του Θεωρήματος 2.2 προκύπτει άμεσα η ισότητα (2.11).  $\square$

---

**Παράδειγμα 2.9**

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του  $A$  έχουμε:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4-\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda) - (4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 5\lambda + 5)(4-\lambda) = 0$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι :

$$\lambda_1 = 1.382, \quad \lambda_2 = 3.618 \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 4.$$

Επομένως η φασματική ακτίνα είναι :

$$\rho(A) = \max \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \} = \max \{ 1.382, 3.618, 4 \} = 4$$

Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του πίνακα  $A$  υπάρχει και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $x$ , που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης  $(A - \lambda_i I)x = 0$ . Έτσι έχουμε:

- Για  $\lambda_1 = 1.382$ :

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1.382 & 1 & 1 \\ 0 & 4-1.382 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1.382 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1.618 & 1 & 1 \\ 0 & 2.618 & 0 \\ 1 & 0 & 0.618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.618x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2.618x_2 = 0 \\ x_1 + 0.618x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -0.618x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.618x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -0.618 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}^*$$

Επιλέγουμε  $x_3 = 1$ , οπότε για την ιδιοτιμή  $\lambda_1 = 1.382$  ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\text{είναι } x = \begin{pmatrix} -0.618 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Για  $\lambda_2 = 3.618$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)x = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-3.618 & 1 & 1 \\ 0 & 4-3.618 & 0 \\ 1 & 0 & 2-3.618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0.618 & 1 & 1 \\ 0 & 0.382 & 0 \\ 1 & 0 & -1.618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -0.618x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0.382x_2 = 0 \\ x_1 - 1.618x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.618x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.618x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1.618 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Επιλέγουμε  $x_3 = 1$ , οπότε για την ιδιοτιμή  $\lambda_2 = 3.618$  ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\text{είναι } x = \begin{pmatrix} 1.618 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Για  $\lambda_3 = 4$  έχουμε:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I)x = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-4 & 1 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 \\ 1 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Επιλέγουμε  $x_3 = 1$ , οπότε για  $\lambda_3 = 4$  ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Παρατηρούμε ότι ο μη-αρνητικός πίνακας  $A$  έχει μόνο ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα,

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ το οποίο σύμφωνα με την Πρόταση 2.7 αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα}$$

$$\rho(A) = \lambda_3 = 4.$$

Χρησιμοποιώντας, το Πόρισμα 2.3 και το ιδιοδιάνυσμα  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} &= \min \left\{ \frac{1}{2} (3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1), \frac{1}{1} (0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1), \frac{1}{1} (1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{8}{2}, 4, 4 \right\} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} &= \max \left\{ \frac{1}{2} (3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1), \frac{1}{1} (0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1), \frac{1}{1} (1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{8}{2}, 4, 4 \right\} = 4 \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\max_{x>0} \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} = \min_{x>0} \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} = 4$$

Επομένως παρατηρούμε ότι όντως ισχύει η ισότητα στη (2.11)

$$\rho(A) = \max_{x>0} \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} = \min_{x>0} \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right\} = 4. \quad \diamond$$

### Θεώρημα 2.3

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$ . Αν  $A$  έχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα  $x$ , τότε για κάθε  $m = 1, 2, \dots$  και για κάθε  $i = 1, \dots, n$  έχουμε:

$$\frac{\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}}{\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} \leq [\rho(A)]^m \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}}{\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} \quad (2.12)$$

όπου  $A^m \equiv (a_{ij}^{(m)})$ .

Ειδικότερα αν  $\rho(A) > 0$ , τα στοιχεία του  $\left[ \frac{1}{\rho(A)} A \right]^m = \frac{1}{[\rho(A)]^m} A^m$  είναι φραγμένα

από ποσότητες που είναι ανεξάρτητες του  $m$  για κάθε  $m = 1, 2, \dots$

=====

**Απόδειξη:**

Από την ιδιότητα (vi) της Πρότασης 1.3, όταν  $A \geq 0$ , τότε  $A^m \geq 0$  και αν  $x > 0$  ένα ιδιοδιάνυσμα του  $A$  από την ισότητα  $Ax = \rho(A)x$ , έπεται  $A^m x = [\rho(A)]^m x$ , (ιδιότητα (7)-Πρόταση 1.4). Οπότε συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε

$$[\rho(A)]^m \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \geq \rho(A^m)x_i = [A^m x]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} x_j \geq \left( \min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \right) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Αφού  $x > 0$  ισχύει

$$\left( \min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \right) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} \leq [\rho(A)]^m \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \Rightarrow \frac{\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}}{\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} \leq [\rho(A)]^m,$$

άρα ισχύει το αριστερό τμήμα της ανισότητας στην (2.12).

Αντίστοιχα έχουμε

$$[\rho(A)]^m \min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \leq \rho(A^m)x_i = [A^m x]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} x_j \leq \left( \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \right) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$$

για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ . Αφού  $x > 0$  ισχύει

$$[\rho(A)]^m \min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \leq \left( \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} \right) \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} \Rightarrow [\rho(A)]^m \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}}{\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$$

άρα ισχύει το δεξιό τμήμα της ανισότητας στην (2.12). □

**Σχόλια :** Από το Θεώρημα 2.3 αντλούνται δύο πληροφορίες:

i) Ένα διάστημα, όπου ανήκει η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα  $A^m$ . Τα άκρα του διαστήματος εξαρτώνται από τη μέγιστη και ελάχιστη συντεταγμένη του θετικού ιδιοδιανύσματος  $x$  που αντιστοιχεί στη  $\rho(A)$  καθώς και τα στοιχεία του πίνακα  $A^m$ .

ii) Αν  $\rho(A) > 0$ , η σημαντική πληροφορία που προκύπτει από τη (2.12) επιλύοντας το δεξιό και το αριστερό τμήμα της ανίσωσης στην (2.12) ως προς  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}$  είναι ότι υπάρχει μία εκτίμηση για το διάστημα, όπου ανήκει το άθροισμα των στοιχείων κατά γραμμή του πίνακα  $A^m$ , χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός της  $m$ -δύναμης του πίνακα  $A$ . Συγκεκριμένα

$$\frac{\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}}{\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}} [\rho(A)]^m \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)} \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}}{\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\}} [\rho(A)]^m \quad (2.13)$$



---



---

**Παράδειγμα 2.10**

Ο μη-αρνητικό πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  του Παραδείγματος 2.9 έχει τρεις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = 1.382, \quad \lambda_2 = 3.618, \quad \lambda_3 = 4$$

με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα :  $x_1 = \begin{pmatrix} -0.618 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1.618 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα είναι το  $x_3$  αντίστοιχο της ιδιοτιμής  $\lambda_3 = 4$ , που σύμφωνα με την Πρόταση 2.7 ταυτίζεται με τη  $\rho(A) = 4$  και για το οποίο ισχύει :

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq 3} \{x_k\}}{\min_{1 \leq k \leq 3} \{x_k\}} = \frac{\max \{2, 1, 1\}}{\min \{2, 1, 1\}} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{και} \quad \frac{\min_{1 \leq k \leq 3} \{x_k\}}{\max_{1 \leq k \leq 3} \{x_k\}} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως από τη (2.13) έχουμε :

Για  $m = 2$  είναι  $[\rho(A)]^2 = 4^2 = 16$  και  $\frac{1}{2}16 \leq \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(2)} \leq \frac{2}{1}16 \Rightarrow 8 \leq \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(2)} \leq 32$ .

Για  $m = 3$  είναι  $[\rho(A)]^3 = 64$  και  $\frac{1}{2}64 \leq \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(3)} \leq \frac{2}{1}64 \Rightarrow 32 \leq \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(3)} \leq 128$ .

Για  $m = 4$  είναι  $[\rho(A)]^4 = 256$  και  $\frac{1}{2}256 \leq \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(4)} \leq \frac{2}{1}256 \Rightarrow 128 \leq \sum_{j=1}^3 a_{ij}^{(4)} \leq 512$

κ.ο.κ.

◇

---

## 2.2 Θετικοί πίνακες

Πίνακες που πολύ συχνά προκύπτουν στις εφαρμογές είναι πίνακες με θετικά στοιχεία μόνο, γι' αυτό αυτοί οι πίνακες εξετάζονται ξεχωριστά, όπως και οι μη-αρνητικοί πίνακες. Το βασικό θεώρημα των Perron-Frobenius τέτοιους πίνακες μελετά και όπως είναι φυσικό αρκετοί ερευνητές σε ποικίλες ερευνητικές περιοχές έχουν παρουσιάσει ένα μεγάλο πλήθος θεωρημάτων, προτάσεων και πορισμάτων γι' αυτούς. Τα σημαντικότερα αποτελέσματα που είναι απαραίτητα για την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος των Perron-Frobenius διατυπώνονται στην παρούσα παράγραφο.

Όπως παρουσιάστηκε στην Πρόταση 2.7, η φασματική ακτίνα είναι ιδιοτιμή ενός μη-αρνητικού πίνακα, μόνο αν το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή είναι θετικό, γεγονός που προφανώς προϋποθέτει υπολογισμούς όλων των χαρακτηριστικών μεγεθών του πίνακα. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ανάλογο αποτέλεσμα για θετικούς πίνακες, όπου όμως δεν απαιτείται ο υπολογισμός όλων των ιδιοδιανυσμάτων και ο εντοπισμός ενός θετικού ιδιοδιανύσματος, απλά χρησιμοποιείται η απόλυτη τιμή αυτού του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα.

### Πρόταση 2.8

Έστω  $A \in M_n$  και  $A > 0$ . Αν  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  και  $|\lambda| = \rho(A)$ , τότε  $A|x| = \rho(A)|x|$  και  $|x| > 0$ .

#### Απόδειξη:

Αρχικά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής ενός αριθμού έχουμε

$$\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|,$$

Από όπου είναι φανερό ότι  $y \equiv A|x| - \rho(A)|x| \geq 0$ . Αφού  $|x| \geq 0$  με  $|x| \neq 0$  και  $A > 0$  σύμφωνα με (vii) της Πρότασης 1.3 έχουμε ότι  $A|x| > 0$ , συνεπώς  $\rho(A) > 0$ , (Πρόταση 2.5).

Έτσι, αν  $y = 0 \Rightarrow A|x| = \rho(A)|x| \Rightarrow |x| = [\rho(A)]^{-1} A|x| > 0$ , οπότε καταλήγουμε ότι  $|x| > 0$ .

=====

Αν υποθέσουμε ότι  $y \neq 0$ , θέτουμε  $z \equiv A|x| > 0$  και σύμφωνα με την ιδιότητα (vii) της Πρότασης 1.3 έχουμε:

$$0 < Ay = A(A|x| - \rho(A)|x|) = AA|x| - \rho(A)A|x| = Az - \rho(A)z \Rightarrow \rho(A)z < Az$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.6 αφού  $\rho(A)z < Az$  ισχύει  $\rho(A) < \rho(A)$ , το οποίο είναι άτοπο. Επομένως καταλήγουμε ότι είναι  $y = 0$ , άρα έχουμε  $A|x| = \rho(A)|x|$  και  $|x| = \rho(A)^{-1}A|x| > 0$ . □

Μια ειδική περίπτωση θετικού πίνακα μπορεί να είναι ο συμμετρικός θετικός, οπότε το παραπάνω αποτέλεσμα διατυπώνεται ως ακολούθως.

#### Πόρισμα 2.4

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A > 0$  και συμμετρικό πίνακα. Αν  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  και  $|\lambda| = \rho(A)$ . Τότε  $A|x| = \rho(A)|x|$  και  $|x| > 0$ .

Το παραπάνω αποτέλεσμα βρίσκει εφαρμογή στη θεωρία γραφημάτων σε ειδικούς πίνακες γειτνίασης, τους τροποποιημένους όπως ονομάζονται (Ορισμός 3.8), αρκεί σε αυτά τα γραφήματα να υπάρχουν βρόγχοι, οπότε στα γραφήματα αυτά αντιστοιχούν θετικοί συμμετρικοί πίνακες.

Από το επόμενο θεώρημα παίρνουμε την πληροφορία ότι σε ένα θετικό πίνακα, η φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα αλλά και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της είναι θετικό.

#### Θεώρημα 2.4

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A > 0$ . Τότε η φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  είναι μια ιδιοτιμή του  $A$ , επιπλέον υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα  $x$  τέτοιο ώστε  $Ax = \rho(A)x$ .

#### Απόδειξη:

Υπάρχει μια ιδιοτιμή  $\lambda$  με  $|\lambda| = \rho(A) > 0$  και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $x \neq 0$ . Σύμφωνα με την Πρόταση 2.8, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας είναι  $|x|$ . □

**Παράδειγμα 2.11**

Έστω ο θετικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας είναι

κατά γραμμή στοχαστικός [4], επομένως σύμφωνα με το Πρόβλημα 2.1 η φασματική ακτίνα είναι  $\rho(A) = 1$ . Οι ιδιοτιμές του  $A$  που προκύπτουν ως ρίζες της εξίσωσης  $\det(A - \lambda I) = 0$  είναι :

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -0.1377, \lambda_2 = 0.121, \lambda_3 = 1\}.$$

Το φάσμα του πίνακα  $A$  επαληθεύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.4, δηλαδή η φασματική ακτίνα είναι η μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ .

Το δε ιδιοδιάνυσμα που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης  $(A - \lambda_3 I)x = 0$  είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα. Πράγματι:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I)x = 0 \Leftrightarrow (A - I)x = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Οποιαδήποτε  $x_3 > 0$  και να επιλέξουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας είναι θετικό. ◇

**Πρόταση 2.9**

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και υποθέτουμε ότι  $A > 0$ ,  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  και  $|\lambda| = \rho(A)$ . Τότε υπάρχει κάποιο  $\theta \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $e^{-i\theta} x = |x| > 0$ .

**Απόδειξη:**

Από τις ιδιότητες απόλυτης τιμής και την υπόθεση μπορούμε να γράψουμε

$$A|x| = |Ax| = |\lambda x| = |\lambda| |x| = \rho(A)|x|.$$

Επίσης από την Πρόταση 2.8 ξέρουμε ότι

$$A|x| = \rho(A)|x| \text{ με } |x| > 0,$$

συνεπώς συνδυάζοντας τις δύο αυτές ισότητες με την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι για κάθε  $k = 1, \dots, n$  ισχύει

$$\rho(A)|x_k| = |\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = \left| \sum_{p=1}^n a_{kp} x_p \right| \leq \sum_{p=1}^n |a_{kp}| |x_p| = \sum_{p=1}^n a_{kp} |x_p| = \rho(A)|x_k|$$

Επειδή πρέπει να ισχύει ισότητα στην τριγωνική ανισότητα, γι' αυτόν το λόγο πρέπει όλοι οι (μη-μηδενικοί) μιγαδικοί αριθμοί  $a_{kp} x_p$  για κάθε  $p = 1, \dots, n$  να βρίσκονται στο ίδιο μέρος του επιπέδου, [9, Lemma 8.2.3]. Αν  $\theta$  συμβολίζει το κοινό τους όρισμα, τότε  $e^{-i\theta} a_{kp} x_p > 0$  για κάθε  $p = 1, \dots, n$  και επειδή για όλα τα  $a_{kp}$  ισχύει  $a_{kp} > 0$ , τελικά έχουμε  $e^{-i\theta} x_p > 0$  για κάθε  $p = 1, \dots, n$ , από όπου  $e^{-i\theta} x > 0$ .  $\square$

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι σε ένα θετικό πίνακα όλες οι ιδιοτιμές που δεν έχουν μέτρο όσο η φασματική ακτίνα βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα.

**Θεώρημα 2.5**

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A > 0$ . Τότε  $|\lambda| < \rho(A)$  για κάθε άλλη ιδιοτιμή  $\lambda$  με  $\lambda \neq \rho(A)$ .

**Απόδειξη :**

Από τον ορισμό της  $\rho(A)$  ισχύει  $|\lambda| \leq \rho(A)$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  του πίνακα  $A$ .

Υποθέτουμε ότι  $|\lambda| = \rho(A)$  και  $Ax = \lambda x$  με  $x \neq 0$ . Θέτοντας  $w = e^{-i\theta} x$ , για κάποιο  $\theta \in \mathbb{R}$ , από την Πρόταση 2.9 προκύπτει  $w > 0$ , και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$Aw = A(e^{-i\theta} x) = e^{-i\theta} (Ax) = e^{-i\theta} (\lambda x) = \lambda (e^{-i\theta} x) = \lambda w.$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με  $w > 0$  και την Πρόταση 2.7 καταλήγουμε  $\lambda = \rho(A)$ . Συνεπώς για  $|\lambda| \neq \rho(A)$  είναι  $|\lambda| < \rho(A)$ .  $\square$

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι ο ιδιόχωρος (Ορισμός 1.18) που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα έχει διάσταση ίση με 1, άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής είναι ίση με 1.

**Θεώρημα 2.6**

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και  $A > 0$  και έστω  $w$  και  $z$  μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε  $Aw = \rho(A)w$  και  $Az = \rho(A)z$ . Τότε υπάρχει ακόμα κάποιο  $\alpha \in \mathbb{C}$  τέτοιο ώστε  $w = \alpha z$ .

**Απόδειξη :**

Από την Πρόταση 2.9 υπάρχουν δυο πραγματικοί αριθμοί  $\theta_1$  και  $\theta_2$  τέτοιοι ώστε  $p \equiv e^{-i\theta_1} z > 0$  και  $q \equiv e^{-i\theta_2} w > 0$ . Θέτουμε  $\beta \equiv \min_{1 \leq i \leq n} \{q_i p_i^{-1}\}$  και ορίζουμε

$$r \equiv q - \beta p. \tag{2.14}$$

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι  $r \geq 0$  και τουλάχιστον μια συντεταγμένη του διανύσματος  $r$  είναι 0, επομένως το  $r$  δεν είναι ένα θετικό διάνυσμα. Αλλά

$$Ar = Aq - \beta Ap = \rho(A)q - \beta \rho(A)p = \rho(A)[q - \beta p] = \rho(A)r.$$

Αν υποθέσουμε  $r \neq 0$  με  $r \geq 0$ , επειδή  $\rho(A)^{-1} A > 0$  εφαρμόζοντας την ιδιότητα (vii) της Πρότασης 1.3 καταλήγουμε  $r = \rho(A)^{-1} Ar > 0$ , άρα άτοπο. Συνεπώς πρέπει  $r = 0$ , άρα από τη (2.14) έχουμε  $q = \beta p$  και  $w = \beta e^{i(\theta_2 - \theta_1)} z$ . □

Στην επόμενη πρόταση από το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα ενός  $A > 0$  κατασκευάζεται ένας άλλος πίνακας  $L$ , που είναι κάποια μεγάλη δύναμη του  $A$  και διατυπώνονται συμπεράσματα για το βαθμό του πίνακα  $L$ , το οποίο θα χρησιμεύσει στη συνέχεια, [9, Theorem 8.2.8].

**Πρόταση 2.10**

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και υποθέτουμε ότι  $A > 0$ . Τότε ισχύει

$$L \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\rho(A)} A \right]^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \rho(A)^{-1} A \right]^m,$$

όπου  $L \equiv xy^T$ ,  $Ax = \rho(A)x$ ,  $A^T y = \rho(A)y$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$  και  $x^T y = 1$ .

Δηλαδή,  $L > 0$  με  $rank(L) = 1$ .

Στο επόμενο θεώρημα που αναφέρεται σε ένα θετικό πίνακα αποδεικνύεται ότι η μοναδική ιδιοτιμή, η οποία βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα, είναι αυτή που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα .

### Θεώρημα 2.7

Αν  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και  $A > 0$ , τότε  $\rho(A)$  είναι μια ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας 1. Δηλαδή,  $\rho(A)$  είναι μια απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\chi_A(t) = 0$ .

#### Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η ιδιοτιμή  $\rho(A) \equiv \rho$  είναι μια ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα  $k > 1$ . Σύμφωνα με το θεώρημα Schur (Θεώρημα 1.1), ο θετικός πίνακας  $A$  μπορεί να γραφτεί ως  $A = UTU^*$ , όπου  $U$  είναι ορθομοναδιαίος,  $T$  είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία

$$\rho, \dots, \rho, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n.$$

Επιπλέον  $A^m = \underbrace{UTU^* \cdot UTU^* \dots UTU^*}_{m\text{-φορές}} = UT^m U^*$  με τον πίνακα  $T^m$  να είναι ένας άνω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία

$$\rho^m, \dots, \rho^m, \lambda_{k+1}^m, \dots, \lambda_n^m,$$

(βλέπε ιδιότητα (5) των ιδιοτήτων στην άλγεβρα πινάκων της παραγράφου 1.1.4).

Επειδή  $\rho > 0$ , (Θεώρημα 2.4),

$$[\rho^{-1}A]^m = \rho^{-m}UT^m U^* = U(\rho^{-m}T^m)U^*, \quad (2.15)$$

με τον πίνακα  $\rho^{-m}T^m$  να είναι άνω τριγωνικός και να έχει διαγώνια στοιχεία

$$1, \dots, 1, \frac{\lambda_{k+1}^m}{\rho^m}, \dots, \frac{\lambda_n^m}{\rho^m}.$$

Επίσης, οι ιδιοτιμές  $\lambda_i \neq \rho(A) \equiv \rho$ , συνεπώς  $|\lambda_i| < \rho$ , για όλα τα  $i = k+1, \dots, n$ , οπότε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda_{k+1}|}{\rho} \right)^m = \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{|\lambda_n|}{\rho} \right)^m = 0. \quad (2.16)$$

Οπότε συνδυάζοντας τη (2.15) με τη μορφή των διαγωνίων στοιχείων του  $\rho^{-m}T^m$  και τη (2.16) γράφουμε :

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} [\rho^{-1}A]^m = \lim_{m \rightarrow \infty} U [\rho^{-m}T^m] U^* = U \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & * \\ & & & 0 & \\ \textcircled{0} & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} U^* = U T_1 U^*.$$

Παρατηρούμε ότι το διαγώνιο στοιχείο 1 επαναλαμβάνεται  $k$  φορές στον πίνακα

$$\rho^{-m}T^m \text{ και στον άνω τριγωνικό πίνακα } T_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & * \\ & & & 0 & \\ \textcircled{0} & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \text{ Επίσης, το}$$

διαγώνιο στοιχείο 0 επαναλαμβάνεται  $n - k$  φορές στον  $\rho^{-m}T^m$  και  $T_1$ . Συνεπώς, ο  $T_1$  έχει βαθμό τουλάχιστον  $k > 1$ . Επιπλέον σύμφωνα με την Πρόταση 2.10 ισχύει  $rank(L) = 1$ , το οποίο σημαίνει ότι έπρεπε να είναι και  $rank(T_1) = 1$ , οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα  $\rho(A)$  είναι μια απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\chi_A(t) = 0$ . □

Συνοψίζοντας, διατυπώνουμε το γνωστό ως θεώρημα των Perron-Frobenius για θετικούς πίνακες· η απόδειξή του είναι αυτή των Θεωρημάτων 2.4, 2.5, 2.6, 2.7. Σημειώνεται ότι το ακόλουθο θεώρημα έχει το όνομα δύο κορυφαίων γερμανών μαθηματικών των Perron-Frobenius<sup>2</sup>, ωστόσο το ακόλουθο που αφορά θετικό πίνακα, αποδείχθηκε το 1907 από τον Oskar (Oscar) Perron και η γενίκευσή του, που αναφέρεται σε μη-αρνητικούς πίνακες, αποδείχθηκε το 1912 από τον Ferdinand Georg Frobenius.

**Θεώρημα 2.8 (Perron-Frobenius)**

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A > 0$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i)  $\rho(A) > 0$ .
- ii) Το  $\rho(A)$  είναι ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ .
- iii) Υπάρχει  $x > 0$  με  $Ax = \rho(A)x$ .

---

<sup>2</sup> Βλέπε Παράρτημα Β.



iv) Το  $\rho(A)$  είναι μια αλγεβρικά (και γεωμετρικά) απλή ιδιοτιμή του  $A$ .

v)  $|\lambda| < \rho(A)$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda \neq \rho(A)$ , οπότε η  $\rho(A)$  είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.

**Σχόλια :** Το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα  $x > 0$  για το οποίο ισχύει  $Ax = \rho(A)x$  σύμφωνα με το Θεώρημα 2.8 (Perron-Frobenius) μπορεί να έχει μέτρο ίσο με 1, αρκεί να διαιρέσουμε το ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του· στην περίπτωση αυτή θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

### Ορισμός 2.1

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Η θετική ιδιοτιμή του  $A$  που ισούται με τη  $\rho(A)$  ονομάζεται **ρίζα Perron** (Perron root) και το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της ονομάζεται **διάνυσμα Perron** (Perron vector). Το διάνυσμα Perron του  $A^T$  ονομάζεται **αριστερό διάνυσμα Perron** (left Perron vector) του  $A$ .

---

## 2.3 Μη-αρνητικοί πίνακες και θεωρία Perron-Frobenius

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε ποιες από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των θετικών πινάκων που διατυπώθηκαν στο Θεώρημα 2.8 εκλείπουν και ποιες διατηρούνται στην περίπτωση μη-αρνητικών πινάκων. Παίρνοντας αφορμή από τους μη-αρνητικούς πίνακες που παρουσιάστηκαν στο Παράδειγμα 2.5 και 2.10 και οι οποίοι έχουν φασματική ακτίνα διαφορετική από το μηδέν και από την ιδιότητα που παρουσιάζει η ρίζα Perron των θετικών πινάκων, για τους μη-αρνητικούς πίνακες αναρωτιώμαστε:

- α) αν η φασματική ακτίνα μη-αρνητικών πινάκων ταυτίζεται με θετική πραγματική ιδιοτιμή ή όχι.
- β) ποια είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα; Η πολλαπλότητα σχετίζεται με τη θέση και την ποσότητα των μηδενικών στοιχείων του πίνακα ή με κάποια χαρακτηριστική ιδιότητά τους (π.χ. ανάγωγους, συμμετρικούς);
- γ) υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα με μέτρο ίσο με αυτό της φασματικής ακτίνας; Πόσες είναι οι ιδιοτιμές που έχουν την προαναφερθείσα ιδιότητα;

Το ακόλουθο θεώρημα, δίνει απάντηση στο πρώτο από τα προαναφερθέντα ερωτήματα, μια και αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι μία πραγματική θετική ιδιοτιμή του μη-αρνητικού πίνακα και επιπλέον το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι μη-αρνητικό διάνυσμα.

### Θεώρημα 2.9

Αν  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και  $A \geq 0$ , τότε  $\rho(A)$  είναι μια ιδιοτιμή του  $A$  και υπάρχει ένα μη-αρνητικό διάνυσμα  $x \geq 0$ ,  $x \neq 0$ , τέτοιο ώστε  $Ax = \rho(A)x$ .

#### Απόδειξη :

Επειδή ο πίνακας  $A = (a_{ij}) \geq 0$  έχει κάποια στοιχεία του ίσα με μηδέν, θεωρούμε έναν κατάλληλα μικρό αριθμό  $\varepsilon > 0$  και κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα  $A(\varepsilon)$  με στοιχεία  $a_{ij} + \varepsilon$ , δηλαδή,  $A(\varepsilon) \equiv (a_{ij} + \varepsilon)$ . Προφανώς  $A(\varepsilon) > 0$ , οπότε εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.8 (Perron-Frobenius). Ορίζουμε ως  $x(\varepsilon)$  το διάνυσμα Perron του  $A(\varepsilon)$

και σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1 και τα σχόλια για το διάνυσμα Perron, το  $x(\varepsilon)$  έχει τις ιδιότητες :

$$x(\varepsilon) > 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n x(\varepsilon)_i = 1.$$

Αφού το σύνολο των διανυσμάτων  $\{x(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$  περιέχεται στο σύνθετο σύνολο  $\{x : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_1 \leq 1\}$ , υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$  με  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$  έτσι ώστε να υπάρχει

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(\varepsilon_k) \equiv x. \quad (2.17)$$

Αφού  $x(\varepsilon_k) > 0$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots$  πρέπει να ισχύει  $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x(\varepsilon_k) \geq 0$ . Είναι αδύνατο να ισχύει  $x = 0$  επειδή

$$\sum_{i=1}^n x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x(\varepsilon_k)_i = 1.$$

Επειδή η ακολουθία  $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,\dots}$  είναι φθίνουσα ισχύει  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1} \geq \dots$ , από όπου η ακολουθία  $\{A(\varepsilon_k)\}_{k=1,2,\dots}$  των θετικών πινάκων, που θα κατασκευάσουμε όπως περιγράφηκε προηγουμένα, είναι επίσης φθίνουσα, δηλαδή ισχύει

$$A(\varepsilon_k) \geq A(\varepsilon_{k+1}), \quad \text{για κάθε } k = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 για κάθε  $k = 1, 2, \dots$ , μπορούμε να γράψουμε

$$\rho(A(\varepsilon_k)) \geq \rho(A(\varepsilon_{k+1})) \geq \dots \geq \rho(A). \quad (2.18)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία των θετικών πραγματικών αριθμών  $\{\rho(A(\varepsilon_k))\}$  με  $k \in \mathbb{N}$ , είναι επίσης μια φθίνουσα ακολουθία. Σύμφωνα με τον ορισμό της φασματικής ακτίνας, η ακολουθία  $\{\rho(A(\varepsilon_k))\}$  είναι κάτω φραγμένη από το 0, συνεπώς συγκλίνουσα· δηλαδή, υπάρχει το όριό της και από (2.18) έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A(\varepsilon_k)) \equiv \rho \quad \text{με} \quad \rho \geq \rho(A). \quad (2.19)$$

Συνδυάζοντας (2.17)-(2.19) με το  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  μπορούμε να γράψουμε:

$$Ax = \lim_{k \rightarrow \infty} A(\varepsilon_k)x(\varepsilon_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A(\varepsilon_k))x(\varepsilon_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A(\varepsilon_k)) \lim_{k \rightarrow \infty} x(\varepsilon_k) = \rho x$$

Επειδή θεωρήσαμε ότι  $x \neq 0$ , από την προηγούμενη ισότητα συμπεραίνουμε ότι  $\rho$  είναι μια ιδιοτιμή του  $A$ . Σύμφωνα με τον ορισμό της φασματικής ακτίνας του  $A$  ισχύει και

$$\rho \leq \rho(A) \quad (2.20)$$

Από (2.19)-(2.20) είναι φανερό ότι ισχύει  $\rho = \rho(A)$ . □

**Σχόλια :** i) Το Θεώρημα 2.9, που εφαρμόζεται σε μη-αρνητικούς πίνακες, μια ευρύτερη κατηγορία πινάκων από τους θετικούς, αποτελεί γενίκευση των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 2.4 και μας πληροφορεί ότι η  $\rho(A)$  είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και όχι απλά η απόλυτη τιμή μιας από τις ιδιοτιμές του.

Συνεπώς, οι τιμές  $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$  δεν μπορεί να αποτελούν ιδιοτιμές ενός μη-αρνητικού πίνακα  $A$ , καθώς στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max \{4, 1, 3\} = 4.$$

Η τιμή της φασματικής ακτίνας είναι η απόλυτη τιμή της  $\lambda_1$  και όχι η ίδια η  $\lambda_1$ . Επιπρόσθετα οι τιμές  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$  είναι πιθανές ιδιοτιμές ενός μη-αρνητικού πίνακα όπως και οι  $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ , επειδή και στις δύο περιπτώσεις η φασματική ακτίνα ισούται με την ιδιοτιμή  $\lambda_3$ .

ii) Παίρνοντας αφορμή από τους πίνακες των Παραδειγμάτων 2.3 και 2.4, χρειάζεται να επισημάνουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός  $A \geq 0$  μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί, ωστόσο η φασματική ακτίνα αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή-πραγματικό θετικό αριθμό.

**Πρόταση 2.11**

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , με  $A \geq 0$  και το διάνυσμα  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $x \geq 0$  με  $x \neq 0$ . Αν  $Ax \geq \alpha x$  για κάποιο  $\alpha \in \mathbb{R}$ , τότε  $\rho(A) \geq \alpha$ .

**Απόδειξη :**

Επειδή ο πίνακας  $A = (a_{ij}) \geq 0$  έχει κάποια στοιχεία του ίσα με μηδέν, θεωρούμε έναν κατάλληλα μικρό αριθμό  $\varepsilon > 0$  και κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα  $A(\varepsilon)$  με στοιχεία  $a_{ij} + \varepsilon$ , δηλαδή,  $A(\varepsilon) \equiv (a_{ij} + \varepsilon)$ . Προφανώς  $A(\varepsilon) > 0$ , επομένως ισχύει το Θεώρημα 2.8, άρα  $A(\varepsilon)$  έχει ένα αριστερό διάνυσμα Perron  $y(\varepsilon) > 0$ , δηλαδή  $(A(\varepsilon))^T y(\varepsilon) = \rho(A(\varepsilon))y(\varepsilon)$ , (Ορισμός 2.1). Παίρνοντας αναστροφή στην τελευταία ισότητα και εφαρμόζοντας την (4) ιδιότητα της παραγράφου 1.1.4 και της Πρότασης 1.4 καταλήγουμε

$$y(\varepsilon)^T A(\varepsilon) = \rho(A(\varepsilon))y(\varepsilon)^T. \tag{2.21}$$

Επειδή  $Ax \geq \alpha x \Rightarrow Ax - \alpha x \geq 0$  μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$A(\varepsilon)x - \alpha x > Ax - \alpha x \geq 0.$$

Επίσης από  $y(\varepsilon) > 0$  και  $A(\varepsilon)x - \alpha x \geq 0$  προκύπτει  $y(\varepsilon)^T [A(\varepsilon)x - \alpha x] \geq 0$ , που μέσω της (2.21) καταλήγει

$$y(\varepsilon)^T [A(\varepsilon)x - \alpha x] = [\rho(A(\varepsilon)) - \alpha] y(\varepsilon)^T x \geq 0.$$

Αφού για κάθε  $\varepsilon > 0$  είναι  $y(\varepsilon)^T x > 0$  (ιδιότητα (vii) Πρότασης 1.3) από τον τετραγωνικό πίνακα  $[\rho(A(\varepsilon)) - \alpha] y(\varepsilon)^T x \geq 0$  έχουμε

$$\rho(A(\varepsilon)) - \alpha \geq 0. \quad (2.22)$$

Η (2.22) για πολύ μικρό  $\varepsilon$  δίνει

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho(A(\varepsilon)) - \alpha) \geq 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(A(\varepsilon)) - \alpha \geq 0 \Rightarrow \rho(A) - \alpha \geq 0. \quad \square$$

Η παραπάνω πρόταση είναι παρόμοια με την Πρόταση 2.6, μόνο που στην περίπτωση αυτή το  $x$  είναι μη-αρνητικό αντί για θετικό.

### Παράδειγμα 2.12

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ , το μη-αρνητικό διάνυσμα  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  και

ένας πραγματικός αριθμός  $\alpha = 4$ .

Ισχύουν

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

και  $\alpha x = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , άρα  $Ax \geq \alpha x$ .

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.11 αναμένεται να ισχύει  $\rho(A) \geq \alpha \Rightarrow \rho(A) \geq 4$ .

Το φάσμα του  $A$  είναι

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -2.3937, \lambda_2 = -0.3629, \lambda_3 = 5.7566\},$$

επομένως έχουμε

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} = \max\{2.3937, 0.3629, 5.7566\} = 5.7566.$$

Συνεπώς  $\rho(A) \geq 4 = \alpha$ , οπότε το συμπέρασμα της Πρότασης 2.11 επαληθεύεται.  $\diamond$

Το επόμενο πόρισμα είναι γενίκευση του Πορίσματος 2.3, επειδή δεν είναι απαραίτητο να υπολογισθεί κάποιο θετικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας οποιοδήποτε θετικό διάνυσμα.

**Πόρισμα 2.5**

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  και  $A \geq 0$ , τότε  $\rho(A) = \max_{\substack{x \geq 0 \\ x \neq 0}} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \}$ .

**Απόδειξη :**

Αν  $A \geq 0$ ,  $x \geq 0$  με  $x \neq 0$ , και επιλέξουμε

$$\alpha \equiv \min_{x_i \neq 0} \{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \}$$

τότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.11 έχουμε  $Ax \geq \alpha x$  από όπου καταλήγουμε επομένως  $\rho(A) \geq \alpha$ . Αν επιλέξουμε  $x$  να είναι το ιδιοδιάνυσμα, του οποίου την ύπαρξη εξασφαλίζει το Θεώρημα 2.9, τότε συμπεραίνουμε ότι το άνω φράγμα μπορεί να επιτευχθεί για  $\alpha = \rho(A)$ . □

Στο Θεώρημα 2.9 για μη-αρνητικούς πίνακες αποδείχθηκε ότι η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί η φασματική ακτίνα του πίνακα είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός χωρίς να γνωρίζουμε πληροφορίες για την πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής, πληροφορίες τις οποίες έδινε το Θεώρημα 2.8 (κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius για θετικούς πίνακες).

Υπενθυμίζουμε ότι στο Παράδειγμα 2.5 ο μη-αρνητικός και μη-ανάγωγος πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει φάσμα  $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$ , άρα  $\rho(B) = \lambda = 1$ , και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής  $\lambda = 1$  είναι ίση με 2, ενώ ο μη-αρνητικός και ανάγωγος πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

=====

έχει φάσμα  $\sigma(C) = \{-2, 0, 2\}$ , και όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 1 και  $\rho(C) = 2$ .

Το ακόλουθο θεώρημα, δίνει απάντηση στο δεύτερο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας, μια και αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι μία πραγματική θετική ιδιοτιμή ενός μη-αρνητικού και ανάγωγου πίνακα αλγεβρικής πολλαπλότητας ίσης με 1. Για να προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του γενικευμένου θεωρήματος Perron-Frobenius, θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση, [9, Lemma 8.4.2].

### Πρόταση 2.12

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$  και  $A^k > 0$  για μερικά  $k \geq 1$ . Τότε  $\rho(A)$  έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 1.

### Θεώρημα 2.10

Εστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας ανάγωγος πίνακας με  $A \geq 0$ . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- i)  $\rho(A) > 0$ .
- ii)  $\rho(A)$  είναι μια ιδιοτιμή του  $A$ .
- iii) Υπάρχει ένα θετικό διάνυσμα  $x$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $Ax = \rho(A)x$ , και
- iv)  $\rho(A)$  είναι μια αλγεβρικά (επομένως και γεωμετρικά) απλή ιδιοτιμή του  $A$ .

### Απόδειξη:

- i) Σύμφωνα με το (ii) του Πορίσματος 2.2 ισχύει  $\rho(A) > 0$ .
- ii) Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.9,  $\rho(A)$  είναι ιδιοτιμή ενός οποιουδήποτε μη-αρνητικού πίνακα  $A$  και υπάρχει μη-αρνητικό διάνυσμα  $x$  με  $x \neq 0$ , τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \rho(A)x \quad (2.23)$$

- iii) Από  $A \geq 0$  και τις ιδιότητες (6),(8) της Πρότασης 1.4 μπορούμε να γράψουμε

$$\rho(I + A) = 1 + \rho(A) \Rightarrow [\rho(I + A)]^{n-1} = [1 + \rho(A)]^{n-1} \neq 0. \quad (2.24)$$

Επίσης  $A$  είναι ανάγωγος, άρα ισχύει  $(I + A)^{n-1} > 0$  (Πρόταση 1.1). Συνδυάζοντας τη θετικότητα του πίνακα  $(I + A)^{n-1}$  με το (vii) της Πρότασης 1.3, συμπεραίνουμε ότι για το διάνυσμα  $(I + A)^{n-1}x$  ισχύει  $(I + A)^{n-1}x > 0$ , για οποιοδήποτε  $x \geq 0$ .

Επειδή ο πίνακας  $(I + A)^{n-1} > 0$ , εφαρμόζεται το (iii) του Θεωρήματος 2.8 για το διάνυσμα  $(I + A)^{n-1}x > 0$ , οπότε λαμβάνοντας υπόψη την (2.24) έχουμε :

$$\begin{aligned} [1 + \rho(A)]^{n-1} x &= (I + A)^{n-1} x \\ &\Rightarrow \left([1 + \rho(A)]^{n-1}\right)^{-1} [1 + \rho(A)]^{n-1} x = \left([1 + \rho(A)]^{n-1}\right)^{-1} (I + A)^{n-1} x \\ &\Rightarrow x = [1 + \rho(A)]^{1-n} (I + A)^{n-1} x > 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Από (2.23) και (2.25) η απόδειξη είναι πλήρης.

iv) Αν υποθέσουμε ότι η  $\rho(A)$  είναι μια πολλαπλή ιδιοτιμή του  $A$ , τότε  $1 + \rho(A) = \rho(I + A)$  είναι μια πολλαπλή ιδιοτιμή του  $I + A$  (ιδιότητα (6) της Πρότασης 1.4). Επειδή  $A \geq 0$  και ανάγωγος, προφανώς ισχύει  $I + A \geq 0$  και  $(I + A)^{n-1} > 0$  (Πρόταση 1.1), αντίστοιχα, και από την ιδιότητα (6) της Πρότασης 1.4 ισχύει  $\rho(I + A) = 1 + \rho(A)$ . Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.12 για τον πίνακα  $I + A \geq 0$  με  $(I + A)^{n-1} > 0$  έχουμε ότι  $1 + \rho(A)$  είναι μια απλή ιδιοτιμή του  $I + A$ , το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση. Συνεπώς  $\rho(A)$  είναι μια απλή ιδιοτιμή του  $A$ . □

Όπως ορίστηκε μετά το Θεώρημα 2.8 έτσι και εδώ στην περίπτωση μη-αρνητικού πίνακα  $A$  η θετική ιδιοτιμή που ταυτίζεται με τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  ονομάζεται **ρίζα Perron** και το αντίστοιχο θετικό ιδιοδιάνυσμά της **διάνυσμα Perron**.

Θεωρητικά, δεν υπάρχει δυσκολία για τον καθορισμό των ιδιοτιμών ενός πίνακα  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , στην πράξη συμβαίνει το αντίθετο, επειδή μόνο ο υπολογισμός της ορίζουσας  $\det(A - \lambda I)$  απαιτεί  $n!$  πολλαπλασιασμούς, είναι άμεσα αντιληπτό ότι για μεγάλη τιμή του  $n$  το πλήθος των πράξεων του προβλήματος εύρεσης ιδιοτιμών είναι αριθμός απαγορευτικός. Επιπρόσθετα, ο υπολογισμός των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι άλλο ένα δύσκολο αλγεβρικά και υπολογιστικά πρόβλημα, γι' αυτό στην πράξη χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους [13, 26].

Έτσι ο απλούστερος, αλλά κάποιες φορές, χρονοβόρος τρόπος εύρεσης της φασματικής ακτίνας παρακάμπτει τον υπολογισμό όλων των ιδιοτιμών  $\lambda_i$  και στη



=====

συνέχεια την επιλογή της ιδιοτιμής εκείνης που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή  $|\lambda|$  από όλες τις υπόλοιπες με την ανάπτυξη αλγορίθμων, οι οποίοι υπολογίζουν τη φασματική ακτίνα, χωρίς τον υπολογισμό των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι

- ο γνωστός ως αλγόριθμος της Δυναμικής Μεθόδου (Power Method), καθώς και
- ένας νέος βελτιωμένος υπολογιστικά αλγόριθμος, που βασίστηκε στον αλγόριθμο των Chengming Wen και Ting-Zhu Huang [27].

Ο επόμενος αλγόριθμος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας με τη **Δυναμική Μέθοδο** και εφαρμόζεται στην περίπτωση που έχουμε έναν πίνακα  $A$ , για τον οποίο έχουμε εξασφαλίσει ότι η φασματική του ακτίνα έχει αλγεβρική (άρα και γεωμετρική) πολλαπλότητα ίση με 1, το οποίο εξασφαλίζεται από θετικούς πίνακες καθώς και από μη-αρνητικούς και ανάγωγους πίνακες (Θεώρημα 2.8 και 2.10).

### Αλγόριθμος 2.1

**Βήμα 0:** Αρχικά επιλέγουμε ένα θετικό διάνυσμα  $x_0$  και θέτουμε  $i = 0$ .

**Βήμα 1:** Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα με το διάνυσμα  $x_0$  για να πάρουμε το επόμενο στρογγυλοποιημένο διάνυσμα  $x$  χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$x_{i+1} = Ax_i$$

**Βήμα 2:** Διαιρούμε κάθε όρο του  $x_{i+1}$  με το τελευταίο στοιχείο του διανύσματος και το ονομάζουμε ως νέο διάνυσμα  $x'_{i+1}$

**Βήμα 3:** Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 μέχρι τα  $x'_i$  και  $x'_{i+1}$  να συγκλίνουν.

**Βήμα 4:** Το διάνυσμα που δημιουργήθηκε στο βήμα 4 είναι ένα προσεγγιστικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή του πίνακα  $A$ . Αυτό το ιδιοδιάνυσμα το ονομάζουμε  $x$ .

**Βήμα 5:** Η στρογγυλοποίηση της αντίστοιχης ιδιοτιμής είναι  $\frac{x^T Ax}{x^T x}$  και αυτή είναι η φασματική ακτίνα του  $A$ .

=====

**Σχόλια :** i) Ο αριθμός  $\frac{x^T Ax}{x^T x}$  ονομάζεται **πηλίκιο Rayleigh** (Rayleigh quotient) του  $x$ .

ii) Ο λόγος για τον οποίο κάνουμε τη διαίρεση στο βήμα 3 είναι ότι το διάνυσμα δεν θα μεγαλώσει πάρα πολύ και θα μπορούμε να πούμε πότε συγκλίνει. Δεν είναι απαραίτητο να διαιρέσουμε τα στοιχεία του διανύσματος με το τελευταίο στοιχείο. Μπορούμε να διαιρέσουμε με οποιοδήποτε στοιχείο του διανύσματος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που το τελευταίο στοιχείο είναι μηδέν μπορούμε να διαιρέσουμε τα στοιχεία του διανύσματος με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο. Συνήθως, όταν χρησιμοποιούμε τη Δυναμική Μέθοδο (Power Method) στον υπολογιστή διαιρούμε με

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \text{ (νόρμα } 2^{\text{ης}} \text{ τάξης),}$$

το οποίο είναι ορισμένο ως μήκος διανύσματος, χωρίς να χρειάζεται να ανησυχούμε αν κάποιο στοιχείο είναι ή δεν είναι μηδέν.

### Παράδειγμα 2.13

Έστω ο θετικός πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για το 1<sup>ο</sup> βήμα θέτουμε  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Στη συνέχεια, για τα βήματα 2 και 3, έχουμε:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x'_1 = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.4 \\ 5.8 \end{pmatrix} \Rightarrow x'_2 = \begin{pmatrix} 1.965517241 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.965517241 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.89655172 \\ 5.96551724 \end{pmatrix} \Rightarrow x'_3 = \begin{pmatrix} 1.994219653 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = Ax_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.994219653 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.98265896 \\ 5.99421965 \end{pmatrix} \Rightarrow x'_3 = \begin{pmatrix} 1.99903568 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως, φαίνεται ότι το προσεγγιστικό ιδιοδιάνυσμα είναι το  $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Το αντίστοιχο πηλίκιο Rayleigh είναι

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{30}{5} = 6.$$

Αυτή είναι και η φασματική ακτίνα, δηλαδή  $\rho(A) = 6$ . ◇

Ο επόμενος αλγόριθμος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας ενός μη-αρνητικού ανάγωγου πίνακα με ένα βελτιωμένο υπολογιστικά αλγόριθμο, που βασίστηκε στον αλγόριθμο των Chengming Wen και Ting-Zhu Huang [27], αφού γενικεύει αυτόν τον αλγόριθμο και εφαρμόζεται για οποιαδήποτε αρχική συνθήκη παραλείποντας ένα βήμα του παλαιού αλγορίθμου κατά την εκτέλεσή του. Αναλυτικά ο κώδικας σε MATLAB δίνεται στο Παράρτημα Α.

### Αλγόριθμος 2.2

**Βήμα 0:** Δίνεται ένας μη-αρνητικός και ανάγωγος πίνακας  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ , ένας κατάλληλος θετικός συνήθως μικρός αριθμός  $\varepsilon > 0$  και  $k = 0$ .

**Βήμα 1:** Θέτουμε  $B = B_0 = sI + A = (b_{ij}^0)$ , όπου  $s \geq 1$ .

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τα  $r_i^k = \sum_{j=1}^n b_{ij}^k$ ,  $r_{\min}^k = \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i^k\}$  και  $r_{\max}^k = \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i^k\}$ .

Αν ισχύει  $(r_{\max}^k - r_{\min}^k) < \varepsilon$  μεταβαίνουμε στο βήμα 5.

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε το  $a_{ij}^{k+1} = \frac{r_j^k}{r_i^k} a_{ij}^k$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Θέτουμε  $k = k + 1$ .

Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

**Βήμα 4:** Θέτουμε  $\rho(A) = \frac{1}{2}(r_{\min}^k + r_{\max}^k) - s$ .

### Παράδειγμα 2.14

Έστω ο μη-αρνητικός και ανάγωγος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω Αλγόριθμο 2.2 για δύο τιμές του  $\varepsilon > 0$  έχουμε:

➤ Για  $\varepsilon = 10^{-5}$

$\alpha/\alpha$	$s$	$k$ επαναλήψεις	Τιμή $\rho(A)$
1	0.5	35	1.817120853976024
2	0.8	25	1.817121108569257
3	1	21	1.817119184109375
4	1.1	21	1.817120912253504
5	1.2	20	1.817119828148312
6	1.3	19	1.817120109772218
7	1.4	19	1.817120821777079
8	1.5	19	1.817120456274221
9	1.6	18	1.817120614459193
10	1.7	18	1.817120843452344
11	1.8	18	1.817119982765962
12	1.9	18	1.817121668932644
13	2	18	1.817119777872312
14	2.1	18	1.817120680583971
15	2.2	18	1.817121511274539
16	2.3	19	1.817121416204179
17	2.5	19	1.817120592832139
18	3	20	1.817120592832139
19	4	24	1.817120592832139
20	6	32	1.817121407013639
21	10	50	1.817119803943459

➤ Για  $\varepsilon = 10^{-10}$  έχουμε:

$\alpha/\alpha$	$s$	$k$ επαναλήψεις	Τιμή $\rho(A)$
1	0.5	68	1.817120592823512
2	0.8	47	1.817120592841031
3	1	41	1.817120592841931
4	1.1	40	1.817120592839805
5	1.2	38	1.817120592822200
6	1.3	37	1.817120592832021
7	1.4	36	1.817120592838849
8	1.5	35	1.817120592820154
9	1.6	35	1.817120592826863
10	1.7	35	1.817120592832814
11	1.8	35	1.817120592839177
12	1.9	35	1.817120592835649
13	2	35	1.817120592825030
14	2.1	35	1.817120592830878
15	2.2	35	1.817120592842779
16	2.3	36	1.817120592836372
17	2.5	37	1.817120592838143
18	3	39	1.817120592828179
19	4	46	1.817120592825815
20	6	63	1.817120592829111
21	10	97	1.817120592832527

Παρατηρούμε ότι οι λιγότερες επαναλήψεις στον αλγόριθμο επιτυγχάνονται για  $s \in [1.5, 2.2]$ . Επίσης βλέπουμε ότι όσο μικραίνει το  $\varepsilon$ , τόσο αυξάνεται η ακρίβεια της  $\rho(A)$ , αναμενόμενο αποτέλεσμα και ταυτόχρονα αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων στον αλγόριθμο, το οποίο είναι υπολογιστικά ασύμφορο.  $\diamond$

Τέλος, σημειώστε ότι ο Αλγόριθμος 2.2. υπολογίζει τη φασματική ακτίνα μη-αρνητικών και ανάγωγων πινάκων, προϋπόθεση που εξασφαλίζει την εφαρμογή του γενικευμένου Perron-Frobenius Θεωρήματος 2.10, όπου αποδείχθηκε ότι η αλγεβρική και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ρίζας Perron είναι ίση με 1, ιδιότητα την οποία έχουν και οι θετικοί πίνακες (Θεώρημα 2.8-κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius). Ωστόσο στο γενικευμένο Perron-Frobenius θεώρημα δε δόθηκαν πληροφορίες για το μέτρο όλων των άλλων ιδιοτιμών του μη-αρνητικού πίνακα σε σχέση με τη ρίζα Perron.

### Παράδειγμα 2.15

Έστω οι μη-αρνητικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

➤ Ο πίνακας  $A$  είναι ο μη-αρνητικός πίνακας του Παραδείγματος 2.4, όπου υπολογίστηκε ότι

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} = \max\{1.5764, 1.5764, 2.8171\} = 2.8171,$$

επειδή το φάσμα του είναι

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 0.0914 + 1.5737i, \lambda_2 = 0.0914 - 1.5737i, \lambda_3 = 2.8171\}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι  $A$  είναι ανάγωγος, επειδή

$$(I + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} > 0,$$

(Πρόταση 1.1). Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.10, από όπου είναι αναμενόμενο ότι  $\rho(A) = \lambda_3 = 2.8171$  είναι μία απλή ιδιοτιμή του  $A$ .

Επιπλέον σημείωσε ότι ισχύει  $|\lambda_{1,2}| < \rho(A)$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda_{1,2} \neq \rho(A)$ , δηλαδή η  $\rho(A)$  είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.

=====

➤ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.10 για τον πίνακα  $B$  του Παραδείγματος 2.5, ο οποίος έχει φάσμα  $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$ , μπορούμε να απαντήσουμε ότι στη ρίζα Perron  $\rho(B) = 1$  είναι αναμενόμενο να υπάρχει πολλαπλότητα διαφορετική του 1, επειδή ο πίνακας  $B$  είναι μη-ανάγωγος, οπότε δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του γενικευμένου θεωρήματος Perron-Frobenius.

➤ Ο πίνακας  $C$  αναφέρεται στο Παράδειγμα 2.5 έχει φάσμα

$$\sigma(C) = \{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}.$$

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι είναι μη-αρνητικός και ανάγωγος, επειδή

$$(I + C)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} > 0,$$

(Πρόταση 1.1). Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.10, από όπου είναι αναμενόμενο να υπολογίζεται ότι  $\rho(C) = \lambda_3 = 2$  είναι μία απλή ιδιοτιμή του πίνακα. Όμως δεν ισχύει  $|\lambda| < \rho(C)$  για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda \neq \rho(C)$ , δηλαδή η  $\rho(C)$  δεν είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.  $\diamond$

Από το παραπάνω Παράδειγμα 2.15 παρατηρούμε ότι οι μη-αρνητικοί και ανάγωγοι πίνακες  $A$  και  $C$  επαληθεύουν τα συμπεράσματα του γενικευμένου Θεωρήματος 2.10 των Perron-Frobenius, αφού η φασματική τους ακτίνα είναι μια απλή θετική ιδιοτιμή τους, ωστόσο η φασματική ακτίνα δεν είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο. Άρα χρησιμοποιώντας γνωστές έως εδώ κατηγορίες μη-αρνητικών πινάκων δεν μπορούμε να παράγουμε ένα κριτήριο το οποίο να εντοπίζει, αν υπάρχουν ή όχι, άλλες ιδιοτιμές του πίνακα (εκτός της φασματικής ακτίνας) πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα. Έτσι αναγκάζομαστε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για να απαντήσουμε με αυτόν τον τρόπο στο τρίτο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας και για περισσότερες λεπτομέρειες [21, Chapter 8].

## Ορισμός 2.2

Έστω  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ένας μη-αρνητικός και ανάγωγος πίνακας. Αν ο πίνακας  $A$  έχει μία μόνο ιδιοτιμή πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας  $\rho(A)$  ονομάζεται **αρχικός πίνακας** (primitive). Σε αντίθετη περίπτωση, όπου

υπάρχουν περισσότερες από μία ιδιοτιμές πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου μηδέν και ακτίνας  $\rho(A)$  ο πίνακας  $A$  ονομάζεται **μη-αρχικός** (imprimitive).

Η επόμενη πρόταση δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες μπορούμε να εξετάσουμε αν ένας μη-αρνητικός πίνακας  $A$  είναι αρχικός και η απόδειξή της δίνεται [9, Theorem 8.5.2 και Corollary 8.5.9]. Η μία συνθήκη εξαρτάται από έναν  $k$  άγνωστο φυσικό αριθμό και σχετίζεται με τη  $k$ -δύναμη του πίνακα  $A$  και η άλλη συνθήκη σχετίζεται με δύναμη του πίνακα  $A$  γνωστή εκ των προτέρων, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος του πίνακα.

### Θεώρημα 2.11

Εστω πίνακας  $A \in M_n(\mathbb{R})$  με  $A \geq 0$  και ανάγωγος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- i)  $A$  είναι αρχικός.
- ii)  $A^k > 0$ , για κάποιο  $k \geq 1$ .
- iii)  $A^{n^2-2n+2} > 0$ .

### Παράδειγμα 2.16

➤ Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία (iii)-(i) του Θεωρήματος 2.11 διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας  $A$  του προηγούμενου Παραδείγματος 2.15 είναι αρχικός, μια και ισχύει

$$A^5 = \begin{pmatrix} 61 & 32 & 70 \\ 105 & 61 & 96 \\ 48 & 35 & 61 \end{pmatrix} > 0.$$

Επομένως επαληθεύεται ο Ορισμός 2.2, οπότε όλες οι άλλες ιδιοτιμές, εκτός της φασματικής ακτίνας, ανήκουν εντός του κυκλικού δίσκου κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας  $\rho(A) = \lambda_3 = 2.8171$ .

➤ Εξετάζοντας αν ισχύει η σχέση (iii) του Θεωρήματος 2.11 διαπιστώνουμε ότι για τον πίνακα  $C$  του προηγούμενου Παραδείγματος 2.13 έχουμε

$$C^5 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \\ 0 & 32 & 0 \end{pmatrix} \geq 0,$$

=====

συνεπώς ο πίνακας  $C$  είναι μη-αρχικός. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2, υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα, εκτός της φασματικής ακτίνας, που έχουν μέτρο ίσο με τη φασματική ακτίνα  $\rho(C) = \lambda_3 = 2$ .

➤ Τέλος, για να μη θεωρηθεί ότι ο προηγούμενος πίνακας  $C$  είναι ειδικής μορφής πίνακας (τριδιαγώνιος), ας θεωρήσουμε το μη-αρνητικό πίνακα

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $D$  έχει το ίδιο πλήθος μηδενικών που έχει και ο  $C$  σε διαφορετικές θέσεις. Το φάσμα του  $D$  είναι το σύνολο

$$\sigma(D) = \{ \lambda_1 = 1.3247, \lambda_2 = -0.6624 + 0.5623i, \lambda_3 = -0.6624 - 0.5623i \},$$

τα μέτρα των ιδιοτιμών είναι  $|\lambda_1| = 1.3247$ ,  $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.8688$ , από όπου είναι φανερό ότι η φασματική ακτίνα είναι  $\rho(D) = \lambda_1 = 1.3247$ , εδώ παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.:

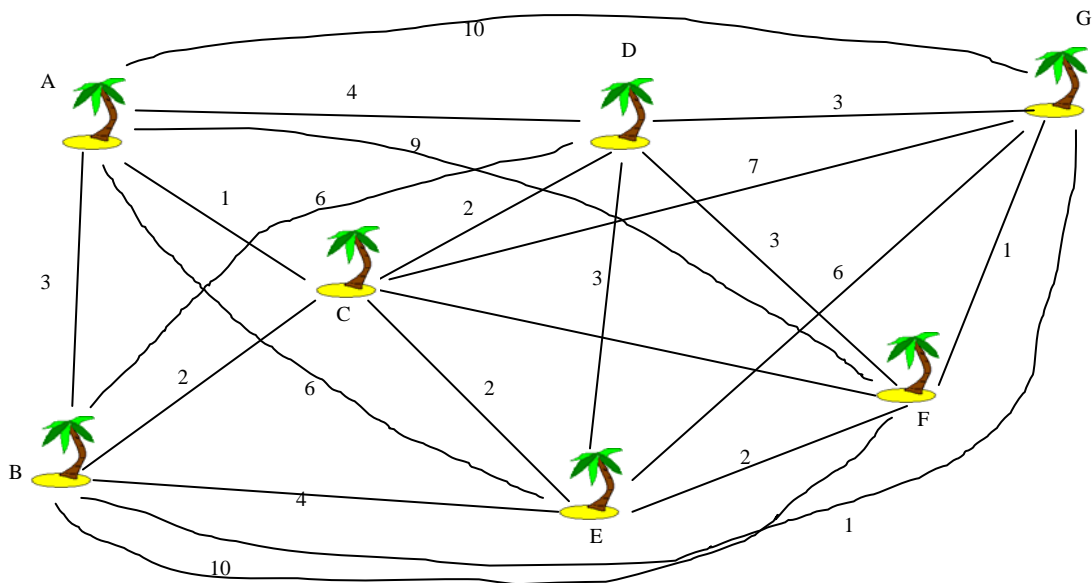
Ο πίνακας  $D$  είναι ανάγωγος, επειδή  $(I + D)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} > 0$ , (Πρόταση 1.1) και

αρχικός, επειδή  $D^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} > 0$ , (Θεώρημα 2.11-(iii)-(i)).

Επομένως, οι ιδιοτιμές  $\lambda_2, \lambda_3$  έχουν μέτρο μικρότερο από  $\rho(D) = \lambda_1 = 1.3247$ , αφού ανήκουν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας  $\rho(D)$ , (όχι στην περιφέρεια). ◇

Κλείνοντας την ενότητα και το κεφάλαιο χρειάζεται να υπενθυμίσουμε ότι οι μη-αρνητικοί πίνακες παρουσιάζονται σε πολλές εφαρμογές και σε ποικίλες ερευνητικές περιοχές [1, 16, 18, 24], κατά συνέπεια συνεχώς νέα προβλήματα προκύπτουν, νέα ερευνητικά αποτελέσματα εμπλουτίζουν τη διεθνή αρθογραφία [6, 10, 14, 19, 24]. Στη συνέχεια της εργασίας θα παρουσιάσουμε ορισμένες εφαρμογές των σημαντικότερων θεωρημάτων από τη θεωρία Perron-Frobenius στα γραφήματα.





Σχήμα 2.1 Ποια είναι η φασματική ακτίνα του γραφήματος;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Θεωρία Πινάκων και Γραφήματα

### 3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Πολλά πρακτικά προβλήματα και καταστάσεις της καθημερινής ζωής μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια ενός διαγράμματος αποτελούμενου από ένα σύνολο σημείων και ένα σύνολο γραμμών που ενώνουν τα σημεία αυτά κατά ζεύγη. Για παράδειγμα, τα σημεία θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν κάποιους υπολογιστές και οι γραμμές τις αντίστοιχες καλωδιώσεις, ή θα μπορούσαν τα σημεία να συμβολίζουν κάποιες πόλεις και οι γραμμές το οδικό δίκτυο, [7, 24, 25]. Η μελέτη επίλυσης προβλημάτων τέτοιου είδους οδήγησε στην έννοια του γραφήματος.

#### 3.1.1 Ορισμοί

##### Ορισμός 3.1

**Γράφημα** ή **γράφος** (graph) είναι μια δομή που αποτελείται από ένα σύνολο **κορυφών** (vertices) ή **κόμβων** (nodes) ή **σημείων** (points) που συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο **ακμών** (edges) ή **γραμμών** (lines).

Γενικά, ένα γράφημα συμβολίζεται ως  $G(V, E)$  ή  $G = (V, E)$  ή  $(V(G), E(G))$ , όπου  $V$  και  $E$  είναι τα σύνολα των κορυφών και των ακμών αντίστοιχα. Το πλήθος των κορυφών ενός γραφήματος, συμβολίζεται με  $n = |V|$ , ονομάζεται **τάξη** (order) του γραφήματος, και το πλήθος των ακμών του γραφήματος ονομάζεται **μέγεθος** (size) και συμβολίζεται  $m = |E|$ .

=====

Αν οι αριθμοί αυτοί είναι πεπερασμένοι, τότε και το γράφημα λέγεται **πεπερασμένο** (finite) και συμβολίζεται με  $(n, m)$ , αλλιώς λέγεται **άπειρο** (infinite).

Αν το πλήθος των κορυφών του γραφήματος είναι μηδέν ( $n=0$ ), το γράφημα ονομάζεται **κενό** (empty) και αν αποτελείται από μία μόνο κορυφή ( $n=1$ ) ονομάζεται **ασήμαντο** (trivial).

Αν το πλήθος των ακμών του γραφήματος είναι μηδέν ( $m=0$ ), το γράφημα ονομάζεται **μηδενικό** (null) και συμβολίζεται με  $N_n$ .

Δυο κορυφές που ενώνονται από μία ακμή ονομάζονται **τερματικά σημεία** (end points). Αν μια ακμή  $e$  έχει τα  $u, v$  ως τερματικά σημεία, τότε η  $e$  ονομάζεται **προσπίπτουσα** (incident) στα σημεία  $u, v$  ή λέμε ότι η  $e$  **ενώνει** (joins) τα  $u, v$ . Ακόμη, η ακμή  $e$  συμβολίζεται με  $(u, v)$  ή  $(v, u)$ . Αντίστοιχα, ορίζεται ότι το σημείο  $u$  είναι γειτονικό (adjacent) του  $v$ , και αντίστροφα. Στην αντίθετη περίπτωση που τα δύο αυτά σημεία δεν ενώνονται, ονομάζονται **μη γειτονικά** ή **ανεξάρτητα** (independent).

Μια ακμή που έχει ταυτόσημα τερματικά σημεία ονομάζεται **βρόγχος** (loop), ενώ δύο ή περισσότερες ακμές που ενώνουν το ίδιο ζεύγος κορυφών ονομάζονται **παράλληλες** (parallel).

### Ορισμός 3.2

Η **γειτονιά** (neighborhood) μιας κορυφής  $v$ ,  $N(v)$ , είναι το σύνολο των κορυφών που ορίζεται από τη σχέση:  $N(v) = \{u \in V(G) : (v, u) \in E(G)\}$

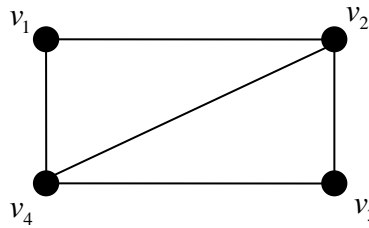
Το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε μια κορυφή  $v_i$  ονομάζεται **βαθμός** (degree) ή **σθένος** (valency) της κορυφής  $v_i$  και συμβολίζεται με  $d(v_i)$ . Δηλαδή ισχύει  $d(v) = |N(v)|$ .

Με  $d(G) = \min\{d(v_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$  συμβολίζεται ο **ελάχιστος βαθμός** των κορυφών του γραφήματος  $G$ , ενώ με  $D(G) = \max\{d(v_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$  συμβολίζεται ο **μέγιστος βαθμός** των κορυφών του γραφήματος  $G$ .

Αν για κάποια κορυφή ισχύει  $d(v_i) = 0$  η κορυφή ονομάζεται **απομονωμένη** (isolated), ενώ αν ισχύει  $d(v_i) = 1$  η κορυφή ονομάζεται **εκκρεμής** (pendant).

**Παράδειγμα 3.1**

Έστω το γράφημα:



Ισχύει  $d(v_1) = d(v_3) = 2$ ,  $d(v_2) = d(v_4) = 3$ , οπότε  $d(G) = 2$  και  $D(G) = 3$ . ◇

**Ορισμός 3.3**

**Περίπατος** (walk) από μια κορυφή  $v_1$  προς μια κορυφή  $v_i$  είναι μια ακολουθία  $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \dots, e_{i-1}, v_i)$  από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές, που αρχίζει και τελειώνει με κορυφή, έτσι ώστε η ακμή  $e_j$  να προσπίπτει στις κορυφές  $v_j$  και  $v_{j+1}$ , για  $1 < j < i$ .

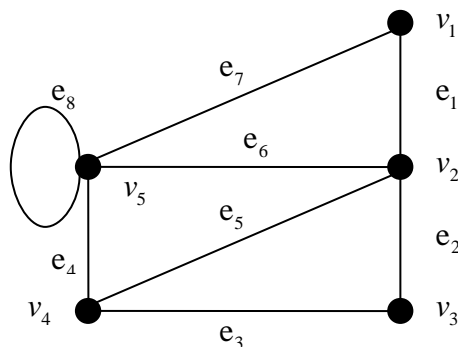
**Ίχνος** (trail) ονομάζεται ένας περίπατος στον οποίο κάθε ακμή εμφανίζεται μόνο μια φορά.

**Μονοπάτι** (path) ονομάζεται ένα ίχνος στο οποίο κάθε κορυφή εμφανίζεται μόνο μια φορά. Συγκεκριμένα, ένα μονοπάτι δεν τέμνεται με τον εαυτό του και δεν περιέχει βρόχους.

Το πλήθος των ακμών ενός μονοπατιού ονομάζεται **μήκος του μονοπατιού**.

**Παράδειγμα 3.2**

Έστω το γράφημα



=====

Ένας περίπατος είναι η ακολουθία  $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_5, v_2, e_2, v_3)$ .

Παρατηρούμε ότι σε έναν περίπατο μια ακμή ή μια κορυφή μπορεί να εμφανίζεται περισσότερο από μία φορά.

Ένα ίχνος είναι η ακολουθία  $(v_2, e_5, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_5)$  και ένα μονοπάτι είναι η ακολουθία  $(v_2, e_5, v_4, e_4, v_5)$ . ◇

### Ορισμός 3.4

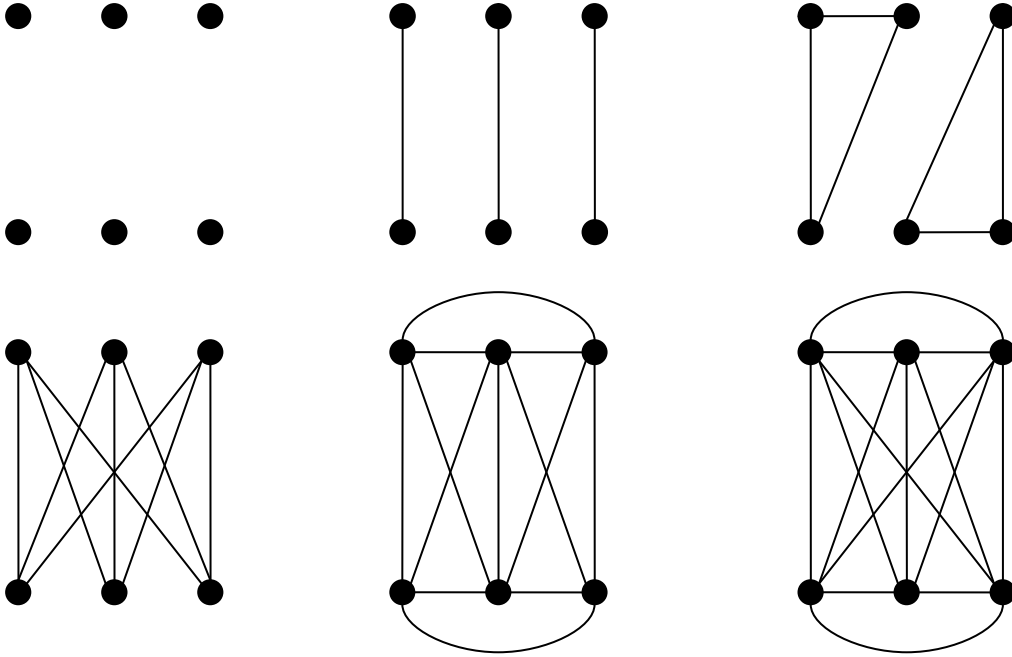
Οι κορυφές  $v_1$  και  $v_i$ , όπου ένας περίπατος αρχίζει και τελειώνει, ονομάζονται **αρχή** (origin) και **τέρμα** (terminus) αντίστοιχα. Από κοινού οι  $v_1$  και  $v_i$  ονομάζονται **τερματικές** (terminal), ενώ οι υπόλοιπες κορυφές του περιπάτου ονομάζονται **εσωτερικές** (internal) ή **ενδιάμεσες** (intermediate). Αν οι δύο τερματικές κορυφές ταυτίζονται, τότε το αντίστοιχο ίχνος ονομάζεται **κλειστό** (closed) ίχνος ή απλούστερα **κύκλωμα** (circuit), αλλιώς ονομάζεται **ανοιχτό** (open). Αντίστοιχα ορίζουμε κλειστό μονοπάτι ή **κύκλο** (cycle) και ανοιχτό μονοπάτι, αν οι τερματικές κορυφές ταυτίζονται ή όχι.

---

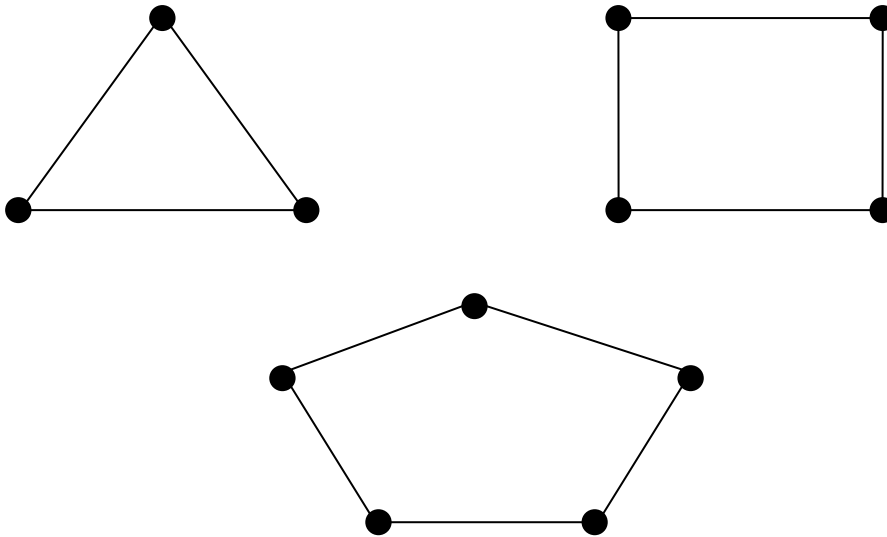
### 3.1.2 Κατηγορίες γραφημάτων

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες γραφημάτων από τις οποίες οι σημαντικότερες είναι οι εξής:

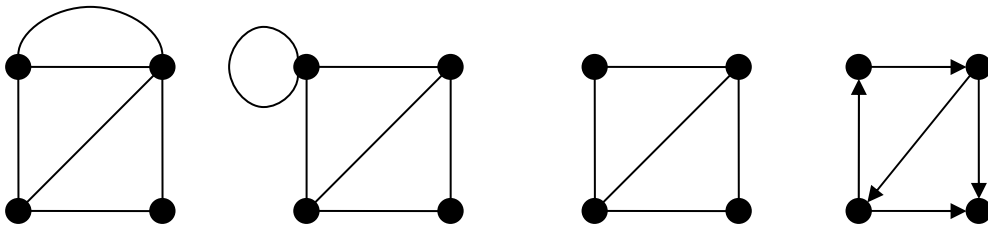
- Ένα γράφημα λέγεται **κανονικό** (regular) βαθμού  $k$ , αν  $d(v_i) = k$ , για κάθε κορυφή  $v_i$  του γραφήματος, (βλέπε σχήμα 3.1).  
Κάθε κανονικό γράφημα βαθμού  $k = 2$  ονομάζεται **κυκλικό γράφημα** (circuit graph) και συμβολίζεται με  $C_n$ , (βλέπε σχήμα 3.2).  
Κάθε κανονικό γράφημα βαθμού  $k = 3$  ονομάζεται **κυβικό** (cubic).
- Κάθε γράφημα χωρίς βρόγχους ή παράλληλες ακμές ονομάζεται **απλό** (simple) και οι ακμές του ονομάζονται **σύνδεσμοι** (links).
- Ένα γράφημα που έχει παράλληλες ακμές, αλλά δεν έχει βρόγχους ονομάζεται **πολυ-γράφημα** (multi-graph), (βλέπε σχήμα 3.3).
- Ένα γράφημα με ή χωρίς παράλληλες ακμές, που περιέχει βρόγχους ονομάζεται **ψευδογράφημα** (pseudograph), (βλέπε σχήμα 3.3).
- Αν από ένα γράφημα διαγραφούν οι βρόγχοι και για κάθε ζεύγος κορυφών όλες οι παράλληλες ακμές εκτός από μία, το γράφημα που προκύπτει ονομάζεται **υποκείμενο** (underlying) απλό γράφημα, (βλέπε σχήμα 3.3).
- **Κατευθυνόμενο γράφημα** (directed graph, digraph) ή **προσανατολισμένο** (oriented) ονομάζεται ένα γράφημα  $D(V, A)$  που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών  $V$  και ένα σύνολο  $A$  από διατεταγμένα ζεύγη κορυφών, που ονομάζονται **τόξα** (arcs). Ένας τέτοιο γράφημα δεν επιτρέπεται να έχει παράλληλες ακμές, ενώ μπορεί να έχει βρόχους, (βλέπε σχήμα 3.3).
- **Κατευθυνόμενο πολυ-γράφημα** (directed multi-graph) ή **προσανατολισμένο** (oriented) ονομάζεται ένας κατευθυνόμενο γράφημα το οποίο επιτρέπεται να έχει παράλληλες ακμές.
- Ένα απλό γράφημα, του οποίου ενώνονται δύο οποιεσδήποτε κορυφές ονομάζεται **πλήρες** (complete) και συμβολίζεται με  $K_n$ , (βλέπε σχήμα 3.4). Το  $K_n$  είναι κανονικό γράφημα βαθμού  $n-1$ .
- Κάθε ακμή  $e$  ενός γραφήματος μπορεί να χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό που ονομάζεται **βάρος** (weight) και συμβολίζεται με  $w(e)$ . Στην περίπτωση αυτή το γράφημα ονομάζεται **βεβαρημένο** (weighted). Το βάρος ενός τέτοιου γραφήματος ισούται με το άθροισμα των βαρών των ακμών του.



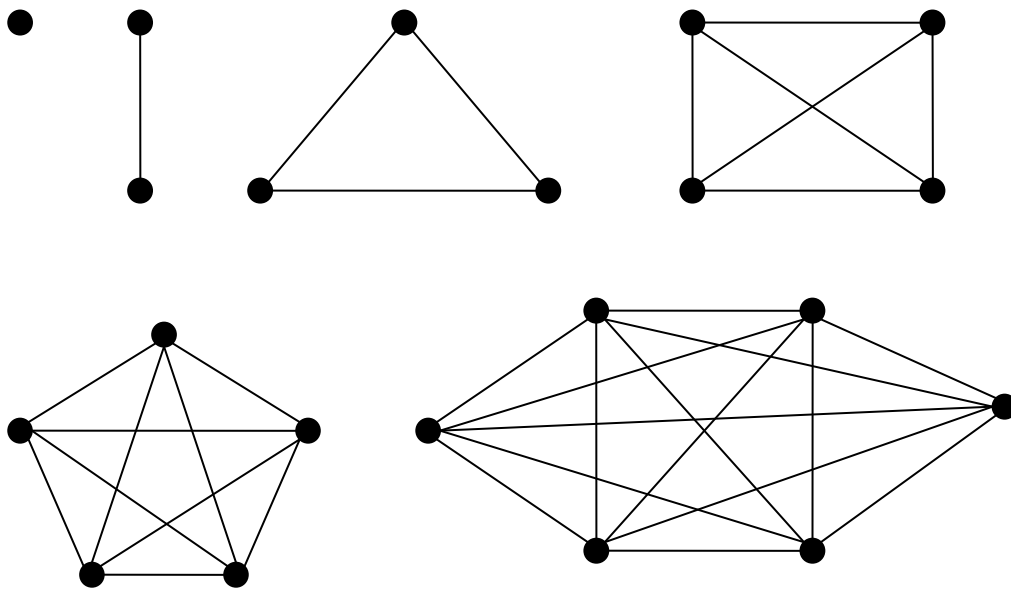
Σχήμα 3.1: Κανονικά γραφήματα βαθμού  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  και τάξης  $n = 6$ .



Σχήμα 3.2: Κυκλικά γραφήματα  $C_3$ ,  $C_4$  και  $C_5$ .



Σχήμα 3.3: Πολυ-γράφημα, ψευδογράφημα, υποκείμενο και κατευθυνόμενο γράφημα.



Σχήμα 3.4: Πλήρη γραφήματα τάξης από  $n = 1$  μέχρι και  $n = 6$ .

**Ορισμός 3.5**

Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα ορίζεται ως **εσωτερικός βαθμός**  $\vec{d}(v_k)$  το πλήθος των ακμών που εισέρχονται στην κορυφή  $v_k$ , ενώ ως **εξωτερικός βαθμός** ορίζεται το πλήθος των ακμών που εξέρχονται από την κορυφή  $v_k$ .

**Ορισμός 3.6**

Ένα γράφημα  $G$  είναι **συνεκτικό** (connected) αν για κάθε ζεύγος διακεκριμένων κορυφών του  $v_i, v_j$  υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή  $v_i$  στην  $v_j$ .

Το συνεκτικό γράφημα δεν έχει απομονωμένη κορυφή.



=====

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται **ισχυρά συνεκτικό** (strongly connected) όταν αν για κάθε ζεύγος διακεκριμένων κορυφών του  $v_i, v_j$  υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή  $v_i$  προς την  $v_j$  πεπερασμένου μήκους.

Στο ισχυρά συνεκτικό γράφημα ισχύει  $\vec{d}(v_k) \neq 0$  και  $\bar{d}(v_k) \neq 0$  για κάθε κορυφή  $v_k$  του γραφήματος.

## 3.2 Γραφήματα και πίνακες

Υπάρχει μια άμεση σχέση μεταξύ γραφημάτων και πινάκων, καθώς κάθε γράφημα μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν μη-αρνητικό πίνακα διατηρώντας τις ιδιότητές του (συνδεσιμότητα μεταξύ των κορυφών ή τα βάρη του (αν έχει)) αλλά και κάθε τετραγωνικός πίνακας μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα διατηρώντας τις ιδιότητές του.

### 3.2.1 Αναπαράσταση γραφημάτων με μη-αρνητικούς πίνακες

Οι δύο σημαντικές κατηγορίες πινάκων, οι οποίες αναπαριστούν τα γραφήματα, είναι: τετραγωνικοί πίνακες και μη τετραγωνικοί πίνακες. Στους τετραγωνικούς πίνακες, το σύνολο  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  είναι οι γραμμές και στήλες του πίνακα, στους μη τετραγωνικούς πίνακες οι γραμμές του πίνακα είναι  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  και οι στήλες του πίνακα είναι το σύνολο  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Οι πίνακες γειτνίασης και βαρών ανήκουν στην πρώτη κατηγορία πινάκων, οι πίνακες πρόσπτωσης στη δεύτερη.

#### Ορισμός 3.7

Έστω  $G$  ένα απλό γράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix) του γραφήματος  $G$  ονομάζεται ένας  $n \times n$  πίνακας  $A = (a_{ij})$  όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Σχόλια: i)** Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι ο πίνακας γειτνίασης είναι *συμμετρικός* πίνακας, με στοιχεία 0,1, και τα διαγώνια στοιχεία είναι πάντα 0. Οι τρεις αυτές συνθήκες είναι ικανές για να χαρακτηριστεί ένας πίνακας ως πίνακας γειτνίασης κάποιου απλού γραφήματος.

**ii)** Ο πίνακας γειτνίασης ενός συνεκτικού απλού γραφήματος είναι ανάγωγος.

**iii)** Σε έναν πίνακα γειτνίασης χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι ο βαθμός της  $v_k$  κορυφής του γραφήματος (Ορισμός 3.2) ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της  $k$  γραμμής/στήλης του πίνακα γειτνίασης του γραφήματος.

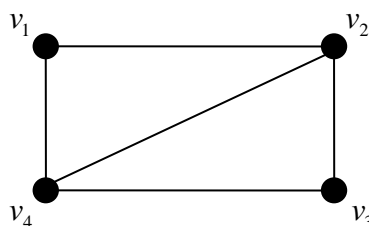
---



---

**Παράδειγμα 3.3**

Για το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 3.1



ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Προφανώς επιβεβαιώνονται τα σχόλια που διατυπώθηκαν προηγουμένα όσο αφορά τη συμμετρικότητα του πίνακα  $A$  καθώς και το βαθμό των κορυφών του γραφήματος. Στο Παράδειγμα 3.1 υπολογίσαμε ότι οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος είναι:

$$d(v_1) = d(v_3) = 2, \quad d(v_2) = d(v_4) = 3$$

Το άθροισμα των στοιχείων της 1<sup>ης</sup> γραμμής/στήλης πράγματι ταυτίζεται με το βαθμό της κορυφής  $v_1$ , μια και ισχύει  $\sum_{j=1}^4 a_{1j} = \sum_{i=1}^4 a_{i1} = 2 = d(v_1)$ .

Όμοια, το άθροισμα των στοιχείων της 2<sup>ης</sup> γραμμής/στήλης ταυτίζεται με το βαθμό της κορυφής  $v_2$ , μια και ισχύει  $\sum_{j=1}^4 a_{2j} = \sum_{i=1}^4 a_{i2} = 3 = d(v_2)$ ,

το άθροισμα των στοιχείων της 3<sup>ης</sup> γραμμής/στήλης ταυτίζεται με το βαθμό της κορυφής  $v_3$ , μια και ισχύει  $\sum_{j=1}^4 a_{3j} = \sum_{i=1}^4 a_{i3} = 2 = d(v_3)$  και

το άθροισμα των στοιχείων της 4<sup>ης</sup> γραμμής/στήλης ταυτίζεται με το βαθμό της κορυφής  $v_4$ , μια και ισχύει  $\sum_{j=1}^4 a_{4j} = \sum_{i=1}^4 a_{i4} = 3 = d(v_4)$ .  $\diamond$

Ο προηγούμενος ορισμός του πίνακα γειτνίασης δεν καλύπτει την περίπτωση ενός γραφήματος που περιέχει βρόχους ή και παράλληλες ακμές. Στην περίπτωση που

=====

έχουμε ένα τέτοιο γράφημα μπορούμε να ορίσουμε έναν τροποποιημένο πίνακα γειτνίασης, ο οποίος δεν έχει τις ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης, όπως αυτός ορίστηκε στον Ορισμό 3.7.

**Ορισμός 3.8**

Έστω  $G$  ένα ψευδογράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . **Τροποποιημένος πίνακας γειτνίασης** του γραφήματος  $G$  ονομάζεται ένας  $n \times n$  πίνακας  $Q = (q_{ij})$ , όπου:

-τα διαγώνια στοιχεία  $q_{ii} = c$ ,  $c$  θετικός ακέραιος αριθμός που ισούται με το πλήθος των βρόχων που αντιστοιχούν στην κορυφή  $v_i$  και  $q_{ii} = 0$ , όταν δεν υπάρχει βρόχος, και

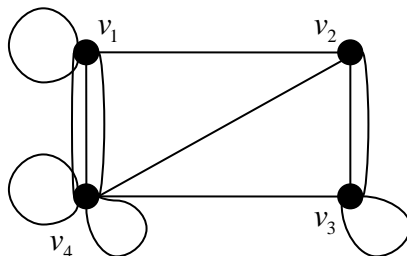
-τα στοιχεία  $q_{ij}$  έχουν τιμή ίση με το πλήθος των ακμών που ενώνουν τις κορυφές  $v_i, v_j$ .

**Σχόλια :** i) Ο τροποποιημένος πίνακας γειτνίασης ενός ψευδογραφήματος  $G$  δεν είναι  $\{0,1\}$  πίνακας, δεν έχει μόνο 0 στη διαγώνιο, είναι πίνακας *συμμετρικός*.

ii) Επίσης, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι όταν μελετάμε ένα ψευδογράφημα χρησιμοποιούμε τον πίνακα γειτνίασης του αντίστοιχου υποκείμενου γραφήματος και όχι τον τροποποιημένο πίνακα γειτνίασης του, όπως αυτός αναφέρθηκε στον παραπάνω Ορισμό 3.8. Ο ορισμός αυτός χρησιμοποιείται μόνο για τη μαθηματική έκφραση της αναπαράστασης του ψευδογραφήματος.

**Παράδειγμα 3.4**

Έστω το γράφημα:



Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad \diamond$$

Τέλος, στην περίπτωση κατευθυνόμενου γραφήματος χρειαζόμαστε ένα νέο ορισμό για τον πίνακα γειτνίασης του αντίστοιχου γραφήματος, ο οποίος είναι ο ακόλουθος.

### Ορισμός 3.9

Έστω  $G$  ένα κατευθυνόμενο γράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . **Πίνακας γειτνίασης** του **κατευθυνόμενου** γραφήματος  $G$  ονομάζεται ένας  $n \times n$  πίνακας  $M = (a_{ij})$ , όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν υπάρχει τόξο από την } v_i \text{ προς την κορυφή } v_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

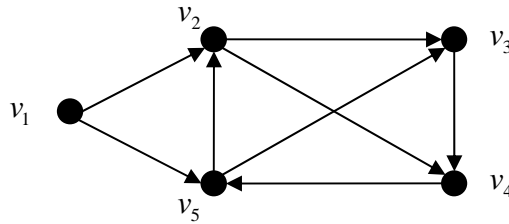
**Σχόλια :** i) Από τον παραπάνω ορισμό είναι προφανές ότι ο πίνακας γειτνίασης του κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ένας  $\{0,1\}$  πίνακας, με στοιχεία 0 στη διαγώνιο και δεν είναι συμμετρικός.

ii) Επίσης χρειάζεται να παρατηρήσουμε ότι ο  $\bar{d}(v_k)$  εξωτερικός ( $\bar{d}(v_k)$  εσωτερικός) βαθμός της  $v_k$  κορυφής του γραφήματος (Ορισμός 3.5) ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της  $k$  γραμμής (στήλης) του πίνακα γειτνίασης του κατευθυνόμενου γραφήματος.

iii) Ο πίνακας γειτνίασης ενός ισχυρά συνεκτικού (Ορισμός 3.6) κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  είναι ανάγωγος, [9, Theorem 6.2.24].

**Παράδειγμα 3.5**

Έστω το κατευθυνόμενο γράφημα:



Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

Προφανώς επιβεβαιώνονται τα σχόλια που διατυπώθηκαν προηγουμένα όσο αφορά τη μη συμμετρικότητα του πίνακα  $A$  καθώς και τον εσωτερικό (εξωτερικό) βαθμό κάθε κορυφής του παραπάνω κατευθυνόμενου γραφήματος. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{d}(v_1) &= 0, & \bar{d}(v_2) &= 2, & \bar{d}(v_3) &= 2, & \bar{d}(v_4) &= 2, & \bar{d}(v_5) &= 2, \\ \bar{d}(v_1) &= 2, & \bar{d}(v_2) &= 2, & \bar{d}(v_3) &= 1, & \bar{d}(v_4) &= 1, & \bar{d}(v_5) &= 2. \end{aligned}$$

όπου  $\bar{d}(v_i)$  είναι ο εσωτερικός βαθμός της κορυφής  $v_i$ ,  $\bar{d}(v_i)$  είναι ο εξωτερικός βαθμός της  $v_i$ . Παρατηρούμε ότι επαληθεύονται τα σχόλια που σχετίζονται με το βαθμό των κορυφών του κατευθυνόμενου γραφήματος, επειδή :

Το  $\bar{d}(v_1) = 0 = \sum_{i=1}^5 a_{i1}$ , άθροισμα των στοιχείων της πρώτης στήλης του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_1) = 2 = \sum_{j=1}^5 a_{1j}$ , άθροισμα των στοιχείων της πρώτης γραμμής του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_2) = 2 = \sum_{i=1}^5 a_{i2}$ , άθροισμα των στοιχείων της δεύτερης στήλης του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_2) = 2 = \sum_{j=1}^5 a_{2j}$ , άθροισμα των στοιχείων της δεύτερης γραμμής του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_3) = 2 = \sum_{i=1}^5 a_{i3}$ , άθροισμα των στοιχείων της τρίτης στήλης του  $A$ .

=====

Το  $\bar{d}(v_3) = 1 = \sum_{j=1}^5 a_{3j}$ , άθροισμα των στοιχείων της τρίτης γραμμής του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_4) = 2 = \sum_{i=1}^5 a_{i4}$ , άθροισμα των στοιχείων της τέταρτης στήλης του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_4) = 1 = \sum_{j=1}^5 a_{4j}$ , άθροισμα των στοιχείων της τέταρτης γραμμής του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_5) = 2 = \sum_{i=1}^5 a_{i5}$ , άθροισμα των στοιχείων της πέμπτης στήλης του  $A$ .

Το  $\bar{d}(v_5) = 2 = \sum_{j=1}^5 a_{5j}$ , άθροισμα των στοιχείων της πέμπτης γραμμής του  $A$ .  $\diamond$

Στην περίπτωση που το κατευθυνόμενο γράφημα έχει βρόχους ή παράλληλες ακμές μπορούμε να ορίσουμε έναν τροποποιημένο πίνακα γειτνίασης παρόμοιο με αυτόν του Ορισμού 3.8, μόνο που τα στοιχεία  $a_{ij}$  θα έχουν τιμή ίση με το πλήθος των τόξων από τη  $v_i$  προς τη  $v_j$ . Ο τροποποιημένος αυτός πίνακας γειτνίασης δεν είναι συμμετρικός, ούτε είναι  $\{0,1\}$  πίνακας και δεν έχει μόνο 0 στη διαγώνιο.

### Ορισμός 3.10

Έστω  $G$  ένα βεβαρημένο γράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . **Πίνακας βαρών** του βεβαρημένου γραφήματος  $G$  ορίζεται ένας  $n \times n$  πίνακας  $W = (w_{ij})$ , όπου

$$w_{ij} = \begin{cases} w, & \text{όπου } w \text{ το βάρος της } v_i v_j \in E(G) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

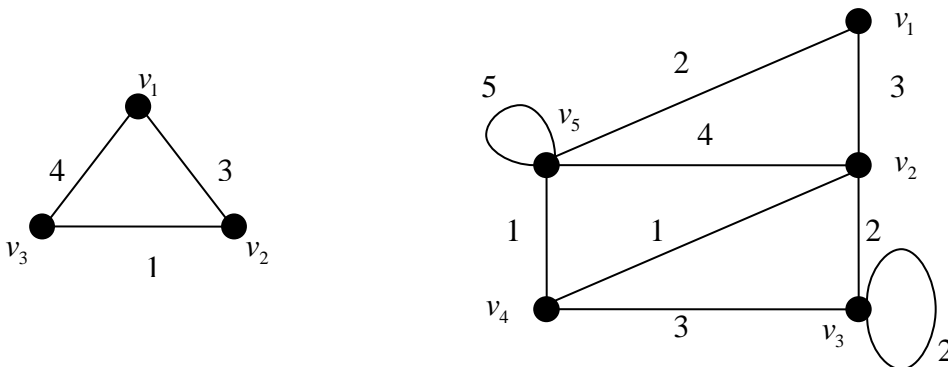
για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Σχόλια: i)** Ο πίνακας βαρών ενός μη κατευθυνόμενου βεβαρημένου γραφήματος είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας, δεν είναι  $\{0,1\}$  πίνακας, δεν έχει μόνο 0 ως διαγώνια στοιχεία, και είναι πίνακας *συμμετρικός*.

**ii)** Στην περίπτωση κατευθυνόμενου βεβαρημένου γραφήματος θέτουμε στον αντίστοιχο πίνακα βαρών το στοιχείο  $w_{ij} = w$ , όταν υπάρχει βάρος από την κορυφή  $v_i$  προς την κορυφή  $v_j$  για κάθε  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , διαφορετικά θέτουμε τα στοιχεία να είναι ίσα με 0. Προφανώς στην περίπτωση κατευθυνόμενου βεβαρημένου γραφήματος, ο πίνακας βαρών του δεν είναι συμμετρικός.

**Παράδειγμα 3.6**

Έστω τα βεβαρημένα γραφήματα:

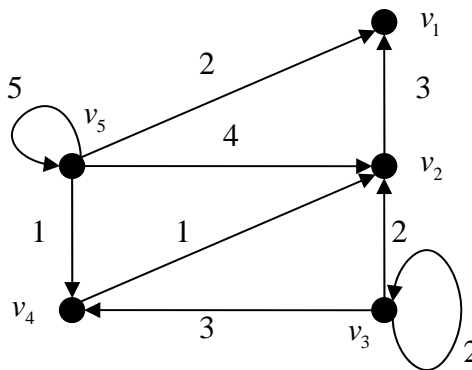


Οι αντίστοιχοι πίνακες βαρών είναι:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

Αν το δεύτερο παραπάνω βεβαρημένο γράφημα είναι κατευθυνόμενο, όπως παρουσιάζεται στη συνέχεια,



τότε ο αντίστοιχος πίνακας βαρών είναι:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

◇



---

**Ορισμός 3.11**

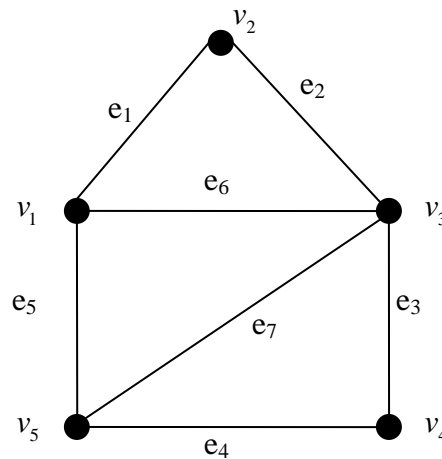
Έστω ένα γράφημα  $G$  με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  και  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . **Πίνακας πρόσπτωσης**  $B = (\beta_{ij})$  ονομάζεται ένας μη τετραγωνικός  $n \times m$  πίνακας τέτοιος ώστε

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν η πλευρά } e_j \text{ προσπίπτει στην κορυφή } v_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $j = 1, 2, \dots, m$ .

**Παράδειγμα 3.7**

Έστω το γράφημα:



Ο αντίστοιχος πίνακας πρόσπτωσης είναι ο ακόλουθος:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} \end{matrix}$$

◇

**3.2.2 Αναπαράσταση μη-αρνητικών πινάκων με γραφήματα**

Κάθε μη-αρνητικός  $n \times n$  πίνακας  $A$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως γράφημα με τον εξής τρόπο: το πλήθος των κορυφών είναι ίσο με το  $n$  (μέγεθος του πίνακα  $A$ ). Κάθε στοιχείο  $a_{ij}$  αντιπροσωπεύει την ακμή που συνδέει τις κορυφές  $v_i, v_j$  (συγκεκριμένα ξεκινάει από την  $v_i$  και καταλήγει στη  $v_j$  κορυφή). Στην περίπτωση που δίνεται ένας μη-αρνητικός πίνακας, αυτός μπορεί να είναι ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος ή ο πίνακας βαρών του. Έτσι, αν θεωρήσουμε το δοθέντα πίνακα ως πίνακα γειτνίασης ενός γραφήματος, τότε αυτός αναπαριστάται μέσω ενός απλού γραφήματος βάση του Ορισμού 3.7 και αντίστοιχα αν θεωρήσουμε το δοθέντα πίνακα ως πίνακα βαρών, τότε ο πίνακας αυτός αναπαριστάται μέσω ενός βεβαρημένου γραφήματος ή ψευδογραφήματος βάση του Ορισμού 3.10. Στην περίπτωση που ο πίνακας βαρών δεν είναι συμμετρικός, το γράφημα αυτό είναι κατευθυνόμενο.

**Παράδειγμα 3.8**

Έστω οι μη-αρνητικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

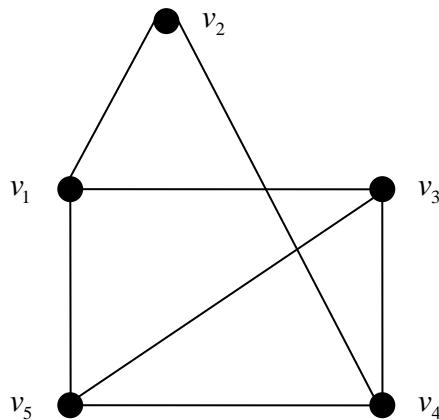
Ο πίνακας  $A$  είναι συμμετρικός με στοιχεία 0,1, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως πίνακας γειτνίασης απλού γραφήματος (Ορισμός 3.7) και να έχει αντίστοιχο γράφημα αυτό του Σχήματος 3.5.

Οι άλλοι πίνακες δεν είναι συμμετρικοί.

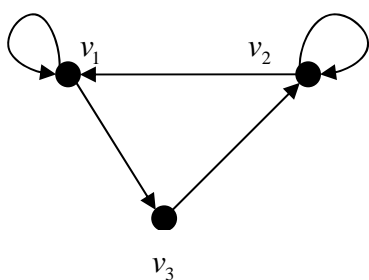
Ο πίνακας  $B$  είναι μη-συμμετρικός με στοιχεία 0,1, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως πίνακας γειτνίασης ενός κατευθυνόμενου γραφήματος (Σχόλιο (i)-Ορισμός 3.9) και να έχει αντίστοιχο γράφημα αυτό του Σχήματος 3.6.

Οι πίνακες  $C, D$  είναι τυχαίοι μη-αρνητικοί πίνακες, οπότε μπορεί να θεωρηθούν ως πίνακες βαρών κατευθυνόμενων γραφημάτων (Σχόλιο (ii)-Ορισμός 3.10). Τα αντίστοιχα γραφήματα παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.7 και 3.8. Ιδιαίτερα για τον πίνακα  $D$  παρατηρούμε ότι είναι πίνακας κατά γραμμή στοχαστικός και θα

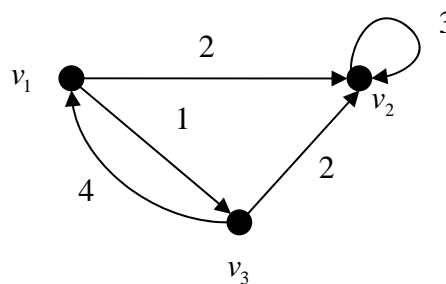
μπορούσε να είναι ένας πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης σε ένα Hidden Markov Models. ◇



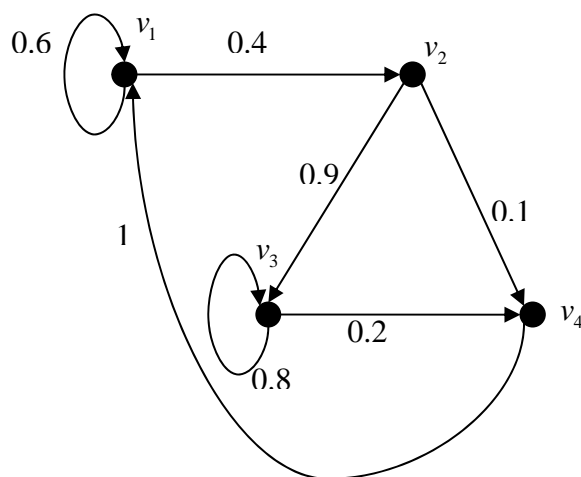
Σχήμα 3.5



Σχήμα 3.6



Σχήμα 3.7



Σχήμα 3.8

---



---

### 3.2.3 Φασματική ακτίνα και θεωρία Perron-Frobenius

Υπάρχουν κάποιες σημαντικές προτάσεις και θεωρήματα τα οποία παρέχουν τη δυνατότητα εξαγωγής πληροφοριών για ένα γράφημα μέσω του αντίστοιχου πίνακά του. Η απόδειξη των ακόλουθων θεωρημάτων και προτάσεων, όπου αυτή παραλείπεται μπορεί να αναζητηθεί σε σύγγραμμα Διακριτών Μαθηματικών, που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, [2, 7, 15, 17, 20, 23].

#### Πρόταση 3.1

Εστω  $A$  ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος  $G$  με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

- i) Κάθε στοιχείο  $a_{ij}^{(k)}$  του πίνακα  $A^k = (a_{ij}^{(k)})$  με  $k \geq 1$  δίνει το πλήθος των διαφορετικών  $v_i v_j$  περιπάτων μήκους  $k$  στο  $G$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$ .
- ii) Για  $k = 2$ , ισχύει  $a_{ii}^{(k)} = d(v_i)$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$ .

#### Παράδειγμα 3.9

Εστω το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 3.1. Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.3 είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το στοιχείο  $a_{11}$  του πίνακα  $A$  ισούται με 0, το πλήθος των περιπάτων μήκους 1 από τη  $v_1$  στη  $v_1$ , καθώς δεν υπάρχει τέτοιος περίπατος.

Το στοιχείο  $a_{12}$  ισούται με 1, το οποίο είναι και το πλήθος των περιπάτων μήκους 1 από τη  $v_1$  στη  $v_2$ . Ο περίπατος αυτός είναι ο εξής:  $v_1 v_2$ .

Αντίστοιχα συνδέονται και τα υπόλοιπα στοιχεία  $a_{ij}$  του πίνακα  $A$  με το πλήθος των περιπάτων μήκους 1 από τη  $v_i$  στη  $v_j$ . Επίσης ισχύει:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Το στοιχείο  $a_{11}$  του πίνακα  $A^2$  ισούται με 2, το οποίο είναι και το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από τη  $v_1$  στη  $v_1$ . Οι περίπατοι αυτοί είναι οι εξής:  $v_1v_2v_1$ ,  $v_1v_4v_1$ .

Το στοιχείο  $a_{12}$  ισούται με 1, το οποίο είναι και το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από τη  $v_1$  στη  $v_2$ . Ο περίπατος αυτός είναι ο εξής:  $v_1v_4v_2$ .

Αντίστοιχα συνδέονται και τα υπόλοιπα στοιχεία  $a_{ij}$  του πίνακα  $A^2$  με το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από τη  $v_i$  στη  $v_j$ . Επίσης ισχύει:

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Το στοιχείο  $a_{11}$  του πίνακα  $A^3$  ισούται με 2, το οποίο είναι και το πλήθος των περιπάτων μήκους 3 από τη  $v_1$  στη  $v_1$ . Οι περίπατοι αυτοί είναι οι εξής:  $v_1v_2v_4v_1$ ,  $v_1v_4v_2v_1$ .

Το στοιχείο  $a_{12}$  ισούται με 5, το οποίο είναι και το πλήθος των περιπάτων μήκους 3 από τη  $v_1$  στη  $v_2$ . Οι περίπατοι αυτοί είναι οι εξής:  $v_1v_4v_3v_2$ ,  $v_1v_4v_1v_2$ ,  $v_1v_2v_4v_2$ ,  $v_1v_2v_3v_2$ ,  $v_1v_2v_4v_2$ .

Αντίστοιχα συνδέονται και τα υπόλοιπα στοιχεία  $a_{ij}$  του πίνακα  $A^3$  με το πλήθος των περιπάτων μήκους 3 από τη  $v_i$  στη  $v_j$ . ◇

### Πρόταση 3.2

Αν  $A$  ο πίνακας γεινίασης του κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , τότε το  $(i, j)$  τάξης στοιχείο  $a_{ij}^{(n)}$  του  $A^n$  (όπου  $n \geq 1$ ) δίνει το πλήθος των διατεταγμένων περιπάτων από την κορυφή  $v_i$  προς την κορυφή  $v_j$  μήκους  $n$  του κατευθυνόμενου γραφήματος.

### Παράδειγμα 3.10

Έστω το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 3.5. Ο αντίστοιχος πίνακας γεινίασης είναι

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο  $a_{12}$  ισούται με 1, που είναι και το πλήθος των διατεταγμένων περιπάτων από την κορυφή  $v_1$  προς την κορυφή  $v_2$  μήκους 1. Ο περίπατος αυτός είναι  $v_1v_2$ .

Αντίθετα, το στοιχείο  $a_{13}$  ισούται με 0 και παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κάποιος διατεταγμένος περίπατος από την κορυφή  $v_1$  προς την κορυφή  $v_3$  μήκους 1, όπως ήταν αναμενόμενο. Η αντιστοιχία αυτή μεταξύ των στοιχείων  $a_{ij}$  και των διατεταγμένων περιπάτων από την κορυφή  $v_i$  προς την κορυφή  $v_j$  ισχύει για όλα τα στοιχεία του  $A$ .  $\diamond$

Υπάρχει μια σχέση μεταξύ του πίνακα γειτνίασης και του πίνακα πρόσπτωσης ενός γραφήματος  $G$ , η οποία δίνεται από την επόμενη πρόταση, [23, Θεώρημα 4].

**Πρόταση 3.3**

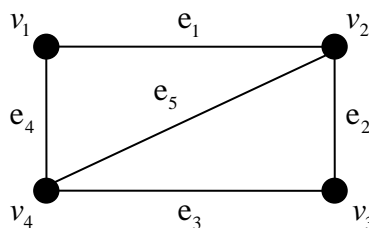
Για κάθε γράφημα  $G$  με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ισχύει  $BB^T = A + C$ , όπου  $A$  είναι ο πίνακας γειτνίασης του  $G$  και  $C = (c_{ij})$  ένας  $n \times n$  πίνακας με

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ d(v_i), & \text{αν } i = j \end{cases}$$

και  $B^T$  ο ανάστροφος του πίνακα πρόσπτωσης  $B$  του  $G$ .

**Παράδειγμα 3.11**

Έστω το γράφημα:



Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.11 ο πίνακας πρόσπτωσης του παραπάνω γραφήματος είναι :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

και ο πίνακας γειτνίασης (Ορισμός 3.7 – Παράδειγμα 3.3 και 3.9) είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Επίσης } BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3 ο πίνακας  $C = BB^T - A$ , μετά από αντικατάσταση των αντίστοιχων πινάκων, υπολογίζεται ότι είναι

$$C = BB^T - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ο οποίος επαληθεύει τον ορισμό του  $C$  στην Πρόταση 3.3.  $\diamond$

Σύμφωνα με το Σχόλιο (i) στον Ορισμό 3.7 ο πίνακας γειτνίασης  $A$  ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  είναι συμμετρικός πίνακας, ο οποίος έχει ιδιοτιμές πραγματικούς αριθμούς (Πρόταση 1.4-ιδιότητα (9)), οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν την ακόλουθη διάταξη  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$ . Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα της Πρότασης 1.5 μπορούμε να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση. Η ακόλουθη πρόταση είναι σημαντική επειδή δίνει πληροφορίες για τον εντοπισμό των ιδιοτιμών ενός υπογραφήματος του αρχικού μη κατευθυνόμενου γραφήματος, που προκύπτει από το αρχικό γράφημα αφαιρώντας του την κορυφή  $v_n$ , χωρίς των υπολογισμό αυτών των ιδιοτιμών. Συνδυάζοντας το Σχόλιο (i) του Ορισμού 3.10

συμπεραίνουμε ότι τα αποτελέσματα ισχύουν και όταν πρόκειται για μη κατευθυνόμενο βεβαρημένο γράφημα.

**Πρόταση 3.4**

Έστω  $G$  ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  και  $A$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης με  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$ . Έστω  $G'$  το υπογράφημα που προκύπτει από την αφαίρεση της κορυφής  $v_n$  του  $G$  και στο οποίο αντιστοιχεί ο πίνακας γειτνίασης  $A_1$  ως κύριος υποπίνακας του  $A$  με  $\text{rank}(A_1) = n-1$  και ιδιοτιμές  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ . Τότε ισχύει

$$\lambda_1 \leq a_1 \leq \lambda_2 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq \lambda_n. \tag{3.2}$$

**Παράδειγμα 3.12**

Έστω το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 3.1 με πίνακα γειτνίασης

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι:

$$\lambda_1 = -1.5616, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 2.5616$$

Αν αφαιρέσουμε την κορυφή  $v_4$ , το γράφημα που προκύπτει είναι:



Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης, κύριος υποπίνακας του αρχικού πίνακα γειτνίασης είναι ο ακόλουθος:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας  $A_1$  έχει ιδιοτιμές:  $a_1 = -1.4142, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 1.4142$



Προφανώς ισχύει

$$-1.5616 < a_1 = -1.4142 < -1 < \lambda_3 = a_2 = 0 < a_3 = 1.4142 < 2.5616$$

δηλαδή  $\lambda_1 < a_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = a_2 < a_3 < \lambda_4$ , επαληθεύοντας την Πρόταση 3.4.  $\diamond$

Υπενθυμίζοντας ότι οι πίνακες γειτνίασης ενός γραφήματος (Ορισμοί 3.7 και 3.8) είναι μη-αρνητικοί πίνακες και βασιζόμενοι στο Θεώρημα 2.1, διατυπώνουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει πληροφορίες για φράγματα της φασματικής ακτίνας του πίνακα γειτνίασης μη κατευθυνόμενου γραφήματος, φράγματα που εξαρτώνται από το βαθμό του γραφήματος.

### Πρόταση 3.5

Για ένα συνεκτικό γράφημα  $G$  με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , αν  $A = (a_{ij}) \in M_n$  ο πίνακας γειτνίασης του  $G$ , και  $Q = (q_{ij}) \in M_n$  ο τροποποιημένος πίνακας γειτνίασης του  $G$ , τότε ισχύουν:

$$d(G) \leq \rho(A) \leq D(G), \quad d(G) \leq \rho(Q) \leq D(G) \quad (3.3)$$

### Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε τη σχέση (3.3) μόνο για τον πίνακα γειτνίασης  $A = (a_{ij})$ , οπότε για τον  $Q = (q_{ij})$  η απόδειξη είναι ίδια, μόνο που αλλάζουν οι συμβολισμοί στα στοιχεία των πινάκων. Συνδυάζοντας τα φράγματα του Θεωρήματος 2.1 με τον Ορισμό 3.2, για τον ελάχιστο και μέγιστο βαθμό του γραφήματος, καθώς και τα σχόλια που αναφέρονται στη σχέση των βαθμών των κορυφών με το άθροισμα κατά γραμμή/στήλη των στοιχείων του πίνακα  $A = (a_{ij})$ , έχουμε:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = d(v_i) \Rightarrow \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \{d(v_i)\} = d(G) \\ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{d(v_i)\} = D(G) \end{cases}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τις παραπάνω σχέσεις στη (2.2) προκύπτουν τα φράγματα της φασματικής ακτίνας του  $A$  στην (3.3).  $\square$

**Σχόλια:** Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που έχουμε ένα κανονικό γράφημα, όλες οι κορυφές έχουν βαθμό τον ίδιο αριθμό, έστω  $k$ , και σύμφωνα με την Πρόταση 3.5 ισχύει

$$k \leq \rho(A) \leq k \Rightarrow \rho(A) = k, \quad (3.4)$$

επομένως ο φασματική ακτίνα του πίνακα γειτνίασης ισούται με το βαθμό των κορυφών του κανονικού γραφήματος.

Επειδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα ισούται με το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του, (ιδιότητα 3-(ii) της Πρότασης 1.4), χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 3.7, 3.8 και 3.10 των αντίστοιχων μη-αρνητικών πινάκων εύκολα αποδεικνύουμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 3.6**

- i) Το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα γειτνίασης  $A$  ενός γραφήματος  $G$  είναι 0.
- ii) Το άθροισμα των ιδιοτιμών του τροποποιημένου πίνακα γειτνίασης  $Q$  ενός γραφήματος  $G$  ισούται με το συνολικό πλήθος των βρόχων.
- iii) Το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα βαρών  $W$  ενός γραφήματος  $G$  ισούται με το άθροισμα των βαρών όλων των βρόχων.

**Παράδειγμα 3.13**

➤ Έστω το γράφημα του Παραδείγματος 3.1, ο πίνακας γειτνιάσής του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και οι βαθμοί του γραφήματος  $d(G) = 2$  και  $D(G) = 3$ .

Στο Παράδειγμα 3.12 υπολογίστηκαν οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , οπότε το φάσμα είναι:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -1.5616, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2.5616\}$$

Επομένως η φασματική ακτίνα είναι

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3, \lambda_4\} = \max\{|-1.5616|, |-1|, 0, 2.5616\} = 2.5616,$$

αποτέλεσμα που επαληθεύει την (3.3) της Πρότασης 3.5, καθώς  $2 < 2.5616 < 3$ .

Επίσης παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η Πρόταση 3.6(i), επειδή ισχύει

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -1.5616 + (-1) + 0 + 2.5616 = 0.$$

➤ Έστω το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 3.4. Ο τροποποιημένος

$$\text{πίνακας γειννιάσής του είναι } Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αρχικά υπολογίζουμε το άθροισμα κάθε γραμμής/στήλης του πίνακα  $Q$ , οπότε με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τους βαθμούς των κορυφών του γραφήματος. Έτσι:

$$d(v_1) = \sum_{j=1}^4 q_{1j} = 5, \quad d(v_2) = \sum_{j=1}^4 q_{2j} = 7, \quad d(v_3) = \sum_{j=1}^4 q_{3j} = 4 \quad \text{και} \quad d(v_4) = \sum_{j=1}^4 q_{4j} = 4$$

$$\text{Οπότε } d(G) = \min\{d(v_1), d(v_2), d(v_3), d(v_4)\} = 4 \quad \text{και} \quad D(G) = \max_{1 \leq i \leq 4}\{d(v_i)\} = 7$$

Επιπλέον οι ιδιοτιμές του  $Q$  είναι:  $\lambda_1 = -2.08282465384215$ ,

$$\lambda_2 = -1.15191019979303, \quad \lambda_3 = 1.86176921655445 \quad \text{και} \quad \lambda_4 = 5.37296563708073.$$

Συνεπώς, η φασματική ακτίνα είναι

$$\rho(Q) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3, \lambda_4\} = \max\{|-2.0828|, |-1.1519|, 1.8617, 5.3729\} = 5.3729,$$

αποτέλεσμα που επαληθεύει την (3.3) της Πρότασης 3.5, καθώς  $4 < 5.3729 < 7$ .

Επίσης παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η Πρόταση 3.6(ii), επειδή ισχύει

$$\sum_{i=1}^4 \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4.$$

Το γράφημα αυτό περιέχει 4 βρόχους, επομένως όπως αναμέναμε από την Πρόταση 3.6(ii), το άθροισμα των ιδιοτιμών του τροποποιημένου πίνακα  $Q$  ισούται με το συνολικό πλήθος των βρόχων.

➤ Τέλος, έστω το γράφημα που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 3.6, ο πίνακας

$$\text{βαρών του γραφήματος είναι } W = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Το φάσμα του  $W$  είναι:

$$\sigma(W) = \{\lambda_1 = -3.8423, \lambda_2 = -2.1925, \lambda_3 = -0.0033, \lambda_4 = 4.0257, \lambda_5 = 9.0124\}$$

για τις οποίες ισχύει:

$$\sum_{i=1}^5 \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = -3.8423 + (-2.1925) + (-0.0033) + 4.0257 + 9.0124 = 7$$

=====

Στο γράφημα αυτό υπάρχουν 2 βρόχοι οι οποίοι έχουν συνολικό άθροισμα  $5 + 2 = 7$ . Επομένως, όπως αναμενόταν από την Πρόταση 3.6(iii), το άθροισμα των ιδιοτιμών του πίνακα βαρών  $W$  ισούται με το άθροισμα των βαρών όλων των βρόχων αυτού του γραφήματος.  $\diamond$

Το πιο σημαντικό θεώρημα όμως της θεωρίας μη-αρνητικών πινάκων που βρίσκει εφαρμογή στα γραφήματα είναι το γενικευμένο Θεώρημα Perron-Frobenius (Θεώρημα 2.10). Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας γειτνίασης  $A$  ενός συνεκτικού γραφήματος είναι συμμετρικός και ανάγωγος πίνακας (Σχόλιο (i)-(ii)-Ορισμός 3.7), έχει ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  πραγματικούς αριθμούς (Πρόταση 1.4-ιδιότητα (9)), χρησιμοποιώντας τη διάταξη  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$  για τις ιδιοτιμές του, συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.10 με την Πρόταση 2.2, μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση.

**Θεώρημα 3.1**

Εστω  $G$  ένα συνεκτικό γράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  και  $A \in M_n$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.

- i) Η μεγαλύτερη θετική πραγματική ιδιοτιμή  $\lambda_n$  είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του  $A$  και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $x$  είναι θετικό.
- ii) Για κάθε ιδιοτιμή  $\lambda$  με  $\lambda \neq \lambda_n$  ισχύει  $|\lambda| \leq \lambda_n$ .
- iii) Η αφαίρεση οποιασδήποτε ακμής ελαττώνει το μέτρο της  $\lambda_n$ .
- iv) Αν για κάποιο  $k \geq 1$  είναι  $A^k > 0$ , τότε για  $\lambda \in \sigma(A)$  με  $\lambda \neq \lambda_n$  ισχύει  $|\lambda| < \lambda_n$ .

**Απόδειξη:**

- i)-ii) Επειδή ο πίνακας γειτνίασης  $A$  είναι μη-αρνητικός και ανάγωγος πίνακας (Σχόλιο (i)-(ii)-Ορισμός 3.7), η απόδειξη είναι τα αντίστοιχα στο Θεώρημα 2.10.
- iii) Υποθέτουμε ότι το υπογράφημα, που προκύπτει μετά την αφαίρεση τυχαίας ακμής από το αρχικό γράφημα, εξακολουθεί να είναι συνεκτικό και ότι ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι  $A_1 \in M_n$  και  $A_1 \geq 0$ . Παρατηρούμε ότι  $A - A_1 \geq 0 \Rightarrow A \geq A_1$ , οπότε εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της Πρότασης 2.2 έχουμε  $\rho(A) \equiv \lambda_n \geq \rho(A_1)$ , που είναι το ζητούμενο.

iv) Επειδή  $A^k > 0$  για κάποιο  $k \geq 1$ , ο πίνακας γειτνίασης  $A$  είναι αρχικός πίνακας (Θεώρημα 2.11), οπότε από τον Ορισμό 2.2 η ιδιοτιμή  $\lambda_n$  είναι η μοναδική πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου  $(0,0)$  και ακτίνας ίσης με  $\lambda_n$ , άρα ισχύει  $|\lambda| < \lambda_n$  για κάθε άλλη ιδιοτιμή  $\lambda$  του  $A$  με  $\lambda \neq \lambda_n$ .  $\square$

**Σχόλια: i)** Επειδή  $\lambda_n \in \sigma(A)$  είναι απλή ιδιοτιμή του  $A$  (βλέπε (i) στο Θεώρημα 3.1), η διάταξη των πραγματικών ιδιοτιμών του  $A$  στην Πρόταση 3.4 είναι  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} < \lambda_n$  και στην (3.2) η διάταξη για τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή  $a_{n-1}$  του κύριου υποπίνακά του είναι  $a_{n-1} < \lambda_n$ .

**ii)** Το Θεώρημα 3.1 εφαρμόζεται και για συνεκτικό, βεβαρημένο μη κατευθυνόμενο γράφημα, αρκεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας βαρών του γραφήματος, επειδή οι πίνακες βαρών είναι και αυτοί συμμετρικοί, μη-αρνητικοί πίνακες και ανάγωγοι.

**iii)** Ανάλογη πρόταση όπως το Θεώρημα 3.1 διατυπώνεται και σε περίπτωση κατευθυνόμενου ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, επειδή ο πίνακας γειτνίασης είναι ανάγωγος πίνακας (Σχόλια (iii)-Ορισμός 3.9).

**iv)** Στο εξής η  $\lambda_n$  είναι η μέγιστη πραγματική ιδιοτιμή, είτε του πίνακα γειτνίασης  $A$ , είτε του πίνακα βαρών  $W$ , συμβολίζεται  $\rho(G)$  και ονομάζεται **φασματικός δείκτης** ή **δείκτης του γραφήματος  $G$** .

### Παράδειγμα 3.14

➤ Έστω  $A$  ο πίνακας γειτνίασης του Παραδείγματος 3.13 με φάσμα

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -1.5616, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2.5616\},$$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

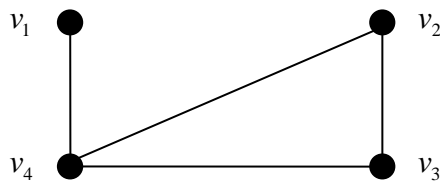
$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.5573 \\ -0.4352 \\ 0.5573 \\ -0.4352 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.7071 \\ 0 \\ -0.7071 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -0.7071 \\ 0 \\ 0.7071 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0.4352 \\ 0.5573 \\ 0.4352 \\ 0.5573 \end{pmatrix}.$$

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο Παράδειγμα 3.13, η φασματική ακτίνα του πίνακα γειτνίασης είναι  $\rho(A) = \lambda_4 = 2.5616$ , η οποία είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα γειτνίασης  $A$  και με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το  $x_4$ , για το οποίο ισχύει  $x_4 > 0$ , όπως αναμένεται από Θεώρημα 3.1 (i). Στη συνέχεια σημειώνεται  $\rho(A) \equiv \rho(G)$ ,

όπως ορίστηκε στο παραπάνω Σχόλιο (iv). Επίσης, παρατηρούμε ότι για κάθε άλλη ιδιοτιμή  $\lambda \neq \rho(G)$  επαληθεύεται το (ii) του Θεωρήματος 3.1, δηλαδή ισχύει  $|\lambda| \leq \rho(G) \Rightarrow -\rho(G) \leq \lambda \leq \rho(G)$ .

Επιπλέον από την (3.1) έχουμε  $A^2 > 0$ , επομένως για  $k = 2$  επαληθεύεται το (iv) του Θεωρήματος 3.1 και έτσι προκύπτει η ισχύουσα διάταξη  $-\rho(G) < \lambda < \rho(G)$ , για κάθε  $\lambda \neq \rho(G)$ .

• Έστω ότι αφαιρούμε την ακμή που ενώνει τις κορυφές  $v_1, v_2$ , δηλαδή προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι :

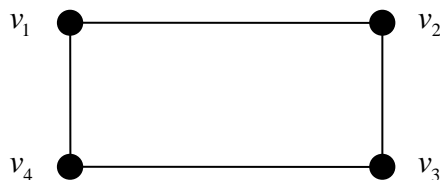
$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας γειτνίασης  $\tilde{A}_1$  έχει φάσμα:

$$\sigma(\tilde{A}_1) = \{\lambda_1 = -1.4812, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0.3111, \lambda_4 = 2.1701\}$$

και φασματική ακτίνα  $\rho(\tilde{A}_1) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3, \lambda_4\} = 2.1701$ , επομένως επαληθεύεται το (iii) του Θεωρήματος 3.1, επειδή ισχύει  $\rho(\tilde{A}_1) < \rho(G) = 2.5616$ .

• Έστω ότι αφαιρούμε από το αρχικό γράφημα την ακμή που ενώνει τις κορυφές  $v_2, v_4$ , δηλαδή προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης είναι

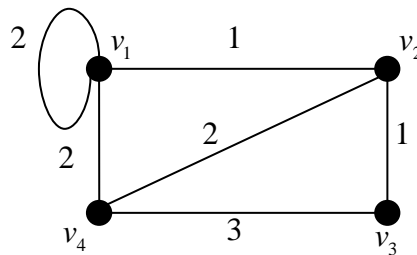
$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

και έχει φάσμα:  $\sigma(\tilde{A}_2) = \{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 2\}$

και φασματική ακτίνα  $\rho(\tilde{A}_2) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} = 2$ , επομένως επαληθεύεται το (iii) του Θεωρήματος 3.1, επειδή ισχύει  $\rho(\tilde{A}_2) < \rho(G) = 2.5616$ .

Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι, όπως αναμένεται από το (iii) του Θεωρήματος 3.1, η αφαίρεση μιας ακμής ελαττώνει το φασματικό δείκτη  $\rho(G)$ , το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε ακμή του γραφήματος και αν αφαιρέσουμε.

➤ Έστω το βεβαρημένο γράφημα:



Για να επαληθεύσουμε το Σχόλιο (ii) κατασκευάζουμε τον πίνακα βαρών του γραφήματος, που είναι

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

έχει φάσμα

$$\sigma(W) = \{\lambda_1 = -3.4994, \lambda_2 = -1.0276, \lambda_3 = 1.3404, \lambda_4 = 5.1867\},$$

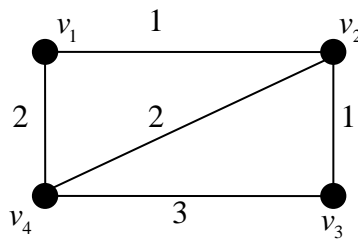
και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0.2375 \\ 0.1925 \\ 0.5874 \\ -0.7493 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0.1892 \\ -0.8799 \\ 0.4079 \\ 0.1536 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -0.8021 \\ 0.1176 \\ 0.5482 \\ 0.2057 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0.5143 \\ 0.4181 \\ 0.4336 \\ 0.6103 \end{pmatrix}.$$

Η φασματική ακτίνα του πίνακα βαρών είναι  $\rho(W) = \lambda_4 = 5.1867$ , η οποία είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα γειτνίασης  $W$  και με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το  $x_4$ , για το οποίο ισχύει  $x_4 > 0$ , όπως αναμένεται από Θεώρημα 3.1 (i). Στη συνέχεια σημειώνεται  $\rho(W) \equiv \rho(G)$ , όπως ορίστηκε στο παραπάνω Σχόλιο (iv). Επίσης, παρατηρούμε ότι για κάθε άλλη ιδιοτιμή  $\lambda \neq \rho(G)$  επαληθεύεται το (ii) του Θεωρήματος 3.1, δηλαδή ισχύει  $|\lambda| < \rho(G)$ .

Σημειώνεται ότι ο  $(I + W)^3 > 0$ , επομένως ο συμμετρικός πίνακας  $W$  είναι ανάγωγος (Πρόταση 1.1), καθώς και  $W^2 > 0$ , οπότε επαληθεύεται η αναμενόμενη διάταξη  $-\rho(G) < \lambda < \rho(G)$ , για κάθε  $\lambda \neq \rho(G)$  ((iv) του Θεωρήματος 3.1).

• Έστω ότι αφαιρούμε το βρόχο που διέρχεται από την κορυφή  $v_1$ , δηλαδή προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:



Ο αντίστοιχος πίνακας βαρών είναι ο εξής

$$\tilde{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

και έχει φάσμα

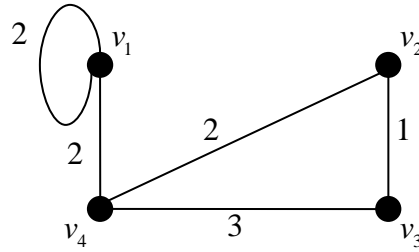
$$\sigma(\tilde{W}_1) = \{\lambda_1 = -3.6712, \lambda_2 = -1.1845, \lambda_3 = 0.0478, \lambda_4 = 4.8080\},$$

και φασματική ακτίνα  $\rho(\tilde{W}_1) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3, \lambda_4\} = 4.808$ .

Συνεπώς, επαληθεύεται το (iii) του Θεωρήματος 3.1, επειδή  $\rho(\tilde{W}_1) < \rho(G) = 5.1867$ .

• Έστω ότι αφαιρούμε από το αρχικό γράφημα την ακμή που ενώνει τις κορυφές  $v_1, v_2$ , δηλαδή προκύπτει το ακόλουθο γράφημα:





Ο αντίστοιχος πίνακας βαρών είναι ο εξής

$$\tilde{W}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

και έχει φάσμα

$$\sigma(\tilde{W}_2) = \{\lambda_1 = -3.6134, \lambda_2 = -0.9278, \lambda_3 = 1.7394, \lambda_4 = 4.8018\},$$

και φασματική ακτίνα  $\rho(\tilde{W}_2) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3, \lambda_4\} = 4.8018$ .

Συνεπώς, επαληθεύεται το (iii) του Θεωρήματος 3.1, επειδή  $\rho(\tilde{W}_2) < \rho(G) = 5.1867$ .

Επομένως, στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε ότι, όπως αναμέναμε από το (iii) του Θεωρήματος 3.1, η αφαίρεση μιας ακμής ελαττώνει το φασματικό δείκτη  $\rho(G)$ , το οποίο ισχύει για οποιαδήποτε ακμή ή βρόγχο του βεβαρημένου γραφήματος και αν αφαιρέσουμε.  $\diamond$

Κλείνοντας την ενότητα αυτή, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό για τη φασματική ακτίνα/φασματικό δείκτη, όπως αυτός προτείνεται στο Σχόλιο (iv) μετά το Θεώρημα 3.1, η (3.3) της Πρότασης 3.5 γράφεται

$$d(G) \leq \rho(G) \leq D(G),$$

όπου τα δύο φράγματα (άνω και κάτω) εξαρτώνται από το βαθμό του γραφήματος.

Στη συνέχεια, ένα επιπλέον άνω φράγμα για το φασματικό δείκτη διατυπώνεται, που εξαρτάται από το πλήθος των κορυφών και των ακμών ενός συνεκτικού γραφήματος.

### Πρόταση 3.7

Εστω  $G$  ένα γράφημα με  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  και  $A \in M_n(\mathbb{R})$

ο αντίστοιχος πίνακας γειννίας. Τότε ισχύει

$$\rho(G) \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}.$$

=====

**Απόδειξη:**

Αν  $n = 1$ , τότε  $\rho(G) = 0$ , άρα η ανισότητα ισχύει. Ας υποθέτουμε ότι  $n \geq 2$ .

Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές του  $A$  και σύμφωνα με το (i) του Θεωρήματος 3.1 είναι  $\rho(G) = \lambda_n$ . Για τα διανύσματα  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ ,  $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_r)$  από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι ισχύει

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right). \quad (3.5)$$

Θέτουμε  $r = n-1$ ,  $a_i = 1$ ,  $b_i = \lambda_i$  για  $1 \leq i \leq n-1$ , οπότε η σχέση (3.5) γράφεται

$$\left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2. \quad (3.6)$$

Σύμφωνα με (i) της Πρότασης 3.6 για τον πίνακα γειτνίασης έχουμε

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = -\lambda_n,$$

οπότε η σχέση (3.6) γίνεται  $\lambda_n^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ , όπου προσθέτοντας  $(n-1)\lambda_n^2$  προκύπτει

$$n\lambda_n^2 \leq (n-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \quad (3.7)$$

Συνδυάζοντας (ii) της Πρότασης 3.1 με το (3ii) και (7) της Πρότασης 1.4 έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

Συνεπώς, μετά από αντικατάσταση της τελευταίας ισότητας στην (3.7) έχουμε:

$$n\lambda_n^2 \leq (n-1)2m \Rightarrow \lambda_n^2 \leq \frac{2m(n-1)}{n} \Rightarrow \rho(G)^2 \leq \frac{2m(n-1)}{n},$$

από όπου προκύπτει άμεσα το ζητούμενο άνω φράγμα του φασματικού δείκτη.  $\square$

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο είναι σημαντικό να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις. Αρχικά με την αναφορά που έγινε στα διάφορα είδη πινάκων, που παράγονται από τα γραφήματα, παρουσιάστηκε ένας εναλλακτικός τρόπος αναπαράστασης των πληροφοριών που περιέχουν τα γραφήματα σχετικά με τις κορυφές και τις ακμές τους, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι κορυφές τους. Επίσης παρουσιάστηκαν διάφοροι τρόποι αναπαράστασης γραφημάτων ως

=====

πίνακες αλλά και πινάκων ως γραφήματα. Αυτές οι μετατροπές μπορεί να διευκολύνουν κάποιους μελετητές της θεωρίας γραφημάτων, που έχουν κάποιες ιδιαίτερες γνώσεις πάνω σε πίνακες, ή και αντίστροφα, μελετητές της θεωρίας πινάκων που έχουν κάποια ευχέρεια στα γραφήματα. Για παράδειγμα στις Προτάσεις 3.1 και 3.2 αναφέρθηκαν κάποιοι τρόποι υπολογισμού του πλήθους περιπάτων συγκεκριμένου μήκους για δύο οποιεσδήποτε κορυφές ενός κατευθυνόμενου ή μη κατευθυνόμενου γραφήματος μέσω του αντίστοιχου πίνακα γειτνίασης. Έτσι, όταν κάποιος θέλει να μελετήσει τους περιπάτους ενός γραφήματος έχοντας γνώσεις θεωρίας πινάκων, αλλά μη έχοντας κάποιες γνώσεις για το πώς να σχεδιάσει ένα γράφημα, μπορεί να χρησιμοποιήσει τον πίνακα γειτνίασης, ώστε να αποκτήσει τις πληροφορίες που χρειάζεται. Επίσης ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στη φασματική ακτίνα (ή φασματικό δείκτη του γραφήματος) και παρουσιάζονται κάποιες σημαντικές προτάσεις που δίνουν διαστήματα μέσα στα οποία αυτή ανήκει, τα άκρα του διαστήματος σχετίζονται με το βαθμό του γραφήματος ή με το μέγεθος του πίνακα γειτνίασης. Τέλος, παρουσιάζεται η εφαρμογή του Θεωρήματος Perron – Frobenius στα συνεκτικά γραφήματα.

## Συμπεράσματα

Η μελέτη της θεωρίας μη-αρνητικών πινάκων ήταν το θέμα που μας απασχόλησε στην παρούσα πτυχιακή εργασία. Παρουσιάστηκαν τα σημαντικότερα θεωρήματα και πορίσματα της θεωρίας μη-αρνητικών πινάκων, τα οποία συμβάλλουν στον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας του πίνακα.

- Εντοπίστηκε διάστημα στο οποίο ανήκει η φασματική ακτίνα, τα άκρα του οποίου εξαρτώνται από τα στοιχεία του μη-αρνητικού πίνακα ή από τις συντεταγμένες ενός διανύσματος, το οποίο μπορεί να είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της.
- Ένας νέος αλγόριθμος προτάθηκε για τον υπολογισμό της και μελετήθηκαν διαστήματα τιμών για τις παραμέτρους του, ώστε αυτός να είναι βέλτιστος. Ο αλγόριθμος είναι αποδοτικότερος για αρκετά μεγάλους πίνακες.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκε το θεμελιώδες θεώρημα Perron – Frobenius, που αναφέρεται σε θετικούς και κατόπιν σε μη-αρνητικούς πίνακες, στο οποίο αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι θετική πραγματική ιδιοτιμή του πίνακα και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της είναι θετικό ή μη-αρνητικό. Στην περίπτωση θετικού πίνακα ή μη-αρνητικού και ανάγωγου πίνακα η φασματική ακτίνα έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με ένα.

Στην περίπτωση θετικού πίνακα, όλες οι άλλες ιδιοτιμές, εκτός της φασματικής ακτίνας, ανήκουν εντός του φασματικού κύκλου.

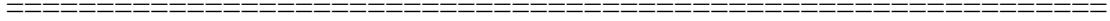
Επειδή οι μη-αρνητικοί πίνακες χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες:

- i) μη-αρνητικοί και μη-ανάγωγοι
- ii) μη-αρνητικοί, ανάγωγοι και αρχικοί
- iii) μη-αρνητικοί, ανάγωγοι και μη-αρχικοί

μόνο στην περίπτωση (ii) οι ιδιοτιμές του πίνακα, εκτός της φασματικής ακτίνας, έχουν μέτρο μικρότερο της φασματικής ακτίνας.

Τέλος, δίνονται ορισμένες εφαρμογές από τη θεωρία πινάκων και από το γενικευμένο θεώρημα Perron – Frobenius στη θεωρία γραφημάτων.

Οι μη-αρνητικοί πίνακες παρουσιάζονται σε πολλές εφαρμογές και σε ποικίλες ερευνητικές περιοχές, γεγονός που δημιουργεί νέα προβλήματα. Αυτά στη συνέχεια αποτελούν πεδίο έρευνας, το προϊόν της οποίας εμπλουτίζει καθημερινά τη διεθνή αρθρογραφία. Έτσι η προαναφερθείσα θεωρία είναι αρκετά χρήσιμη και χρήζει περαιτέρω μελέτης και εμβάθυνσης.



## Βιβλιογραφία

- [1] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM Press, Philadelphia, 1994.
- [2] F. Buckley and M. Lewinter, *A friendly introduction to graph theory*, Pearson Education, New Jersey, 2003.
- [3] T. Carter, R. Tapia and A. Papakonstantinou, *Linear Algebra-An Introduction to Linear Algebra for Pre-Calculus Students*, Rice University, 1995.
- [4] Τ. Δάρας και Π. Σύψας, *Στοχαστικές Ανελιξίσεις, Θεωρία και Εφαρμογές*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2003.
- [5] Γ. Δονάτος και Μ. Αδάμ, *Γραμμική Άλγεβρα. Θεωρία και εφαρμογές*. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2008.
- [6] F. Duan and K. Zhang (2006). An algorithm of diagonal transformation for Perron root of nonnegative irreducible matrices, *Applied Mathematics and Computation*, **175**(1), pp. 762–772.
- [7] S. Epp, *Διακριτά Μαθηματικά με Εφαρμογές*, 3<sup>η</sup> Αμερικανική Έκδοση, μτφ Β. Μεταφτσής, Α. Τσιλογιάννης, Α. Τσολομύτης, εκδόσεις Κλειδάριθμος, Αθήνα 2009.
- [8] G. Golub and C.V. Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, London, 3<sup>rd</sup> edition, 1996.
- [9] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005.
- [10] G.X. Huang, F. Yinb and K. Guo (2008). The lower and upper bounds on Perron root of nonnegative irreducible matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **217**(1), pp. 259–267.
- [11] S.G. Hwang (1997). Cauchy’s Interlace Theorem for Eigenvalues of Hermitian Matrices, *Math. Program*, 79, pp. 369-395.

- 
- [12] Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας*, Αθήνα 1989.
- [13] Ι. Καρακίτσος, *Θεωρία Πινάκων και Εφαρμογές*, Πτυχιακή εργασία. Λαμία, 2008.
- [14] L.Yu Kolotilina (2005). Bounds and Inequalities for the Perron root of a nonnegative matrix. II. Circuit bounds and Inequalities, *Journal of Mathematical Sciences*, **127**(3), translated from *Z. N. Seminarov POMI*, **296**, 2003, pp. 60–88.
- [15] S. Lipschutz and M. Lipson, *Διακριτά Μαθηματικά*, Σειρά Schaum, μτφ. Γαβριηλίδης Λ., εκδόσεις Τζιόλα, 2<sup>η</sup> έκδοση, Θεσσαλονίκη, 2003.
- [16] S.L. Liu and S.Y. Wang (1999). Sensitivity Analysis of Nonnegative Irreducible Matrices, *Applied Mathematics Letters*, **12**, pp. 121–124.
- [17] L. Lovász, J. Pelikán and K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics, Elementary and Beyond*, Springer-Verlang, New York, 2003.
- [18] L. Lu (2002). Perron complement and Perron root, *Linear Algebra and its Applications*, **341**, pp. 239–248.
- [19] L. Lu and M.K. Ng (2004). Localization of Perron roots, *Linear Algebra and its Applications*, **392**, pp. 103–117.
- [20] Γ. Μανωλόπουλος, *Μαθήματα θεωρίας γράφων,- Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα 2000.
- [21] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.
- [22] Ν. Παπαθανασίου, *Θεωρία διαταραχής ιδιοτιμών πίνακα και ψευδοφάσμα*. Διπλωματική μεταπτυχιακή εργασία, Αθήνα 2005.
- [23] Α. Παπαϊωάννου, *Θεωρία γραφημάτων*, Αθήνα 2000.
- [24] G.A. Pavlopoulos, T. Soldatos, C.N. Moschopoulos, S. Kossida, P.G. Bagos, Using graph theory to analyze biological networks, (υπό δημοσίευση).
- [25] K.H. Rosen, *Διακριτά μαθηματικά & εφαρμογές τους*, εκδόσεις Τζιόλα 5<sup>η</sup> έκδοση, 2008.
- [26] Γ. Σοφιανός και Ε. Τυχόπουλος, *Αριθμητική ανάλυση*, εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2005.
- [27] C. Wen and T.Z. Huang (2011). A modified algorithm for the Perron root of a nonnegative matrix, *Applied Mathematics and Computation*, **217**(9), pp. 4453–4458.

## Παράρτημα Α

Ο Αλγόριθμος 2.2, που προτάθηκε στην παρούσα εργασία, παρουσιάζεται παρακάτω.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι:

- η μεταβλητή  $A$  αντιστοιχεί στον αρχικό τετραγωνικό μη-αρνητικό, ανάγωγο πίνακα, του οποίου υπολογίζουμε τη φασματική ακτίνα,
- η μεταβλητή  $\epsilon$  αντιστοιχεί στη σταθερά  $\epsilon > 0$ , και
- η μεταβλητή  $s$  αντιστοιχεί στη μεταβλητή  $s$  του τύπου  $B = sI + A$ .

```
function f = algor(A,e,s)
```

```
[m,n]=size(A);
```

 (Αναθέτουμε στις μεταβλητές  $m,n$  ως τιμές τον αριθμό γραμμών και στηλών του πίνακα αντίστοιχα)

```
k=0;
```

```
a=-1;
```

```
B=s*eye(n)+A;
```

 (Γίνεται υπολογισμός του τύπου  $B = sI + A$ )

```
while k~=a
```

 (Το loop αυτό που κλείνει στη γραμμή 28, δουλεύει για όσο ισχύει  $k$  διάφορο του  $n$ , δηλαδή μέχρι να βρεθεί η  $\rho(A)$ )

```
x=B';
```

 (Αναθέτουμε ως τιμή στην μεταβλητή  $x$  ο ανάστροφος πίνακας του  $B$ )

```
rk=sum(x);
```

 (Δημιουργούμε ένα διάνυσμα που έχει ως γραμμές τα αθροίσματα των στοιχείων του  $B$  κατά στήλη, επομένως και τα αθροίσματα των στοιχείων του  $A$  κατά γραμμή)

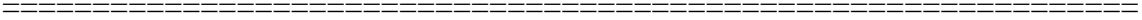
```
rmin=min(rk);
```

 (Αναθέτουμε ως τιμή στη μεταβλητή  $rmin$  το ελάχιστο στοιχείο του  $rk$ )

```
rmax=max(rk);
```

 (Αναθέτουμε ως τιμή στη μεταβλητή  $rmax$  το μέγιστο στοιχείο του  $rk$ )





```

=====
if rmax-rmin >= e
    for i=1:m
        for j=1:n
            B(i,j)=B(i,j)*rk(:,j)/rk(:,i);
        end
    end

    k=k+1;

else
rho=0.5*(rmin+rmax)-s    (Αναθέτουμε ως τιμή στη μεταβλητή rho τη  $\rho(A)$ )

eA=eig(A)                (Δημιουργούμε ένα διάνυσμα eA που αποτελείται από
                           τις ιδιοτιμές του πίνακα A)

    k=a    ;              (Δημιουργούμε τη συνθήκη για να τερματιστεί η
                           λειτουργία του while loop όταν βρεθεί η  $\rho(A)$ )

        break
    end

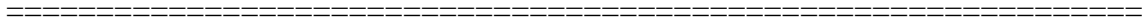
format long
    k

end

```

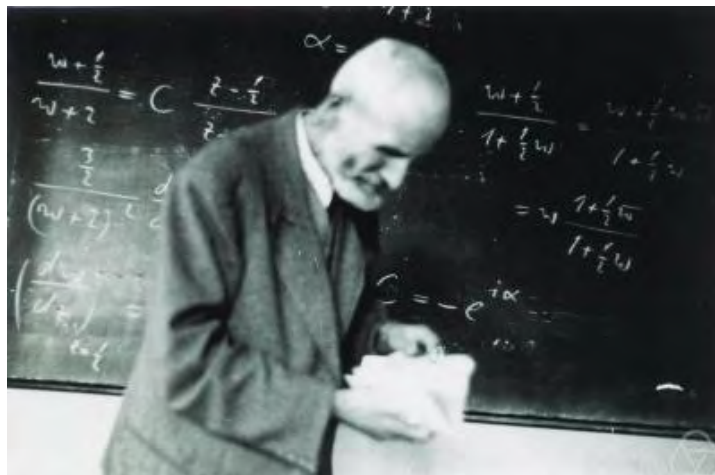
**Σημείωση:** Ο υπολογισμός της φασματικής ακτίνας ενός τετραγωνικού πίνακα  $A$  με χρήση Matlab γίνεται με την εξής εντολή:

```
max(abs(eig(A)))
```



## Παράρτημα Β

Oskar Perron (7 Μαΐου 1880 – 22 Φεβρουαρίου 1975)



Oskar Perron, γερμανικής καταγωγής, είναι γνωστός μαθηματικός για τη συμβολή του στις συνήθεις και μερικές διαφορικές εξισώσεις, καθώς και στα ανάγωγα κλάσματα. Φοίτησε σε κλασικό σχολείο και σε πείσμα του πατέρα του, που τον προόριζε να συνεχίσει την οικογενειακή επιχείρηση, σπούδαζε μαθηματικά στον ελεύθερο χρόνο του. Το 1898 ο Perron ξεκίνησε τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου, ωστόσο σπούδασε και σε διάφορα Πανεπιστήμια όπως του Βερολίνου, Tübingen και Göttingen.

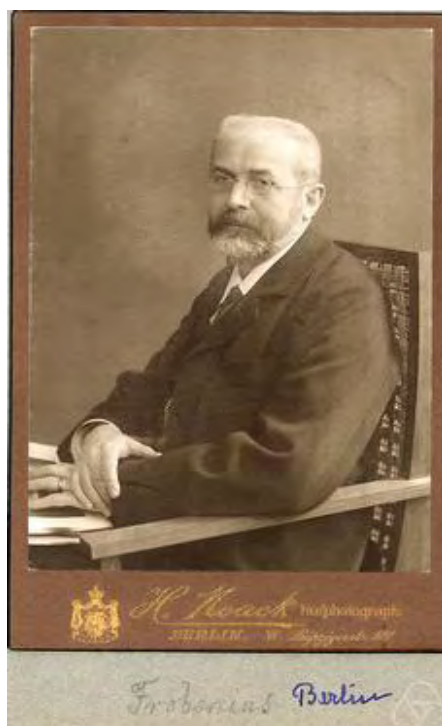
Ο Perron επηρεάστηκε περισσότερο από τους καθηγητές του στο Μόναχο. Οι διαλέξεις του Pringsheim στο Μόναχο τον εντυπωσίασαν, η επιρροή του οποίου φαίνεται στην εργασία του «Die Lehre von den Kettenbrüchen», που πρωτοεκδόθηκε το 1913. Το θέμα της διδακτορικής του διατριβής, υπό την επίβλεψη του Ferdinand von Lindemann, ήταν η γεωμετρία και το 1906 διορίστηκε στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου ως λέκτορας. Το 1910 ο Perron δέχτηκε τη θέση του έκτακτου καθηγητή στο Tübingen και το 1914 έγινε τακτικός καθηγητής στο Heidelberg. Ωστόσο, ο Α΄ Παγκόσμιος Πόλεμος διέκοψε την καριέρα του. Το 1915 έλαβε μέρος στον πόλεμο κερδίζοντας έτσι το Σιδηρούν Σταυρό. Με το τέλος του πολέμου, επέστρεψε στο Heidelberg, όπου δίδαξε μέχρι το 1922, οπότε και διορίστηκε στο Μόναχο.

Οι 218 δημοσιεύσεις του καλύπτουν αρκετές θεματικές περιοχές των μαθηματικών, στη μαθηματική ανάλυση είναι γνωστό το ολοκλήρωμα Perron (Perron integral), στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, στην άλγεβρα με τα ανάγωγα

κλάσματα (continued fractions), αλλά και στη γεωμετρία (είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι ο  $\pi$  είναι υπερβατικός αριθμός) και στη θεωρία αριθμών.

Ο Perron εξέδωσε μια σειρά πρωτοποριακών κειμένων. Εκτός από την εργασία του στα ανάγωγα κλάσματα, «Die Lehre von den Kettenbrüchen», η οποία επανεκδόθηκε τρεις φορές, το 1921 παρουσίασε ένα κείμενο που αφορούσε τους άρρητους αριθμούς και είχε ως προαπαιτούμενο μαθηματικές γνώσεις σχολικού επιπέδου. Και το κείμενο αυτό είχε μεγάλη απήχηση αφού ο ίδιος ο Perron ανέλαβε την επιμέλειά του σε ηλικία 80 ετών.

Παρότι συνταξιοδοτήθηκε το 1951, συνέχισε να διδάσκει επιλεγμένα μαθήματα στο Μόναχο μέχρι το 1960. Ωστόσο, ακόμα και όταν σταμάτησε να διδάσκει σε ηλικία 80 ετών, συνέχισε το ερευνητικό του έργο, εκδίδοντας 18 papers μεταξύ 1964-1973.

**Ferdinand Georg Frobenius (26 Οκτωβρίου 1849 – 3 Αυγούστου 1917)**

Ferdinand Georg Frobenius, γερμανικής καταγωγής μαθηματικός, γνωστός για τη συνεισφορά του στη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τη θεωρία ομάδων, τη θεωρία αριθμών. Έδωσε επίσης την πρώτη πλήρη απόδειξη του θεωρήματος Cayley – Hamilton.

Γεννήθηκε στο Charlottenbunburg, ένα προάστιο του Βερολίνου από τον Christian Ferdinand Frobenius, ένα προτεστάντη εφημέριο και την Christine Elizabeth Friedrich. Μπήκε στο γυμνάσιο του Joachimsthal το 1860, όταν ήταν σχεδόν έντεκα ετών. Μετά την αποφοίτησή του, το 1867, πήγε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, όπου άρχισε τις ακαδημαϊκές του σπουδές. Εκεί φοίτησε μόνο ένα εξάμηνο και κατόπιν επέστρεψε πίσω στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, όπου παρακολούθησε μαθήματα από τους Leopold Kronecker, Ernst Kummer και Karl Weierstrass. Το 1870 απέκτησε το διδακτορικό του με θέμα σχετικό με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (βραβευμένο με διάκριση) υπό την επίβλεψη του Weierstrass.

Το 1874, αφού είχε διδάξει πρώτα στο γυμνάσιο Joachimsthal και έπειτα στο Sophienrealschule, διορίστηκε στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου ως έκτακτος καθηγητής στα μαθηματικά. Ο Frobenius παραμένει για ένα χρόνο στο Πανεπιστήμιο

=====  
του Βερολίνου και κατόπιν αναχωρεί για τη Ζυρίχη, όπου διορίζεται ως απλός καθηγητής στο Eidgenössische Polytechnikum. Για δεκαεφτά χρόνια, μεταξύ 1875 και 1892, ο Frobenius δούλευε στη Ζυρίχη. Εκεί παντρεύτηκε, έκανε οικογένεια και ταυτόχρονα ασχολήθηκε ερευνητικά με αρκετές θεματικές περιοχές των μαθηματικών. Τις τελευταίες μέρες του Δεκέμβρη του 1891 ο Kronecker πέθανε και η έδρα στο Βερολίνο έμεινε κενή. Ο Weierstrass, που πίστευε σε μεγάλο βαθμό ότι ο Frobenius ήταν ο σωστός άνθρωπος για να κρατήσει το Βερολίνο στο προσκήνιο των μαθηματικών, χρησιμοποίησε την αξιοσημείωτη επιρροή του για να διορίσει το Frobenius. Το 1893 επέστρεψε στο Βερολίνο, όπου εκλέχτηκε στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών.

