



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
Πεδίο Άρεως, 38334 Βόλος, Τηλ.: +30 421 074090 - 94, Fax: +30 421 074090

Μεταπτυχιακή Εργασία

«ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΩΔΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΡΟΗ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΣΤΕΡΕΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ Ή
ΥΓΡΟ ΦΙΛΜ»

ΒΛΑΧΟΜΗΤΡΟΥ ΜΑΡΙΑ

Επιβλέπων Καθηγητής:

Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος

Επίκουρος Καθηγητής

Βόλος, 2006



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 5457/1
Ημερ. Εισ.: 29-06-2007
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ
620.106
ΒΛΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
1.1 Γενικά.....	3
1.2 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας.....	4
2 ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	5
2.1 Γενικά.....	5
2.2 Θεωρία τριπλής στιβάδας.....	6
2.3 Βασική ροή.....	7
2.4 Εξισώσεις ροής.....	8
2.4.1 Χαρακτηριστικές κλίμακες.....	8
2.4.2 Ροή αέρα πάνω από πλάκα.....	9
2.4.3 Ροή αέρα πάνω από εμπόδιο.....	11
2.4.4 Ροή αέρα πάνω από λεπτό φιλμ υγρού.....	13
3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ.....	17
3.1 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας.....	17
3.2 Μέθοδος ‘Pinching’.....	19
4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ.....	24
4.1 Γενικά.....	24
4.2 Συναρτήσεις βάσης.....	24
4.2.1 Συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange.....	25
4.2.2 Συναρτήσεις βάσης cubic splines.....	25
4.3 Οριακές συνθήκες.....	27
4.4 Σύγκριση συναρτήσεων βάσης lagrange και splines.....	33
4.5 Αλγόριθμοι επίλυσης.....	38
4.5.1 Αριθμητική επίλυση ροής αέρα πάνω από πλάκα ή εμπόδιο.....	38

4.5.2	Αλγόριθμος επίλυσης ροής πάνω από πλάκα ή εμπόδιο.....	40
4.5.3	Αριθμητική επίλυση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.....	40
4.5.4	Αλγόριθμος επίλυσης ροής πάνω από υγρό φιλμ.....	43
4.6	Βελτίωση αλγόριθμου.....	44
4.6.1	Μέθοδος GMRES.....	47
4.6.2	Εφαρμογή GMRES.....	50
4.7	Συμπεράσματα.....	53
5	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΡΟΗΣ ΑΕΡΑ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΠΛΑΚΑ.....	54
5.1	Γενικά.....	54
5.2	Ανάκτηση κυμάτων Tollmien-Schlichting.....	54
5.2.1	Εφαρμογή δελτοειδούς διαταραχής.....	54
5.2.2	Εφαρμογή περιοδικής διαταραχής.....	58
6	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΡΟΗΣ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΕΜΠΟΔΙΟ.....	61
6.1	Γενικά.....	61
6.2	Αποτελέσματα ροής πάνω από σταθερό εμπόδιο.....	61
6.3	Αποτελέσματα ροής πάνω από κοιλότητα μεταβλητού βάθους.....	63
6.4	Αποτελέσματα ροής πάνω από εμπόδιο μεταβλητού ύψους.....	67
6.5	Συμπεράσματα.....	79
7	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΡΟΗΣ ΑΕΡΑ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΛΕΠΤΟ ΦΙΛΜ ΥΓΡΟΥ.....	81
7.1	Γενικά.....	81
7.2	Ανάκτηση διεπιφανειακών κυμάτων.....	81
8	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	86
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	89

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάζεται η ευστάθεια στρωτού οριακού στρώματος αέρα που ρέει με υψηλό αριθμό Re πάνω από οριζόντια πλάκα στην οποία είτε υπάρχει κάποιο εμπόδιο, είτε έχει καλυφθεί από λεπτό υμένα υγρού. Η περίπτωση της ροής πάνω από λεπτό φιλμ συναντάται σε πτερύγια αεροσκαφών κάτω από συνθήκες βροχόπτωσης, καθώς και σε περιπτώσεις όπου λαμβάνει χώρα συμύκνωση ατμών π.χ εναλλάκτες θερμότητας. Για την προσομοίωση των παραπάνω ροών χρησιμοποιούνται τα μοντέλα που προτείνει η θεωρία τριπλής στιβάδας. Η αριθμητική επίλυση γίνεται με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων με διδιάστατες συναρτήσεις βάσης cubic splines, ενώ όπου απαιτείται χρονική ολοκλήρωση χρησιμοποιείται η Runge Kutta τέταρτης τάξης. Στα πλαίσια μελέτης των παραπάνω ροών γίνεται προσπάθεια να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα που προκύπτουν κατά την αριθμητική επίλυση. Οι αυξημένες απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο κατά την προσομοίωση της ροής αέρα πάνω από το υγρό φιλμ αντιμετωπίζονται μεταξύ άλλων με την εφαρμογή της επαναληπτικής μεθόδου GMRES για την επίλυση των εξισώσεων του αέρα. Τέλος, ανακτώνται τα αποτελέσματα της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας για τα κύματα Tollmien-Schlichting και τα διεπιφανειακά, και παράλληλα μελετάται ο μηχανισμός δημιουργίας και απόσπασης δινών ανακυκλοφορίας καθώς και οι συνθήκες εμφάνισης της αστάθειας Rayleigh.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αφορά στην αριθμητική μελέτη των ασταθειών που εμφανίζονται όταν αέριο ρεύμα με υψηλό αριθμό Re ρέει πάνω από στερεή επιφάνεια στην οποία είτε υπάρχει κάποιο εμπόδιο, είτε έχει σχηματιστεί εξαιτίας βροχόπτωσης ένα λεπτό φιλμ υγρού. Οι αστάθειες που παρατηρούνται σε τέτοιου είδους ροές είναι τα κύματα Tollmien-Schlichting, τα διεπιφανειακά κύματα και τα κύματα Rayleigh. Η αλληλεπίδραση του στρωτού οριακού στρώματος του αέρα με το εμπόδιο ή το φιλμ κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορεί να οδηγήσει σε μη γραμμικές συμπεριφορές, όπως είναι η αποκόλληση και ο σχηματισμός δινών ανακυκλοφορίας. Το κατάλληλο πλαίσιο για τη μελέτη της ευστάθειας οριακού στρώματος παρουσία κάποιου εμποδίου καθορίζεται από την θεωρία της τριπλής στιβάδας [1].

Η περίπτωση της ροής αέρα πάνω από λεπτό υγρό φιλμ έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές. Μια από τις πιο σημαντικές είναι η μελέτη της συμπεριφοράς πτερυγίων αεροσκαφών πάνω στα οποία έχει δημιουργηθεί λεπτός υμένας υγρού εξαιτίας βροχόπτωσης. Η περιοχή αυτή συγκεντρώνει μεγάλο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια επειδή έχει καταγραφεί ένας σημαντικός αριθμός ατυχημάτων κάτω από συνθήκες έντονης βροχόπτωσης. Πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σε εμπορικά πτερύγια στη NASA [2] έδειξαν την μείωση του συντελεστή ανύψωσης και την αύξηση της οπισθέλκουσας σε τέτοιες συνθήκες. Πιστεύεται ότι η παρουσία του υγρού φιλμ στο πάνω μέρος του πτερυγίου μπορεί να οδηγήσει σε πρόωρη αποκόλληση και κατά συνέπεια σε μείωση της ανυψωτικής δύναμης.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής είναι σε συσκευές όπου υπάρχει συμπύκνωση στρωτών υμένων, όπως είναι οι εναλλάκτες θερμότητας και οι συμπυκνωτήρες. Γενικά, η συμπύκνωση επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την λειτουργία συσκευών στις οποίες χρησιμοποιείται ως μέσο θέρμανσης κορεσμένος ατμός και συνεπώς παίζει καθοριστικό ρόλο στον βέλτιστο σχεδιασμό τους [3].

Τέλος, μια νέα εφαρμογή που φαίνεται να αποκτά όλο και περισσότερο ενδιαφέρον είναι η προσομοίωση ροών μέσα στο ανθρώπινο σώμα. Ως παράδειγμα αναφέρεται η μελέτη της ροής μέσα στο αναπνευστικό σύστημα και κυρίως στον βρογχικό αεραγωγό [4]. Κύριος σκοπός είναι η κατανόηση των διαταραχών που εμφανίζονται και οι οποίες είναι πιθανό να συνδέονται μεταξύ άλλων και με αστάθεια

της κανονικής εκπνοής του αέρα π.χ. ροχαλητό. Ένα άλλο παράδειγμα το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον από ιατρικής απόψεως είναι η ροή μέσα στις κυψελίδες των πνευμόνων στα τοιχώματα των οποίων υπάρχει εκ φύσεως πολύ λεπτό φιλμ υγρού το οποίο διευκολύνει την αναπνοή. Έχει διαπιστωθεί ότι είναι δυνατό σε βρέφη το υγρό αυτό να μην είναι επαρκές, γεγονός που οδηγεί σε ακραίες περιπτώσεις ακόμη και σε θάνατο. Τελευταία, γίνονται προσπάθειες προσομοίωσης τέτοιων ροών με σκοπό να βρεθεί τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος [5].

1.2 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αποτελείται συνολικά από οκτώ κεφάλαια. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή των τριών προβλημάτων που θα επιλυθούν αριθμητικά και παρουσιάζονται οι εξισώσεις που τα διέπουν, ενώ στο τρίτο παρουσιάζεται συνοπτικά η ανάλυση ευστάθειας για τις υπό εξέταση ροές όπως αυτή έχει προκύψει από την βιβλιογραφία.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται ανάπτυξη της μεθοδολογίας αριθμητικής επίλυσης, αναφέρονται αναλυτικά τα προβλήματα που προκύπτουν καθώς και τρόποι αντιμετώπισης τους. Στο κεφάλαιο 5 γίνεται ο έλεγχος της αξιοπιστίας του κώδικα που αναπτύχθηκε επιλύοντας τη ροή αέρα πάνω από οριζόντια πλάκα. Κατά την επίλυση αυτή ανακτώνται τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας για τα κύματα Tollmien-Schlichting. Τα αποτελέσματα της ροής αέρα πάνω από σταθερό και μεταβλητό εμπόδιο δίνονται στο έκτο κεφάλαιο όπου μελετάται η εμφάνιση και η απόσπαση δινών ανακυκλοφορίας καθώς και η σημασία της ύπαρξης αστάθειας Rayleigh. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων για γραμμικές διαταραχές και συγκρίνονται με τις προβλέψεις της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Τέλος, στο κεφάλαιο 8 παρουσιάζονται κάποιες κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα.

2. ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Γενικά

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εξετάζεται αριθμητικά η ροή αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από στερεή οριζόντια επιφάνεια στην οποία είτε έχει δημιουργηθεί ένα λεπτό φιλμ υγρού εξαιτίας βροχόπτωσης, είτε υπάρχει ένα στερεό εμπόδιο. Σε τέτοιου είδους ροές εμφανίζονται τρία είδη αστάθειας: τα κύματα Tollmien-Schlichting, τα διεπιφανειακά κύματα και τα κύματα Rayleigh. Στην περίπτωση ροών με απλά προφίλ ταχυτήτων οι διαταραχές που αναπτύσσονται πιο γρήγορα είναι τα κύματα Tollmien-Schlichting, το μήκος κύματος και η χρονική κλίμακα ανάπτυξης των οποίων καθορίζεται από την θεωρία τριπλής στιβάδας [6]. Αντίθετα, σε ροές με σημεία καμπής στο προφίλ ταχυτήτων κυριαρχούν τα κύματα Rayleigh που έχουν μεγαλύτερους ρυθμούς ανάπτυξης και το μήκος τους καθορίζεται από το πάχος του οριακού στρώματος. Και τα δύο αυτά είδη κυματώσεων είναι συναγωγικώς ασταθή, δηλαδή μεταφέρονται με τη βοήθεια της ροής μακριά από το σημείο εμφάνισής τους. Τέλος, τα διεπιφανειακά κύματα που αναπτύσσονται στην διεπιφάνεια του υγρού φιλμ και του αέρα έχουν μικρότερους ρυθμούς ανάπτυξης σε σχέση με τα κύματα Tollmien-Schlichting και Rayleigh και έχει αποδειχθεί, στα όρια ισχύος της γραμμικής θεωρίας, ότι μπορεί να είναι είτε συναγωγικώς, είτε απολύτως ασταθή, δηλαδή να παραμένουν και να αναπτύσσονται στο σημείο εμφάνισής τους [7].

Στα πλαίσια της μελέτης των παραπάνω ασταθειών έγινε προσπάθεια να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα που παρουσιάζονται κατά την αριθμητική επίλυση τέτοιου είδους ροών και παράλληλα να αναπτυχθεί μια μεθοδολογία που να παρέχει την επιθυμητή ακρίβεια αποτελεσμάτων απαιτώντας ταυτόχρονα τον ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό χρόνο.

Όπως είναι γνωστό, τα κύματα Tollmien-Schlichting εμφανίζονται ανεξάρτητα από την παρουσία του υγρού φιλμ ή του στερεού εμποδίου και για το λόγο αυτό η μελέτη τους γίνεται με επίλυση της ροής αέρα πάνω από επίπεδη οριζόντια πλάκα. Για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων επιλύεται σε κατάλληλη χρονική κλίμακα το πρόβλημα της ροής αέρα πάνω από λεπτό φιλμ υγρού το οποίο εξαιτίας της διάτμησης του αέρα τίθεται σε κίνηση. Τέλος, για την μελέτη των κυμάτων Rayleigh θεωρείται η ροή αέρα πάνω από στερεά εμπόδια ύψους συγκρίσιμου με αυτό του ιξώδους υποστρώματος ($h \sim LRe^{-5/8}$) ώστε να αναμένεται η εμφάνιση δινών

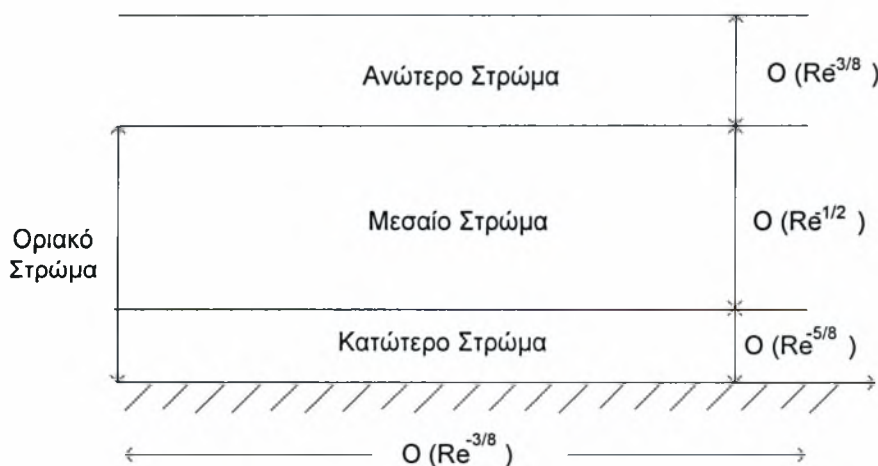
ανακυκλοφορίας και κατά συνέπεια η εμφάνιση σημείων καμψής στο προφίλ ταχυτήτων.

Έχει αποδειχθεί ότι το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη της ευστάθειας οριακού στρώματος παρουσία κάποιου εμποδίου καθορίζεται από τη θεωρία τριπλής στιβάδας [1] η οποία περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη παράγραφο.

2.2 Θεωρία τριπλής στιβάδας

Η θεωρία της τριπλής στιβάδας διατυπώθηκε από τους Stewartson και Messiter [6]. Η ανάγκη ανάπτυξης της προέκυψε από την αδυναμία της κλασσικής θεωρίας οριακού στρώματος να περιγράψει περιοχές της ροής με σημεία αποκόλλησης.

Η θεωρία αυτή περιγράφει την περιοχή γύρω από σημεία αποκόλλησης ή εμπόδια, με τη βοήθεια τριών στιβάδων των οποίων το μήκος κατά τη διεύθυνση της ροής είναι τάξης $O(Re^{-3/8}L)$, όπου L είναι το χαρακτηριστικό μήκος της επιφάνειας και Re ο αριθμός Reynolds της κυρίως ροής. Στην κάθετη διεύθυνση η ροή χωρίζεται σε τρία στρώματα: ένα ιξώδες υπόστρωμα πάχους τάξης $O(Re^{-5/8}L)$, ένα μεσαίο άτριβο αλλά στροβιλώδες στρώμα πάχους τάξης $O(Re^{-1/2}L)$ και από ένα ανώτερο άτριβο και αστρόβιλο στρώμα πάχους τάξης $O(Re^{-3/8}L)$. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται οι τρεις στιβάδες και οι κλίμακες τους.

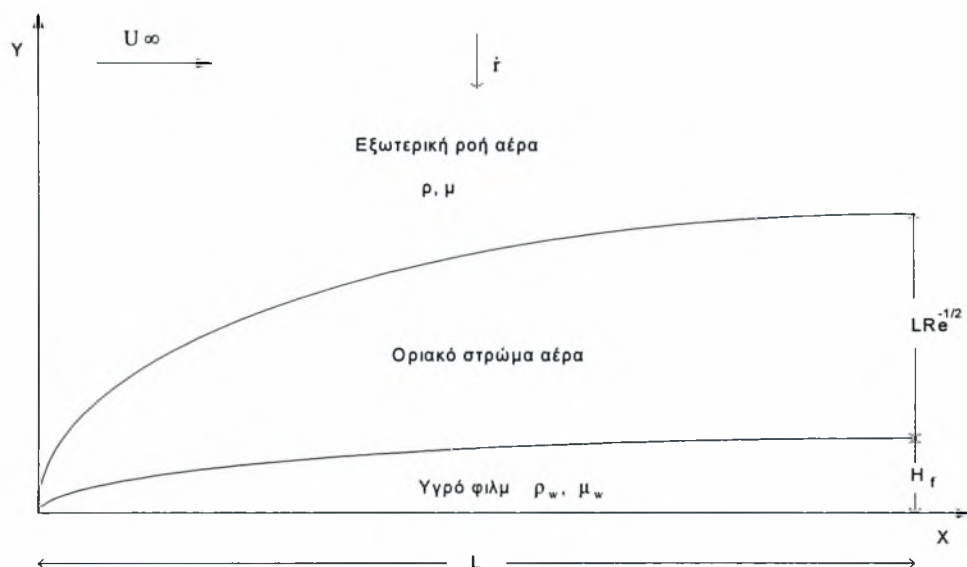


Σχήμα 2.1: Σχηματική απεικόνιση θεωρίας τριπλής στιβάδας.

Όπως έχει βρεθεί παλαιότερα, οι διαταραχές που μεγαλώνουν πιο γρήγορα στην περίπτωση ροής οριακού στρώματος είναι αυτές που το μέγεθος τους ακολουθεί την κλίμακα της τριπλής στιβάδας [1].

2.3 Βασική ροή

Μια σχηματική περιγραφή της ροής αέρα πάνω από λεπτό υμένα υγρού δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 2.2: Σχηματική απεικόνιση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.

Οι εξισώσεις της βασικής ροής για ροή αέρα πάνω από λεπτό υγρό φιλμ έχουν υπολογισθεί αριθμητικά και ασυμπτωτικά [8]. Στο όριο $\varepsilon = H_f / (L Re^{-1/2}) \rightarrow 0$, όπου H_f το πάχος του υγρού και $L Re^{-1/2}$ μια εκτίμηση του πάχους οριακού στρώματος, η λύση μέσα στο συνοριακό στρώμα αέρα παίρνει την μορφή Blasius. Στο υγρό φιλμ το πάχος και η ταχύτητα δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις [8]:

$$H_0(x) = x^{3/4} \sqrt{\frac{2}{0.332}} \quad (2.1)$$

$$u_0(x_0, y) = x^{1/4} z \sqrt{0.664} \quad (2.2)$$

όπου

$$z = \frac{y}{H_0(x)} \quad (2.3)$$

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων ροής στην αέρια φάση χρησιμοποιήθηκαν οι εξής κλίμακες [9]: L και $L Re^{-1/2}$ ως χαρακτηριστικά μήκη στις διευθύνσεις x και Y αντίστοιχα, U_∞ και $U_\infty Re^{-1/2}$ ως χαρακτηριστικές ταχύτητες στις διευθύνσεις x και Y αντίστοιχα. Στην υγρή φάση χρησιμοποιήθηκαν οι κλίμακες L και H_f ως χαρακτηριστικά μήκη στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα, και u_f , $u_f H_f / L$ ως χαρακτηριστικές ταχύτητες στις διευθύνσεις x και y αντίστοιχα.

2.4 Εξισώσεις ροής

2.4.1 Χαρακτηριστικές κλίμακες

Με βάση τις κλίμακες που προτείνει η θεωρία τριπλής στιβάδας αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια μήκους L , πάνω από την οποία διέρχεται συνοριακό στρώμα αέρα, η κατάλληλη τοπική κλίμακα για να περιγράψει την ευστάθεια της ροής σε μια δεδομένη θέση x_0 είναι η $X = \frac{x - x_0}{\lambda}$, όπου $\lambda = Re^{-3/8}L$. Είναι φανερό ότι επειδή η διαταραγμένη ροή μεταβάλλεται σε μια πολύ μικρή κλίμακα, $X \sim \lambda = LRe^{-3/8}$, σε σχέση με την κλίμακα της βασικής ροής, $x \sim L$, οι μεταβολές της βασικής ροής ως προς τη νέα κλίμακα X μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τη βασική ροή ως σχεδόν παράλληλη. Σύμφωνα με τους Smith et al. [1] το μικρότερο πάχος υγρού που μπορεί να προκαλέσει αποκόλληση στη ροή είναι αυτό που είναι συγκρίσιμο με το πάχος του ιξώδους υποστρώματος στον αέρα, δηλαδή $H_f \sim Re^{-5/8}L$. Έτσι, για την αδιαστατοποίηση των μεγεθών που καθορίζουν την ευστάθεια συνοριακού στρώματος χρησιμοποιείται ως χαρακτηριστικό μήκος στη διεύθυνση της ροής το χαρακτηριστικό μήκος των στιβάδων $\lambda = LRe^{-3/8}$ και στη κάθετη διεύθυνση το χαρακτηριστικό ύψος της κατώτερης στιβάδας $LRe^{-5/8}$. Ως χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής χρησιμοποιείται η ποσότητα εU_∞ , ενώ στη κάθετη διεύθυνση η $\varepsilon^3 U_\infty$. Στο υγρό ως χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής λαμβάνεται η $\frac{\mu}{\mu_w} \varepsilon U_\infty$, και στη κάθετη διεύθυνση η $\frac{\mu}{\mu_w} \varepsilon^3 U_\infty$. Για την αδιαστατοποίηση της πίεσης χρησιμοποιείται η ποσότητα $\varepsilon^2 \rho U_\infty^2$. Οι συγκεκριμένες κλίμακες προκύπτουν ως αποτέλεσμα της ισορροπίας μεταξύ των όρων συναγωγής, διάχυσης και πίεσης [1], [10]. Επίσης, προκύπτει ότι η μικρή μεταβλητή που χρησιμοποιείται στην ασυμπτωτική περιγραφή στην θεωρία τριπλής στιβάδας είναι ίση με $\varepsilon = \frac{H_f}{LRe^{-1/2}} = Re^{-1/8}$. Τέλος, η κατάλληλη χρονική κλίμακα για την μελέτη των κυμάτων Tollmien-Schlichting είναι ο χρόνος $T = \frac{\lambda}{\varepsilon U_\infty}$, ενώ για τα διεπιφανειακά κύματα η κατάλληλη κλίμακα είναι η $T = \frac{\lambda}{u_f} = \frac{\lambda}{\varepsilon \frac{\mu}{\mu_w} U_\infty}$, όπου u_f η χαρακτηριστική ταχύτητα στο υγρό.

2.4.2 Ροή αέρα πάνω από πλάκα

Για την εξαγωγή των αδιάστατων εξισώσεων που περιγράφουν τη ροή αέρα πάνω από πλάκα χρησιμοποιείται η χρονική κλίμακα που αντιστοιχεί στα κύματα Tollmien-Schlichting. Έτσι, οι εξισώσεις που προκύπτουν από τη θεωρία τριπλής στιβάδας, ισχύουν στο ιξώδες υπόστρωμα και διέπουν την ευστάθεια της συγκεκριμένης ροής είναι:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.4)$$

Ισοζύγιο x-ορμής:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.5)$$

ή με χρήση της ροικής συνάρτησης:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.6)$$

Για την ροική συνάρτηση είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad (2.7)$$

Ισοζύγιο Y-ορμής:

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (2.8)$$

Επίσης, ισχύει ο νόμος της αλληλεπίδρασης ο οποίος προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης Laplace στο ανώτερο υπόστρωμα του συνοριακού στρώματος, συνδέει την πίεση με το πάχος μετατόπισης, και εκφράζεται από τη σχέση:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{X-s} \quad (2.9)$$

Τέλος, στο όριο μεταξύ του ιξώδους υποστρώματος και του μεσαίου στρώματος η οριζόντια ταχύτητα θα πρέπει να είναι ίδια. Έτσι, ισχύει :

$$U(Y \rightarrow \infty) = A(X) \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) + \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) Y \quad (2.10)$$

όπου A το πάχος μετατόπισης εξαιτίας του ιξώδους υποστρώματος και το $\frac{\partial U_0}{\partial Y'}$

αναφέρεται στη βασική ροή που ισχύει στο ιξώδες υπόστρωμα και ορίζεται από την παρακάτω σχέση [8]:

$$\frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) = \frac{0.332}{\sqrt{x}} \quad (2.11)$$

Οι αρχικές συνθήκες δίνονται από τη λύση της βασικής ροής. Δηλαδή ισχύει:

$$P(X, T=0) = A(X, T=0) = 0 \quad (2.12)$$

$$U(X, T=0) = U_0 = Y \frac{\partial U}{\partial Y'} \Big|_{Y'=0} \quad \text{και} \quad \Psi(X, T=0) = \Psi_0 = \frac{\partial U}{\partial Y'} \Big|_{Y'=0} \quad (2.13)$$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι για $t=0$ στο σύστημα επιβάλλεται μια περιοδική ή στιγμιαία διαταραχή.

Τέλος, ως οριακές συνθήκες πάνω στην στερεή επιφάνεια ισχύουν οι συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείδυσης:

$$\text{Για } Y=0 \Rightarrow U = V = 0 \quad (2.14)$$

και στο όριο μεταξύ ιξώδους και μεσαίου στρώματος ισχύει:

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(Y \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \quad (2.15)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις υπάρχει εξάρτηση από τη μεταβλητή x που αναφέρεται στη βασική ροή. Η εξάρτηση υπεισέρχεται μέσω του όρου $\lambda = \frac{\partial U}{\partial Y'} \Big|_{Y'=0}$ ο οποίος

ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση (2.11). Θέλοντας να εξαλείψουμε την μεταβλητή x εισάγουμε τις μετασχηματισμένες μεταβλητές \bar{T} , \bar{X} , \bar{Y} , \bar{U} , $\bar{\Psi}$, \bar{P} , \bar{A} οι οποίες ορίζονται ως εξής [11]:

$$\bar{T} = \frac{T}{\lambda^{-3/2}}, \quad \bar{X} = \frac{X}{\lambda^{-5/4}}, \quad \bar{Y} = \frac{Y}{\lambda^{-3/4}} \quad (2.16)$$

$$\bar{U} = \frac{U}{\lambda^{1/4}}, \quad \bar{\Psi} = \frac{\Psi}{\lambda^{-1/2}}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\lambda^{1/2}}, \quad \bar{A} = \frac{A}{\lambda^{-3/4}} \quad (2.17)$$

Με βάση τις νέες μεταβλητές οι εξισώσεις ροής παίρνουν τελικά την παρακάτω μορφή:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (2.18)$$

Ισοζύγιο x -ορμής:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{T}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.19)$$

ή με χρήση της ροικής συνάρτησης:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{T}} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.20)$$

όπου:

$$\bar{U} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{Y}} \quad (2.21)$$

Ισοζύγιο Y-ορμής:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (2.22)$$

Νόμος αλληλεπίδρασης:

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \bar{A}}{\partial s} \frac{ds}{X-s} \quad (2.23)$$

Εξίσωση ταχυτήτων στο όριο μεταξύ ιξώδους μεσαίου στρώματος:

$$\bar{U}(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \bar{A} + \bar{Y} \quad (2.24)$$

Αρχικές συνθήκες:

$$\bar{P}(\bar{X}, \bar{T} = 0) = A(\bar{X}, \bar{T} = 0) = 0 \quad (2.25)$$

$$\bar{U}(\bar{X}, \bar{T} = 0) = \bar{Y} \text{ και } \bar{\Psi}(\bar{X}, \bar{T} = 0) = 1 \quad (2.26)$$

Οριακές συνθήκες:

$$\text{Για } \bar{Y} = 0 \Rightarrow \bar{U} = \bar{\Psi} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}}(\bar{Y} \rightarrow \infty) = 1 \quad (2.28)$$

2.4.3 Ροή αέρα πάνω από εμπόδιο

Αν θεωρήσουμε τη ροή αέρα πάνω από ένα εμπόδιο $f(X,T)$ τότε θα ισχύουν πάλι οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής που αναφέρθηκαν παραπάνω και εκφράζονται από τις σχέσεις 2.18 έως 2.22. Οι οριακές συνθήκες που ισχύουν στην περίπτωση αυτή είναι:

- Πάνω στο εμπόδιο, δηλαδή για $\bar{Y}=f(X,T)$, ισχύει:

$$\bar{U} = 0 \text{ και } \bar{V} = \frac{\partial f}{\partial \bar{T}} \quad (2.29)$$

- Στο αριστερό άκρο η ταχύτητα δίνεται από τη βασική λύση:

$$\bar{U} = \bar{Y} \quad (2.30)$$

- Στο πάνω άκρο, δηλαδή εκτός οριακού στρώματος ισχύει η σχέση:

$$\bar{U} = \bar{Y} + \bar{A}(\bar{X}, \bar{T}) \quad (2.31)$$

όπου \bar{A} το πάχος μετατόπισης.

Εισάγοντας στο πρόβλημα τον μετασχηματισμό Prandtl μέσω των μεταβλητών \bar{Y} και \bar{V} με $\bar{Y} = \bar{Y} - f(\bar{X}, \bar{T})$ και $\bar{V} = \bar{V} - \bar{U} \frac{\partial f}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{T}}$ οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής δεν μεταβάλλονται και διατηρούν την ίδια μορφή ως προς τις μετασχηματισμένες μεταβλητές \bar{V} και \bar{Y} . Αντίθετα, οι οριακές συνθήκες παίρνουν τη μορφή:

- Πάνω στο εμπόδιο ($\bar{Y} = 0$) ισχύει:

$$\bar{U} = \bar{V} = 0 \quad (2.32)$$

- Στο αριστερό άκρο η ταχύτητα δίνεται από τη βασική λύση:

$$\bar{U} = \bar{Y} \quad (2.33)$$

- Στο πάνω άκρο ισχύει η σχέση:

$$\bar{U} = \bar{Y} + \bar{A} + f \quad (2.34)$$

Για το πάχος μετατόπισης στο συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$\bar{A} = 0 \quad (2.35)$$

Η σχέση αυτή θεωρείται μια καλή παραδοχή ιδιαίτερα για ροή μέσα σε αγωγούς με συμμετρικά εμπόδια μικρού ύψους [12], [13].

Η εξίσωση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πίεσης προκύπτει από το ισοζύγιο της x-ορμής αν ληφθεί υπόψη η οριακή συνθήκη (2.34) που ισχύει στο άπειρο. Έτσι, συνδυασμός των εξισώσεων (2.20) και (2.34) για $\bar{A} = 0$ καταλήγει στη σχέση:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{X}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{T}} - (\bar{Y} + f) \frac{\partial f}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \quad (2.36)$$

Το εμπόδιο που βρίσκεται μέσα στη ροή όταν είναι σταθερό περιγράφεται από την εξίσωση:

$$f(\bar{X}, \bar{T}) = H \exp\left(\frac{-\bar{X}^2}{\Lambda}\right) \quad (2.37)$$

ενώ όταν επιτρέπουμε να μεταβάλλεται με το χρόνο χρησιμοποιείται η σχέση:

$$f(\bar{X}, \bar{T}) = H \sin^2\left(\frac{1}{2} \pi \omega \bar{T}\right) \exp\left(\frac{-\bar{X}^2}{\Lambda}\right) \quad (2.38)$$

όπου H είναι παράμετρος που αντιστοιχεί στο μέγιστο ύψος του με θετικές τιμές όταν πρόκειται για εμπόδιο και αρνητικές για κοιλότητα, και το Λ καθορίζει την έκταση του κατά τη διεύθυνση της ροής.

2.4.4 Ροή αέρα πάνω από λεπτό φιλμ υγρού

Κατά την επίλυση της ροής αέρα πάνω από λεπτό φιλμ υγρού μας ενδιαφέρει να επικεντρώσουμε στη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων. Επομένως, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη χρονική κλίμακα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις για το ιξώδες υπόστρωμα του οριακού στρώματος του αέρα:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.39)$$

Ισοζύγιο x-ορμής:

$$\frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.40)$$

Ισοζύγιο Y-ορμής:

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (2.41)$$

Επίσης, και στην περίπτωση αυτή ισχύει ο νόμος της αλληλεπίδρασης που εκφράζεται από τη σχέση 2.9 καθώς και η συνέχεια της οριζόντιας ταχύτητας στο όριο μεταξύ του ιξώδους υποστρώματος και του μεσαίου στρώματος που περιγράφεται από την εξίσωση 2.10.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του υγρού είναι σε αδιάστατη μορφή:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.42)$$

Ισοζύγιο x-ορμής:

$$\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2 \frac{\rho_w}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial X} - \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2}{Fr} \left(\frac{\rho_w}{\rho} - 1\right) \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.43)$$

Ισοζύγιο Y-ορμής:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.44)$$

Με οριακές συνθήκες πάνω στην στερεή επιφάνεια τις συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης. Δηλαδή:

$$\text{Για } y=0 \Rightarrow u = v = 0 \quad (2.45)$$

Στη διεπιφάνεια αέρα – υγρού $y = Y = H(X,T)$ ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

Συνέχεια ταχύτητας:

$$U = \frac{\mu}{\mu_w} u \quad (2.46)$$

$$V = \frac{\mu}{\mu_w} v \quad (2.47)$$

Συνέχεια οριζόντιας και κάθετης τάσης:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.48)$$

$$P - p = \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{\varepsilon^4 \sigma}{\rho \mu_f^2 H_f} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \quad (2.49)$$

Ισοζύγιο μάζας υγρού:

$$\frac{\partial H}{\partial T} + u \frac{\partial H}{\partial X} - v = 0 \quad (2.50)$$

Θεωρώντας το όριο $\mu/\mu_w \rightarrow 0$ η εξίσωση της ορμής (2.40) στον αέρα γίνεται:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.51)$$

και στο υγρό, λαμβάνοντας υπόψη ότι $(\mu/\mu_w)^2(\rho/\rho_w) \ll 1$, μπορούμε να αγνοήσουμε τους αδρανειακούς όρους οπότε η (2.43) παίρνει τη μορφή:

$$- \frac{\partial p}{\partial X} - \frac{(\mu/\mu_w)^2}{Fr} \left(\frac{\rho_w}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.52)$$

Στο όριο αυτό, οι οριακές συνθήκες στην διεπιφάνεια γράφονται:

$$U = u = 0, \quad V = v = 0 \quad \text{και} \quad P = p \quad (2.53)$$

Από την εξίσωση (2.52) με διπλή ολοκλήρωση και με χρήση της οριακής συνθήκης πάνω στην πλάκα προκύπτει:

$$u = \left(\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho - 1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \frac{y^2}{2} + c(x)y \quad (2.54)$$

$$\text{όπου } \overline{Fr} = \frac{Fr}{(\mu/\mu_w)^2} = O(1)$$

Για $y = H$ έχουμε:

$$c(x) = \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) H \quad (2.55)$$

και επειδή ισχύει η εξίσωση (2.48) τελικά:

$$c(x) = \frac{\partial U}{\partial Y} - \left(\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) H \quad (2.56)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας (2.42) παίρνουμε για την κάθετη ταχύτητα:

$$v = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) \frac{y^3}{6} - c'(x) \frac{y^2}{2} \quad (2.57)$$

Τελικά, με αντικατάσταση στη σχέση (2.50) προκύπτει για τη διεπιφάνεια:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} = & - \frac{\partial H}{\partial X} \left(- \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial Y} H \right) \\ & - \frac{H^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} - H \left(\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial H}{\partial X} \left(\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \right) \\ & - \frac{H^3}{6} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Prandtl $\bar{Y} = Y - H(X, T)$, με αντικατάσταση της πίεσης p από τη σχέση (2.49) και με χρήση της ροϊκής συνάρτησης Ψ προκύπτουν οι τελικές εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος.

Αέρια φάση

$$U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.59)$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}} \quad (2.60)$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{x-s} \quad (2.61)$$

$$U(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) (A(X) + \bar{Y} + H - H_0) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{Y}}(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \quad (2.63)$$

Υγρή φάση

$$\frac{\partial H}{\partial T} = - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{H^2}{2} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{H^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{H^3}{3We} \frac{\partial^3 H}{\partial X^3} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{H^3}{3} \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \quad (2.64)$$

$$\text{όπου } \frac{1}{We} = \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2 \frac{\varepsilon^4 \sigma}{\rho u_f^2 H_f}, \quad \frac{1}{Fr} = \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2 \frac{g H_f}{u_f^2}.$$

Διεπιφάνεια

$$\bar{Y} = 0: \quad U = \Psi = 0 \quad (2.65)$$

Αρχικές συνθήκες

$$A(T = 0) = P(T = 0) = 0 \quad (2.66)$$

$$U(T = 0) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y' = 0) \bar{Y} \quad (2.67)$$

$$H(T = 0) = H_0(T = 0) + H_D \quad (2.68)$$

Στην εξίσωση (2.68) H_D είναι η διαταραχή που επιβάλλεται και μπορεί να είναι στιγμιαία:

$$H_D = \delta \sqrt{\frac{W}{\pi}} \exp(-WX^2) \quad (2.69)$$

ή περιοδική:

$$H_D = \delta \sqrt{\frac{W}{\pi}} \exp(-WX^2) \cos(\omega T) \quad (2.70)$$

όπου το δ εκφράζει το μέγεθος της διαταραχής και το W είναι παράμετρος που καθορίζει την έκταση της κατά τη διεύθυνση της ροής.

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

3.1 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας

Για την γραμμική ανάλυση ευστάθειας της ροής αέρα πάνω από οριζόντια πλάκα ή υγρό λεπτό φιλμ θεωρούμε τις παρακάτω μικρές διαταραχές στη βασική ροή:

$$H = H_0 + \delta H_1 E \quad (3.1)$$

$$U = U_0 + \delta U_1 E \quad (3.2)$$

$$P = \delta P_1 E \quad (3.3)$$

$$\Psi = \frac{\partial U_0}{\partial \bar{Y}} \frac{\bar{Y}^2}{2} + \delta \Psi_1 E \quad (3.4)$$

$$A_{\text{new}} = \delta A_1 E \quad (3.5)$$

όπου $\delta \ll 1$ το πλάτος της διαταραχής, H_1 , U_1 , P_1 , Ψ_1 , A_1 συναρτήσεις του \bar{Y} και $E = e^{i(kX - \omega t)}$.

Με γραμμικοποίηση των εξισώσεων (2.59) έως (2.68) και λαμβάνοντας το όριο $\mu/\mu_w \rightarrow 0$ για μηδενική ταχύτητα διεπιφάνειας προκύπτει η σχέση διασποράς για τα κύματα Tollmien-Schlichting [7]:

$$\frac{dA_i}{dz} + \frac{(kH_0^2 A_2)^{1/3}}{A_2^2} i^{1/3} k H_0 \int_0^z A_i dt = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{όπου: } z = -\frac{H_0 \omega i^{1/3}}{(kH_0^2 A_2)^{2/3}} \quad \text{και} \quad A_2(x_0) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(y=0)$$

Με γραμμικοποίηση των εξισώσεων (2.59) έως (2.68) στο όριο $\mu/\mu_w \rightarrow 0$ και απαιτώντας την εξισορρόπηση της διάτμησης όπως αυτή υπολογίζεται στην υγρή και την αέρια φάση προκύπτει η σχέση διασποράς για τα διεπιφανειακά κύματα η οποία, σε συμφωνία με τον Timoshin [10] και με τους Πελεκάση και Τσαμόπουλο [7], εκφράζεται από την εξίσωση:

$$\omega = kH_0 \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} - \frac{iH_0^3 k^4}{3We} - i \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} k^2 \frac{H_0^3}{3} + \frac{H_0^2 \left(-\left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right) A_i(z=0) \left(ik \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)^{2/3} k|k| - \frac{2}{3} \left(ik \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right) H_0 k |k| A_i'(z=0)}{|k| \left(ik \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)^{1/3} \int_0^0 A_i dz + A_i'(z=0) \left(\left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)^2} \quad (3.7)$$

όπου Ai η συνάρτηση Airy και Ai' η πρώτη παραγωγός της.

Η επίλυση της εξίσωσης διασποράς γίνεται με τη βοήθεια της μεθόδου 'Pinching' η οποία περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.2. Με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής, από την σχέση (3.6) προκύπτει ότι τα κύματα Tollmien – Schlichting είναι συναγωγικώς ασταθή, δηλαδή μεταφέρονται με την ροή μακριά από το σημείο εμφάνισής τους. Αντίθετα, η σχέση διασποράς των διεπιφανειακών κυμάτων προβλέπει ότι τα κύματα αυτά μπορεί να είναι είτε συναγωγικώς, είτε απολύτως ασταθή, δηλαδή να παραμένουν στο σημείο εμφάνισής τους και να μεγαλώνουν τοπικά. Το είδος της αστάθειας στην περίπτωση των διεπιφανειακών κυμάτων καθορίζεται από το μέγεθος των επιφανειακών και βαρυτικών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές [7].

Η ύπαρξη της αστάθειας Rayleigh σχετίζεται με την εμφάνιση σημείων καμπής στο βασικό προφίλ ταχυτήτων. Μπορεί να εμφανιστεί τόσο σε ατριβείς όσο και σε ιξώδεις ροές και παρουσιάζει αρκετά μεγαλύτερους ρυθμούς ανάπτυξης σε σχέση με τα κύματα Tollmien-Schlichting.

Η αστάθεια Rayleigh για ατριβείς ροές περιγράφεται από τα κριτήρια Rayleigh και Fjørtoft [14]. Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση αυτής της αστάθειας είναι η ύπαρξη σημείου καμπής στο βασικό προφίλ ταχύτητας. Το κριτήριο Fjørtoft είναι πιο αυστηρό και απαιτεί ως αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση αστάθειας Rayleigh να ισχύει κάπου μέσα στη ροή η σχέση $U''(U - U_s) < 0$, όπου z_s είναι σημείο για το οποίο $U'' = 0$ και $U_s = U(z_s)$. Κανένα, όμως, από τα δύο αυτά κριτήρια δεν είναι ικανό για την ύπαρξη αστάθειας Rayleigh αλλά απλά μια ένδειξη ότι είναι πιθανή η εμφάνιση της.

Στην περίπτωση των ιξωδών ροών, η ανάλυση ευστάθειας καταλήγει στις γνωστές εξισώσεις Orr Somerfield [14]. Ειδικότερα, για ροές οριακού στρώματος με προφίλ τύπου Blasius έχει αποδειχθεί ότι το κριτήριο Fjørtoft αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη αστάθειας Rayleigh [15]. Για προβλήματα που περιγράφονται από τη θεωρία τριπλής στιβάδας η αστάθεια Rayleigh αφορά πολύ μικρότερα μήκη κύματος σε σχέση με το χαρακτηριστικό μήκος της ιξώδους στοιβάδας, $LRe^{-3/8}$, τα οποία αναπτύσσονται σε χρονικές κλίμακες πολύ πιο γρήγορες από αυτές τις τριπλής στοιβάδας, $LRe^{-1/4}/U_\infty$. Έτσι, για το συγκεκριμένο πρόβλημα ροής πάνω από εμπόδιο η αστάθεια Rayleigh αφορά διαταραχές με μικρότερα μήκη κύματος από το χαρακτηριστικό μήκος του εμποδίου αλλά μεγαλύτερα από τη

στιβάδα Stokes [12]. Η στιβάδα Stokes είναι μια περιοχή πολύ κοντά στο εμπόδιο στην οποία η επίδραση του ιξώδους είναι πολύ σημαντική. Με γραμμική ανάλυση ευστάθειας στις εξισώσεις τριπλής στιβάδας οι Tutty & Cowley κατέληξαν στη σχέση διασποράς για ροές πάνω από εμπόδια [12], η οποία είναι:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - u_{oy}}{(u_o - c)^2} dy - \frac{1}{c} = 0 \quad (3.8)$$

όπου c η φασική ταχύτητα της διαταραχής και u_o η βασική λύση.

Από την ανάλυση αυτή των Tutty & Cowley για το συγκεκριμένο πρόβλημα προέκυψε ότι ο ρυθμός αύξησης της αστάθειας Rayleigh είναι ανάλογος του κυματαριθμού καθώς $k \rightarrow \infty$ και ότι η εμφάνιση της πιθανό να υποδηλώνει την παρουσία κάποιου μηχανισμού σπασίματος δινών ανακυκλοφορίας.

3.2 Μέθοδος 'Pinching'

Η μέθοδος Pinching χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση της ύπαρξης αστάθειας και, σε περίπτωση που όντως υπάρχει αστάθεια, για το χαρακτηρισμό της ως απόλυτη ή συναγωγική. Η διερεύνηση του χαρακτήρα της αστάθειας, σχηματικά, αποτελείται από δύο μέρη τα οποία σχετίζονται με την επίλυση της σχέσης διασποράς που προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας που αναφέρθηκε παραπάνω [16].

Αρχικά, ο κυματαριθμός k θεωρείται πραγματικός αριθμός, ενώ η συχνότητα ω μιγαδικός (χρονική ανάλυση). Αν από την επίλυση της σχέσης διασποράς προκύψουν κάποιες θετικές τιμές για το ω_i , τότε η ροή χαρακτηρίζεται ως ασταθής. Για το χαρακτηρισμό της αστάθειας ως απόλυτης ή συναγωγικής τόσο ο κυματαριθμός όσο και η συχνότητα λαμβάνονται ως μιγαδικοί αριθμοί. Στόχος είναι η εύρεση του μιγαδικού αριθμού k_0 στον οποίο αντιστοιχεί μηδενική ταχύτητα πακέτου, δηλαδή

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = 0. \text{ Η μιγαδική συχνότητα } \omega_0 = \omega(k_0) \text{ ονομάζεται απόλυτη συχνότητα και}$$

παρέχει το ρυθμό ανάπτυξης του κυματοπακέτου που παραμένει κοντά στο σημείο επιβολής της διαταραχής. Τα κύματα στα οποία αντιστοιχεί ω_{i0} αρνητικό ονομάζονται συναγωγικώς ασταθή και χαρακτηρίζουν διαταραχές που ταξιδεύουν μαζί με την ροή μακριά από το σημείο γέννησής τους, ενώ τα κύματα με θετικό ω_{i0} είναι απόλυτως ασταθή και μεγαλώνουν τοπικά.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούν να επεξηγηθούν θεωρητικά με τη βοήθεια του μοντέλου Ginzburg-Landau το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g(k) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{i}{2} f(k) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + is(k)(R - R_c) \psi = \delta(x) \delta(t) \quad (3.9)$$

όπου $g(k) = \omega_k$ είναι μια πραγματική και σταθερή ταχύτητα κυματοπακέτου, $f(k) = \omega_{kk}$ και $s(k) = \omega_R$ μιγαδικές σταθερές με $\omega_{kk,i} < 0$ και δ η δελταειδής συνάρτηση. Έχει αποδειχθεί ότι το απλό αυτό μοντέλο προκύπτει στο πλαίσιο γραμμικής ανάλυσης πολλών προβλημάτων αναπτυσσόμενης ροής, όπως το υπόψη πρόβλημα, με κατάλληλη διαμόρφωση της χωρικής μεταβλητής [17]. Πρόκειται δε για το γραμμικό μέρος της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger που περιγράφει την ασθενώς μη γραμμική συμπεριφορά κυμάτων με κυματαριθμό k . Το μοντέλο αυτό περιγράφει αρκετά φαινόμενα που συμβαίνουν στο πλαίσιο ασθενών διαταραχών.

Με βάση τις ιδιότητες της σχέσης διασποράς στο φασματικό επίπεδο (k, ω) έχουν εξαχθεί μαθηματικά κριτήρια για τον καθορισμό του είδους της αστάθειας [16]. Η εξίσωση (3.9) μπορεί να λυθεί με την μέθοδο του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier στον χώρο και τον χρόνο. Έτσι, ο διπλός μετασχηματισμός Fourier $\hat{\psi}$ της ψ στο επίπεδο (k, ω) δίνεται από την σχέση

$$\hat{\psi} = \frac{1}{-i\omega + ikg(k) + if(k)k^2/2 + is(k)(R - R_0)} \quad (3.10)$$

Στην παραπάνω σχέση ο παρανομαστής είναι κατ' ουσία η σχέση διασποράς, $D(k, \omega(k))$, και αν για $R = R_0$ ισχύει $\omega = 0$ οι συναρτήσεις $g(k)$, $f(k)$ δίνουν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο του ω ως προς k , ενώ η $s(k)$ δίνει την παράγωγο του ω ως προς R . Εκφράζοντας την συνάρτηση ψ σαν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $\hat{\psi}$ παίρνουμε το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{FL} \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{D[k, \omega; R]} d\omega dk \quad (3.11)$$

Η καμπύλη L στο μιγαδικό επίπεδο της συχνότητας είναι μια ευθεία οριζόντια γραμμή πάνω από όλες τις ιδιομορφίες της προς ολοκλήρωση συνάρτησης ώστε να ισχύει $\psi(x, t) = 0$ για κάθε x όταν $t < 0$. Η καμπύλη F στο μιγαδικό επίπεδο του κυματαριθμού λαμβάνεται αρχικά κατά μήκος του πραγματικού άξονα. Αν θεωρήσουμε ότι η σχέση διασποράς μπορεί να πάρει τη μορφή $D[\omega, k] = 0 \rightarrow \omega = \omega(k)$, τότε μετά από υπολογισμό υπολοίπου (residue calculation) στο επίπεδο του ω , η συνάρτηση ψ είναι ίση με:

$$\psi(x, t) = -\frac{i}{2\pi} H(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(kx - \omega(k)t)}}{D[k, \omega(k); R]} dk \quad (3.12)$$

όπου $H(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ασυμπτωτικά για $t \rightarrow \infty$ και για δεδομένο x/t με τη μέθοδο steepest descent [18]. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει:

$$\psi(x,t) \propto -(2\pi)^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{e^{i[k_*x - \omega(k_*)t]}}{\left[\frac{\partial D}{\partial \omega} [k_*, \omega(k_*)] \left[\frac{d^2 \omega}{dk^2} (k_*) t \right] \right]^{1/2}} \quad (3.13)$$

όπου k_* ο κυματαριθμός για τον οποίο ισχύει :

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} (k_*) = \frac{x}{t} \quad (3.14)$$

Με τον τρόπο αυτό η συνάρτηση ψ παίρνει τη μορφή ενός κυματοπακέτου στο φυσικό επίπεδο (x,t) . Κατά μήκος της ακτίνας x/t σε κάθε κυματοπακέτο επικρατεί ο μιγαδικός κυματαριθμός για τον οποίο η πραγματική ταχύτητα πακέτου ικανοποιεί τη σχέση (3.14). Ο χρονικός ρυθμός αύξησης κατά μήκος της κάθε ακτίνας είναι $\sigma = \omega_i(k_*) - (x/t)k_{*,i}$.

Στα περισσότερα προβλήματα ο χρονικός ρυθμός αύξησης $\omega_i(k)$, όπου k πραγματικός, αποκτά μια μέγιστη τιμή $\omega_{i_{\max}} \equiv \omega_i(k_{\max})$ για την πραγματική τιμή του k για την οποία ισχύει $\frac{\partial \omega_i}{\partial k} (k_{\max}) = 0$. Αυτός ο μέγιστος ρυθμός αύξησης

$\omega_{i_{\max}}$ παρατηρείται στο κυματοπακέτο $\psi(x,t)$ κατά μήκος της συγκεκριμένης ακτίνας

$\frac{x}{t} = \frac{\partial \omega_i}{\partial k} (k_{\max})$ και αντιστοιχεί στη μέγιστη δυνατή τιμή του σ . Είναι φανερό ότι :

- Αν $\omega_{i_{\max}} > 0$ η ροή είναι γραμμικά ασταθής
- Αν $\omega_{i_{\max}} < 0$ η ροή είναι γραμμικά ευσταθής.

Για την διάκριση της αστάθειας σε συναγωγική και σε απόλυτη είναι απαραίτητο να διερευνηθεί η συμπεριφορά με το χρόνο του κύματος με κυματαριθμό k_0 που αντιστοιχεί στην ακτίνα $x/t=0$. Αυτός ο κυματαριθμός έχει μηδενική ταχύτητα

πακέτου $\frac{\partial \omega}{\partial k} (k_0) = 0$. Ο απόλυτος ρυθμός αύξησης ορίζεται ως $\omega_{0,i} \equiv \omega_i(k_0)$ και

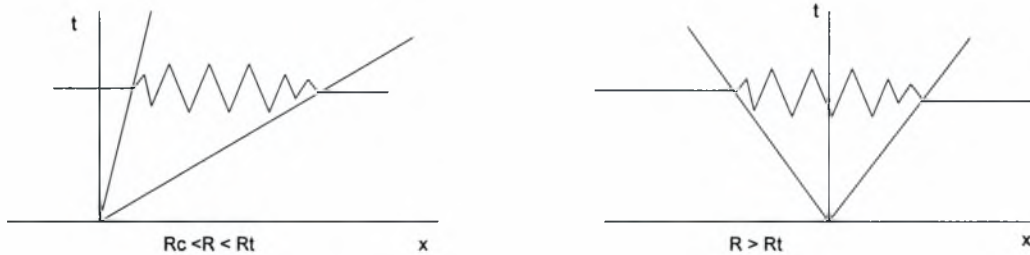
είναι αυτός που χαρακτηρίζει την χρονική εξέλιξη του κύματος με κυματαριθμό k_0 που παρατηρείται σε μια δεδομένη θέση στο όριο $t \rightarrow \infty$. Το πρόσημο του $\omega_{0,i}$ είναι

αυτό που καθορίζει τον απόλυτο ή τον συναγωγικό χαρακτήρα της αστάθειας. Έτσι:

- Αν $\omega_{0,i} > 0$ η ροή είναι απόλυτα ασταθής

- Αν $\omega_{0,i} < 0$ η ροή είναι συναγωγικά ασταθής.

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται γραφικά οι περιπτώσεις της συναγωγικής και της απόλυτης αστάθειας που προκύπτουν από την ανάλυση της εξίσωσης (3.9) για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου R.



Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση συναγωγικής και απόλυτης αστάθειας.

Στην περίπτωση που στο σύστημα επιβάλλεται μια περιοδική διαταραχή συχνότητας ω_f στο σημείο $x=0$ και με έναρξη τη στιγμή $t=0$, η εξίσωση (3.9) θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + g(k) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{i}{2} f(k) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + is(k)(R - R_c) \Psi = \delta(x) H(t) e^{-i\omega_f t} \quad (3.15)$$

Η επίλυση της εξίσωσης αυτής με τον τρόπο που αναφέρθηκε παραπάνω δίνει:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) \propto & -(2\pi)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \frac{e^{i[k_*(x-\omega(k_*)t)]}}{[\omega(k_*) - \omega_f] \frac{\partial D}{\partial \omega} [k_*, \omega(k_*)] \left[\frac{d^2 \omega}{dk^2} (k_*) t \right]^{1/2}} + \\ & i \frac{e^{i[k^+(\omega_f)x - \omega_f t]}}{\frac{\partial D}{\partial k} [k^+(\omega_f), \omega_f; R]} H(x) - i \frac{e^{i[k^-(\omega_f)x - \omega_f t]}}{\frac{\partial D}{\partial k} [k^-(\omega_f), \omega_f; R]} H(-x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή η λύση αποτελείται από δύο μέρη: μια παροδική κατάσταση που είναι όμοια με αυτή που ισχύει για τη στιγμιαία δελτοειδή διαταραχή και που περιγράφηκε παραπάνω και από μια ‘μόνιμη κατάσταση’ που είναι αποτέλεσμα της επιβολής της διαταραχής με συχνότητα ω_f και η οποία διατηρείται χρονικά. Αποτέλεσμα της δεύτερης κατάστασης είναι η εμφάνιση κυμάτων που αυξάνονται ή μειώνονται χωρικά. Αν η ροή είναι απόλυτα ασταθής η παροδική κατάσταση δεν θα απομακρυνθεί και επομένως, αργά ή γρήγορα, θα κυριαρχήσει επί της μόνιμης κατάστασης. Αν όμως η ροή είναι συναγωγικά ασταθής, η μεταβατική κατάσταση θα αποχωρήσει και στη ροή θα επικρατήσουν τα χωρικά μεταβαλλόμενα κύματα της μόνιμης κατάστασης. Μάλιστα, το μήκος κύματος αυτών

των κυμάτων δίνεται από το πραγματικό μέρος k_r του μιγαδικού κυματαριθμού $k=k_r+ik_i$ που προκύπτει από τη σχέση διασποράς $k=f(\omega_r, \text{παράμετροι})$ με ω_r πραγματικό αριθμό (χωρική ανάλυση). Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι οι χωρικά αυξανόμενες διαταραχές έχουν σημασία μόνο στη περίπτωση συναγωγικής αστάθειας. Τα παραπάνω θα διερευνηθούν στο πλαίσιο της αριθμητικής επίλυσης των προβλημάτων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

4.1 Γενικά

Έχοντας ως βάση τα προβλήματα ροής που περιγράφηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί μια αριθμητική μεθοδολογία που θα λαμβάνει υπόψη τις ιδιαιτερότητες των ροών αυτών και θα παρέχει την επιθυμητή ακρίβεια στον ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό χρόνο.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και αρχικά έγινε μια σύγκριση της αποτελεσματικότητας των συναρτήσεων βάσης quadratic lagrange και των cubic splines για την επίλυση της ροής αέρα πάνω από οριζόντια πλάκα. Από την σύγκριση προέκυψε η αδυναμία των συναρτήσεων lagrange να επιλύσει τέτοιου είδους ροές.

Στη συνέχεια, η μελέτη επικεντρώθηκε στην αντιμετώπιση των προβλημάτων που παρουσιάζονται κατά την αριθμητική επίλυση τέτοιων ροών. Ένα βασικό πρόβλημα που εμφανίζεται είναι η ανάντη επίδραση εξαιτίας της χρήσης οριακής συνθήκης στο δεξί άκρο της περιοχής προσομοίωσης. Η εξάλειψη της ανάντη επίδρασης πραγματοποιήθηκε εισάγοντας ελεύθερες οριακές συνθήκες.

Τέλος, διαπιστώθηκε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις προσομοίωσης της ροής του οριακού στρώματος αέρα που αλληλεπιδρά με υγρό φιλμ απαιτούνται πολύ μεγάλοι υπολογιστικοί χρόνοι. Εντοπίστηκε ότι η μεγαλύτερη κατανάλωση χρόνου γίνεται κατά την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που αντιστοιχούν στην αέρια φάση. Στα πλαίσια της προσπάθειας ελάττωσης του απαιτούμενου χρόνου κατά το μέγιστο δυνατό εφαρμόστηκαν δύο βήματα. Το πρώτο είναι η αποφυγή κατασκευής και αντιστροφής της ιακωβιανής του συστήματος σε κάθε χρονικό βήμα και το δεύτερο είναι η επίλυση του συστήματος επαναληπτικά με τη μέθοδο GMRES. Και οι δυο αυτοί τρόποι συνέβαλλαν στην σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

4.2 Συναρτήσεις βάσης

Κατά την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων παίζει η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσεων. Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται συνοπτικά οι συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange και cubic splines και στην παράγραφο 4.4 γίνεται σύγκριση τους για την επίλυση προβλημάτων όπως αυτά που εξετάζονται στην παρούσα εργασία.

4.2.1 Συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange

Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο e με συντεταγμένες μεταξύ x_e και x_{e+1} οι συναρτήσεις quadratic lagrange δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \psi_2 &= (1+\xi)(1-\xi) \\ \psi_3 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου $\xi = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{x_{e+1} - x_e}$ μετασχηματισμένη μεταβλητή ξ που παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1 σε κάθε στοιχείο.

Οι συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange, όπως όλες οι συναρτήσεις της κατηγορίας lagrange, έχουν τις εξής ιδιότητες σε ένα στοιχείο e :

$$\psi_i^e(\xi_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^3 \psi_i^e(\xi) = 1$$

Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange οι μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται με μια σχέση της μορφής:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i \psi_i\tag{4.2}$$

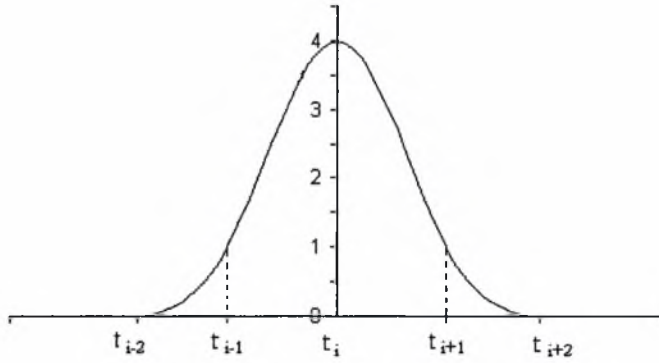
όπου i οι τρεις κόμβοι σε κάθε στοιχείο, u_i είναι οι τιμές της παραμέτρου που πρέπει να υπολογιστούν και ψ_i οι συναρτήσεις βάσης.

4.2.2 Συναρτήσεις βάσης cubic splines

Οι συναρτήσεις βάσης B-cubic splines μιας διάστασης είναι πολυώνυμα τρίτου βαθμού με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Για την παρεμβολή μίας συνάρτησης η οποία είναι γνωστή σε $N+1$ σημεία απαιτείται η εισαγωγή δυο βοηθητικών σημείων οπότε αν χρησιμοποιούμε N στοιχεία έχουμε συνολικά $N+3$ άγνωστους συντελεστές, $u_{c,j}$, όσοι και οι κόμβοι του πλέγματος. Όλοι οι υπολογισμοί βασίζονται σε συντελεστές της μεταβλητής που αντιστοιχούν στους κόμβους του πλέγματος. Έτσι, για παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας μεταβλητής στη θέση $t \in [t_i, t_{i+1}]$ αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N+3} u_{c,j} B_j(t)\tag{4.3}$$

όπου B_j οι συναρτήσεις βάσης cubic splines και u_c οι συντελεστές splines της μεταβλητής. Οι συναρτήσεις βάσεις cubic splines απεικονίζονται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης cubic splines σε μια διάσταση.

Από το σχήμα είναι φανερό ότι κάθε μια από τις τέσσερις συναρτήσεις είναι δυο φορές συνεχής και παραγωγίσιμη, ότι σε κάθε στοιχείο επιβιώνουν τέσσερις συναρτήσεις βάσης, ενώ σε κάθε κόμβο τρεις. Η ακριβής μορφή των B-cubic splines είναι [19]:

$$B_i(t_j) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t - t_{i-2})^3, & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3, & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t)^2 - 3(t_{i+1} - t)^3, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ (t_{i+2} - t)^3, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ 0, & t \notin [t_{i-2}, t_{i+2}] \end{cases} \quad (4.4)$$

και ισχύει:

$$B_i(t_j) = \begin{cases} 4, & j = 1 \\ 1, & j = i \pm 1 \\ 0, & j = i \pm 2 \end{cases} \quad (4.5)$$

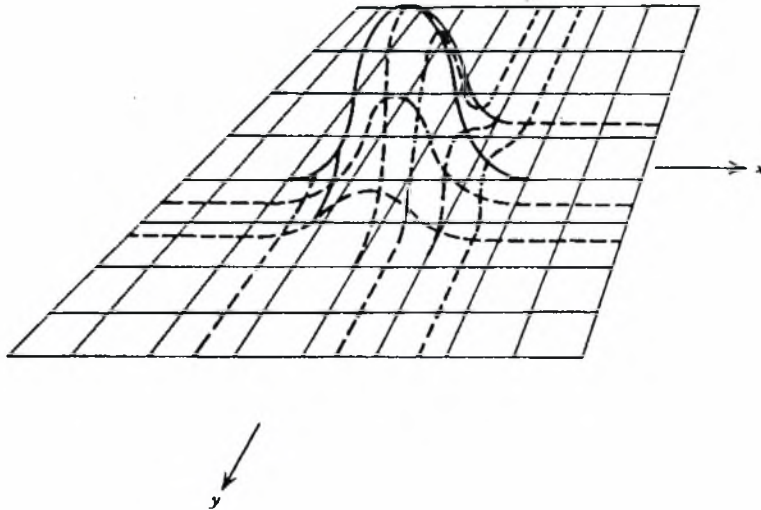
Οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση. Δηλαδή, ισχύει:

$$B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y) \quad (4.6)$$

Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας μεταβλητής στη θέση x, y αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$u(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N+3} u_{c,ij} B_i(x)B_j(y) = \sum_{i,j=1}^{N+3} u_{c,ij} B_{ij}(x, y) \quad (4.7)$$

όπου B_{ij} οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων οι οποίες απεικονίζονται στο σχήμα 4.2 και u_c οι συντελεστές splines της μεταβλητής.



Σχήμα 4.2: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης cubic splines δυο διαστάσεων [19].

Αντίστοιχα με τις συναρτήσεις μιας διάστασης και όπως γίνεται αντιληπτό από το σχήμα, οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων είναι δυο φορές συνεχείς και παραγωγίσιμες. Στην περίπτωση αυτή, σε κάθε στοιχείο επιβιώνουν δεκαέξι συναρτήσεις βάσης, ενώ σε κάθε κόμβο εννιά.

4.3 Οριακές συνθήκες

Στις ροές που εξετάζονται στη παρούσα εργασία υπάρχει ανάντη επίδραση η οποία υπεισέρχεται μέσω του νόμου αλληλεπίδρασης που εκφράζεται από τη σχέση 2.9. Η σχέση αυτή λαμβάνει υπόψη όλο το πεδίο ροής, κάτι που είναι αδύνατο να γίνει κατά την αριθμητική επίλυση αφού είμαστε αναγκασμένοι να περιοριστούμε μέσα σε ένα πεπερασμένο διάστημα, ενώ το πεδίο ορισμού της (2.9) εκτείνεται στο άπειρο. Επιπλέον, η αριθμητική επίλυση με συναρτήσεις βάσης splines απαιτεί υποχρεωτικά την εισαγωγή επιπρόσθετων εξισώσεων και στο δεξί άκρο, ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός των συντελεστών στα βοηθητικά σημεία. Όμως στο δεξί άκρο του πεδίου προσομοίωσης δεν μπορούμε να ξέρουμε τι συμβαίνει και έτσι η χρήση οριακών συνθηκών μπορεί να προκαλέσει επιπλέον ανάντη επίδραση. Το γεγονός αυτό, και επειδή η επίλυση γίνεται για μεγάλο χρονικό διάστημα μας αναγκάζει να επιλύσουμε σε ένα μεγαλύτερο διάστημα από ότι πραγματικά μας ενδιαφέρει με κύριο στόχο να μπορέσουμε να αποφύγουμε την επίδραση των δεξιών

οριακών συνθηκών. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε να λύνουμε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα, κάτι που φυσικά απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο.

Το παραπάνω πρόβλημα αντιμετωπίζεται με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας για όλες τις μεταβλητές ελεύθερη οριακή συνθήκη για την πρώτη παράγωγο στο δεξί άκρο ή χρησιμοποιώντας για όλες τις μεταβλητές περιοδικές οριακές συνθήκες. Η επιλογή των κατάλληλων οριακών συνθηκών εξαρτάται κάθε φορά από το πρόβλημα που επιλύεται.

Η ελεύθερη οριακή συνθήκη είναι μία σχέση που συσχετίζει τους συντελεστές splines στο δεξί άκρο, χωρίς ουσιαστικά να επιβάλλει καμία τιμή για την παράγωγο. Η σχέση αυτή προκύπτει αν η παράγωγος γραφεί μια φορά με τη βοήθεια των συντελεστών splines και μια φορά χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές. Εξισώνοντας τις δυο σχέσεις προκύπτει η εξίσωση που εκφράζει την ελεύθερη οριακή συνθήκη [19]. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης η παράγωγος με τη βοήθεια των συντελεστών splines C περιγράφεται από τη σχέση:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_i = \sum_{j=1}^{N+3} C_j \frac{\partial B_j(x)}{\partial x} \quad (4.8)$$

ενώ με πεπερασμένες διαφορές έχουμε:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_i = \frac{3U_i - 4U_{i-1} + U_{i-2}}{2\Delta x} \quad (4.9)$$

όπου οι τιμές των U μπορούν και αυτές να γραφούν μέσω των συντελεστών splines χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$U = \sum_{j=1}^{N+3} C_j B_j(x) \quad (4.10)$$

Στις σχέσεις 4.8 και 4.10 οι τιμές των συναρτήσεων βάσης είναι γνωστές. Έτσι, εξισώνοντας τις σχέσεις 4.8 και 4.9 σε συνδυασμό με την 4.10 προκύπτει η ελεύθερη οριακή και για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης έχει την μορφή:

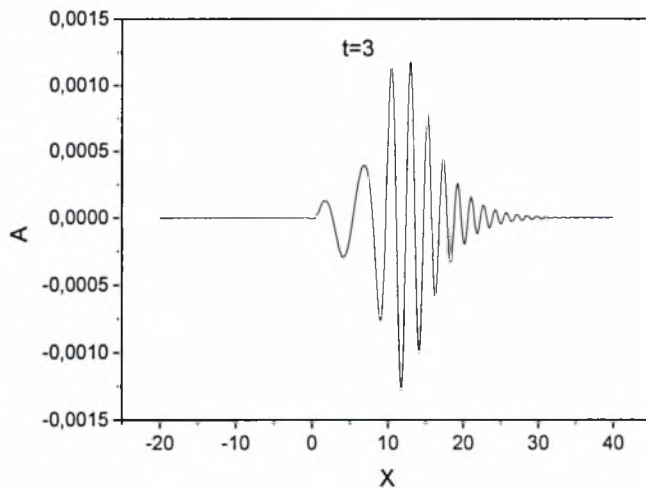
$$0.25C(i-3) - 1.5C(i-1) + 2C(i) - 0.75C(i+1) = 0 \quad (4.11)$$

Αντίστοιχα, για συναρτήσεις βάσης δύο διαστάσεων η ελεύθερη οριακή συνθήκη δίνεται από τη σχέση:

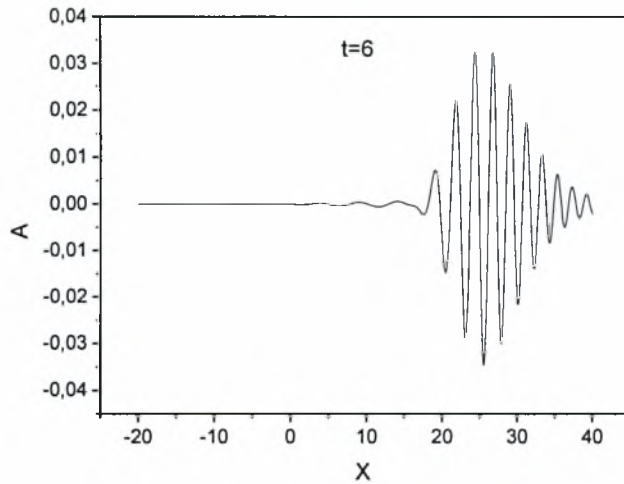
$$\begin{aligned} & -0.375C(i-1, j-1) - 1.5C(i-1, j) - 0.375C(i-1, j+1) + 0.5C(i, j-1) + 2C(i, j) + \\ & 0.5C(i, j+1) - 0.1875C(i+1, j-1) - 0.75C(i+1, j) - 0.1875C(i+1, j+1) + \\ & 0.0625C(i-3, j-1) + 0.25C(i-3, j) + 0.0625C(i-3, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

όπου C οι άγνωστοι συντελεστές $splines$ της μεταβλητής, i δείκτης που δηλώνει τη θέση στην x -κατεύθυνση και j τη θέση στη y -κατεύθυνση.

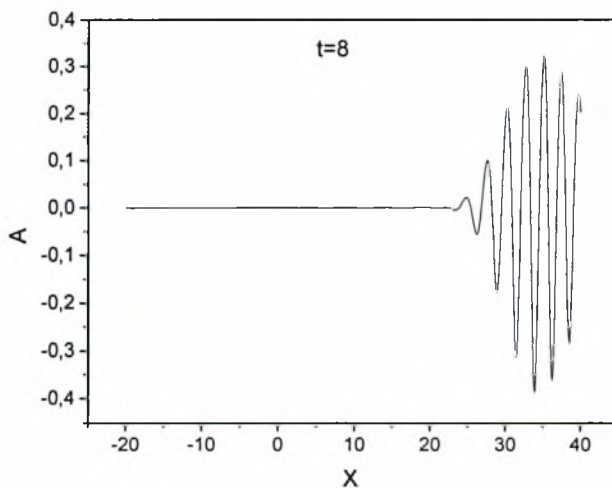
Με την διαδικασία αυτή, καταφέραμε να εξαλείψουμε την ανάντη επίδραση για μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης. Το αποτέλεσμα αυτό, γίνεται αντιληπτό από τα διαγράμματα 4.1 έως 4.4, όπου αποτυπώνεται η χωροχρονική μεταβολή του πάχους μετατόπισης των κυμάτων Tollmien-Schlichting για ροή πάνω από επίπεδη πλάκα όταν $\delta=0.001$, από τα οποία φαίνεται ότι παρόλο που η διαταραχή έχει φθάσει στο δεξί άκρο της περιοχής προσομοίωσης η αριθμητική λύση δεν επηρεάζεται. Στην παρακάτω προσομοίωση στο αριστερό άκρο χρησιμοποιήθηκε η συνθήκη $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ για όλες τις μεταβλητές.



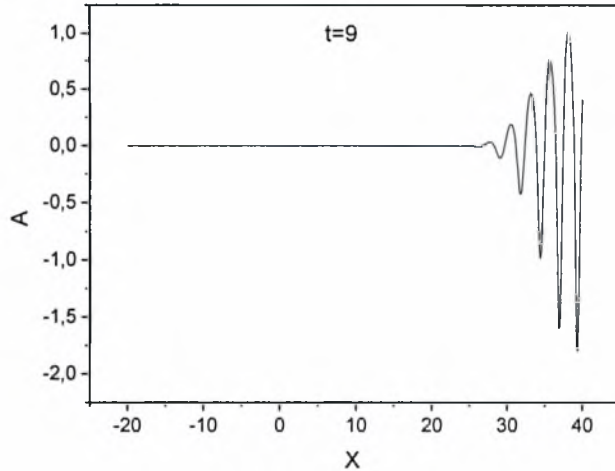
Διάγραμμα 4.1: Μεταβολή του πάχους μετατόπισης σε συνάρτηση με την απόσταση τη χρονική στιγμή $t=3$ με ελεύθερες οριακές συνθήκες στο δεξί άκρο .



Διάγραμμα 4.2: Μεταβολή του πάχους μετατόπισης σε συνάρτηση με την απόσταση τη χρονική στιγμή $t=6$ με ελεύθερες οριακές συνθήκες στο δεξί άκρο .



Διάγραμμα 4.3: Μεταβολή του πάχους μετατόπισης σε συνάρτηση με την απόσταση τη χρονική στιγμή $t=8$ με ελεύθερες οριακές συνθήκες στο δεξί άκρο .



Διάγραμμα 4.4: Μεταβολή του πάχους μετατόπισης σε συνάρτηση με την απόσταση τη χρονική στιγμή $t=9$ με ελεύθερες οριακές συνθήκες στο δεξί άκρο .

Εναλλακτικά, αντί για τη χρήση ελεύθερων οριακών συνθηκών μπορούμε να εισάγουμε στο πρόβλημα περιοδικές οριακές συνθήκες στα άκρα. Η περιοδικότητα πρώτης παράγωγου για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης εκφράζεται από τη σχέση:

$$-C(1) + C(3) + C(M+1) - C(M+3) = 0 \quad (4.13)$$

ενώ για περιοδικότητα τιμής χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$C(1) + 4C(2) + C(3) - C(M+1) - 4C(M+2) - C(M+3) = 0 \quad (4.14)$$

Αντίστοιχα, για διδιάστατες συναρτήσεις βάσης η περιοδικότητα πρώτης παραγώγου δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & -C(1, j-1) - 4C(1, j) - C(1, j+1) + C(3, j-1) + 4C(3, j) + \\ & C(3, j+1) + C(M+1, j-1) + 4C(M+1, j) + C(M+1, j+1) - \\ & C(M+3, j-1) - 4C(M+3, j) - C(M+3, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

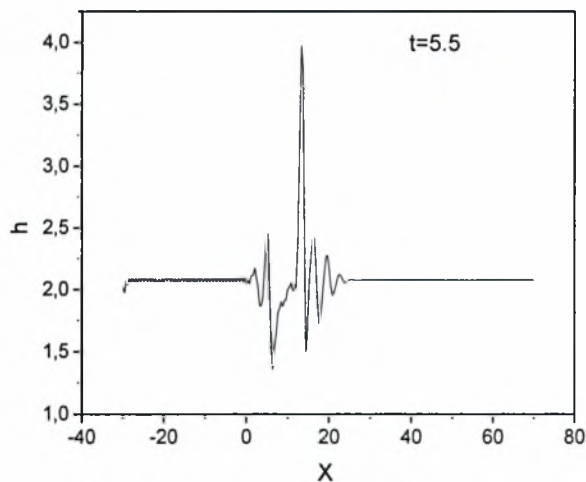
και η περιοδικότητα τιμής από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & C(1, j-1) + 4C(1, j) + C(1, j+1) + 4C(2, j-1) + 16C(2, j) + 4C(2, j+1) + \\ & C(3, j-1) + 4C(3, j) + C(3, j+1) - C(M+1, j-1) - 4C(M+1, j) - \\ & C(M+1, j+1) - 4C(M+2, j-1) - 16C(M+2, j) - 4C(M+2, j+1) - \\ & C(M+3, j-1) - 4C(M+3, j) - C(M+3, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

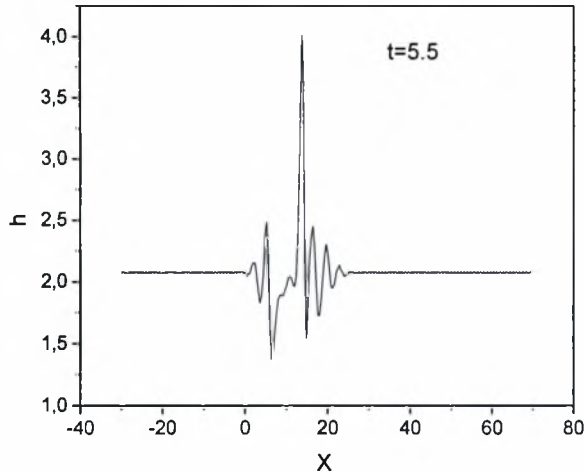
όπου $C(i, j)$ οι άγνωστοι συντελεστές splines, i δείκτης που δηλώνει τη θέση στην x -κατεύθυνση και j τη θέση στη y -κατεύθυνση.

Και με τους δύο τρόπους που αναφέρθηκαν παραπάνω καθυστερείται η ανάντη επίδραση για μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης. Το μειονέκτημα των

περιοδικών συνθηκών είναι ότι πρέπει η περιοχή προσομοίωσης να είναι τέτοια ώστε να μην φτάσει η διαταραχή στο δεξί άκρο, επειδή αν φτάσει θα εισέλθει πάλι από το αριστερό άκρο. Παρόλα αυτά παρατηρήθηκε ότι οι περιοδικές συνθήκες συμπεριφέρονται καλύτερα κατά την επίλυση της ροής αέρα πάνω από το υγρό φιλμ για περιπτώσεις όπου θέλουμε να προσομοιώσουμε μη γραμμικά φαινόμενα ή φαινόμενα που θέλουν αρκετό χρόνο να εξελιχθούν. Αν και τέτοιου είδους φαινόμενα δεν εξετάζονται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία στα διαγράμματα 4.5 και 4.6 δίνεται ενδεικτικά η προσομοίωση μιας μη γραμμικής διαταραχής με $\delta=0.4$ στη ροή αέρα πάνω από φιλμ χρησιμοποιώντας ελεύθερες και περιοδικές οριακές συνθήκες αντίστοιχα.



Διάγραμμα 4.5: Σχήμα διεπιφάνειας αέρα-υγρού για μη γραμμική διαταραχή ($\delta=0.4$) με $dx=0.4$ και ελεύθερες οριακές συνθήκες.



Διάγραμμα 4.6: Σχήμα διεπιφάνειας αέρα-υγρού για μη γραμμική διαταραχή ($\delta=0.4$) με $dx=0.4$ και περιοδικές οριακές συνθήκες.

Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι όταν χρησιμοποιούμε ελεύθερες οριακές συνθήκες οι αριθμητικές διαταραχές είναι πολύ πιο έντονες από ότι στην περίπτωση των περιοδικών οριακών συνθηκών. Τελικά, το αν χρησιμοποιήσουμε περιοδικές ή ελεύθερες οριακές συνθήκες εξαρτάται από το πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε κάθε φορά. Όλα τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια εξήχθησαν χρησιμοποιώντας ελεύθερες οριακές συνθήκες.

Τέλος, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι παρά το γεγονός ότι με τη χρήση ελεύθερών ή περιοδικών οριακών συνθηκών μπορούμε να πάρουμε λύση για ένα μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης, δεν μπορούμε να πάμε σε πάρα πολύ μεγάλους χρόνους επειδή υπάρχει ανάντη επιρροή εξαιτίας της φυσικής του προβλήματος.

4.4 Σύγκριση συναρτήσεων βάσης lagrange και splines

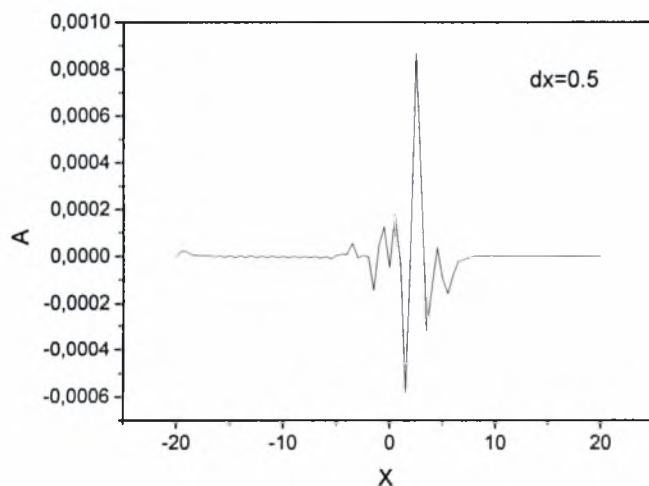
Η σύγκριση των συναρτήσεων βάσης quadratic lagrange και cubic splines έγινε στα πλαίσια της μελέτης της ροής αέρα πάνω από πλάκα για την περίπτωση που εφαρμόζεται μια στιγμιαία γραμμική διαταραχή στη θέση $x=1$. Οι προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας για την περίπτωση αυτή δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Μήκος κύματος	2.3
Περίοδος	0.8

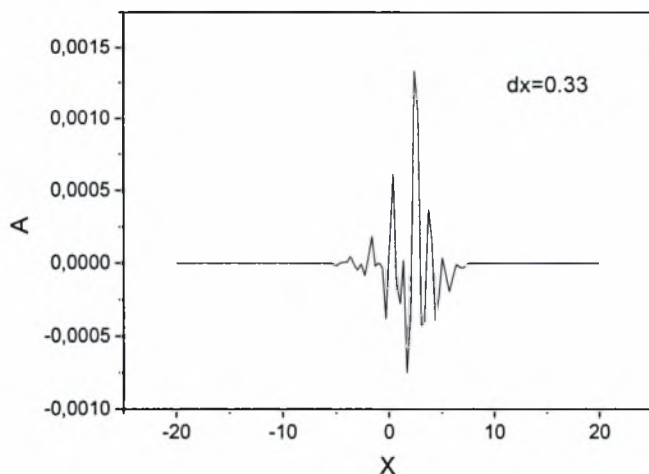
Ταχύτητα κυματοπακέτου	4.5
---------------------------	-----

Πίνακας 4.1: Αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας

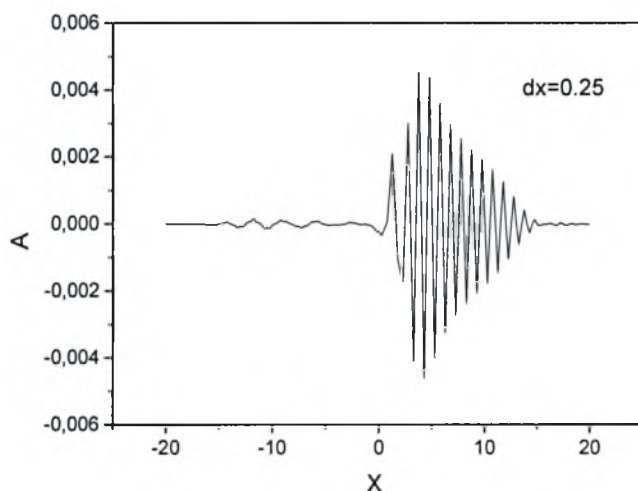
Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων αρχικά επιλέχθηκε η χρήση διτετραγωνικών συναρτήσεων βάσης lagrange. Η επιλογή αυτή βασίστηκε στο ότι η προσομοίωση με τις συναρτήσεις lagrange, σε αντίθεση με τις συναρτήσεις splines, δεν απαιτεί την χρήση βοηθητικών σημείων. Η εισαγωγή βοηθητικών σημείων στο αριθμητικό πλέγμα σε προβλήματα δύο διαστάσεων αυξάνει αρκετά τον αριθμό των αγνώστων και παράλληλα απαιτεί την χρήση επιπλέον εξισώσεων. Παρόλα αυτά, η προσομοίωση με συναρτήσεις βάσης lagrange απέτυχε στο να δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα. Παρατηρήσαμε ότι το μήκος κύματος του κυματοπακέτου που προκύπτει είναι κάθε φορά ανάλογο του πλέγματος που χρησιμοποιούμε. Πιο συγκεκριμένα, για δεδομένο Δx παρατηρούμε την εμφάνιση κύματος με μήκος περίπου $4\Delta x$. Στα διαγράμματα που ακολουθούν δίνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για το πάχος μετατόπισης με συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange για διάφορα πλέγματα και για την ίδια χρονική στιγμή $t=1.3$.



Διάγραμμα 4.7: Στιγμιότυπο διαταραχής με συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange και $dx=0.5$.



Διάγραμμα 4.8: Στιγμιότυπο διαταραχής με συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange και $dx=0.33$.



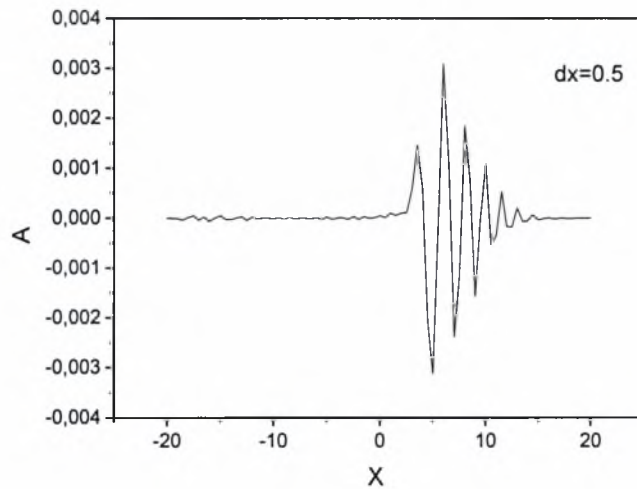
Διάγραμμα 4.9: Στιγμιότυπο διαταραχής με συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange και $dx=0.25$.

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι προφανές ότι η λύση που προκύπτει δεν είναι ανεξάρτητη του αριθμητικού πλέγματος που χρησιμοποιείται. Με ανάλυση FFT στα παραπάνω δεδομένα υπολογίζεται για κάθε περίπτωση το μήκος κύματος της διαταραχής. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτής δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

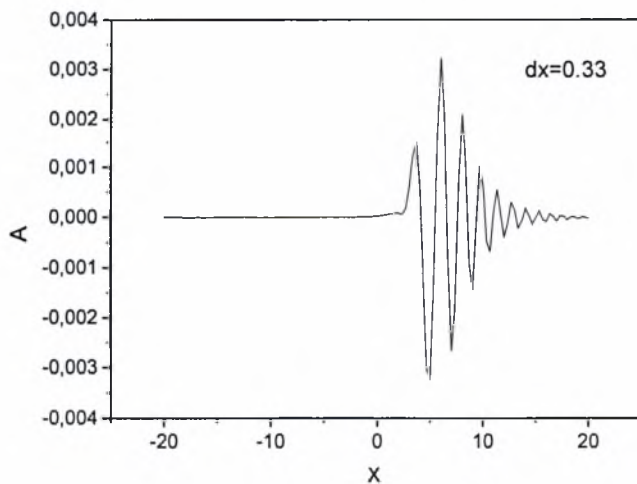
Διάστημα διακριτοποίησης	0.5	0.33	0.25
Αριθμητικό μήκος κύματος	1.78	1.33	1

Πίνακας 4.2: Αριθμητικά αποτελέσματα για επίλυση με συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange και διαφορετικά διαστήματα διακριτοποίησης.

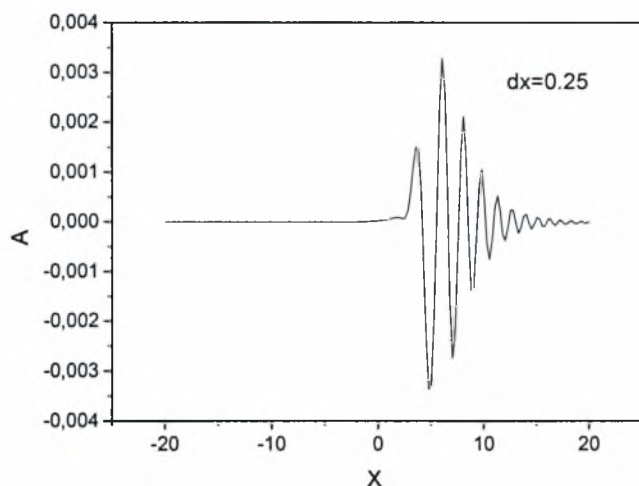
Στη συνέχεια, έγινε επίλυση του ίδιου προβλήματος χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης cubic splines και διαπιστώθηκε ότι η πύκνωση του αριθμητικού πλέγματος δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Στα διαγράμματα που ακολουθούν δίνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για το πάχος μετατόπισης για τα ίδια πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν και στην περίπτωση των συναρτήσεων βάσης lagrange και για την ίδια χρονική στιγμή.



Διάγραμμα 4.10: Στιγμιότυπο διαταραχής με συναρτήσεις βάσης cubic splines και $dx=0.5$ τη χρονική στιγμή $t=1.3$.



Διάγραμμα 4.11: Στιγμιότυπο διαταραχής με συναρτήσεις βάσης cubic splines και $dx=0.33$ τη χρονική στιγμή $t=1.3$.



Διάγραμμα 4.12: Στιγμιότυπο διαταραχής με συναρτήσεις βάσης cubic splines και $dx=0.25$ τη χρονική στιγμή $t=1.3$.

Είναι φανερό ότι τα αποτελέσματα στην περίπτωση αυτή είναι ανεξάρτητα του αριθμητικού πλέγματος που χρησιμοποιείται. Με ανάλυση FFT στις παραπάνω διαταραχές υπολογίζεται για κάθε περίπτωση το μήκος κύματος. Οι τιμές που προκύπτουν δίνονται στον πίνακα 4.3. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας που παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.

Διάστημα διακριτοποίησης	0.5	0.33	0.25
Αριθμητικό μήκος κύματος	2.2	2.2	2.2
Αριθμητική περίοδος	0.83	0.83	0.83
Αριθμητική ταχύτητα	4.6	4.6	4.6

Πίνακας 4.3: Αριθμητικά αποτελέσματα για επίλυση με συναρτήσεις βάσης cubic splines και διαφορετικά διαστήματα διακριτοποίησης.

Η ανάλυση που έγινε παραπάνω κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις βάσης lagrange αδυνατούν να δώσουν λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα, σε αντίθεση με τις συναρτήσεις cubic splines που παρέχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, ανεξάρτητα από το αριθμητικό πλέγμα που χρησιμοποιείται. Εκτιμάται ότι η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις βάσης cubic splines είναι μεγαλύτερης τάξης από τις quadratic lagrange και επιπλέον επιτρέπουν

τη συνέχεια της πρώτης και δεύτερης παραγώγου. Αυτές οι ιδιότητες των συναρτήσεων splines συμβάλουν στο να προκύπτουν ομαλές λύσεις. Η αδυναμία των lagrange να δώσουν λύσεις ανεξάρτητες του αριθμητικού πλέγματος έχει παρατηρηθεί και σε άλλες περιπτώσεις όπως είναι η μελέτη της δυναμικής φουσαλίδων και σταγόνων [20],[21].

Μετά την επιλογή των καταλλήλων συναρτήσεων βάσης και αφού αντιμετωπίστηκε το πρόβλημα που προκαλεί η χρήση οριακών συνθηκών στο δεξί άκρο προσομοίωσης καταλήξαμε τελικά στη μεθοδολογία επίλυσης που περιγράφεται παρακάτω.

Έτσι, για την αριθμητική επίλυση το πρόβλημα αντιμετωπίζεται ελλειπτικά ως προς το χώρο και παραβολικά ως προς το χρόνο. Χρησιμοποιείται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων με συναρτήσεις βάσης cubic splines δύο διαστάσεων για τον αέρα και μιας διάστασης για το υγρό, ενώ όπου απαιτείται χρονική ολοκλήρωση γίνεται με τη μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Σε όλες τις περιπτώσεις το διάστημα της διακριτοποίησης στην y-κατεύθυνση λαμβάνεται τέτοιο ώστε η δεύτερη μερική παράγωγος της ταχύτητας ως προς Y στο πάνω άκρο να είναι μηδέν, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0.$$

4.5 Αλγόριθμοι επίλυσης

4.5.1 Αριθμητική επίλυση ροής αέρα πάνω από πλάκα ή εμπόδιο

Για την επίλυση της ροής αέρα πάνω από οριζόντια πλάκα χρησιμοποιούνται οι σχέσεις 2.20 έως 2.28, ενώ για την προσομοίωση της ροής πάνω από εμπόδιο χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις 2.20 έως 2.22 και 2.32 έως 2.38. Το πρόβλημα της ροής του αέρα είναι διδιάστατο και μη γραμμικό. Αν M είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην x-κατεύθυνση και N ο αριθμός των στοιχείων στην y-κατεύθυνση τότε από την διακριτοποίηση της εξίσωσης ορμής προκύπτει:

$$\left[\iint B_i B_j dx dy \right] \frac{d\bar{U}_j}{dt} = \iint B_i \left(-\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial X} \frac{\partial \bar{U}}{\partial Y} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial X} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Y^2} \right) d\bar{X} d\bar{Y} \quad (4.17)$$

όπου B_i , B_j οι συναρτήσεις βάσης splines και U_j οι συντελεστές splines για την ταχύτητα. Η εξίσωση (4.17) είναι της μορφής:

$$\underline{\underline{M}} \frac{d\underline{\underline{C}}}{dt} = \underline{\underline{R}} \quad (4.18)$$

όπου το άνυσμα \underline{R} αποτελεί το άνυσμα των υπολοίπων (residuals), έχει διάσταση $(M+3) \times (N+3)$ και υπολογίζεται κάθε φορά από τις παλιές τιμές των μεταβλητών. Ο πίνακας \underline{M} είναι σε μορφή ζώνης (banded) με εύρος ζώνης $8 \times (N+3)$ και δεν μεταβάλλεται με το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι χρειάζεται να υπολογιστεί και να αντιστραφεί μόνο μια φορά στην αρχή της προσομοίωσης. Σε όλα τα επόμενα χρονικά βήματα υπολογίζεται μόνο το νέο δεξί μέλος και πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του \underline{M} .

Επειδή χρησιμοποιούμε συναρτήσεις βάσεις splines είναι απαραίτητη η χρήση κάποιων επιπλέον εξισώσεων. Οι επιπλέον εξισώσεις που χρησιμοποιούμε είναι:

- Πάνω στη πλάκα ή το εμπόδιο ($\bar{Y} = 0$):
$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0 \quad (4.19)$$

- Στο πάνω άκρο ($\bar{Y} = +\infty$)
$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial \bar{Y}} = 0 \quad (4.20)$$

- Στο αριστερό άκρο ($\bar{X} = -\infty$):
$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial \bar{X}} = 0 \quad (4.21)$$

- Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο:
$$\frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial t \partial \bar{X} \partial \bar{Y}} = 0 \quad (4.22)$$

- Στο δεξί άκρο ($\bar{X} = +\infty$) χρησιμοποιήθηκαν ελεύθερες οριακές συνθήκες για την παράγωγο
$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial \bar{X}}.$$

- Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο δεξί άκρο χρησιμοποιήθηκε ελεύθερη οριακή συνθήκη για την παράγωγο
$$\frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial t \partial \bar{X} \partial \bar{Y}}.$$

Για την περίπτωση της ροής πάνω από πλάκα ο υπολογισμός της ροϊκής συνάρτησης, της πίεσης και του πάχους μετατόπισης γίνεται με τη βοήθεια των εξισώσεων (2.21), (2.23) και (2.24) αντίστοιχα, ενώ για ροή πάνω από εμπόδιο η ροϊκή συνάρτηση υπολογίζεται από την σχέση (2.21) και η πίεση από την (2.36).

Κατά την μελέτη της ροής πάνω από εμπόδιο επιλύθηκε το πρόβλημά και για μόνιμη κατάσταση. Στην περίπτωση αυτή, το ισοζύγιο ορμής παίρνει τη μορφή:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{Y}^2} \quad (4.23)$$

και επιλύεται μαζί με τις εξισώσεις (2.21) και (2.36) που αντιστοιχούν στην ροϊκή συνάρτηση και τη πίεση με τη μέθοδο Newton-Raphson.

4.5.2 Αλγόριθμος επίλυσης ροής αέρα πάνω από πλάκα ή εμπόδιο

Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής αέρα πάνω από πλάκα ή εμπόδιο για μη μόνιμη κατάσταση χρησιμοποιείται ο παρακάτω αλγόριθμος:

- Για την επίλυση της ροής αέρα πάνω από πλάκα αρχικά επιβάλλεται μια στιγμιαία ή περιοδική διαταραχή σε κάποια μεταβλητή (π.χ. πίεση). Όταν χρησιμοποιείται εμπόδιο δεν επιβάλλεται επιπλέον διαταραχή αφού το εμπόδιο έχει αυτό το ρόλο.
- Στην συνέχεια, σε κάθε υποβήμα της Runge-Kutta υπολογίζεται η ταχύτητα από την εξίσωση (4.17) χρησιμοποιώντας τις παλιές τιμές της ροϊκής συνάρτησης, της πίεσης και του πάχους μετατόπισης. Με βάση τις νέες τιμές της ταχύτητας υπολογίζονται οι νέες τιμές για την ροϊκή συνάρτηση, την πίεση και το πάχος μετατόπισης από τις εξισώσεις (2.21), (2.23) και (2.24). Για τη ροή πάνω από εμπόδιο το στάδιο αυτό πραγματοποιείται χωρίς να ληφθεί υπόψη το πάχος μετατόπισης αφού θεωρείται ότι είναι μηδέν, η ροϊκή συνάρτηση υπολογίζεται από την σχέση (2.21) και η πίεση από την (2.36).
- Η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται για όσο χρονικό διάστημα απαιτείται.

Για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων ροής αέρα πάνω από εμπόδιο σε μόνιμη κατάσταση επιλύονται οι εξισώσεις (4.23), (2.21) και (2.36) με τη μέθοδο Newton-Raphson.

4.5.3 Αριθμητική επίλυση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ

Για την προσομοίωση της ροής ρεύματος αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από λεπτό φιλμ νερού που ρέει υπό την επίδραση της διάτμησης του αέρα απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων 2.59 έως 2.68. Επειδή η αδιαστατοποίηση γίνεται με βάση τη χρονική κλίμακα των διεπιφανειακών κυμάτων η εξίσωση της ορμής του αέρα δεν περιέχει την χρονοπαράγωγο. Προκύπτει, δηλαδή, στον αέρα ένα quasi-stationary πρόβλημα, αφού οι μεταβολές μέσα στο οριακό στρώμα υπάρχουν μόνο ως αποτέλεσμα των μεταβολών που συμβαίνουν στην υγρή φάση. Όπως και στην περίπτωση της ροής πάνω από πλάκα, το πρόβλημα της αέριας φάσης είναι διδιάστατο και μη γραμμικό. Αντίθετα, η χρήση της συγκεκριμένης χρονικής κλίμακας στις εξισώσεις του υγρού έχει ως αποτέλεσμα να αγνοηθούν οι όροι αδράνειας, όταν $\mu/\mu_w \ll 1$, και να προκύψει με τον τρόπο αυτό ένα απλοποιημένο πρόβλημα για την εξέλιξη του πάχους του φιλμ.

Όπως προαναφέρθηκε, η χρονική ολοκλήρωση στο υγρό γίνεται με τη μέθοδο Runge Kutta τέταρτης τάξης. Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης cubic splines

μιας διάστασης και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη στην εξίσωση 2.64 που περιγράφει την κίνηση του υγρού, προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \left[\int_{-x_0}^{x_0} B_i B_j dX \right] \frac{dh_j}{dt} &= \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{dB_i}{dX} \frac{H^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{dB_i}{dX} \frac{H^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) dX - \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{d^2 B_i}{dX^2} \frac{H^3}{3 \overline{We}} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) dX \\ &- \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{dB_i}{dX} \frac{H^2}{\overline{We}} \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} - \frac{dB_i}{dX} \frac{H^3}{3} \frac{\rho_w/\rho-1}{\overline{Fr}} \frac{\partial H}{\partial X} \right) dX + \left[\frac{dB_i}{dX} \frac{H^3}{3 \overline{We}} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right]_{-x_0}^{x_0} \\ &\left[B_i \frac{H^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Y} \right]_{-x_0}^{x_0} + \left[B_i \frac{H^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right]_{-x_0}^{x_0} - \left[B_i \frac{H^3}{3 \overline{We}} \frac{\partial^3 H}{\partial X^3} \right]_{-x_0}^{x_0} + \left[B_i \frac{H^3}{3} \frac{\rho_w/\rho-1}{\overline{Fr}} \frac{\partial H}{\partial X} \right]_{-x_0}^{x_0} \end{aligned} \quad (4.24)$$

όπου B_i, B_j οι μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης splines και h_j οι συντελεστές splines για το ύψος της διεπιφάνειας. Δηλαδή, καταλήγουμε πάλι σε ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \frac{dh}{dt} = \underline{\underline{R}} \quad (4.25)$$

όπου $\underline{\underline{R}}$ το άνυσμα των υπολοίπων (residuals) με διάσταση $M+3$ το οποίο υπολογίζεται κάθε φορά χρησιμοποιώντας τις τιμές της πίεσης και τις ταχύτητας που προκύπτουν από την επίλυση της αέριας φάσης. Ο πίνακας $\underline{\underline{M}}$ είναι σε μορφή ζώνης (banded) με εύρος ζώνης (band width) 9. Ο πίνακας αυτός κατασκευάζεται και αντιστρέφεται μόνο μια φορά αφού δεν εξαρτάται από το χρόνο. Έτσι, σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζεται μόνο το νέο δεξί μέλος και πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του $\underline{\underline{M}}$.

Επειδή χρησιμοποιούμε B-cubic splines σαν συναρτήσεις βάσης χρειάζεται να εισάγουμε δυο επιπλέον εξισώσεις. Στο αριστερό άκρο της περιοχής προσομοίωσης χρησιμοποιούμε τη σχέση $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial X} = 0$, ενώ στο δεξί άκρο χρησιμοποιούμε ελεύθερη οριακή συνθήκη.

Το πρόβλημα στην αέρια φάση επιλύεται σε κάθε υποβήμα της Runge Kutta με δεδομένες τιμές για το ύψος της διεπιφάνειας που παρέχονται από τη λύση στο υγρό. Αν M είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην x -κατεύθυνση και N ο αριθμός των στοιχείων στην y -κατεύθυνση τότε επιλύεται κάθε φορά με τη μέθοδο Newton-Raphson ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{J}} \cdot dC = \underline{\underline{R}} \quad (4.26)$$

όπου \underline{R} το άνυσμα των υπολοίπων με μέγεθος $2(M+3) \times (N+3) + 2(M+3)$, \underline{dC} το άνυσμα των αγνώστων και \underline{J} η ιακωβιανή του συστήματος η οποία προκύπτει από την παραγωγή των υπολοίπων ως προς τους αγνώστους. Το άνυσμα \underline{dC} περιέχει τους άγνωστους συντελεστές splines των μεταβλητών με την εξής σειρά: $\{U_1, \Psi_1, U_2, \Psi_2, \dots, U_{(N+3) \times (M+3)}, \Psi_{(N+3) \times (M+3)}, P_1, A_1, \dots, P_{M+3}, A_{M+3}\}$. Ο πίνακας \underline{J} είναι σε μορφή τόξου (arrow) η οποία δημιουργείται από τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στην πίεση και το πάχος μετατόπισης. Σχηματικά, ο πίνακας \underline{J} έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x & .. & x & 0 & 0 & .. & 0 & x & .. & x \\ x & .. & x & x & 0 & .. & 0 & x & .. & x \\ 0 & .. & .x. & x & .x. & .. & 0 & x & .. & x \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & x & x & x & ... & 0 & x & .. & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & .. & x & x & .. & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & .. & x & x & .. & x \\ x & x & x & x & x & .. & x & x & .. & x \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & x \\ x & x & x & x & x & .. & x & x & .. & x \end{bmatrix}$$

Επομένως, μπορεί να χωριστεί σε τέσσερις επιμέρους πίνακες: έναν πίνακα ζώνης, έναν πίνακα στήλης, έναν πίνακα γραμμής και έναν πίνακα κορυφής. Χρησιμοποιώντας ελεύθερες οριακές ο πίνακας ζώνης έχει διάσταση $2(M+3)(N+3)$ με εύρος ζώνης $16(N+3)$, ο πίνακας στήλης έχει διάσταση $[2(M+3)(N+3), 2(M+3)]$, ο πίνακας γραμμής $[2(M+3), 2(M+3)(N+3)]$ και ο πίνακας κορυφής $[2(M+3), 2(M+3)]$. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περιοδικές οριακές συνθήκες μεταβάλλονται οι διαστάσεις των τεσσάρων πινάκων που αποτελούν την ιακωβιανή του συστήματος. Έτσι, ο πίνακας ζώνης έχει διάσταση $2MN+6M$ με εύρος ζώνης $16(N+3)$, ο πίνακας στήλης έχει διάσταση $[2MN+6M, 2M+6N+24]$, ο πίνακας γραμμής $[2M+6N+24, 2MN+6M]$, και ο πίνακας κορυφής $[2M+6N+24, 2M+6N+24]$. Στις προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται ελεύθερες οριακές συνθήκες. Για την αντιστροφή του πίνακα \underline{J} χρησιμοποιείται κατάλληλη υποροουτίνα που λαμβάνει υπόψη την ιδιαίτερη μορφή του.

Οι επιπλέον εξισώσεις που εισάγονται στο πρόβλημα εξαιτίας της χρήσης συναρτήσεων βάσης splines για την ταχύτητα και την ροϊκή συνάρτηση είναι:

- Στην διεπιφάνεια ($\bar{Y} = 0$): $U = \Psi = 0$ (4.27)

- Στο πάνω άκρο ($\bar{Y} = +\infty$), δηλαδή στα όρια με το μεσαίο στρώμα:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \text{ και } U = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}} \quad (4.28)$$

- Στο αριστερό άκρο ($\bar{X} = -\infty$) χρησιμοποιήθηκε η λύση της βασικής ροής:

$$U = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0)\bar{Y} \text{ και } \Psi = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0)\frac{\bar{Y}^2}{2} \quad (4.29)$$

- Στο δεξί άκρο ($\bar{X} = +\infty$) χρησιμοποιήθηκαν ελεύθερες οριακές συνθήκες για τις παραγωγούς $\frac{\partial U}{\partial X}$ και $\frac{\partial \Psi}{\partial X}$.

- Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (4.30)$$

- Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο χρησιμοποιήθηκε ελεύθερη οριακή συνθήκη για τις παραγωγούς $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}$ και $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y}$.

Αντίστοιχα, για την πίεση και το πάχος μετατόπισης στο αριστερό άκρο χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\frac{\partial P}{\partial X} = 0$ και $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$, ενώ στο δεξί άκρο εισάγονται ελεύθερες οριακές συνθήκες για τις χωρικές παραγωγούς.

Είναι εμφανές ότι ανεξάρτητα από τη χρήση ελεύθερων ή περιοδικών οριακών συνθηκών, στην περίπτωση επίλυσης ροής αέρα πάνω από λεπτό φιλμ το σύστημα στο οποίο καταλήγουμε είναι αρκετά μεγάλο αφού επιλύουμε ταυτόχρονα και για τις τέσσερις μεταβλητές (U, Ψ, P, A). Επιπλέον, ο πίνακας \underline{J} δεν είναι ανεξάρτητος του χρόνου και κατά συνέπεια θα πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί πολλές φορές. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα να αυξάνεται κατά πολύ ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος γεγονός που καθιστά προσομοιώσεις δύσκολων περιπτώσεων στις οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν σχετικά μεγάλα πλέγματα πρακτικά αδύνατες. Η προσπάθεια αντιμετώπισης του προβλήματος αυτού περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 4.6.

4.5.4 Αλγόριθμος επίλυσης ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ

Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτεί την διαδοχική λύση των εξισώσεων του αέρα και του υγρού. Δηλαδή, από την λύση του αέρα προκύπτουν οι τιμές της πίεσης και της διάτμησης που θα χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι στο

πρόβλημα του υγρού. Με την σειρά του το υγρό παρέχει τις νέες τιμές του ύψους της διεπιφάνειας που θα χρησιμοποιηθούν πάλι ως δεδομένα για τη νέα επίλυση του προβλήματος στον αέρα. Επομένως, ο αλγόριθμος αποτελείται από τα εξής βήματα:

- Για $t = 0$ επιβάλλεται μια διαταραχή στην διεπιφάνεια του υγρού – αέρα.
- Με βάση τις αρχικές τιμές και την διαταραχή επιλύεται το πρόβλημα στην αέρια φάση και προκύπτουν οι νέες τιμές της πίεσης και της διάτμησης.
- Στη συνέχεια με δεδομένη πίεση και διάτμηση επιλύεται το πρόβλημα στην υγρή φάση από όπου προκύπτουν οι νέες τιμές για το σχήμα της διεπιφάνειας οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πάλι για την επίλυση στον αέρα.
- Η διαδοχική επίλυση των προβλημάτων αέρα-υγρού συνεχίζεται, για όσο χρονικό διάστημα χρειαστεί προκειμένου να περιγραφεί πλήρως η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, με τη μέθοδο Runge-Kutta.

4.6 Βελτίωση αλγόριθμου

Όπως είδαμε παραπάνω, σε όλες τις περιπτώσεις ροών που εξετάζονται στην εργασία αυτή η αριθμητική επίλυση καταλήγει σε ένα σύστημα της μορφής $AX=B$. Σε αντίθεση με την επίλυση της ροής του αέρα πάνω από πλάκα ή εμπόδιο όπου ο πίνακας A είναι σταθερός και επομένως κατασκευάζεται και αντιστρέφεται μόνο μια φορά, κατά την προσομοίωση της ροής πάνω από υγρό φιλμ ο πίνακας που προκύπτει στην αέρια φάση εξαρτάται από το χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A πρέπει να υπολογίζεται και να αντιστρέφεται πολλές φορές. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το αρκετά μεγαλύτερο μέγεθος του πίνακα στην περίπτωση που επιλύουμε και για τις δύο φάσεις οδηγεί σε σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Επιπλέον, σε περιπτώσεις όπου απαιτείται πυκνωση του αριθμητικού πλέγματος χρειάζεται παράλληλα να μειωθεί και το χρονικό βήμα ώστε να αποφευχθούν αστάθειες λόγω της χρήσης της Runge Kutta. Η μείωση όμως του χρονικού βήματος αυξάνει αυτόματα τις φορές που πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί ο πίνακας A . Όλα τα παραπάνω, έχουν ως αποτέλεσμα οι υπολογιστικοί χρόνοι να είναι τέτοιας τάξεως ώστε πολλές προσομοιώσεις στις οποίες απαιτείται πυκνό πλέγμα να είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν.

Ως πρώτο βήμα στην προσπάθεια μείωσης του υπολογιστικού χρόνου εντοπίστηκε το πιο χρονοβόρο τμήμα της αριθμητικής επίλυσης. Διαπιστώθηκε ότι την μεγαλύτερη κατανάλωση του χρόνου την έχουμε στην αντιστροφή του πίνακα A .

Ενδεικτικά αναφέρονται οι περιπτώσεις που χρησιμοποιείται πλέγμα 200x20 και 400x20. Στον πίνακα 4.4 δίνονται οι απαιτούμενοι χρόνοι σε λεπτά και σαν ποσοστά για ένα υποβήμα της Runge Kutta και στον πίνακα 4.5 οι αντίστοιχοι χρόνοι για ένα χρονικό βήμα.

	Χρόνος (min)		Ποσοστό (%)	
	200X20	400X20	200X20	400X20
Κατασκευή A	0.18	0.45	1.43	0.3
Αντιστροφή A	12.09	218.91	96.3	96.8
Υπόλοιπα	0.28	6.69	2.27	2.9
Σύνολο	12.55	226.05	100	100

Πίνακας 4.4: Καταμερισμός υπολογιστικού χρόνου για ένα υποβήμα της Runge Kutta για πλέγματα 200x20 και 400x20.

	Χρόνος (min)		Ποσοστό (%)	
	200X20	400X20	200X20	400X20
Κατασκευή A	0.72	1.8	1.52	0.3
Αντιστροφή A	48.3	875.6	96.1	96.6
Υπόλοιπα	1.2	28.2	2.38	3.1
Σύνολο	50.22	905.6	100	100

Πίνακας 4.5: Καταμερισμός υπολογιστικού χρόνου για ένα χρονικό βήμα για πλέγματα 200x20 και 400x20.

Από τους παραπάνω πίνακες είναι φανερό ότι η πιο χρονοβόρα διαδικασία είναι η αντιστροφή της ιακωβιανής και η επίλυση του συστήματος $AX=B$ στην αέρια φάση αφού εκεί καταναλώνεται περίπου το 96% του χρόνου. Το πρόβλημα της μεγάλης απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο αντιμετωπίστηκε μερικώς με την αποφυγή κατασκευής και αντιστροφής του A σε κάθε χρονικό βήμα. Η ενέργεια αυτή, βασίστηκε στο ότι στα συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιούνται αρκετά μικρά χρονικά βήματα και οι αλλαγές στη λύση δεν είναι πολύ γρήγορες. Έτσι, με τη διαδικασία αυτή, όταν κατασκευαστεί και αντιστραφεί ο πίνακας A δεν

ξαναμεταβάλλεται για όσο το δυνατό περισσότερα χρονικά βήματα. Βέβαια, με τον τρόπο αυτό η Newton-Raphson δεν συγκλίνει τετραγωνικά και έτσι απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις. Παρόλα αυτά το κέρδος από την αποφυγή της αντιστροφής του πίνακα είναι τόσο μεγάλο που ξεπερνά κατά πολύ το κόστος αύξησης των επαναλήψεων. Ο αριθμός των χρονικών βημάτων για τα οποία μπορούμε να διατηρήσουμε αναλλοίωτη την ιακωβιανή ποικίλει από πρόβλημα σε πρόβλημα και εξαρτάται από το πόσο δύσκολο είναι να προσομοιωθεί και από το πόσο γρήγορα γίνονται οι μεταβολές μέσα σε αυτό. Γενικά, ο αριθμός αυτός μπορεί να κυμανθεί από 1 μέχρι 500. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι απαιτούμενοι χρόνοι σε λεπτά για ένα χρονικό βήμα όπου γίνεται κατασκευή και αντιστροφή του A και για ένα βήμα όπου ο αντίστροφος του A θεωρείται γνωστός από προηγούμενο βήμα.

	Χρόνος (min)	
	200X20	400X20
Βήμα με κατασκευή-αντιστροφή A	50.22	905.2
Βήμα με γνωστό αντίστροφο A	0.12	0.39

Πίνακας 4.6: Υπολογιστικοί χρόνοι για χρονικό βήμα με αντιστροφή της ιακωβιανής και για χρονικό βήμα με γνωστό αντίστροφο για πλέγματα 200x20 και 400x20.

Παρατηρούμε ότι με το να διατηρούμε την ιακωβιανή του συστήματος σταθερή για αρκετά χρονικά βήματα ο υπολογιστικός χρόνος μειώνεται σημαντικά. Η αντιμετώπιση αυτή λύνει το πρόβλημα του αυξημένου υπολογιστικού χρόνου όταν η λύση δεν μεταβάλλεται πολύ γρήγορα και δεν απαιτούνται πολύ μεγάλα αριθμητικά πλέγματα. Παρόλα αυτά, κατά την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων είναι πολλές οι περιπτώσεις όπου πρέπει να χρησιμοποιηθεί μεγάλο πλέγμα, πολύ μικρό χρονικό βήμα και για να εμφανιστούν κάποια φαινόμενα θα πρέπει να πάμε αρκετά μακριά στο χρόνο. Σε τέτοιες προσομοιώσεις η ιακωβιανή δεν μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη για πολλά χρονικά βήματα και κατά συνέπεια πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί πολλές φορές κατά τη διάρκεια μιας επίλυσης. Παράλληλα η χρήση πυκνού πλέγματος αυξάνει κατακόρυφα το χρόνο που καταναλώνεται για επίλυση του συστήματος $AX=B$ με αντιστροφή μια φορά. Ως παράδειγμα, στον

πίνακα 4.7 δίνονται οι χρόνοι που χρειάζονται για μια επίλυση του συστήματος για διάφορα πλέγματα.

Πλέγμα	Χρόνος (min)
200x20	4.1
250x40	68.5
400x20	73
500x20	151.3
500x40	644.5
1000x20	1675

Πίνακας 4.7: Υπολογιστικοί χρόνοι επίλυσης του συστήματος $AX=B$ για διάφορα αριθμητικά πλέγματα.

Όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα, αν θέλουμε για χρησιμοποιήσουμε πλέγμα 1000x20 για προσομοίωση μέχρι τη χρονική στιγμή 10, με χρονικό βήμα 0.001 και αντιστροφή κάθε 100 βήματα τότε μόνο για επίλυση του συστήματος στην αέρια φάση απαιτούνται 116 μέρες, ενώ για αντιστροφή κάθε δέκα βήματα οι μέρες γίνονται 1160. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τέτοιου είδους προσομοιώσεις είναι αδύνατες.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε μεγάλα αριθμητικά πλέγματα πρέπει με κάποιο τρόπο να μειώσουμε σημαντικά το χρόνο που καταναλώνεται στην επίλυση του συστήματος στον αέρα. Για το σκοπό αυτό, εγκαταλείφθηκε η ιδέα της απευθείας επίλυσης του συστήματος με αντιστροφή και διερευνήθηκε η δυνατότητα χρήσης κάποιας επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης. Τελικά, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος GMRES η οποία περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.

4.6.1 Μέθοδος GMRES

Η ανάπτυξη επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης μεγάλων συστημάτων απασχολεί τους ερευνητές εδώ και πολλές δεκαετίες. Για την επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος της μορφής $Ax=B$ απαιτείται μια καλή αρχική πρόβλεψη. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας κατάλληλη προσέγγιση για τον πίνακα A γίνεται προσπάθεια να βελτιωθεί η πρόβλεψη μειώνοντας το λάθος. Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας A μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα ενός προσεγγιστικού πίνακα K και ενός άλλου πίνακα Λ

τότε σχηματικά η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται ως εξής: στο βήμα $i+1$ βρίσκεται η νέα προσεγγιστική λύση x_{i+1} από το σύστημα $Kx_{i+1} = Kx_i + b - Ax_i - Kx_i \xrightarrow{r_i = b - Ax_i} Kx_{i+1} = Kx_i + r_i$.

Με τη διαδικασία αυτή, παίρνουμε ικανοποιητικούς ρυθμούς σύγκλισης, ειδικά για θετικά ορισμένους πίνακες K [22].

Οι επιστήμονες για πολλές δεκαετίες έκαναν προσπάθειες να αναπτύξουν καλύτερες και πιο γρήγορες επαναληπτικές μεθόδους. Μια από τις μεθόδους, η οποία χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, είναι η GMRES (Generalized Minimum Residual). Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε το 1986 από τους Y. Saad & M. Schultz για την επίλυση μεγάλων, μη συμμετρικών, αραιών συστημάτων [23].

Η βάση για την ανάπτυξη της μεθόδου τέθηκε στην δεκαετία του 50 από τους C. Lanczos και W. Arnoldi οι οποίοι είχαν την ιδέα της διατήρησης όλων των προσεγγιστικών λύσεων μέχρι ένα σημείο της επαναληπτικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, πρότειναν τον συνδυασμό των προσεγγίσεων ώστε να προκύψει μια καλύτερη λύση. Ο Lanczos παρατήρησε ότι η βασική επανάληψη οδηγεί σε προσεγγίσεις x_i οι οποίες βρίσκονται σε καλά κατασκευασμένους υποχώρους, $K_i[A, r^{(0)}]$, που ορίζονται από τα διανύσματα $r^{(0)}, Ar^{(0)}, A^2r^{(0)}, \dots, A^{i-1}r^{(0)}$, όπου $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ το υπόλοιπο της επίλυσης του συστήματος εξισώσεων. Ένας τέτοιος υποχώρος ονομάζεται Krylon υποχώρος τάξεως i . Στη συνέχεια ο Lanczos απέδειξε ότι για τον υποχώρο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα μια ορθοκανονική βάση γεγονός που απλοποίησε σημαντικά τους υπολογισμούς.

Στην μέθοδο GMRES κατασκευάζεται στον Krylon υποχώρο τάξεως k η προσέγγιση $x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k(A, r^{(0)})$. Ο υποχώρος K_k περιγράφεται με την βοήθεια μίας ορθοκανονικής βάσης $V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$ με πρώτο στοιχείο το $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$. Για τον υπολογισμό της ορθοκανονικής βάσης $V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$ του Krylon υποχώρου $K_k \equiv \text{span}\{v^{(1)}, Av^{(1)}, \dots, A^{k-1}v^{(1)}\} = K_k[A, r^{(0)}]$ χρησιμοποιείται η μέθοδος του Arnoldi. Η τελευταία αντί των ιδιοσυναρτήσεων του F υπολογίζει αυτές του upper-Hessenberg πίνακα $H_k = [h_{ij}]$ ($1 \leq i, j \leq k$, $h_{ij} = 0$ $j < i - 1$) για τον οποίο ισχύει ότι:

$$H_k = V_k^T A V_k \quad (4.31)$$

$$AV_k = V_k H_k + h_{k+1,k} [0, \dots, v^{(k+1)}] \rightarrow AV_k = V_{k+1} \tilde{H}_k, \quad \tilde{H}_k = [h_{i,j}]_{1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k} \quad (4.32)$$

Ο αλγόριθμος λειτουργεί ως εξής: Με $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$ κατασκευάζεται μία αλληλουχία ορθοκανονικών διανυσμάτων έτσι ώστε το τελευταίο, $v^{(k+1)}$, να είναι ορθογώνιο στα διανύσματα που συνιστούν τον Krylov χώρο K_k . Η διαδικασία παραγωγής των $v^{(k)}$ βασίζεται στην διαφοροποιημένη μέθοδο Gram-Schmidt [22]. Έτσι έχουμε ότι:

$$x^{(k)} = x^{(0)} + V_k y^{(k)} \rightarrow Ax^{(k)} - b = Ax^{(0)} - b + AV_k y^{(k)} \quad (4.33)$$

για κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα $y^{(k)}$. Αντικαθιστώντας τον ορισμό του H_k στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$r^{(k)} = r^{(0)} - V_{k+1} \tilde{H}_k y^{(k)} = V_{k+1} \left(\|r^{(0)}\| e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)} \right), \quad e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T \quad (4.34)$$

Λόγω της ορθοκανονικότητας των $v^{(k)}$ ισχύει ότι:

$$\|r^{(k)}\| \equiv \beta_k = \left\| \beta_0 e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)} \right\|, \quad \|r^{(0)}\| \equiv \beta_0 \quad (4.35)$$

και τα $y^{(k)}$ επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η Ευκλείδεια νόρμα $\|r^{(k)}\| = \|b - Ax^{(k)}\|^2$. Αυτό συνιστά ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων το οποίο, με δεδομένη την μορφή του H_k λύνεται χωρίς ιδιαίτερες υπολογιστικές απαιτήσεις. Επίσης, για την μείωση των απαιτήσεων σε μνήμη και του υπολογιστικού φόρτου κατά επανάληψη, λόγω υπέρμετρης αύξησης του μεγέθους του H_k , υπάρχει η δυνατότητα επανεκκίνησης του αλγορίθμου κάθε m βήματα, όπου m είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος. Ο αλγόριθμος της GMRES περιγράφεται συνοπτικά ως εξής [23]:

- Επιλέγεται μια αρχική πρόβλεψη $x^{(0)}$ και υπολογίζονται τα:

$$r^{(0)} = f - Ax^{(0)} \text{ και } v^{(1)} = \frac{r^{(0)}}{\|r^{(0)}\|}$$

- Υπολογισμός των $v^{(k)}$ ώστε να ικανοποιείται η ορθοκανονικότητα. Επαναλαμβάνεται για $j=1, 2, \dots, m$

$$h_{i,j} = (Av^{(j)}, v^{(i)}), \text{ για } i=1, 2, \dots, j$$

$$\hat{v}^{(j+1)} = Av^{(j)} - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v^{(i)}$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{v}^{(j+1)}\|, \quad v^{(j+1)} = \frac{\hat{v}^{(j+1)}}{h_{j+1,j}}$$

- Υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση

$$x^{(m)} = x^{(0)} + V_m y^{(m)} \text{ όπου το } y^{(m)} \text{ ελαχιστοποιεί το μέτρο}$$

$$\| \beta e_1 - \tilde{H}_m y \|, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

- Η διαδικασία ξεκινάει πάλι και υπολογίζεται το $r^{(m)} = f - Ax^{(m)}$

Σε περίπτωση που ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, $\beta_k < \tau \beta_0$, $\tau \ll 1$, σταματάμε.

Αν δεν ικανοποιείται τίθεται $x^{(0)} = x^{(m)}$ και $v^{(1)} = \frac{r^{(m)}}{\|r^{(m)}\|}$ και

επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα.

4.6.2 Εφαρμογή GMRES

Η GMRES είναι μια επαναληπτική μέθοδος και επομένως συμπεριφέρεται καλύτερα όταν ο πίνακας του συστήματος είναι καλά ορισμένος, δηλαδή εάν δεν έχει μηδενικές τιμές στην κύρια διαγώνιο. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Για το λόγο αυτό, πριν την εφαρμογή της GMRES ο πίνακας θα πρέπει να τροποποιηθεί με κάποιο κατάλληλο preconditioner.

Γενικά, το preconditioning είναι οποιαδήποτε διαδικασία με την οποία τροποποιείται ένα αρχικό γραμμικό σύστημα ώστε να είναι πιο εύκολο να επιλυθεί επαναληπτικά. Αυτό συνήθως ισοδυναμεί με την απαίτηση οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου συστήματος να είναι κατανεμημένες σε ένα όσο το δυνατόν πιο στενό διάστημα γύρω από την μονάδα. Για παράδειγμα, η τροποποίηση ενός συστήματος ώστε όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου να είναι μονάδα αποτελεί μια εξεζητημένη περίπτωση preconditioning όπου εισάγεται ο βοηθητικός πίνακας M , preconditioner, ο οποίος ταυτίζεται με τον A . Τις περισσότερες φορές κατά την εφαρμογή του preconditioning σε ένα σύστημα της μορφής $Ax=b$ εισάγεται ένας απλοποιημένος πίνακας M , ο οποίος διατηρεί όσο πιο πολλά από τα χαρακτηριστικά του A είναι δυνατόν, και τελικά το σύστημα παίρνει μία από τις δύο παρακάτω μορφές:

$$[M^{-1}A]x = M^{-1}b, \quad [AM^{-1}][Mx] = b$$

που είναι γνωστές με το όνομα αριστερό ή δεξί preconditioning. Συνήθως προτιμάται το δεξί preconditioning διότι δεν εξαρτάται η προς ελαχιστοποίηση νόρμα από τον πίνακα M . Στην περίπτωση αυτή, η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται στη



συνέχεια λειτουργεί με τους πίνακες M^{-1} και A [22]. Υπολογίζεται η ορθοκανονική βάση,

$$V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)} \dots v^{(k)}\}, \quad \text{του Krylov υποχώρου}$$

$K_k = \text{span} \{r^{(0)}, AM^{-1}r^{(0)}, (AM^{-1})^2 r^{(0)}, \dots (AM^{-1})^{k-1} r^{(0)}\}$ και τελικά υπολογίζεται

η k προσέγγιση με την βοήθεια του τύπου,

$$x^{(k)} = x^{(0)} + M^{-1}V_k y^{(k)}$$

Έτσι δεν χρειάζεται η αποθήκευση του πίνακα AM^{-1} παρά μόνο η χρήση του αντιστρόφου M^{-1} .

Ένας από τους πιο απλούς και πιο συνηθισμένους τρόπους να οριστεί ένας preconditioner είναι η εφαρμογή Incomplete LU παραγοντοποίησης στον αρχικό πίνακα A . Έτσι ο M^{-1} υπολογίζεται άμεσα με την βοήθεια των L και U . Αν θεωρήσουμε έναν αραιό πίνακα A με στοιχεία a_{ij} με $i, j = 1, \dots, n$ τότε κατά την εφαρμογή του ILU υπολογίζεται ο κάτω τριγωνικός πίνακας L και ο άνω τριγωνικός πίνακας U ώστε το υπόλοιπο $R=LU-A$ να ικανοποιεί κάποιο κριτήριο όπως π.χ. το να μην έχει μηδενικά στοιχεία σε κάποιες συγκεκριμένες θέσεις. Ο αλγόριθμος του ILU βασίζεται στην χρήση της απαλοιφής Gauss ώστε να εξαλείφουν κάποια στοιχεία σε προκαθορισμένες θέσεις εκτός της κυρίας διαγωνίου και μπορεί να περιγραφεί με τα παρακάτω βήματα [24]:

1. For $i=2, \dots, n$ Do:
2. For $k=1, \dots, i-1$ and if $(i,k) \notin P$ Do:
3.
$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$
4. For $j=k+1, \dots, n$ and for $(i,j) \notin P$ Do:
5.
$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$$
6. End do
7. End do
8. End do

όπου το P είναι μια καθορισμένη μηδενική μορφή που ορίζεται ως εξής:

$$P \subset \{(i, j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι σε κάθε βήμα i του αλγόριθμου κατασκευάζεται η αντίστοιχη γραμμή των L και U και η i γραμμή του A μπορεί να ξαναγραφεί με βάση τις γραμμές αυτές. Οι προηγούμενες γραμμές των L και U

$1, \dots, i-1$ χρησιμοποιούνται αλλά δεν τροποποιούνται. Η διαδικασία αυτή δεν γίνεται πλήρως και η έκτασή της καθορίζεται από τη μορφή του υποσυνόλου P.

Η χρήση του Incomplete LU factorization και της GMRES στο συγκεκριμένο πρόβλημα στηρίχτηκε σε υπορουτίνες που διατίθενται στην προσωπική ιστοσελίδα του Youcef Saad.

Στο πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι χρόνοι υπολογισμού για την επίλυση του συστήματος $AX=B$ για διάφορα αριθμητικά πλέγματα με τη μέθοδο GMRES.

Πλέγμα	Χρόνος (min)
200x20	0.17
250x40	0.76
400x20	0.56
500x20	0.86
500x40	2.48
1000x20	2.82

Πίνακας 4.8: Υπολογιστικοί χρόνοι επίλυσης του συστήματος $AX=B$ για διάφορα αριθμητικά πλέγματα με τη μέθοδο GMRES.

Αν συγκρίνουμε τους χρόνους που απαιτεί η GMRES με τους αντίστοιχους χρόνους για απευθείας επίλυση με αντιστροφή που δίνονται στον πίνακα 4.6 φαίνεται καθαρά ότι χρησιμοποιώντας την GMRES οι χρόνοι μειώνονται κατακόρυφα. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το πλέγμα που χρησιμοποιούμε τόσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά των δύο μεθόδων. Κατά συνέπεια, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να προσομοιώσουμε με αριθμητικά πλέγματα που μέχρι τώρα ήταν απαγορευτικά.

Τέλος, σημειώνεται ότι κατά την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων υπάρχουν περιπτώσεις όπου παρά την πολύ μεγάλη βελτίωση της μεθοδολογίας επίλυσης με την εισαγωγή της μεθόδου GMRES, οι υπολογιστικοί χρόνοι εξακολουθούν να είναι αρκετά μεγάλοι λόγω του μεγάλου χρονικού διαστήματος που χρειάζεται να καλύψει η χρονική ολοκλήρωση. Οι περιπτώσεις αυτές αναφέρονται κυρίως σε περιοδικές ή μη γραμμικές διαταραχές καθώς και σε φαινόμενα απόλυτων ασταθειών.

4.7 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προκύπτουν από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για την αριθμητική επίλυση των ροών που μελετώνται στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία είναι:

- Οι συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange αδυνατούν να δώσουν σωστή λύση για τις ροές αυτές, ενώ χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις cubic splines παίρνουμε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η διαφορά αυτή αποδίδεται στις καλύτερες ιδιότητες των συναρτήσεων splines αφού είναι μεγαλύτερης τάξης από τις lagrange και επιτρέπουν τη συνέχεια της πρώτης και δεύτερης παραγώγου.
- Χρησιμοποιώντας ελεύθερες οριακές συνθήκες στο δεξί άκρο της περιοχής προσομοίωσης μπορούμε να καθυστερήσουμε την ανάντη επίδραση για μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης και να μειώσουμε αρκετά τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο. Παρόλα αυτά η ανάντη επίδραση δεν μπορεί να εξαλειφθεί εντελώς εξαιτίας της σχέσης που χρησιμοποιείται για την πίεση.
- Η ανάντη επίδραση από τη χρήση οριακών συνθηκών στο δεξί άκρο αντιμετωπίζεται και με χρήση περιοδικών συνθηκών. Το μειονέκτημα τους είναι ότι πρέπει η περιοχή προσομοίωσης να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην φτάσει η διαταραχή στο δεξί άκρο, γιατί τότε θα εισέλθει πάλι από το αριστερό άκρο. Παρόλα αυτά παρατηρήθηκε ότι οι περιοδικές συνθήκες συμπεριφέρονται καλύτερα κατά την επίλυση της ροής αέρα πάνω από το υγρό φιλμ για περιπτώσεις όπου θέλουμε να προσομοιώσουμε μη γραμμικά φαινόμενα ή φαινόμενα που θέλουν αρκετό χρόνο να εξελιχθούν.
- Κατά την αριθμητική προσομοίωση της ροής αέρα που αλληλεπιδρά με λεπτό υγρό φιλμ απαιτείται μεγάλος υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων στην αέρια φάση. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται ως ένα βαθμό θεωρώντας ότι η ιακωβιανή του συστήματος δεν μεταβάλλεται πολύ γρήγορα, και συνεπώς μπορούμε να την διατηρήσουμε σταθερή για αρκετά χρονικά βήματα.
- Σε προβλήματα όπου απαιτείται προσομοίωση για μεγάλους χρόνους με πυκνό πλέγμα και με μικρό χρονικό βήμα η παραπάνω διαδικασία δεν αρκεί για να μειώσει ικανοποιητικά τον απαιτούμενο χρόνο. Για τέτοιες περιπτώσεις η επίλυση μπορεί να γίνει μόνο με χρήση της GMRES η οποία βελτιώνει θεαματικά τις απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΡΟΗΣ ΑΕΡΑ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΠΛΑΚΑ

5.1 Γενικά

Η επίλυση της ροής αέρα με υψηλό αριθμό Re πάνω από επίπεδη πλάκα μήκους L είχε ως στόχο να αναπτυχθεί μια βελτιωμένη μεθοδολογία που να μπορεί να παρέχει ακριβή αποτελέσματα σε προβλήματα εξωτερικών ροών με έντονη συναγωγή. Η ανάπτυξη της μεθοδολογίας αυτής περιγράφηκε διεξοδικά στο κεφάλαιο 4. Εξίσου σημαντικό όμως με την ανάπτυξη μιας τέτοιας μεθοδολογίας είναι και ο έλεγχος της αξιοπιστίας της. Έτσι, για τον έλεγχο της αξιοπιστίας τόσο της μεθοδολογίας όσο και του κώδικα που αναπτύχθηκε έγινε προσπάθεια να ανακτηθούν αριθμητικά τα αποτελέσματα της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας για τα κύματα Tollmien-Schlichting.

5.2 Ανάκτηση κυμάτων Tollmien-Schlichting

Για την προσομοίωση των κυμάτων Tollmien-Schlichting, επιβάλλεται σε κάποιο σημείο της ροής (X_0, Y_0) μια διαταραχή στιγμιαία ή περιοδική και στην συνέχεια συγκρίνονται το μήκος κύματος, η περίοδος και η ταχύτητα του κυματοπακέτου που προκύπτει αριθμητικά με τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας. Η διαταραχή που επιβάλλεται στο σύστημα είναι της μορφής:

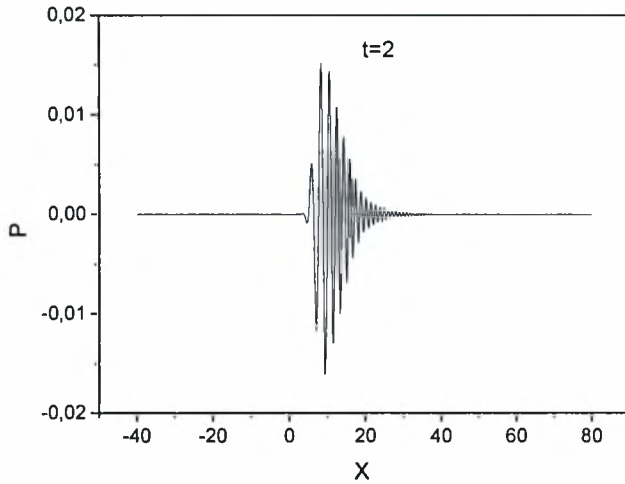
$$D = \delta \exp[-W(X - X_0)^2] \exp[-W(Y - Y_0)^2] \cos(\omega_f t)$$

όπου το δ είναι παράμετρος που καθορίζει το μέγεθος της διαταραχής και το W την έκταση της στο χώρο. Αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής ήταν να ανακτηθεί η συναγωγική συμπεριφορά των κυμάτων Tollmien-Schlichting και να υπολογιστούν με ακρίβεια το μήκος κύματος, η περίοδος και η ταχύτητα τους.

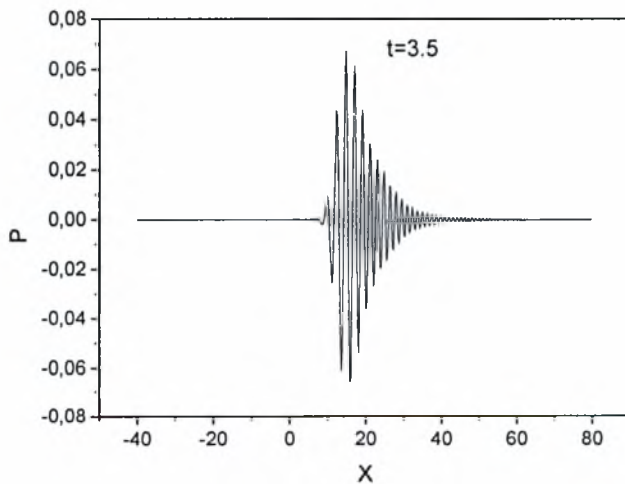
5.2.1 Εφαρμογή δελτοειδούς διαταραχής

Ως πρώτη δοκιμή εφαρμόστηκε στο σύστημα τη χρονική στιγμή $t=0$ μια στιγμιαία γραμμική διαταραχή με $\delta=0.001$ και $W=4$ στη θέση $x=1$. Σύμφωνα με τη θεωρία, σε μια τέτοια περίπτωση θα εμφανιστεί το πιο επικίνδυνο κύμα τα χαρακτηριστικά του οποίου προκύπτουν από την επίλυση της σχέσης διασποράς για μέγιστη ταχύτητα κυματοπακέτου. Για τον υπολογισμό του αριθμητικού μήκους κύματος της διαταραχής εφαρμόζεται μετασχηματισμός FFT (Fast Fourier Transform) σε ένα στιγμιότυπο της διαταραχής. Πρέπει να σημειωθεί ότι είναι σημαντικό το στιγμιότυπο αυτό να ληφθεί σε χρόνο αρκετά μεγαλύτερο από την

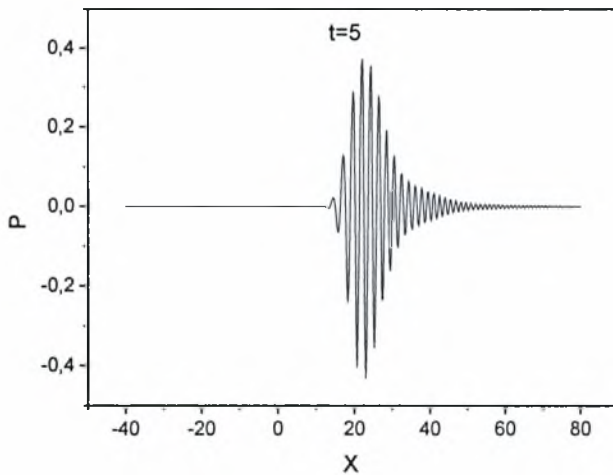
περίοδο του κυματοπακέτου ώστε να ισχύουν τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας. Στα διαγράμματα 5.1 έως 5.3 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα της πίεσης και στο διάγραμμα 5.4 η ανάλυση FFT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.



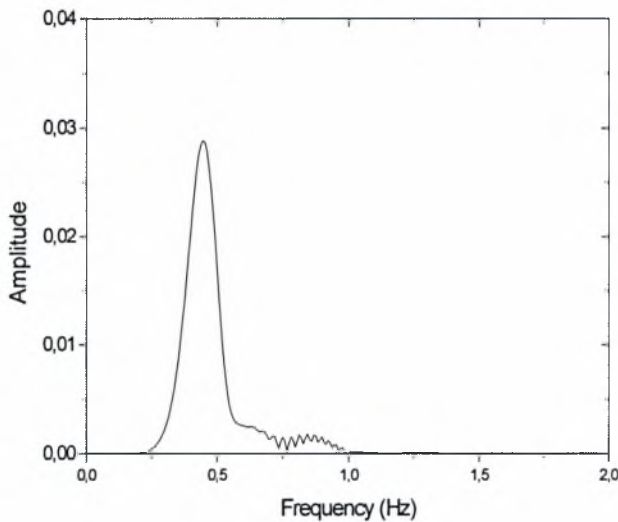
Διάγραμμα 5.1: Στιγμιότυπο της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=2$.



Διάγραμμα 5.2: Στιγμιότυπο της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=3.5$.



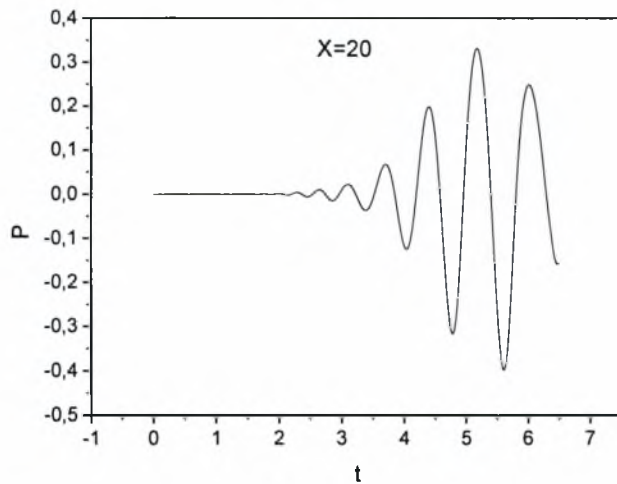
Διάγραμμα 5.3: Στιγμιότυπο της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=5$.



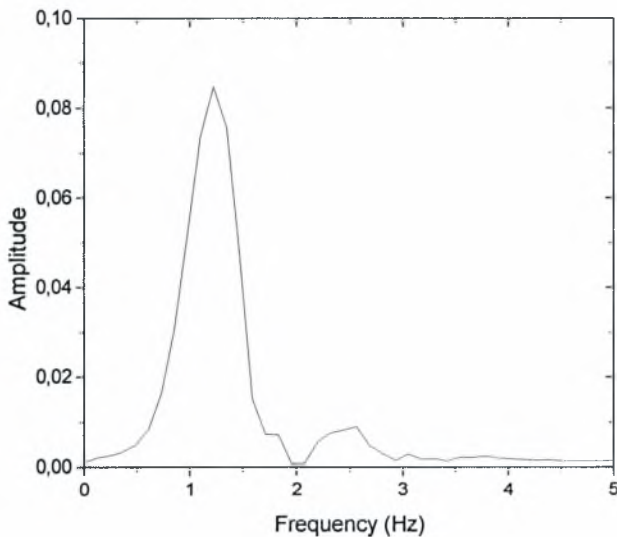
Διάγραμμα 5.4: Ανάλυση FFT στα δεδομένα του διαγράμματος 5.3 για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.

Ανάλογα, ο υπολογισμός της περιόδου του κυματοπακέτου γίνεται με μετασχηματισμό FFT στην χρονική εξέλιξη της διαταραχής για μια δεδομένη θέση. Στην περίπτωση αυτή, για να ισχύουν τα αποτελέσματα της θεωρίας θα πρέπει η απόσταση της θέσης που θα επιλεγεί από το σημείο επιβολής της διαταραχής να είναι αρκετά μεγαλύτερη από το μήκος κύματος του κυματοπακέτου. Στο διάγραμμα 5.5

δίνεται για τη θέση $X=20$ η χρονική εξέλιξη της πίεσης και στο διάγραμμα 5.6 η ανάλυση FFT για τον υπολογισμό της περιόδου.



Διάγραμμα 5.5: Χρονική εξέλιξη της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή στη θέση $X=20$.



Διάγραμμα 5.6: Ανάλυση FFT στα δεδομένα του διαγράμματος 5.5 για τον υπολογισμό της περιόδου.

Τέλος, η ταχύτητα του κυματοπακέτου προκύπτει από το λόγο της απόστασης που διανύει η κορυφή του κυματοπακέτου σε δεδομένο χρόνο προς το χρόνο αυτό. Στον πίνακα 5.1 δίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα κύματα Tollmien-Schlicting με την αριθμητική προσομοίωση καθώς και οι τιμές που προβλέπει η γραμμική ανάλυση ευστάθειας που παρουσιάστηκε στο τρίτο κεφάλαιο. Είναι

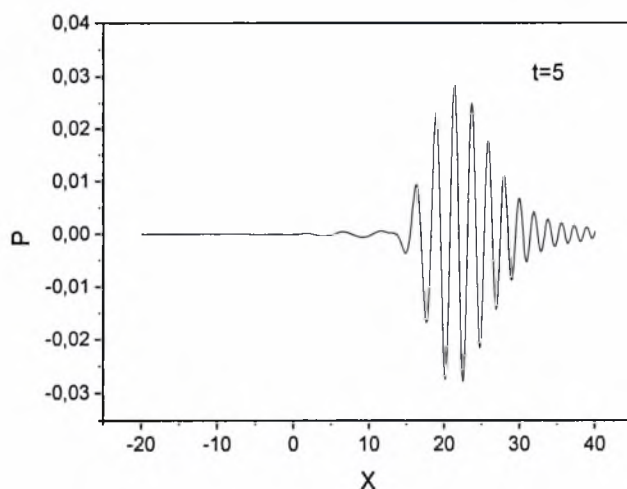
φανερό, ότι το αριθμητικό μοντέλο προβλέπει ικανοποιητικά τα χαρακτηριστικά των κυμάτων Tollmien-Schlichting.

	Γραμμική Θεωρία	Αριθμητική Προσομοίωση
Μήκος κύματος	2.3	2.25
Περίοδος	0.8	0.82
Ταχύτητα κυματοπακέτου	4.5	4.6

Πίνακας 5.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για στιγμιαία διαταραχή.

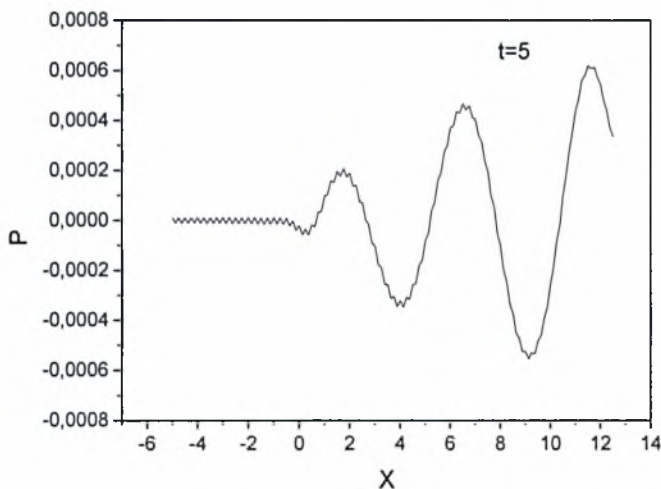
5.2.2 Εφαρμογή περιοδικής διαταραχής

Στην συνέχεια, μελετήθηκε η συμπεριφορά του συστήματος κατά την εφαρμογή περιοδικής διαταραχής συχνότητας ω_f . Στην περίπτωση αυτή, αναμένεται να εμφανιστεί πάλι το πιο επικίνδυνο κύμα με τα χαρακτηριστικά που υπολογίσθηκαν παραπάνω, αλλά και η εμφάνιση κυμάτων που μεταβάλλονται χωρικά και που είναι αποτέλεσμα της συχνότητας που επιβάλλεται. Η δεύτερη αυτή χωρικά περιοδική κατάσταση έχει μήκος κύματος που καθορίζεται από την συχνότητα της διαταραχής και ισούται με $2\pi/k$, όπου k είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού κυματαριθμού που αντιστοιχεί στην πραγματική συχνότητα ω_f . Στο διάγραμμα που ακολουθεί δίνεται ένα στιγμιότυπο της πίεσης για διαταραχή συχνότητας $\omega_f = 3$ και μεγέθους $\delta = 0.001$.



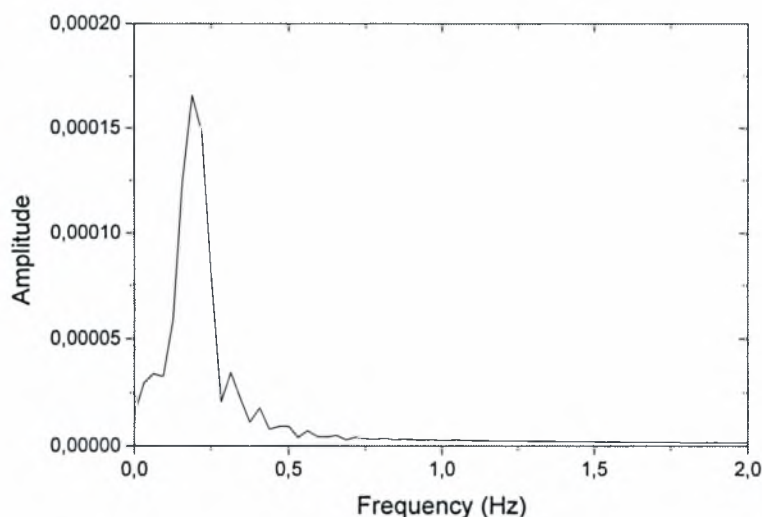
Διάγραμμα 5.7: Στιγμιότυπο της πίεσης τη χρονική στιγμή $t=5$.

Είναι φανερό ότι εμφανίζεται πάλι το πιο επικίνδυνο κύμα όπως και στην περίπτωση της στιγμιαίας δελτοειδούς διαταραχής. Με ανάλυση FFT στο παραπάνω διάγραμμα εύκολα υπολογίζεται το μήκος κύματος, το οποίο είναι σε συμφωνία με τη θεωρία. Επειδή όμως, το πιο επικίνδυνο κύμα είναι συναγωγικώς ασταθές παρατηρούμε ότι καθώς αυτό απομακρύνεται από το σημείο επιβολής της διαταραχής, πίσω του εμφανίζονται τα κύματα που καθορίζονται από την συχνότητα που επιβάλλεται στο σύστημα. Έτσι, αν επικεντρωθούμε στην περιοχή πίσω από το μεγάλο κύμα παρατηρούμε μια διαταραχή που μεταβάλλεται χωρικά όπως απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 5.8: Χωρική μεταβολή της πίεσης στην περίπτωση περιοδικής διαταραχής με συχνότητα $\omega=3$.

Εφαρμόζοντας ανάλυση Fourier στα δεδομένα του διαγράμματος 5.8 υπολογίζεται το μήκος κύματος της χωρικά μεταβαλλόμενης διαταραχής, το οποίο είναι σε συμφωνία με τη θεωρία. Πιο συγκεκριμένα, από την αριθμητική προσομοίωση προκύπτει ότι το μήκος κύματος είναι 5.3, ενώ σύμφωνα με τη θεωρία που παρουσιάστηκε αναλυτικά στο κεφάλαιο 3 το μήκος κύματος για την περίπτωση αυτή είναι ίσο με 5.2.



Διάγραμμα 5.9: Ανάλυση FFT στα δεδομένα του διαγράμματος 5.8 για τον υπολογισμό του μήκους κύματος της περιοδικά χωρικής κατάστασης .

Με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε και παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο κρίνεται αξιόπιστη αφού παρέχει αποτελέσματα για τα κύματα Tollmien-Schlichting που συμφωνούν με τη γραμμική θεωρία τόσο για στιγμιαίες όσο και για περιοδικές διαταραχές.

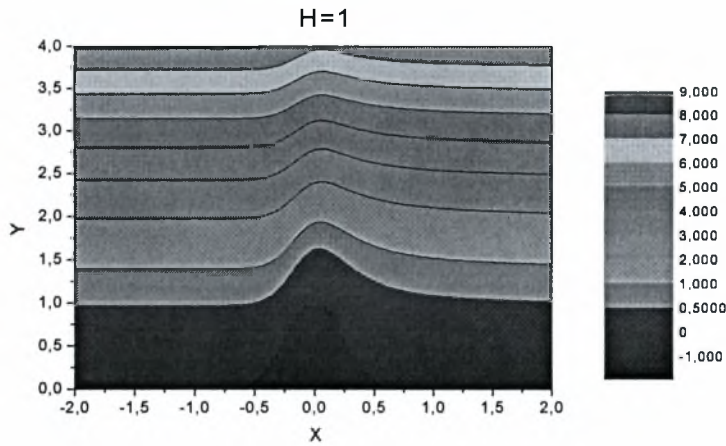
6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΡΟΗΣ ΑΕΡΑ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΕΜΠΟΔΙΟ

6.1 Γενικά

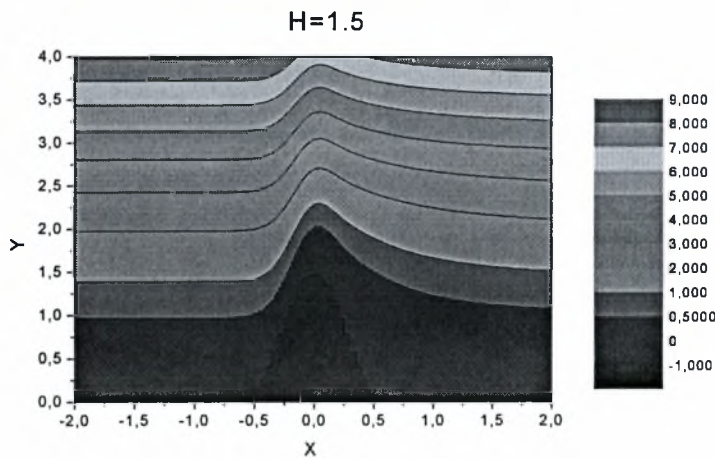
Το δεύτερο πρόβλημα που εξετάστηκε στα πλαίσια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η ροή αέρα με υψηλό αριθμό Re πάνω από εμπόδιο σταθερού ή μεταβλητού ύψους παρόμοιας τάξης μεγέθους με αυτό του ιξώδους υποστρώματος, $LRe^{-3/8}$. Η μελέτη της ροής αυτής έχει δυο στόχους: να κατανοηθεί η αλληλεπίδραση συνοριακού στρώματος και εμποδίου και να μελετηθεί η αστάθεια Rayleigh η οποία αφορά ροές που παρουσιάζουν σημεία καμπής στο βασικό προφίλ ταχυτήτων. Για το σκοπό αυτό, αρχικά μελετήθηκε η ροή πάνω από σταθερό εμπόδιο και προσδιορίστηκε το κρίσιμο ύψος πάνω από το οποίο δημιουργείται ανακυκλοφορία. Στη συνέχεια, επιλύθηκε το πρόβλημα για κοιλότητα μεταβλητού βάθους όπου παρατηρήθηκε η περιοδική δημιουργία δινών ανακυκλοφορίας. Τέλος χρησιμοποιήθηκε εμπόδιο μεταβλητού ύψους και η μελέτη επικεντρώθηκε στο μηχανισμό δημιουργίας και απόσπασης δινών καθώς και στις συνθήκες κάτω από τις οποίες εμφανίζεται η αστάθεια Rayleigh. Για την απλοποίηση της επίλυσης, ακολουθώντας την βιβλιογραφία [12], θεωρήθηκε ότι το τοίχωμα αποτελεί μέρος συμμετρικού αγωγού [13] και κατά συνέπεια το πάχος μετατόπισης είναι μηδέν.

6.2 Αποτελέσματα ροής πάνω από σταθερό εμπόδιο

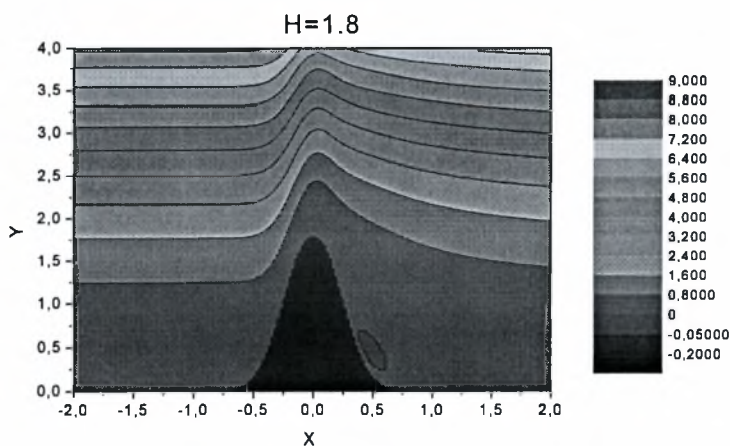
Αρχικά, επιλύθηκε η ροή του αέρα πάνω από εμπόδιο σταθερού ύψους. Για την περιγραφή του εμποδίου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $f(x) = H \exp\left(\frac{-x^2}{\Lambda}\right)$, όπου το H είναι παράμετρος που καθορίζει το ύψος του και το Λ καθορίζει την έκτασή του κατά τη διεύθυνση της ροής. Το πρόβλημα επιλύθηκε για εμπόδια διαφορετικού ύψους και εξετάστηκε η επίδραση τους στην ροή του αέρα. Στα διαγράμματα που ακολουθούν δίνεται ενδεικτικά το πεδίο ροής πάνω από εμπόδια χαρακτηριστικού αδιάστατου ύψους $H=1, 1.5, 1.8$ και 2 . Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν θεωρώντας μόνιμη κατάσταση και χρησιμοποιώντας χωρικό βήμα 0.05 και στις δυο κατευθύνσεις.



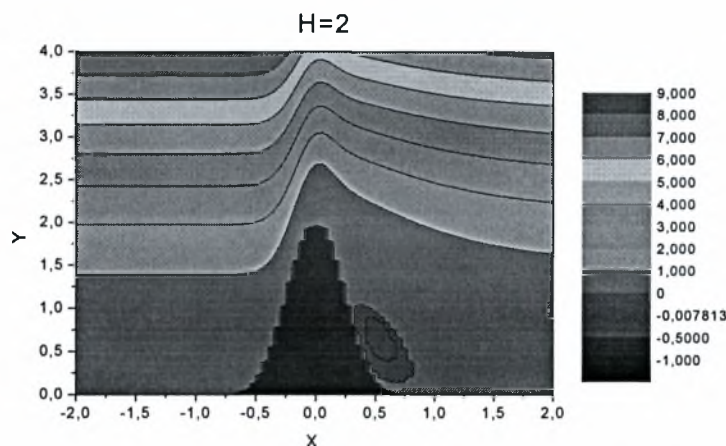
Διάγραμμα 6.1: Ροϊκό πεδίο πάνω από εμπόδιο με $H=1$ για μόνιμη κατάσταση.



Διάγραμμα 6.2: Ροϊκό πεδίο πάνω από εμπόδιο με $H=1.5$ για μόνιμη κατάσταση.



Διάγραμμα 6.3: Ροϊκό πεδίο πάνω από εμπόδιο με $H=1.8$ για μόνιμη κατάσταση.



Διάγραμμα 6.4: Ροϊκό πεδίο πάνω από εμπόδιο με $H=2$ για μόνιμη κατάσταση.

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της μόνιμης κατάστασης για εμπόδια με ύψος μεγαλύτερα του 1.8 έχουμε την εμφάνιση δινών ανακυκλοφορίας πίσω από αυτά. Όπως είναι αναμενόμενο, η ανακυκλοφορία γίνεται πιο έντονη καθώς το ύψος του εμποδίου αυξάνεται. Τέλος, σημειώνεται ότι σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις έγινε πύκνωση του αριθμητικού πλέγματος χρησιμοποιώντας χωρικό βήμα 0.025 και στις δυο κατευθύνσεις η οποία οδήγησε σε σύγκλιση των αποτελεσμάτων.

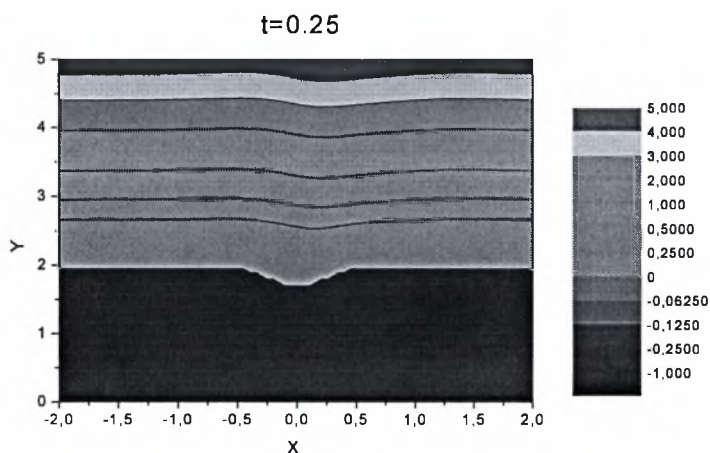
6.3 Αποτελέσματα ροής πάνω από κοιλότητα μεταβλητού βάθους

Μετά την επίλυση του προβλήματος πάνω από σταθερό εμπόδιο, έγινε προσομοίωση της ροής πάνω από κοιλότητα το βάθος της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο. Για την περιγραφή της κοιλότητας χρησιμοποιήθηκε η σχέση

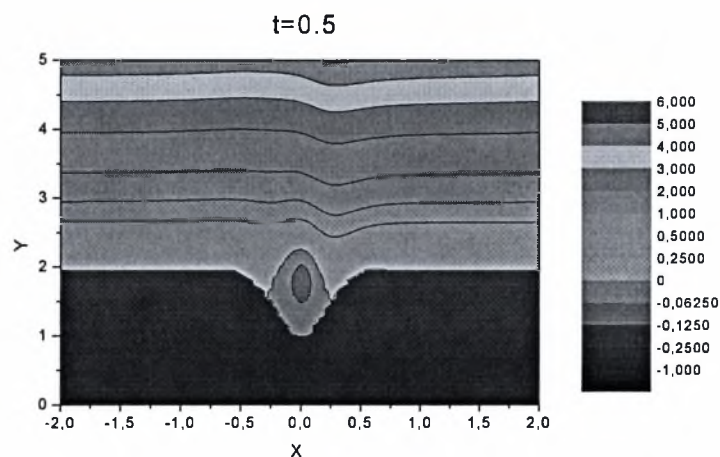
$$f(x) = H \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\omega t\right) \exp\left(\frac{-x^2}{\Lambda}\right),$$

όπου το H είναι παράμετρος που παίρνει αρνητικές

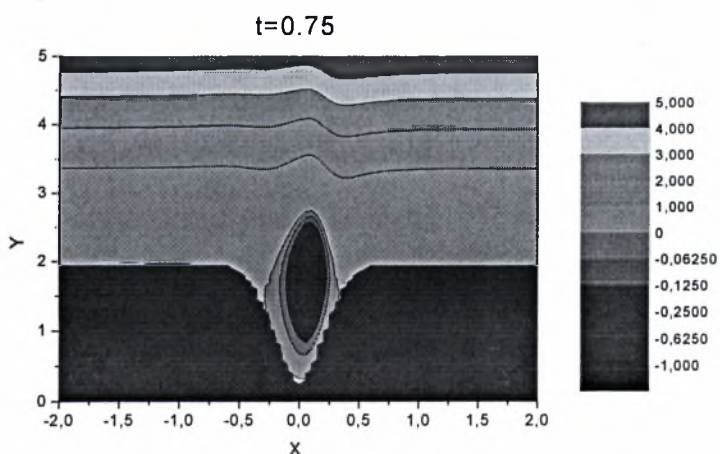
τιμές και που καθορίζει το μέγιστο βάθος της, ενώ το Λ καθορίζει την έκταση της κατά τη διεύθυνση της ροής και επιλέχθηκε ίσο με 0.1. Στα διαγράμματα που παρατίθενται στη συνέχεια δίνονται στιγμιότυπα του πεδίου ροής πάνω από κοιλότητα μέγιστου βάθους 2 η οποία ταλαντώνεται με συχνότητα 1. Για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων αυτών χρησιμοποιήθηκε χωρικό βήμα 0.05 στη x-κατεύθυνση και 0.1 στη y-κατεύθυνση.



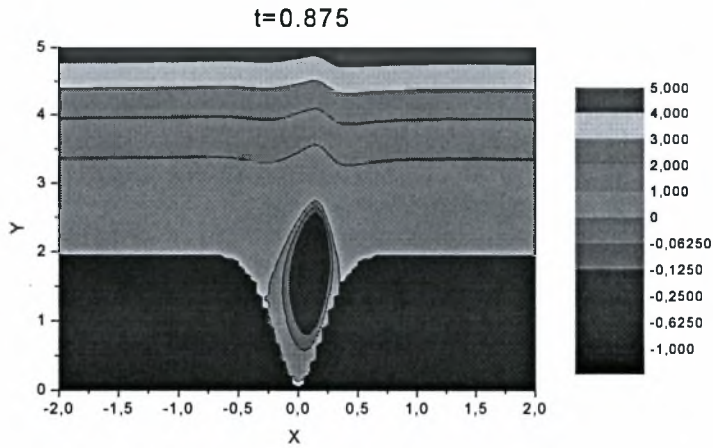
Διάγραμμα 6.5: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=0.25$.



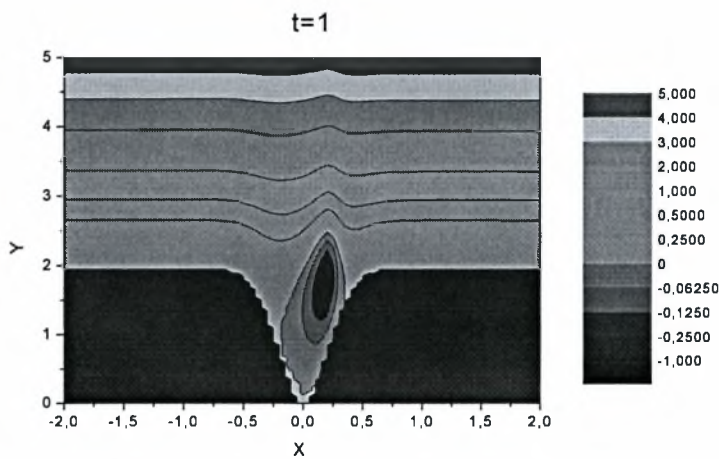
Διάγραμμα 6.6: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=0.5$.



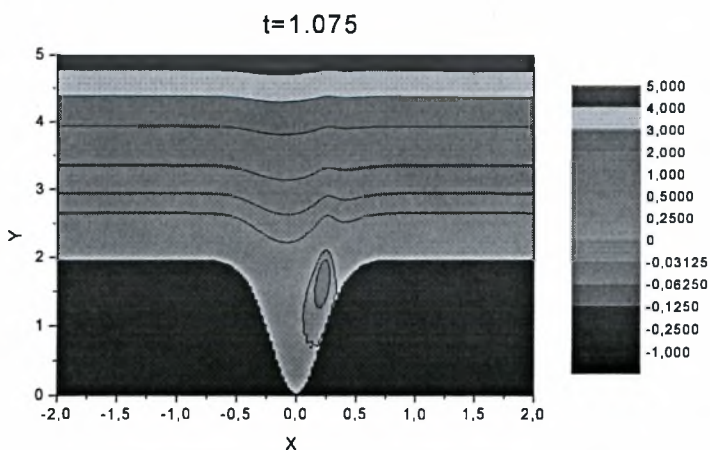
Διάγραμμα 6.7: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=0.75$.



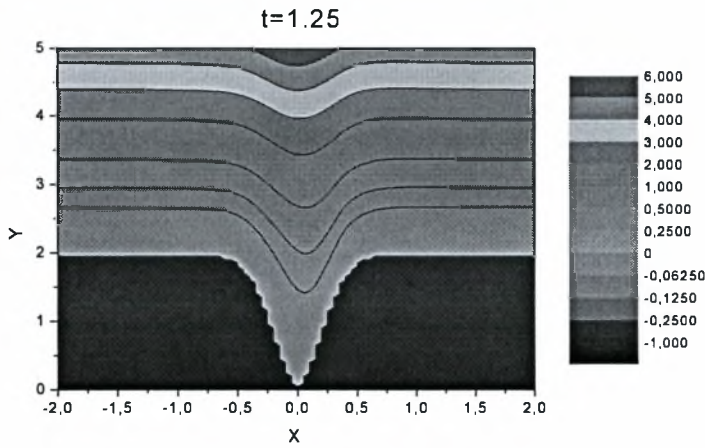
Διάγραμμα 6.8: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=0.875$.



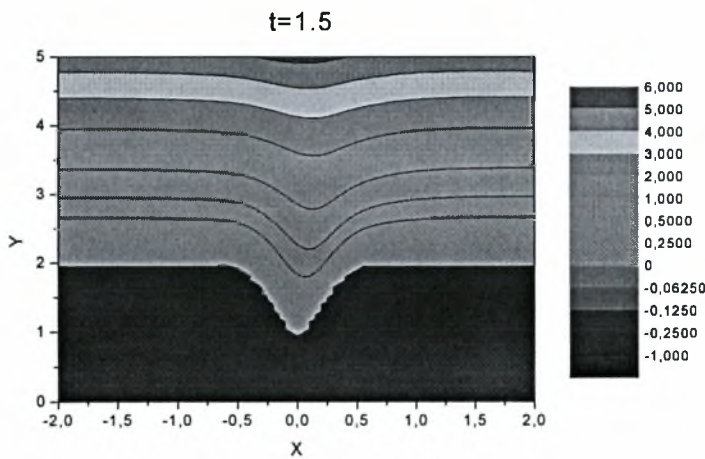
Διάγραμμα 6.9: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1$.



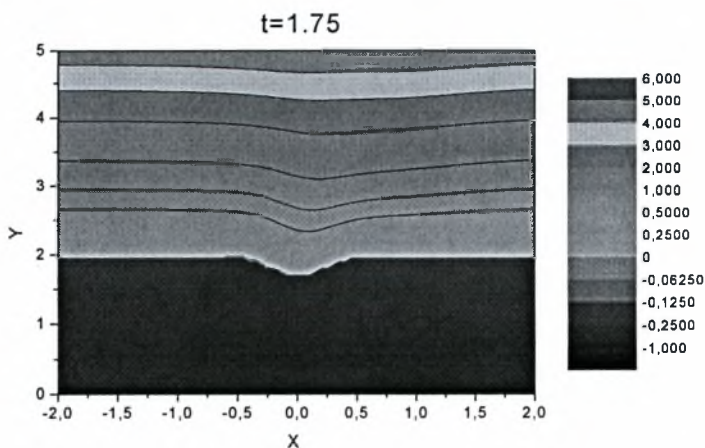
Διάγραμμα 6.10: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.075$.



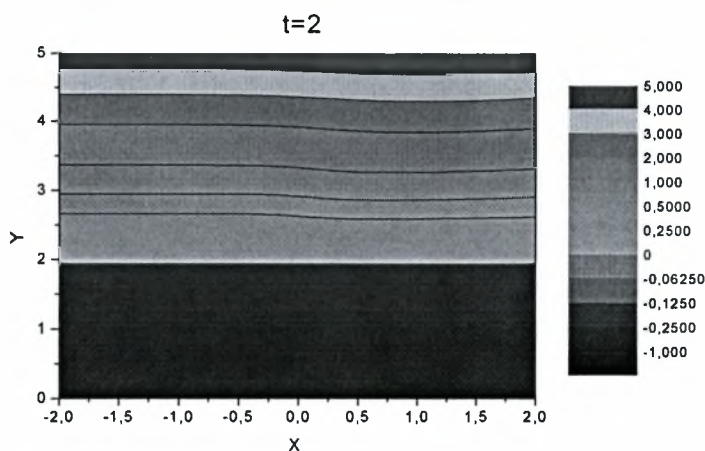
Διάγραμμα 6.11: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.25$.



Διάγραμμα 6.12: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.5$.



Διάγραμμα 6.13: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.75$.



Διάγραμμα 6.14: Ροϊκό πεδίο για $H=-2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=2$.

Όπως είναι φανερό από τα παραπάνω διαγράμματα, καθώς το βάθος της κοιλότητας αυξάνεται ($t < 1$) αρχίζει να δημιουργείται μέσα σε αυτή μια δίνη ανακυκλοφορίας. Η ανακυκλοφορία γίνεται πιο έντονη όσο μεγαλώνει η κοιλότητα. Στην συνέχεια, και καθώς η κοιλότητα αρχίζει να επανέρχεται στην αρχική της θέση ($t > 1$) παρατηρούμε ότι η δίνη μικραίνει και τελικά εξαφανίζεται. Όταν έχει ολοκληρωθεί μια περίοδος ταλάντωσης της κοιλότητας ($t=2$) η ροή μοιάζει σχεδόν αδιατάρακτη.

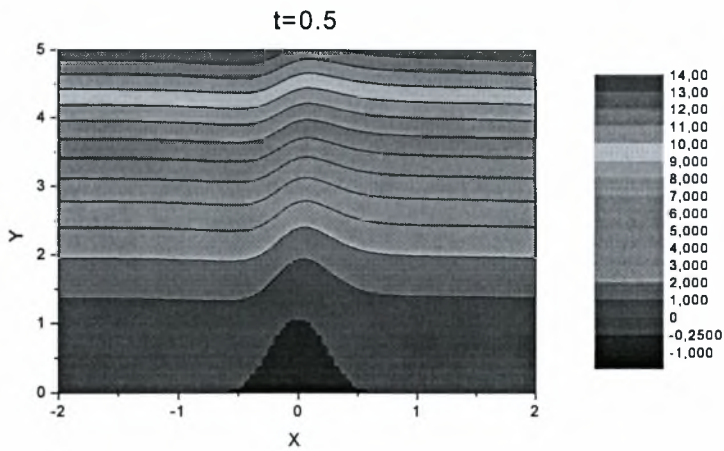
6.4 Αποτελέσματα ροής πάνω από εμπόδιο μεταβλητού ύψους

Η τελευταία περίπτωση που εξετάστηκε είναι αυτή της ροής αέρα πάνω από εμπόδιο με ύψος που μεταβάλλεται με το χρόνο. Για την περιγραφή του εμποδίου

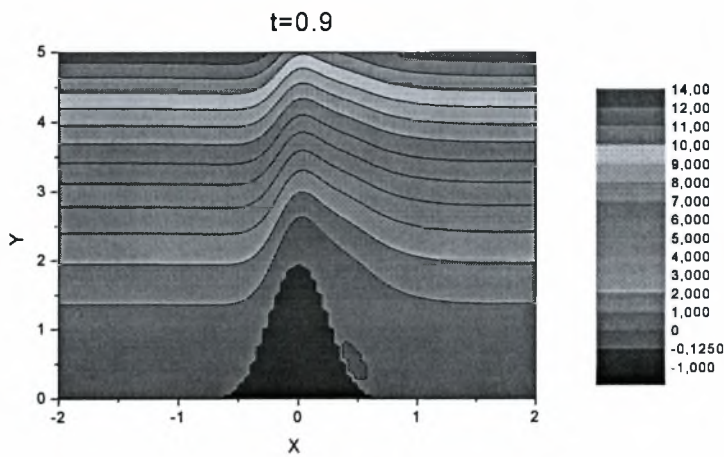
χρησιμοποιήθηκε πάλι η σχέση $f(x) = H \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\omega t\right) \exp\left(\frac{-x^2}{\Lambda}\right)$, όπου το H είναι

παράμετρος με θετικές τιμές που καθορίζει το μέγιστο ύψος του εμποδίου, και το Λ καθορίζει την έκταση του κατά τη διεύθυνση της ροής. Όπως και στην περίπτωση της κοιλότητας για το Λ επιλέχθηκε η τιμή 0.1.

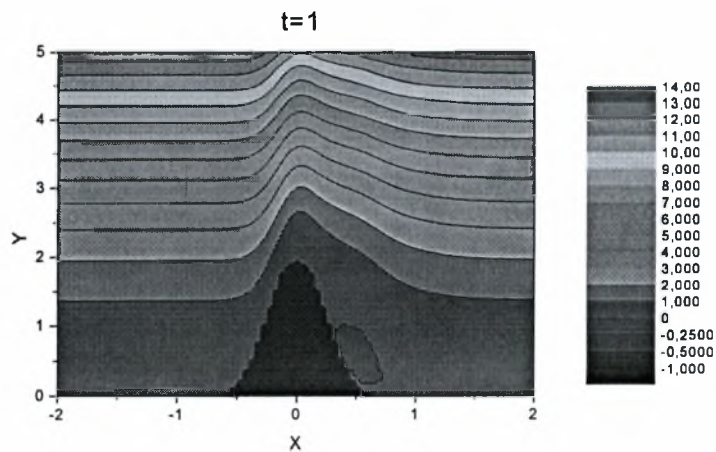
Στα διαγράμματα που ακολουθούν δίνονται τα αποτελέσματα για ροή πάνω από εμπόδιο μέγιστου ύψους 2 με συχνότητα ταλάντωσης 1. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν με χωρικό βήμα στη x-κατεύθυνση $dx=0.05$, στη y-κατεύθυνση $dy=0.1$ και χρονικό βήμα $dt=0.025$.



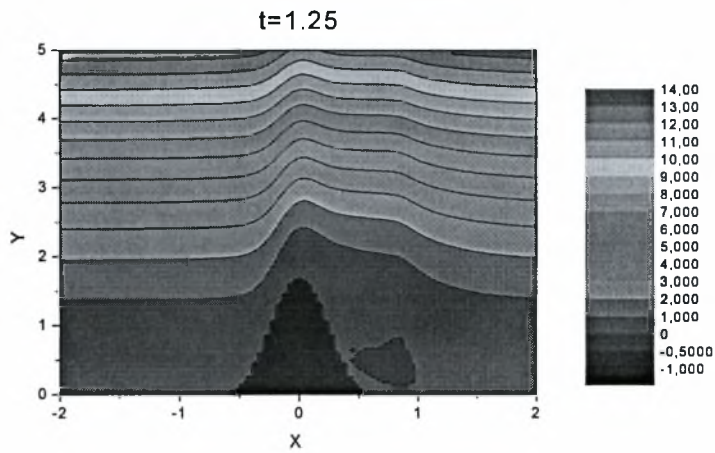
Διάγραμμα 6.15: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=0.5$.



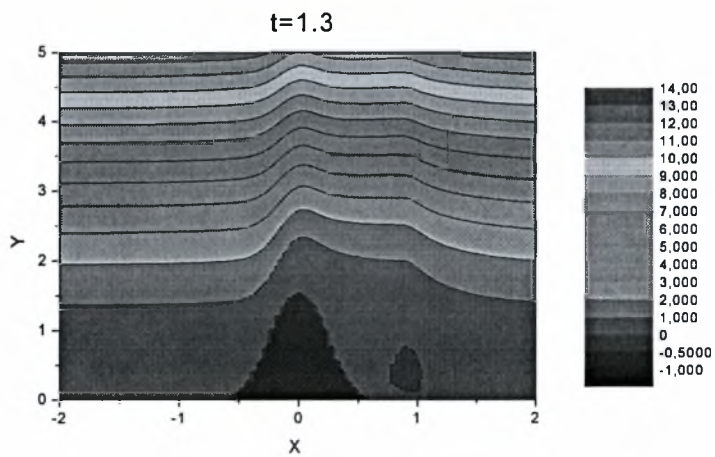
Διάγραμμα 6.16: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=0.9$.



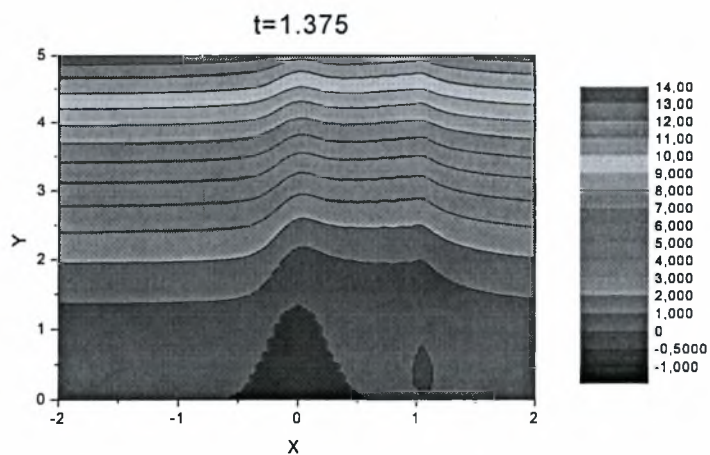
Διάγραμμα 6.17: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1$.



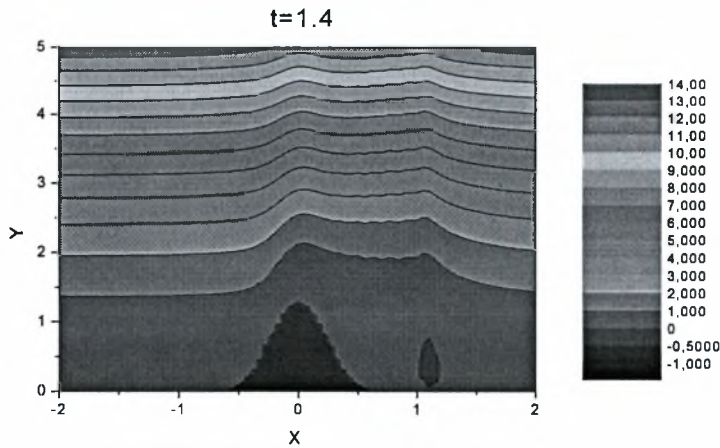
Διάγραμμα 6.18: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.25$.



Διάγραμμα 6.19: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.3$.

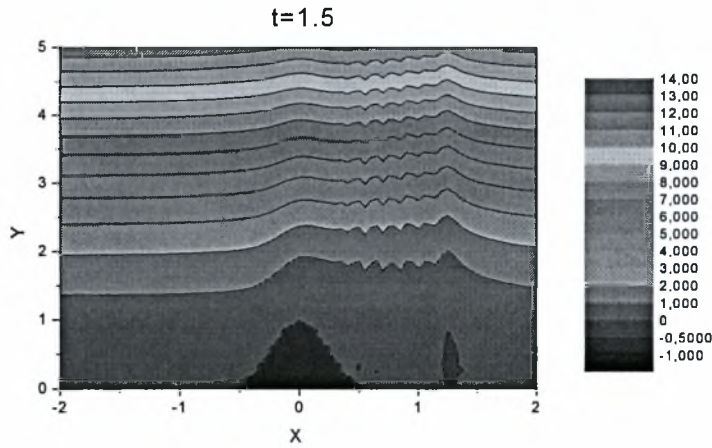


Διάγραμμα 6.20: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.375$.

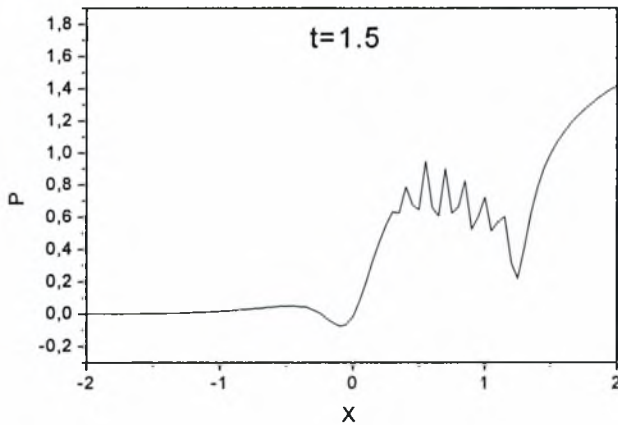


Διάγραμμα 6.21: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.4$.

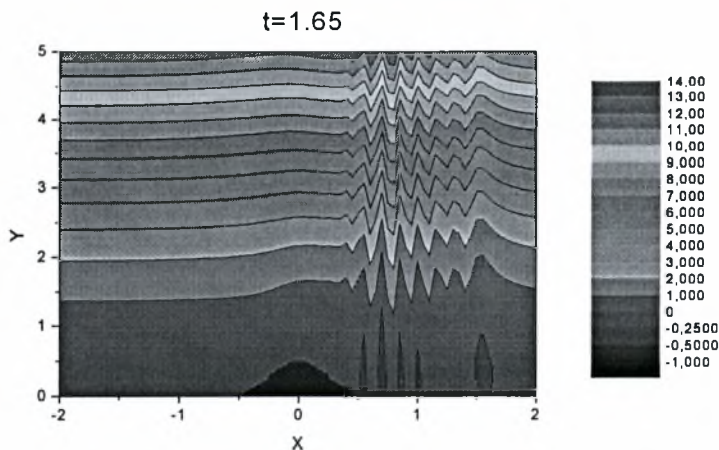
Από τα διαγράμματα παρατηρούμε ότι καθώς το ύψος του εμποδίου αυξάνεται ($t < 1$) πίσω του εμφανίζεται μια δίνη ανακυκλοφορίας. Η εμφάνιση της δίνης γίνεται περίπου τη χρονική στιγμή 0.9 όπου το εμπόδιο έχει φτάσει σε ύψος 1.8. Όπως είδαμε και κατά την επίλυση της ροής πάνω από σταθερό εμπόδιο αυτό είναι το κρίσιμο ύψος πάνω από το οποίο δημιουργείται ανακυκλοφορία. Όταν το εμπόδιο αρχίζει να καταβαίνει ($t > 1$) η δίνη δεν εξαφανίζεται αλλά αποσπάται και μεταφέρεται με τη βοήθεια της ροής μακριά από το σημείο εμφάνισής της. Επίσης, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του εμποδίου μέγιστου ύψους 2 η προσομοίωση δεν μπορεί να προχωρήσει σε χρονικές στιγμές μεγαλύτερες του 1.4, αφού έχουμε την εμφάνιση αστάθειας Rayleigh. Η αστάθεια αυτή φαίνεται καθαρά στα διαγράμματα 6.22 και 6.24 τα οποία αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές 1.5 και 1.6 αντίστοιχα. Στα διαγράμματα 6.23 και 6.25 δίνεται η μορφή της πίεσης στο πεδίο ροής για τις παραπάνω χρονικές στιγμές.



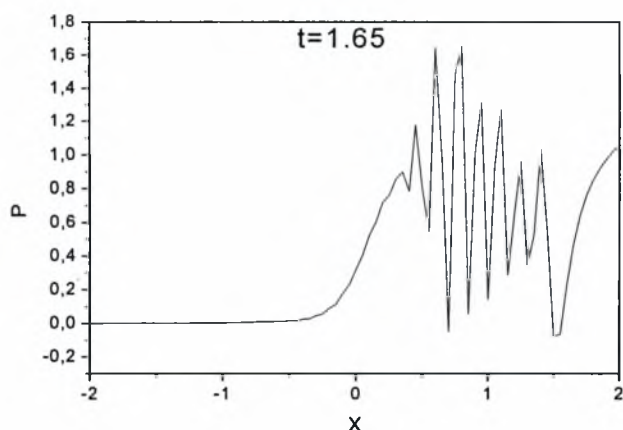
Διάγραμμα 6.22: Αστάθεια Rayleigh στο ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.5$.



Διάγραμμα 6.23: Πεδίο πίεσης για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.5$.

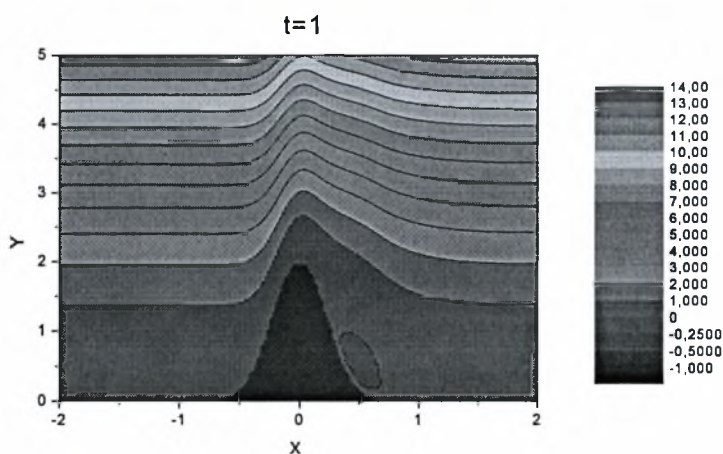


Διάγραμμα 6.24: Αστάθεια Rayleigh στο ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.65$.

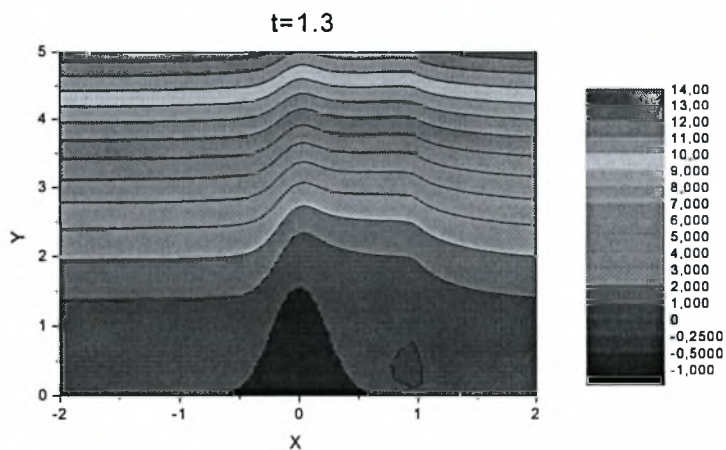


Διάγραμμα 6.25: Πεδίο πίεσης για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.5$.

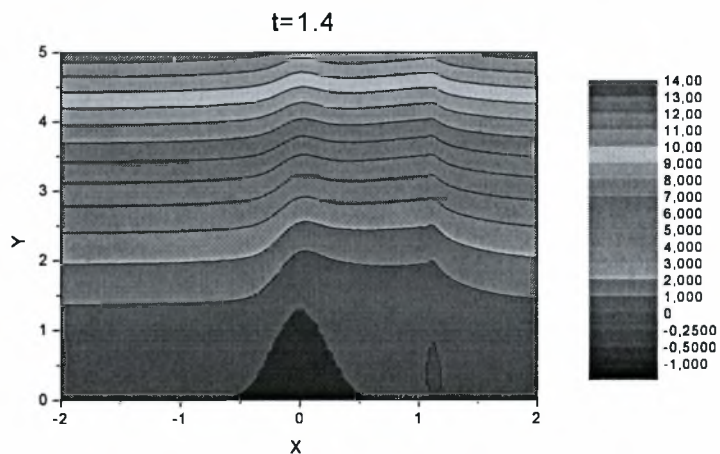
Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι στα ίδια αποτελέσματα καταλήξαμε και με πύκνωση του αριθμητικού πλέγματος, όπως φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα τα οποία αντιστοιχούν σε χωρικό βήμα στη x -κατεύθυνση $dx=0.25$ και χρονικό βήμα $dt=0.0125$. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει ότι η εμφάνιση της αστάθειας δεν οφείλεται σε αριθμητικό σφάλμα.



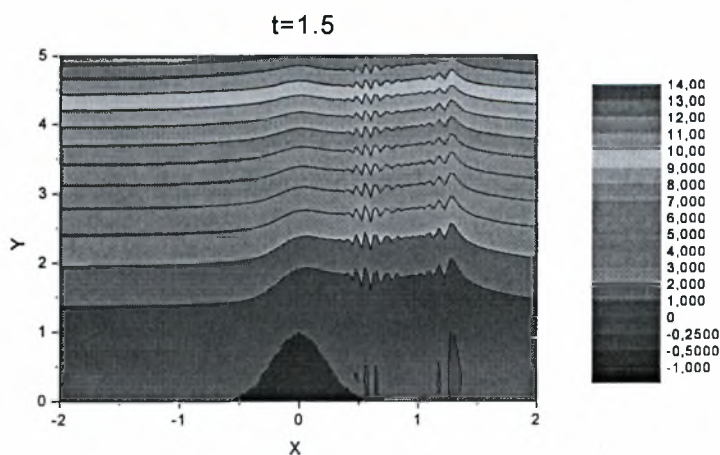
Διάγραμμα 6.26: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1$ με $dx=0.025$.



Διάγραμμα 6.27: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.3$ με $dx=0.025$.



Διάγραμμα 6.28: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.4$ με $dx=0.025$.



Διάγραμμα 6.29: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=1$ τη χρονική στιγμή $t=1.5$ με $dx=0.025$.

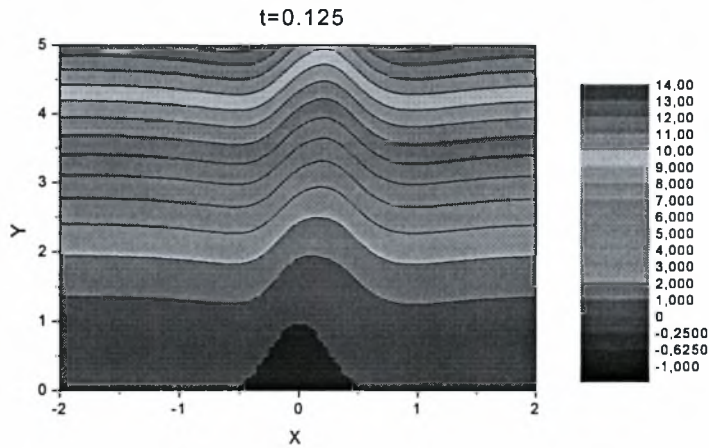
Στο διαγράμματα που αντιστοιχούν σε χρόνους μεγαλύτερους του 1.4 φαίνεται καθαρά η εμφάνιση αστάθειας Rayleigh καθώς και μια ένδειξη ότι ίσως υπάρχει εκεί κάποιος μηχανισμός σπασίματος των δινών. Η παρατήρηση αυτή είναι σε συμφωνία με την ανάλυση των Tutty & Cowley για ροές πάνω από εμπόδια πρώτης τάξεως [12].

Έτσι, για την περίπτωση ροής πάνω από εμπόδιο μέγιστου ύψους 2 με συχνότητα ταλάντωσης 1 η αριθμητική επίλυση μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα μέχρι περίπου τη χρονική στιγμή 1.4 πέρα από την οποία έχουμε αστάθεια Rayleigh και κατά πάσα πιθανότητα κάποιον μηχανισμό σπασίματος των δινών που δημιουργούνται.

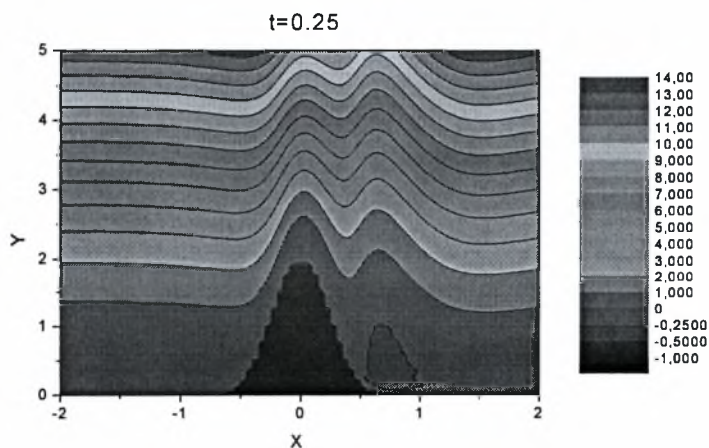
Όπως προαναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3 η αστάθεια Rayleigh αφορά διαταραχές με μικρότερα μήκη κύματος από το χαρακτηριστικό μήκος του εμποδίου και σύμφωνα με τη σχέση διασποράς για το συγκεκριμένο πρόβλημα ο ρυθμός αύξησης της είναι ανάλογος του κυματαριθμού. Αυτό σημαίνει ότι όσο μικρότερα μήκη κύματος επιτρέπουμε και κατά συνέπεια μεγαλύτερους κυματαριθμούς τόσο μεγαλύτερος είναι ο ρυθμός αύξησης της αστάθειας που εμφανίζεται. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι η αστάθεια που παρατηρήθηκε στις παραπάνω προσομοιώσεις είναι αποτέλεσμα της χρήσης των μοντέλων που προτείνει η θεωρία της τριπλής στιβάδας. Δηλαδή, εκτιμάται ότι η εισαγωγή των μικρών κλιμάκων μήκους στην x-κατεύθυνση ($Re^{-3/8}$) και y-κατεύθυνση ($Re^{-5/8}$) επιτρέπει στα μήκη κύματος της αστάθειας Rayleigh να αναπτυχθούν. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι σε τέτοιου είδους προβλήματα το αριθμητικό μοντέλο της τριπλής στιβάδας είναι αξιόπιστο μέχρι τη στιγμή που θα εμφανιστεί η αστάθεια Rayleigh και ότι μπορούμε να προσομοιώσουμε ικανοποιητικά την δημιουργία και απόσπαση των δινών ανακυκλοφορίας όχι όμως και τον μηχανισμό σπασίματος των δινών. Για να εξεταστεί αν όντως υπάρχει ένας τέτοιος μηχανισμός και πως αυτός λειτουργεί θα πρέπει η επίλυση να βασιστεί είτε στην πλήρη μορφή των εξισώσεων Navier-Stokes, είτε να αναζητηθεί λύση στο σύνολο του συνοριακού στρώματος [25].

Τέλος, μελετήθηκε η επίδραση της συχνότητας ταλάντωσης του εμποδίου σε τέτοιου είδους ροές. Προέκυψε ότι αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης τείνει να σταθεροποιήσει τη ροή και να μειώσει την ένταση των ασταθειών Rayleigh. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό από τα διαγράμματα 6.30 έως 6.39 τα οποία αντιστοιχούν σε εμπόδιο μέγιστου ύψους 2 αλλά με συχνότητα ταλάντωσης 4. Για την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκε στη x-κατεύθυνση χωρικό

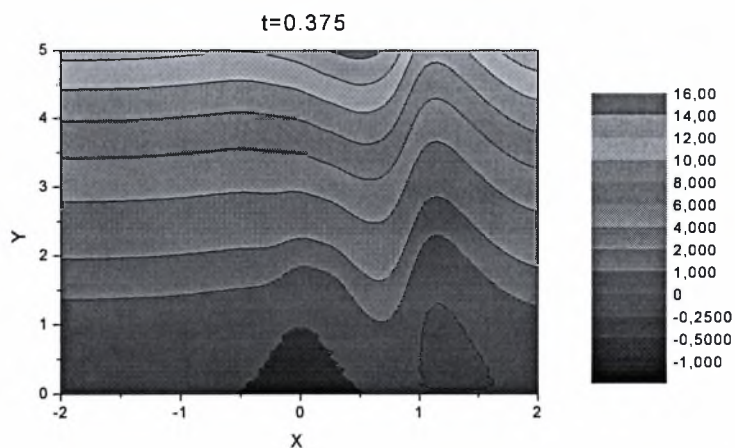
βήμα $dx=0.05$, στη y -κατεύθυνση $dy=0.1$ και χρονικό βήμα $dt=0.025$. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό ότι μπορούμε να προσομοιώσουμε ικανοποιητικά τη ροή για αρκετές περιόδους. Παρατηρούμε ότι έχουμε μια περιοδική κατάσταση εμφάνισης και απόσπασης δινών που ακολουθεί την περίοδο της ταλάντωσης του εμποδίου. Επίσης, βλέπουμε ότι από τη δεύτερη περίοδο και μετά η δίνη που δημιουργείται έχει μέγεθος ίσο με το μέγιστο ύψος του εμποδίου.



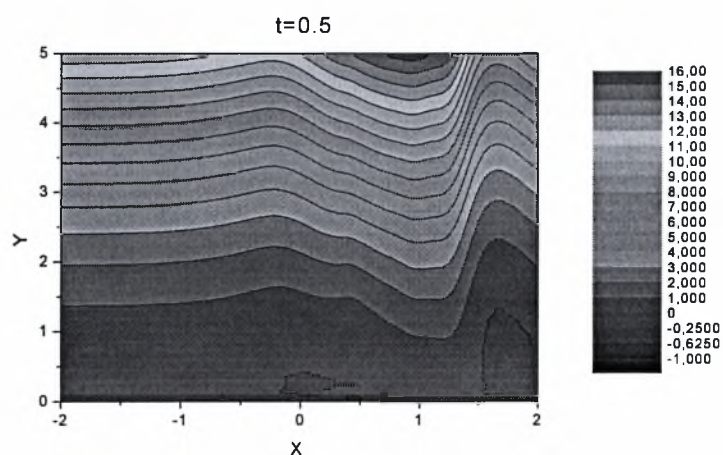
Διάγραμμα 6.30: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.125$



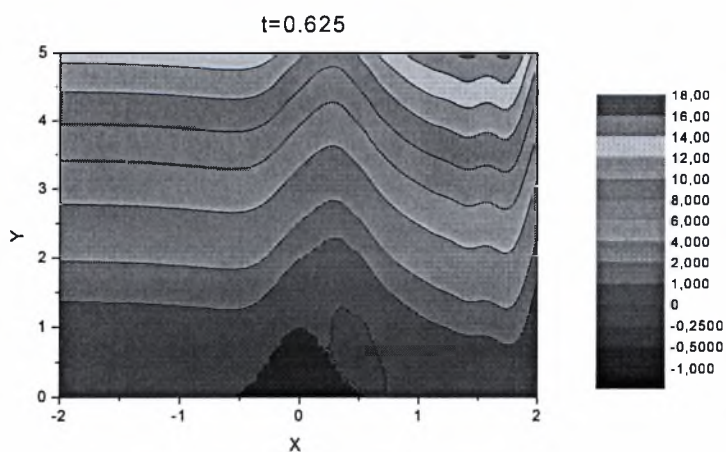
Διάγραμμα 6.31: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.25$



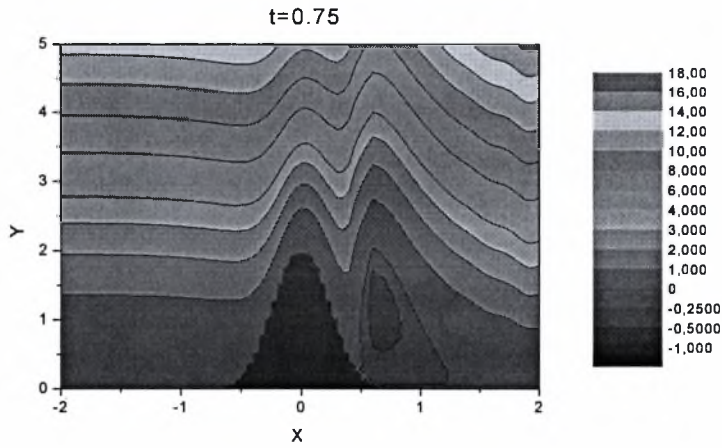
Διάγραμμα 6.32: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.375$



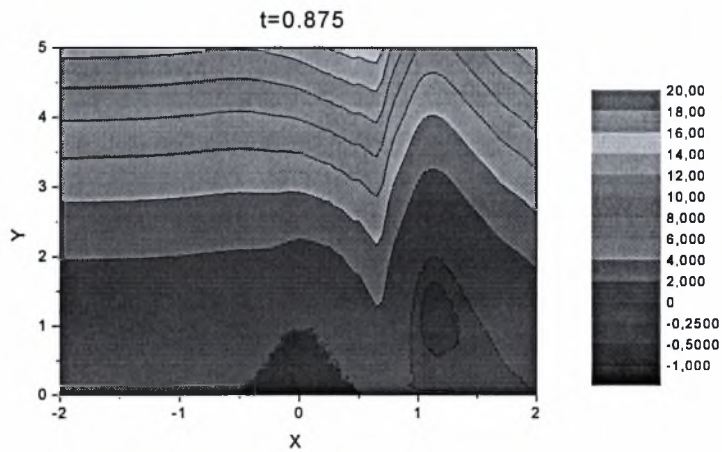
Διάγραμμα 6.33: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.5$



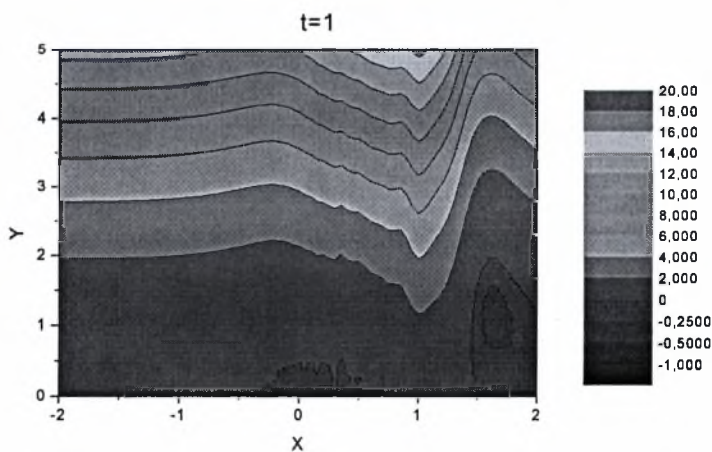
Διάγραμμα 6.34: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.625$



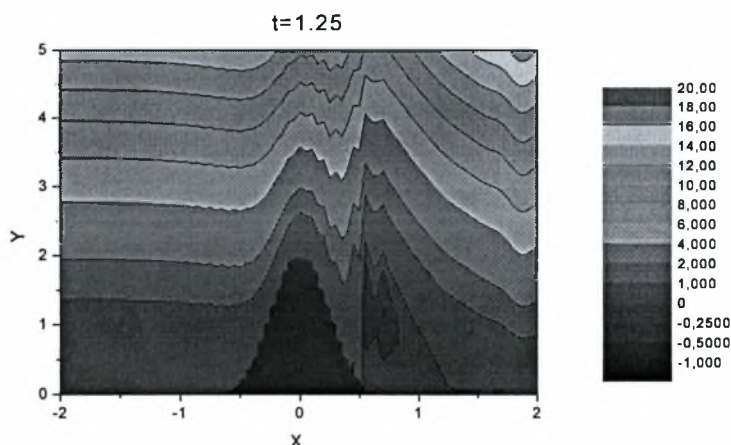
Διάγραμμα 6.35: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.75$



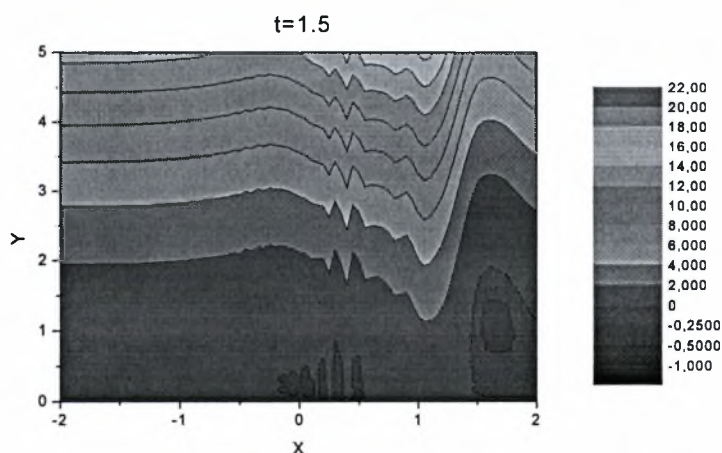
Διάγραμμα 636: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=0.875$



Διάγραμμα 6.37: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=1$.

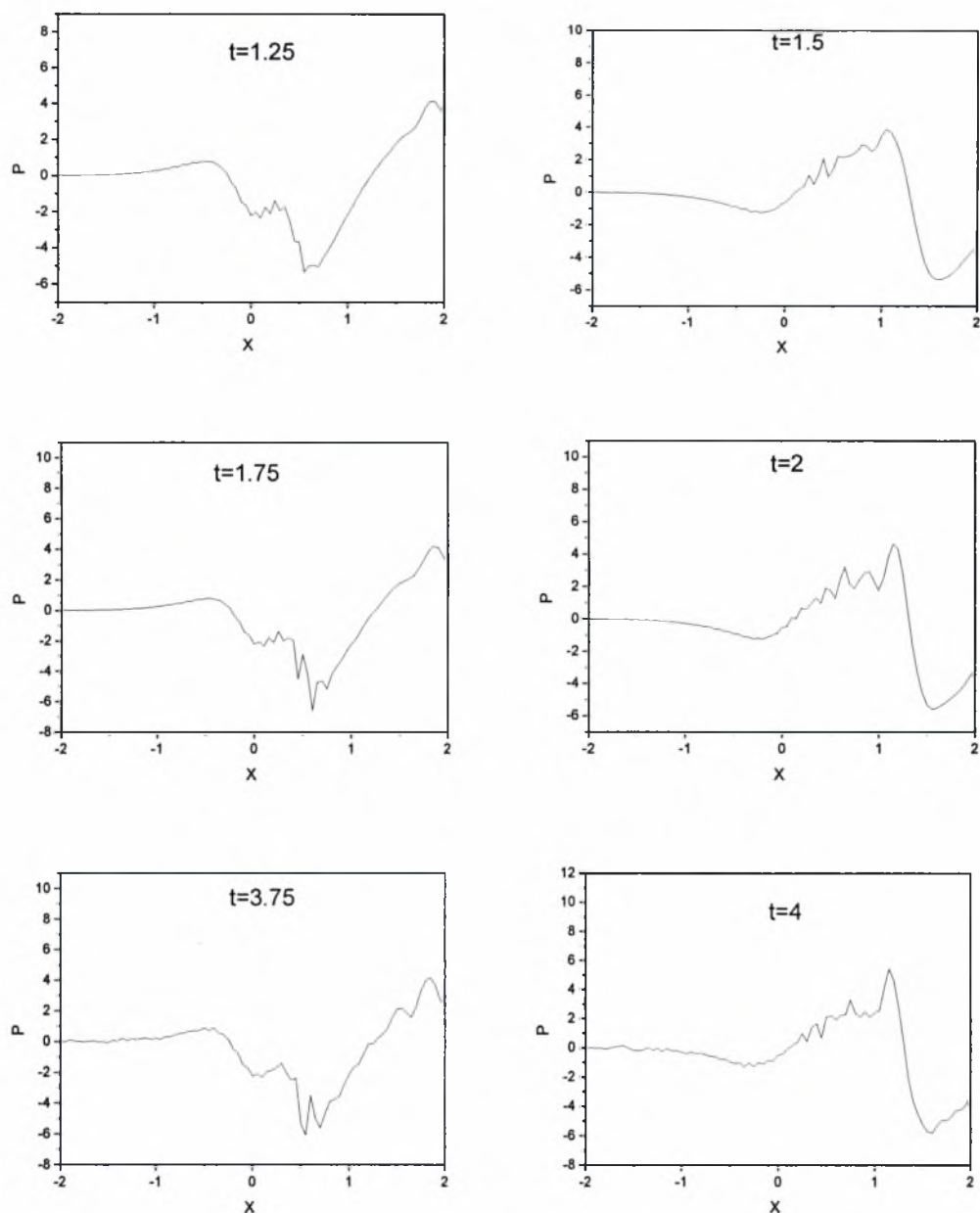


Διάγραμμα 6.38: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=1.25$



Διάγραμμα 6.39: Ροϊκό πεδίο για $H=2$ και $\omega=4$ τη χρονική στιγμή $t=1.5$.

Στα παραπάνω διαγράμματα δόθηκε η προσομοίωση της ροής του αέρα για τρεις περιόδους ταλάντωσης του εμποδίου. Η αστάθεια Rayleigh εμφανίζεται και στην περίπτωση αυτή αλλά η ένταση της διατηρείται σχετικά μικρή. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται καλύτερα από τα διαγράμματα της πίεσης που ακολουθούν. Σε αντίθεση με την περίπτωση που η συχνότητα ταλάντωσης είναι 1 όπου η αστάθεια έχει μεγάλη αύξηση σε μικρό χρονικό διάστημα (διαγράμματα 6.23 και 6.25), εδώ παρατηρούμε ότι η αστάθεια εμφανίζεται με σχετικά μικρή ένταση και η ένταση αυτή διατηρείται για αρκετές περιόδους. Αυτό συμβαίνει επειδή όταν η συχνότητα ταλάντωσης είναι μεγάλη το φαινόμενο εξελίσσεται γρήγορα με αποτέλεσμα να μην υπάρχει αρκετός χρόνος για την ανάπτυξη των ασταθειών.



Διάγραμμα 6.40: Πεδίο πίεσης για $H=2$ και $\omega=4$ για διάφορες χρονικές στιγμές.

6.5 Συμπεράσματα

Από την μελέτη του συγκεκριμένου προβλήματος και με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

- Για ροή πάνω από εμπόδιο σταθερού ή μεταβλητού ύψους υπάρχει μια κρίσιμη τιμή πάνω από την οποία έχουμε εμφάνιση ανακυκλοφορίας πίσω από αυτό. Η τιμή αυτή ισούται με 1.8.
- Για ροή πάνω από κοιλότητα μεταβλητού βάθους παρατηρείται μια περιοδική κατάσταση εμφάνισης και εξαφάνισης δινών ανακυκλοφορίας, ενώ κατά τη ροή πάνω από εμπόδιο μεταβλητού ύψους έχουμε περιοδική δημιουργία και

απόσπαση δινών. Και στις δυο περιπτώσεις με την πάροδο του χρόνου το μέγεθος των δινών ακολουθεί την τάξη του μεγέθους της κοιλότητας ή του εμποδίου.

- Το αριθμητικό μοντέλο που ακολουθεί τις κλίμακες της τριπλής στιβάδας μπορεί να προσεγγίσει ικανοποιητικά τη ροή πάνω από σταθερό εμπόδιο και μεταβλητή κοιλότητα. Για την περίπτωση μεταβλητού εμποδίου είναι αξιόπιστο μέχρι πριν την εμφάνιση της αστάθειας Rayleigh.
- Η αστάθεια Rayleigh φαίνεται να σχετίζεται με την ύπαρξη ενός μηχανισμού σπασίματος των δινών ανακυκλοφορίας.
- Η αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης του εμποδίου δρα ως σταθεροποιητικός παράγοντας και τείνει να μειώσει την ένταση των ασταθειών Rayleigh.

7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΡΟΗΣ ΑΕΡΑ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΛΕΠΤΟ ΦΙΛΜ ΥΓΡΟΥ

7.1 Γενικά

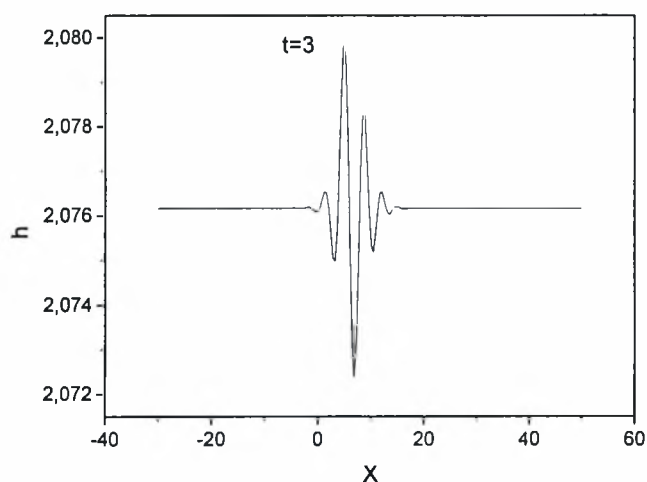
Κατά την εξέταση της ροής οριακού στρώματος πάνω από λεπτό φιλμ νερού το οποίο τίθεται σε κίνηση εξαιτίας της διάτμησης του αέρα έγινε προσπάθεια να μελετηθούν τα διεπιφανειακά κύματα ως αποτέλεσμα γραμμικών διαταραχών. Έχει αποδειχθεί, ότι τα κύματα αυτά μπορεί να είναι είτε συναγωγικά, είτε απολύτως ασταθή [7]. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για περιπτώσεις συναγωγικής αστάθειας. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, στα πλαίσια μελέτης του συγκεκριμένου προβλήματος καταβλήθηκε προσπάθεια να ελαττωθεί κατά το μέγιστο δυνατό ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος. Η διαδικασία η οποία εφαρμόστηκε καθώς και τα αποτελέσματα αυτής περιγράφηκαν με λεπτομέρεια στο κεφάλαιο 4.

7.2 Ανάκτηση διεπιφανειακών κυμάτων

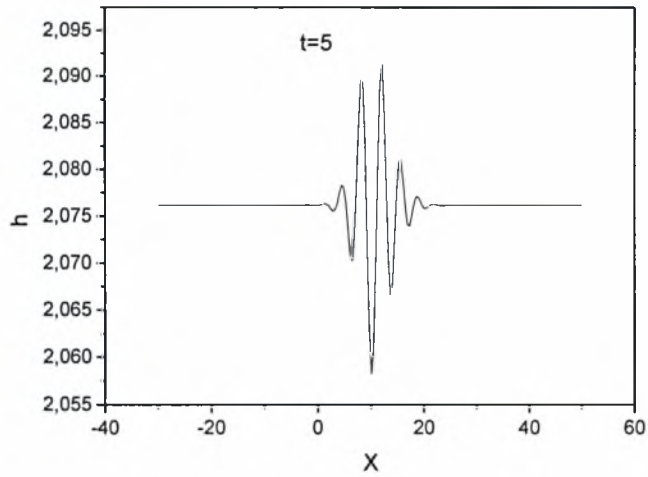
Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων χρησιμοποιείται κατάλληλη χρονική κλίμακα με αποτέλεσμα να προκύπτει ένα quasi-stationary πρόβλημα στην αέρια φάση, ενώ στην υγρή φάση οι όροι συναγωγής θεωρούνται αμελητέοι. Με την ίδια λογική που ακολουθήθηκε κατά την προσομοίωση των κυμάτων Tollmien-Schlichting, επιβάλλεται σε κάποιο σημείο της διεπιφάνειας μια γραμμική διαταραχή και στην συνέχεια συγκρίνονται το μήκος κύματος, η περίοδος και η ταχύτητα του κυματοπακέτου που προκύπτουν αριθμητικά με τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας. Η διαταραχή που επιβάλλεται στο σύστημα είναι της μορφής $D = \delta \exp[-W(X - X_0)^2]$, όπου το δ είναι παράμετρος που καθορίζει το μέγεθος της διαταραχής και το W την έκταση της στο χώρο.

Σύμφωνα με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας που βασίζεται στη σχέση διασποράς 3.7, η επιβολή γραμμικής διαταραχής στο σημείο $x=0.8$ έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση διεπιφανειακών κυμάτων που χαρακτηρίζονται ως συναγωγικά ασταθή. Για την προσομοίωση της περίπτωσης αυτής εφαρμόζεται στο σύστημα τη χρονική στιγμή $t=0$ μια στιγμιαία γραμμική διαταραχή με $\delta=0.001$ και $W=4$ και το πρόβλημα επιλύεται με τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο

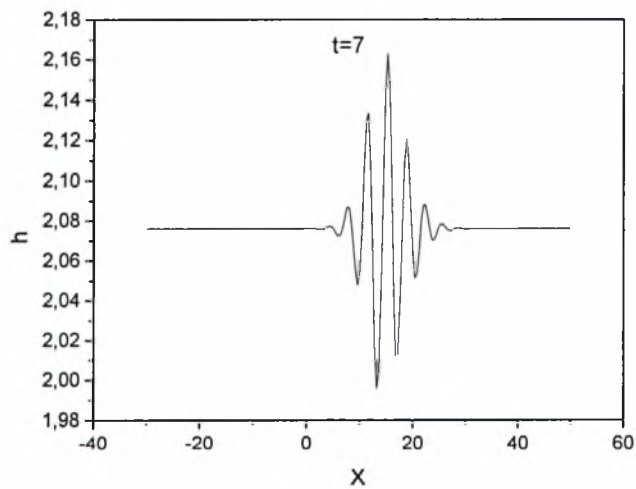
κεφάλαιο 4. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το αριθμητικό μήκος κύματος της διαταραχής με ανάλυση FFT (Fast Fourier Transform) σε ένα στιγμιότυπο της διαταραχής. Είναι σημαντικό το στιγμιότυπο να ληφθεί σε χρόνο αρκετά μεγαλύτερο από την περίοδο του κυματοπακέτου. Η περίοδος υπολογίζεται με ανάλυση FFT στην χρονική εξέλιξη της διαταραχής για μια δεδομένη θέση. Και πάλι η απόσταση της θέσης που θα επιλεγεί από το σημείο επιβολής της διαταραχής πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερη από το μήκος κύματος του κυματοπακέτου ώστε να ισχύουν τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας. Στα διαγράμματα 7.1 έως 7.3 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα του σχήματος της διεπιφάνειας, ενώ στο 7.5 δίνεται για τη θέση $X=20$ η χρονική εξέλιξη της πίεσης. Στα διαγράμματα 7.4 και 7.6 δίνεται η ανάλυση FFT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος και της περιόδου αντίστοιχα.



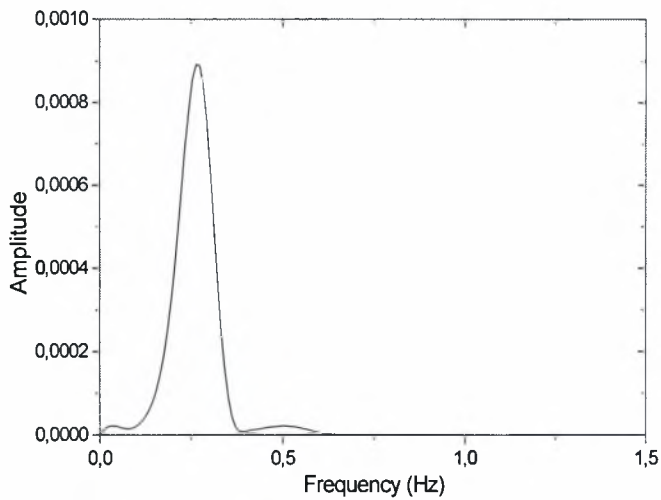
Διάγραμμα 7.1: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=3$.



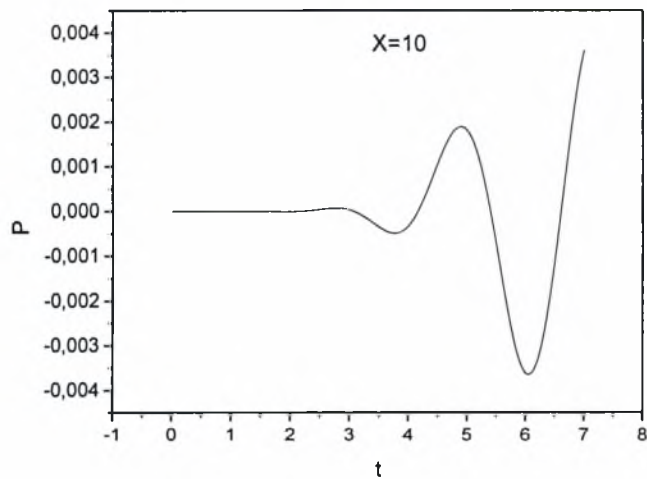
Διάγραμμα 7.2: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=5$.



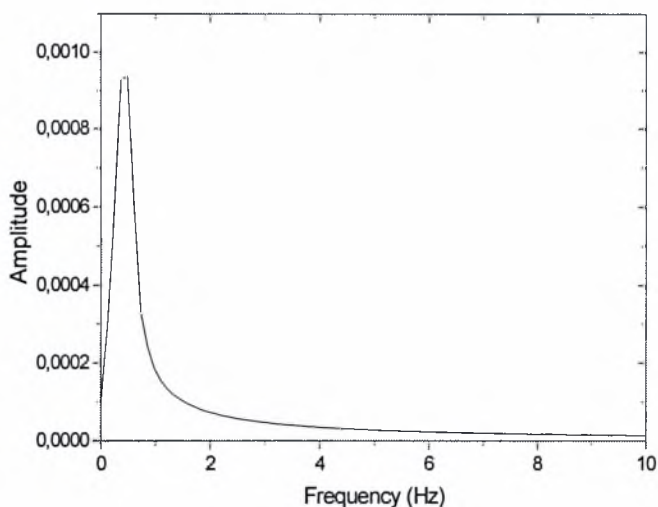
Διάγραμμα 7.3: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=7$.



Διάγραμμα 7.4: Ανάλυση FFT στα δεδομένα του διαγράμματος 7.4 για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.



Διάγραμμα 7.5: Χρονική εξέλιξη της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή.



Διάγραμμα 7.6: Ανάλυση FFT στα δεδομένα του διαγράμματος 7.5 για τον υπολογισμό της περιόδου.

Στον πίνακα 7.1 δίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα διεπιφανειακά κύματα με την αριθμητική προσομοίωση καθώς και οι τιμές που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Είναι φανερό, ότι το αριθμητικό μοντέλο προβλέπει ικανοποιητικά τα χαρακτηριστικά των διεπιφανειακών κυμάτων για την περίπτωση συναγωγικής αστάθειας.

	Γραμμική Θεωρία	Αριθμητική Προσομοίωση
Μήκος κύματος	3.6	3.7
Περίοδος	2.2	2.05
Ταχύτητα κυματοπακέτου	2	2.1

Πίνακας 7.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα.

8. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετήθηκαν οι αστάθειες που παρουσιάζονται κατά τη ροή ρεύματος αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από επίπεδη στερεή οριζόντια επιφάνεια στην οποία είτε υπάρχει ένα στερεό εμπόδιο, είτε έχει σχηματιστεί ένας λεπτός υμένας υγρού εξαιτίας ενός σταθερού ρυθμού βροχόπτωσης.

Στα πλαίσια της αριθμητικής επίλυσης των παραπάνω ροών έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί μια μέθοδος που να παρέχει την επιθυμητή ακρίβεια αποτελεσμάτων απαιτώντας ταυτόχρονα τον ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό χρόνο. Ο στόχος αυτός επιτεύχθηκε μερικώς διατηρώντας την Ιακωβιανή του συστήματος των εξισώσεων στον αέρα σταθερή για αρκετά χρονικά βήματα και χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο GMRES για την επίλυση του συστήματος αυτού. Παρόλα αυτά, διαπιστώθηκε ότι κατά την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων υπάρχουν περιπτώσεις όπως είναι η απόλυτη αστάθεια και οι μη γραμμικές διαταραχές όπου οι απαιτήσεις σε υπολογιστικό χρόνο εξακολουθούν να είναι μεγάλες. Για την περαιτέρω μείωση του υπολογιστικού χρόνου προτείνεται η εισαγωγή στο πρόβλημα ανομοιομορφου πλέγματος σε συνδυασμό με τις B-cubic splines ως συναρτήσεων βάσης. Με τον τρόπο αυτό η πυκνωση του αριθμητικού πλέγματος θα γίνεται μόνο όπου είναι απαραίτητη, ακολουθώντας την παραμόρφωση της διεπιφάνειας φιλμ-αέρα, και κατά συνέπεια θα χρειάζονται λιγότερα στοιχεία για την προσομοίωση [26].

Κατά τη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων εξετάστηκε μόνο η περίπτωση συναγωγικής αστάθειας για γραμμικές διαταραχές. Είναι σημαντικό να μελετηθούν και άλλες περιπτώσεις διαταραχών, όπως είναι οι περιοδικές και οι μη γραμμικές διαταραχές. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περίπτωση της απόλυτης αστάθειας η οποία υπό προϋποθέσεις μπορεί να οδηγήσει ακόμα και σε ανάπτυξη global ασταθειών. Μια από τις παραδοχές που έγιναν κατά την προσομοίωση της ροής του αέρα που αλληλεπιδρά με υγρό φιλμ είναι ότι η βασική ροή είναι σχεδόν παράλληλη. Σε επόμενο στάδιο θα μπορούσε η αριθμητική επίλυση να λαμβάνει υπόψη τις μεταβολές της βασικής ροής κατά την αξονική διεύθυνση ώστε να διερευνηθεί η πιθανότητα εμφάνισης global ασταθειών οι οποίες είναι δυνατό να προκαλέσουν καταστροφή της δομής του οριακού στρώματος και πρόωρη αποκόλληση. Η δεύτερη παραδοχή που γίνεται είναι ότι οι αδρανειακοί όροι στην

υγρή φάση είναι αμελητέοι. Αν αγνοήσουμε την τελευταία αυτή παραδοχή μπορούμε να προσομοιώσουμε τη ροή του υγρού με ένα πιο πολύπλοκο μοντέλο που θα περιέχει και τη συναγωγή. Σε αυτή τη περίπτωση όμως, προκύπτει διδιάστατο πρόβλημα όχι μόνο στην αέρια αλλά και στην υγρή φάση, γεγονός που αυξάνει κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος. Επίσης, το φαινόμενο της ροής πάνω από λεπτό φιλμ νερού θα μπορούσε να μελετηθεί χωρίς να θεωρήσουμε το πρόβλημα του αέρα quasi-stationary αλλά να επιτρέπουμε χρονικές μεταβολές τόσο στην αέρια όσο και στην υγρή φάση.

Τέλος, η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση ροών μέσα στο ανθρώπινο σώμα. Για παράδειγμα έχει ενδιαφέρον να προσομοιωθεί η ροή του αέρα μέσα στον βρογχικό αεραγωγό θεωρώντας ότι είναι ουσιαστικά αγωγός με ελαστικά τοιχώματα [4]. Η αλληλεπίδραση διατμητικής ροής με αγωγό μέρος του οποίου, ή και ολόκληρος ο αγωγός, έχει ελαστικές ιδιότητες αποτελεί εξαιρετικά ενδιαφέρον πεδίο έρευνας τόσο στο πλαίσιο ελέγχου της μετάβασης σε τυρβώδη ροή [27] όσο και στο πλαίσιο κατανόησης εφαρμογών της εμβιομηχανικής [4,28,29]. Πιο συγκεκριμένα έχει βρεθεί επιλύοντας τις γραμμικές εξισώσεις αλληλεπίδρασης οριακού στρώματος με ελαστικό τοίχωμα [27] ότι η εφαρμογή ελαστικών στοιχείων, ακόμη και μικρού μήκους, σε τοιχώματα αγωγών καθυστερεί την εμφάνιση των κυμάτων Tollmien-Schlichting και συνεπώς την μετάβαση σε τύρβη. Το παραπάνω ερώτημα τίθεται και στην περίπτωση του υγρού φιλμ και θα μελετηθεί, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, στα πλαίσια της διδακτορικής διατριβής που θα συνεχίσει την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία. Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της παραπάνω αλληλεπίδρασης προκύπτει στην περίπτωση εκπνοής αέρα, (παραγωγή ήχου όπως π.χ. στην περίπτωση του ροχαλητού [4,28] ή υγρού, θεραπευτική αγωγή μετά από πνευμονικό οίδημα [30], από τους πνεύμονες μέσω της τραχείας. Έτσι, έχει βρεθεί κάνοντας ανάλυση ευστάθειας στις γραμμικές εξισώσεις [4] και επιλύοντας τις μη γραμμικές [28] εξισώσεις αλληλεπίδρασης ροής Poiseuille με ελαστικό τοίχωμα, ότι το τελευταίο τείνει να εμφανίσει ταλαντωτική κίνηση, flutter, όταν η ταχύτητα του ρευστού ξεπεράσει ένα όριο. Σε διαφορετικό πλαίσιο [29] έχει βρεθεί ότι η ροή πάνω από αγωγούς με ελαστικά τοιχώματα όπου εφαρμόζεται αρνητική βαθμίδα πίεσης, transmural pressure, μπορεί να οδηγήσει σε κάμψη και φραγή των αγωγών λόγω της αξονική πτώσης της πίεσης σαν αποτέλεσμα του ιξώδους του ρευστού. Σαν επακόλουθο της δημιουργίας στένωσης, κατάντη της τελευταίας και λόγω του ολκού που δημιουργείται εμφανίζονται πάλι ταλαντώσεις.

Θα είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ ελαστικού τοιχώματος και διατμητικής ροής στα πλαίσια της θεωρίας τριπλής στοιβάδας ώστε να υπάρξει μία εκτίμηση της σημασίας της αδράνειας του ρευστού στην εμφάνιση ταλαντώσεων, γεγονός που αποτυπώνεται σε πειραματικές διατάξεις με starling resistors [30]. Στην βιβλιογραφία starling resistors αποκαλούνται αγωγοί με ελαστικά τοιχώματα οι οποίοι περιβάλλονται από δοχείο ελέγχου της πίεσης, και οι οποίοι χρησιμοποιούνται, μεταξύ άλλων, για την προσομοίωση της διαδικασίας εκπνοής. Η ανάλυση για την χρήση της θεωρίας τριπλής στοιβάδας μέσα σε αγωγούς όπου υπάρχουν στενώσεις ή ανοίγματα έχει προταθεί στην βιβλιογραφία από τον Smith το 1976 [31].

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Smith, F.T., Brighton, P. W. M., Jackson, P. S. & Hunt, J. C. R. (1981), 'On boundary-layer flow past two-dimensional obstacles', *J. Fluid Mech.*, 113, 123-152.
2. Campell, B.A. & Bezos, M. (1989), 'Steady state and transitional aerodynamic characteristics of a wing in simulated heavy rain', NASA, TP-2932.
3. Smyrniaios, D. N. Pelekasis N. A. & Tsamopoulos, I. A. (2002). 'Two phase boundary layer flow in laminar film condensation over a horizontal tube.' *Phys. Fluids* 14 (6): 1945-1957.
4. Huang, L. (2001), 'Viscous flutter of a finite elastic membrane in Poiseuille flow, *Journal of Fluids and Structures*, 15, 1061-1088.
5. Grotberg, J. B. (1994), 'Pulmonary flow and transport phenomena.' *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26, 529-571.
6. Stewartson, K. (1974), 'Multi-structured boundary layers on flat plates and related bodies', *Advances in Applied Mechanics*, 14, 145-239.
7. Pelekasis, N. A. & Tsamopoulos, J. A. (2001), 'Linear stability analysis of a gas boundary layer flowing past a thin liquid film over a flat plate', *J. Fluid Mech.*, 436, 321-352.
8. Smyrniaios D. N., Pelekasis N. A. & Tsamopoulos I. A. (2000), "Boundary layer flow of air past solid surfaces in the presence of rainfall" *J. Fluid Mech*, 425, 79-110.
9. Smyrniaios, D. N. (2002), 'Interfacial phenomena and hydrodynamic instabilities in boundary layer flows', PhD, University of Patras.
10. Timoshin, S.N. (1997), 'Instabilities in a high-Reynolds number boundary layer on a film-coated surface', *J. Fluid Mech.*, 353, 163-195.
11. Smith, F.T. & Burggraf, O. R. (1985), 'On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers' *Proc. R. Soc. London A* 399, (25-55).
12. Tutty, O.R. & Cowley, S.J. (1986), 'On the stability and the numerical simulation of the unsteady interactive boundary-layer equation', *J. Fluid Mech.*, 168, 431-456.
13. Smith, F. T. (1976), 'Flow through constricted or dilated pipes and channels', *Mech. Appl. Maths*, 29, 343-364 & 365-376.

-
14. Drazin, P.G. & Reid, W.H (1981), 'Hydrodynamic Stability', Cambridge University Press.
 15. Tollmien, W. (1936), 'General instability criterion of laminar velocity distributions', Tech. Mem. Nat. Adv. Comm. Aero. Wash., No 792.
 16. Huerre, P. & Monkewitz, P. A. (1990), 'Local and global instabilities in spatially developing flows', J. Fluid Mech., 22, 473-537.
 17. Craik, A. D. D. (1985), 'Wave interactions and fluid flows', Cambridge University Press.
 18. Bender & Orszag (1978), 'Advanced mathematical methods for scientists and engineers', Mc. Graw-Hill.
 19. Prender, P. M. (1989), 'Splines and Variational Methods', John Wiley & Sons.
 20. Pelekasis, N. A, Tsamopoulos, . J. A. & Manolis, G. D. (1992), "A hybrid finite- boundary element method for inviscid flows with free surface.", J. Comp. Phys..101(2), 231-251.
 21. Pelekasis, N. A. (1991), 'A study on Drop and Bubble Dynamics via a Hybrid Boundary Element - Finite Element Methodology'. Ph.D Thesis, Chemical Engineering Department of SUNY Buffalo.
 22. Elman, H., Silvester, D.& Wathen, A. (2005), 'Finite Elements and Fast Iterative Solvers', Oxford Science Publications.
 23. Saad, Y. & Schultz, M.H (1986), 'GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems', SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7, 856-869.
 24. Saad, Y. (1996), 'Iterative Methods for Sparse Linear Systems', PWS
 25. Veldman, A. E. P. (1981), 'New quasi-simultaneous method to calculate interacting boundary layers', AIAA J., 19, 79-85.
 26. Thomson, J.F., Warsi, Z.U. & Mastin, C. W. (1985), "Numerical grid generation,' North Holland.
 27. Davies, C. & Carpenter, P.W. (1997) "Numerical simulation of the evolution of Tollmien-Schlichting waves over finite compliant panels", J. Fluid Mech. 335, 361-392.
 28. Luo, X. Y. & Pedley, T. J. (1998), "The effects of wall inertia on flow in a two-dimensional collapsible channel", J. Fluid Mech. 363, 253-280.

-
29. Heil, M. & Pedley, T.J. (1996), “Large post-buckling deformations of cylindrical shells conveying viscous flow”, J. Fluids & Structures, 10, 565-599.
 30. Polak, A. G. & Lutchens K. R. (2003), “Computational model for forced expiration from asymmetric normal lungs,” Annals of Biomedical Engineering, 31, 891-907.
 31. Smith F. T. (1976), “Flow through constricted or dilated pipes and channels: Part 1”, Q. Jl. Mech. Appl. Math., 29(3), 343-363.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000085839