



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΣΤΕΡΕΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ**

**Ανάλυση Τροχιάς Οχήματος και Βελτιστοποίηση
Με την Χρήση Υπολογιστή**

**Πασχάλη Ευαγγελία
Α.Μ. ΠΒ0003**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Υπεύθυνος
Δρ. Μπαρμπούνης Αθανάσιος
Δρ. Πλαγιαννάκος Βασίλειος

Λαμία, 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σύνοψη	4
Abstract	5

Κεφάλαιο 1

1.1 Μετατόπιση	6
1.2 Ορισμός της Ταχύτητας	6
1.3 Ορισμοί	7
1.4 Ορισμός της Επιτάχυνσης	9
1.5 Ορισμός Επιβράδυνσης	10
1.6 Ορισμός της Τροχιάς	11
1.7 Τι είναι η Κυκλική Κίνηση	11
1.8 Περίοδος στην Κυκλική Κίνηση	12
1.9 Στροφή	12
1.10 Κέντρο Βάρους	13
1.11 Η Συμπεριφορά των Τροχών	13
1.11.1 Ο Τροχός μοιάζει με Κύλινδρο	13
1.11.2 Ο Τροχός μοιάζει με Κόλουρο Κώνο	14
1.12 Επίλογος	14

Κεφάλαιο 2

2.1 Γενικά	16
2.2 «Κίνηση» Οχήματος	16
2.2.1 Το Όχημα Παραμένει Ακίνητο ή Κινείται με Σταθερή Ταχύτητα	16
2.2.2 Επιτάχυνση	18
2.2.3 Τι είναι Αυτό που Κινεί το Όχημα	19
2.3 Επιβράδυνση	20
2.4 Τι θα Συμβεί αν χρησιμοποιήσουμε τα Φρένα	21
2.5 Σύστημα Επιβράδυνσης	22
2.6 Επιβράδυνση - Ακινητοποίηση Αυτοκινήτου	23
2.7 Τριβή	23
2.8 Αντίσταση Αέρα	26
2.9 Αεροδυναμικό Σχήμα Οχημάτων	27
2.10 Έργο	29
2.11 Κινητική Ενέργεια	30
2.12 Ισχύς	32

Κεφάλαιο 3

3.1 Εισαγωγή στην Κυκλική Κίνηση	34
3.1.1 Η Ταχύτητα στην Κυκλική Κίνηση	34
3.1.2 Επιτάχυνση στην Κυκλική Κίνηση	35
3.1.3 Ομαλή Κυκλική Κίνηση	36
3.1.4 Δυναμική της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης	37
3.2 Ολίσθηση	37
3.3 Ελεγχόμενη Ολίσθηση	39
3.4 Στροφή	42
3.4.1 Στροφή-Ορισμός Ιδανικής Γραμμής	42
3.4.2 Πορεία-Χάραξη Ιδανικής Γραμμής	42
3.4.3 Η Στροφή από τον Οδηγό	49
3.5 Δύναμη και Πορεία	49
3.6 Τύποι Στροφών	49
3.7 Μεταφορά Βάρους	51
3.8 Ροπή	52
3.9 Ροπή Αδράνειας	52
3.10 Σταθερότητα του Αυτοκινήτου	55
3.11 Επίλογος	55

Κεφάλαιο 4

4.1 Επιτάχυνση	57
4.2 Επιβράδυνση	58
4.3 Στροφή	60
4.4 Ολοκληρωμένη Διαδρομή	66

Κεφάλαιο 5

Επίλογος	98
----------	----

Βιβλιογραφία	102
--------------	-----

ΣΥΝΟΨΗ

Η ανάλυση τροχιάς οχήματος αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα, λόγω της πολυπλοκότητας του μοντέλου του οχήματος. Γίνεται, λοιπόν, μια προσπάθεια δημιουργίας ενός απλούστερου μοντέλου. Η εργασία αναφέρεται στην πορεία ενός οχήματος σε μια τυχαία διαδρομή. Αναλύοντας την τροχιά ενός οχήματος παρατηρούμε αρχικά προβλήματα που αντιμετωπίζει ένας οδηγός, για παράδειγμα, ο χρόνος εξόδου από μια στροφή ή ο προσδιορισμός της ταχύτητας του αυτοκινήτου είτε σε μια ευθεία είτε κατά την έξοδό της από μια καμπυλόγραμμη πορεία. Επίσης, είναι βασικό να λάβουμε υπόψη τη μάζα του οχήματος επειδή επηρεάζει την τριβή των ελαστικών με το οδόστρωμα, γεγονός που επιβραδύνει το όχημα. Η επίλυση αυτών των προβλημάτων γίνεται, κυρίως, με τη χρήση των τριών νόμων του Νεύτωνα. Οι τρεις αυτές αρχές είναι η βάση για την ανάλυση της τροχιάς ενός οχήματος. Με την κατάλληλη εφαρμογή αυτών των νόμων δίνεται στον οδηγό το πλεονέκτημα, σε σχέση με άλλους οδηγούς. Με τον όρο πλεονέκτημα εννοούμε την χάραξη μιας ιδανικής γραμμής-πορείας. Το αυτοκίνητο μπορεί πραγματοποιήσει τεσσάρων ειδών κινήσεις: ευθύγραμμη ομαλή, επιταχυνόμενη, επιβραδυνόμενη και κυκλική κίνηση. Βασική προϋπόθεση για την απόκτηση του πλεονεκτήματος έναντι των άλλων οδηγών είναι η συσχέτιση της ταχύτητας και της ακτίνας μίας στροφής μεταξύ 0 (μηδέν) και 180 μοιρών, για την αντιμετώπιση μιας καμπυλόγραμμης πορείας, καθώς και της μετατόπισης με την ταχύτητα για την πορεία σε ευθύγραμμο τμήμα. Τελικά, οι δυο βασικές επιστήμες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν προς όφελος της βελτιστοποίησης της τροχιάς των οχημάτων και της μοντελοποίησής τους είναι τα Μαθηματικά και η Φυσική.

Λέξεις κλειδιά

Ταχύτητα
Επιτάχυνση
Επιβράδυνση
Στροφή
Όχημα

ABSTRACT

The analysis of orbit of vehicle constitutes a difficult problem, because the complexity of model of vehicle. Therefore, becomes an effort of creation of simpler model. The work is reported in the course of vehicle in an accidental way. Analyzing the orbit of vehicle we observe initial problems that faces a driver, for example, the time of expense from a turn or the determination of speed of car or in a straight line or at her exit from a cornering course. Also, he is basic we take into consideration the mass of vehicle because influences the friction of tyres with the paving, make that slows down the vehicle. The resolution of these problems becomes, mainly, with the use of three laws of Newton. These three beginnings are the base for the analysis of orbit of vehicle. With the suitable application of these laws is given in the driver the advantage, concerning other drivers. With the term advantage we mean the mapping out of ideal line-course. The car can realise four main movements: straight line smooth, accelerating, slowing down and circular movement. Basic condition for the acquisition of advantage of opposite the other drivers is the cross-correlation of speed and the beam of a turn between 0 (zero) and 180 degrees, for the confrontation of cornering course, as well as shift with the speed for the course in a straight line department. Finally, the two basic sciences that can be used to profit of optimisation of orbit of vehicles and their modelling are Mathematics and Physics.

Key Words

Speed
Accelerating
Slowing Down-Braking
Corner
Vehicle

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με την ορολογία τροχιά ή πορεία που διαγράφει ένα όχημα, χαρακτηρίζουμε την διαδρομή που ακολουθεί. Η διαδρομή του οχήματος αποτελείται από δυο βασικούς τύπους γραμμής: την ευθεία γραμμή και την καμπυλόγραμμη. Για την καμπύλη γραμμή χρησιμοποιούμε και δεύτερη ονομασία, η οποία είναι «στροφή».

Η ευθεία πορεία θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι εύκολο να μελετηθεί. Δεν είναι όμως αλήθεια. Ακόμη και στην απλή ευθεία η κίνηση ενός οχήματος δεν είναι εύκολο να αναλυθεί. Μεγαλύτερη δυσκολία, βέβαια παρουσιάζει η καμπύλη γραμμή. Η κίνηση που πραγματοποιείται σε μια στροφή μπορεί να χαρακτηριστεί κίνηση σε δυο διαστάσεις. Επειδή, όπως θα δούμε παρακάτω, η κίνηση των δυο διαστάσεων αποτελείται από την επιτόχια και την κεντρομόλο επιτάχυνση, όταν η επιτόχια είναι μηδενική τότε το όχημα εκτελεί Ομαλή Κυκλική.

Για μια ολοκληρωμένη διαδρομή που μπορεί να αποτελείται από μια ευθεία και μια στροφή ή μια ευθεία και δυο συνεχόμενες στροφές η μελέτη μετατρέπεται σε μια πιο πολύπλοκη διαδικασία. Εκεί, το όχημα πρέπει να προσαρμόσει τις παραμέτρους του σύμφωνα με την γραμμή που θα ακολουθήσει. Στην υπάρχουσα κατάσταση το όχημα έχει προσαρμόσει τις παραμέτρους του. Για επερχόμενες γραμμές το όχημα επιλέγει έναν ή περισσότερους τρόπους να οδηγηθεί σε κατάσταση ισορροπίας (επιτάχυνση, επιβράδυνση).

Για να κατανοήσουμε πως ένα όχημα συμπεριφέρεται σε μια διαδρομή, είτε αυτή είναι μια απλή ευθεία γραμμή είτε μια πιο πολύπλοκη διαδρομή, ορίζουμε τις βασικές έννοιες. Όπως έχουν μελετηθεί οι έννοιες είναι: η μετατόπιση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η επιβράδυνση και η τροχιά. Περιγράφονται και αναλύονται γιατί η συμμετοχή του στην διαδρομή που εκτελεί ένα όχημα είναι καθοριστική για την ανάλυση της τροχιάς του.

1.1 Μετατόπιση

1. Το φυσικό μέγεθος μετατόπιση (Δx) δεν πρέπει να συγχέεται με το διάστημα.
2. Η διεύθυνσή της εξαρτάται από το είδος της κίνησης ως προς την τροχιά.
3. Η φορά της είναι ίδια με την φορά της κίνησης.
4. Περιγράφει την απόσταση της τυχαίας θέσης (όπου βρίσκεται το σώμα στο παρόν) από το σημείο αναφοράς (όπου θεωρητικά βρίσκεται ο παρατηρητής του φαινόμενου).
5. Είναι διανυσματικό φυσικό μέγεθος.
6. Η μετατόπιση στο S.I. έχει ως μονάδα μέτρησης το μέτρο και συμβολίζεται με m.

1.2 Ορισμός της ταχύτητας

Ταχύτητα ενός σώματος ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής της θέσης ως προς το χρόνο. Η ταχύτητα μετράται σε ένα διάστημα συντεταγμένων. Στην Κινηματική, είναι μέγεθος διανυσματικό, δηλαδή, για τον πλήρη προσδιορισμό της χρειάζεται όχι μόνο το μέτρο της αλλά και η κατεύθυνσή της. Με τον όρο κατεύθυνση προσδιορίζουμε την διεύθυνση και τη φορά της. Η ταχύτητα συμβολίζεται με το γράμμα v ή u ή ν και το μέτρο της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v = |\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (1.2.1)$$

Αν το σώμα κινείται σε μια μόνο διάσταση τότε ο τύπος διαμορφώνεται ως εξής:

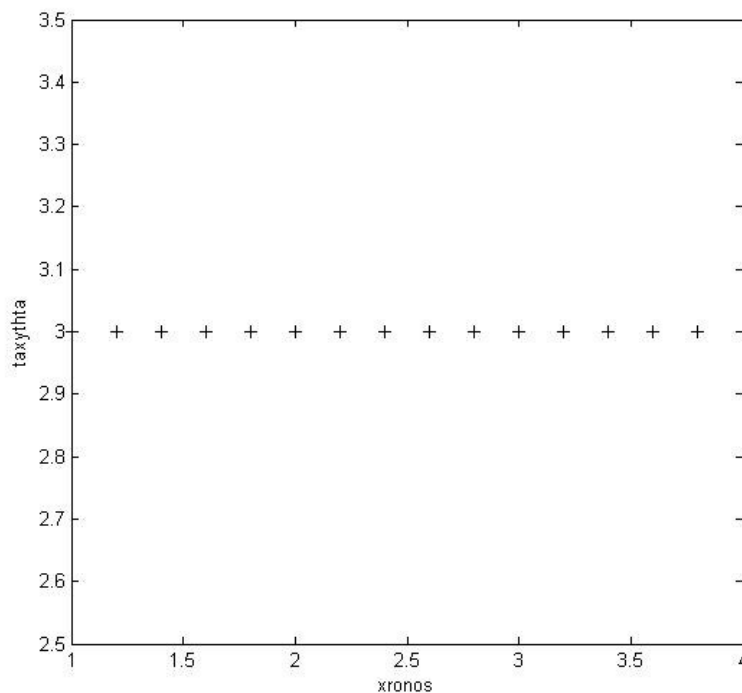
$$u = \frac{s}{t} \quad (1.2.2)$$

Όπου $s=dx$ ή $s=dy$ ή $s=dz$ ανάλογα με την διεύθυνση στην οποία κινείται.

Συνεπώς, από την σχέσεις (1.2.1) και (1.2.2) παρατηρούμε, πως όταν το όχημα θα μετατοπίζεται με σταθερό ρυθμό, η ταχύτητα θα παραμένει σταθερή.

Παράδειγμα 1.1

Έστω ότι η ταχύτητα παραμένει σταθερή και είναι $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Αντίστοιχα ο χρόνος αυξάνεται καθώς το όχημα μετατοπίζεται. Το χρονικό διάστημα που το όχημα μετατοπίζεται είναι [1,4]. Η σχέση ταχύτητας και χρόνου γίνεται αντιληπτή στην Εικόνα 1.1.



Εικόνα 1.1 Άξονας x: ο χρόνος και Άξονας y: η ταχύτητα

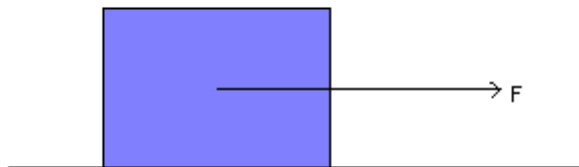
1.3 Ορισμοί

Μάζα: είναι η ποσότητα της ύλης σε ένα αντικείμενο. Συνήθως συμβολίζεται με m και η μονάδα μέτρησής της στο S.I. είναι το χιλιόγραμμα (kg).

Δύναμη: είναι το μέτρο της ώθησης ή έλξης πάνω σε ένα αντικείμενο. Είναι μέγεθος διανυσματικό και συμβολίζεται με F . Η μονάδα μέτρησης για τη δύναμη είναι το Newton και συμβολίζεται με N.

Παράδειγμα 1.2

Η Εικόνα 1.2 απεικονίζει ένα σώμα σε σχήμα ορθογώνιου που πάνω του ασκείται μια δύναμη F .



Εικόνα 1.2 Η δύναμη F αναπαρίσταται γραφικά από το κέντρο του σώματος με κατεύθυνση προς τα δεξιά, που είναι η κατεύθυνση που θα κινηθεί το σώμα.

Οι δυνάμεις καθορίζονται στον τρόπο που επιδρούν πάνω στο όχημα. Προσδιορίζονται στη διεύθυνση του άξονα των x . Έτσι, για θετικές δυνάμεις έχουμε την κίνηση προς τα εμπρός ενώ, για αρνητικές έχουμε κίνηση προς τα πίσω και γενικά προς την αντίθετη κατεύθυνση που ορίζουμε για τις θετικές δυνάμεις. Με αυτές τις πληροφορίες είναι πλέον εφικτό να αναλύσουμε την κίνηση ενός οχήματος κατά την διεύθυνση του άξονα xx' .

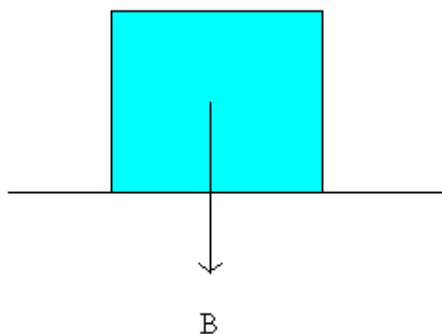
Βάρος: είναι η δύναμη με την οποία έλκεται ένα σώμα από τη $\Gamma\eta$. Είναι μέγεθος διανυσματικό και έχει κατεύθυνση από το κέντρο βάρους του σώματος κατακόρυφα προς τα κάτω (προς το κέντρο της $\Gamma\eta$). Συμβολίζεται με B , η μονάδα μέτρησής της είναι το Newton (N) και δίνεται από τον τύπο

$$B = mg \quad (1.3.1)$$

Όπου m είναι η μάζα του αντικειμένου και g η επιτάχυνση με την οποία έλκεται το σώμα από τη $\Gamma\eta$ (επιτάχυνση βαρύτητας) και είναι $g = 9,81 \frac{m}{sec^2}$.

Παράδειγμα 1.3

Έστω ότι ένα ορθογώνιο κουτί που είναι ακίνητο έχει τοποθετηθεί στο πάτωμα ενός δωματίου. Τότε η μόνη δύναμη που θα ασκείται πάνω του είναι η βαρυτική δύναμη ή αλλιώς το βάρος του.



Εικόνα 1.3 Το βάρος του σώματος συμβολίζεται με το γράμμα B και έχει κατεύθυνση από το κέντρο του σώματος κατακόρυφα προς τα κάτω.

1.4 Ορισμός της επιτάχυνσης

Η επιτάχυνση (που συμβολίζεται με a ή a) περιγράφει τον ρυθμό της αλλαγής της ταχύτητας ενός σώματος (δηλαδή πόσο γρήγορα αλλάζει η ταχύτητά του σε μια τυχαία χρονική στιγμή). Αναπαρίσταται με μια διανυσματική συνάρτηση της θέσης (δηλαδή είναι διανυσματικό μέγεθος). Η διεύθυνση της εξαρτάται από το είδος της κίνησης ως προς την τροχιά. Η φορά της εξαρτάται από το είδος της κίνησης ως προς το ρυθμό και η μονάδα μέτρησής της (S.I.) είναι: $\frac{m}{sec^2}$

Που το μέτρο της για κίνηση σε μια διάσταση προέρχεται από τον τύπο

$$\alpha = |a| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt}\right)^2} \quad (1.4.1)$$

Αν η κίνηση του σώματος είναι στην μια διάσταση τότε το μέτρο της δίνεται από τον τύπο

$$a = \frac{u}{t} \quad (1.4.2)$$

Συνήθως η επιτάχυνση μετράται σε gee 's (ή g 's) για την κίνηση των οχημάτων. Όμως για τη για την καλύτερη κατανόηση στον τομέα της φυσικής, η επιτάχυνση μετράται σε μέτρα ανά τετραγωνικό δευτερόλεπτο.

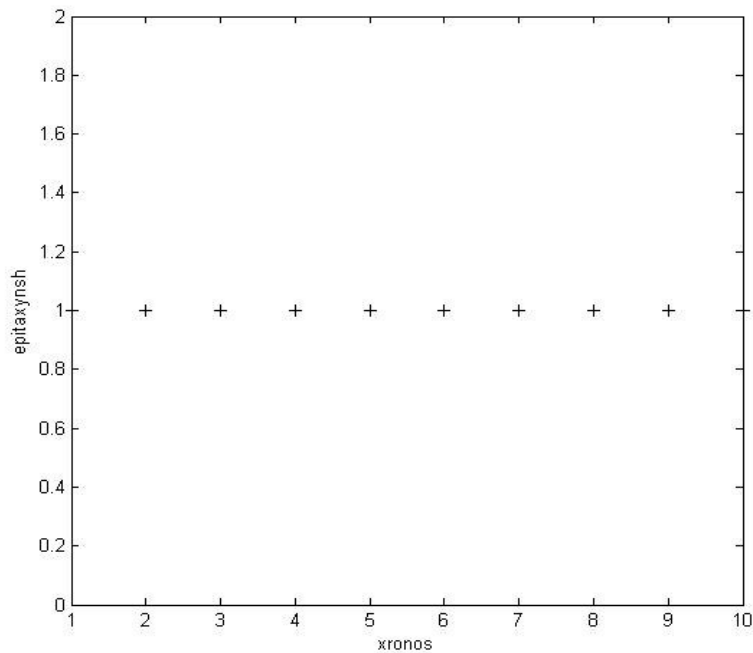
Από την σχέσεις (1.4.1) και (1.4.2) παρατηρούμε πως, όταν η ταχύτητα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό η επιτάχυνση παραμένει σταθερή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται Ομαλή Επιταχυνόμενη Κίνηση.

Παράδειγμα 1.4

Έστω ένα σώμα, π.χ. ένα αυτοκίνητο, που κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a = 1 \frac{m}{sec^2}$

Αν η επιτάχυνση αυτή αντιστοιχεί για το χρονικό διάστημα $[1,10]$, τότε προκύπτει η Εικόνα 1.4, στην οποία παρουσιάζουμε, ουσιαστικά, την επιτάχυνση με το πέρασμα του χρόνου. Η κίνηση, λοιπόν, που εκτελεί το σώμα καθώς ο χρόνος αυξάνεται και η επιτάχυνση παραμένει σταθερή ονομάζεται Ομαλά Επιταχυνόμενη.

Στην εικόνα ο χρόνος παρουσιάζεται στον οριζόντιο άξονα (άξονας των x) και μετράται σε seconds ενώ, η επιτάχυνση παρουσιάζεται στον κάθετο άξονα (άξονας των y) και την μετράμε σε $\frac{m}{sec^2}$.



Εικόνα 1.4 Άξονας x: παρουσιάζεται ο χρόνος. Άξονας y: παρουσιάζεται η επιτάχυνση. Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

1.5 Ορισμός επιβράδυνσης

Επιβράδυνση ενός σώματος ονομάζεται ο ρυθμός με τον οποίο το σώμα μειώνει την ταχύτητά του. Συμβολίζεται με a ή a , όπως και η επιτάχυνση, και είναι μέγεθος διανυσματικό. Ως διανυσματικό μέγεθος έχει ίδια διεύθυνση με την ταχύτητα του σώματος αλλά αντίθετη φορά.

Ο τύπος της επιβράδυνσης είναι: $a = \frac{du}{dt}$ (όμοιος με την επιτάχυνση) για κίνηση σε μια διάσταση.

Για την κίνηση του σώματος σε περισσότερες από μια διαστάσεις ο τύπος είναι

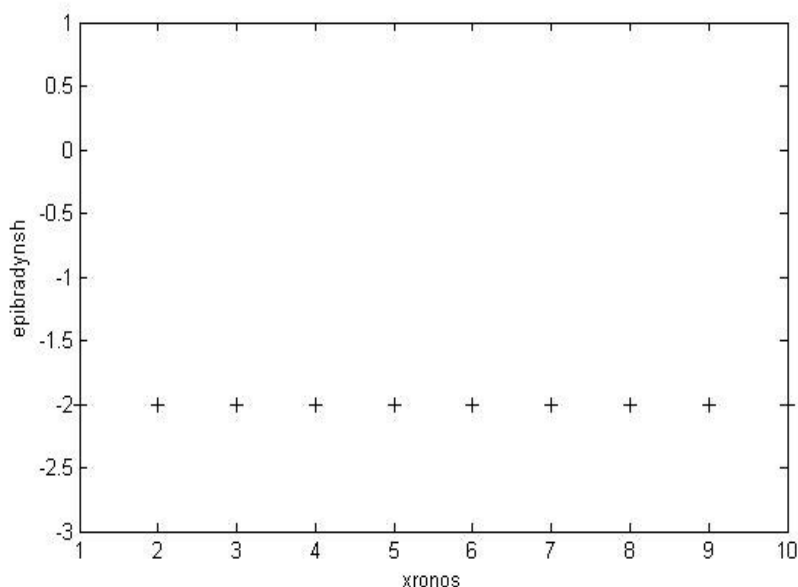
$$\alpha = |a| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt}\right)^2} \quad (1.5.1)$$

Την επιβράδυνση, όπως και την επιτάχυνση, την μετράμε σε $\frac{m}{sec^2}$.

Όταν η επιβράδυνση παραμένει σταθερή τότε η κίνηση του σώματος ονομάζεται Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση. Στο διάγραμμα της επιβραδύνσεως στην Ομαλά Επιβραδυνόμενη Κίνηση η επιβράδυνση a είναι στο αρνητικό μέρος του άξονα των y και παράλληλη προς τον άξονα των x .

Παράδειγμα 1.5

Έστω ένα όχημα που επιβραδύνει με $a = 2 \frac{m}{sec^2}$. Αν το χρονικό διάστημα που μελετήθηκε η επιβράδυνση του οχήματος είναι $[1,10]$ second, τότε η κίνηση του οχήματος απεικονίζεται στην Εικόνα 1.5.



Εικόνα 1.5 Άξονας x : παρουσιάζει το χρόνο. Άξονας y : παρουσιάζει τη επιβράδυνση. Το « a » είναι αρνητικό γιατί το αρνητικό πρόσημο καθορίζει την επιβράδυνση. Επομένως, το διάγραμμα απεικονίζει μια Ομαλά επιβραδυνόμενη Κίνηση.

1.6 Ορισμός της τροχιάς

Τροχιά ενός κινητού λέγεται το σύνολο των σημείων από τα οποία περνά κατά τη διάρκεια της κίνησής του ή διαφορετικά το σύνολο των διαδοχικών θέσεων του στο χρόνο. Ορίζεται δε ως μια γραμμή που ανάλογα με το σχήμα της χαρακτηρίζει την κίνηση του κινητού ως ευθύγραμμη, καμπυλόγραμμη, κυκλική, ελλειπτική, παραβολική ή υπερβολική.

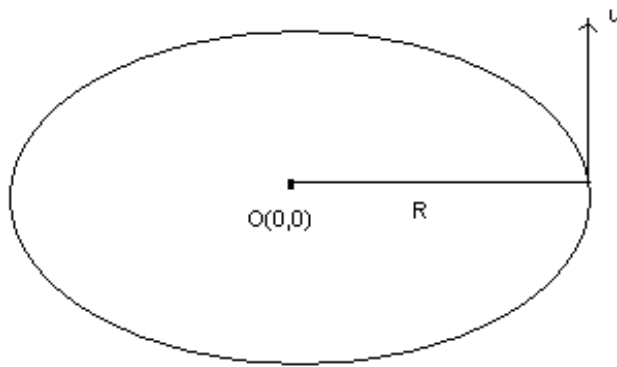
1.7 Τι είναι η κυκλική κίνηση

Κυκλική κίνηση ονομάζεται η κίνηση που πραγματοποιεί ένα σώμα (π.χ. ένα αυτοκίνητο, ένα ποδήλατο) όταν εισέρχεται σε ένα κυκλικό τομέα. Τον κυκλικό τομέα χαρακτηρίζουν το κέντρο του π.χ. με συντεταγμένες $O(0,0)$ και η ακτίνα του που συμβολίζεται με r ή R και η μονάδα μέτρησής της είναι το μέτρο.

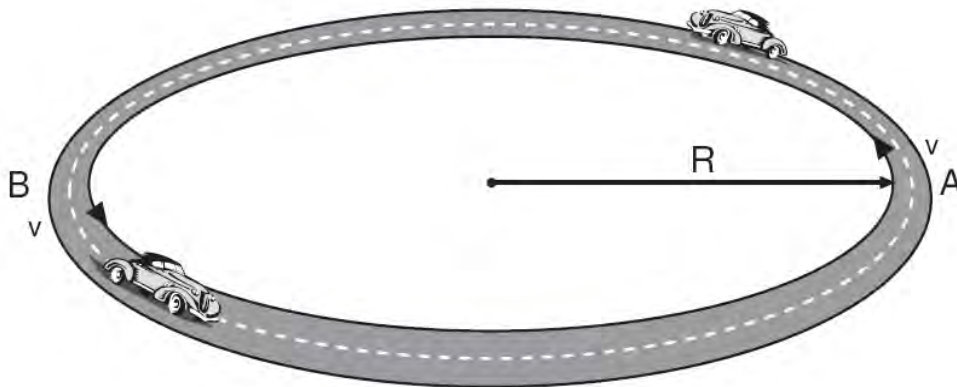
Παράδειγμα 1.6

Έστω ένα σώμα με ταχύτητα u που κινείται πάνω σε ένα κυκλικό τομέα. Το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση όπως φαίνεται στο σχήμα της Εικόνας 1.6.

Βέβαια, μπορούμε να παρουσιάσουμε και ένα επιπλέον παράδειγμα που να αντιπροσωπεύει μια στροφή υπό την μορφή κύκλου και ένα όχημα να κινείται πάνω σε αυτή. Αυτό γίνεται εμφανές στην Εικόνα 1.7.



Εικόνα 1.6 Απεικονίζεται ένα κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα R , πάνω στον οποίο κινείται ένα όχημα (Κυκλική Κίνηση).



Εικόνα 1.7. Η κυκλική κίνηση του αυτοκινήτου στις στροφές

1.8 Περίοδος στην κυκλική κίνηση

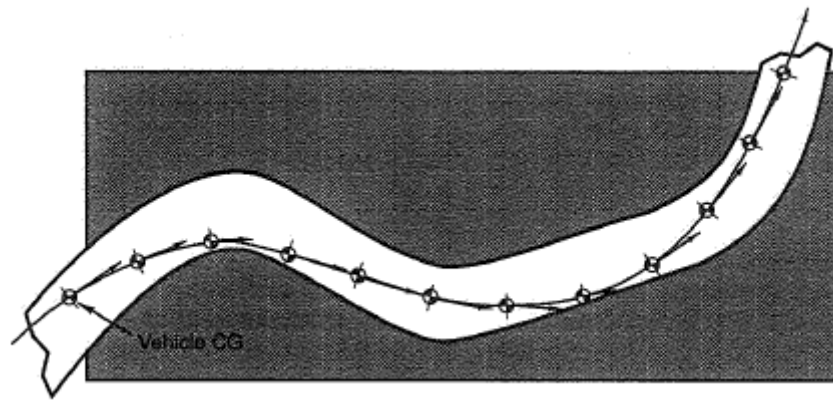
Ο χρόνος κατά τον οποίο, ένα αντικείμενο που κινείται σε ένα κυκλικό τομέα, πραγματοποιεί μια πλήρη περιστροφή ονομάζεται περίοδος. Η περίοδος συμβολίζεται με T ή t και η μονάδα μέτρησης είναι το ένα δευτερόλεπτο (1 sec).

1.9 Στροφή

Στην κίνηση ενός οχήματος η καμπυλόγραμμη τροχιά είτε είναι αριστερής είτε δεξιάς κατευθύνσεως ονομάζεται στροφή, που μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ένα τμήμα ενός κύκλου (κυκλικό τόξο) όπου καθορίζεται από τις μοίρες της γωνίας και την ακτίνα (του κυκλικού τομέα στον οποίο ανήκει).

Παράδειγμα 1.7

Έστω ένα όχημα που διέρχεται διαμέσου μιας στροφής. Η κίνησή του φαίνεται από την Εικόνα 1.8.



Εικόνα 1.8 Κίνηση οχήματος στην στροφή.

1.10 Κέντρο Βάρους

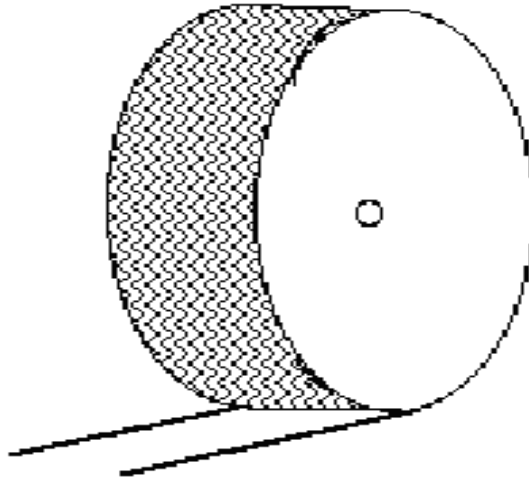
Το κέντρο μάζας ή κέντρο βάρους, όπως αποκαλείται, είναι η περιοχή ενός σώματος όπου συγκεντρώνεται το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του.

1.11 Η συμπεριφορά των τροχών

Στους τροχούς των οχημάτων αναπτύσσονται δυνάμεις. Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της κίνησης του οχήματος. Βοηθούν το αυτοκίνητο στην απόκτηση ισορροπίας και στη βελτίωση της συμπεριφοράς του στο δρόμο. Οι τρόποι με τους οποίους εξετάζεται ένας τροχός είναι δυο. Ο πρώτος τρόπος είναι όταν ο τροχός μοιάζει με κύλινδρο και ο δεύτερος, όταν μοιάζει με κόλουρο κώνο. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι όταν ο τροχός έχει την μορφή του κυλίνδρου τότε το όχημα πορεύεται σε ευθεία. Ενώ, όταν ο τροχός έχει τη μορφή του κόλουρου κώνου τότε το όχημα βρίσκεται εντός μιας στροφής.

1.11.1 Ο τροχός μοιάζει με κύλινδρο

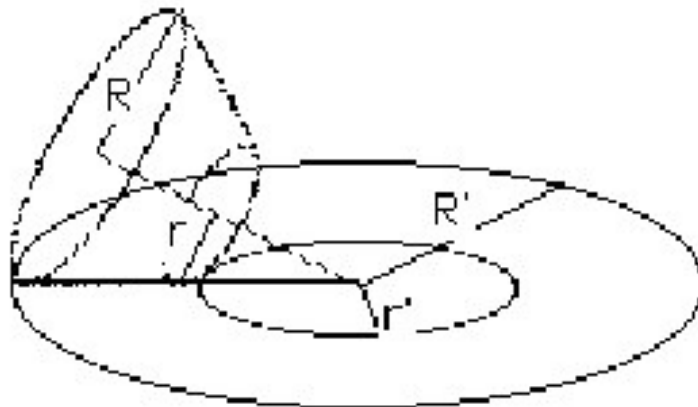
Ο τροχός του αυτοκινήτου θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελείται από έναν μεγάλο αριθμό όμοιων ιδανικών τροχών παράλληλων μεταξύ τους και με κοινό άξονα. Όταν αυτός κυλιέται σε οριζόντιο δρόμο, ο άξονάς του θα είναι πάντα οριζόντιος και οι επί μέρους τροχιές των ιδανικών τροχών από τους οποίους αποτελείται, θα είναι παράλληλες ευθείες. Η συμπεριφορά ενός τέτοιου τροχού δε διαφέρει σε τίποτα ενός ιδανικού, εκτός του ότι δεν εφάπτεται του δρόμου σε ένα σημείο, αλλά σε πολύ περισσότερα (N σημεία), όσοι είναι και οι ιδανικοί τροχοί από τους οποίους αποτελείται. Αυτά τα σημεία θα βρίσκονται σε μια ευθεία επί του δρόμου και παράλληλη προς τον άξονα του τροχού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 1.9.



Εικόνα 1.9 Ο τροχός που απεικονίζεται προέρχεται από τον ιστότοπο <http://users.otenet.gr>.

1.11.2 Ο τροχός μοιάζει με κολουρο κώνο

Όταν ένας τροχός μοιάζει με κολουρο κώνο αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό τροχών παράλληλων μεταξύ τους, με κοινό άξονα αλλά διαφορετικής ακτίνας. Αυτές οι ακτίνες αυξάνουν, από μια τιμή r σε μια τιμή R , γραμμικά από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο ιδανικό τροχό, όπου $r < R$. Όταν αυτός κυλιέται σε οριζόντιο δρόμο, ο άξονάς του δε θα είναι οριζόντιος αλλά θα σχηματίζει γωνία με το οριζόντιο επίπεδο. Για μια πλήρη περιστροφή του, το κέντρο κάθε ιδανικού τροχού θα μεταφέρεται κατά διαφορετική απόσταση δηλαδή του μεγαλύτερου κατά $s = 2\pi R$ και του μικρότερου κατά $s = 2\pi r$. Αποτέλεσμα των διαφορετικών διαδρομών που διανύει κάθε επιμέρους ιδανικός τροχός είναι να υποχρεώνεται ο κολουρος κώνος να κάνει κυκλική κίνηση, αφού κάθε μικρότερος τροχός φρενάρει το σύστημα σε σχέση με ένα μεγαλύτερο. Αυτό μπορεί να γίνει εμφανές στην Εικόνα 1.10.



Εικόνα 1.10 Η εμφάνιση του κώνου προκειμένου να γίνει κατανοητή που προέρχεται από τον ιστότοπο <http://users.otenet.gr>.

1.12 Επίλογος

Επιπλέον, για να κατανοήσουμε την κίνηση ενός οχήματος, όπως το αυτοκίνητο, περιλαμβάνονται και άλλες παράμετροι που δεν αντιστοιχούν στην Κινηματική. Οι παράμετροι αναφέρονται στη μάζα του κινητού, στον τρόπο κατασκευής και σε επιμέρους εξοπλισμό που λαμβάνει μέρος στην κίνηση (ελαστικά).

- Η μάζα του κινητού που αναφέρεται στην ισορροπία του
- Η κατασκευή του στην καλύτερη αντιμετώπιση της αντίστασης του αέρα (αεροδυναμικό σχήμα)
- Και τέλος, οι τροχοί που έρχονται σε επαφή με το έδαφος και μεταξύ των και του οδοστρώματος την ανάπτυξη της τριβής.

Η τριβή είναι καθοριστικής σημασίας καθώς, δεν επιτρέπει στο σώμα να ολισθαίνει. Το σχήμα το οχήματος διαμορφώνεται από παραμέτρους όπως η έμπροσθεν επιφάνεια του οχήματος, που τις ασκείται η αντίσταση του ανέμου και το βάρος που θα μεταφέρει. Σύμφωνα με τις παραπάνω παραμέτρους και την δύναμη της τριβής, οι τροχοί των οχημάτων διαμορφώνονται αναλόγως.

2. ΕΥΘΕΙΑ

2.1 Γενικά

Για την κίνηση ενός οχήματος σε μια ευθεία το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν: η επιτάχυνση, η επιβράδυνση, η δύναμη και το αεροδυναμικό σχήμα που μειώνει την αντίσταση του αέρα. Οι έννοιες αυτές έχουν ακριβή ονομασία στη φυσική και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μελέτη οχημάτων. Για παράδειγμα, η ταχύτητα είναι η έννοια που μπορεί να αντιληφθεί ο καθένας ως την έκφραση «πόσο γρήγορα κινείται το όχημα», όμως στη φυσική δεν είναι μόνον αυτό.

Ένα σημαντικό σημείο που πρέπει να αναφερθεί για την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός οχήματος είναι ότι η ταχύτητα αποτελεί το διάστημα που θα διανύσει το όχημα σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, ενώ η επιτάχυνση είναι η μεταβολή της ταχύτητας σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Παρότι τα δυο αυτά μεγέθη δεν εμφανίζουν να έχουν κανένα κοινό σημείο, ωστόσο η μεταβολή της ταχύτητας είναι ο ρυθμός αλλαγής θέσης και η επιτάχυνση θα είναι η μετατόπιση προς το τετράγωνο του χρόνου

$$a = \frac{du}{dt} \Leftrightarrow a = \frac{dx}{dt^2} \quad (2.1.1)$$

Ταχύτητα για την φυσική δεν είναι, απλώς, η μεταβολή της θέσης ενός σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, αλλά και η κατεύθυνση στην οποία κινείται.

Κατά την ευθεία πορεία ενός οχήματος παρατηρούμε ότι το όχημα επιταχύνει, επιβραδύνει, κινείται με σταθερή ταχύτητα ή να παραμένει ακίνητο. Αυτές οι τρεις καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το όχημα, αναλύονται στις επόμενες ενότητες. Με την ανάλυσή τους παρουσιάζονται και τρόποι με τους οποίους το όχημα είναι δυνατόν να βρεθεί σε μια από τις καταστάσεις.

2.2 «Κίνηση» Οχήματος

Σε μια ευθεία πορεία όταν αναφέρουμε τον όρο «κίνηση» διακρίνονται τρεις φάσεις.

1. Η επιτάχυνση ενός οχήματος.
2. Η επιβράδυνση ενός οχήματος.
3. Η σταθερή ταχύτητα που διατηρεί το όχημα.

Κάθε μια από τις παραπάνω φάσεις μπορεί να αναλυθεί ως μονάδα αλλά και ως μέρος μια διαδικασίας για την διέλευση των οχημάτων από μια ευθεία. Ο συνδυασμός των κινήσεων δίνουν μια αναλυτική διαδικασία διέλευσης από μια ευθεία πορεία και η συσχέτιση της ταχύτητας με την επιτάχυνση και την επιβράδυνση καθώς και η επιτάχυνση με την επιβράδυνση και αντίστροφα, θα δώσουν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μετάβαση από μια κίνηση σε μια άλλη.

2.2.1 Το όχημα παραμένει ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα

Έστω ότι το όχημα είναι ακίνητο τότε δεν επιδρά πάνω του κάποια δύναμη και για το αυτοκίνητο ισχύει ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα ή νόμος της αδράνειας. Αυτός διατυπώνεται ως εξής:

Κάθε σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας ή ευθύγραμμης και ισοταχούς κίνησης (δηλαδή κινείται με σταθερή ταχύτητα), εκτός αν επιδρά πάνω του εξωτερική

δύναμη. Συνεπώς, η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω σ' ένα σώμα είναι μηδέν. Μαθηματικά αναγράφεται ως εξής

$$\Sigma F = 0 \quad (2.2.1.1)$$

Ο τύπος $\Sigma F = 0$ ερμηνεύεται ως εξής:

Ένα όχημα θα παραμένει ακίνητο ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή τείνει να διατηρεί την κινητικότητά του, καθώς πάνω σε αυτό ασκείται δύναμη που έχει ίσο μέτρο και αντίθετη φορά με την δύναμη που κινεί το αυτοκίνητο.

Το όχημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή,

$$u = c \quad (2.2.1.2)$$

με $c =$ σταθερή τιμή

εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Άρα

$$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_1 + (-F_2) = 0 \Leftrightarrow F_1 = F_2 \quad (2.2.1.3)$$

Όπου F_1 είναι η δύναμη που κινεί το αυτοκίνητο και F_2 η δύναμη που αντιτίθεται σε αυτή.

Σημείωση

Σε ένα όχημα, η δύναμη που είναι υπεύθυνη για την κίνησή του δεν είναι μια εξωτερική δύναμη που μπορεί να ασκείται σ' ένα σώμα, αλλά μια δύναμη που παράγεται από την μηχανή του.

Ακόμη, μπορούμε να πούμε ότι όταν το αυτοκίνητο παραμένει ακίνητο είναι δυνατό να αναπτύξει δύναμη που δεν είναι ισχυρή ώστε να καταφέρει να κινηθεί.

Στην περίπτωση ενός οχήματος η δύναμη που το κινεί δεν είναι εξωτερική αλλά εσωτερική, παράγεται από τη μηχανή του. Παρόλα αυτά, ο νόμος του Νεύτωνα ισχύει. Επομένως, η σχέση (2.2.1.1) ισχύει.

Παράδειγμα 2.1

Έστω, ένα όχημα που η μηχανή του παράγει δύναμη F και στην αντίθετη κατεύθυνση έχουμε τη δύναμη της τριβής T και την αντίσταση του αέρα F_d . Αν το μέτρο της δύναμης F είναι ίσο με το άθροισμα των άλλων δυο, τότε τι ισχύει;

Λύση

Από την εκφώνηση της άσκησης γνωρίζουμε ότι

$$F = T + F_d \Leftrightarrow \Sigma F = 0 \quad (2.2.1.4)$$

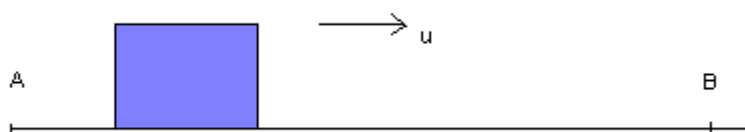
Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Νεύτωνα (νόμος της αδράνειας). Επομένως, το όχημα είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα είτε είναι ακίνητο.

Συμπερασματικά, ο νόμος της αδράνειας καθορίζει σε ποια κατάσταση βρίσκεται το σώμα αν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδενική ($\Sigma F = 0$). Όμως μπορεί να μας δώσει και μια επιπλέον πληροφορία. Το μηδενικό άθροισμα των δυνάμεων ο τρόπος να αποδώσουμε την «δυσκολία» του οχήματος να πραγματοποιήσει την εκκίνησή του. Αυτό συμβαίνει γιατί είναι γνωστή η στατική τριβή που είναι αντίθετη στην κίνηση που θα πραγματοποιήσει το όχημα.

2.2.2 Επιτάχυνση

Όταν ένα σώμα επιταχύνει σημαίνει πως με την πάροδο του χρόνου μεταβάλλει την ταχύτητά του. Κατά την επιτάχυνση η ταχύτητα αυξάνεται. Με τον τρόπο αυτό το όχημα επιτυγχάνει να αλλάξει την κινητική του κατάσταση. Η αλλαγή της κινητικής κατάστασης πραγματοποιείται για ένα σκοπό. Για ένα απλό αντικείμενο, όπως για παράδειγμα ένα κουτί η κινητική κατάσταση αλλάζει για να μετακινηθεί το κουτί. Το ίδιο μπορεί να συμβεί και σε ένα όχημα που επιταχύνει για να μετακινηθεί από ένα από το σημείο που βρίσκεται σε ένα δεύτερο απομακρυσμένο σημείο.

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1 μπορεί να μεταφερθεί από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β με μια ταχύτητα u (*Brain Beckman: part 9, 1991*).



Εικόνα 2.1 Ένα σώμα μετατοπίζεται από το σημείο Α στο σημείο Β με ταχύτητα u .

Για ένα όχημα η μεταφορά από το σημείο Α στο σημείο Β μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους

- Πρώτον να επιταχύνει το όχημα μέχρι το σημείο Β
- Και δεύτερον να επιταχύνει μέχρι ένα σημείο στο μέσον της διαδρομής και να συνεχίσει με σταθερή ταχύτητα έως τη στιγμή του θα φτάσει στην θέση Β.

Στην πρώτη περίπτωση το όχημα θα εκτελέσει μόνον επιταχυνόμενη κίνηση. Αντίθετα, στον δεύτερο τρόπο το όχημα θα εκτελέσει αρχικά επιταχυνόμενη κίνηση και έπειτα ομαλή κίνηση με σταθερή ταχύτητα.

Σημείωση

Στην μετατόπιση ενός οχήματος από το σημείο Α στο σημείο Β μπορούμε να προσθέσουμε και ένα τρίτο τρόπο. Αν το όχημα δεν έχει ως αρχική του κατάσταση την ηρεμία, δηλαδή δεν είναι ακίνητο, τότε μπορεί να μην επιταχύνει, μα να διατηρήσει την ήδη υπάρχουσα ταχύτητα. Είναι εμφανές, πως ο τρόπος αυτός είναι απόρροια του δεύτερου τρόπου με τη χρήση ορισμένων παραθέσεων.

Με την αλλαγή της κινητικής κατάστασης δεν ισχύει πλέον ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα. Όμως, υπάρχει ένας δεύτερος νόμος που εξηγεί την παρούσα κατάσταση. Είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα ή θεμελιώδης νόμος της δυναμικής που αναφέρει ότι:

Όταν σ' ένα σώμα εξασκείται μια εξωτερική δύναμη F , το σώμα αποκτά επιτάχυνση a η οποία είναι ανάλογη με τη δύναμη F . Οπότε ισχύει

$$F = ma \Leftrightarrow F = m \frac{du}{dt} \quad (2.2.2.1)$$

Επειδή από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε

$$a = \frac{du}{dt} \quad (2.2.2.2)$$

Η δύναμη F αποτελεί την συνισταμένη των δυνάμεων που επιδρούν στο σώμα (π.χ. όχημα). Για να ισχύει, λοιπόν, ο τύπος (2.2.2.1) ώστε να έχουμε επιτάχυνση, η συνισταμένη F πρέπει να είναι θετική, δηλαδή,

$$F > 0 \quad (2.2.2.3)$$

Από τη σχέση (2.2.2.3) συμπεραίνουμε ότι η δύναμη που παράγει το αυτοκίνητο για να κινηθεί είναι μεγαλύτερη από την συνισταμένη των επιμέρους δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα προκειμένου αυτό να παραμείνει στην υπάρχουσα θέση (ακίνητο).

Παράδειγμα 2.2

Έστω ένα αυτοκίνητο που η μηχανή του παράγει μια δύναμη $F = 800 \text{ N}$ και τριβή είναι $T = 100 \text{ N}$ ενώ, η αντίσταση του αέρα είναι $F_d = 120 \text{ N}$. Τι κίνηση πραγματοποιεί το αυτοκίνητο μάζα 500 kg ;

Λύση

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow F - T - F_d = ma \Leftrightarrow 800 - 100 - 120 = 500a \Leftrightarrow a = 1,16 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \quad (2.2.2.4)$$

Η επιτάχυνση a είναι θετική ($a > 0$) οπότε και η συνολική δύναμη που κινεί το αυτοκίνητο είναι θετική ($\Sigma F > 0$).

Από τον παραπάνω τύπο (2.2.2.1) μπορούμε να πούμε ότι η μάζα ενός σώματος είναι το μέτρο της αδράνειας του σώματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος τόσο πιο δύσκολα μπορεί να αλλάξει η κινητική του κατάσταση. Με άλλα λόγια, η τιμή της μάζας στην εξίσωση καθορίζει πόσο δύσκολο είναι να επιταχυνθεί ένα σώμα που έχει αυτή τη μάζα.

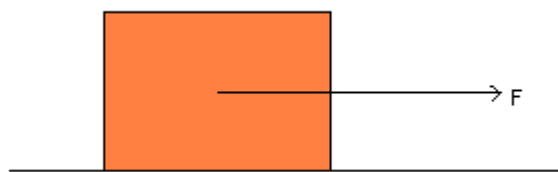
Για ένα σώμα που επιταχύνει αν γνωρίζουμε τον συντελεστή τριβής και την επιτάχυνση της βαρύτητας μπορούμε να αποφανθούμε για την μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αναπτύξει. Αυτή είναι:

$$a_{\max} = \frac{F}{m} \Leftrightarrow a_{\max} = \frac{T}{m} \Leftrightarrow a_{\max} = \frac{nmg}{m} \Leftrightarrow a_{\max} = ng \quad (2.2.2.5)$$

2.2.3 Τι είναι αυτό που κινεί ένα όχημα;

Για ένα απλό αντικείμενο που επιταχύνει, ο τρόπος που κινείται είναι κατανοητός. Σε ένα όχημα η κίνηση είναι πιο πολύπλοκη. Για να κατανοηθεί η πολύπλοκη κίνηση του οχήματος ορίζουμε αρχικά τον τρόπο κίνησης για ένα οποιοδήποτε αντικείμενο. Το σχήμα του αντικειμένου δεν είναι σημαντικό. Σημαντικός, θεωρείται ο τρόπος με τον οποίο κινείται και ποιά είναι η διαφορά με τον τρόπο που κινείται το όχημα.

Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο κουτί που κινείται (επιταχύνει ή κινείται με σταθερή ταχύτητα) δεν μπορεί να συμβάλει στην κίνηση. Η κίνησή του εξαρτάται μόνον από την εξωτερική δύναμη που θα του ασκηθεί (Εικόνα 2.2). Η προέλευση της δυνάμεως είναι αδιάφορη. Το αποτέλεσμα που απορρέει από την δύναμη είναι το γεγονός που εξετάζεται.



Εικόνα 2.2 Κίνηση σώματος λόγω εξωτερικής δύναμης F.

Σε αντίθεση με το αντικείμενο, το όχημα κινείται με τρόπο διαφορετικό. Η δύναμη που προκαλεί την κίνηση είναι διαφοροποιημένη. Η διαφορετικότητα πηγάζει από τον τρόπο προέλευσής της. Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, η δύναμη που κινεί το αντικείμενο προέρχεται από μια εξωτερική πηγή. Στο όχημα η δύναμη πηγάζει από το εσωτερικό. Με τον όρο «εσωτερικό» ορίζουμε την μηχανή του οχήματος. Με την λειτουργία της η μηχανή παράγει την ενέργεια που κινεί τους τροχούς του οχήματος και κινείται (επιταχύνει).

Πιο πάνω καθορίστηκε ο τρόπος με το οποίο τα αντικείμενα και τα οχήματα μπορούν να αλλάξουν την κινητική τους κατάσταση. Στα αντικείμενα η πηγή είναι εξωτερική. Αντίθετα, στα οχήματα είναι εσωτερική. Τελικά, ο διαφορετικός τρόπος προέλευσης της δυνάμεως που είναι υπεύθυνη για την πηγή, διαφοροποιεί και την πολυπλοκότητα της κίνησης.

2.3 Επιβράδυνση

Ο τύπος (2.2.2.1) ισχύει και για την περίπτωση όπου ένα σώμα μειώνει την ταχύτητά του. Για ένα όχημα αλλά και για ένα αντικείμενο υπάρχουν δυο τρόποι επιβράδυνσης

- Η εκούσια
- Και η ακούσια

Για ένα αντικείμενο η εκούσια επιβράδυνση είναι η άσκηση μια δύναμης αντίθετη προς την κίνηση του αντικειμένου. Το άθροισμα της δύναμης, που θα ασκηθεί και των τριβών θα είναι αντίθετα προς την κίνηση και ίσα με την εξωτερική δύναμη που θα κινεί το σώμα. Αντίθετα, ακούσια επιβράδυνση έχουμε όταν η δύναμη που κινεί το σώμα πάψει να ενεργεί πάνω στο σώμα ή μειωθεί. Έτσι, οι δυνάμεις των τριβών θα υπερσχύουν και το σώμα θα επιβραδύνει.

Εκούσια επιβράδυνση αποκαλείται η επιβράδυνση ενός οχήματος με τη χρήση των φρένων από τον οδηγό. Αντίθετα, ακούσια ονομάζεται η επιβράδυνση που πραγματοποιείται από την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων αντίθετων στην κίνηση του οχήματος χωρίς την παρέμβαση του οδηγού. Στην πραγματοποίηση της εκούσιας επιβράδυνσης συμβάλλει ο παράγοντας επιβράδυνσης.

Ο παράγοντας επιβράδυνσης είναι ένα μηχανικό σύστημα που επιτρέπει σε ένα όχημα να επιβραδύνει. Η χρήση του είναι καθοριστική για τα οχήματα. Με την χρήση του το όχημα αρχίζει να επιβραδύνει. Το αποτέλεσμα είναι η επιβράδυνση να πραγματοποιείται χωρίς σημαντική προσπάθεια από τον οδηγό για εύρεση άλλων τρόπων που θα μειώσουν την ταχύτητα του οχήματος. Επιπλέον, η μη χρήση άλλων τρόπων για να αυξηθούν οι τριβές, όπως π.χ. η αύξηση του βάρους του οχήματος, μπορεί να αποτελέσει λανθασμένη απόφαση για τον έλεγχο του αυτοκινήτου κατά την διέλευσή του από την στροφή.

Οι λόγοι για την εκούσια επιβράδυνση ενός αυτοκινήτου είναι πολλοί, όπως για παράδειγμα, η αποτροπή συγκρούσεως του αυτοκινήτου με ένα εμπόδιο ή η ακινητοποίηση του.

Όσο σημαντικό είναι να επιταχύνουμε το ίδιο σημαντικό είναι και να επιβραδύνουμε. Παραδείγματος χάριν σε περίπτωση ανάγκης μπορεί να χρειαστεί να επιβραδύνεις άμεσα αλλά και πάντα πριν από μια στροφή η επιβράδυνση είναι απαραίτητη.

Η ακούσια επιβράδυνση αφορά, κυρίως, την τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των ελαστικών του αυτοκινήτου και του οδοστρώματος και την αντίσταση του αέρα, αποτέλεσμα το αυτοκίνητο να επιβραδύνει και στη συνέχεια να σταματήσει.

Κατά την επιβράδυνση το όχημα με την πάροδο του χρόνου ελαττώνει την ταχύτητά του. Το γεγονός αυτό, γίνεται αντιληπτό με την εμφάνιση αρνητικού πρόσημου στο αποτέλεσμα της. Ο τύπος που δίνει την επιβράδυνση σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι:

$$a = \frac{F}{m} \quad (2.3.1)$$

όπου F είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που επιδρούν πάνω σ' ένα όχημα με μάζα ίση m χιλιόγραμμα (kg).

Στην επιβράδυνση η συνισταμένη των του σώματος είναι μικρότερη του μηδενός. Δηλαδή,

$$F < 0 \quad (2.3.2)$$

Σύμφωνα με την (2.3.2) η συνισταμένη των επιμέρους δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα προκειμένου αυτό να παραμείνει ακίνητο είναι μεγαλύτερη της δυνάμεως που παράγει η μηχανή του οχήματος.

Παράδειγμα 2.3 (ακούσια τριβή)

Ασκούμε σε ένα κύλινδρο μια δύναμη. Αυτός κινείται πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα σταματά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ του κυλίνδρου και του επιπέδου. Επειδή η συνολική ταχύτητα του κυλίνδρου είναι αρνητική ($v < 0$) τότε και η συνολική δύναμη που κινεί τον κύλινδρο είναι αρνητική ($\Sigma F < 0$). Συνεπώς, ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για τη επιβράδυνση.

Παράδειγμα 2.4 (εκούσια τριβή)

Ένα αυτοκίνητο αναπτύσσει ταχύτητα v και ο οδηγός του οχήματος επιθυμεί να επιβραδύνει ή να ακινητοποιήσει το αυτοκίνητο. Τότε, συνειδητά, πατά το φρένο του αυτοκινήτου μέχρι αυτό να φτάσει στην επιθυμητή κατάσταση ($v=0$ ή $v=v$). Επειδή η συνολική ταχύτητα του κυλίνδρου είναι αρνητική ($v_{ολ} < 0$) τότε και η συνολική δύναμη που κινεί τον κύλινδρο είναι αρνητική ($\Sigma F < 0$). Συνεπώς, ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα για την επιβράδυνση.

2.4 Τι θα συμβεί αν χρησιμοποιήσουμε τα φρένα;

Αν γίνει χρήση των φρένων η δύναμη της αντίστασης του εδάφους για τον άξονα των μπροστινών τροχών θα αυξηθεί. Αντίθετα, η δύναμη του εδάφους από τον άξονα των πίσω τροχών θα μειωθεί. Με άλλα λόγια το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου θα αυξήσει το βάρος του και το πίσω μέρος του αυτοκινήτου θα μειώσει το βάρος του. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι πως οι δυνάμεις της τριβής που ασκούνται σε επίπεδο

εδάφους στους τροχούς αυξάνονται προκειμένου το όχημα να μειώσει την ταχύτητά του ή να σταματήσει. Το αποτέλεσμα είναι να υπάρξει μια ροπή που να αποτρέπει στο όχημα να συνεχίσει την κίνησή του. Αυτή η ροπή είναι προς την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού και αν το αυτοκίνητο δεν εξαναγκαστεί να μειώσει την ταχύτητά του, τότε η ροπή ισορροπεί με την κίνηση και αποκτά την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές αν γνωρίζουμε το βάρος B του αυτοκινήτου, την ακτίνα R της βάσης του τιμονιού και την μάζα m . Εξισώνοντας τις ροπές και χρησιμοποιώντας την εξίσωση $F_1 + F_2 = W$ (F_1, F_2 οι δυνάμεις του εδάφους) έχουμε:

$$B_d = \frac{Fm}{R} \quad (2.4.1)$$

Όπου B_d είναι το βάρος που μεταφέρεται από τους τροχούς και F η δύναμη του οχήματος που προέρχεται από τον τύπο

$$F = ma \quad (2.4.2)$$

Για παράδειγμα, όταν ένα αυτοκίνητο έχει βάρος B είναι σε Newton, το R σε μέτρα,

τη m_1 σε kg και το $a=g=9,81 \frac{m}{sec^2}$.

Οπότε

$$B_d = \frac{B}{g} \frac{m_1}{R} \quad (2.4.3)$$

Τι εννοούμε όταν λέμε «χρήση των φρένων»;

Στην αναζήτηση της ιδανικής γραμμής οι οδηγοί ψάχνουν συγκεκριμένα σημεία αναφοράς μέσα στον δρόμο. Σε κάθε διαδρομή, μερικά μέτρα πριν από κάθε διαδρομή υπάρχουν πινακίδες που προειδοποιούν τους οδηγούς. Όμως, αρκετοί τις θεωρούν «προφανείς».

Ένας από τους λόγους, λοιπόν, που ένα όχημα χρειάζεται να φρενάρει είναι η είσοδος του στην στροφή. Με τη χρήση των φρένων επιτυγχάνεται η μείωση της ταχύτητας και η απόκτηση της ιδανικής για την είσοδο στη στροφή. Είναι χαρακτηριστικό πως οι οδηγοί που αναπτύσσουν υψηλές ταχύτητες, καθυστερούν όσο μπορούν περισσότερο να φρενάρουν πριν την είσοδό τους σε μια στροφή. Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημα επιβράδυνσης (φρένα οχημάτων) έχει εξελιχθεί και προσφέρει στους οδηγούς γρήγορη επιβράδυνση.

2.5 Το Σύστημα Επιβράδυνσης

Η επιβράδυνση είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες με τους οποίους μπορούμε να καθορίσουμε την κίνηση ενός οχήματος. Τα πρώτα οχήματα που κατασκευάστηκαν είχαν μόνο τον απαραίτητο εξοπλισμό. Σε αυτόν ανήκουν η μηχανή και το σύστημα επιβράδυνσης. Δηλαδή το όχημα από τα πρώτα του στάδια είχε την δυνατότητα να επιταχύνει και να επιβραδύνει.

Τα οχήματα αρχικά δεν κατασκευαζόταν με την μορφή που γνωρίζουμε σήμερα. Με το πέρασμα του χρόνου η τεχνολογία εξελίχθηκε και μαζί της εξελίχθηκαν και τα οχήματα. Η απόδοσή τους κατά την επιτάχυνση βελτιώθηκε. Αυτό επιτεύχθηκε με την μελέτη της αεροδυναμικής. Επομένως, η απόδοση του οχήματος κατά τη διάρκεια

επιταχύνσεως βελτιώθηκε. Όμως, το σύστημα επιβράδυνσης δεν ήταν δυνατό να παραμείνει όπως κατασκευάστηκε αρχικά. Έτσι, η βελτίωσή του ήταν αναμενόμενη, καθώς όσο σημαντική είναι η επιτάχυνση είναι και η επιβράδυνση. Σήμερα τα οχήματα αποδίδουν υψηλότερες ταχύτητες, αλλά και μικρότερους χρόνους και αποστάσεις στην επιβράδυνση από τα αρχικά οχήματα που κατασκευάστηκαν.

2.6 Επιβράδυνση – Ακίνητοποίηση αυτοκινήτου

Οι περισσότεροι άνθρωποι που αναφέρονται σε οχήματα υψηλών αποδόσεων μιλούν για την επιτάχυνσή του. Πράγματι, η επιτάχυνση είναι σημαντική για ένα όχημα. Όμως, πιο σημαντική είναι η επιβράδυνση για ένα όχημα και συγκεκριμένα πόσο γρήγορα μπορεί να σταματήσει. Είναι χαρακτηριστικό πως κατά την επιβράδυνση αισθανόμαστε μια δύναμη να ασκείται στο σώμα μας (όπως και στην επιτάχυνση), όταν σταματάμε το όχημα ξαφνικά (*Barry Parker: Physics and Your Car*).

Σχετικά με την μέγιστη επιβράδυνση που μπορεί να πραγματοποιήσει ένας οδηγός μέχρι να σταματήσει, σε ένα επιβατικό αυτοκίνητο κειμένεται από 0,6g ως 0,8g ή από $5,886 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ως $7,848 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Συχνά η επιβράδυνση είναι 0,2g ή $1,962 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Αυτή η τιμή είναι η πιο ευχάριστη σχετικά με την δύναμη που αισθανόμαστε να ασκείται πάνω μας στην διάρκεια της επιβράδυνσης. Φυσικά όταν είναι $a = 7,848 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ το όχημα σταματά πολύ πιο γρήγορα.

Ένα ακόμη στοιχείο που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι η απόσταση που θα διανύσει το αυτοκίνητο μέχρι να σταματήσει ($v = 0$). Η απόσταση, που επιβραδύνει μέχρι τη στιγμή που θα έχουμε $v = 0$ και το όχημα δεν θα ολισθαίνει, δίνεται από τον τύπο:

$$s = \frac{v_0^2}{2gn} \quad (2.6.1)$$

Σημειώνεται ότι δυο επιφάνειες που εφάπτονται είναι τα ελαστικά και ο δρόμος. Το όχημα δεν ολισθαίνει και αυτός είναι ο λόγος που γίνεται η χρήση του συντελεστή τριβής n .

Για να βρεθεί ο χρόνος κατά τον οποίο το όχημα από μια αρχική ταχύτητα v_0 θα επιβραδύνει και τελικά θα σταματήσει ($v = 0$) χρησιμοποιείται η σχέση:

$$s = \frac{1}{2} at^2 \quad (2.6.2)$$

Επιπλέον, ένα όχημα δεν μπορεί να επιταχύνει επ' άπειρον γιατί οι τροχοί του θα αρχίσουν να ολισθαίνουν.

Το φαινόμενο της επιβράδυνσης εμφανίζεται καθώς πάνω στο αυτοκίνητο ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις που αποτρέπουν το όχημα να κινηθεί έτσι ώστε να ισχύει ο 1^{ος} νόμος του Νεύτωνα. Αυτές είναι η Τριβή και η Αντίσταση του αέρα.

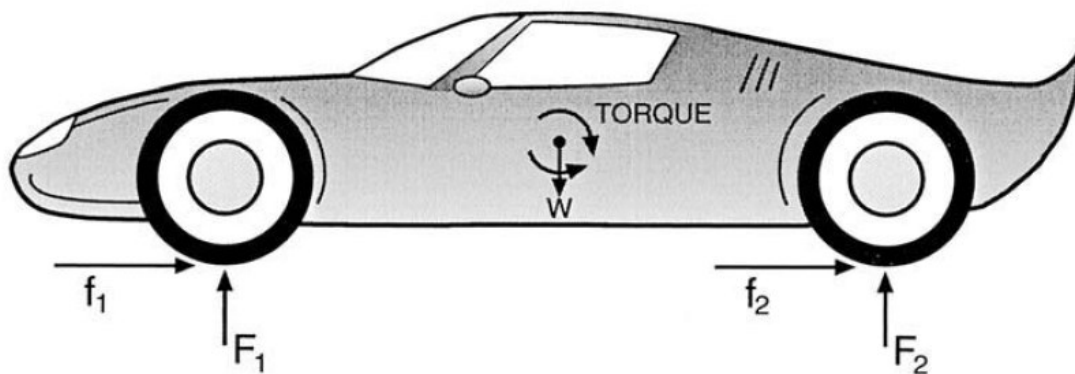
2.7 Τριβή

Θεωρούμε ένα σώμα σ ένα οριζόντιο επίπεδο και εφαρμόζουμε μια οριζόντια δύναμη F προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3 Κίνηση σώματος σε επίπεδο λόγω άσκησης δύναμης F και ύπαρξη τριβής $T_{στ}$ και T_k .

Στην εικόνα (Εικόνα 2.3) στον άξονα των y υπάρχει το βάρος B που έχει φορά από το κέντρο του αντικειμένου προς τα κάτω και η αντίδραση από το επίπεδο προς τα πάνω, οι οποίες αλληλοεξουδετερώνονται. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορούμε να δούμε στην Εικόνα 2.4 που ακολουθεί. Εμφανίζει ένα αυτοκίνητο με βάρος W που εξουδετερώνεται από δυο δυνάμεις (F_1 & F_2), οι οποίες παρουσιάζονται στα ελαστικά γιατί το σώμα δεν εφάπτεται στο έδαφος εξολοκλήρου, αλλά μέσω των ελαστικών.



Εικόνα 2.4. Απεικόνιση των δυνάμεων που προέρχονται από το έδαφος.

Αυτό οφείλεται στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, το νόμο δράσης-αντίδρασης, που αναφέρει ότι:

Αν το σωματίδιο 1 δρα πάνω στο σωματίδιο 2 με μια δύναμη F_{12} της οποίας η διεύθυνση είναι κατά μήκος της γραμμής που ενώνει τα σωματίδια, ενώ το σωματίδιο 2 δρα πάνω στο σωματίδιο 1 με μια δύναμη F_{21} , τότε $F_{21} = -F_{12}$ (διανυσματική σχέση). Με άλλα λόγια, σε κάθε δράση υπάρχει και μια ίση και αντίθετη ανάδραση.

Η δύναμη που αντιτίθεται στο βάρος από το έδαφος κατά τον άξονα των y ονομάζεται αντίδραση του επιπέδου.

Κατά τον άξονα των x η αντίθετη δύναμη που αναπτύσσεται είναι η τριβή και συμβολίζεται με T .

Όταν η δύναμη είναι μικρή το σώμα δεν κινείται. Εφόσον το σώμα είναι σε ισορροπία θα πρέπει να υπάρχει μια άλλη δύναμη ίση με την F που να λέγεται δύναμη στατικής τριβής $T_{στ}$. Αυξάνοντας την F βαθμιαία κάποια στιγμή το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει. Τη στιγμή ακριβώς που το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει η $T_{στ}$ έχει τη μέγιστη τιμή και συμβολίζεται με $T_{στ,max}$, το σώμα κινείται με επιτάχυνση προς τα δεξιά. Κατά τη διάρκεια της κίνησης η δύναμη επιβράδυνσης της τριβής είναι πάντα μικρότερη από την $T_{στ,max}$ και λέγεται δύναμη κινητικής τριβής ή τριβή ολίσθησης T_k .

- Συνοπτικά γράφουμε: Α) $F = T_{στ}$ το σώμα είναι ακίνητο
 Β) $F = T_k$ το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα
 Γ) $F > T_k$ το σώμα επιταχύνεται

Πειραματικά βρέθηκε:

1) $0 \leq T_{στ} \leq T_{στ \max}$

Όταν το σώμα βρίσκεται στο όριο να αρχίσει να κινείται ισχύει

$T_{στ} = T_{στ \max} = n_{στ} F_k$ όπου $n_{στ}$ ο συντελεστής τριβής και F_k η κάθετη δύναμη

2) Η δύναμη της κινητικής τριβής έχει μέτρο $T_k = n_k F_k$ όπου n_k ο συντελεστής τριβής.

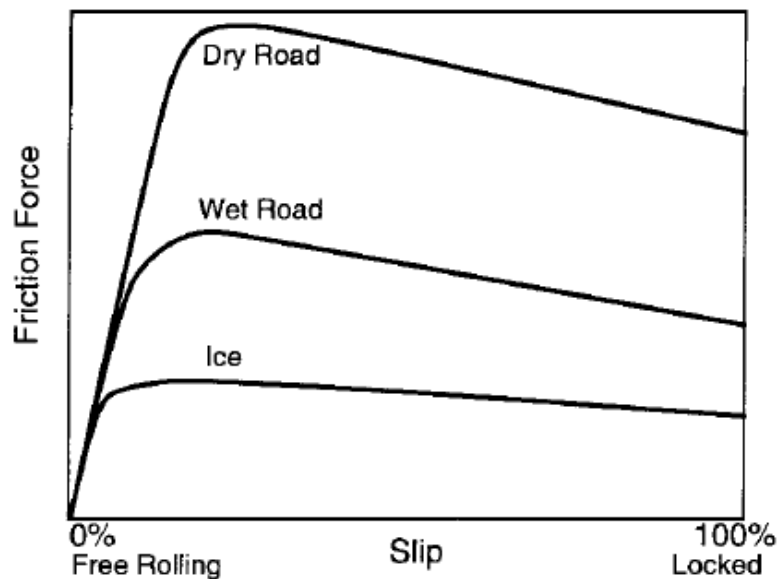
3) Οι τιμές των $n_{στ}$ και n_k εξαρτώνται από τη φύση των δύο επιφανειών και ισχύει γενικά $n_{στ} > n_k$.

Έτσι, η τιμή για τον συντελεστή τριβής μεταξύ των ελαστικών του αυτοκινήτου και του οδοστρώματος είναι:

Πίνακας 2.1 Αντιστοιχία κατάστασης οδοστρώματος και ταχύτητας με τον συντελεστή τριβής.

	$n_{στ}$	n_k
Στεγνό οδόστρωμα - χαμηλή ταχύτητα	0,9	0,7
Στεγνό οδόστρωμα - υψηλή ταχύτητα	0,6	0,4
Βρεγμένο οδόστρωμα - χαμηλή ταχύτητα	0,7	0,5

Παρατηρούμε ότι, για ένα αυτοκίνητο η τριβή αναπτύσσεται μόνο μεταξύ των ελαστικών και του δρόμου. Η κατάσταση του οδοστρώματος και το μέτρο της ταχύτητας είναι παράγοντες που καθορίζουν το αποτέλεσμα της τριβής και κατά συνέπεια τον έλεγχο του αυτοκινήτου.



Εικόνα 2.5. Χαρακτηριστικά παραδείγματα ολισθηρότητας και κατάστασης του οδοστρώματος.

Παρατηρήσεις

1. Στεγνό οδόστρωμα – Ολισθηρότητα

Όταν η δύναμη της τριβής είναι αυξημένη το αυτοκίνητο ολισθαίνει με μεγαλύτερη δυσκολία. Αυτό συμβαίνει και στην περίπτωση του στεγνού οδοστρώματος που η ολισθηρότητα αυξάνεται με τον μικρότερο ρυθμό.

2. Βρεγμένο οδόστρωμα – Ολισθηρότητα

Στην περίπτωση που το οδόστρωμα είναι βρεγμένο το νερό επιτρέπει την ολίσθηση. Από την Εικόνα 2.5 φαίνεται ότι ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η ολίσθηση στο βρεγμένο δρόμο είναι μεγαλύτερος συγκριτικά με τον ρυθμό ολίσθησης όταν ο δρόμος είναι στεγνός.

3. Πάγος – Ολίσθηση

Σύμφωνα με την Εικόνα 2.5 παρατηρούμε ότι ο πάγος συγκριτικά με το στεγνό και το βρεγμένο δρόμο έχει τη μεγαλύτερη αύξηση του ρυθμού ολίσθησης.

Σημείωση

Εκτός από την τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος, η δύναμη εμφανίζεται σε στο σύστημα επιβράδυνσης.

2.8 Αντίσταση Αέρα

Ο ατμοσφαιρικός αέρας είναι ένα μίγμα αερίων, που περιέχει αέρια όπως το οξυγόνο και το άζωτο, που αποτελούνται από μόρια.

Η «αντίσταση» του αέρα είναι ουσιαστικά η δύναμη που ακούν τα μόρια του αέρα σε ένα αντικείμενο που κινείται. Η δύναμη αυτή είναι αντίθετη προς την κατεύθυνση της δύναμης που παράγει ένα όχημα με σκοπό να κινηθεί (Air resistance, <http://nautilus.fis.uc.pt>). Η «αντίσταση» του αέρα συμβολίζεται με F_d και παράγεται από τον τύπο

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2 \quad (2.8.1)$$

Όπου ρ : η πυκνότητα του αέρα

C_d : μια σταθερά τριβής με τιμή 0,30

A : η έμπροσθεν επιφάνεια του αυτοκινήτου

Και $v = v_x + v_w$: το άθροισμα της ταχύτητας του αυτοκινήτου και της ταχύτητας του ανέμου.

Η ταχύτητα του ανέμου σε ιδανικές συνθήκες θεωρείται ότι είναι αμελητέα. Επομένως, ισχύει ότι η ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα του αυτοκινήτου ($v = v_x$).

Η πυκνότητα του ανέμου εξαρτάται από τις ατμοσφαιρικές συνθήκες και ως εκ τούτου μπορεί να επηρεάσει την μπροστινή επιφάνεια του αυτοκινήτου. Παρότι στις περισσότερες περιπτώσεις η αντίσταση του αέρα είναι απλώς μια ενόχληση, είναι και αναγκαία. Για παράδειγμα, χωρίς την αντίσταση του αέρα δεν θα ήταν δυνατή η ανύψωση ούτε των αεροπλάνων ούτε των ελικοπτέρων. Μπορεί να εμφανιστεί σε δυο διευθύνσεις. Η μια διεύθυνση που εμφανίζεται είναι κατά τον άξονα των y για το Καρτεσιανό επίπεδο όπως για παράδειγμα, κατά την πτώση ενός μπαλονιού από ένα ύψος h . Ενώ, η δεύτερη διεύθυνση κατά την οποία μπορεί να εμφανιστεί η αντίσταση του αέρα είναι κατά τον άξονα των x , επίσης, για το Καρτεσιανό επίπεδο όπως για παράδειγμα, με την κίνηση ενός αυτοκινήτου.

Οι συνηθέστερες συνθήκες στις οποίες γίνονται οι μετρήσεις για τα οχήματα είναι:

Για την θερμοκρασία έχουμε τους 15°C .

Για την βαρομετρική πίεση 101,32 kPa

Και η ανταποκρινόμενη πυκνότητα του ανέμου $1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Όπως φαίνεται από τον τύπο η αντίσταση του αέρα εξαρτάται από την επιφάνεια του εμπροσθεν μέρους του αυτοκινήτου. Αυτός είναι και ο λόγος που τα οχήματα κατασκευάζονται με ένα καθορισμένο τρόπο όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.6.



Εικόνα 2.6. Σχηματική απεικόνιση της χαρακτηριστικής κατασκευής των αυτοκινήτων.

Επίσης, είναι εμφανές πως η αντίσταση του αέρα εξαρτάται άμεσα από την ταχύτητα του κινητού. Επομένως

- Αν η ταχύτητα του κινητού αυξηθεί, τότε και η αντίσταση του αέρα θα αυξηθεί.
- Και αν η ταχύτητα του κινητού μειωθεί, τότε και η αντίσταση του αέρα θα μειωθεί.

Από την δεύτερη περίπτωση προκύπτει ότι για χαμηλές ταχύτητες η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

2.9 Αεροδυναμικό Σχήμα Οχημάτων

Αρχικά, δεν είχαν την καθορισμένη όψη τα αυτοκίνητα αλλά εξελίχθηκαν μετά από μελέτες για την αντίσταση του αέρα και υιοθετήθηκε το παραπάνω μοντέλο. Μαζί με την μείωση της επιφάνειας του εμπροσθεν μέρους του αυτοκινήτου μειώθηκε και η αντίσταση που ασκούνται από τα μόρια του αέρα σε αυτή και κατά συνέπεια, αυξήθηκε η ταχύτητα που μπορεί να αναπτύξει το αυτοκίνητο. Σε χαμηλές ταχύτητες οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα όχημα είναι μειωμένες. Η σταθερότητα, η τριβή, η ικανότητα εξισορρόπησης, και περιστασιακά, η οικονομία των καυσίμων είναι παράγοντες που επηρεάζονται από το αεροδυναμικό σχήμα.

Η αντίσταση του αέρα εμφανίζεται με τη μορφή πέντε διαφορετικών καταστάσεων: την μορφή έλξης, την ανύψωση, την τριβή επιφανειών, την παρέμβαση και την εσωτερική ροή. Η έλξη εξαρτάται από το σχήμα των οχημάτων. Η ανύψωση είναι αποτέλεσμα των διαφορών πίεσης στο κάτω και επάνω μέρος του οχήματος. Η τριβή επιφάνειας είναι αποτέλεσμα της ταχύτητας του αέρα, δηλαδή, πόσα Newton είναι η δύναμη της τριβής που υπάρχει στα χαμηλότερα σε σύγκριση με τα υψηλότερα στρώματα του οχήματος. Η παρέμβαση προκαλείται από την προβολή του αυτοκινήτου και τελικά, η εσωτερική ροή προέρχεται από την διέλευση του αέρα μέσα από το όχημα.

Για ένα επιβατικό αυτοκίνητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, οι διαφορετικές μορφές της αντίστασης του αέρα είναι στα εξής ποσοστά: η μορφή έλξης 55%, η παρέμβαση 16%, η εσωτερική ροή 12%, η τριβή επιφανειών 10% και η ανύψωση 7%.

Θεώρημα Bernoulli

Μια από τις πιο σημαντικές συσχετίσεις στην αεροδυναμική αναφέρεται ως θεώρημα Bernoulli. Το θεώρημα διατυπώθηκε από τον Daniel Bernoulli τον δέκατο ένατο αιώνα. Ενδιαφερόταν κυρίως για το νερό και τα άλλα υγρά σώματα, αλλά οι απόψεις του εφαρμόζονται και για τα αέρια σώματα.

Το 1738 απέδειξε ότι καθώς η ταχύτητα ενός υγρού αυξάνεται, η πίεση που του ασκείται μειώνεται. Μαθηματικά μπορούμε να αναπαραστήσουμε το θεώρημα με τον εξής τρόπο:

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = c \quad (2.9.1)$$

όπου c μια σταθερά

p είναι η πίεση του αέρα

ρ είναι η πυκνότητα του αέρα

v είναι η ταχύτητα

και $\rho \frac{v^2}{2}$ είναι η δυναμική πίεση

Από τον τύπο μπορούμε να δούμε ότι καθώς η δυναμική πίεση, που εξαρτάται από την ταχύτητα, αυξάνεται, η πίεση του αέρα πρέπει να μειώνεται και αντίστροφα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αυστηρά εφαρμόσιμο μόνο στην περίπτωση που η ταχύτητα είναι μηδενική.

Σημείωση

Αυτή, η αύξηση της πίεσης, είναι ο λόγος που ένα αεροπλάνο μπορεί να ανυψωθεί. Είναι σχεδιασμένο ώστε η ταχύτητα του αέρα στο επάνω στρώμα να είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του χαμηλότερου στρώματος. Αν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη, η πίεση είναι μικρότερη. Αυτό σημαίνει ότι η πίεση κάτω από τα φτερά είναι μεγαλύτερη και το αεροπλάνο ανυψώνεται.

Με το αεροδυναμικό σχήμα, εκτός από την αύξηση της ταχύτητας, η μείωση των τριβών συμβάλλει στην ελαχιστοποίηση των καυσίμων που καταναλώνει το όχημα.

Συμπέρασμα

Η ευθύγραμμη ομαλή, η επιταχυνόμενη και η επιβραδυνόμενη κίνηση είναι αλληλένδετες. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό με τις επόμενες τρεις περιπτώσεις.

1^η περίπτωση

Όταν ένα όχημα (π.χ. αυτοκίνητο) κινείται με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έχει τη δυνατότητα

1. να επιταχύνει
2. να επιβραδύνει

2^η περίπτωση

Όταν ένα όχημα κινείται με επιταχυνόμενη κίνηση, στη συνέχεια έχει την δυνατότητα

1. να κινηθεί με σταθερή ταχύτητα
2. να επιβραδύνει

3^η περίπτωση

Όταν ένα σώμα επιβραδύνει μπορεί να αλλάξει την κινητική του κατάσταση σε

1. κίνηση με σταθερή ταχύτητα
2. επιταχυνόμενη κίνηση

Υπολογισμοί που δεν εμπλέκουν την μάζα του οχήματος:

Οι υπολογισμοί αναφέρονται στην απόσταση, στην ταχύτητα και στην επιτάχυνση.

Όταν ένα αυτοκίνητο έχει αναπτύξει ταχύτητα u διανύοντας απόσταση d σε χρόνο t , τότε ισχύει:

$$d = ut \quad (2.9.2)$$

Όταν δε είναι γνωστή η ταχύτητα του, αλλά η επιτάχυνσή του τότε έχουμε για την απόσταση:

$$d = \frac{1}{2} at^2 \quad (2.9.3)$$

Ο τύπος (2.9.2) ισχύει για σώμα που έχει αρχική ταχύτητα μηδέν ($u_0 = 0$). Αν όμως, η αρχική ταχύτητα είναι διάφορη από το μηδέν ($u_0 \neq 0$) τότε έχουμε τον τύπο:

$$d = u_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2.9.4)$$

Αντίστοιχα για την ταχύτητα έχουμε:

$$u = u_0 + at \quad (2.9.5)$$

Παρά το γεγονός ότι οι παραπάνω τύποι είναι αποδεκτοί και στην περίπτωση που ένα σώμα επιβραδύνει, ο τύπος (2.9.4) και ο (2.9.5) διαφοροποιούνται και μετατρέπονται σε:

$$d = u_0 t - \frac{1}{2} at^2 \quad (2.9.6)$$

$$u = u_0 - at \quad (2.9.7)$$

2.10 Έργο

Στην περίπτωση που πάνω σε ένα σώμα επιδρά μια δύναμη F και το μετατοπίζει κατά dx τότε η ενέργεια που παράγεται από την δύναμη ονομάζεται έργο. Το έργο ορίζεται ίσο με

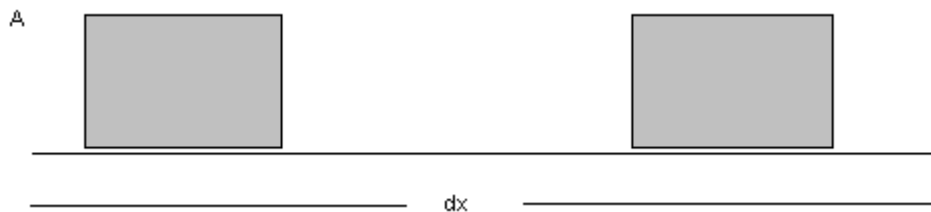
$$dW = Fdx \Leftrightarrow W = \int Fdx \quad (2.10.1)$$

Επειδή μόνο η συνιστώσα της F κατά τη διεύθυνση του dx είναι αποτελεσματική στο να παράγει κίνηση.

Η μονάδα μέτρησης για το έργο είναι το Joule το οποίο είναι $1J = 1N \cdot 1m$.

Παράδειγμα 2.5

Σε ένα σώμα A ασκείται μια δύναμη $F = 100 \text{ N}$ και το σώμα μετατοπίζεται κατά $dx = 5 \text{ m}$. Ποιο είναι το έργο της δύναμης F ;



Εικόνα 2.7 Μετατόπιση σώματος A.

Λύση

$$W = Fdx \Leftrightarrow W = 100 \cdot 5 \Leftrightarrow W = 500 \text{ J} \quad (2.10.2)$$

Ακόμη, το έργο μιας δύναμης μπορεί να εμφανιστεί και σε περιπτώσεις που η δύναμη είναι στη διεύθυνση του άξονα των y . Για παράδειγμα, όταν προσπαθήσουμε να σηκώσουμε ένα κουτί με αντικείμενα στο εσωτερικό του, τότε παράγουμε έργο έναντι στην βαρύτητα. Από την άλλη πλευρά, αν μεταφέρεις το κουτί από ένα σημείο σε ένα άλλο, στον άξονα των x δεν θα παραχθεί έργο. Έργο, κατά τον άξονα των x , παράγεται όταν το κουτί είναι πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια π.χ. τραπέζι και του ασκούμε μια δύναμη που το μετακινεί κατά μήκος του τραπεζιού.

2.11 Κινητική ενέργεια

Κινητική ενέργεια είναι η ενέργεια που έχει ένα σώμα όταν κινείται και αναφέρεται στην ικανότητά του να παράγει έργο. Η κινητική ενέργεια ενός σώματος υπολογίζεται από τον τύπο

$$K = \frac{1}{2} mu^2 \quad (2.11.1)$$

Όπου m είναι η μάζα του σώματος

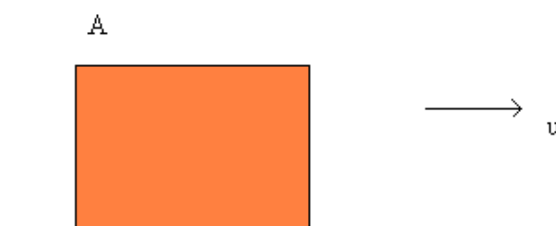
u είναι η ταχύτητα του σώματος

και η μονάδα μέτρησης του είναι το $1\text{J} = 1\text{N} \cdot 1\text{m}$.

Παράδειγμα 2.6

Έστω ότι ένα σώμα μάζας $m = 80 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $u = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ (Εικόνα 2.8).

Να βρεθεί η Κινητική ενέργεια του σώματος;



Εικόνα 2.8 Σώμα που κινείται με ταχύτητα u .

Λύση

$$K = \frac{1}{2} mu^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 10^2 \Leftrightarrow K = 4000 \text{ J} \quad (2.11.2)$$

Ένα σώμα το οποίο κινείται, όπως ένα όχημα, έχει κινητική ενέργεια που δίνεται από τον παραπάνω τύπο. Όπως η ορμή, έτσι και η κινητική ενέργεια όταν ένα όχημα

αυξάνει ή μειώνει την ταχύτητά του τότε αντίστοιχα και η κινητική ενέργεια αυξάνεται ή μειώνεται.

Παράδειγμα 2.7

Έστω, ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα u_0 .

Αν αυξήσουμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου σε u_1 , δηλαδή,

$$u_0 < u_1 \quad (2.11.3)$$

Τότε η κινητική ενέργεια θα μεταβληθεί και θα γίνει:

$$p_1 = mu_1 \quad (2.11.4)$$

που θα είναι

$$p_1 > p_0 \quad (2.11.5)$$

με

$$p_0 = mu_0 \quad (2.11.6)$$

η ορμή του αυτοκινήτου αρχικά.

Αν μειώσουμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου σε u_2 , δηλαδή,

$$u_0 > u_2 \quad (2.11.7)$$

Τότε θα μεταβληθεί η κινητική ενέργεια σε:

$$p_2 = mu_2 \quad (2.11.8)$$

που θα είναι $p_0 > p_2$ (με $p_0 = mu_0$ η αρχική ορμή).

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι ίση με το έργο που παράγει η δύναμη που κινεί το σώμα.

Δηλαδή,

$$W = \Delta K \Leftrightarrow W = \frac{1}{2} mu^2 - \frac{1}{2} mu_0^2 \quad (2.11.9)$$

Απόδειξη

Από τον τύπο του έργου ενέργειας έχουμε:

$$W = Fd \quad (2.11.10)$$

d είναι η απόσταση που το σώμα θα διανύσει όταν το ασκηθεί δύναμη F .

Όμως

$$d = \frac{1}{2} at^2 \quad (2.11.11)$$

και

$$F = ma \quad (2.11.12)$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$W = ma \frac{1}{2} at^2 \Leftrightarrow W = m \frac{1}{2} (at)^2 \quad (2.11.13)$$

Γνωρίζουμε πως

$$u = at \quad (2.11.14)$$

Οπότε

$$W = \frac{1}{2} mu^2 \quad (2.11.15)$$

Η κινητική ενέργεια είναι, επίσης, ένας δεύτερος τρόπος να προσεγγίσουμε την επιβράδυνση ενός οχήματος. Γνωρίζουμε ότι, με την επιβράδυνση των οχημάτων η ταχύτητά τους μειώνεται από u_0 σε u . Από τον τύπο της κινητικής ενέργειας προκύπτει πως

$$\Delta K \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} mu^2 - \frac{1}{2} mu_0^2 \leq 0 \quad (2.11.16)$$

Και επειδή η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι ίση με το έργο για το όχημα είναι $W \leq 0$.

Η Κινητική ενέργεια είναι ένας από τους πολλούς τύπους ενέργειας που υπάρχουν. Μπορούμε να δούμε μια ακόμη μορφή. Υποθέτουμε ότι μια μπάλα ρίχνεται προς τα πάνω. Όταν είναι η πρώτη ρίψη, η μπάλα έχει μια καθορισμένη Κινητική ενέργεια. Όμως, καθώς κινείται προς τα πάνω η βαρύτητα είναι αντίθετη προς την κίνησή της. Η μπάλα θα κινηθεί μέχρι την στιγμή που η Κινητική της ενέργεια θα μηδενιστεί. Η ενέργεια χάθηκε; Η απάντηση είναι όχι καθώς η Κινητική ενέργεια μετατράπηκε σε ενέργεια θέσης. Έπειτα, η μπάλα πέφτει προς τη γη, κερδίζει Κινητική ενέργεια. Τελικά, όταν (ή λίγο πριν) χτυπήσει στο έδαφος έχει μόνο Κινητική ενέργεια. Η ενέργεια θέσης έχει καταναλωθεί όλη. Η ενέργεια θέσης καθορίζεται ως εξής:

$$E = mgh \quad (2.11.17)$$

h είναι απόσταση της μπάλας από τη γη.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω η ενέργεια δεν χάνεται αλλά μετατρέπεται από μια μορφή σε μια άλλη.

Επιπλέον, η θερμοκρασία είναι μια ακόμη μορφή της ενέργειας. Όταν ένα όχημα υπερθερμανθεί τότε το όχημα «χάνει» Κινητική ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα.

2.12 Ισχύς

Η ισχύς ενός αντικειμένου είναι ο λόγος του έργου που παράγει το αντικείμενο προς το χρόνο που καταναλώνει για να το παράγει.

$$P = \frac{W}{t} \quad (2.12.1)$$

Όπου W είναι το έργο του αντικειμένου και t ο χρόνος που καταναλώνει για να παράγει το έργο.

Σε ένα όχημα η ισχύς εμφανίζεται σαν ιπποδύναμη. Επομένως, η δύναμη των ίππων είναι ισχύς που παράγει η μηχανή του οχήματος. Η ισχύς είναι ενέργεια που παράγεται από το όχημα και καθορίζει την δύναμη που θα κινήσει το όχημα.

Έτσι, προκύπτει ο τύπος που συνδέει την ισχύ και την δύναμη.

$$P = \frac{W}{t} \Leftrightarrow P = F \frac{dx}{t} \quad (2.12.2)$$

Από το παραπάνω τύπο γίνεται εμφανής και η μονάδα μέτρησης της ισχύος. Η

μονάδα μέτρησης είναι το 1 watt και ισοδυναμεί με $1 \frac{J}{sec}$. Όμως το $1J = N \cdot m$. Κατά

συνέπεια είναι $1 \text{ watt} = 1 \frac{J}{sec} = 1N \frac{m}{sec}$.

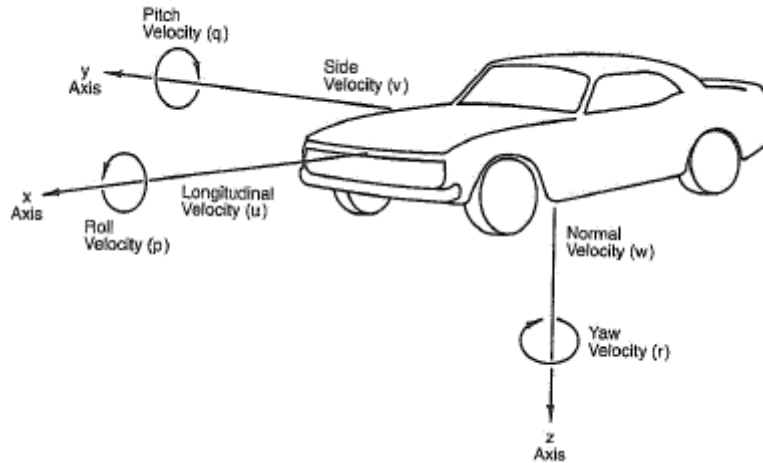
Συμπερασματικά, όταν γίνεται συζήτηση που αναφέρεται σε αυτοκίνητα αναφερόμαστε στην ενέργεια του αυτοκινήτου. Η ιπποδύναμη είναι η ισχύς ενός οχήματος. Από την σχέση που συνδέει την ισχύ με την το έργο παρατηρούμε ότι η κίνηση του οχήματος συνδέεται άμεσα με την ενέργεια που παράγει η μηχανή του αυτοκινήτου. Η δύναμη που κινεί ένα όχημα δεν είναι εξωτερική που σημαίνει ότι δεν ασκείται πάνω σ' ένα σώμα αλλά παράγεται. Τι σημαίνουν τα παραπάνω; Ας αρχίσουμε με την δύναμη που κινεί το όχημα. Η δύναμη καθορίζεται ως ο ρυθμός κατά τον οποίο παράγεται έργο, δηλαδή, σε πόσο χρόνο παράγεται ενέργεια. Εκτός

από το έργο η ενέργεια εμφανίζεται και σε άλλες μορφές. Οι διάφορες μορφές ενέργειας μπορεί να είναι η Κινητική ενέργεια, η Δυναμική ενέργεια, η θερμότητα, η ισχύς και η Ηλεκτρική ενέργεια.

3.Στροφή

3.1 Εισαγωγή στην Κυκλική Κίνηση

Ένα όχημα χάρη στις κινήσεις που εκτελεί μπορούμε να καθορίσουμε τρεις άξονες. Αυτοί όπως φαίνονται στην Εικόνα 3.1 είναι: ο x άξονας, ο y άξονας και ο z άξονας (*Milliken & Milliken: Race Car Vehicle Dynamics*).



Εικόνα 3.1. Απεικόνιση τριών βασικών αξόνων σε ένα όχημα.

Παρατηρήσεις

- Ο x άξονας είναι υπεύθυνος για την μετατόπιση του οχήματος σε μια ευθεία.
- Ο z άξονας αναπαριστά το βάρος του οχήματος.
- Και ο y άξονας σε συνδυασμό με τον z άξονα είναι υπεύθυνοι για την πορεία ενός οχήματος σε μια καμπυλόγραμμη τροχιά.

Στο πιο πάνω κεφάλαιο μελετήσαμε την ευθεία πορεία του οχήματος. Η επιτάχυνση και η επιβράδυνση είναι κινήσεις που πραγματοποιούνται στο x άξονα του. Αντίθετα, η κυκλική κίνηση που το όχημα πραγματοποιεί κατά την διάρκεια μιας στροφής είναι αποτέλεσμα των αξόνων y και z.

Η στροφή σε μια διαδρομή του δρόμου δεν αποτελεί ένα ιδιαίτερο φαινόμενο αν και η αντιμετώπισή της είναι διαφορετική. Μπορούμε να πούμε ότι είναι απλά ένα κυκλικό τόξο s με ακτίνα r και γωνία που οι μοίρες της κειμένονται από 0° (ευθεία) έως 180°. Το γεγονός αυτό καθορίζει και τον τρόπο που μελετάμε τη διέλευση ενός οχήματος από μια στροφή.

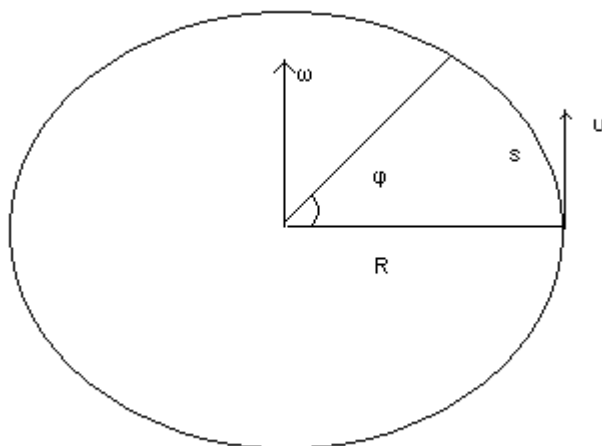
3.1.1 Η ταχύτητα στην Κυκλική Κίνηση

Γωνιακή ταχύτητα του κινητού ονομάζουμε ένα διάνυσμα ω το οποίο έχει μέτρο ίσο με το πηλίκο:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.1.1.1)$$

όπου $\varphi = \eta$ γωνία του τόξου
 και $dt = \text{o χρόνος στον οποίο ολοκληρώνει την διέλευσή του από την στροφή}$

Η διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς και αν το ω είναι σταθερό τότε λέμε ότι το σώμα κάνει Ομαλή Κυκλική Κίνηση, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.2.



Εικόνα 3.2 Σώμα πραγματοποιεί Κυκλική Κίνηση με ταχύτητα v για ακτίνα R , γωνία φ και απόσταση s .

Από την Εικόνα 3.2 προκύπτει ότι $v = \omega R$ (ταχύτητα κινητού) και η διεύθυνση της είναι εφαπτόμενη στην τροχιά.

Απόδειξη

Έστω ένα σώμα που κινείται πάνω σε μια καμπύλη C η οποία έχει το σχήμα κύκλου με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα R . Αν το σώμα κινηθεί από ένα σημείο του κύκλου σε ένα δεύτερο με την γωνία να είναι φ μοίρες και το διάστημα $s = R\varphi$, τότε είναι:

$$v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v = R \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.1.1.2)$$

επειδή $s = R \cdot \varphi$ (Εικόνα 3.2)

Επομένως

$$v = R\omega \quad (3.1.1.3)$$

αφού

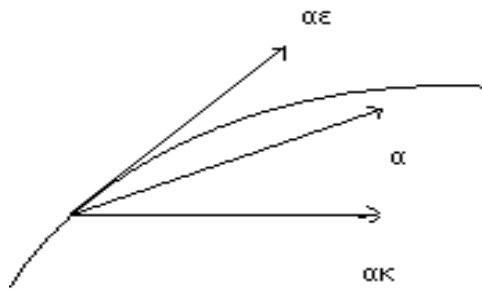
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.1.1.4)$$

Σημείωση

Αν το v έχει σταθερό μέτρο τότε το σώμα θα εκτελεί Ομαλή Κυκλική Κίνηση.

3.1.2 Επιτάχυνση στην Κυκλική Κίνηση

Ένα σώμα κατά την είσοδό του σε μια στροφή έχει τη δυνατότητα να αποκτήσει δυο επιταχύνσεις την επιτρόχια και την κεντρομόλο.



Εικόνα 3.3 Απεικόνιση επιταχύνσεων σε μια στροφή.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\varepsilon + \mathbf{a}_k \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}_\varepsilon, \mathbf{a}_k \text{ διανυσματικά μεγέθη})$$

Η επιτροχια επιτάχυνση a_ε μεταβάλλει μόνο το μέτρο της ταχύτητας του κινητού. Το μέτρο της ταχύτητας είναι

$$a_\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (3.1.2.1)$$

και η κεντρομόλος επιτάχυνση a_k μεταβάλλει μόνο τη διεύθυνση του κινητού και έχει μέτρο

$$a_k = \frac{u^2}{r} \quad (3.1.2.2)$$

Όπου r η ακτίνα της καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο που βρίσκεται το κινητό. Όμως η a_k δεν σχετίζεται με το μέτρο της επιτάχυνσης σε ένα κυκλικό τομέα αλλά με την αλλαγή της διεύθυνσης.

Επειδή η a_ε είναι κάθετη στην a_k ισχύει:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_k^2} \quad (3.1.2.3)$$

Συνοψίζοντας διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Όταν και τα δυο διανύσματα της επιτροχιας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι μηδέν το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση.
- Όταν η επιτροχια επιτάχυνση του κινητού είναι σταθερή ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνση μηδέν, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.
- Όταν η επιτροχια επιτάχυνση του κινητού είναι μηδέν, ενώ η κεντρομόλος είναι σταθερή, η κίνηση του κινητού είναι ομαλή κυκλική.
- Όταν και οι δύο επιταχύνσεις, επιτροχια και κεντρομόλος, είναι διαφορετικές από μηδέν έχουμε τη γενική περίπτωση της καμπυλόγραμμης μεταβαλλόμενης κίνησης.

3.1.3 Ομαλή Κυκλική Κίνηση

Στην ομαλή κυκλική κίνηση το σώμα που πραγματοποιεί ένα κύκλο σε χρόνο t (t περίοδος) με συχνότητα $f_0 = \frac{1}{t}$. Επειδή το σώμα είναι δυνατόν να πραγματοποιήσει

περισσότερους από έναν κύκλους η συχνότητα υπολογίζεται ως εξής: $f = \frac{N}{t_1}$. Το N αποτελεί τον αριθμό των στροφών που το σώμα έχει εκτελέσει σε χρόνο t_1 .

Για την ταχύτητα σύμφωνα με τον ορισμό πως είναι η μεταβολή της θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο έχουμε:

Η περίμετρος του κύκλου είναι $2 \cdot \pi \cdot r$ οπότε η ταχύτητα του σώματος (σύμφωνα με το ορισμό της ταχύτητας $u = \frac{s}{t}$) για μια περίοδο θα είναι $\frac{2\pi r}{t}$. Αντίθετα, για

περισσότερους από έναν κύκλους θα έχουμε $N \frac{2\pi r}{t}$.

Κατά την Ομαλή Κυκλική Κίνηση η επιτάχυνση του σώματος δεν μεταβάλλει το μέτρο της αλλά μόνο το διάνυσμά της (καθώς η επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος). Η επιτάχυνση αυτή στην Ομαλή Κυκλική Κίνηση ονομάζεται κεντρομόλος και έχει μέτρο ίσο με το τετράγωνο της ταχύτητας προς την ακτίνα του κυκλικού

$$\text{τόξου } a_k = \frac{u^2}{r}.$$

Στην περίπτωση που το σώμα είναι όχημα το κυκλικό τόξο είναι η στροφή.

3.1.4 Δυναμική της Ομαλής Κυκλικής Κίνησης

Σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε, όταν ένα σώμα κινηθεί με σταθερό μέτρο ταχύτητας όταν έχει επιτάχυνση με κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο που είναι

$$a_k = \frac{u^2}{r} \quad (3.1.4.1)$$

όπου u είναι η ταχύτητα του σώματος και r η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς τότε το σώμα θα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η επιτάχυνση θα ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση. Σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα για να αποκτήσει ένα σώμα κεντρομόλο επιτάχυνση απαιτείται δύναμη με σταθερό μέτρο που δίνεται από τη σχέση

$$F_k = m \frac{u^2}{r} \quad (3.1.4.2)$$

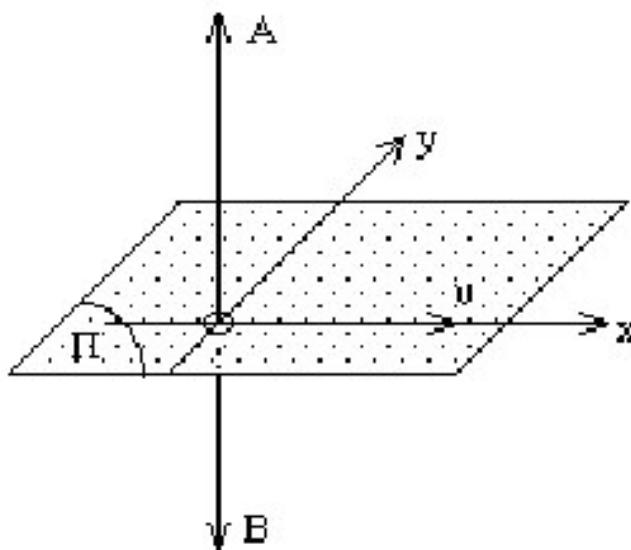
Αφού η δύναμη και η επιτάχυνση είναι διανυσματικές ποσότητες με την ίδια κατεύθυνση, η δύναμη πρέπει να έχει φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Η δύναμη αυτή λέγεται κεντρομόλος δύναμη. Εάν δεν υπάρχει κεντρομόλος δύναμη ένα σώμα είναι αδύνατον να κινηθεί σε κυκλική τροχιά.

Για παράδειγμα, ένα αυτοκίνητο για να στρίψει σε μια στροφή θα πρέπει να εξασκηθεί σ' αυτό μια δύναμη προς το κέντρο της στροφής. Σε επίπεδο δρόμο η δύναμη προκαλείται από την τριβή μεταξύ των ελαστικών και του οδοστρώματος (εφόσον οι τροχοί δεν ολισθαίνουν πρόκειται για στατική τριβή). Εάν η τριβή δεν είναι αρκετά μεγάλη, π.χ. όταν ο δρόμος είναι βρεγμένος, το αυτοκίνητο ξεφεύγει από την καμπύλη τροχιά και ολισθαίνει.

3.2 Ολίσθηση

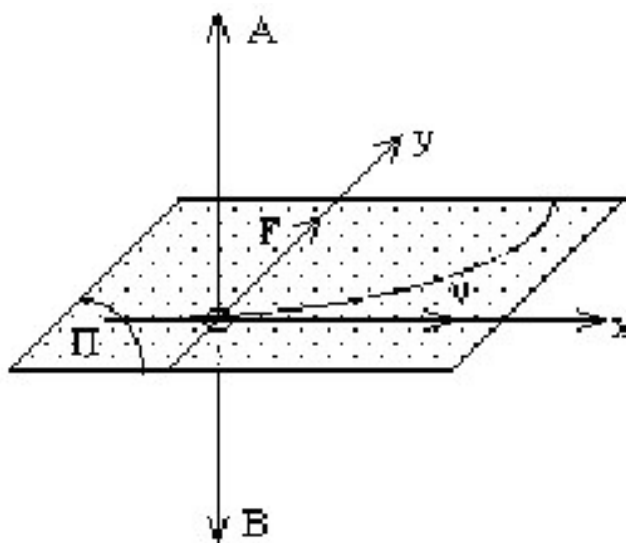
Για να ολισθαίνει ένα σώμα σε ένα επίπεδο χωρίς καμία αντίσταση, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ανυπαρξία τριβής. Αν το επίπεδο Π , πάνω στο οποίο ολισθαίνει

ένα σώμα, είναι οριζόντιο, τότε το βάρος του σώματος εξουδετερώνεται από την αντίδραση του επιπέδου και ισχύει $\Sigma F=0$, οπότε το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, Εικόνα 3.4.



Εικόνα 3.4 Απεικόνιση του επιπέδου όπου ισχύει η ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Ένα σώμα που ολισθαίνει σ' ένα επίπεδο Π έχει δυο βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή είναι δυνατό να κινείται σε δυο άξονες, έστω x και y κάθετους μεταξύ τους. Αν στο προηγούμενο παράδειγμα, που το επίπεδο είναι οριζόντιο και το σώμα έκανε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έστω κατά των άξονα των x , εφαρμόσουμε μια δύναμη F σταθερή κατά των άξονα των y , το σώμα θα εκτελέσει δυο ανεξάρτητες κινήσεις κάθετες μεταξύ τους. Αυτές είναι μια ευθύγραμμη ομαλή κατά των άξονα των x και μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κατά των άξονα των y . Η σύνθεση των δυο αυτών κινήσεων θα εξαναγκάσει να κάνει παραβολική τροχιά (στροφή) πάνω στο επίπεδο Π όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.5.



Εικόνα 3.5 Απεικόνιση παραβολικής τροχιάς πάνω σε ένα επίπεδο Π .

3.3 Ελεγχόμενη ολίσθηση

Υπάρχουν ορισμένοι σταθεροί κανόνες που καθορίζουν την απόδοση ενός αυτοκινήτου στο δρόμο, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια περάσματος από μια στροφή. Κάτω, λοιπόν, από συγκεκριμένες, αλλά διαφορετικές μεταξύ τους, συνθήκες η συμπεριφορά ενός αυτοκινήτου μπορεί να είναι: υποστροφική, υπερστροφική και ουδέτερη. Το ιδανικό είναι να συμπεριφέρεται το όχημα ουδέτερα, αλλά αφενός συμβαίνει σπάνια και αφετέρου όταν (και αν) συμβεί είναι αδύνατον να διαρκέσει για όλη τη διάρκεια της διαδρομής (*N.-Γ. ΠΑΡΙΚΟΥ: Αυτοκίνητο, Πως Λειτουργεί - Συντήρηση-Οδήγηση*).

Υποστροφή (Understeer)

Καθώς το αυτοκίνητο πλησιάζει τη στροφή, ο οδηγός φρενάρει και κατόπιν στρίβει το τιμόνι. Είναι η κατάσταση όπου οι μπροστινοί τροχοί δεν ακολουθούν την πορεία αλλά τείνουν να κινηθούν προς τα έξω, πάνω στην επαπτόμενη της στροφής. Δηλαδή το αυτοκίνητο τείνει να διαγράψει τροχιά μεγαλύτερης ακτίνας από αυτή που του υπαγορεύει το σύστημα διεύθυνσης. Ενώ δηλαδή ο οδηγός στρίβει αρκετά το τιμόνι του, το αυτοκίνητο συμπεριφέρεται σαν να το έχει στρίψει λίγο. Στην έσχατη περίπτωση υποστροφής, το αυτοκίνητο αγνοεί τελείως το στρίψιμο του τιμονιού και πορεύεται σχεδόν ευθεία.

Το κέντρο βάρους είναι μετατοπισμένο προς τα εμπρός και συμπεραίνουμε ότι το εμπρός μέρος του αυτοκινήτου παρεκκλίνει περισσότερο προς την εξωτερική πλευρά της στροφής, οπότε το αυτοκίνητο τείνει να ανοίξει την τροχιά του, στρίβοντας λιγότερο από την πρώτη περίπτωση. Υποστροφή είναι ουσιαστικά το φαινόμενο κατά το οποίο οι μπροστινοί τροχοί χάνουν την προσφυγή τους και το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου αρχίζει να γλιστράει προς το εξωτερικό μέρος της στροφής.

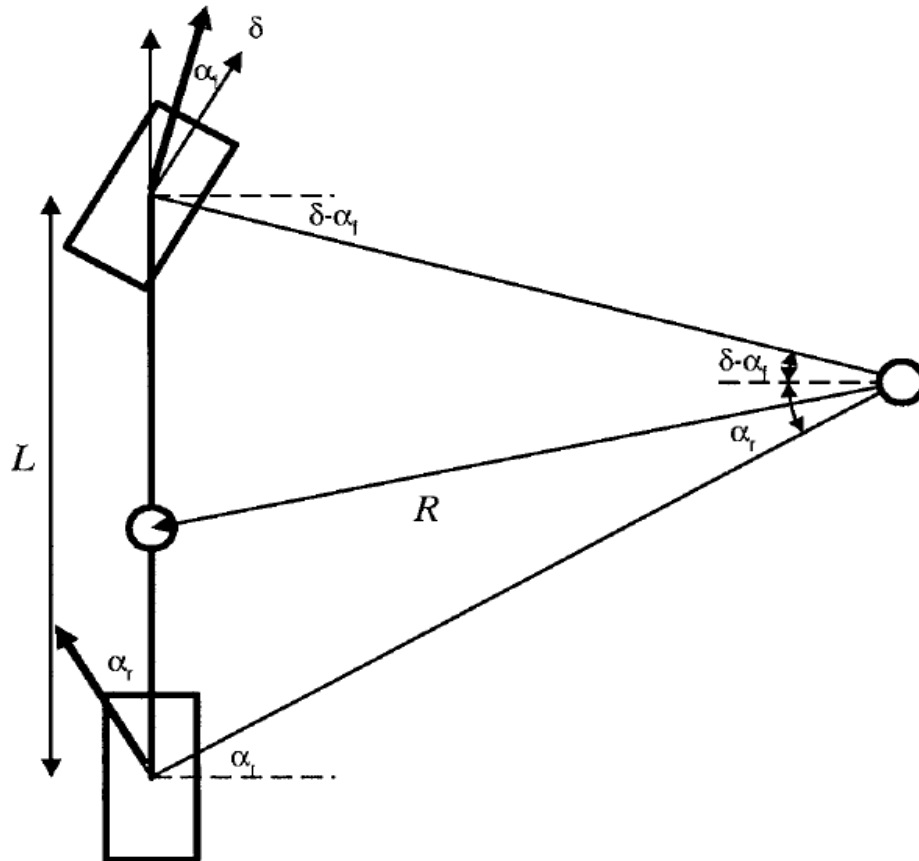
Υπερστροφή (Oversteer)

Η υπερστροφή είναι το ακριβώς αντίθετο της υποστροφής. Περιγράφει δηλαδή την κατάσταση στην οποία οι γωνίες ολίσθησης των πίσω τροχών είναι μεγαλύτερες από αυτές των μπροστά τροχών. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρείται έντονη μετατόπιση του πίσω μέρους του αυτοκινήτου προς το εξωτερικό της στροφής, οπότε απαιτείται διόρθωση με κατάλληλους χειρισμούς. Δηλαδή, το αυτοκίνητο δείχνει υπερβάλλοντα ζήλο να στρίψει, ακόμα και όταν η γωνία στροφής του τιμονιού είναι μικρή.

Όταν το κέντρο βάρους του οχήματος είναι μετατοπισμένο προς τα πίσω, τότε οι εγκάρσιες δυνάμεις που αναπτύσσουν τα πίσω ελαστικά για να εξισορροπήσουν την φυγόκεντρο, είναι μεγαλύτερες. Επειδή δεχτήκαμε ότι όλα τα ελαστικά έχουν την ίδια ευκαμψία, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα πίσω, λόγω μεγαλύτερης εγκάρσιας δύναμης, παραμορφώνονται περισσότερο και ως εκ τούτου αποκλίνουν περισσότερο από την θεωρητική τους τροχιά. Δηλαδή, το πίσω μέρος του αυτοκινήτου κινείται περισσότερο προς το εξωτερικό μέρος της στροφής.

Ουδέτερη Συμπεριφορά (Neutral)

Η ουδέτερη συμπεριφορά είναι η ιδανική για την επίτευξη των ελάχιστων δυνατών χρόνων περιφοράς. Αυτό που συμβαίνει είναι πως οι μπροστινοί τροχοί ολισθαίνουν με τον ίδιο ρυθμό που ολισθαίνουν και οι πίσω τροχοί και προς την ίδια κατεύθυνση. Με αυτό τον τρόπο το όχημα δεν παρεκκλίνει της πορείας του και ο χρόνος εξόδου θα είναι ο ελάχιστος δυνατός, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.6.



Εικόνα 3.6 Σχηματική απεικόνιση ώστε το όχημα να μην αποκλίνει της Ουδέτερης Συμπεριφοράς.

Η σταθερή γωνία οδήγησης δίνεται από το τύπο

$$\delta = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r \quad (3.3.1)$$

Όπου α_f , α_r είναι οι γωνίες ολίσθησης.

Ο όρος «γωνία οδήγησης» αναφέρεται στη γωνία που σχηματίζουν οι τροχοί του αυτοκινήτου κατά τη νέα διεύθυνση που ορίζουμε (στροφή τιμονιού) σε σύγκριση με διεύθυνση που είχαν οι τροχοί πριν τον ορισμό της νέας διεύθυνσης (ευθεία πορεία).

Ο τύπος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\delta = \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{L}{R} + \left(\frac{m_f}{2C_{\alpha f}} - \frac{m_r}{2C_{\alpha r}} \right) \frac{V_x^2}{R} \quad (3.3.2)$$

Όπου

$$\left(\frac{m_f}{2C_{\alpha f}} - \frac{m_r}{2C_{\alpha r}} \right) \quad (3.3.3)$$

Είναι ο συντελεστής που υποδηλώνει την υποστροφή ή την υπερστροφή αντίστοιχα. Συμβολίζεται με K_v και στην ουδέτερη συμπεριφορά είναι

$$K_v = 0 \quad (3.3.4)$$

Συνεπώς προκύπτει ότι

$$\alpha_f = \alpha_r \quad (3.3.5)$$

Στην υποστροφή έχουμε

$$K_v > 0 \quad (3.3.6)$$

Αντίστοιχα για τις γωνίες ολίσθησης α_f, α_r είναι

$$\alpha_f > \alpha_r \quad (3.3.7)$$

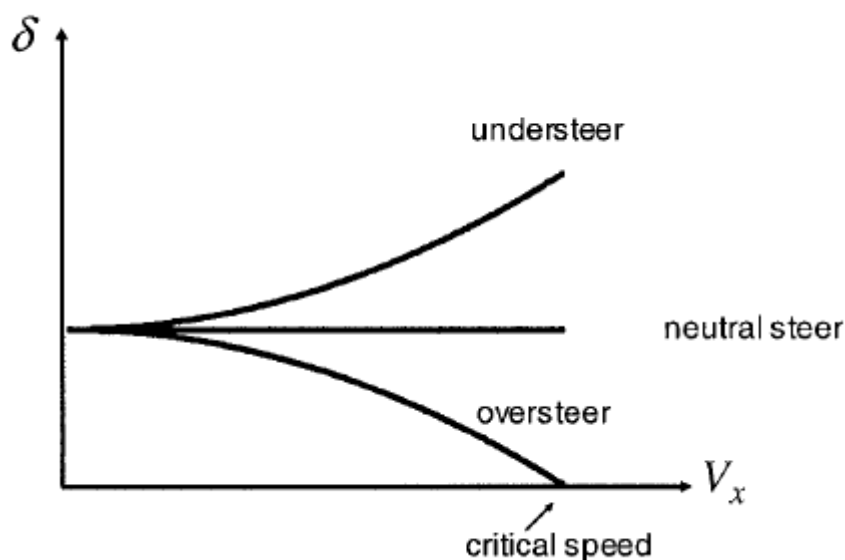
Ενώ στην υπερστροφή είναι

$$K_v < 0 \quad (3.3.8)$$

Και για τις γωνίες ολίσθησης είναι

$$\alpha_f < \alpha_r \quad (3.3.9)$$

Προκειμένου να γίνουν αντιληπτές οι έννοιες της υποστροφής, της υπερστροφής και της ουδέτερης συμπεριφοράς, παρουσιάζεται η Εικόνα 3.7. Στον άξονα των x εμφανίζεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου και στον άξονα των y εμφανίζεται η γωνία οδήγησης.



Εικόνα 3.7 Διαγραμματική απεικόνιση της Υπερστροφής, της Υποστροφής και της Ουδέτερης Συμπεριφοράς.

Παρατηρήσεις

Στην Εικόνα 3.7 παρατηρούμε πως με την αύξηση της ταχύτητας, η γωνία οδήγησης στην περίπτωση της υπερστροφής αυξάνεται με ραγδαίο ρυθμό. Στην περίπτωση της υποστροφής συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο, δηλαδή, η γωνία οδήγησης μειώνεται με

ραγδαίο ρυθμό. Μόνο στην περίπτωση της ουδέτερης συμπεριφοράς η γωνία παραμένει σταθερή και ο έλεγχος διατηρείται. Αποτέλεσμα, λοιπόν, της ουδέτερης συμπεριφοράς είναι η χάραξη μιας ιδανικής γραμμής από το όχημα.

3.4 Στροφή

Ένας προβληματισμός για την κατάλληλη αντιμετώπιση της στροφής από ένα όχημα (π.χ. αυτοκίνητο) είναι η χάραξη της ιδανικής γραμμής. Η ιδανική γραμμή είναι η κατάλληλη πορεία που ακολουθεί ένα όχημα σε μια ευθεία ή σε μια στροφή. Ο οδηγός πρέπει να διαλέξει ανάμεσα στο εσωτερικό και στο εξωτερικό μονοπάτι (λωρίδα πορείας) προκειμένου να χαράξει την ταχύτερη και ασφαλέστερη διαδρομή. Η συνηθέστερη στροφή είναι αυτή των 90 μοιρών όπου οδηγός επιλέγει το εξωτερικό μονοπάτι.

Το αυτοκίνητο που κινείται σε ευθεία αρχικά πορεία πριν την είσοδό του στην στροφή μειώνει την ταχύτητα (επιβράδυνση) προκειμένου να αποκτήσει την επιτρεπτή/επιθυμητή για το όχημα ταχύτητα εντός της στροφής. Η επιτρεπτή/επιθυμητή ταχύτητα είναι αποτέλεσμα της ουδέτερης συμπεριφοράς που θα αναπτύξει το αυτοκίνητο εντός της στροφής.

3.4.1 Στροφή-Ορισμός ιδανικής γραμμής

Η καλή γραμμή για μια στροφή ορίζεται από τρία ξεχωριστά σημεία (*N.-Γ. ΠΑΡΙΚΟΥ: Αυτοκίνητο, Πως Λειτουργεί - Συντήρηση-Οδήγηση*):

- Είναι το σημείο εισόδου, που σηματοδοτεί το τέλος του φρεναρίσματος (επιβράδυνση). Είναι δηλαδή το σημείο που ουσιαστικά το αυτοκίνητο μπαίνει στη στροφή.
- Είναι η κορυφή, που αποτελεί το πλέον αργό σημείο της στροφής.
- Είναι το σημείο εξόδου, όπου το αυτοκίνητο βγαίνει ξανά σε ευθύ κομμάτι του δρόμου (είναι επίσης το πλέον ταχύ σημείο της στροφής).

Στην προσπάθειά του να εισέλθει στη στροφή όσο το δυνατόν ταχύτερα, ο οδηγός πρέπει να μπορεί να εκμεταλλευτεί όλο το πλάτος του δρόμου και να καθυστερήσει όσο μπορεί το φρενάρισμά του. Η αμέσως επόμενη φροντίδα του (όντας μέσα στη στροφή) είναι να επανακτήσει τη χαμένη του ορμή όσο το δυνατόν συντομότερα (ιδανικά επιταχύνοντας λίγο νωρίτερα ή ακριβώς πάνω στην κορυφή της στροφής).

Ο απόλυτα ταχύς τρόπος για τη διάσχιση μιας στροφής είναι αρχικά να οδηγηθεί το όχημα κοντά στο εξωτερικό άκρο της στροφής με ελεγχόμενη ολίσθηση, στην κορυφή της στροφής το όχημα να βρίσκεται στο εσωτερικό και στην έξοδο από την στροφή το όχημα να βρεθεί και πάλι στην εξωτερική πλευρά του δρόμου.

3.4.2 Πορεία-χάραξη ιδανικής γραμμής

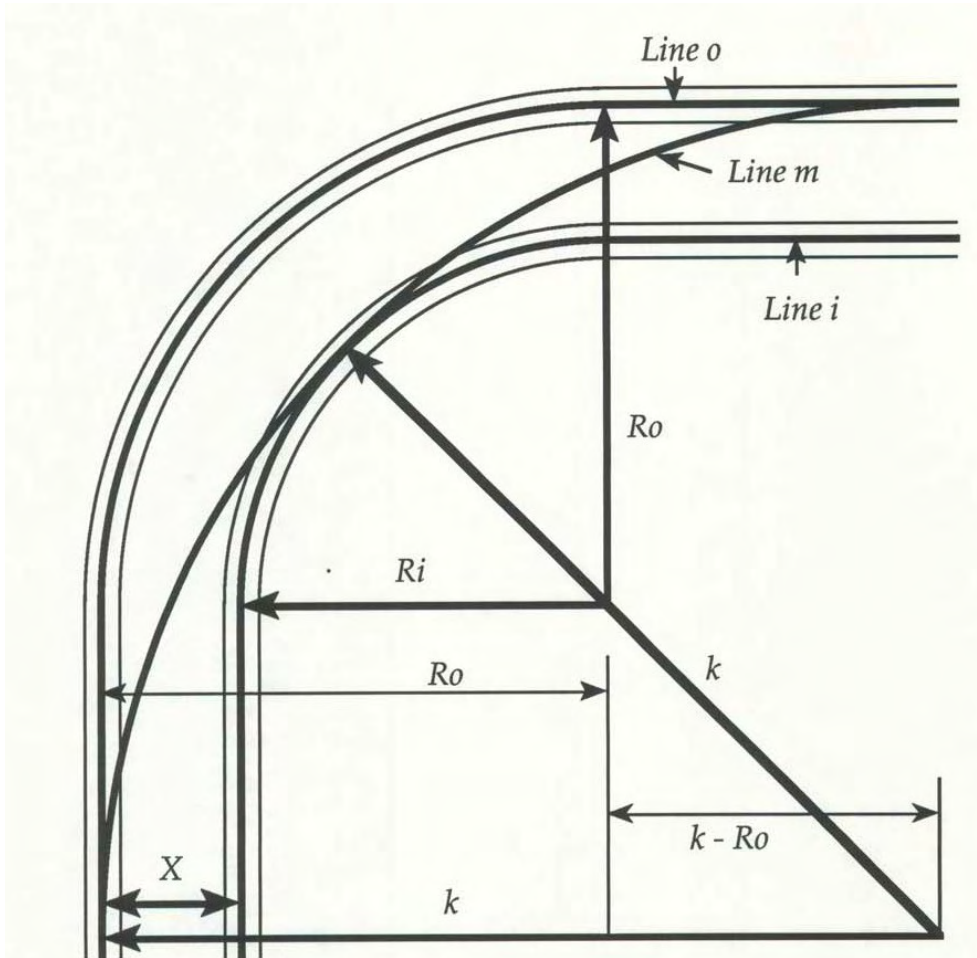
Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τον καλύτερο τρόπο να διασχίσεις μια στροφή. Με τον όρο «καλύτερο» εννοούμε το λιγότερο δυνατό χρόνο με την μεγαλύτερη δυνατή ταχύτητα. Η ιδανική γραμμή στην πορεία ενός οχήματος εξαρτάται από το τι είναι πριν και μετά από τη στροφή. Συνήθως οπτικοποιείται η ταχύτητα εξόδου αν μετά το πέρας της στροφής ακολουθεί ευθεία. Η ανάλυση που πραγματοποιείται πιο κάτω είναι απλουστευμένη γι' αυτό γίνεται χρήση σχημάτων και εστιαζόμαστε στις βασικές αρχές.

Αρχικά, θεωρούμε την στροφή ως μια απομονωμένη περιοχή. Η διαγραφή μιας ιδανικής πορείας είναι αποτέλεσμα του τι υπάρχει πριν από την στροφή και τι μετά.

Παράδειγμα 3.1

Πριν από μια στροφή μπορεί να υπάρχει μια ευθεία και έπειτα της στροφής και πάλι μια ευθεία είτε μια ακόμη στροφή.

Η Εικόνα 3.8 που ακολουθεί είναι γωνίας 90 μοιρών και δεξιάς πορείας.



Εικόνα 3.8 Παρουσιάζεται μια στροφή με σταθερό πλάτος και ακτίνα καθώς και με ευθείες πριν και μετά τη στροφή (Brain Beckman:part 5,1991).

Όπου ισχύει

r είναι η ακτίνα από το κέντρο ως την γραμμή που διέρχεται από το κέντρο της στροφής.

W είναι το πλάτος της πορείας

r_o είναι η ακτίνα της εξωτερικής γραμμής και είναι $r_o = r + \frac{1}{2} W$

r_i είναι η ακτίνα της εσωτερικής γραμμής και είναι $r_i = r - \frac{1}{2} W$

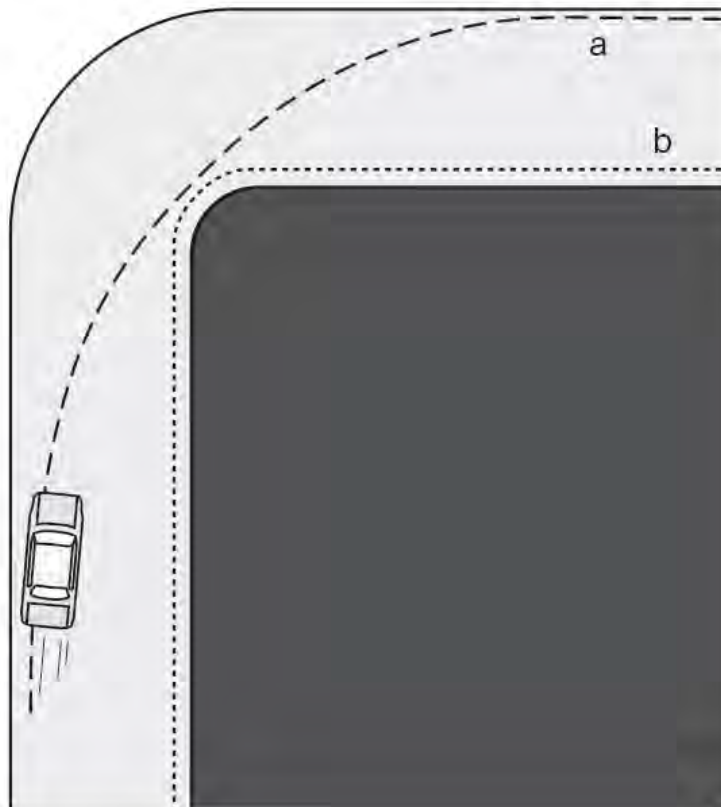
w είναι το πλάτος του αυτοκινήτου

R_o αποτελεσματική εξωτερική ακτίνα και $R_o = r_o - \frac{1}{2} w$

R_i είναι η αποτελεσματική εσωτερική ακτίνα και $R_i = r_i + \frac{1}{2} w$

X είναι το αποτελεσματικό πλάτος πορείας και είναι $X = W - w$

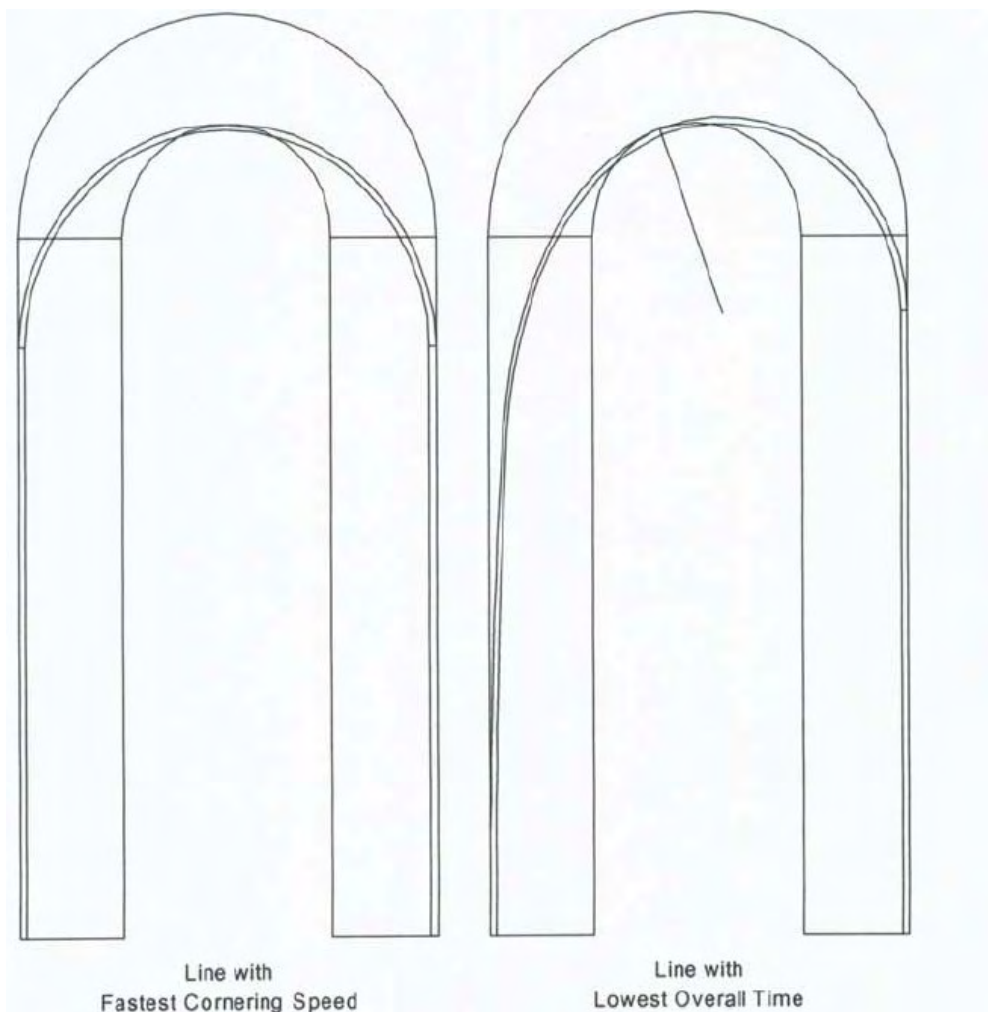
Συνεπώς, παρατηρούμε ότι η ιδανική γραμμή χαράσσεται ως εξής:
Στην αρχή το όχημα εισέρχεται στη στροφή από την εξωτερική πλευρά του δρόμου. Εντός της στροφής το όχημα οδηγείται προς την εσωτερική πλευρά του δρόμου και τελικά, να καταλήξει κατά την έξοδο του από τη στροφή το όχημα να βρίσκεται και πάλι στην εξωτερική πλευρά του δρόμου (Εικόνα 3.9).



Εικόνα 3.9 Απεικόνιση καλύτερου δυνατού τρόπου διέλευσης στροφής.

Για μια πιο αναλυτική προσέγγιση της στροφής απαιτείται να βρεθεί ο ελάχιστος χρόνος. Η ταχύτητα εξόδου θα υπολογιστεί έχοντας ως βάση την έκφραση «Ελαχιστοποίηση στην είσοδο-Μεγιστοποίηση στην έξοδο». Αυτός είναι ο λόγος που δεν ενδιαφερόμαστε για την ταχύτερη διέλευση από την στροφή. Η ιδανική πορεία διαγράφεται όταν το αυτοκίνητο μειώνει την ταχύτητά του κατά την είσοδό του στη στροφή, διέρχεται από την στροφή με τον ομαλότερο δυνατό τρόπο και κατά την έξοδό του να επιταχύνει το ταχύτερο δυνατό.

Ας περιγράψουμε αρχικά μια υπόθεση. Έστω, μια ευθεία εισόδου των 198 μέτρων συνδεδεμένη με μια στροφή των 180° με εξωτερική ακτίνα 61 μέτρων και εσωτερική ακτίνα 30,5 μέτρων συνδεδεμένη με μια εξωτερική ευθεία 198 μέτρων. Στην επόμενη εικόνα θα δείξουμε την παραπάνω υπόθεση με δυο διαφορετικούς τρόπους. Η ιδανική γραμμή στα αριστερά της εικόνας περιγράφει την ευρύτερη εγγεγραμμένη ακτίνα της στροφής και γι' αυτό τη μεγαλύτερη δυνατή ταχύτητα της στροφής. Στα δεξιά της Εικόνας 3.10 παρουσιάζεται η γραμμή με τον χαμηλότερο χρόνο όλων. Παρόλο που η ταχύτητα της στροφής είναι μικρότερη από την γραμμή στα αριστερά, περιλαμβάνει μια αυξημένη επιτάχυνση και ξετυλίγει μια φάση που την αποζημιώνει.



Εικόνα 3.10 Στροφές όπου το όχημα τις διέρχεται με χαμηλή και υψηλή ταχύτητα αντίστοιχα.

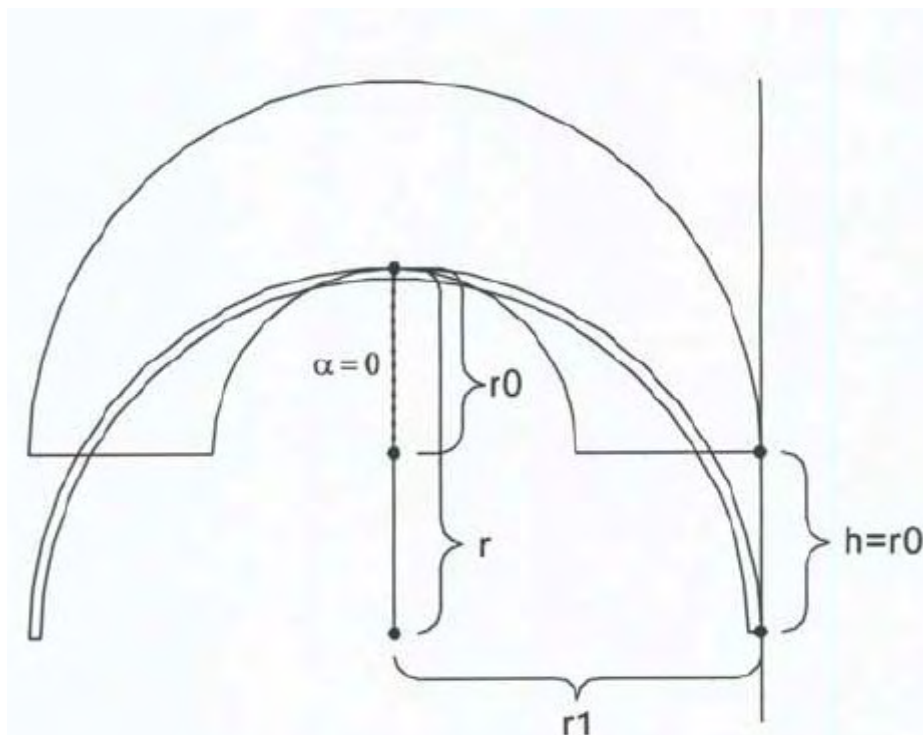
Σημειώνουμε ότι και οι δύο γραμμές ξεκινούν από το πιο αριστερό μέρος της ευθείας εισόδου. Αυτός είναι ο λόγος που μα επιτρέπει να παρατηρούμε τις διαφορές, καθώς μια οποιαδήποτε άλλη είσοδος αποτελεί και ένα διαφορετικό σενάριο. Ακόμη, αγνοούμε το πλάτος του αυτοκινήτου. Στη αντίθετη περίπτωση θα υπολογίζαμε τα

ίδια τελικά αποτελέσματα με εξωτερική ακτίνα $61 + \frac{W}{2}$ μέτρα και εσωτερική ακτίνα $30,5 - \frac{W}{2}$ μέτρα.

Αρχικά, υπολογίζουμε ακριβώς τους χρόνους όπου μπορούμε για την πορεία: στην ευθεία εισόδου, στην περιοχή επιβράδυνσης και εντός της στροφή ως την κορυφή της στροφής. Για να έχουμε μια καμπύλη πορείας προς σύγκριση, πραγματοποιούμε έναν επιπλέον υπολογισμό. Ο υπολογισμός είναι η ψευδογραμμή (dummy line) που περιλαμβάνει την ολοκλήρωση της διέλευσης της στροφής χωρίς να μειωθεί η απόδοσή του στο μέσον της διαδρομής.

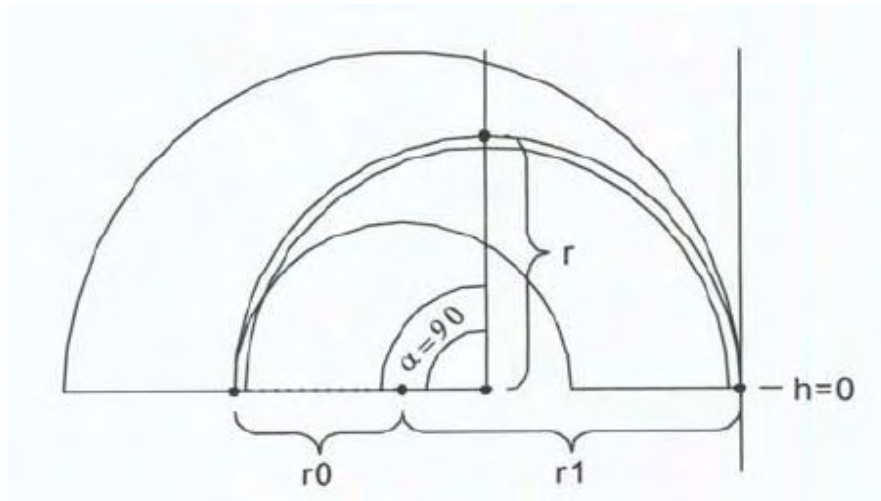
Επιπλέον, ας υποθέσουμε πως σε μια αριστερή στροφή κατά τη διάρκεια της οποίας έχει αναπτυχθεί ταχύτητα $44,7 \frac{m}{sec}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τους συνολικούς

χρόνους, από έναν αριθμό διαφορετικών ακτινών γωνίας, των δυο ακραίων. Η πιο ακραία από τις ακτίνες των γωνιών είναι η ακτίνα των 61 μέτρων, που είναι η εξωτερική ακτίνα της στροφής. Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι δεν είναι εφικτό να πραγματοποιήσουμε μια διαδρομή με ακτίνα γωνίας μεγαλύτερη από 61 μέτρα και να παραμείνουμε εντός της στροφής και κατά συνέπεια της διαδρομής. Αυτός ο ισχυρισμός απεικονίζεται στην Εικόνα 3.11.



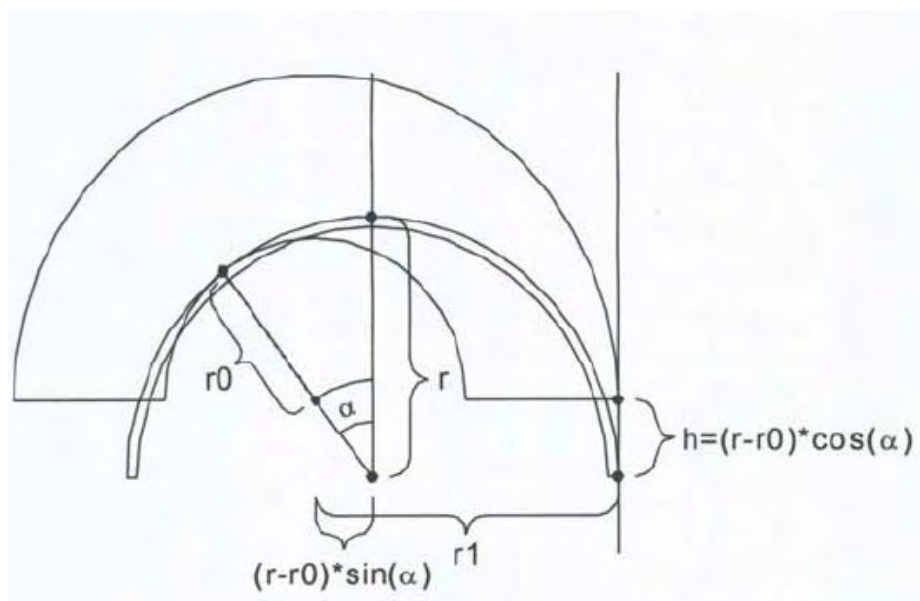
Εικόνα 3.11 Διέλευση στροφής χωρίς το όχημα να παρεκκλίνει της πορείας του.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να καθορίσουμε κάποιες παραμέτρους που θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια. Πρώτα, θα ονομάσουμε την εξωτερική ακτίνα της στροφής $r_1 = 61$ μέτρα, αλλά με την ονομασία να δώσαμε έχουμε την επιλογή στο μέλλον να αλλάξουμε την τιμή της παραμέτρου. Όμοια, ονομάζουμε την εσωτερική ακτίνα της στροφής $r_0 = 30,5$ μέτρα. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο r για να καθορίσουμε την ακτίνα της διαδρομής που θα διαγράψουμε εντός της στροφής. Στην ακραία περίπτωση που διαγράφουμε την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα αυτή θα είναι η r_1 . Σε μια δεύτερη περίπτωση που θα διαγράψουμε κύκλο με ακτίνα $r = 45,72$ μέτρα, θα ακολουθήσουμε πορεία που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.12.



Εικόνα 3.12 Πορεία με τη μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα.

Είμαστε έτοιμοι πλέον να αναφερθούμε στις δυο παραμέτρους που έχουν μείνει. Οι παράμετροι είναι: το h και το α . Θεωρείστε ότι στην επόμενη εικόνα έχουμε την γενική περίπτωση.



Εικόνα 3.13 Γενική περίπτωση διέλευσης στροφής.

Το h απεικονίζει το σημείο που πρέπει να έχουμε σταματήσει να επιβραδύνουμε. Για την ακρίβεια, το h είναι το σημείο που σηματοδοτεί (γεωμετρικά) την είσοδό μας στην στροφή. Η τιμή της παραμέτρου είναι $(r - r_0) \cdot \cos \alpha$. Το α είναι η γωνία που σχηματίζει η κορυφή της στροφής με την κορυφή της γωνίας της διαδρομής που διαγράφουμε για ακτίνα r_0 . Η τιμή για το α είναι :

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{r_1 - r}{r - r_0} \right)$$

(3.4.2.1)

Γνωρίζοντας τα παραπάνω, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα εισόδου για την στροφή. Έστω ότι, η επιτάχυνση μετά την επιβράδυνση του οχήματος είναι $1g$ ή

$$a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}. \text{ Τότε η ταχύτητα είναι}$$

$$v = \sqrt{gr} \quad (3.4.2.2)$$

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης προκύπτει ότι

$$g = \frac{v}{t} \Leftrightarrow t = \frac{v}{g} \quad (3.4.2.3)$$

Το t είναι ο χρόνος που το όχημα τα παραμένει στη στροφή. Για τη ανεύρεση του χρόνου εξόδου από την στροφή έχουμε:

$$t_{\text{ολ}} = t_0 + t_1 + t \quad (3.4.2.4)$$

Όπου t = χρόνος παραμονής στην στροφή

t_1 = χρόνος επιβράδυνσης

t_0 = χρόνος επιτάχυνσης

Τελικά, το όχημα θα εξέλθει από την στροφή σε χρόνο $t_{\text{ολ}}$.

Έτσι, λοιπόν, παρατηρούμε πως οδηγώντας στην ψευδογραμμή (dummy line), η ευρύτερη γραμμή παράγει τον μικρότερο χρόνο από το σημείο εισόδου ως το πέρας της στροφής, αλλά είναι ο γρηγορότερος χρόνος όταν το σημείο εξόδου περιλαμβάνεται. Η ευρύτερη γραμμή έχει μικρότερους χρόνους από την λιγότερο ευρύτερη γραμμή

- Μέσα στην ευθεία εισόδου για σχεδόν μισό δευτερόλεπτο επειδή το h είναι μεγαλύτερο και η ευθεία εισόδου είναι μικρότερη για την ευρύτερη γραμμή.
- Μέσα στην ζώνη επιβράδυνσης για σχεδόν τρία δέκατα επειδή η γωνία εισόδου είναι μεγαλύτερη και χρειάζεται λιγότερη επιβράδυνση.
- Και στο σημείο εξόδου για σχεδόν ένα δευτερόλεπτο και πάλι γιατί το h είναι μεγαλύτερο και το σημείο εξόδου είναι μικρότερο.

Η ευρύτερη γραμμή έχει μεγαλύτερους χρόνους για σχεδόν ένα δευτερόλεπτο εντός του κύκλου γιατί ο ευρύτερος κύκλος (με μεγαλύτερη ακτίνα) είναι επίσης και ο μεγαλύτερος (σε μέγεθος). Όταν όλες οι ισορροπίες προστίθενται, η ευρύτερη γραμμή (πορεία με την εξωτερική ακτίνα) είναι σχεδόν οκτώ δέκατα ταχύτερη σε σχέση μικρότερη πορεία, αλλά είναι αποτέλεσμα των επιδράσεων που ασκεί η γωνία στις ευθείες εισόδου και εξόδου.

Στην ευθεία εξόδου το όχημα ανακτά την επιτάχυνσή του. Στην πραγματικότητα, η επιταχυνόμενη κίνηση του οχήματος αρχίζει από την στιγμή που εκείνο βρίσκεται στην κορυφή της στροφής. Η Ομαλή Κυκλική Κίνηση του οχήματος σταματά όταν το αυτοκίνητο ή γενικά το όχημα που κινείται βρεθεί στην κορυφή της στροφής. Τότε, ο οδηγός προκειμένου να ανακτήσει ή και να ξεπεράσει την επιτάχυνση που είχε πριν τη διέλευσή του από την στροφή, επιταχύνει.

Ανακεφαλαιώνοντας η ψευδογραμμή δεν είναι η πραγματική πορεία (γραμμή) την οποία θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε μετά την κορυφή της στροφής. Όμως, έχοντας αυτό ως πλαίσιο, είμαστε σε θέση να εισάγουμε την επόμενη βελτίωση. Οτιδήποτε θα πράττουμε από εδώ και στο εξής θα είναι για την βελτίωση της πορείας από την κορυφή της στροφής ως την έξοδο της.

Η πραγματική δυσκολία, όμως, έγκειται στο γεγονός ότι η καλή γραμμή διαφέρει από στροφή σε στροφή. Αν κάθε διαδρομή αποτελούνταν από στροφές σταθερής ακτίνας και μορφολογίας τότε θα ήταν πιο εύκολη η διέλευσή τους. Όμως, στην πραγματικότητα οι στροφές έχουν διαφορετικές διαστάσεις, διαφορετικές κλίσεις και μερικές είναι τόσο παρατεταμένες που έχουν δυο κορυφές στο εσωτερικό τους. Η διαφορετικότητα αυτή των στροφών είναι ο λόγος που λαμβάνονται μέτρα σε όλες τις στροφές για την προστασία των οδηγών.

3.4.3 Η Στροφή από τον οδηγό

Όταν το αυτοκίνητο κινείται σε καμπύλη τροχιά στροφή επενεργούν πάνω του δυο δυνάμεις που εφαρμόζονται στο κέντρο βάρους του αυτοκινήτου, αντιδρώντας στις δυνάμεις κυλίσεως των τροχών, έτσι ώστε να διατηρήσουν το αυτοκίνητο σε κατάσταση ισορροπίας, επιτρέποντας στον οδηγό να το διευθύνει σωστά. Οι δυνάμεις αυτές είναι:

Η φυγόκεντρη δύναμη

Και η τριβή

3.5 Δύναμη και Πορεία

Η καλή πορεία και η σταθερότητα του αυτοκινήτου σε μια στροφή (καμπύλη τροχιάς) εξαρτάται άμεσα από την φυγόκεντρη δύναμη που το σπρώχνει προς τα έξω. Η δύναμη αυτή είναι ανάλογη με την ταχύτητα του αυτοκινήτου (μεγάλη ταχύτητα μεγάλη φυγόκεντρη δύναμη) και αντιστρόφως ανάλογη με την ακτίνα της στροφής. Δηλαδή, μικρή ακτίνα στροφής σημαίνει μεγάλη φυγόκεντρη δύναμη με την ίδια βέβαια ταχύτητα αυτοκινήτου. Για ομαλή, λοιπόν, πορεία στις στροφές ο οδηγός πρέπει να αυξάνει την ακτίνα της τροχιάς που ακολουθεί διαλέγοντας την λεγόμενη ιδανική γραμμή.

Ιδανική γραμμή είναι η κατά το δυνατόν μεγαλύτερη ομοιόμορφη κυκλική τροχιά που ακολουθεί του αυτοκίνητο σε δεδομένη στροφή.

Η φυγόκεντρη δύναμη στην πραγματικότητα δεν υπάρχει. Ο όρος «φυγόκεντρη δύναμη» είναι μια έννοια που δόθηκε σ' ένα φυσικό γεγονός. Αυτό το γεγονός το ερμηνεύει ο νόμος του Νεύτωνα που διατυπώθηκε πριν από περίπου 300 χρόνια. Αναφέρεται στην τάση των αντικειμένων να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση (1^{ος} Νόμος του Νεύτωνα). Αν, λοιπόν, ένα όχημα κινείται με ταχύτητα με ταχύτητα v και στην πορεία του εμφανιστεί μια στροφή τότε το όχημα θα διατηρήσει την κινητική του κατάσταση και θα οδηγηθεί εκτός της στροφής. Προκύπτει ότι, όσο μεγαλύτερη και ογκώδες είναι ένα όχημα τόσο μεγαλύτερη είναι και η φυγόκεντρος δύναμη. Γι' αυτό ο οδηγός πρέπει να δραστηριοποιηθεί ώστε να κατευθύνει το όχημα εντός της στροφής και η φυγόκεντρος δύναμη να μηδενιστεί. Η ονομασία «κεντρόφυγος» προέρχεται από τις λέξεις «κέντρο» και «φεύγω». Ουσιαστικά, η ονομασία αποκαλύπτει την απομάκρυνση του οχήματος από το κέντρο – κορυφή της στροφής. Τελικά, παρότι η κεντρόφυγος δύναμη δεν υπάρχει, η ύπαρξή της ως ορολογία είναι βολική για τον σκοπό κάποιων υπολογισμών (*Brian Beckman: part 4, 1991*).

3.6 Τύποι Στροφών

Σαν πράξη ο οδηγός συναντά πέντε τύπους στροφών, αν μπορούν να ονομαστούν έτσι. Αυτοί είναι: η κανονική στροφή, η ανοιχτή στροφή, η διπλή στροφή και η διπλή επάλληλη στροφή τύπου s στροφή.

Κανονική στροφή: Όπως αναφέραμε πιο πάνω χάραξη ιδανικής γραμμής από τον οδηγό σε μια στροφή, στην πράξη είναι η χάραξη μιας νέας τροχιάς με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακτίνα ώστε η φυγόκεντρη δύναμη που σπρώχνει το όχημα προς τα έξω να είναι μικρότερη για δεδομένη ταχύτητα. Στην κανονική στροφή ο οδηγός για να χαράξει την ιδανική γραμμή έχει σαν σημείο αναφοράς την κορυφή ή κεφαλή της στροφής.

Ανοιχτή στροφή: Χαρακτηριστικό της είναι ότι η ακτίνα στροφής γίνεται μεγαλύτερη στην έξοδο της, οπότε μικραίνει αντίστοιχα η φυγόκεντρος δύναμη που ενεργεί στο αυτοκίνητο. Η ιδανική γραμμή χαράζεται από τον οδηγό μετατοπίζοντας την κορυφή προς την είσοδο της στροφής.

Κλειστή στροφή: Είναι το ακριβώς αντίθετο με την ανοιχτή στροφή. Είναι η στροφή παγίδα για τον οδηγό γιατί με άλλα δεδομένα μπαίνει στη στροφή και άλλα συναντά από το μέσον της και μετά. Η χάραξη από τον οδηγό γίνεται με την μετατόπιση της κορυφής προς την έξοδο της. Το αυτοκίνητο οδηγείται προς την εξωτερικό μέρος της στροφής και πλησιάζει προς το εσωτερικό μόνον όταν ο οδηγός έχει την πλήρη ορατότητα πλέον του δρόμου. Αν το αυτοκίνητο μπει στην είσοδο της στροφής από την εξωτερική πλευρά της, κινδυνεύει να αναποδογυρίσει λόγω του ότι, η μικρότερη ακτίνα εξόδου της στροφής συντελεί στην αύξηση της φυγόκεντρης δύναμης που ενεργεί πάνω σ' αυτό.

Στην κλειστού τύπου στροφή πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη σημασία. Πιο πάνω αναφέρθηκε πως η ακτίνα της είναι μικρή και συμβάλλει στην αύξηση της φυγόκεντρης δύναμης. Η αύξηση της δυνάμεως είναι καθοριστική για το όχημα γιατί από μια κλειστή στροφή το όχημα μπορεί να εξέλθει χωρίς την εμφάνιση προβλημάτων μόνο αν κατά την είσοδό του στη στροφή η ταχύτητά του έχει μειωθεί σε μεγάλο βαθμό.

Διπλή στροφή: Πρόκειται για δύο στροφές προς την ίδια κατεύθυνση που ενώνονται με ένα ελαφρά καμπύλο τμήμα. Ενώ ο οδηγός προσπαθεί να ενοποιήσει τις δυο στροφές με την ιδανική γραμμή σε μια. Το αυτοκίνητο πλησιάζει στο εξωτερικό μέρος της στροφής με την κορυφή της στροφής στο μέσο του μικρού τμήματος που ενώνει τις δυο στροφές.

Διπλή επάλληλη στροφή ή στροφή τύπου s: Η χάραξη της ιδανικής γραμμής αυτής της στροφής γίνεται κυρίως για το δεύτερο μέρος της.

Έλεγχος χειρισμού του αυτοκινήτου στις στροφές :

Όταν το αυτοκίνητο οδηγείται στην είσοδο μιας στροφής, ο οδηγός ρυθμίζει την ταχύτητα, ώστε να είναι ιδανική αν είναι δυνατόν για τη στροφή που ακολουθεί. Είναι προτιμότερο η ταχύτητα να είναι μικρότερη, παρά μεγαλύτερη, ώστε να αποφεύγονται τυχόν δυσάρεστες καταστάσεις μέσα στη στροφή.

Όταν το αυτοκίνητο φτάσει στην είσοδο της στροφή ο οδηγός στρέφει σταδιακά το αυτοκίνητο με αρμονικές και όχι απότομες κινήσεις του τιμονιού ώστε αυτό να οδηγηθεί στην ιδανική γραμμή. Στην είσοδο της στροφής ο οδηγός δεν αυξάνει ποτέ την ταχύτητα του αυτοκινήτου. Αντίθετα, αν το αυτοκίνητο φτάσει στην κορυφή της στροφής ο οδηγός αυξάνει την ταχύτητά του.

3.7 Μεταφορά Βάρους

Κάθε οδηγός είναι σημαντικό να μαθαίνει από την πρώτη στιγμή πόσο σημαντικό είναι το βάρος που μεταφέρει ένα αυτοκίνητο για την απόκτηση ισορροπίας (balancing a car). Η ισορροπία του οχήματος είναι το μυστικό για την απόκτηση του χαρακτηρισμού «καλός οδηγός». Αυτή η εξισορρόπηση του αυτοκινήτου δε αποτελεί τίποτε άλλο από απλή φυσική (*Brain Beckman: part 1, 1991*).

Η κατανόηση της φυσικής για ένα όχημα βελτιώνει την ικανότητα χειρισμού του οχήματος από τον οδηγό. Έτσι, ο οδηγός μπορεί να «απολαύσει» την διαδρομή.

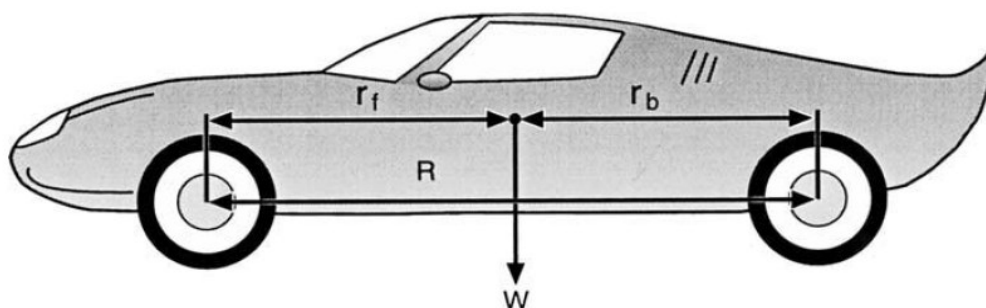
Η ισορροπία του αυτοκινήτου είναι απλά ο έλεγχος του βάρους που μεταφέρει ένα αυτοκίνητο. Είναι χρήσιμο κατά την είσοδο του οχήματος σε μια στροφή έτσι ώστε να αποφύγουμε την υπερστροφή ή την υποστροφή.

Θεωρούμε ότι το βάρος είναι στο κέντρο του αυτοκινήτου (θεωρητική υπόθεση). Όμως, το κέντρο βάρους του οχήματος είναι πάνω από το έδαφος. Παρόλα αυτά, το βάρος αλληλεπιδρά με το έδαφος μέσω των ελαστικών, στα οποία παρατηρούνται και οι δυνάμεις τριβής.

Το κέντρο βάρους δεν είναι πάντοτε στο κεντρικό σημείο ενός σώματος. Έχει αναφερθεί ότι το βάρος ενός αντικειμένου είναι ανάλογο της μάζας. Η μεγαλύτερη ποσότητα της μάζας μπορεί να είναι συγκεντρωμένη σε ένα διαφορετικό σημείο από το κεντρικό. Αυτό μπορεί να είναι είτε πιο αριστερά είτε πιο δεξιά, αλλά και σ' ένα ανώτερο σημείο ή σ' ένα σημείο που να προσεγγίζει το έδαφος.

Το βάρος μπορεί να βοηθήσει έναν οδηγό να προβλέψει τις επιπτώσεις από όλες τις ενέργειές του και να αναπτύξει ένα καλό ένστικτο ώστε να αποφευχθούν όλες οι δυσάρεστες συνέπειες. Ένα οποιοδήποτε βάρος που μεταφέρεται από το όχημα μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την εξέλιξη της πορείας του οχήματος και να μεταβεί από την κατάσταση της τριβής και του οδοστρώματος στην κατάσταση ολισθήσεως.

Καθοριστική μπορεί να χαρακτηριστεί και η διαίρεση του βάρους ισομερώς στους τέσσερις τροχούς του αυτοκινήτου. Από κοινού οι τέσσερις τροχοί του αυτοκινήτου βοηθούν στην ισορροπία του και συνεπώς, στην ομαλή διέλευση του οχήματος από την στροφή. Το γεγονός αυτό μπορεί να γίνει εμφανές από την Εικόνα 3.6.



Εικόνα 3.14 Απεικόνιση των αποστάσεων των τροχών από το κέντρο βάρους.

Αν από την Εικόνα 3.14 υποθέσουμε ότι R είναι η απόσταση των τροχών μεταξύ του μπροστινού μέρους του αυτοκινήτου με το πίσω μέρος. Οι αποστάσεις από το κέντρο

βάρους ως τους τροχούς r_f και r_b , αντίστοιχα, είναι ίσες και W είναι το βάρος του αυτοκινήτου.

3.8 Ροπή

«Ροπή» είναι μια λέξη που επαναλαμβάνεται συχνά σε υψηλών αποδόσεων οχήματα. Αποδείξαμε νωρίτερα ότι η δύναμη είναι η αιτία που οδηγεί ένα σώμα να κινηθεί σε ευθεία γραμμή. Η ροπή είναι, λοιπόν, η αιτία που ένα σώμα κινείται περιστροφικά.

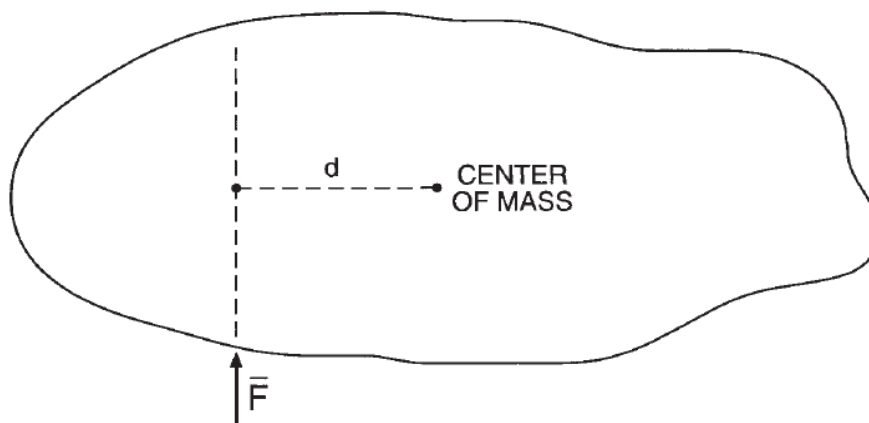
Το μέγεθος της ροπής δεν εξαρτάται μόνον από την δύναμη που εφαρμόζεται στο σώμα, αλλά επίσης από την απόσταση του κέντρου μάζας και του άξονα στον οποίο εφαρμόζεται η δύναμη.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω είναι εφικτό να υπολογίσουμε την ροπή ακολουθώντας των μαθηματικό τύπο

$$\tau = Fd \quad (3.8.1)$$

F = η δύναμη που εφαρμόζεται στο σώμα

d = η απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα εφαρμογής της δύναμης.



Εικόνα 3.15 Απεικόνιση του κέντρου μάζας ενός σώματος, της απόστασής του κέντρου μάζας από τον άξονα πάνω στον οποίο εφαρμόζεται μια δύναμη και τέλος, ο άξονας της δύναμης.

Γενικότερα, το d μπορεί να είναι η απόσταση από το σταθερό σημείο του σώματος. Από τον τύπο που είδαμε παραπάνω όσο μεγαλύτερη απόσταση μεσολαβεί από τον άξονα που εφαρμόζεται η δύναμη τόσο μεγαλύτερη είναι η ροπή. Στην πραγματικότητα, μέρος του σώματος δεν χρειάζεται να εξαναγκαστεί για να περιστραφεί από μια εφαρμοζόμενη δύναμη. Σε μια σύγκρουση, για παράδειγμα, μεταξύ δυο αυτοκινήτων αν το ένα χτυπήσει το δεύτερο στο εμπροσθεν μέρος του το πρώτο όχημα θα κινηθεί σε ευθεία γραμμή, ενώ το δεύτερο θα πραγματοποιήσει περιστροφή.

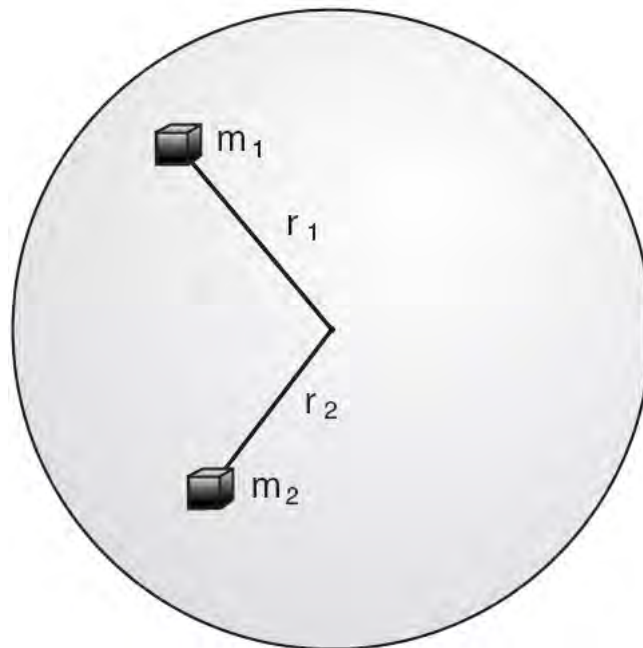
3.9 Ροπή Αδράνειας

Η ακριβής θέση του κέντρου μάζας – είτε είναι πιο κοντά στο μπροστινό μέρος είτε στο πίσω μέρος του αυτοκινήτου – έχει επιρροή σε χαρακτηριστικά για το χειρισμό και την στροφή του αυτοκινήτου. Το ύψος από το έδαφος του κέντρου μάζας είναι επίσης σημαντικό. Όπως αναφέρεται, είναι κρίσιμης σημασίας για τα χαρακτηριστικά που έχουν ρόλο στην οδήγηση και την μεταφορά του βάρους.

Ίσως δεν δείχνει σημαντικό, αλλά η διανομή του βάρους γύρω από το κέντρο βαρύτητας είναι επίσης κρίσιμης σημασίας. Μια μέτρηση της διανομής δίνεται από την αδράνεια. Όπως το κέντρο βαρύτητας έτσι και η αδράνεια είναι δύσκολο να καθορισθεί. Γι' αυτό είναι διαφορετική για τους διάφορους άξονες που διέρχονται του αυτοκινήτου. Για ένα συμμετρικό αντικείμενο ομοιόμορφης πυκνότητας, η αδράνεια είναι συνήθως εύκολο να υπολογιστεί. Αν δεν είναι συμμετρική μπορεί να γίνει δύσκολο να υπολογιστεί.

Στην περίπτωση της ροπής αδράνειας η ποσότητα $m \cdot r^2$ τοποθετεί το m σε διεύθυνση που είναι σε ευθεία γραμμή. Η δύναμη που απαιτείται για να σταματήσει ένα σώμα που κινείται σε ευθεία γραμμή εξαρτάται από την συνολική μάζα του αντικειμένου, παρότι το σώμα, λόγω της κατασκευής του, έχει φτιαχτεί από ένα σύνολο αντικειμένων μικρότερων μαζών. Τα αντικείμενα αυτά δεν έχουν κάποιο καθοριστικό ρόλο. Το σημαντικότερο ρόλο, εδώ, έχει η ποσότητα $m \cdot r^2$ έτσι ώστε η διανομή της μάζας να είναι σημαντική. Για ένα αντικείμενο όπως μια σφαίρα κάθε μικρή σφαιρική μάζα που έχει απόσταση από το κέντρο της αρχικής σφαίρας συμβάλλει στην συνολική αδράνεια. Για να αντιμετωπίσουμε το σώμα σαν μια ολότητα, αθροίζουμε τις μάζες των επιμέρους σωμάτων και όλες τις αποστάσεις. Επομένως, η ροπή αδράνειας είναι:

$$I = \sum mr^2 \quad (3.9.1)$$

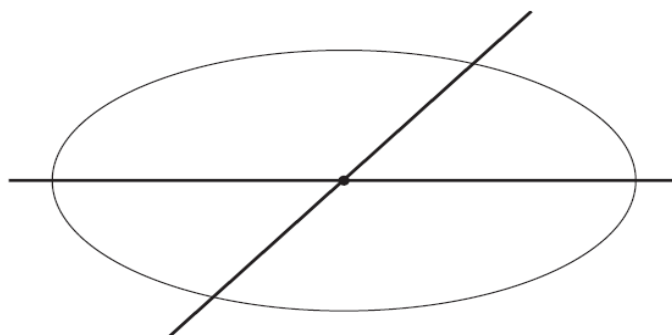


Εικόνα 3.16

Ένα αυτοκίνητο με υψηλή ποσότητα αδράνειας θα έχει την μάζα του διανεμημένη σε ένα μεγάλο όγκο αντικείμενο. Το κέντρο βάρους του μπορεί να είναι σε ένα σημείο όμοιο όπως σε ένα σώμα με μικρότερη αδράνεια, αλλά το αυτοκίνητο να το αντιμετωπίσει τελείως διαφορετικά. Ένα σώμα με υψηλή τιμή αδράνειας θα στρίψει με μεγαλύτερη δυσκολία από ένα σώμα με μικρότερη αδράνεια, όπως ένα σώμα με

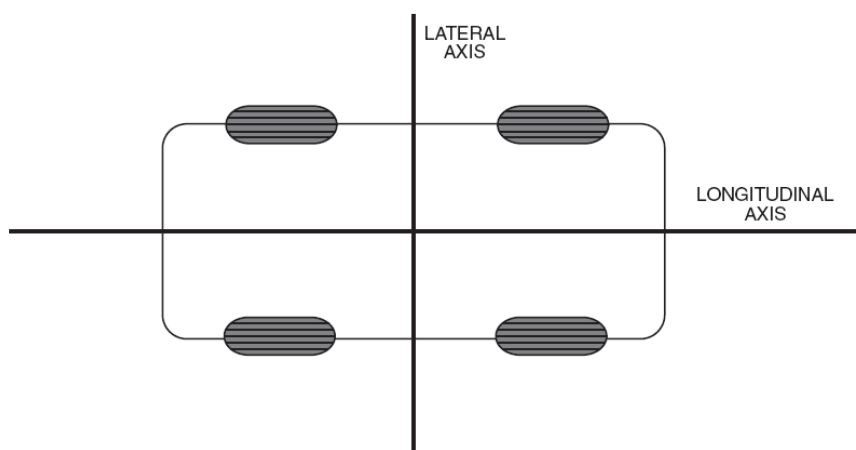
υψηλή τιμή μάζας είναι δύσκολο να σταματήσει συγκριτικά με ένα σώμα μικρότερης μάζας. Όμως αυτό το αυτοκίνητο θα έχει μεγαλύτερη σταθερότητα από ένα με χαμηλή τιμή αδράνειας. Από την άλλη πλευρά, ένα αυτοκίνητο με χαμηλή αδράνεια θα είναι ευκολότερο να στρίψει και πιο ευέλικτο, αλλά με λιγότερη σταθερότητα από ένα σώμα με υψηλή τιμή αδράνειας.

Ο άξονας από τον οποίο λήφθηκε η αδράνεια είναι επίσης σημαντικός. Αν ληφθεί από τον μεγαλύτερο άξονα κατά μήκος της έλλειψης είναι εμφανές ότι η αδράνεια θα είναι μικρότερη απ' ότι αν ληφθεί από τον άξονα που είναι κάθετος. Θυμηθείτε ότι η αδράνεια είναι ανάλογη του r^2 και της απόστασης των περισσοτέρων από τις μάζες που θα είναι μεγαλύτερες στην δεύτερη περίπτωση.



Εικόνα 3.17

Λόγω της διαφορετικότητας της πυκνότητάς του και της διαμόρφωσής του, η αδράνεια ενός αυτοκινήτου είναι δυσκολότερο να καθοριστεί με ακρίβεια. Στην καλύτερη περίπτωση μπορούμε να αποκτήσουμε μόνο μια καλή προσέγγιση αυτής. Όμως, για μια ακατέργαστη προσέγγιση το σχήμα του αυτοκινήτου μοιάζει με έλλειψη έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε την αδράνεια γύρω από τον οριζόντιο και κάθετο άξονα του αυτοκινήτου.



Εικόνα 3.18

Η σταθερότητα του αυτοκινήτου εξαρτάται από ορισμένους βαθμούς του μεγέθους αυτών των δυο. Υπάρχουν προφανώς πολλές περιπτώσεις που μπορούμε να σκεφτούμε. Αν το αυτοκίνητο έχει μια αρκετά μεγάλη αδράνεια κατά μήκος του

οριζόντιου άξονα (longitudinal) και μικρή κατά μήκος του κάθετου άξονα (lateral), τότε θα αντιδρούσε αργά, αλλά θα είχε μεγαλύτερη σταθερότητα. Για να αυξήσουμε την ικανότητα να διέρχεται από μια στροφή πρέπει να μειώσουμε την αδράνεια κατά τον οριζόντιο άξονα. Αλλά, δεν μπορούμε να μειώσουμε την ποσότητα της αδράνειας για μεγάλο ποσοστό επειδή θέλουμε να διατηρήσει την σταθερότητά του. Για την περίπτωση που έχουμε μεγάλη ποσότητα αδράνειας στον κάθετο άξονα και μικρή στον οριζόντιο, θα είχαμε ένα αυτοκίνητο που θα ανταποκρινόταν στις στροφές άμεσα, αλλά δεν θα διατηρούσε την σταθερότητά του στην ευθεία πορεία.

3.10 Σταθερότητα του Αυτοκινήτου

Σε παραπάνω ενότητα αναφερθήκαμε στην ανύψωση που μπορεί να θεωρηθεί ο συντελεστής σταθερότητας για το επάνω και κάτω μέρος του αυτοκινήτου (διεύθυνση του άξονα των y). Ο προσδιορισμός της διεύθυνσης θεωρείται εξίσου σημαντικός για την σταθερότητα του αυτοκινήτου. Για να το κατανοήσουμε πλήρως ας σκεφτούμε την γωνία ολίσθησης και την παρέκκλιση του αυτοκινήτου, ποσότητες που δεν συνδέονται άμεσα με την αεροδυναμική.

Επίσης, έχουμε αναφερθεί στην μάζα του αυτοκινήτου και μάζα την οποία μεταφέρει. Τα οχήματα χαρακτηρίζονται από την μάζα τους άλλα και από την μάζα την οποία έχουν την δυνατότητα να μεταφέρουν. Η συνολική μάζα είναι αυτή που θα καθορίσει την ικανότητα του οχήματος να ανταπεξέρχεται στην εκάστοτε στροφή. Και όπως ειπώθηκε πιο πάνω, η κάθε στροφή είναι μοναδική ως προς την μορφολογία.

Η τρίτη παράμετρος που συμβάλλει στην σταθερότητα ενός οχήματος είναι η τριβή. Η τριβή όπως είναι γνωστό δεν επιτρέπει στο σώμα να ολισθαίνει. Το όχημα δεν οδηγείται εκτός της στροφής. Η διέλευση από την στροφή γίνεται με ομαλό τρόπο και προκύπτει το αποτέλεσμα που ικανοποιεί τον οδηγό.

Οι τρεις παράμετροι που συντελούν στην ισορροπία του αυτοκινήτου (τριβή, αντίσταση αέρα και μάζα) δεν συνδέονται μεταξύ τους. Παρόλα αυτά η κάθε παράμετρος αποτελεί βασικό και αναπόσπαστο κομμάτι για την ισορροπία του αυτοκινήτου.

3.11 Επίλογος

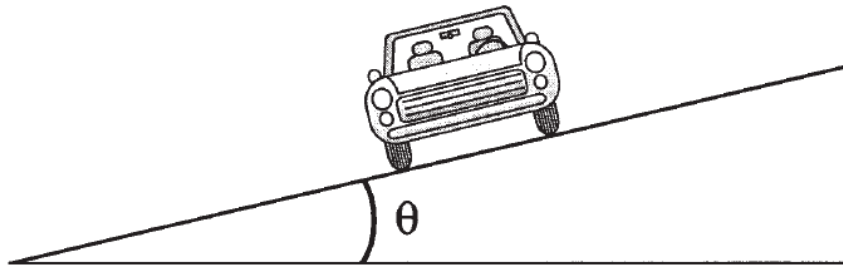
Βέβαια, η στροφή δεν είναι η μόνη πολυπλοκότητα που μπορεί να αντιμετωπίσει ένα όχημα σε μια διαδρομή. Υπάρχουν ακόμη τρεις περιπτώσεις που το όχημα δεν αναπτύσσει ή δεν μειώνει, απλά, την ταχύτητά του.

- Η πρώτη περίπτωση είναι όταν ένα όχημα πρέπει να αποφύγει ένα εμπόδιο που μπορεί να εμφανιστεί κατά τη διάρκεια της πορείας του.
- Η δεύτερη περίπτωση περιλαμβάνει ένα όχημα ανέρχεται ενός λόφου.
- Η τελευταία περίπτωση αναφέρεται σ' ένα όχημα που αντιμετωπίζει την μη ομαλότητα του οδοστρώματος.

Ως τέταρτη περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι το όχημα είναι δυνατόν να εκτελέσει ένα συνδυασμό από αυτές τις τρεις περιπτώσεις και την περίπτωση της ευθείας ή της στροφής. Για παράδειγμα, ένα αυτοκίνητο να ανέρχεται ενός λόφου και πριν το τέλος της διαδρομής να υπάρχει μια στροφή. Ακόμη, θα μπορούσε να είναι απλώς μια ευθεία γραμμή μα το έδαφος της να μη είναι ομαλό.

Για παράδειγμα, όταν το αυτοκίνητο κινείται σε μια ευθεία με ταχύτητα u , αλλά ο δρόμος έχει κλίση γωνίας θ (Εικόνα 3.19) τότε η γωνία μπορεί να βρεθεί από τον τύπο

$$\tan \theta = \frac{u^2}{Rg} \quad (3.11.1)$$



Εικόνα 3.19 Κίνηση αυτοκινήτου σε επίπεδο με κλίση γωνίας θ .

Είναι εμφανές πως καμία γωνία δεν είναι η κατάλληλη για όλες τις ταχύτητες. Υπάρχουν πολλά θέματα να σκεφτούμε για μια διαδρομή οχήματος. Μπορεί να είναι η ισορροπία, το βάρος που μεταφέρεται, η τριβή των ελαστικών με το οδόστρωμα και ο καλύτερος τρόπος να διέλθεις μιας στροφής. Είναι μια πολύπλοκη διαδικασία, αλλά κάνει την οδήγηση συναρπαστική.

4. Υλοποίηση

4.1 Επιτάχυνση

Αν ένα σώμα που κινείται εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση μπορεί να επιταχύνει ως μια μέγιστη επιτάχυνση και είναι γνωστή η ταχύτητα που την κάνει εφικτή, καθώς και η μάζα του κινητού τότε η ανεύρεση της επιταχύνσεως μπορεί να δοθεί από την παρακάτω υλοποίηση.

Υλοποίηση προγράμματος Επιταχύνσεως

```
#include <iostream.h>

float t;
float a= 9.81; //acceleration
float u, u0=0; //speed

int main() {
    cout<<"If acceleration is a=9.81 m/sec^2 then"<<endl;

    for (t=0; t<11; t=t+1) {
        u=u0+a*t;
        cout<<"The speed for t= "<<t<<"sec;
        cout<<" is u= "<<u<<"m/sec"<<endl;

    } // end of for

} // end of main
```

Παρατηρήσεις

Στο παραπάνω πρόγραμμα θεωρούμε ότι η επιτάχυνση του σώματος είναι $9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Αν το σώμα είναι αρχικά ακίνητο ($t = 0, u_0 = 0$) και στην συνέχεια επιταχύνει με τον ρυθμό του αναφέρθηκε παραπάνω τότε μπορεί να βρεθεί η ταχύτητα για κάθε χρονική στιγμή.

Παράδειγμα 4.1

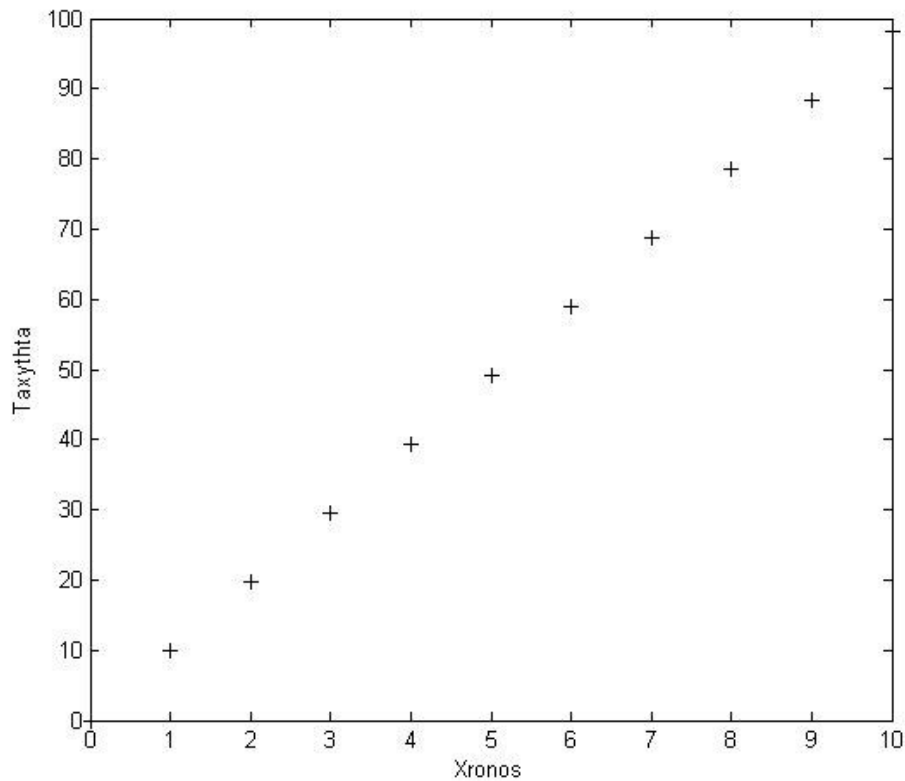
Έστω ότι η το βήμα που επιλέχθηκε για το χρόνο είναι το 1 sec. Αν αναζη τούμε την ταχύτητα του σώματος για τα πρώτα 10 seconds της επιταχυνόμενης κίνησης τότε θα προκύψει το εξής αποτέλεσμα:

“Output”

```
If acceleration is a=9.81 m/sec^2 then
The speed for t= 0 sec is u= 0 m/sec
The speed for t= 1 sec is u= 9.81 m/sec
The speed for t= 2 sec is u= 19.62 m/sec
The speed for t= 3 sec is u= 29.43 m/sec
The speed for t= 4 sec is u= 39.24 m/sec
The speed for t= 5 sec is u= 49.05 m/sec
The speed for t= 6 sec is u= 58.83 m/sec
```

The speed for $t= 7$ sec is $u= 68.67$ m/sec
The speed for $t= 8$ sec is $u= 78.48$ m/sec
The speed for $t= 9$ sec is $u= 88.29$ m/sec
The speed for $t= 10$ sec is $u= 98.1$ m/sec

Για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων μπορούμε να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα αυτά σε ένα διάγραμμα. Αυτό είναι:



Εικόνα 4.1 Η ταχύτητα αυξάνεται καθώς και ο χρόνος αυξάνεται (επιτάχυνση).

4.2 Επιβράδυνση

Όταν ένα σώμα επιλέξει να επιβραδύνει από την ταχύτητα που έχει αναπτύξει ως την ταχύτητα που είναι επιθυμητή, η μεταβολή της ταχύτητας μπορεί να καθορίσει την απόσταση που το σώμα θα διανύσει και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο θα επιτευχθεί η νέα ταχύτητα. Το γεγονός αυτό παρουσιάζεται στο παρακάτω πρόγραμμα.

Υλοποίηση Προγράμματος Επιβραδύνσεως

```
#include <iostream.h>
```

```
float u0, u; //speed
```

```
float t, t0=10; //time
```

```
float a=9.81; //deceleration
```

```
int main() {
```

```

cout<<"Enter the initial speed in m/sec: "<<endl;
cin>>u0;

cout<<"If the deceleration is a=9.81 m/sec^2 then: "<<endl;
for (t=10; t<=11; t=t+0.1) {
    u=u0-a*(t-t0);
    cout<<"The speed for t= "<<t<<" sec";
    cout<<" is u= "<<u<<" m/sec"<<endl;

} // end of for

} // end of main

```

Παρατηρήσεις

Στην υλοποίηση του προγράμματος της επιβραδύνσεως θεωρούμε ως μεταβλητή εισόδου την αρχική ταχύτητα του κινητού. Δηλαδή, την ταχύτητα που έχει αναπτύξει ως τη στιγμή που το σώμα επιβραδύνει. Για την έξοδο του προγράμματος επιλέγουμε την ταχύτητα του κινητού. Ο χρόνος που επιλέχθηκε για την επιβραδυνόμενη κίνηση είναι από το 10^ο δευτερόλεπτο ως το 11^ο με «βήμα» 0,1.

Παράδειγμα 4.2

Έστω ότι η είσοδος του προγράμματος, η αρχική ταχύτητα είναι $30 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Αφού είναι δεδομένη η επιβράδυνση τότε είναι δυνατόν να βρεθούν οι νέες ταχύτητες.

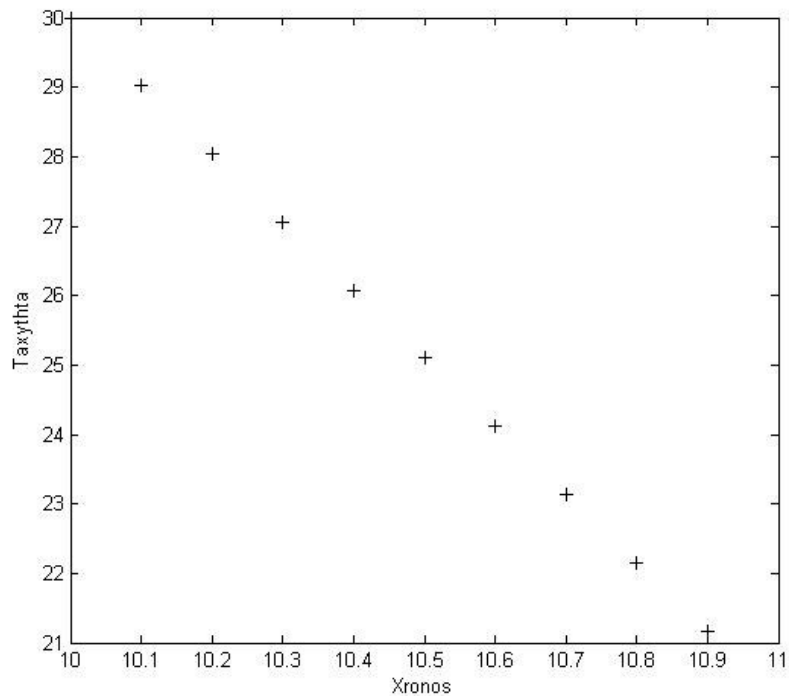
“Output”

```

Enter the initial speed in m/sec:
...30
If the deceleration is a=9.3 m/sec^2 then:
The speed for t=10 sec is u=30 m/sec
The speed for t=10.1 sec is u=29.019 m/sec
The speed for t=10.2 sec is u= 28.038 m/sec
The speed for t=10.3 sec is u=27.057 m/sec
The speed for t=10.4 sec is u=26.076 m/sec
The speed for t=10.5 sec is u=25.095 m/sec
The speed for t=10.6 sec is u=24.114 m/sec
The speed for t=10.7 sec is u=23.133 m/sec
The speed for t=10.8 sec is u=22.152 m/sec
The speed for t=10.9 sec is u=21.171 m/sec

```

Η μεταβολές της ταχύτητας και του χρόνου, όπως παρουσιάζονται στο Output του προγράμματος, γίνονται εμφανείς στο πιο κάτω διάγραμμα.



Εικόνα 4.2 Απεικόνιση ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.

4.3 Στροφή

Η πολυπλοκότητα μιας στροφής είναι ο κύριος λόγος που μελετάμε την τροχιά ενός οχήματος. Οι μοίρες της στροφής είναι ένας από τους παράγοντες που έχουν καθοριστικό ρόλο στην αντιμετώπιση της καθώς επηρεάζουν την ταχύτητα με την οποία το όχημα πρέπει να εισέλθει στην στροφή.

Υλοποίηση Προγράμματος_1 για την Στροφή

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

float l;           //arc of turn in metres
float r;           //radius in metres
float t;           //time in sec
float u;           // speed in m/sec
float a= 4.905;    // acceleration in m/s^2
int mrs;          // fates of turn from 0 to 180

int main() {

    cout<<"Enter the radius of the turn in metres: "<<endl;
    cin>>r;

    for (mrs=30;mrs<181;mrs=mrs+30)
    {
```

```

l=(3.14*r*mrs)/180;
// finding arc of turn
cout<<"The arc of turn is l=: "<<l<<endl;

u=sqrt(a*r);
cout<<"The speed is u=: "<<u<<endl;

t=l/u;
cout<<"The time inside the turn is t=: "<<t<<endl;

} // end of for loop

} // end of main

```

Παρατηρήσεις

Στο παραπάνω πρόγραμμα θεωρούμε ότι η επιτάχυνση είναι περίπου $5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Σαν μεταβλητή εισόδου έχουμε την ακτίνα της στροφής και υποθέτουμε ότι η μέγιστη τιμή την οποία δεν υπερβαίνουν οι μοίρες της στροφής είναι 181. Αρχικά, εισάγεται το μήκος της ακτίνας και για 0° ως 181° πραγματοποιείται ένα επαναλαμβανόμενος βρόχος που δίνει ως αποτελέσματα το μέχρι στιγμής τόξο της στροφής, την ταχύτητα του κινητού και το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε να διασχίσει το εκάστοτε τόξο της στροφής. Οι μεταβλητές καθορίζονται ως float και int. Οι μεταβλητές αναπαρίστανται με τους εξής συμβολισμούς: u είναι η ταχύτητα, r είναι η ακτίνα, t είναι ο χρόνος, mrs είναι οι μοίρες, l είναι το μήκος του τόξου και a συμβολίζεται η επιτάχυνση. Δηλαδή, Για μια στροφή 180° όταν το όχημα έχει επιτάχυνση a παρατηρούμε ότι η ταχύτητα εντός της στροφής πρέπει να διατηρηθεί σταθερή καθώς ο χρόνος περνά και το όχημα διέρχεται της στροφής.

Παράδειγμα 4.3

Έστω ότι η ακτίνα της στροφής είναι 15 m. Τότε το τόξο, η ταχύτητα και ο χρόνος, για 30° ως 180° (μοίρες) με βήμα 30, όπως καθορίζεται από το πρόγραμμα είναι:

“Output”

```

Enter the radius of the turn in metres:
...15
The arc of turn is l=: 7.85
The speed is u=: 8.57759
The time inside the turn is t=: 0.9151
*****
The arc of turn is l=: 15.7
The speed is u=: 8.57759
The time inside the turn is t=: 1.83035
*****
The arc of turn is l=: 23.55
The speed is u=: 8.57759
The time inside the turn is t=: 2.745

```

```

*****
The arc of turn is l=: 31.4
The speed is u=: 8.57759
The time inside the turn is t=: 3.6607
*****
The arc of turn is l=: 39.25
The speed is u=: 8.57759
The time inside the turn is t=: 4.575
*****
The arc of turn is l=: 47.1
The speed is u=: 8.57759
The time inside the turn is t=: 5.491
*****

```

Πίνακας 4.1 Απεικόνιση δεδομένων Output σε πίνακα.

	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Μήκος τόξου στροφής	7.85	15.7	23.55	31.4	39.25	47.1
Η ταχύτητα του οχήματος	8.57759	8.57759	8.57759	8.57759	8.57759	8.57759
Ο χρόνος παραμονής στη στροφή	0.9151	1.83035	2.745	3.6607	4.575	5.491

Μια διαφορετική εκδοχή του προγράμματος 1 για την στροφή είναι η υλοποίηση ενός προγράμματος με τις μοίρες της στροφής να μην μεταβάλλονται και η μεταβλητή που θα αλλάζει να είναι η ακτίνα της.

Υλοποίηση Προγράμματος 2 για την Στροφή

```

#include <iostream.h>
#include <Math.h>

int r; // radius of turn in metres
float u; //speed in m/s
float t; //time in seconds
float l; //arc of turn in metres
int mrs; //fates of turn
float a=9.2; //centripetal acceleration

int main() {

    cout<<"Enter the fates of the turn: "<<endl;
    cin>>mrs;

    cout<<"Knowing that centripetal acceleration is 9.2 m/sec^2. "<<endl;

    for (r=10; r<=20; r+=1) {
        l=(3.14*r*mrs)/180; //finding arc of turn
        cout<<"For r= "<<r<<" metres is: "<<endl;
    }
}

```

```

// enter beam
cout<<"The arc of the turn is l=: "<<l<<" metres"<<endl;
u=sqrt(a*r); // speed
cout<<"The speed is u=: "<<u<<" m/sec"<<endl;

t=l/u;
cout<<"The time inside the turn is t=: "<<t<<" sec"<<endl;
cout<<"*****"<<endl;

} // end of for

} // end of main

```

Παρατηρήσεις

Στο πρόγραμμα 2 η ακτίνα της στροφής είναι ένα μεταβαλλόμενο μέγεθος. Έχει καθοριστεί ένα βήμα της τάξεως της μίας μονάδας για την αύξηση της ακτίνας. Αντίστοιχα θα μπορούσε να καθοριστεί και ένα βήμα για την μείωση της ακτίνας. Τέλος, οι μεταβλητές που ζητούνται για την έξοδο του προγράμματος είναι το διάστημα που θα διανύσει, δηλαδή το μήκος του τόξου της στροφής, η ταχύτητα που θα έχει το κινητό εντός της στροφής και ο χρόνος που θα παραμείνει στη στροφή.

Παράδειγμα 4.4

Έστω ότι η είσοδος για το πρόγραμμα είναι 90 μοίρες. Τότε η έξοδος του προγράμματος είναι :

“Output”

Enter the fates of the turn:

...90

Knowing that centripetal acceleration is 9.2 m/sec².

For r=10 metres is:

The arc of the turn is l=:15.7 metres

The speed is u=: 9.59166 m/sec

The time inside the turn is t=:1.63684 sec

For r=11 metres is:

The arc of the turn is l=:17.27 metres

The speed is u=: 10.0598 m/sec

The time inside the turn is t=: 1.71673 sec

For r=12 metres is:

The arc of the turn is l=: 18.84 metres

The speed is u=:10.5071 m/sec

O xronos poy tha parameinei sth strofh einai t=:1.79307 sec

For r=13 metres is:

The arc of the turn is l=: 20.24 metres

The speed is u=:93.62 m/sec

The time inside the turn is t=: 1.86628 sec

For r=14 metres is:
The arc of the turn is l=:21.98 metres
The speed is u=:11.349 m/sec
The time inside the turn is t=:1.93673 sec

For r=15 metres is:
The arc of the turn is l=:23.55 metres
The speed is u=:11.7473 m/sec
The time inside the turn is t=:2.00471 sec

For r=16 metres is:
The arc of the turn is l=:25.12 metres
The speed is u=:12.1326 m/sec
The time inside the turn is t=:2.07045 sec

For r=17 metres is:
The arc of the turn is l=:26.69 metres
The speed is u=:12.506 m/sec
The time inside the turn is t=:2.13418 sec

For r=18 metres is:
The arc of the turn is l=:28.26 metres
The speed is u=:12.8686 m/sec
The time inside the turn is t=:2.19605 sec

For r=19 metres is:
The arc of the turn is l=:29.83 metres
The speed is u=:13.2212 m/sec
The time inside the turn is t=:2.25623 sec

For r=20 metres is:
The arc of the turn is l=:31.4 metres
The speed is u=:13.5647 m/sec
The time inside the turn is t=:2.31484 sec

Επιπλέον, μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα πρόγραμμα για μια στροφή που να αναδεικνύει την καλύτερη δυνατή διαδρομή για ένα όχημα που διέρχεται από αυτή. Η διαδρομή υλοποιείται με βασικό στοιχείο το πλάτος της στροφής, την ακτίνα και το πλάτος του οχήματος (Εικόνα 3.3).

Υλοποίηση Προγράμματος 3 για την Στροφή

```
#include <iostream.h>
#include <math.h>

float w; // width of car
float W; // width of course
float Ro; // exterior radius by w
float Ri; // internal radius by w
float ro; // exterior radius
```



```

float ri; // internal radius
float r; // radius of corner center line
float X; // effective width of course
float uo; // speed for ro
float ui; // speed for ri
float u; // speed for X
float a= 4.905; // a in m/sec^2

int main () {

    cout<<"Enter the width w of the car in metres: "<<endl;
    cin>>w;
    cout<<"Enter the width W of the course in metres: "<<endl;
    cin>>W;
    cout<<"Enter the radius r of the turn in metres: "<<endl;
    cin>>r;

    ro=r+((1/2)*W); //finding exterior radius of the turn
    ri=r-((1/2)*W); //finding internal radius of the turn
    Ro=ro-w; // exterior radius of turn for w
    Ri=ri+w; // internal radius for w
    X=W-w;
    uo=sqrt(a*ro); //speed for ro
    ui=sqrt(a*ri); //speed for ri
    u1o=sqrt(a*Ro); //speed for Ro
    u1i=sqrt(a*Ri); //speed for Ri
    u=sqrt(a*X); //speed for X

    cout<<"The speed of the car for radius ro is uo= "<<uo<<endl;

    cout<<"The speed of the car for radius Ro is u1o= "<<u1o<<endl;

    cout<<"The speed of the car for radius ri is ui= "<<ui<<endl;

    cout<<"The speed of the car for radius Ri is u1i= "<<u1i<<endl;

    cout<<"The speed of the car for the effective course X is u= "<<u<<endl;

} // end of main

```

Παρατηρήσεις

Στο παραπάνω πρόγραμμα βρίσκουμε την ταχύτητα ενός οχήματος κατά τη διάρκεια μιας στροφής. Η ταχύτητα αναγράφεται για πέντε διαφορετικές περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση αφορά την ταχύτητα του οχήματος στην εξωτερική πλευρά του δρόμου χωρίς να λαμβάνει μέρος το πλάτος του οχήματος. Η δεύτερη περίπτωση αναφέρεται στην ταχύτητα του οχήματος με το πλάτος του να αποτελεί μέρος της ακτίνας της στροφής. Όμοια συμβαίνει και για την εσωτερική ακτίνα της στροφής. Υπάρχει μια περίπτωση που το πλάτος του οχήματος δεν αποτελεί μέρος της ακτίνας της στροφής και μια δεύτερη περίπτωση που το πλάτος επηρεάζει την ακτίνα και

συνεπάγεται την επιρροή της ταχύτητας. Τέλος, υπολογίζεται η ταχύτητα για μια ενδιάμεση γραμμή που ακολουθεί το όχημα και το πλάτος του να αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της ακτίνας. Τέλος, οι μεταβλητές έχουν δηλωθεί ως float. Ο συμβολισμός τους έχει υλοποιηθεί ως εξής: w είναι το πλάτος του αυτοκινήτου, W είναι το πλάτος του δρόμου, R_o είναι η εξωτερική ακτίνα του δρόμου που περιλαμβάνει και το πλάτος του αυτοκινήτου και R είναι η εσωτερική ακτίνα του δρόμου που περιλαμβάνει και το πλάτος του αυτοκινήτου. Αντίστοιχα, r_o και r_i είναι οι ακτίνες της στροφής όταν δεν περιλαμβάνουν το πλάτος το αυτοκινήτου. Ως u_o , u_i καθορίζονται οι ταχύτητες για τις ακτίνες r_o και r_i . Όμοια, u_{1o} , u_{1i} ονομάζονται οι μεταβλητές που καθορίζουν τις ταχύτητες για τις ακτίνες R_o και R_i . Τέλος, ως X αποκαλείται το αποτελεσματικό πλάτος της πορείας που περιλαμβάνει το πλάτος του αυτοκινήτου που κινείται με ταχύτητα u και επιτάχυνση a .

Παράδειγμα 4.5

Έστω ότι το πλάτος του αυτοκινήτου είναι 1,5 μέτρα και το πλάτος της πορείας είναι 5 μέτρα, ενώ η ακτίνα της στροφής είναι 15 μέτρα. Τότε έχουμε:

“Output”

Enter the width w of the car in metres:

... 1.5

Enter the width W of the course in metres:

... 5

Enter the radius r of the turn in metres:

... 15

The speed of the car for radius r_o is $u_o= 8.577$

The speed of the car for radius R_o is $u_{1o}= 8.137$

The speed of the car for radius r_i is $u_i= 8.577$

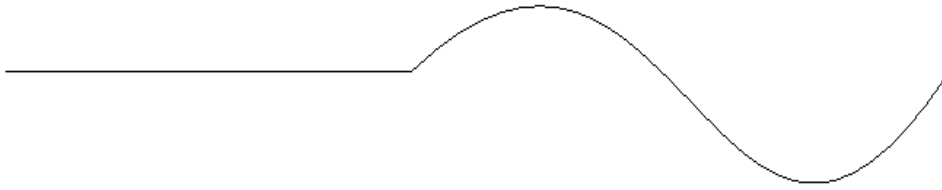
The speed of the car for radius R_i is $u_{1i}= 8.996$

The speed of the car for the effective course X is $u= 4.143$

4.4 Ολοκληρωμένη Διαδρομή

Ολοκληρωμένη Διαδρομή 1

Στις σελίδες που ακολουθούν παρουσιάζεται ένα πρόγραμμα που σχετίζεται με μια διαδρομή που εκτελεί ένα όχημα και ακριβέστερα ένα αυτοκίνητο. Η διαδρομή αποτελείται μια ευθεία πορεία και δυο στροφές, όπου το αυτοκίνητο αρχικά επιταχύνει και λίγο πριν την πρώτη στροφή επιβραδύνει για να αποκτήσει την ταχύτητα με την οποία θα εισέλθει στη στροφή. Μετά το τέλος της πρώτης στροφής το αυτοκίνητο θα εισέλθει και σε μια δεύτερη στροφή (Εικόνα 4.3). Η δεύτερη στροφή απαιτεί μια νέα ταχύτητα που πρέπει να αποκτηθεί από το αυτοκίνητο. Η ταχύτητα μπορεί να είναι ίση με την ταχύτητα που έχει το όχημα εντός της πρώτης στροφής. Σε αυτή την περίπτωση ο οδηγός δεν πράττει τίποτε για την είσοδό του στη νέα στροφή. Όμως, υπάρχει και μια δεύτερη περίπτωση όπου το αυτοκίνητο πρέπει να επιβραδύνει εντός της δεύτερης στροφής. Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα: $u_{\sigma\tau\rho\phi 1} \neq u_{\sigma\tau\rho\phi 2}$. Δηλαδή, το όχημα κατά την έξοδό του από την πρώτη στροφή έχει μια ταχύτητα $u_{\sigma\tau\rho\phi 1}$ και κατά την δεύτερη στροφή το αυτοκίνητο πρέπει να αποκτήσει ταχύτητα $u_{\sigma\tau\rho\phi 2}$. Η δυο αυτές ταχύτητες είναι διαφορετικές μεταξύ τους και ισχύει η σχέση $u_{\sigma\tau\rho\phi 2} < u_{\sigma\tau\rho\phi 1}$, επομένως το αυτοκίνητο θα επιβραδύνει.



Εικόνα 4.3 Διαδρομή 1^η.

Πρόγραμμα Ολοκληρωμένης Διαδρομής 1

```

#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <Math.h>

//course A-B-C-D-E-F
float vA=0.00; //speed at A
float tA=0.00, tAB; //times
float vB, tB, xAB; //speed, time & distance at B
float t1; // times
float r1, r2; // radius of turns 1 & 2
float tBC, xBC; //times
float vC; //speed in C
float t2, v2; //speed & time
float mrs1, mrs2; //fates of turns 1& 2
float s1, s2; //distance
float v3, t3; //speed & time
float tDE, tEF; //times for the distances DE & EF
float tol; //total time
float vD, vE; //speed
float tCD, tD; //time

int main() {

    ofstream my_o_file("teliko_1.txt");

    // AB - accelerating
    cout<<"Enter the distance AB in metres: "<<endl;
    cin>>xAB;
    cout<<"The car is accelerating in rate a=0.8g=7.8 m/s^2. "<<endl;
    tAB=sqrt(xAB/7.8);
    tB=tAB-tA;
    cout<<"The time interval for dx=AB is: "<<tB<<endl;

    for (t1=tA; t1<=tB; t1=t1+0.1) {
        vB=vA+7.8*(t1-tA);
        cout<<"The speed in m/s in course A to B is: "<<vB<<endl;
    }
}

```

```

    my_o_file<<"For "<<t1<<" sec is "<<vB<<" m/sec"<<endl;

} //end of for

my_o_file<<"*****"<<endl;
cout<<"*****"<<endl;

// CD -turn 1
cout<<"The centripetal acceleration is  $a=0.5g=4.875 \text{ m/s}^2$ . "<<endl;
cout<<"Enter the radius of the turn-1 in metres: "<<endl;
cin>>r1;

vC=sqrt(4.875*r1);
my_o_file<<"The speed of the turn-1 is  $vC=$  "<<vC<<endl;
my_o_file<<"*****"<<endl;
cout<<"The speed inside the turn is: "<<vC<<endl;
cout<<"Inside the turn the speed is constant."<<endl;
cout<<"Enter the fates of the turn: "<<endl;
cin>>mrs1;
s1=(3.14*r1*mrs1)/180;
tCD=s1/vC;
cout<<"The time interval inside the turn is: "<<tCD<<endl;

cout<<"*****"<<endl;

// BC - decelerating
cout<<"The car before the turn decelerates with rate  $a= 0.9g= 8.775 \text{ m/s}^2$ .
"<<endl;
tBC=(vB-vC)/8.775;
cout<<"The time interval that the car decelerates is: "<<tBC<<endl;

for (t2=(tB+0.01); t2<=(tB+tBC); t2=t2+0.1) {
    v2=vB-8.775*(t2-tB);
    cout<<"The speed in m/s form B to C is: "<<v2<<endl;
    my_o_file<<"For"<<t2<<" sec is "<<v2<<" m/s"<<endl;

} //end of for

my_o_file<<"*****"<<endl;

cout<<"*****"<<endl;

// EF – turn 2
cout<<"In turn 2 the centripetal acceleration is  $4.875 \text{ m/s}^2$ . "<<endl;
cout<<"Enter the radius of the turn-2 in metres: "<<endl;
cin>>r2;
vE=sqrt(4.875*r2);
my_o_file<<"The speed of the turn-2 is  $vE=$  "<<vE<<endl;
my_o_file<<"*****"<<endl;
cout<<"The speed of the new turn is: "<<vE<<endl;

```

```

cout<<"And in turn-2 the speed is constant. "<<endl;

cout<<"*****"<<endl;

// DE - decelerating
cout<<"The car before the turn 2 decelerates with rate a=0.9g= 8.775
m/s^2."<<endl;
// vD=vC
if (vE==vC) {
    cout<<"The car is not decelerating for the new turn. "<<endl;
}
else {
    //vD=vC
    tDE=(vC-vE)/(8.775);
    cout<<"The time in sec that the car is decelerating is: "<<tDE<<endl;

    tD=tB+tBC+tCD;
    cout<<"The time interval from point A to D is: "<<tD<<endl;

    for (t3=(tD+0.001); t3<=(tD+tDE); t3=t3+0.01) {
        v3= vC - (8.775*(t3-tD));
        cout<<"The speed during the deceleration for the turn-2 is:
"<<v3<<endl;
        my_o_file<<"For "<<t3<<" sec is "<<v3<<" m/sec"<<endl;
    } // end of for

    my_o_file<<"*****"<<endl;

    cout<<"*****"<<endl;

    cout<<"Enter the fates of the turn-2: "<<endl;
    cin>>mrs2;
    s2=(3.14*r2*mrs2)/180;
    tEF= s2/vE;
    cout<<"The time interval that the car is inside the turn is: "<<tEF<<endl;
    tol=tD+tDE+tEF;
    cout<<"And the time that exits is: "<<tol<<endl;

} // end of else

} // end of main

```

Παρατηρήσεις

Στο παραπάνω πρόγραμμα θεωρούμε γνωστή την επιτάχυνση, την επιβράδυνση και την κεντρομόλο επιτάχυνση για την επιταχυνόμενη, την επιβραδυνόμενη και την κυκλική κίνηση. Παρουσιάζονται τα χρονικά διαστήματα στα οποία πραγματοποιούνται οι κινήσεις και τελικά, προκύπτουν οι στιγμιαίες ταχύτητες για ένα προκαθορισμένο βήμα στον χρόνο. Ενώ, στην ευθεία πορεία η παράμετρος

εισόδου είναι η απόσταση που θα διανύσει το όχημα, σε μια στροφή ως παραμέτρους εισόδου έχουμε την ακτίνα και τις μοίρες της στροφής.

Παράδειγμα 4.6

“Output”

Enter the distance AB in metres:

... 400

The car is accelerating in rate $a=0.8g=7.8 \text{ m/s}^2$.

The time interval for $dx=AB$ is: 7.16115

The speed in m/s in course A to B is: 0

The speed in m/s in course A to B is: 0.78

The speed in m/s in course A to B is: 1.56

The speed in m/s in course A to B is: 2.34

The speed in m/s in course A to B is: 3.12

The speed in m/s in course A to B is: 3.9

The speed in m/s in course A to B is: 4.68

The speed in m/s in course A to B is: 5.46

The speed in m/s in course A to B is: 6.24

The speed in m/s in course A to B is: 7.02

The speed in m/s in course A to B is: 7.8

The speed in m/s in course A to B is: 8.58

The speed in m/s in course A to B is: 9.36

The speed in m/s in course A to B is: 10.14

The speed in m/s in course A to B is: 10.92

The speed in m/s in course A to B is: 11.7

The speed in m/s in course A to B is: 12.48

The speed in m/s in course A to B is: 13.26

The speed in m/s in course A to B is: 14.04

The speed in m/s in course A to B is: 14.82

The speed in m/s in course A to B is: 15.6

The speed in m/s in course A to B is: 16.38

The speed in m/s in course A to B is: 17.16

The speed in m/s in course A to B is: 17.94

The speed in m/s in course A to B is: 18.72

The speed in m/s in course A to B is: 19.5

The speed in m/s in course A to B is: 20.28

The speed in m/s in course A to B is: 21.06

The speed in m/s in course A to B is: 21.84

The speed in m/s in course A to B is: 22.62

The speed in m/s in course A to B is: 23.4

The speed in m/s in course A to B is: 24.18

The speed in m/s in course A to B is: 24.96

The speed in m/s in course A to B is: 25.74

The speed in m/s in course A to B is: 26.52

The speed in m/s in course A to B is: 27.3

The speed in m/s in course A to B is: 28.08

The speed in m/s in course A to B is: 28.86

The speed in m/s in course A to B is: 29.64

The speed in m/s in course A to B is: 30.42

The speed in m/s in course A to B is: 31.2
 The speed in m/s in course A to B is: 31.98
 The speed in m/s in course A to B is: 32.76
 The speed in m/s in course A to B is: 33.54
 The speed in m/s in course A to B is: 34.32
 The speed in m/s in course A to B is: 35.1
 The speed in m/s in course A to B is: 35.88
 The speed in m/s in course A to B is: 36.66
 The speed in m/s in course A to B is: 37.44
 The speed in m/s in course A to B is: 38.22
 The speed in m/s in course A to B is: 39
 The speed in m/s in course A to B is: 39.78
 The speed in m/s in course A to B is: 40.56
 The speed in m/s in course A to B is: 41.34
 The speed in m/s in course A to B is: 42.12
 The speed in m/s in course A to B is: 42.9
 The speed in m/s in course A to B is: 43.68
 The speed in m/s in course A to B is: 44.46
 The speed in m/s in course A to B is: 45.24
 The speed in m/s in course A to B is: 46.02
 The speed in m/s in course A to B is: 46.8
 The speed in m/s in course A to B is: 47.58
 The speed in m/s in course A to B is: 48.36
 The speed in m/s in course A to B is: 49.14
 The speed in m/s in course A to B is: 49.92
 The speed in m/s in course A to B is: 50.7
 The speed in m/s in course A to B is: 51.48
 The speed in m/s in course A to B is: 52.26
 The speed in m/s in course A to B is: 53.04
 The speed in m/s in course A to B is: 53.82
 The speed in m/s in course A to B is: 54.6
 The speed in m/s in course A to B is: 55.38

The centripetal acceleration is $a=0.5g=4.875 \text{ m/s}^2$.

Enter the radius of the turn-1 in metres:

...16

The speed inside the turn is: 8.83176

Inside the turn the speed is constant.

Enter the fates of the turn:

...90

The time interval inside the turn is: 2.84428

The car before the turn decelerates with rate $a=0.9g=8.775 \text{ m/s}^2$.

The time interval that the car decelerates is: 5.30464

The speed in m/s form B to C is: 55.2922

The speed in m/s form B to C is: 54.4147

The speed in m/s form B to C is: 53.5372

The speed in m/s form B to C is: 52.6597

The speed in m/s form B to C is: 51.7822

The speed in m/s form B to C is: 50.9047

The speed in m/s form B to C is: 50.0272
The speed in m/s form B to C is: 49.1497
The speed in m/s form B to C is: 48.2722
The speed in m/s form B to C is: 47.3947
The speed in m/s form B to C is: 46.5172
The speed in m/s form B to C is: 45.6397
The speed in m/s form B to C is: 44.7622
The speed in m/s form B to C is: 43.8847
The speed in m/s form B to C is: 43.0072
The speed in m/s form B to C is: 42.1297
The speed in m/s form B to C is: 41.2522
The speed in m/s form B to C is: 40.3747
The speed in m/s form B to C is: 39.4972
The speed in m/s form B to C is: 38.6197
The speed in m/s form B to C is: 37.7422
The speed in m/s form B to C is: 36.8647
The speed in m/s form B to C is: 35.9872
The speed in m/s form B to C is: 35.1097
The speed in m/s form B to C is: 34.2322
The speed in m/s form B to C is: 33.3547
The speed in m/s form B to C is: 32.4772
The speed in m/s form B to C is: 31.5997
The speed in m/s form B to C is: 30.7222
The speed in m/s form B to C is: 29.8447
The speed in m/s form B to C is: 28.9672
The speed in m/s form B to C is: 28.0896
The speed in m/s form B to C is: 27.2121
The speed in m/s form B to C is: 26.3346
The speed in m/s form B to C is: 25.4571
The speed in m/s form B to C is: 24.5796
The speed in m/s form B to C is: 23.7021
The speed in m/s form B to C is: 22.8246
The speed in m/s form B to C is: 21.9471
The speed in m/s form B to C is: 21.0696
The speed in m/s form B to C is: 20.1921
The speed in m/s form B to C is: 19.3146
The speed in m/s form B to C is: 18.4371
The speed in m/s form B to C is: 17.5596
The speed in m/s form B to C is: 16.6821
The speed in m/s form B to C is: 15.8046
The speed in m/s form B to C is: 14.9271
The speed in m/s form B to C is: 14.0496
The speed in m/s form B to C is: 13.1721
The speed in m/s form B to C is: 12.2946
The speed in m/s form B to C is: 11.4171
The speed in m/s form B to C is: 10.5396
The speed in m/s form B to C is: 9.66208

In turn 2 the centripetal acceleration is 4.875 m/s^2 .

Enter the radius of the turn-2 in metres:

...12

The speed of the new turn is: 7.64853

And in turn-2 the speed is constant.

The car before the turn 2 decelerates with rate $a=0.9g= 8.775 \text{ m/s}^2$.

The time in sec that the car is decelerating is: 0.173367

The time interval from point A to D is: 15.3101

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.82298

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.73523

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.64748

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.55973

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.47197

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.38422

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.29647

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.20872

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.12097

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 8.03321

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 7.94546

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 7.85771

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 7.76996

The speed during the deceleration for the turn-2 is: 7.68221

Enter the fates of the turn-2:

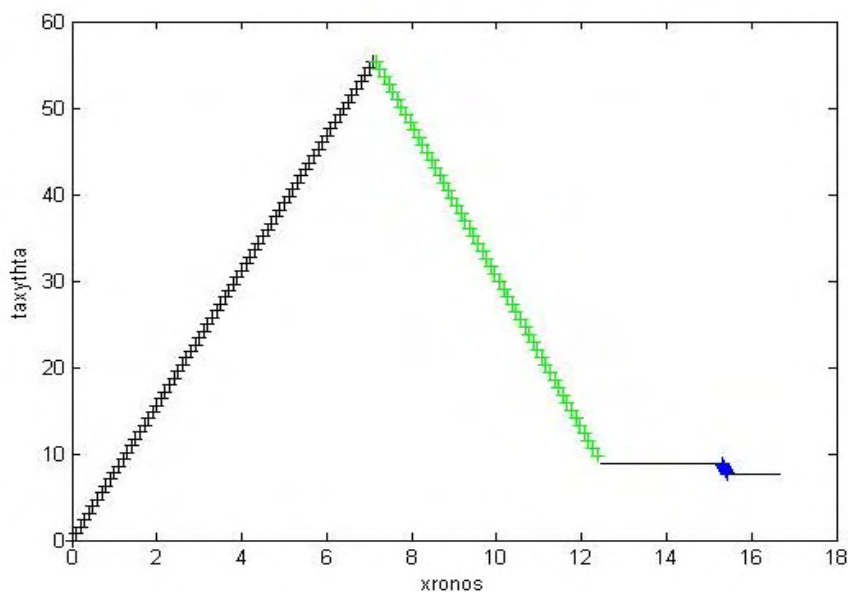
...45

The time interval that the car is inside the turn is: 1.23161

And the time that exits is:16.715

Σύμφωνα με το παραπάνω παράδειγμα (Παράδειγμα 4.6) μπορούμε να δούμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου σε ένα διάγραμμα (Εικόνα 4.3) που να απεικονίζονται οι κινήσεις του οχήματος αναλυτικά.

Το διάγραμμα είναι το εξής:



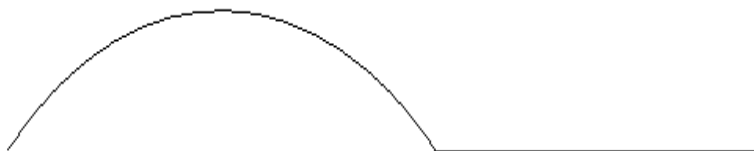
Εικόνα 4.4 Άξονας x: χρόνος (sec) και Άξονας y: ταχύτητα (m/sec).

Παρατηρήσεις

- Με μαύρο χρώμα και σύμβολο «+» απεικονίζεται η επιτάχυνση.
- Με πράσινο χρώμα και σύμβολο «+» απεικονίζεται η επιβράδυνση
- Με μαύρο χρώμα και σύμβολο «-» απεικονίζονται οι στροφές.
- Και τέλος με μπλε χρώμα και σύμβολο «+» απεικονίζεται η επιβράδυνση μεταξύ των στροφών.

Ολοκληρωμένη Διαδρομή 2

Ως μια δεύτερη περίπτωση ολοκληρωμένης διαδρομής μπορεί να παρουσιαστεί η εκκίνηση του οχήματος από την αρχή μιας στροφής. Επομένως, η διαδρομή θα είναι η εκκίνηση του αυτοκινήτου από την αρχή της στροφής και στη συνέχεια, η συνέχιση της πορείας. Έπειτα της στροφή μπορεί να ακολουθεί μια ευθεία ή μια στροφή. Η υλοποίηση του παρακάτω προγράμματος αναφέρεται σε στην περίπτωση που το όχημα ξεκινά με μια στροφή (εκκίνηση από στροφή) και στη συνέχεια, ακολουθεί μια ευθεία (Εικόνα 4.5).



Εικόνα 4.5 Διαδρομή 2^η.

Υλοποίηση Προγράμματος Ολοκληρωμένης Διαδρομής

```
#include <iostream.h>
#include <Math.h>
#include <fstream.h>

// all parameters in S.I.

float t,t1; //time
float u, umax; //speed
float a, ak; // acceleration & centripetal acceleration
float r; //radius
int mrs, mrs1, mrs2; //fates of turns
float u_e, t_e; //speed & time
float x, l; //distance
float t_exit, t_ey8eia, t2; //time
float s1, s2; //distance
float u1, w;

int main() {
    ofstream my_o_file("strofh_2.txt");
    cout<<"Enter centripetal acceleration: "<<endl;
```

```

cin>>ak;
cout<<"Enter radius of turn: "<<endl;
cin>>r;
cout<<"Enter acceleration of the car : "<<endl;
cin>>a;
cout<<"Enter fates of turn: "<<endl;
cin>>mrs;

umax=sqrt(ak*r);
cout<<"The maximum speed that the car needs is: "<<umax<<endl;
my_o_file<<"To umax is: "<<umax<<endl;
t=umax/a;
cout<<"The time interval that the car accelerates is: "<<t<<endl;

for (t1=0;t1<=t;t1=t1+0.01) {
    u1=(a*t1);
    w=u1/r;
    u=sqrt((u1*u1)+(w*w));
    cout<<"The speed in m/s is: "<<u<<endl;
    my_o_file<<"For "<<t1<<" sec is "<<u<<" m/sec"<<endl;

} //end of for

l=(3.14*r*mrs)/180;
cout<<"The total distance of the turn is: "<<l<<endl;

s1=(1/2)*a*t;

mrs1=s1*180/3.14*r;
mrs2=mrs-mrs1;
s2=3.14*r*mrs2/180;
t2=s2/umax;
t_exit=t1+t2;
cout<<"The exit time is: "<<t_exit<<endl;

cout<<"After the turn it follows straight."<<endl;
cout<<"Enter the distance in metres in the straight: "<<endl;
cin>>x;

t_ey8eia= sqrt(2*x/a);
cout<<"The time that that car accelerates in the straight line is:
"<<t_ey8eia<<endl;

for (t_e=t_exit+0.01;t_e<=t_ey8eia;t_e=t_e+0.1) {
    u_e=umax+a*(t_e-t_exit);
    cout<<"The speed in m/s is: "<<u_e<<endl;
    my_o_file<<"For "<<t_e<<" sec is "<<u_e<<" m/sec"<<endl;

} //end of for

```

```
} // end of main
```

Παράδειγμα 4.7

Στο παρακάτω παράδειγμα του προγράμματος που υλοποιήθηκε πιο πάνω θεωρούμε την κεντρομόλο επιτάχυνση $3,4 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ και την επιτάχυνση με την οποία επιταχύνει το όχημα $6,2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Η ακτίνα της στροφής είναι 12,3 μέτρα και η στροφή είναι 180 μοιρών.

“Output”

Enter centripetal acceleration:

... 3.4

Enter radius of turn:

... 12.3

Enter acceleration of the car :

... 6.2

Enter fates of turn:

... 180

The maximum speed that the car needs is: 6.46684

The time interval that the car accelerates is: 1.04304

The speed in m/s is: 0

The speed in m/s is: 0.0622046

The speed in m/s is: 0.124409

The speed in m/s is: 0.186614

The speed in m/s is: 0.248818

The speed in m/s is: 0.311023

The speed in m/s is: 0.373227

The speed in m/s is: 0.435432

The speed in m/s is: 0.497636

The speed in m/s is: 0.559841

The speed in m/s is: 0.622046

The speed in m/s is: 0.68425

The speed in m/s is: 0.746455

The speed in m/s is: 0.808659

The speed in m/s is: 0.870864

The speed in m/s is: 0.933069

The speed in m/s is: 0.995273

The speed in m/s is: 1.05748

The speed in m/s is: 1.11968

The speed in m/s is: 1.18189

The speed in m/s is: 1.24409

The speed in m/s is: 1.3063

The speed in m/s is: 1.3685

The speed in m/s is: 1.43071

The speed in m/s is: 1.49291

The speed in m/s is: 1.55511

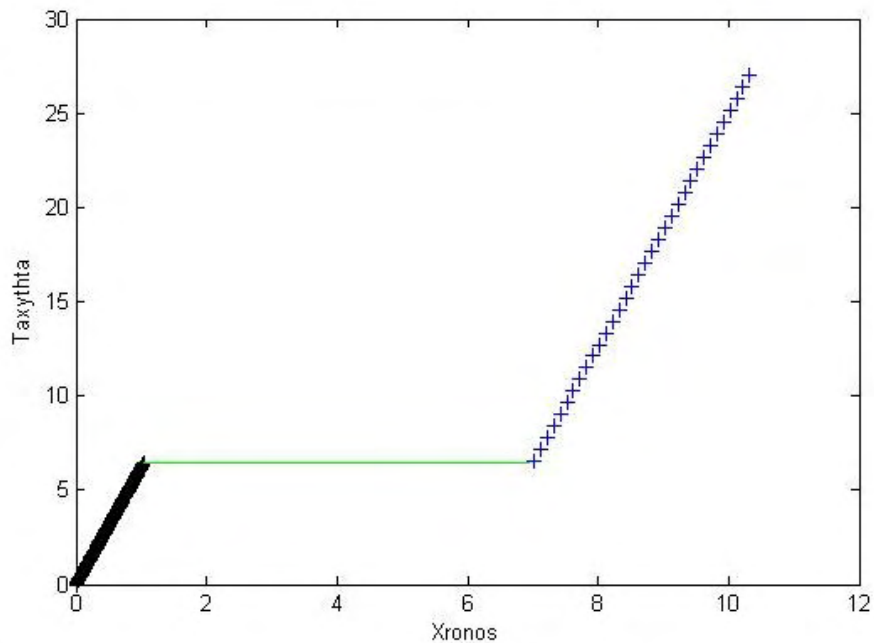
The speed in m/s is: 1.61732

The speed in m/s is: 1.67952
The speed in m/s is: 1.74173
The speed in m/s is: 1.80393
The speed in m/s is: 1.86614
The speed in m/s is: 1.92834
The speed in m/s is: 1.99055
The speed in m/s is: 2.05275
The speed in m/s is: 2.11496
The speed in m/s is: 2.17716
The speed in m/s is: 2.23936
The speed in m/s is: 2.30157
The speed in m/s is: 2.36377
The speed in m/s is: 2.42598
The speed in m/s is: 2.48818
The speed in m/s is: 2.55039
The speed in m/s is: 2.61259
The speed in m/s is: 2.6748
The speed in m/s is: 2.737
The speed in m/s is: 2.7992
The speed in m/s is: 2.86141
The speed in m/s is: 2.92361
The speed in m/s is: 2.98582
The speed in m/s is: 3.04802
The speed in m/s is: 3.11023
The speed in m/s is: 3.17243
The speed in m/s is: 3.23464
The speed in m/s is: 3.29684
The speed in m/s is: 3.35905
The speed in m/s is: 3.42125
The speed in m/s is: 3.48345
The speed in m/s is: 3.54566
The speed in m/s is: 3.60786
The speed in m/s is: 3.67007
The speed in m/s is: 3.73227
The speed in m/s is: 3.79448
The speed in m/s is: 3.85668
The speed in m/s is: 3.91889
The speed in m/s is: 3.98109
The speed in m/s is: 4.04329
The speed in m/s is: 4.1055
The speed in m/s is: 4.1677
The speed in m/s is: 4.22991
The speed in m/s is: 4.29211
The speed in m/s is: 4.35432
The speed in m/s is: 4.41652
The speed in m/s is: 4.47873
The speed in m/s is: 4.54093
The speed in m/s is: 4.60314
The speed in m/s is: 4.66534
The speed in m/s is: 4.72754

The speed in m/s is: 4.78975
The speed in m/s is: 4.85195
The speed in m/s is: 4.91416
The speed in m/s is: 4.97636
The speed in m/s is: 5.03857
The speed in m/s is: 5.10077
The speed in m/s is: 5.16298
The speed in m/s is: 5.22518
The speed in m/s is: 5.28738
The speed in m/s is: 5.34959
The speed in m/s is: 5.41179
The speed in m/s is: 5.474
The speed in m/s is: 5.5362
The speed in m/s is: 5.59841
The speed in m/s is: 5.66061
The speed in m/s is: 5.72282
The speed in m/s is: 5.78502
The speed in m/s is: 5.84723
The speed in m/s is: 5.90943
The speed in m/s is: 5.97163
The speed in m/s is: 6.03384
The speed in m/s is: 6.09604
The speed in m/s is: 6.15825
The speed in m/s is: 6.22045
The speed in m/s is: 6.28266
The speed in m/s is: 6.34486
The speed in m/s is: 6.40707
The speed in m/s is: 6.46927
The total distance of the turn is: 38.622
The exit time is: 7.02231
After the turn it follows straight.
Enter the distance in metres in the straight:
... 334
The time that that car accelerates in the straight line is :10.3799
The speed in m/s is: 6.52884
The speed in m/s is: 7.14884
The speed in m/s is: 7.76884
The speed in m/s is: 8.38884
The speed in m/s is: 9.00884
The speed in m/s is: 9.62884
The speed in m/s is: 10.2488
The speed in m/s is: 10.8688
The speed in m/s is: 11.4888
The speed in m/s is: 12.1088
The speed in m/s is: 12.7288
The speed in m/s is: 13.3488
The speed in m/s is: 13.9688
The speed in m/s is: 14.5888
The speed in m/s is: 15.2088
The speed in m/s is: 15.8288

The speed in m/s is: 16.4489
 The speed in m/s is: 17.0689
 The speed in m/s is: 17.6889
 The speed in m/s is: 18.3089
 The speed in m/s is: 18.9289
 The speed in m/s is: 19.5489
 The speed in m/s is: 20.1689
 The speed in m/s is: 20.7889
 The speed in m/s is: 21.4089
 The speed in m/s is: 22.0289
 The speed in m/s is: 22.6489
 The speed in m/s is: 23.2689
 The speed in m/s is: 23.8889
 The speed in m/s is: 24.5089
 The speed in m/s is: 25.1289
 The speed in m/s is: 25.7489
 The speed in m/s is: 26.3689
 The speed in m/s is: 26.9889

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ένα διάγραμμα που αντιπροσωπεύει την μεταβολή της ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο. Το διάγραμμα αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα 4.6.



Εικόνα 4.6 Άξονας x: χρόνος (sec) και Άξονας y: ταχύτητα (m/sec).

Παρατηρήσεις

- Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η ταχύτητα στην αρχή της στροφής όπου το όχημα επιταχύνει.

- Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου στο δεύτερο τμήμα της στροφής όπου το όχημα διατηρεί σταθερή την ταχύτητά του.
- Με μπλε χρώμα απεικονίζεται η ταχύτητα του αυτοκινήτου μετά το πέρας της στροφής. Είναι το τρίτο τμήμα, αν μπορούμε να χωρίσουμε την διαδρομή σε τμήματα.

Ολοκληρωμένη Διαδρομή 3

Στην περίπτωση της ολοκληρωμένης διαδρομής 3 παραθέτουμε την υλοποίηση ενός προγράμματος στο οποίο το όχημα θα έχει την εκκίνησή του στην είσοδο μιας στροφής. Το όχημα θα επιταχύνει κατά το επιτρεπτό προκειμένου να διέλθει από τη στροφή και στη συνέχεια ευρισκόμενο στην ευθεία να αναπτύξει μια μέγιστη ταχύτητα και την διατηρήσει μέχρι τη στιγμή που το όχημα θα διανύσει ένα επιθυμητό διάστημα στην ευθεία. Βέβαια, αν το διάστημα αυτό είναι ιδιαίτερα μικρό το όχημα θα επιταχύνει συνεχώς μέχρι το πέρας του διαστήματος (Εικόνα 4.5).

Υλοποίηση Ολοκληρωμένης Διαδρομής 3

```
#include <iostream.h>
#include <Math.h>
#include <fstream.h>

// according to S.I.
float t; //time until the car gets umax
float t1; // time
float tot; //total time for the turn
float u; // speed
float umax; // maximum speed
float a; // acceleration in turn
float ak=4.83; // centripetal acceleration
float a_ayt=7.2; //acceleration of the car
float r; // radius
float mrs; // fates of turn
float ui; //speed
float ti; //time
float u_e; // speed
float utel; //speed
float t_e; //time
float x; // distance in straight
float t_exit; //exit time of the turn
float t_ey8eia; //time for the straight line
float s1; // distance for getting umax
float sol; // distance of the turn
float us; //speed
float ts; //speed
float s; //distance

int main() {
    ofstream my_o_file("strofh_2.txt");
```



```

    cout<<"The acceleration for a car in the straight line is:"<<a_ayt<<"
m/s^2."<<endl;

    cout<<"The centripetal acceleration is:"<<ak<<" m/s^2."<<endl;

    cout<<"Enter the radius of the turn in metres: "<<endl;
    cin>>r;
    cout<<"Enter the fates of the turn: "<<endl;
    cin>>mrs;

    // a^2+rak^2=a_ayt^2
    a=sqrt((a_ayt*a_ayt)-(ak*ak));
    cout<<"Acceleration during the turn is "<<a<<" m/sec^2."<<endl;
    my_o_file<<"Acceleration during the turn is: "<<a<<" m/sec^2."<<endl;

    umax=sqrt(ak*r); //ak=(umax^2)/r
    cout<<"The maximum speed that the car gets for acceleration a in m/s is:
"<<umax<<endl;
    my_o_file<<"The umax in m/s is: "<<umax<<endl;

    sol=(3.14*r*mrs)/180;
    cout<<"The arc of the turn is: "<<sol<<" metra."<<endl;
    my_o_file<<"The arc of the turn is: "<<sol<<" metra."<<endl;

    tol=sqrt(sol/a); //a=sol/tol^2
    cout<<"Total time that the car gets throw the turn : "<<tol<<" sec."<<endl;
    my_o_file<<" Total time that the car gets throw the turn : "<<tol<<"
sec."<<endl;

    t=umax/a; //a=umax/t
    cout<<"The time interval that the car needs to get Umax is "<<t<<endl;
    my_o_file<<"The time interval that the car needs to get Umax is:"<<t<<endl;

    s1=t*t*a; //a=s1/t^2
    cout<<"The distance that needs to get Umax is: "<<s1<<" metra."<<endl;
    my_o_file<<" The distance that needs to get Umax is: "<<s1<<"
metra."<<endl;

    if (sol>s1) {
        cout<<"Total arc of the turn is longer than the arc of acceleration."<<endl;

        cout<<"So the car accelerates, and after the "<<t<<" second the speed is
constant."<<endl;
        my_o_file<<"Total arc of the turn is longer than the arc of acceleration
"<<endl;
        my_o_file<<" So the car accelerates, and after the "<<t<<" second the
speed is constant."<<endl;

        // getting speed when the total arc of the turn is longer than the arc that
accelerates

```

```

for (t1=0;t1<=t;t1=t1+0.01) {
    u=a*t1;
    cout<<"The speed in m/s is: "<<u<<endl;
    my_o_file<<"For "<<t1<<" sec the speed is "<<u<<" m/sec"<<endl;

} // end of for

my_o_file<<"*****"<<endl;

for (ti=t+0.001;ti<=tol;ti=ti+0.01) {
    ui=umax;
    cout<<"The speed is: "<<ui<<" m/s."<<endl;
    my_o_file<<"For "<<ti<<" sec the speed is "<<ui<<" m/sec"<<endl;

} //end of for

my_o_file<<"*****"<<endl;

} // end of if
else if (sol<s1) {
    cout<<"Total arc of the turn is shorter than the accelerating arc to get
Umax."<<endl;

    cout<<"So the car during the turn it will accelerate all the
time."<<endl;
    my_o_file<<" Total arc of the turn is shorter than the accelerating arc
to get Umax ."<<endl;
    my_o_file<<" So the car during the turn it will accelerate all the
time."<<endl;

    //finding speed when total arc of turn < arc of acceleration

    s=sol;
    for (ts=0;ts<=tol;ts=ts+0.1) {
        us=a*ts;
        cout<<"The speed is: "<<us<<" m/s."<<endl;
        my_o_file<<"For "<<ts<<" sec the speed is "<<us<<"
m/sec"<<endl;
    } //end of for

    my_o_file<<"*****"<<endl;

} // end of else if

else {
    cout<<"Total arc of the turn is equal to arc of getting Umax"<<endl;
    my_o_file<<"Total arc of the turn is equal to arc of getting Umax.
"<<endl;

```

```

        for (t1=0;t1<=t;t1=t1+0.01) {
            u=a*t1;
            cout<<"The speed in m/s is: "<<u<<endl;
            my_o_file<<"For "<<t1<<" sec the speed is "<<u<<"
m/sec"<<endl;
        } //end of for

        my_o_file<<"*****"<<endl;
    } //end of else

    t_exit=tol;
    cout<<"Exit time from the turn in sec is: "<<t_exit<<endl;
    my_o_file<<" Exit time from the turn in sec is: "<<t_exit<<endl;

    cout<<"After the turn there is a straight line. "<<endl;
    my_o_file<<"After the turn there is a straight line."<<endl;

    cout<<"Enter the distance in the straight line in metres: "<<endl;
    cin>>x;

    t_ey8eia= sqrt(2*x/a_ayt);
    //finding time for acceleration in straight line
    cout<<"Time for acceleration in straight line: "<<t_ey8eia<<endl;
    my_o_file<<" Time for acceleration in straight line: "<<t_ey8eia<<endl;

    for (t_e=t_exit+0.001;t_e<(t_ey8eia+t_exit);t_e=t_e+0.1) {
        if (sol>s1) {
            u_e=umax+(a_ayt*(t_e-t_exit));
            //speed in straight when total arc of turn is longer than the arc of
acceleration
        } //end of if
        else if (sol<s1) {
            u_e=us+(a_ayt*(t_e-t_exit));
            // speed in straight when total arc of turn is shorter than the arc
of acceleration
        } // end of else if
        else {
            u_e=u+(a_ayt*(t_e-t_exit));
            // speed in straight when total arc of turn is equal to the arc of
acceleration
        } // end of else

        if (u_e>60) {
            utel=60;
            cout<<"The speed in m/s is: "<<utel<<endl;
            my_o_file<<"For "<<t_e<<" sec the speed is "<<utel<<"
m/sec"<<endl;
        } //end of if
        else {

```

```

        utel=u_e;
        cout<<"The speed in m/s is: "<<utel<<endl;
        my_o_file<<"For "<<t_e<<" sec the speed is "<<utel<<"
m/sec"<<endl;
    } //end of else
} // end of for
} // end of main

```

Παρατηρήσεις

Όπως είναι εμφανές έχουμε αρχικοποιήσει την επιτάχυνση που το όχημα μπορεί να αναπτύξει στην ευθεία και τον ρυθμό αλλαγής κατεύθυνσης (a_k). Ως εισόδους θέτουμε την ακτίνα της στροφής και τις μοίρες της. Στο πρόγραμμα, επίσης, μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις που το όχημα μπορεί να διέλθει της στροφής και έπειτα δυο περιπτώσεις για την ευθεία. Οι περιπτώσεις είναι: α) όταν το όχημα επιταχύνει αποκτά την μέγιστη ταχύτητα και στη συνέχεια, για να εξέλθει της στροφής διατηρεί σταθερή την ταχύτητά του, β) όταν δεν αποκτά την μέγιστη ταχύτητα και επιταχύνει συνεχώς μέχρι την έξοδο και γ) όταν το όχημα θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα την στιγμή της εξόδου. Όμως, μετά το τέλος της στροφής ακολουθεί ευθεία. Η πρώτη περίπτωση που μπορούμε να διακρίνουμε είναι όταν το όχημα επιταχύνει και αποκτά μια μέγιστη ταχύτητα (πιθανόν τη μέγιστη ταχύτητα του αυτοκινήτου) και την διατηρεί μέχρι τη στιγμή που θα έχει διανύσει την επιθυμητή απόσταση. Ενώ, η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το όχημα εξερχόμενο από τη στροφή επιταχύνει συνεχώς διανύοντας έτσι την επιθυμητή απόσταση στην ευθεία, χωρίς να αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητά του.

Παράδειγμα 4.8

Για είσοδο ακτίνας 12 μέτρων και οι μοίρες της στροφή να είναι 180° , ενώ η απόσταση που θα διανύσει στην ευθεία να είναι 334 μέτρα.

“Output”

Acceleration during the turn is: 5.33958 m/sec².

The maximum speed that the car gets for acceleration a in m/s is: 7.61315

The arc of the turn is: 37.68 metra.

Total time that the car gets throw the turn: 2.65645 sec.

The time interval that the car needs to get U_{max} is: 1.4258

The distance that needs to get U_{max} is: 10.8548 metres.

Total arc of the turn is longer than the arc of acceleration.

So the car accelerates, and after the 1.4258 second the speed is constant.

For 0 sec the speed is 0 m/sec

For 0.01 sec the speed is 0.0533958 m/sec

For 0.02 sec the speed is 0.106792 m/sec

For 0.03 sec the speed is 0.160187 m/sec

For 0.04 sec the speed is 0.213583 m/sec

For 0.05 sec the speed is 0.266979 m/sec

For 0.06 sec the speed is 0.320375 m/sec

For 0.07 sec the speed is 0.373771 m/sec

For 0.08 sec the speed is 0.427166 m/sec

For 0.09 sec the speed is 0.480562 m/sec

For 0.1 sec the speed is 0.533958 m/sec

For 0.11 sec the speed is 0.587354 m/sec
For 0.12 sec the speed is 0.640749 m/sec
For 0.13 sec the speed is 0.694145 m/sec
For 0.14 sec the speed is 0.747541 m/sec
For 0.15 sec the speed is 0.800937 m/sec
For 0.16 sec the speed is 0.854333 m/sec
For 0.17 sec the speed is 0.907728 m/sec
For 0.18 sec the speed is 0.961124 m/sec
For 0.19 sec the speed is 1.01452 m/sec
For 0.2 sec the speed is 1.06792 m/sec
For 0.21 sec the speed is 1.12131 m/sec
For 0.22 sec the speed is 1.17471 m/sec
For 0.23 sec the speed is 1.2281 m/sec
For 0.24 sec the speed is 1.2815 m/sec
For 0.25 sec the speed is 1.3349 m/sec
For 0.26 sec the speed is 1.38829 m/sec
For 0.27 sec the speed is 1.44169 m/sec
For 0.28 sec the speed is 1.49508 m/sec
For 0.29 sec the speed is 1.54848 m/sec
For 0.3 sec the speed is 1.60187 m/sec
For 0.31 sec the speed is 1.65527 m/sec
For 0.32 sec the speed is 1.70867 m/sec
For 0.33 sec the speed is 1.76206 m/sec
For 0.34 sec the speed is 1.81546 m/sec
For 0.35 sec the speed is 1.86885 m/sec
For 0.36 sec the speed is 1.92225 m/sec
For 0.37 sec the speed is 1.97564 m/sec
For 0.38 sec the speed is 2.02904 m/sec
For 0.39 sec the speed is 2.08244 m/sec
For 0.4 sec the speed is 2.13583 m/sec
For 0.41 sec the speed is 2.18923 m/sec
For 0.42 sec the speed is 2.24262 m/sec
For 0.43 sec the speed is 2.29602 m/sec
For 0.44 sec the speed is 2.34941 m/sec
For 0.45 sec the speed is 2.40281 m/sec
For 0.46 sec the speed is 2.45621 m/sec
For 0.47 sec the speed is 2.5096 m/sec
For 0.48 sec the speed is 2.563 m/sec
For 0.49 sec the speed is 2.61639 m/sec
For 0.5 sec the speed is 2.66979 m/sec
For 0.51 sec the speed is 2.72318 m/sec
For 0.52 sec the speed is 2.77658 m/sec
For 0.53 sec the speed is 2.82998 m/sec
For 0.54 sec the speed is 2.88337 m/sec
For 0.55 sec the speed is 2.93677 m/sec
For 0.56 sec the speed is 2.99016 m/sec
For 0.57 sec the speed is 3.04356 m/sec
For 0.58 sec the speed is 3.09695 m/sec
For 0.59 sec the speed is 3.15035 m/sec
For 0.6 sec the speed is 3.20375 m/sec

For 0.61 sec the speed is 3.25714 m/sec
For 0.62 sec the speed is 3.31054 m/sec
For 0.63 sec the speed is 3.36393 m/sec
For 0.64 sec the speed is 3.41733 m/sec
For 0.65 sec the speed is 3.47072 m/sec
For 0.66 sec the speed is 3.52412 m/sec
For 0.67 sec the speed is 3.57752 m/sec
For 0.68 sec the speed is 3.63091 m/sec
For 0.69 sec the speed is 3.68431 m/sec
For 0.7 sec the speed is 3.7377 m/sec
For 0.71 sec the speed is 3.7911 m/sec
For 0.72 sec the speed is 3.84449 m/sec
For 0.73 sec the speed is 3.89789 m/sec
For 0.74 sec the speed is 3.95129 m/sec
For 0.75 sec the speed is 4.00468 m/sec
For 0.76 sec the speed is 4.05808 m/sec
For 0.77 sec the speed is 4.11147 m/sec
For 0.78 sec the speed is 4.16487 m/sec
For 0.79 sec the speed is 4.21826 m/sec
For 0.8 sec the speed is 4.27166 m/sec
For 0.81 sec the speed is 4.32506 m/sec
For 0.82 sec the speed is 4.37845 m/sec
For 0.83 sec the speed is 4.43185 m/sec
For 0.839999 sec the speed is 4.48524 m/sec
For 0.849999 sec the speed is 4.53864 m/sec
For 0.859999 sec the speed is 4.59203 m/sec
For 0.869999 sec the speed is 4.64543 m/sec
For 0.879999 sec the speed is 4.69883 m/sec
For 0.889999 sec the speed is 4.75222 m/sec
For 0.899999 sec the speed is 4.80562 m/sec
For 0.909999 sec the speed is 4.85901 m/sec
For 0.919999 sec the speed is 4.91241 m/sec
For 0.929999 sec the speed is 4.96581 m/sec
For 0.939999 sec the speed is 5.0192 m/sec
For 0.949999 sec the speed is 5.0726 m/sec
For 0.959999 sec the speed is 5.12599 m/sec
For 0.969999 sec the speed is 5.17939 m/sec
For 0.979999 sec the speed is 5.23278 m/sec
For 0.989999 sec the speed is 5.28618 m/sec
For 0.999999 sec the speed is 5.33958 m/sec
For 1.01 sec the speed is 5.39297 m/sec
For 1.02 sec the speed is 5.44637 m/sec
For 1.03 sec the speed is 5.49976 m/sec
For 1.04 sec the speed is 5.55316 m/sec
For 1.05 sec the speed is 5.60655 m/sec
For 1.06 sec the speed is 5.65995 m/sec
For 1.07 sec the speed is 5.71335 m/sec
For 1.08 sec the speed is 5.76674 m/sec
For 1.09 sec the speed is 5.82014 m/sec
For 1.1 sec the speed is 5.87353 m/sec

For 1.11 sec the speed is 5.92693 m/sec
For 1.12 sec the speed is 5.98032 m/sec
For 1.13 sec the speed is 6.03372 m/sec
For 1.14 sec the speed is 6.08712 m/sec
For 1.15 sec the speed is 6.14051 m/sec
For 1.16 sec the speed is 6.19391 m/sec
For 1.17 sec the speed is 6.2473 m/sec
For 1.18 sec the speed is 6.3007 m/sec
For 1.19 sec the speed is 6.35409 m/sec
For 1.2 sec the speed is 6.40749 m/sec
For 1.21 sec the speed is 6.46089 m/sec
For 1.22 sec the speed is 6.51428 m/sec
For 1.23 sec the speed is 6.56768 m/sec
For 1.24 sec the speed is 6.62107 m/sec
For 1.25 sec the speed is 6.67447 m/sec
For 1.26 sec the speed is 6.72786 m/sec
For 1.27 sec the speed is 6.78126 m/sec
For 1.28 sec the speed is 6.83466 m/sec
For 1.29 sec the speed is 6.88805 m/sec
For 1.3 sec the speed is 6.94145 m/sec
For 1.31 sec the speed is 6.99484 m/sec
For 1.32 sec the speed is 7.04824 m/sec
For 1.33 sec the speed is 7.10163 m/sec
For 1.34 sec the speed is 7.15503 m/sec
For 1.35 sec the speed is 7.20843 m/sec
For 1.36 sec the speed is 7.26182 m/sec
For 1.37 sec the speed is 7.31522 m/sec
For 1.38 sec the speed is 7.36861 m/sec
For 1.39 sec the speed is 7.42201 m/sec
For 1.4 sec the speed is 7.4754 m/sec
For 1.41 sec the speed is 7.5288 m/sec
For 1.42 sec the speed is 7.5822 m/sec

For 1.4268 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4368 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4468 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4568 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4668 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4768 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4868 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.4968 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5068 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5168 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5268 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5368 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5468 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5568 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5668 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5768 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 1.5868 sec the speed is 7.61315 m/sec

For 2.59679 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 2.60679 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 2.61679 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 2.62679 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 2.63679 sec the speed is 7.61315 m/sec
For 2.64679 sec the speed is 7.61315 m/sec

Exit time from the turn in sec is: 2.65645

After the turn there is a straight line.

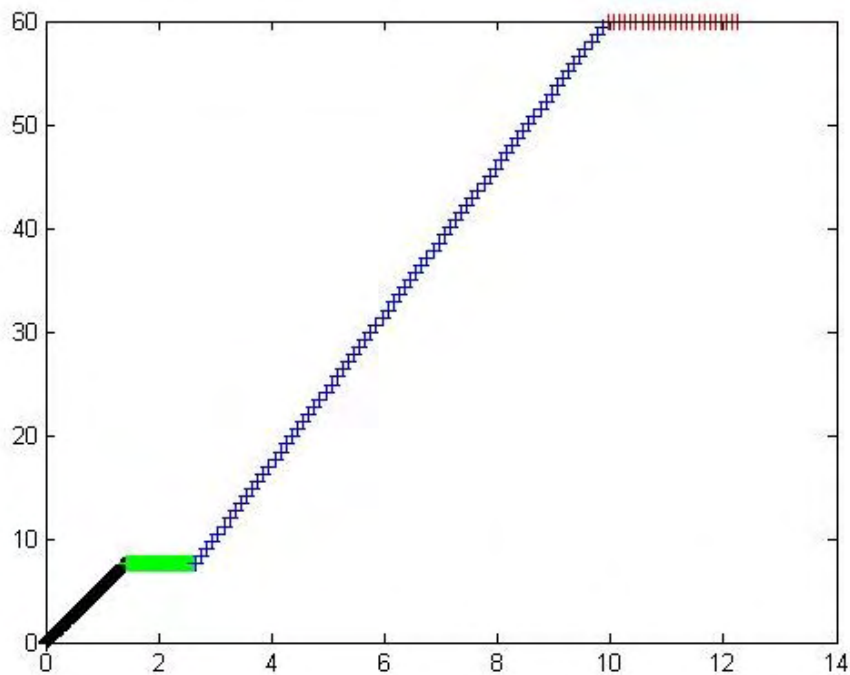
Time for acceleration in straight line: 9.77525

For 2.65745 sec the speed is 7.62035 m/sec
For 2.75745 sec the speed is 8.34035 m/sec
For 2.85745 sec the speed is 9.06034 m/sec
For 2.95745 sec the speed is 9.78034 m/sec
For 3.05745 sec the speed is 10.5003 m/sec
For 3.15745 sec the speed is 11.2203 m/sec
For 3.25745 sec the speed is 11.9403 m/sec
For 3.35745 sec the speed is 12.6603 m/sec
For 3.45745 sec the speed is 13.3803 m/sec
For 3.55745 sec the speed is 14.1003 m/sec
For 3.65745 sec the speed is 14.8203 m/sec
For 3.75745 sec the speed is 15.5403 m/sec
For 3.85745 sec the speed is 16.2603 m/sec
For 3.95745 sec the speed is 16.9803 m/sec
For 4.05745 sec the speed is 17.7003 m/sec
For 4.15745 sec the speed is 18.4203 m/sec
For 4.25745 sec the speed is 19.1403 m/sec
For 4.35745 sec the speed is 19.8603 m/sec
For 4.45745 sec the speed is 20.5803 m/sec
For 4.55745 sec the speed is 21.3003 m/sec
For 4.65745 sec the speed is 22.0203 m/sec
For 4.75745 sec the speed is 22.7403 m/sec
For 4.85745 sec the speed is 23.4603 m/sec
For 4.95745 sec the speed is 24.1803 m/sec
For 5.05745 sec the speed is 24.9003 m/sec
For 5.15745 sec the speed is 25.6203 m/sec
For 5.25745 sec the speed is 26.3403 m/sec
For 5.35745 sec the speed is 27.0603 m/sec
For 5.45745 sec the speed is 27.7803 m/sec
For 5.55745 sec the speed is 28.5003 m/sec
For 5.65745 sec the speed is 29.2203 m/sec
For 5.75745 sec the speed is 29.9403 m/sec
For 5.85745 sec the speed is 30.6603 m/sec
For 5.95745 sec the speed is 31.3803 m/sec
For 6.05745 sec the speed is 32.1003 m/sec
For 6.15745 sec the speed is 32.8203 m/sec
For 6.25745 sec the speed is 33.5403 m/sec
For 6.35745 sec the speed is 34.2603 m/sec
For 6.45745 sec the speed is 34.9803 m/sec
For 6.55745 sec the speed is 35.7003 m/sec

For 6.65745 sec the speed is 36.4203 m/sec
For 6.75745 sec the speed is 37.1403 m/sec
For 6.85745 sec the speed is 37.8603 m/sec
For 6.95745 sec the speed is 38.5803 m/sec
For 7.05745 sec the speed is 39.3003 m/sec
For 7.15745 sec the speed is 40.0203 m/sec
For 7.25745 sec the speed is 40.7403 m/sec
For 7.35745 sec the speed is 41.4603 m/sec
For 7.45745 sec the speed is 42.1803 m/sec
For 7.55745 sec the speed is 42.9003 m/sec
For 7.65745 sec the speed is 43.6203 m/sec
For 7.75745 sec the speed is 44.3403 m/sec
For 7.85745 sec the speed is 45.0603 m/sec
For 7.95745 sec the speed is 45.7803 m/sec
For 8.05745 sec the speed is 46.5003 m/sec
For 8.15745 sec the speed is 47.2203 m/sec
For 8.25745 sec the speed is 47.9403 m/sec
For 8.35745 sec the speed is 48.6603 m/sec
For 8.45745 sec the speed is 49.3803 m/sec
For 8.55745 sec the speed is 50.1003 m/sec
For 8.65745 sec the speed is 50.8203 m/sec
For 8.75745 sec the speed is 51.5403 m/sec
For 8.85745 sec the speed is 52.2603 m/sec
For 8.95745 sec the speed is 52.9803 m/sec
For 9.05745 sec the speed is 53.7003 m/sec
For 9.15745 sec the speed is 54.4203 m/sec
For 9.25745 sec the speed is 55.1403 m/sec
For 9.35745 sec the speed is 55.8603 m/sec
For 9.45745 sec the speed is 56.5804 m/sec
For 9.55745 sec the speed is 57.3004 m/sec
For 9.65745 sec the speed is 58.0204 m/sec
For 9.75745 sec the speed is 58.7404 m/sec
For 9.85745 sec the speed is 59.4604 m/sec
For 9.95745 sec the speed is 60 m/sec
For 10.0575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.1575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.2575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.3575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.4575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.5575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.6575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.7575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.8575 sec the speed is 60 m/sec
For 10.9575 sec the speed is 60 m/sec
For 11.0575 sec the speed is 60 m/sec
For 11.1575 sec the speed is 60 m/sec
For 11.2575 sec the speed is 60 m/sec
For 11.3575 sec the speed is 60 m/sec
For 11.4575 sec the speed is 60 m/sec
For 11.5575 sec the speed is 60 m/sec

For 11.6575 sec the speed is 60 m/sec
 For 11.7575 sec the speed is 60 m/sec
 For 11.8575 sec the speed is 60 m/sec
 For 11.9575 sec the speed is 60 m/sec
 For 12.0575 sec the speed is 60 m/sec
 For 12.1575 sec the speed is 60 m/sec
 For 12.2575 sec the speed is 60 m/sec
 For 12.3575 sec the speed is 60 m/sec

Χαρακτηριστική γραφική απεικόνιση του παραπάνω παραδείγματος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.7. Μπορούμε να δούμε την αύξηση της ταχύτητας καθώς το όχημα επιταχύνει, μέχρι να αναπτύξει την κατάλληλη ταχύτητα. Ακολουθεί ένα διάστημα όπου το όχημα διατηρεί σταθερή την ταχύτητά του ως τη στιγμή που θα εξέλθει από τη στροφή. Μετά την έξοδο του από τη στροφή το όχημα επιταχύνει και πάλι, μέχρι να αναπτύξει την μέγιστη ταχύτητα και να την διατηρήσει σταθερή για όλο το διάστημα που θα κινείται.



Εικόνα 4.7 Όπου στον άξονα x είναι ο χρόνος σε seconds και στον άξονα y η ταχύτητα σε m/sec.

Παράδειγμα 4.9

Για είσοδο ακτίνας 250 μέτρων και οι μοίρες της στροφή να είναι 30°, ενώ το διάστημα που θα διανύσει το όχημα στην ευθεία θα είναι 500 μέτρα, έχουμε:

“Output”

Acceleration during the turn is: 5.33958 m/sec².

The maximum speed that the car gets for acceleration a in m/s is: 34.7491

The arc of the turn is: 218.056 metra.

Total time that the car gets throw the turn: 6.39043 sec.

The time interval that the car needs to get U_{max} is: 6.50784
The distance that needs to get U_{max} is: 226.141 metres.
Total arc of the turn is shorter than the accelerating arc to get U_{max} .
So the car during the turn it will accelerate all the time.
For 0 sec the speed is 0 m/sec
For 0.1 sec the speed is 0.533958 m/sec
For 0.2 sec the speed is 1.06792 m/sec
For 0.3 sec the speed is 1.60187 m/sec
For 0.4 sec the speed is 2.13583 m/sec
For 0.5 sec the speed is 2.66979 m/sec
For 0.6 sec the speed is 3.20375 m/sec
For 0.7 sec the speed is 3.73771 m/sec
For 0.8 sec the speed is 4.27166 m/sec
For 0.9 sec the speed is 4.80562 m/sec
For 1 sec the speed is 5.33958 m/sec
For 1.1 sec the speed is 5.87354 m/sec
For 1.2 sec the speed is 6.4075 m/sec
For 1.3 sec the speed is 6.94145 m/sec
For 1.4 sec the speed is 7.47541 m/sec
For 1.5 sec the speed is 8.00937 m/sec
For 1.6 sec the speed is 8.54333 m/sec
For 1.7 sec the speed is 9.07728 m/sec
For 1.8 sec the speed is 9.61124 m/sec
For 1.9 sec the speed is 10.1452 m/sec
For 2 sec the speed is 10.6792 m/sec
For 2.1 sec the speed is 11.2131 m/sec
For 2.2 sec the speed is 11.7471 m/sec
For 2.3 sec the speed is 12.281 m/sec
For 2.4 sec the speed is 12.815 m/sec
For 2.5 sec the speed is 13.3489 m/sec
For 2.6 sec the speed is 13.8829 m/sec
For 2.7 sec the speed is 14.4169 m/sec
For 2.8 sec the speed is 14.9508 m/sec
For 2.9 sec the speed is 15.4848 m/sec
For 3 sec the speed is 16.0187 m/sec
For 3.1 sec the speed is 16.5527 m/sec
For 3.2 sec the speed is 17.0866 m/sec
For 3.3 sec the speed is 17.6206 m/sec
For 3.4 sec the speed is 18.1546 m/sec
For 3.5 sec the speed is 18.6885 m/sec
For 3.6 sec the speed is 19.2225 m/sec
For 3.7 sec the speed is 19.7564 m/sec
For 3.8 sec the speed is 20.2904 m/sec
For 3.9 sec the speed is 20.8243 m/sec
For 4 sec the speed is 21.3583 m/sec
For 4.1 sec the speed is 21.8923 m/sec
For 4.2 sec the speed is 22.4262 m/sec
For 4.3 sec the speed is 22.9602 m/sec
For 4.4 sec the speed is 23.4941 m/sec
For 4.5 sec the speed is 24.0281 m/sec

For 4.6 sec the speed is 24.5621 m/sec
For 4.7 sec the speed is 25.096 m/sec
For 4.8 sec the speed is 25.63 m/sec
For 4.9 sec the speed is 26.1639 m/sec
For 5 sec the speed is 26.6979 m/sec
For 5.1 sec the speed is 27.2318 m/sec
For 5.2 sec the speed is 27.7658 m/sec
For 5.3 sec the speed is 28.2998 m/sec
For 5.4 sec the speed is 28.8337 m/sec
For 5.5 sec the speed is 29.3677 m/sec
For 5.6 sec the speed is 29.9016 m/sec
For 5.7 sec the speed is 30.4356 m/sec
For 5.8 sec the speed is 30.9695 m/sec
For 5.9 sec the speed is 31.5035 m/sec
For 6 sec the speed is 32.0375 m/sec
For 6.1 sec the speed is 32.5714 m/sec
For 6.2 sec the speed is 33.1054 m/sec
For 6.3 sec the speed is 33.6393 m/sec

Exit time from the turn in sec is: 6.39043

After the turn there is a straight line.

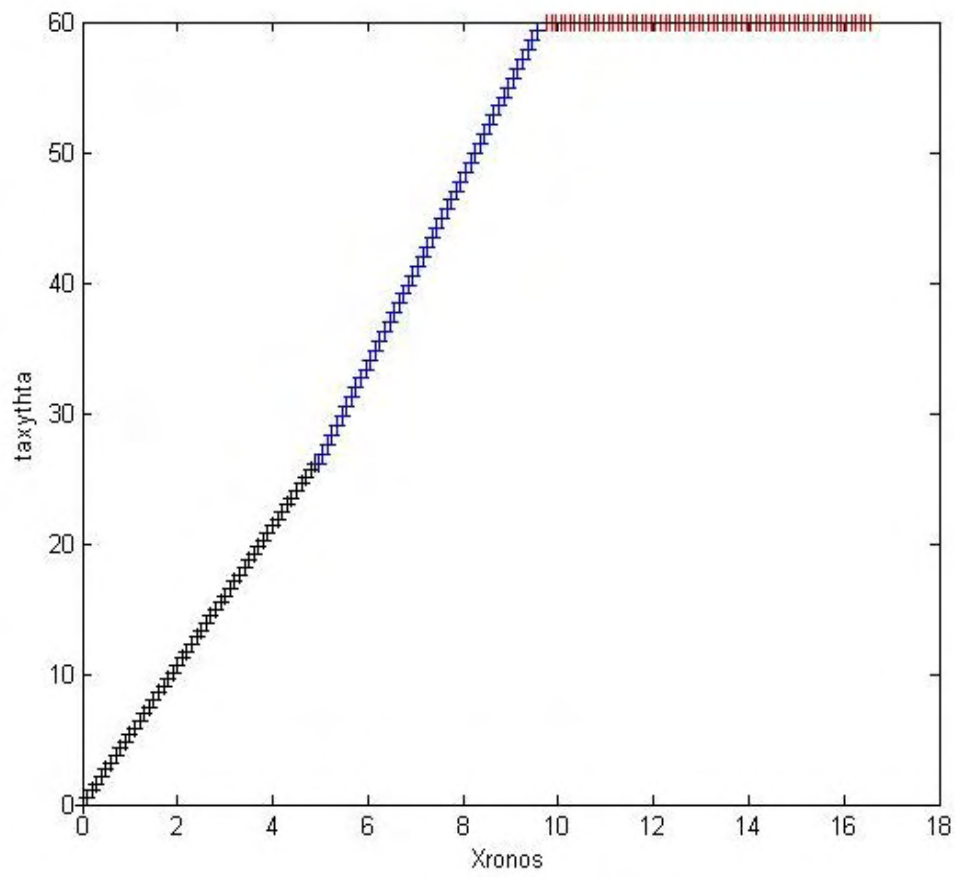
Time for acceleration in straight line: 10.5409

For 6.39143 sec the speed is 33.6465 m/sec
For 6.49143 sec the speed is 34.3665 m/sec
For 6.59143 sec the speed is 35.0865 m/sec
For 6.69143 sec the speed is 35.8065 m/sec
For 6.79143 sec the speed is 36.5265 m/sec
For 6.89143 sec the speed is 37.2465 m/sec
For 6.99143 sec the speed is 37.9665 m/sec
For 7.09143 sec the speed is 38.6865 m/sec
For 7.19143 sec the speed is 39.4065 m/sec
For 7.29143 sec the speed is 40.1265 m/sec
For 7.39143 sec the speed is 40.8465 m/sec
For 7.49143 sec the speed is 41.5665 m/sec
For 7.59143 sec the speed is 42.2865 m/sec
For 7.69143 sec the speed is 43.0065 m/sec
For 7.79143 sec the speed is 43.7265 m/sec
For 7.89143 sec the speed is 44.4465 m/sec
For 7.99143 sec the speed is 45.1665 m/sec
For 8.09143 sec the speed is 45.8865 m/sec
For 8.19143 sec the speed is 46.6065 m/sec
For 8.29143 sec the speed is 47.3265 m/sec
For 8.39143 sec the speed is 48.0465 m/sec
For 8.49143 sec the speed is 48.7665 m/sec
For 8.59143 sec the speed is 49.4865 m/sec
For 8.69143 sec the speed is 50.2065 m/sec
For 8.79143 sec the speed is 50.9265 m/sec
For 8.89143 sec the speed is 51.6465 m/sec
For 8.99143 sec the speed is 52.3665 m/sec
For 9.09143 sec the speed is 53.0865 m/sec

For 9.19143 sec the speed is 53.8065 m/sec
For 9.29143 sec the speed is 54.5265 m/sec
For 9.39143 sec the speed is 55.2466 m/sec
For 9.49143 sec the speed is 55.9666 m/sec
For 9.59143 sec the speed is 56.6866 m/sec
For 9.69143 sec the speed is 57.4066 m/sec
For 9.79144 sec the speed is 58.1266 m/sec
For 9.89144 sec the speed is 58.8466 m/sec
For 9.99144 sec the speed is 59.5666 m/sec
For 10.0914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.1914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.2914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.3914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.4914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.5914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.6914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.7914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.8914 sec the speed is 60 m/sec
For 10.9914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.0914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.1914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.2914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.3914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.4914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.5914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.6914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.7914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.8914 sec the speed is 60 m/sec
For 11.9914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.0914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.1914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.2914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.3914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.4914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.5914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.6914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.7914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.8914 sec the speed is 60 m/sec
For 12.9914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.0914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.1914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.2914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.3914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.4914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.5914 sec the speed is 60 m/sec
For 13.6915 sec the speed is 60 m/sec
For 13.7915 sec the speed is 60 m/sec
For 13.8915 sec the speed is 60 m/sec
For 13.9915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.0915 sec the speed is 60 m/sec

For 14.1915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.2915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.3915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.4915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.5915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.6915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.7915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.8915 sec the speed is 60 m/sec
For 14.9915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.0915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.1915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.2915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.3915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.4915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.5915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.6915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.7915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.8915 sec the speed is 60 m/sec
For 15.9915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.0915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.1915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.2915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.3915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.4915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.5915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.6915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.7915 sec the speed is 60 m/sec
For 16.8915 sec the speed is 60 m/sec

Η χαρακτηριστική γραφική παράσταση του παραδείγματος είναι:



Εικόνα 4.8 Όπου στον άξονα x είναι ο χρόνος σε seconds και στον άξονα y είναι η ταχύτητα σε m/sec.

5. Επίλογος

Σε όλες τις προηγούμενες ενότητες εξετάστηκε η τροχιά του αυτοκινήτου. Εκτός της πορείας που διαγράφει ένα όχημα εξετάζονται και παράμετροι όπως η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η επιβράδυνση. Η γραμμή που διαγράφει το όχημα σε συνδυασμό με τις παραμέτρους του αποτελούν την τροχιά. Η έννοια της στην κινητική είναι αρκετά ευδιάκριτη, αντίθετα η τροχιά στην πορεία ενός οχήματος είναι πολύπλοκη. Η πολυπλοκότητά της δεν εμφανίζεται τη στιγμή που ένα όχημα κινείται σε μια ευθεία αλλά, όταν μετά την ευθεία ακολουθεί μια στροφή. Εκεί, υπολογίζεται η ταχύτητα που έχει αναπτύξει το όχημα και συγκρίνεται με την ταχύτητα που θα έπρεπε να έχει αναπτύξει.

Οι περιπτώσεις που διακρίνονται είναι τρεις:

1. το όχημα να έχει αναπτύξει πολύ μεγαλύτερη ταχύτητα απ' ό,τι θα έπρεπε
2. το όχημα να έχει αναπτύξει μικρότερη ταχύτητα απ' ό,τι θα έπρεπε
3. και τέλος να έχει αναπτύξει την ιδανική ταχύτητα.

Στην πρώτη περίπτωση το όχημα κινδυνεύει από υποστροφή ή υπερστροφή, δηλαδή να παρεκκλίνει της πορείας του.

Στη δεύτερη περίπτωση το όχημα θα χρειαστεί απλά να αναπτύξει ταχύτητα, αν και δεν συνιστάται εντός της στροφής.

Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση ο οδηγός έχει αναπτύξει την ιδανική ταχύτητα γεγονός που καθιστά δυνατή την διαγραφή της καλύτερης πορείας προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος εξόδου από τη στροφή. Βασική προϋπόθεση για την ανάπτυξη της ιδανικής ταχύτητας εντός στροφής είναι η επιβράδυνση του οχήματος.

Ένα όχημα σε ευθεία πορεία μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα που αναλογεί στην ισχύ του αυτοκινήτου και η δύναμη που αναπτύσσεται και είναι υπεύθυνη για την κίνησή του παράγεται από τη μηχανή.

Για παράδειγμα, όταν λέμε ότι το αυτοκίνητο έχει δύναμη μερικών ίππων αναφερόμαστε στην ισχύ της μηχανής του. Η οποία ισχύς των ίππων δίνεται από τον τύπο:

$$\text{Ιπποδύναμη} = \frac{\text{Έργο}}{\text{Χρόνος}} \quad (5.1)$$

Η ισχύς του αυτοκινήτου μπορεί να παράγει μια μέγιστη δύναμη, που αναλογεί σε μια μέγιστη ταχύτητα. Επομένως το αυτοκίνητο αδυνατεί να αναπτύξει ταχύτητα μεγαλύτερη από την καθορισμένη. Βέβαια, καθοριστικό ρόλο παίζει και η απόσταση που το αυτοκίνητο θα διανύσει. Αν η ευθεία είναι μόνο μερικά μέτρα το αυτοκίνητο δεν θα αναπτύξει την μέγιστη ταχύτητά του. Όμως, η ταχύτητα που θα αναπτύξει είναι δυνατόν να είναι μεγαλύτερη από αυτή που καθορίζει η στροφή. Τότε το όχημα επιβάλλεται να επιβραδύνει για να αποφύγει τις δυσάρεστες συνέπειες.

Η επιβράδυνση όπως και η επιτάχυνση είναι απόρροια του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα. Σύμφωνα με το νόμο όταν σε ένα σώμα ασκούνται δυνάμεις που η συνισταμένη τους είναι μεγαλύτερη του μηδενός τότε το σώμα επιταχύνει ενώ, όταν η συνισταμένη είναι αρνητική τότε το σώμα επιβραδύνει. Αντίθετα, όταν η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν το σώμα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα ή θα παραμένει ακίνητο.

Παρόλα αυτά, για την αντιμετώπιση μιας στροφής από ένα όχημα δεν βασίζεται μόνο στην ταχύτητα που έχει αναπτύξει.

Υπάρχουν τρεις φάσεις αντιμετώπισης.

1. Στην πρώτη φάση εμφανίζεται η ευθεία εισόδου της στροφής
2. Στη δεύτερη φάση είναι η αντιμετώπιση της κορυφής της στροφής
3. Και τέλος στην τρίτη φάση είναι η ευθεία εξόδου από την στροφή

Στην ευθεία εισόδου το όχημα κατευθύνεται προς την εξωτερική πλευρά του δρόμου. Αυτή η απόφαση δίνει τη δυνατότητα το όχημα στην κορυφή της στροφής να μετακινηθεί προς το εσωτερικό του δρόμου. Με αυτό τον τρόπο το όχημα διέρχεται από την κορυφή με την ιδανικότερη ταχύτητα. Στην συνέχεια ακολουθεί η ευθεία εξόδου. Επειδή το όχημα έχει μετατοπιστεί προς το εσωτερικό της στροφής, στην ευθεία εξόδου μετατοπίζεται ξανά προς την εξωτερική πλευρά του δρόμου.

Εκτός από την ταχύτητα που επηρεάζει την διέλευση του οχήματος από την στροφή ή την επιβράδυνση σε μια ευθεία πορεία, σ' ένα όχημα σημαντικό ρόλο έχει και το βάρος που μεταφέρει. Είναι χαρακτηριστικό το γεγονός πως όσο μεγαλύτερο είναι το βάρος του οχήματος τόσο μεγαλύτερη είναι αντίστασή του στην κίνηση. Το βάρος είναι ανάλογο της μάζας του οχήματος και φαίνεται από τον τύπο $B = mg$. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την ισχύ του οχήματος συνεπάγεται την άμεση εξάρτησή του από την κατασκευή του.

Ένα όχημα είναι φτιαγμένο από διάφορα μεταλλικά υλικά που συνδέονται και μεταμορφώνονται σε ένα όχημα, όπως ένα αυτοκίνητο. Το γεγονός ότι για ένα αυτοκίνητο το κύριο μέταλλο που το αποτελεί είναι το σίδηρο, θεωρούμε ότι η μάζα ενός τέτοιου οχήματος είναι περίπου 1000 kg.

Επίσης, για ορισμένες περιπτώσεις είναι απαραίτητο να αντιμετωπίσουμε το τιμόνι του αυτοκινήτου ως μια ξεχωριστή μάζα.

Για μια απλή αναπαράσταση της μάζας, το όχημα αντιμετωπίζεται ως μια μάζα συγκεντρωμένη στο κέντρο βάρους.

Αναπόσπαστο κομμάτι της κατασκευής ενός οχήματος είναι και το σύστημα επιβράδυνσης. Η ενέργεια που απορροφά ένα σύστημα επιβράδυνσης μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v^2) \quad (5.2)$$

Ο παραπάνω τύπος προέρχεται από το γεγονός ότι κατά την επιβράδυνση η τελική ταχύτητα είναι μικρότερη από την ταχύτητα που έχει αρχικά το όχημα. Δηλαδή, ισχύει:

$$v_0 > v \quad (5.3)$$

Η δύναμη που απορροφά ένα σύστημα επιβράδυνσης, μέχρι το όχημα να σταματήσει υπολογίζεται ως εξής:

$$K = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{t} \quad (5.4)$$

Όπου v_0 είναι η αρχική ταχύτητα του οχήματος.

Σ' ένα όχημα οι δυνάμεις που προκαλούν επιβράδυνση προέρχονται από έναν αριθμό πηγών. Αυτές είναι: η τριβή και αντίσταση του αέρα.

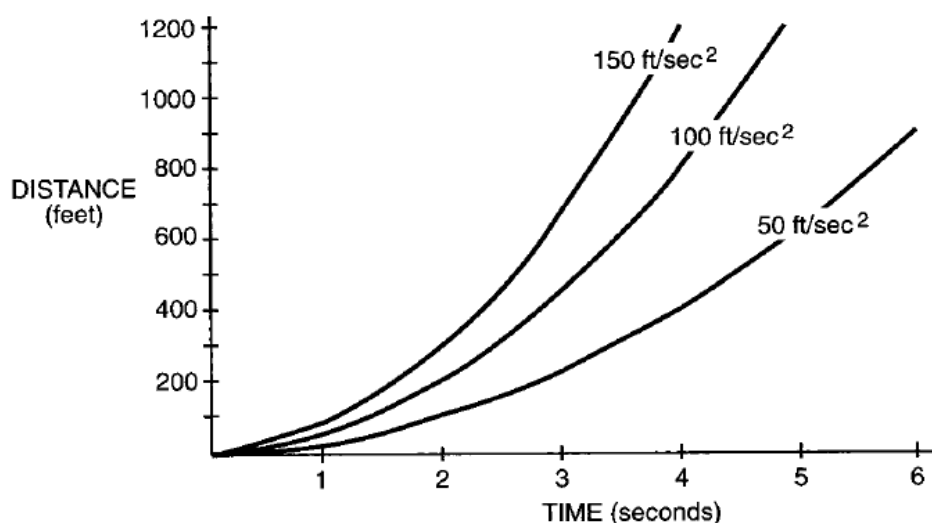
Η τριβή από την αντίσταση του αέρα εξαρτάται από την δυναμική πίεση και κατά συνέπεια είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας. Κατά τη διάρκεια μικρών ταχυτήτων είναι αμελητέα.

Η ενέργεια και οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω σ' ένα όχημα δεν είναι οι μόνες που καθορίζουν την ιδανική πορεία. Αναλύοντας την πορεία ενός οχήματος είδαμε ότι οι τροχοί είναι επίσης βασικά κομμάτια της κίνησης. Με την συμπεριφορά του, στην ευθεία έχοντας το σχήμα κυλίνδρου και στην στροφή το σχήμα κόλουρου κώνου, κατευθύνουν το όχημα. Το υλικό από το οποίο είναι κατασκευασμένοι, διαμορφώνει τις τριβές και σαν αποτέλεσμα συμβάλλει στην κίνηση.

Συνεπώς, η φυσική μας αναφέρει πως τα αυτοκίνητα αντιδρούν στις δυνάμεις. Επίσης, μας δείχνει πως η ενέργεια, η δύναμη και η ορμή είναι σημαντικές για τη σχέση αυτοκινήτου – πορείας και αναφερθήκαμε σε παραμέτρους όπως είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση και η επιβράδυνση που προσδιορίζουν την πορεία του. Με την μελέτη της σχέσης αυτοκινήτου πορείας σημειώνεται η παρακάτω παρατήρηση.

Παρατήρηση

Ένας τρόπος να επιλέξουμε ένα όχημα είναι η δύναμη του αυτοκινήτου και συγκεκριμένα πόσο γρήγορα το αυτοκίνητο επιταχύνει από (μηδέν) 0 σε 60 μίλια ή 96,56 χιλιόμετρα την ώρα.



Εικόνα 5.1 Διάγραμμα επιταχύνσεων.

Όπου 1 feet = 0,3048 m.

Συνεπώς έχουμε:

- $150 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} = 45,72 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$
- $100 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} = 30,48 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

- $50 \frac{\text{ft}}{\text{sec}^2} = 15,24 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

Η δύναμη του οχήματος δεν είναι βέβαια η εξωτερική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα σύμφωνα με τους τρεις νόμους του Νεύτωνα, αλλά η ενέργεια που παράγει το όχημα λόγω της μηχανής που διαθέτει και του επιτρέπει να κινείται.

Είναι εμφανές πως εκτός της ευθείας πορείας και της στροφής που μελετήθηκαν παραπάνω η τροχιά ενός οχήματος διαθέτει και την διέλευση από ένα συνδυασμό από ευθείας πορείας και στροφής. Με επιπλέον χαρακτηριστικά την ύπαρξη μη ομαλότητας του οδοστρώματος ή/και την κλίση γωνίας θ που μπορεί να έχει ο δρόμος δημιουργείται μια νέα διαδρομή με διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης από τα οχήματα.

Επίσης, είναι απαραίτητο να διατηρείται ο έλεγχος και η σταθερότητα του αυτοκινήτου.

Τα επιθυμητά χαρακτηριστικά των οχημάτων για την διατήρηση του ελέγχου και της σταθερότητας είναι:

1. Ελαχιστοποίηση της ανταπόκρισης σε ακραίες διαταραχές.
2. Διασφάλιση του ελέγχου των χαρακτηριστικών ανταπόκρισης.
3. Διασφάλιση των όχι μεγάλων ή ανεξέλεγκτων ασταθειών.
4. Παροχή ικανοποιητικής ροής πληροφοριών στον οδηγό.
5. Παροχή λογικών μέγιστων ορίων σε “g”, προειδοποίηση για ολίσθηση, αποδεκτή συμπεριφορά στην επιβράδυνση και ανάκτηση.
6. Παραμένοντας συνεπής στην συμπεριφορά με την αλλαγή των περιβαλλοντικών συνθηκών όπως η τραχύς επιφάνεια του αυτοκινήτου.

Μελλοντικά μπορεί να γίνει αναλυτική μελέτη που να προσδιορίζει την νέα αυτή πορεία. Στα οχήματα ωστόσο δεν θα σταματήσει η εξέλιξη. Νέα μηχανικά μέρη θα βελτιωθούν ή θα προστεθούν. Από τα νέα μέλη θα προκύψουν νέα δεδομένα για την πορεία των οχημάτων. Έτσι, στο μέλλον θα προκύψουν νέες μελέτες.

Βιβλιογραφία

1. Air resistance, <http://nautilus.fis.uc.pt>
2. Barry Parker. Isaac Newton School of Driving: Physics and Your Car. Εκδόσεις The Johns Hopkins University Press, Baltimore & London.
3. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 1: Weight Transfer, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
4. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 3: Basic Calculations, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
5. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 4: There is no such thing as centrifugal force, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
6. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 5: Introduction to the racing line, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
7. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 6: Speed and Horsepower, 1992. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
8. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 8: Simulating Car Dynamics with a computer program, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
9. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 9: Straights, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
10. Brian Beckman. Physics of Racing, Part 11: Braking, 1991. <http://phors.locost7.info/contents.htm>
11. Carl E. Mungan. Accelerating Around an Unbanked Curve, www.usna.edu/Users/physics/mungan/Publications
12. David Pitchard and David Burke. CS515 Project Fall 2001 Final Report. www.cs.ubc.ca
13. Jamie O'Dell & Angelica Delgadillo. Is it Really Your Car...Or Just The Corner? Απρίλιος 2002. www.challenge.nm.org
14. Rajesh Rajamani, Vehicle Dynamics and Control. Εκδόσεις Springer, έτος 2006.
15. Richard A.D. Hewko. The Racing Car Turn. <http://scitation.aip.org>
16. Thomas D. Gillespie. Fundamentals of Vehicle Dynamics, για την Society of Automotive Engineers, Inc.

17. William F. Milliken and Douglas L. Milliken. Race Car Vehicle Dynamics, για την Society of Automotive Engineers, Inc.
18. Αυτοκίνητο, Πως Λειτουργεί - Συντήρηση-Οδήγηση, 1^{ος} τόμος Ν.-Γ. ΠΑΡΙΚΟΥ Εκδόσεις «ΙΩΝ».
19. <http://en.wikipedia.org>
20. <http://el.wikipedia.org>
21. <http://users.otenet.gr>