

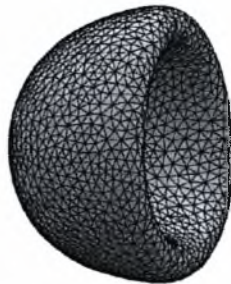
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑΛΥΓΙΣΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ
ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΕΛΥΦΩΝ**

υπό

Μιχάλη Κάβουρα
Διπλωματούχου Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. Ε.Μ.Π., 2007



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
2007



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6749/1
Ημερ. Εισ.: 04-12-2008
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξινόμησης Κωδικός: Δ
624.177 62
ΚΑΒ

© 2007 Μιχάλης Κάβουρας

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Πενταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) **Δρ. Σπύρος Καραμάνος (επιβλέπων), Επίκουρος Καθηγητής TMMB**

Δεύτερος Εξεταστής **Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης, Αναπληρωτής Καθηγητής TMMB**

Τρίτος Εξεταστής **Δρ. Δημήτριος Βαλουγεώργης, Αναπληρωτής Καθηγητής TMMB**

Τέταρτος Εξεταστής **Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου, Καθηγητής TMMB**

Πέμπτος Εξεταστής **Δρ. Αλέξης Κερμανίδης, Λέκτορας TMMB**

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή κ. Σ. Καραμάνο για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του στην εκπόνηση της παρούσας διατριβής, καθώς όσο και για την υπομονή και την εμπιστοσύνη που έδειξε προς το πρόσωπό μου. Επίσης, ευχαριστίες εκφράζονται προς τους καθηγητές της επιτροπής, και κυρίως στον κ. Βαλουγεώργη, οι οποίοι διέθεσαν τον πολύτιμο χρόνο τους για την εκτίμηση και βαθμολόγηση του περιεχομένου της εν λόγω μεταπτυχιακής διατριβής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου Σωτηρία Χουλιάρá, Βασίλη Ευαγγέλου και Γιάννη Γκαβαρδίνα για την πολύτιμη βοήθειά τους. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους.

Μιχάλης Κάβουρας

Βόλος, Νοέμβριος 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- 1.1 Γενικά-Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....1
- 1.2 Λυγισμός Ελαστικών Σφαιρικών Κελυφών.....2
- 1.3 Πρώτα Συμπεράσματα-Σκοπός της Παρούσας Εργασίας.....7

2. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

- 2.1 Γενική ενεργειακή μέθοδος προσδιορισμού κρίσιμου φορτίου λυγισμού και της αντίστοιχης ιδιομορφής λυγισμού.....8
 - 2.1.1 Αρχή της στάσιμης τιμής της δυναμικής ενέργειας.....9
 - 2.1.2 Λυγισμός ελαστικών κατασκευών.....10
- 2.2 Εφαρμογή ενεργειακής μεθόδου σε αξονοσυμμετρικό σφαιρικό κέλυφος.....12

3. ΜΕΤΑΛΥΓΙΣΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΚΕΛΥΦΟΥΣ

- 3.1 Γενική θεωρία μεταλυγισμικής συμπεριφοράς.....22
- 3.2 Εφαρμογή στη μεταλυγισμική συμπεριφορά αξονοσυμμετρικής σφαίρας.....27

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

- 4.1 Εισαγωγή.....33
- 4.2 Σχεδιασμός Μοντέλου.....33

4.3	Υπολογισμός κρίσιμης πίεσης και μορφής λυγισμού.....	34
4.4	Μεταλυγισμική Συμπεριφορά και επιρροή ατελειών.....	39
5.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	47
6.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	48

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ – ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Το πρόβλημα του αξονικά φορτιζομένου κυλινδρικού κελύφους και το πρόβλημα του σφαιρικού κελύφους που υπόκειται σε ομοιόμορφη εξωτερική πίεση αποτελούν τα κλασικότερα, δημοφιλή και πλέον ενδιαφέροντα προβλήματα ιδιοτιμών στο πεδίο της ευστάθειας κατασκευών. Από τις αρχές του αιώνα παρατηρήθηκε σημαντική διαφορά μεταξύ πειραματικών και αναλυτικών αποτελεσμάτων όσον αφορά την μέγιστη πίεση λυγισμού και για αυτό το λόγο πολλές ερευνητικές εργασίες είχαν επικεντρωθεί στη μελέτη του ενός ή του άλλου προβλήματος. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θα ασχοληθούμε με το λυγισμό και τη μεταλυγισμική συμπεριφορά ελαστικών, ισοτροπικών, αξονοσυμμετρικών σφαιρικών κελυφών σταθερού πάχους με αξονοσυμμετρική συμπεριφορά τα οποία υπόκεινται σε ομοιόμορφη εξωτερική πίεση.

Το γραμμικό πρόβλημα λυγισμού ενός σφαιρικού κελύφους υπό εξωτερική ομοιόμορφη πίεση είναι ουσιαστικά ένα πρόβλημα ιδιοτιμών και μελετήθηκε αρχικά από τον Zoelly [1] και τον Schwerin [2], ενώ μια ολοκληρωμένη λύση παρουσιάστηκε από τον Van Der Neut [3]. Πολλοί ερευνητές στηριζόμενοι στην πρωτοποριακή εργασία των Karman και Tsien [4], μελέτησαν αναλυτικά την αξονοσυμμετρική μεταλυγισμική συμπεριφορά σφαιρικών κελυφών χρησιμοποιώντας διάφορες προσεγγιστικές μεθόδους. Σημείο αναφοράς για τη μελέτη του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς κελυφών αποτελεί η εργασία του Koiter [5], η οποία παρουσιάζει μία γενική θεωρία μεταλυγισμικής συμπεριφοράς με άμεση σχέση με την επιρροή των αρχικών ατελειών. Βασισμένος στην εργασία αυτή ο Hutchinson [6] μελέτησε την αρχική μεταλυγισμική συμπεριφορά σφαιρικών κελυφών ενώ ο Thompson [7] μελέτησε την αρχική μεταλυγισμική συμπεριφορά του αντίστοιχου αξονοσυμμετρικού προβλήματος.

1.2 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΕΛΥΦΩΝ

Στην ανάλυση που ακολουθεί θα υπολογίσουμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού p_{cr} καθώς και τις αντίστοιχες μορφές λυγισμού της σφαίρας. Θα χρησιμοποιήσουμε τις μη-γραμμικές εξισώσεις ρηχού κελύφους (shallow shell). Σημειώνουμε ότι η περιγραφή ρηχού κελύφους βασίζεται στο ότι τα μήκη κύματος που δημιουργούνται στην επιφάνεια του κελύφους είναι μικρά σε σχέση με την ακτίνα του κελύφους. Με αυτόν τον τρόπο, μελετώντας ένα μέρος της επιφάνειας του κελύφους, παίρνουμε πληροφορίες για το υπόλοιπο μέρος της σφαιρικής του επιφάνειας.

Έστω ένα τμήμα της σφαίρας, το οποίο θεωρείται απομονωμένο. Οι σχέσεις τάσης-παραμόρφωσης και καμπτικής παραμόρφωσης-μετατόπισης στην θεωρία ρηχού κελύφους θεωρούνται γραμμικές, ενώ οι κινηματικές σχέσεις επιφανειακής παραμόρφωσης-μετατόπισης μη-γραμμικές. Οι επιφανειακές παραμορφώσεις ε_x , ε_y και ε_{xy} εκφράζονται με όρους των εφαπτομενικών μετατοπίσεων U , V και της εγκάρσιας μετατόπισης W , όπως περιγράφονται στις παρακάτω σχέσεις [6]

$$\varepsilon_x = U_{,x} + W/R + \frac{1}{2}W_{,x}^2 \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_y = V_{,y} + W/R + \frac{1}{2}W_{,y}^2 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}(U_{,x} + V_{,x}) + \frac{1}{2}W_{,x}W_{,y} \quad (1.3)$$

όπου R είναι η καμπυλότητα του σφαιρικού τμήματος και $()_{,i}$ σημαίνει μερική παράγωγος κατά i . Αποδεικνύεται πως οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας της μη-γραμμικής θεωρίας ρηχού κελύφους μπορούν να αντικατασταθούν από μια εξίσωση συμβιβαστότητας γραμμένη με όρους της κάθετης μετατόπισης W και μιας τασικής συνάρτησης F . Οι δυο αυτές εξισώσεις φαίνονται παρακάτω

$$D\nabla^4 W + \frac{1}{R}\nabla^2 F - F_{,xx}W_{,yy} - F_{,yy}W_{,xx} + 2F_{,xy}W_{,xy} = -p \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{ET}\nabla^2 F - \frac{1}{R}\nabla^2 W + W_{,xx}W_{,yy} - W_{,xy}^2 = 0 \quad (1.5)$$

όπου $D = ET^3 / 12(1 - \nu^2)$, E το μέτρο ελαστικότητας, ν ο λόγος Poisson, T το πάχος του κελύφους, ∇^4 ο διδιάστατος διαρμονικός τελεστής, ∇^2 ο διδιάστατος τελεστής Laplace και p η εξωτερική πίεση. Οι συνιστώσες της μεμβρανικής τάσης δίνονται με όρους της τασιακής συνάρτησης και είναι :

$$N_x = F_{,yy}, \quad N_y = F_{,xx} \quad \text{και} \quad N_{xy} = -F_{,xy}. \quad (1.6)$$

Πριν το λυγισμό και αγνοώντας αρχικές ατέλειες, το σφαιρικό κέλυφος υπόκειται σε ομοιόμορφη μεμβρανική εντατική κατάσταση

$$N_x^0 = N_y^0 = -\frac{1}{2}pR \quad (1.7)$$

με εσωτερική ακτινική μετατόπιση

$$W_0 = -(1 - \nu)PR^2 / 2ET. \quad (1.8)$$

Για να υπολογίσουμε την κρίσιμη τιμή της εξωτερικής πίεσης p_{cr} , δηλαδή το σημείο όπου έχουμε για πρώτη φορά λυγισμό, εφαρμόζουμε διαταραχή στην προλυγισμική λύση, ως ακολούθως

$$F = -\frac{1}{4}(x^2 + y^2)pR + f \quad (1.9)$$

και

$$W = -(1-\nu)pR^2/2ET + w, \quad (1.10)$$

όπου f και w είναι οι όροι της διαταραχής. Η κρίσιμη πίεση p_{cr} , η οποία συχνά καλείται κλασική πίεση λυγισμού, υπολογίζεται μέσω κατάλληλων γραμμικοποιήσεων των εξισώσεων (1.4) και (1.5). Συγκεκριμένα οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις λυγισμού υπολογίζονται αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.9) και (1.10) στις εξισώσεις (1.4) και (1.5) και γραμμικοποιώντας ως προς f και w , δηλαδή διατηρώντας μόνον όρους το πολύ γραμμικούς ως προς τη διαταραχή. Με την ανωτέρω διαδικασία καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{R}\nabla^2 f + \frac{1}{2}pR\nabla^2 w = 0 \quad (1.11)$$

και

$$\frac{1}{ET}\nabla^2 f - \frac{1}{R}\nabla^2 w = 0. \quad (1.12)$$

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί ένα ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών. Στο πρόβλημα αυτό αναζητούμε περιοδικές λύσεις για τη διαταραχή της μορφής

$$w = \cos\left(k_x \frac{x}{R}\right)\cos\left(k_y \frac{y}{R}\right) \quad (1.13)$$

και

$$f = B\cos\left(k_x \frac{x}{R}\right)\cos\left(k_y \frac{y}{R}\right) \quad (1.14)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.13) και (1.14) στη σχέση (1.11) έχουμε ότι

$$p = \frac{2D}{R^3}(k_x^2 + k_y^2) - \frac{B}{R^2} \quad (1.15)$$

Αντικαθιστώντας στη συνέχεια τις (1.13) και (1.14) στη (1.12) υπολογίζουμε ότι

$$B = -ETR(k_x^2 + k_y^2)^{-1}. \quad (1.16)$$

Από τις (1.15) και (1.16) υπολογίζουμε την ιδιοτιμή

$$p = \frac{2ET}{R} \left[(k_x^2 + k_y^2)^{-1} + q_0^{-4} (k_x^2 + k_y^2) \right], \quad (1.17)$$

όπου

$$q_0^4 = 12(1 - \nu^2) \left(\frac{R}{T} \right)^2. \quad (1.18)$$

Η κλασική πίεση λυγισμού ή αλλιώς κρίσιμη πίεση υπολογίζεται ελαχιστοποιώντας την τιμή της ιδιοτιμής p ως προς τα k_x και k_y , δηλαδή

$$p_{cr} = \min \left\{ p(k_x, k_y) : (k_x, k_y) \in R^2 \right\}. \quad (1.19)$$

Μετά από τις συνθήκες ύπαρξης ελαχίστου, που είναι οι κάτωθι

$$\frac{\partial p}{\partial k_x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial k_y} = 0, \quad (1.20)$$

παρατηρούμε ότι η κρίσιμη τιμή παρουσιάζεται όταν ικανοποιείται η σχέση

$$k_x^2 + k_y^2 = q_0^2. \quad (1.21)$$

Επομένως η κρίσιμη της πίεση γίνεται

$$p_{cr} = 4ET / Rq_0^2 = \frac{2E}{[3(1-\nu^2)]^{1/2}} \left(\frac{T}{R}\right)^2. \quad (1.22)$$

Αυτή η κρίσιμη πίεση που υπολογίσαμε από την θεωρία ρηχού κελύφους για ένα τμήμα της σφαίρας είναι ακριβώς η ίδια που θα υπολογίζουμε θεωρώντας όλη τη σφαίρα.

Η αναπαράσταση ρηχού κελύφους που χρησιμοποιήσαμε για το κομμάτι σφαίρας ισχύει μόνο όταν οι κυματαριθμοί k_x και k_y είναι και οι δυο μεγάλοι σε σχέση με τη μονάδα, εκτός και αν ένας κυματαριθμός από τους k_x και k_y είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε ο λυγισμός είναι ανεξάρτητος από το x ή y . Παρατηρούμε ότι το φορτίο λυγισμού που υπολογίσαμε από τη σχέση αντιστοιχεί σε άπειρες μορφές λυγισμού. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μια σαφής ένδειξη ότι το σφαιρικό κέλυφος είναι ευαίσθητο σε αρχικές ατέλειες.

1.3 ΠΡΩΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΟΥΣΑΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο, επιλύοντας ένα ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών, υπολογίσαμε την ιδιοτιμή του προβλήματος, η οποία είναι η κρίσιμη πίεση λυγισμού της σφαίρας και τις αντίστοιχες ιδιομορφές της. Η βασική παρατήρηση έγκειται ότι σε αυτή την κρίσιμη πίεση λυγισμού αντιστοιχούν άπειρες μορφές λυγισμού της σφαίρας. Αν το σφαιρικό κέλυφος έχει αρχικές ατέλειες, δηλαδή μικρές παρεκκλίσεις από την τέλεια γεωμετρία του στη μορφή ενός συνδυασμού των μορφών λυγισμού της, αποδεικνύεται (Bazant & Cedolin [8]) ότι αστοχεί ή λυγίζει σε τιμές πίεσης μικρότερες του τέλειου σφαιρικού κελύφους. Άρα το σφαιρικό κέλυφος, όπως και στην περίπτωση των κυλινδρικών κελυφών, είναι ευαίσθητο στις αρχικές ατέλειες.

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας είναι η μελέτη του φαινομένου του λυγισμού και της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς σφαιρικών κελυφών με αξονοσυμμετρική συμπεριφορά. Η απαίτηση αξονοσυμμετρικής συμπεριφοράς περιορίζει την παραμορφωσιμότητα του σφαιρικού κελύφους και οδηγεί σε μία και μόνο μορφή λυγισμού που αντιστοιχεί στο ανώτερο κρίσιμο φορτίο, κάτι που απλοποιεί σημαντικά το πρόβλημα. Στο κεφάλαιο 2 παραθέτοντας την γενική ενεργειακή μέθοδο προσδιορισμού της κρίσιμης πίεσης βρίσκουμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού καθώς και τη μορφή λυγισμού της αξονοσυμμετρικής σφαίρας. Στο κεφάλαιο 3 παραθέτουμε την γενική θεωρία της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς κελυφών και την εφαρμόζουμε στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα, υπολογίζοντας αναλυτικά την αρχική μεταλυγισμική συμπεριφορά της σφαίρας. Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρατίθενται στο κεφάλαιο 4, όπου με τη χρήση ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων επιλύουμε το αξονοσυμμετρικό πρόβλημα, προσδιορίζοντας αριθμητικά την κρίσιμη πίεση λυγισμού καθώς και την αντίστοιχη ιδιομορφή λυγισμού. Στη συνέχεια προσδιορίζουμε αριθμητικά τη μεταλυγισμική συμπεριφορά της αξονοσυμμετρικής σφαίρας για διάφορες τιμές εύρους της αρχικής ατέλειας στη μορφή της ιδιομορφής λυγισμού της, επιλύοντας το μη-γραμμικό πρόβλημα. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αναλυτικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής θεωρίας.

2 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού καθώς και τη μορφή λυγισμού της αξονοσυμμετρικής σφαίρας. Ο υπολογισμός στηρίζεται στη μέθοδο διαταραχών της δυναμικής ενέργειας, μία μέθοδος που διαφέρει από αυτή που παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Η μεθοδολογία καταλήγει σε ένα ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών, η επίλυση του οποίου μας δίνει την κρίσιμη πίεση λυγισμού (ελάχιστη ιδιοτιμή) και την αντίστοιχη μορφή λυγισμού (ιδιομορφή). Αρχικά αναφέρουμε την γενική ενεργειακή μέθοδο προσδιορισμού κρίσιμου φορτίου λυγισμού και των αντίστοιχων ιδιομορφών για ελαστικές κατασκευές, όπως αυτή περιγράφεται από τον Budiansky [10] και στη συνέχεια την εφαρμόζουμε στο πρόβλημά μας, όπως περιγράφεται από τον Thompson [7].

2.1 ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΚΡΙΣΙΜΟΥ ΦΟΡΤΙΟΥ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΗΣ ΛΥΓΙΣΜΟΥ

Στη μηχανική του συνεχούς μέσου, η κατάσταση μιας ελαστικής κατασκευής μπορεί να περιγραφεί από τις χωρικές κατανομές των γενικευμένων τάσεων, παραμορφώσεων και μετατοπίσεων, που είναι συνήθως διανυσματικές ή τανυστικές ποσότητες και θα τις συμβολίζουμε με σ , ϵ και u αντίστοιχα και από την δυναμική ενέργεια που είναι βαθμωτή ποσότητα και την συμβολίζουμε με Π . Θεωρούμε ότι οι χώροι των τάσεων, παραμορφώσεων και μετατοπίσεων είναι γραμμικοί χώροι με νόρμα και μπορούμε να φανταστούμε ότι η τάση σ περιγράφει ένα σημείο του χώρου

όλων των δυνατών τάσεων. Ομοίως χρησιμοποιούμε τα σύμβολα ε και \mathbf{u} για να περιγράψουμε σημεία στο χώρο των παραμορφώσεων και μετατοπίσεων αντίστοιχα.

Οι ελαστικές καταστατικές εξισώσεις επιτρέπουν τον αλληλοσχετισμό των παραπάνω ποσοτήτων. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να πούμε για παράδειγμα ότι η τάση $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συνάρτηση της παραμόρφωσης ε και γράφουμε ότι $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}[\varepsilon]$ και μπορούμε φανταστούμε την προηγούμενη γραφή ως ένα μετασχηματισμό από τον χώρο των παραμορφώσεων στον χώρο των τάσεων. Ακόμα η δυναμική ενέργεια είναι συνάρτηση της μετατόπισης \mathbf{u} ($\Pi = \Pi[\mathbf{u}]$) και είναι ένας μετασχηματισμός από τον χώρο των μετατοπίσεων στους πραγματικούς αριθμούς (συναρτησιακό). Στην συνέχεια για την παραγωγή συναρτησιακών θα χρησιμοποιούμε την παραγωγή κατά Frechet, με την έννοια ότι η παράγωγος f' ενός συναρτησιακού f είναι ένας γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{\|\mathbf{u}_1\| \rightarrow 0} \frac{\|f[\mathbf{u} + \mathbf{u}_1] - f[\mathbf{u}] - f'\mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{u}_1\|} = 0 \quad (2.1)$$

2.1.1 ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΤΑΣΙΜΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Όπως αναφερθήκαμε προηγούμενα η δυναμική ενέργεια της κατασκευής μας είναι συνάρτηση της μετατόπισης αλλά έμμεσα είναι συνάρτηση και μιας βαθμωτής ποσότητας λ , η οποία καθορίζει το μέγεθος του εξωτερικά επιβαλλόμενου φορτίου. Θεωρούμε ότι γεωμετρικοί και μη περιορισμοί επιβάλλουν την μετατόπιση να κινείται σε ένα καλώς ορισμένο υπόχωρο των μετατοπίσεων μέσα στον οποίο επιτυγχάνεται ισορροπία, το οποίο που καλούμε “χώρο των δυνατών ή αποδεκτών μετατοπίσεων (συναρτήσεων)”. Η αρχή της στάσιμης τιμής της δυναμικής ενέργειας

μας λέει ότι η κατασκευή μας βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας σε μια θέση \mathbf{u} , αν και μόνο αν, η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας έχει στάσιμη τιμή, δηλαδή

$$\delta\Pi[\mathbf{u}; \lambda] \equiv \Pi'[\mathbf{u}; \lambda] \delta\mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

για κάθε $\delta\mathbf{u}$ αποδεκτή συνάρτηση (μετατόπιση).

2.1.2 ΛΥΓΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

Για να βρούμε τις κατάλληλες συνθήκες λυγισμού, αρχικά θεωρούμε ότι υπάρχει μια αρχική λύση \mathbf{u}_0 (προλυγισμική λύση), η οποία μεταβάλλεται αργά καθώς η παράμετρος φορτίου λ αυξάνει. Εφόσον βρισκόμαστε σε κατάσταση προλυγισμικής ισορροπίας από την σχέση έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\Pi'[\mathbf{u}_0(\lambda); \lambda] \delta\mathbf{u} = 0, \quad (2.3)$$

για κάθε αποδεκτή μετατόπιση $\delta\mathbf{u}$.

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποια τιμή του φορτίου λ και άνω, η λύση του προβλήματος (2.2) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\lambda) + \mathbf{v}(\lambda) \quad (2.4)$$

και αποτελεί τη συνολική μεταλυγισμική μετατόπιση. Οι δυο λύσεις ταυτίζονται στο σημείο $\lambda = \lambda_{cr}$ με την έννοια ότι εκεί

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{cr}} \mathbf{v}(\lambda) = 0. \quad (2.5)$$

Ορίζουμε τη μορφή λυγισμού ως εξής

$$\mathbf{u}_1 = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{cr}} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (2.6)$$

όπου η νόρμα $\|\cdot\|$ αποτελεί κατάλληλη νόρμα.

Εφόσον βρισκόμαστε σε μεταλυγισμική κατάσταση ισορροπίας από τις σχέσεις (2.3) και (2.4) έχουμε ότι

$$\Pi'[\mathbf{u}_0(\lambda) + \mathbf{v}(\lambda); \lambda] \delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.7)$$

Υποθέτοντας ότι η δυναμική ενέργεια είναι αναλυτική σε μια γειτονιά του $\mathbf{u}_0(\lambda_{cr})$, αναπτύσσουμε τη σχέση (2.7) σε σειρά Taylor ως προς τη συνάρτηση \mathbf{v}

$$\Pi'[\mathbf{u}_0; \lambda] \delta \mathbf{u} + \Pi''[\mathbf{u}_0; \lambda] \mathbf{v} \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Pi'''[\mathbf{u}_0; \lambda] \mathbf{v}^2 \delta \mathbf{u} + \dots = 0. \quad (2.8)$$

Διαιρώντας τη σχέση (2.8) με την ποσότητα $\|\mathbf{v}\|$, θεωρώντας το όριο $\lambda \rightarrow \lambda_{cr}$ και από τη σχέση (2.3) έχουμε ότι

$$\Pi''[\mathbf{u}_0(\lambda_{cr}); \lambda_{cr}] \mathbf{u}_1 \delta \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

ή πιο σύντομα

$$\Pi_{cr}^* \mathbf{u}_1 \delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.10)$$

Η σχέση (2.9) ή (2.10) αποτελεί ένα ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών από το οποίο υπολογίζουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (ιδιοτιμή) λ_{cr} και την αντίστοιχη ιδιομορφή λυγισμού (ιδιοδιάνυσμα). Σημειώνουμε ότι το πρόβλημα μπορεί να μην έχει μοναδική λύση, απλώς θεωρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αντιστοιχεί

στην μικρότερη θετική ιδιοτιμή και ότι για αυτή την τιμή στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα αντιστοιχεί μία μόνο ιδιομορφή.

2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΣΦΑΙΡΙΚΟ ΚΕΛΥΦΟΣ

Θεωρούμε μια ελαστική σφαίρα σταθερού πάχους T , ακτίνας R και μέτρου ελαστικότητας E , στην οποία ασκείται ομοιόμορφη εξωτερική πίεση p . Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού p_{cr} . Η ανάλυση που ακολουθεί προϋποθέτει αξονοσυμμετρία, επομένως ένας μονάχα “μεσημβρινός” του σφαιρικού κελύφους μπορεί να μελετηθεί. Η ανάλυση βασίζεται στην εφαρμογή της θεωρίας διαταραχών στην δυναμική ενέργεια.

Θεωρώντας αξονοσυμμετρία αρκεί να μελετήσουμε μια “φέτα” της σφαίρας. Πριν τον λυγισμό, υποθέτουμε ότι η σφαίρα παραμορφώνεται ομοιόμορφα ακτινικά κατά W_0 και η θέση ενός σημείου της μέσης επιφάνειας της στην παραμορφωμένη κατάσταση, περιγράφεται από τη κάθετη και εφαπτόμενη μετατόπιση W , U αντίστοιχα. Άρα μπορούμε να πούμε ότι η ολική ακτινική μετατόπιση είναι $W_{total} = W_0 + W$. Διαιρώντας τις μετατοπίσεις με την ακτίνα R , έχουμε τις αδιάστατες ποσότητες $w = w_{total} - w_0$ και u , οι οποίες είναι συναρτήσεις της γωνίας θ και είναι οι όροι διαταραχής που θα χρησιμοποιήσουμε στην δυναμική ενέργεια.

Οι παραμορφώσεις της μέσης επιφάνειας ε_θ και ε_ψ δίνονται από τις σχέσεις [7]

$$\varepsilon_\theta = u' - w_{total} + \frac{1}{2} w_{total}' = \left(u' - w + \frac{1}{2} w'^2 \right) - w_0 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_\psi = u \cot \theta - w_{total} = (u \cot \theta - w) - w_0, \quad (2.12)$$

όπου ο τόνος σημαίνει παραγωγή ως προς θ .

Επίσης, οι μεταβολές της καμπυλότητα της μέσης επιφάνειας δίνονται από τις σχέσεις

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{R}(w'') \quad (2.13)$$

$$\chi_{\psi} = \frac{1}{R}(w' \cot \theta). \quad (2.14)$$

Επομένως η ελαστική ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας της απαραμόρφωτης μέσης επιφάνειας είναι

$$K = \frac{1}{2} \frac{ET}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_{\theta}^2 + \varepsilon_{\psi}^2 + 2\nu\varepsilon_{\theta}\varepsilon_{\psi} \} + \frac{1}{2} \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)} \{ \chi_{\theta}^2 + \chi_{\psi}^2 + 2\nu\chi_{\theta}\chi_{\psi} \}. \quad (2.15)$$

Η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του κελύφους τώρα γίνεται

$$\begin{aligned} \Pi_{ελ} &= \int_0^{\pi} 2\pi R^2 K \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\pi ETR^2}{1-\nu^2} \int_0^{\pi} \left\{ 2w_0^2 (1+\nu) \sin \theta \right. \\ &\quad + 2w_0 (1+\nu) \sin \theta [2w - u' - u \cot \theta] \\ &\quad + \sin \theta \left[(u' - w)^2 + (u \cot \theta - w)^2 + 2\nu(u' - w)(u \cot \theta - w) \right] \\ &\quad - w_0 (1+\nu) \sin \theta [w'^2] \\ &\quad \left. + \sin \theta \left[(w'^2)(u' + \nu u \cot \theta - w(1+\nu)) \right] + \sin \theta \left[\frac{1}{2} w'^4 \right] \right\} d\theta \\ &\quad + \frac{\pi ETR^2}{1-\nu^2} \frac{T^2}{12R^2} \int_0^{\pi} \sin \theta \left[w''^2 + (w' \cot \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\nu w'' w' \cot \theta \right] d\theta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω ομοιόμορφης εξωτερικής πίεσης p δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
\Pi_p = p\pi R^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta \left\{ (1-w_0)^2 \right. \\
+ (1-w_0)^2 [3(u \cot \theta - w) + (u' + w' \cot \theta)] \\
+ (1-w_0) [3(u \cot \theta - w)^2 + 2(u' + w' \cot \theta)(u \cot \theta - w)] \\
\left. + [(u \cot \theta - w)^3 + (u' + w' \cot \theta)(u \cot \theta - w)^2] \right\} d\theta.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Επομένως η συνολική δυναμική ενέργεια του παραμορφωμένου κελύφους είναι το άθροισμα

$$\Pi = \Pi_p + \Pi_{\varepsilon\lambda}, \tag{2.18}$$

και μπορεί να γραφεί με όρους της πίεσης p και της ομοιόμορφης ακτινικής μετατόπισης w_0 . Έτσι μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα

$$\Pi[u, w, p] = \Pi_0 + \Pi_1[u, w, p] + \Pi_2[u, w, p] + \Pi_3[u, w, p] + \Pi_4[u, w, p] \tag{2.19}$$

Η συνολική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta\Pi = \Pi - \Pi_0 = \Pi_1[u, w, p] + \Pi_2[u, w, p] + \Pi_3[u, w, p] + \Pi_4[u, w, p], \tag{2.20}$$

ή με όρους μεταβολών

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \delta^2\Pi + \delta^3\Pi + \delta^4\Pi, \tag{2.21}$$

όπου η ποσότητα Π_m ή $\delta^m\Pi$ περιέχει όρους m -τάξης ως προς τις διαταραχές και τις παραγώγους αυτών. Οι ποσότητες (μεταβολές) αυτές είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned} \Pi_1 [u, w, p] = & \frac{\pi ETR^2}{1-v^2} \int_0^\pi \left\{ 2w_0 (1+v) \sin \theta [2w - u' - u \cot \theta] \right. \\ & \left. + 2\lambda (1-w_0)^2 \sin^3 \theta [3(u \cot \theta - w) + (u' + w' \cot \theta)] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 [u, w, p] = & \frac{\pi ETR^2}{1-v^2} \int_0^\pi \left\{ \sin \theta [(u' - w)^2 + (u \cot \theta - w)^2] \right. \\ & + 2v(u' - w)(u \cot \theta - w) - w_0 (1+v) [w'^2] \\ & + k \sin \theta [w''^2 + w'^2 \cot^2 \theta + 2vw''w' \cot \theta] \\ & \left. + 2\lambda (1-w_0) \sin^3 \theta [3(u \cot \theta - w)^2] \right. \\ & \left. + 2(u \cot \theta - w)(u' + w' \cot \theta) \right\} d\theta \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 [u, w, p] = & \frac{\pi ETR^2}{1-v^2} \int_0^\pi \left\{ \sin \theta [(w'^2)(u' + vu \cot \theta - w(1+v))] \right. \\ & \left. + 2\lambda \sin^3 \theta [(u \cot \theta - w)^3 + (u \cot \theta - w)^2 (u' + w' \cot \theta)] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Pi_4 [u, w, p] = \frac{\pi ETR^2}{1-v^2} \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin \theta [w'^4] d\theta. \quad (2.25)$$

όπου

$$k \equiv \frac{1}{12} \left(\frac{T}{R} \right)^2, \quad (2.26)$$

είναι μια “γεωμετρική” σταθερά και

$$\lambda \equiv \frac{pR(1-v^2)}{2ET}, \quad (2.27)$$

είναι μια αδιάστατη παράμετρος πίεσης και άρα μπορούμε να γράψουμε ότι $\Pi[u, w, p] = \Pi[u, w, \lambda]$.

Εφόσον βρισκόμαστε σε κατάσταση προλυγισμικής ισορροπίας η πρώτη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας μηδενίζεται ($\Pi_1 = 0$ ή $\delta\Pi = 0$). Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τη σχέση

$$w_0(1 + \nu) = \lambda(1 - w_0^2). \quad (2.28)$$

Αν θεωρήσουμε ότι $1 \gg w_0^2$ τότε παίρνουμε την προλυγισμική μετατόπιση (λύση) που αναφέραμε προηγουμένως

$$w_0 = \frac{\lambda}{1 + \nu}. \quad (2.29)$$

Η έννοια του λυγισμού έχει να κάνει με την στιγμιαία απώλεια ευστάθειας της σφαίρας και άρα να εξετάσουμε αν η ακαμψία της είναι θετικά ορισμένη. Επειδή οι όροι Π_3 και Π_4 είναι μικροί σε σχέση με τον όρο Π_2 , για να προσδιορίσουμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού p_{cr} και τις αντίστοιχες μορφές λυγισμού u και w αρκεί να εξετάσουμε την δεύτερη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας Π_2 ή $\delta^2\Pi$. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού p_{cr} . Προφανώς για $p < p_{cr}$ θα ισχύει $\delta^2\Pi > 0$ για όλες τις μορφές των μετατοπίσεων-συναρτήσεων-διαταραχών u και w . Στο σημείο λυγισμού θα ισχύει το ίδιο για όλες τις συναρτήσεις διαταραχών πλην μίας η οποία αποτελεί και τη μορφή λυγισμού. Ενώ λοιπόν για μικρές τιμές της πίεσης οι θέσεις ισορροπίας μας είναι ευσταθείς ($\delta^2\Pi > 0$), η απώλεια της ευστάθειας (και άρα ο λυγισμός) πραγματοποιείται όταν για κάποια κρίσιμη τιμή της πίεσης ($P = P_{cr}$), η δυναμική μας ενέργεια έχει στάσιμη τιμή ως προς κάποια διαταραχή και μάλιστα για αυτή τη διαταραχή θα έχω $\delta^2\Pi = 0$. Επομένως ικανή συνθήκη ύπαρξης ακροτάτου (η ανωτέρω συνθήκη ονομάζεται και συνθήκη του Trefftz) είναι η εξής

$$\delta(\delta^2\Pi) = 0 \text{ ή } \delta\Pi_2 = 0, \quad (2.30)$$

όπου η μεταβολή $\delta(\cdot)$ λογίζεται ως προς της συναρτήσεις u και w .

Ο όρος Π_2 είναι ένα συναρτησιακό της μορφής

$$\Pi_2 = \int_0^\pi L(u, u', w, w', w'', \theta) d\theta. \quad (2.31)$$

Από τη συνθήκη (2.30) έχουμε ότι θα πρέπει

$$\delta\Pi_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \delta_u \Pi_2 = 0 \\ \delta_w \Pi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_u - \frac{d}{d\theta} L_{u'} = 0 \\ L_w - \frac{d}{d\theta} L_{w'} + \frac{d^2}{d\theta^2} L_{w''} = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Οι εξισώσεις (2.32) αποτελούν τις εξισώσεις Euler οι οποίες σχηματίζουν ένα ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών (ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων), το οποίο θα επιλυθεί παρακάτω.

Θεωρώντας ότι $\lambda \ll 1$ και $k \ll \lambda$ οι εξισώσεις Euler παίρνουν την απλούστερη μορφή

$$u'' + u' \cot \theta - u(\nu + \cot^2 \theta) - w'(1 + \nu) = 0 \quad (2.33)$$

και

$$(1 + \nu)[u' + u \cot \theta - 2w] + k[-w^{(4)} - 2w''' \cot \theta + w'' \cot^2 \theta - w' \cot^3 \theta] - \lambda[w'' + w' \cot \theta] = 0, \quad (2.34)$$

με αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες

$$\text{για } \theta = 0 \text{ και } \theta = \pi, \quad w' = u = 0. \quad (2.35)$$

Οι δυο εξισώσεις Euler μπορούν να πάρουν “κομψότερη” μορφή εισάγοντας τη συνάρτηση $s(\theta)$ με $s' \equiv u$ και τον διαφορικό τελεστή

$$H[y(\theta)] \equiv y'' + y' \cot \theta + 2y. \quad (2.36)$$

Η πρώτη εξίσωση Euler (2.33) γίνεται

$$H[s] - (1 + \nu)(s + w) = 0 \quad (2.37)$$

ενώ η δεύτερη (2.34) με κατάλληλες απλοποιήσεις γίνεται

$$kHH[w] - (1 + \nu)H[s] + 2(1 + \nu)(s + w) + \lambda H[w] = 0. \quad (2.38)$$

Για την επίλυση του προβλήματος ιδιοτιμών θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις Legendre. Η συνάρτηση Legendre n -τάξης που θα την συμβολίζουμε με $P_n(\cdot)$ και θα χρησιμοποιήσουμε ως όρισμά της το $\cos \theta$, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση Legendre

$$P_n''(\cos \theta) + P_n'(\cos \theta) \cot \theta + n(n+1)P_n(\cos \theta) = 0 \quad (2.39)$$

και επομένως ισχύουν τα κάτωθι

$$H[P_n(\cos \theta)] = -\mu_n P_n(\cos \theta) \quad (2.40)$$

και

$$HH[P_n(\cos \theta)] = \mu_n^2 P_n(\cos \theta). \quad (2.41)$$

όπου $\mu_n \equiv n(n+1) - 2$.

Έστω ότι η λύση μας έχει τη μορφή

$$w(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta) \quad (2.42)$$

και

$$s(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(\cos \theta). \quad (2.43)$$

Αντικαθιστώντας τη λύση στο παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2.37), (2.38) και εξισώνοντας τους συντελεστές του $P_n(\cos \theta)$ με μηδέν, καταλήγουμε στο ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα

$$b_n(\mu_n + 1 + \nu) + a_n(1 + \nu) = 0 \quad (2.44)$$

$$b_n[(1 + \nu)(\mu_n + 2)] + a_n[k\mu_n^2 + 2(1 + \nu) - \lambda\mu_n] = 0. \quad (2.45)$$

Απαιτώντας μη-μηδενική λύση στο παραπάνω αλγεβρικό σύστημα και κάνοντας χρήση κατάλληλων απλοποιήσεων, καταλήγουμε στην εύρεση της ακόλουθης ιδιοτιμής

$$\lambda = \frac{k\mu_n^2 + (1 - \nu^2)}{\mu_n} = k\mu_n + \frac{(1 - \nu^2)}{\mu_n}. \quad (2.46)$$

Η κρίσιμη ιδιοτιμή και άρα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού θα βρεθεί από την ελαχιστοποίηση της ιδιοτιμής ($\lambda_{\min} = \lambda_{cr}$). Η ελάχιστη ιδιοτιμή λ αντιστοιχεί σε μεγάλη τιμή του μ_n και άρα σε μεγάλη τιμή του n , καθώς η σταθερά k είναι πολύ μικρή. Συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε τις μεταβλητές μ_n και n ως συνεχείς και να παραγωγίσουμε ως προς αυτές. Η σχέση

$$\frac{d\lambda}{d\mu_n} = 0, \quad (2.47)$$

μας δίνει την κατάλληλη συνθήκη ύπαρξης ελαχίστου. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\lambda_{cr} = 2\sqrt{k(1-v^2)} \quad (2.48)$$

όταν

$$\mu_n = n(n+1) - 2 = \sqrt{\frac{1-v^2}{k}} = \sqrt{12(1-v^2)} \frac{R}{T} \quad (2.49)$$

και άρα

$$p_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-v^2)}} \frac{T^2}{R^2}. \quad (2.50)$$

Επειδή $\mu_n \sim \frac{R}{T}$ και άρα $\mu_n \gg 1$, οι ιδιομορφές θα έχουν τη μορφή

$$w_{cr}(\theta) = aP_n(\cos\theta) \quad (2.51)$$

και

$$u_{cr}(\theta) = -\frac{1+v}{\mu_n} aP_n(\cos\theta), \quad (2.52)$$

όπου ο ακέραιος n προσεγγιστικά ικανοποιεί τη σχέση

$$n + \frac{1}{2} = \left(\frac{1-v^2}{k} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.53)$$

Παρατηρήσεις : Η σχέση (2.9) αντιστοιχεί στις σχέσεις (2.33) και (2.34). Η κρίσιμη πίεση λυγισμού που υπολογίζουμε από τις σχέσεις (1.22) και (2.50) είναι η ίδια.

3 ΜΕΤΑΛΥΓΙΣΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΚΕΛΥΦΟΥΣ

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε με λεπτομέρεια στη μεταλυγισμική συμπεριφορά του σφαιρικού αξονοσυμμετρικού ισότροπου ελαστικού κελύφους. Η μελέτη της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς έγκειται στον προσδιορισμό του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας, δηλαδή της σχέσης που συνδέει την επιβαλλόμενη εξωτερική πίεση με μια χαρακτηριστική μετατόπιση σε μια γειτονιά του κρίσιμου φορτίου. Αρχικά θα περιγράψουμε τη γενική θεωρία της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς, την οποία στη συνέχεια εφαρμόζουμε στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα της σφαίρας, εξετάζοντας τη συμπεριφορά του κελύφους αμέσως μετά το λυγισμό.

3.1 ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΑΛΥΓΙΣΜΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ

Από τη σχέση (2.7) της παραγράφου 2.1.2 παρατηρούμε ότι η μεταλυγισμική συμπεριφορά της κατασκευής μας περιγράφεται από τη συνάρτηση v , άρα προσδιορίζοντας τη v προσδιορίζουμε και τη συμπεριφορά της σφαίρας μετά τον λυγισμό. Για αυτό τον λόγο προχωρούμε στα κάνουμε τα εξής βήματα :

Γράφουμε την μετατόπιση v ως γραμμικό συνδυασμό της ιδιομορφής \mathbf{u}_1 και μιας βοηθητικής συνάρτησης $\overset{\circ}{v}$ ορθογώνιας στην \mathbf{u}_1 , δηλαδή $\langle \overset{\circ}{v}, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$, όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του χώρου των συναρτήσεων.

$$\mathbf{v} = \xi \mathbf{u}_1 + \overset{\circ}{\mathbf{v}}. \quad (3.1)$$

Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε πως το ξ αποτελεί ένα μέτρο της συμμετοχής της ιδιομορφής \mathbf{u}_1 στην μεταλυγισμική μετατόπιση της κατασκευής.

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor τους όρους της n -στης μεταβολής του συναρτησιακού της δυναμικής ενέργειας $\Pi^{(n)}[\mathbf{u}_0(\lambda); \lambda]$ ως προς το κρίσιμο φορτίο λ_{cr} ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi^{(n)}[\mathbf{u}_0(\lambda); \lambda] &= \Pi^{(n)}[\mathbf{u}_0(\lambda_{cr}); \lambda_{cr}] + \Pi^{(n)}[\mathbf{u}_0(\lambda_{cr}); \lambda_{cr}](\lambda - \lambda_{cr}) \\ &+ \frac{1}{2} \Pi^{(n)}[\mathbf{u}_0(\lambda_{cr}); \lambda_{cr}](\lambda - \lambda_{cr})^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

ή πιο εύχρηστα

$$\Pi^{(n)}[\mathbf{u}_0(\lambda); \lambda] = \Pi_{cr}^{(n)} + \Pi_{cr}^{(n)}(\lambda - \lambda_{cr}) + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{(n)}(\lambda - \lambda_{cr})^2 + \dots \quad (3.3)$$

Η υπερκείμενη τελεία (\dot{g}) δηλώνει παραγώγιση ως προς το λ .

Με βάση τα παραπάνω αναπτύγματα και υπενθυμίζοντας ότι ο πρώτος όρος της σχέσης (2.8) μηδενίζεται (ισορροπία), η σχέση (2.8) γίνεται

$$\begin{aligned} &\left\{ \Pi_{cr}^{(n)} + \Pi_{cr}^{(n)}(\lambda - \lambda_{cr}) + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{(n)}(\lambda - \lambda_{cr})^2 + \dots \right\} \mathbf{v} \delta \mathbf{u} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \Pi_{cr}^{(n)} + \Pi_{cr}^{(n)}(\lambda - \lambda_{cr}) + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{(n)}(\lambda - \lambda_{cr})^2 + \dots \right\} \mathbf{v}^2 \delta \mathbf{u} + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Θεωρώντας τώρα το ξ ως ανεξάρτητη μεταβλητή ώστε $\lambda = \lambda(\xi)$ και $\overset{\circ}{\mathbf{v}} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\xi)$ θεωρούμε τις κάτωθι ασυμπτωτικές εκφράσεις για μικρές τιμές του ξ

$$\lambda = \lambda_{cr} + \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^2 + \lambda_3 \xi^3 + \dots \quad (3.5)$$

$$\mathbf{v} = \xi^2 \mathbf{u}_2 + \xi^3 \mathbf{u}_3 + \dots \quad (3.6)$$

Επομένως η μετατόπιση \mathbf{v} γίνεται

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 = \xi \mathbf{u}_1 + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \xi^3 \mathbf{u}_3 + \dots \quad (3.7)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.4) τις σχέσεις (3.5) και (3.7), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \left\{ \Pi_{cr}'' + \Pi_{cr}^{\xi} (\lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^2 + \dots) + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\xi\xi} (\lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^2 + \dots)^2 + \dots \right\} (\xi \mathbf{u}_1 + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \dots) \delta \mathbf{u} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \Pi_{cr}'' + \Pi_{cr}^{\xi} (\lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^2 + \dots) + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\xi\xi} (\lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^2 + \dots)^2 + \dots \right\} (\xi \mathbf{u}_1 + \xi^2 \mathbf{u}_2 + \dots)^2 \delta \mathbf{u} \\ & + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.10), η σχέση (3.8) γίνεται

$$\begin{aligned} & \xi^2 \left(\Pi_{cr}'' \mathbf{u}_2 + \lambda_1 \Pi_{cr}^{\xi} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\xi\xi} \mathbf{u}_1^2 \right) \delta \mathbf{u} \\ & + \xi^3 \left(\Pi_{cr}'' \mathbf{u}_3 + \lambda_1 \Pi_{cr}^{\xi} \mathbf{u}_2 + \lambda_2 \Pi_{cr}^{\xi} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \Pi_{cr}^{\xi\xi} \mathbf{u}_1 + \Pi_{cr}'' \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \Pi_{cr}^{\xi} \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{6} \Pi_{cr}^{(4)} \mathbf{u}_1^3 \right) \delta \mathbf{u} \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Απαιτούμε οι συντελεστές των ξ^n να μηδενίζονται ταυτόχρονα για $n \geq 2$ και για όλες τις αποδεκτές συναρτήσεις $\delta \mathbf{u}$.

Έτσι από το μηδενισμό του όρου ξ^2 θα πρέπει

$$\Pi_{cr}'' \mathbf{u}_2 \delta \mathbf{u} + \lambda_1 \Pi_{cr}^{\xi} \mathbf{u}_1 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\xi\xi} \mathbf{u}_1^2 \delta \mathbf{u} = 0. \quad (3.10)$$

Για $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ έχουμε ότι

$$\Pi_{cr}^{\cdot} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 + \lambda_1 \Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\mathbb{M}} \mathbf{u}_1^3 = 0, \quad (3.11)$$

ενώ για $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ από τη σχέση έχουμε ότι

$$\Pi_{cr}^{\mathbb{N}} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 = \Pi_{cr}^{\mathbb{N}} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = 0 \quad (3.12)$$

και γενικότερα $\Pi_{cr}^{\mathbb{N}} \mathbf{u}_m \mathbf{u}_1 = 0$ για $m \geq 2$. Από τη σχέση (3.11) υπολογίζουμε τελικά ότι

$$\lambda_1 \Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\mathbb{M}} \mathbf{u}_1^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\mathbb{M}} \mathbf{u}_1^3 / \Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_1^2. \quad (3.13)$$

Με την ανωτέρα διαδικασία υπολογίσαμε τον πρώτο όρο της ασυμπτωτικής έκφρασης του φορτίου λ .

Αντίστοιχα από το μηδενισμό του όρου ξ^3 , υπολογίζουμε τον δεύτερο όρο

$$\lambda_2 = -\frac{\frac{1}{6} \Pi_{cr}^{(4)} \mathbf{u}_1^4 + \Pi_{cr}^{(3)} \mathbf{u}_1^2 \mathbf{u}_2 + \lambda_1 \left[\Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_1^2 \right] + \frac{1}{2} \lambda_1^2 \Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_1^3}{\Pi_{cr}^{\mathbb{G}} \mathbf{u}_1^2}. \quad (3.14)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και τους άλλους όρους $\lambda_3, \lambda_4, \dots$.

Είναι φανερό ότι ο υπολογισμός του συντελεστή λ_1 απαιτεί την εύρεση της συνάρτησης \mathbf{u}_1 , ενώ ο υπολογισμός του λ_2 απαιτεί τον προσδιορισμό και της συνάρτησης \mathbf{u}_2 . Η εξίσωση που οδηγεί στην εύρεση της \mathbf{u}_2 είναι η (3.10), η οποία αποτελεί ένα μη ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών. Επειδή η \mathbf{u}_1 προέρχεται από ένα ομογενές πρόβλημα ιδιοτιμών (σχέση (2.9)), κάθε πολλαπλάσιο της \mathbf{u}_1 μπορεί να εισέρθει στη σχέση (3.10), με αποτέλεσμα η σχέση (3.10) να μην έχει μοναδική λύση ως προς \mathbf{u}_2 .

Υπενθυμίζουμε ότι $\langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$ και $\bar{\mathbf{v}} = \xi^2 \mathbf{u}_2 + \xi^3 \mathbf{u}_3 + \dots$.

Συνεπώς

$$\langle \xi^2 \mathbf{u}_2 + \xi^3 \mathbf{u}_3 + \dots, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \xi^2 \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \xi^3 \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \dots = 0 \quad (3.15)$$

και άρα $\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$ για κάθε $n \geq 2$. Επομένως η ζητούμενη ιδιομορφή \mathbf{u}_2 θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0. \quad (3.16)$$

Έχοντας υπολογίσει τη \mathbf{u}_1 και μια λύση $\bar{\mathbf{u}}_2$ της (3.10), η συνάρτηση \mathbf{u}_2 που μας ενδιαφέρει είναι η

$$\mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}_2 - \langle \bar{\mathbf{u}}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1. \quad (3.17)$$

Υπολογίζοντας την \mathbf{u}_2 , υπολογίζουμε από τη σχέση (3.14) τον ασυμπτωτικό όρο λ_2 .

Η σχέση $\lambda - \xi$ πριν τον λυγισμό ονομάζεται πρωτεύων ή θεμελιώδης δρόμος ισορροπίας, ενώ μετά το λυγισμό η σχέση αυτή ονομάζεται δευτερεύων ή μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας. Η αλλαγή της κατάστασης της κατασκευής μας στο σημείο $\lambda = \lambda_{cr}$ από μια κατάσταση προλυγισμικής ισορροπίας σε μια κατάσταση μεταλυγισμικής ισορροπίας ονομάζεται διακλάδωση και αυτό γιατί μπορεί να θεωρηθεί ότι ο πρωτεύων δρόμος ισορροπίας διαχωρίζεται. Όταν το $\lambda_1 \neq 0$ τότε η διακλάδωση στο σημείο $\lambda = \lambda_{cr}$ είναι ασύμμετρη και συνδέεται πάντα με αστάθεια, ενώ όταν $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 \neq 0$ η διακλάδωση είναι συμμετρική. Στη συμμετρική διακλάδωση ενδέχεται να έχω $\lambda_2 > 0$ ή $\lambda_2 < 0$, οπότε το σημείο διακλάδωσης είναι ευσταθές ή ασταθές αντίστοιχα.

3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΜΕΤΑΛΥΓΙΣΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Η παράγραφος αυτή αποτελεί εξειδίκευση της γενικής θεωρίας της παραγράφου 3.1 για αξονοσυμμετρική συμπεριφορά σφαιρών. Βασιζόμαστε στην ανάλυση της παραγράφου 2.2 όπου υπολογίσαμε την κρίσιμη πίεση λυγισμού και την αντίστοιχες μορφές της λύσης μας (ιδιομορφές). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την συμπεριφορά της σφαίρας μας λίγο μετά τον λυγισμό. Αυτό που στην πραγματικότητα μας ενδιαφέρει είναι η αρχική κλίση του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας, ώστε να χαρακτηρίσουμε την συμπεριφορά της αμέσως μετά την διακλάδωση..

Έστω ότι βρισκόμαστε σε θέση ισορροπίας. Η συνολική μεταβολή της δυναμική μας ενέργεια γράφεται

$$\Delta\Pi[u, w, \lambda] = \Pi_2[u, w, \lambda] + \Pi_3[u, w, \lambda] + \Pi_4[u, w, \lambda]. \quad (3.18)$$

Αναπτύσσουμε κάθε όρο της δυναμικής ενέργειας σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο λ_{cr} όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \Pi_m[u, w, \lambda] = & \Pi_m[u, w, \lambda_{cr}] + (\lambda - \lambda_{cr}) \overset{\text{E}}{\Pi}_m[u, w, \lambda_{cr}] \\ & + (\lambda - \lambda_{cr})^2 \overset{\text{E}}{\Pi}_m[u, w, \lambda_{cr}] + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

με $m = 2, 3, 4$.

Στη συνέχεια στη σχέση (3.18) εισάγουμε τις ιδιομορφές (2.51) και (2.52). Η σχέση (3.18) λόγω της (3.19) γίνεται

$$\begin{aligned}
\Delta\Pi[u_{cr}, w_{cr}, \lambda] = & a^2 \left\{ \Pi_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right] + (\lambda - \lambda_{cr}) \overset{\text{E}}{\Pi}_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right] \right. \\
& \left. + (\lambda - \lambda_{cr})^2 \overset{\text{E}}{\Pi}_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right] + \dots \right\} \\
& + a^3 \left\{ \Pi_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right] + (\lambda - \lambda_{cr}) \overset{\text{E}}{\Pi}_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right] \right. \\
& \left. + (\lambda - \lambda_{cr})^2 \overset{\text{E}}{\Pi}_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right] + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Θυμίζουμε ότι η παράμετρος a είναι το πλάτος της ιδιομορφής.

Οι όροι που μας δίνουν την αρχική κλίση του μεταλυγισμικού δρόμου ισοροπίας είναι οι $\overset{\text{E}}{\Pi}_2$ και Π_3 , αυτό φαίνεται από τη σχέση (3.13). Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται πλέον από την παράμετρο a και άρα μπορούμε να γράψουμε τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας στην πιο απλή μορφή

$$\Delta\Pi[a] = a^2 (\lambda - \lambda_{cr}) \overset{\text{E}}{\Pi}_2 + a^3 \Pi_3. \tag{3.21}$$

Απαιτώντας ισοροπία, δηλαδή

$$\frac{\partial(\Delta\Pi[a])}{\partial a} = 0 \tag{3.22}$$

και απορρίπτοντας τη μηδενική λύση ως τετριμμένη καταλήγουμε πως

$$\lambda - \lambda_{cr} = -a \frac{3\Pi_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right]}{2\overset{\text{E}}{\Pi}_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a}, \lambda_{cr} \right]}. \tag{3.23}$$

Υπολογίζοντας τους όρους $\overset{\text{E}}{\Pi}_2$ και Π_3 βρίσκουμε την αρχική κλίση του μεταλυγισμικού δρόμου ισοροπίας και άρα τη συμπεριφορά της σφαίρας λίγο μετά τον λυγισμό.

Απαλείφοντας τους όρους που είναι τάξης μεγέθους της μονάδας σε σχέση με το μ_n για το συναρτησιακό $\overset{\text{g}}{\Pi}_2$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \overset{\text{g}}{\Pi}_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a} \right] &= \frac{\pi ETR^2}{1-\nu^2} \int_0^\pi \left\{ -[P'_n(\cos\theta)\sin\theta]^2 \sin\theta \right. \\ &\quad + 2(1-2\nu)[P_n(\cos\theta)]^2 \sin^3\theta - 4\frac{1+\nu}{\mu_n}[P'_n(\cos\theta)]^2 \sin\theta \cos^2\theta \\ &\quad \left. - 4P_n(\cos\theta)P'_n(\cos\theta)\sin^2\theta \cos\theta \right\} d\theta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα [9] έχουμε ότι

$$\overset{\text{g}}{\Pi}_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a} \right] = -\frac{\pi ETR^2}{1-\nu^2} n \left[1 + \frac{1}{2n} + \dots \right]. \quad (3.25)$$

Από τη σχέση (2.53) προκύπτει ότι $n \sim \sqrt{\frac{R}{T}}$ και για αυτό κρατάμε μόνο τους δυο πρώτους όρους της αγκύλης και γράφουμε ότι

$$\overset{\text{g}}{\Pi}_2 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a} \right] = \frac{\pi ETR^2}{1-\nu^2} \left[n + \frac{1}{2} \right]. \quad (3.26)$$

Ενεργώντας ανάλογα για το συναρτησιακό Π_3 καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} \Pi_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a} \right] &= \frac{\pi ETR^2}{\mu_n} \int_0^\pi \left\{ [P_n(\cos\theta)'\sin\theta]^2 \cos\theta \right. \\ &\quad + 4\frac{(1+\nu)^2}{\mu_n^2} [P_n(\cos\theta)']^3 \cos^3\theta \\ &\quad + 3\frac{(1+\nu)}{\mu_n} [P_n(\cos\theta)']^2 P_n(\cos\theta) \sin\theta \cos^2\theta \\ &\quad + 4P_n(\cos\theta)' [P_n(\cos\theta)]^2 \sin^2\theta \cos\theta \\ &\quad \left. + 4\nu [P_n(\cos\theta)]^3 \sin^3\theta \right\} d\theta \end{aligned} \quad (3.27)$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της ολοκληρωτέας ποσότητας προέρχεται από δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του κελύφους ενώ οι υπόλοιποι από την δυναμική ενέργεια λόγω της ομοιόμορφης εξωτερικής πίεσης p . Οι όροι της δυναμική ενέργειας λόγω της ομοιόμορφης εξωτερικής πίεσης p είναι μικροί και μπορούν να αγνοηθούν. Συνεπώς ο υπολογισμός του συναρτησιακού Π_3 υπολογίζεται ολοκληρώνοντας μόνο τον πρώτο όρο. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντας και θεωρώντας ότι $\mu_n \gg 1$, καταλήγουμε στη σχέση

$$\Pi_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a} \right] = -\frac{3}{4} n(n+1) \pi ETR^3 \int_{-1}^1 [P_n(z)]^3 dz, \quad (3.28)$$

όπου $z \equiv \cos \theta$.

Από τον Adams [10] έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τα πολώνυμα Legendre

$$\int_{-1}^1 P_a(z) P_b(z) P_c(z) dz = \frac{2}{2\varepsilon + 1} \frac{A[e-a] A[e-b] A[e-c]}{A[\varepsilon]}, \quad (3.29)$$

με

$$\varepsilon = \frac{a+b+c}{2} \quad (3.30)$$

και

$$A[y] \equiv \frac{(2y-1)!}{y!(y-1)!} 2^{-(y-1)}. \quad (3.31)$$

Καμία από τις ποσότητες a, b και c δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των άλλων δυο και το άθροισμα $a+b+c$ πρέπει να είναι άρτιος αριθμός.

Θέτοντας $a=b=c=n$ και απαιτώντας το n να είναι άρτιο, έχουμε ότι

$$\int_{-1}^1 [P_n(z)]^3 dz = \frac{2}{3n+1} \frac{(A[n/2])^3}{(A[3n/2])}. \quad (3.32)$$

Αναπτύσσοντας σε ασυμπτωτικά αναπτύγματα τους παραγοντικούς όρους και θεωρώντας ότι $n^2 \gg 1$ καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{-1}^1 [P_n(z)]^3 dz = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi} \frac{1}{n(n+1)}. \quad (3.33)$$

Επομένως το συναρτησιακό Π_3 γίνεται

$$\Pi_3 \left[\frac{u_{cr}}{a}, \frac{w_{cr}}{a} \right] = -\sqrt{3} ETR^2. \quad (3.34)$$

Έχοντας υπολογίσει τα συναρτησιακά Π_2 και Π_3 από τη σχέση (3.23) έχουμε ότι

$$\lambda - \lambda_{cr} = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} (1-v^2) \frac{a}{n + \frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

Θέτοντας την εγκάρσια μετατόπιση του “βόρειου πόλου” της σφαίρας με $A = W(0) = w(0)R = aR$ και θεωρώντας την μεταβλητή A/T ως τον όρο διαταραχής, τελικά καταλήγουμε στη σχέση $p/p_{cr} - A/T$, που είναι

$$\frac{p}{p_{cr}} = 1 - \frac{3\sqrt{3} [12(1-v^2)]^{1/4}}{4\pi} \sqrt{\frac{T}{R}} \left(\frac{A}{T} \right). \quad (3.36)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς την διαταραχή, μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική κλίση του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας που είναι

$$\frac{\partial(p/p_{cr})}{\partial(A/T)} = -\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \sqrt[4]{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{T}{R}}. \quad (3.37)$$

Η κλίση είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι έχουμε ασταθή αρχικό μεταλυγισμικό δρόμο ισοροπίας, ενώ το σημείο διακλάδωσης $p = p_{cr}$ είναι ασύμμετρο.

4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επαληθεύσουμε αριθμητικά τη γενική θεωρία για το πρόβλημα της αξονοσυμμετρικής σφαίρας όσον αφορά την κρίσιμη πίεση λυγισμού και την ασταθή μεταλυγισμική της συμπεριφορά. Στο μοντέλο μας θα επιβάλουμε αρχικές ατέλειες στη μορφή της πρώτης μορφής λυγισμού και θα διαπιστώσουμε ότι η μέγιστη πίεση της ατελούς σφαίρας είναι μικρότερη της κρίσιμης πίεσης που αντιστοιχεί στη τέλεια. Θα χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων Abaqus, το οποίο έχει την δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος διακλάδωσης καθώς και την διεξαγωγή μη-γραμμικής ανάλυσης.

4.2 Σχεδιασμός μοντέλου

Σχεδιάζουμε μια “φέτα” της σφαίρας (λόγω αξονοσυμμετρίας). Θεωρούμε ότι η σφαίρα είναι ελαστική με μέτρο ελαστικότητας 210000 και λόγο Poisson 0.3 (οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε χάλυβα). Για την διακριτικοποίηση του σφαιρικού κελύφους χρησιμοποιούμε τρικομβικό αξονοσυμμετρικό στοιχείο. Η διακριτικοποίησή μας τελικά περιγράφεται με 63 στοιχεία και 127 κόμβους.

4.3 Υπολογισμός κρίσιμης πίεσης και μορφής λυγισμού

Αρχικά με την ανάλυση ιδιοτιμών υπολογίζουμε την κρίσιμη πίεση καθώς και την μορφή λυγισμού. Η κρίσιμη πίεση λυγισμού υπολογίζεται για διάφορους λόγους ακτίνας προς πάχους (R/T). Τα αριθμητικά και αναλυτικά αποτελέσματα της ανάλυσης φαίνονται στον πίνακα 1.

R/T	20	100	500	1000
$P_{numerical}$	621.74	25.316	1.0156	0.25377
$P_{analytical}$	635.48	25.419	1.0168	0.25419

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Η μορφή λυγισμού αναλυτικά υπολογίζεται από τις σχέσεις (2.51), (2.52) και είναι φανερό ότι ο υπολογισμός της καθορίζεται από τον βαθμό n του πολυωνύμου Legendre. Από τη σχέση (2.53) υπολογίζουμε αναλυτικά τον βαθμό του πολυωνύμου. Τα αποτελέσματα για τις προηγούμενες τιμές του λόγου R/T , φαίνονται στον πίνακα 2.

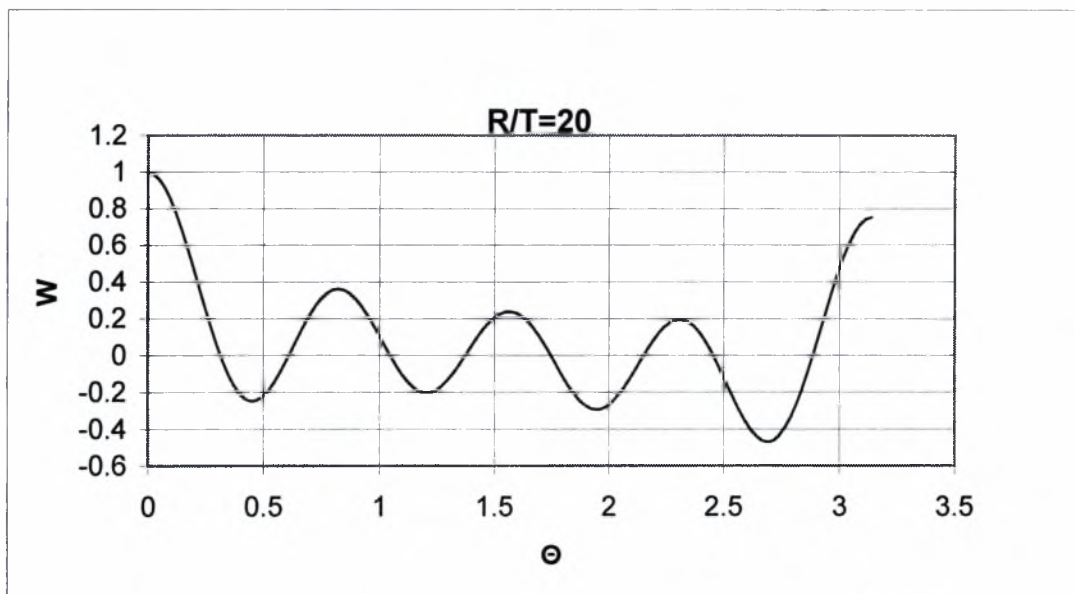
R/T	20	100	500	1000
n	8	18	40	57
$P_n(\cos\theta)$	$P_8(\cos\theta)$	$P_{18}(\cos\theta)$	$P_{40}(\cos\theta)$	$P_{57}(\cos\theta)$

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

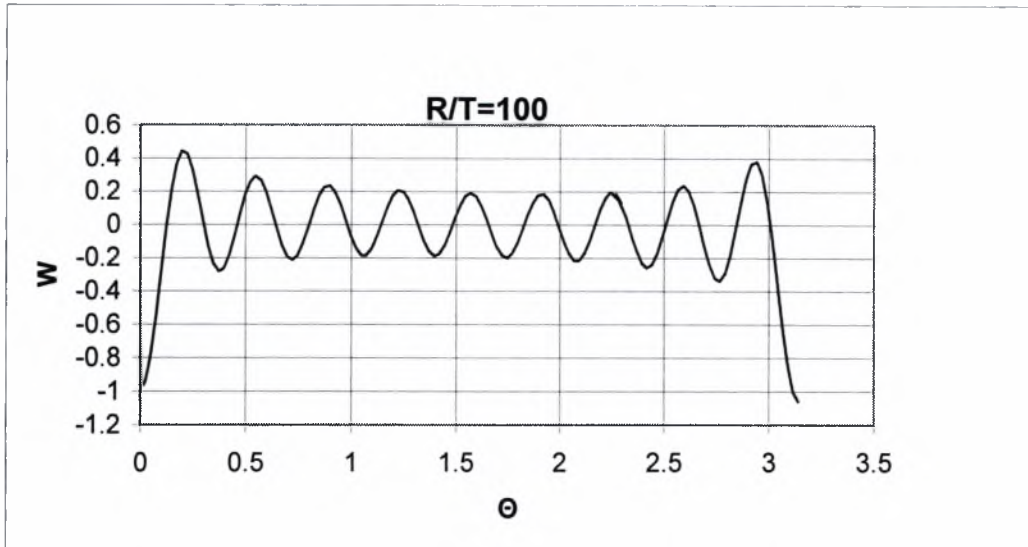
Αριθμητικά όσον αφορά την ακτινική μετατόπιση w , αυτή μπορεί να προσεγγιστεί μέσα από τη σχέση

$$w = u_1 \sin(\theta) + u_2 \cos(\theta), \quad (4.1)$$

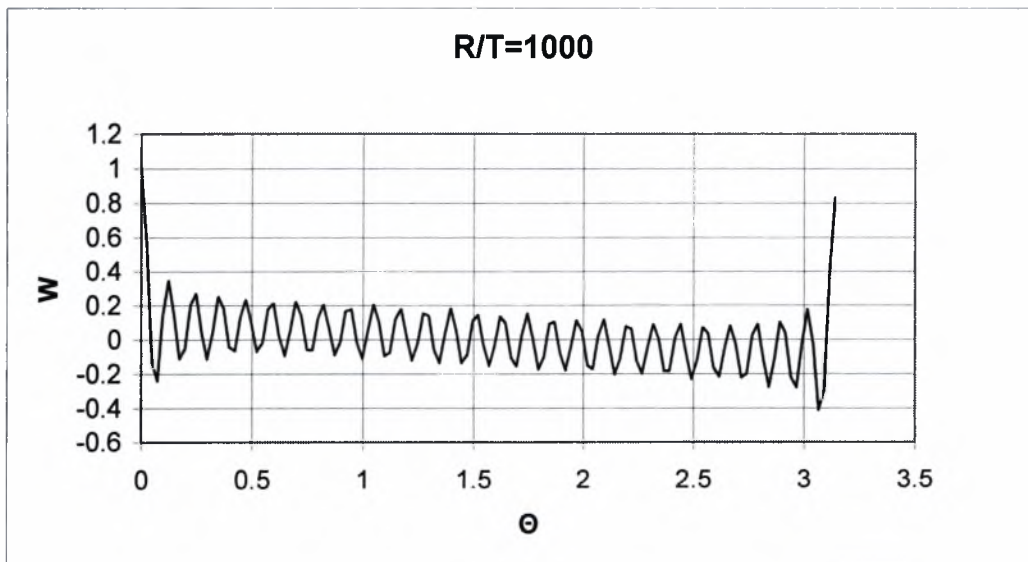
όπου u_1 και u_2 οι μετατοπίσεις του κόμβου κατά τις διευθύνσεις x και y στο διδιάστατο αξονοσυμμετρικό μοντέλο αντίστοιχα και θ η γωνία στην οποία βρίσκεται. Υπολογίζοντας τις ακτινικές μετατοπίσεις των 127 κόμβων, χαράσσουμε την γραφική τους παράσταση συναρτήσεως της γωνίας θ , όπως φαίνονται στα σχήματα 1, 2 και 3.



Σχήμα 1 : Διάγραμμα ακτινικής μετατόπισης-γωνίας για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T = 20$



Σχήμα 2 : Διάγραμμα ακτινικής μετατόπισης-γωνίας για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T=100$

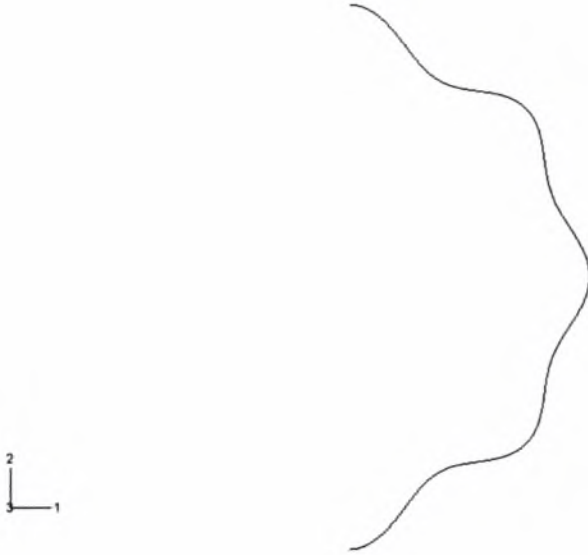


Σχήμα 3 : Διάγραμμα ακτινικής μετατόπισης-γωνίας για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T=1000$

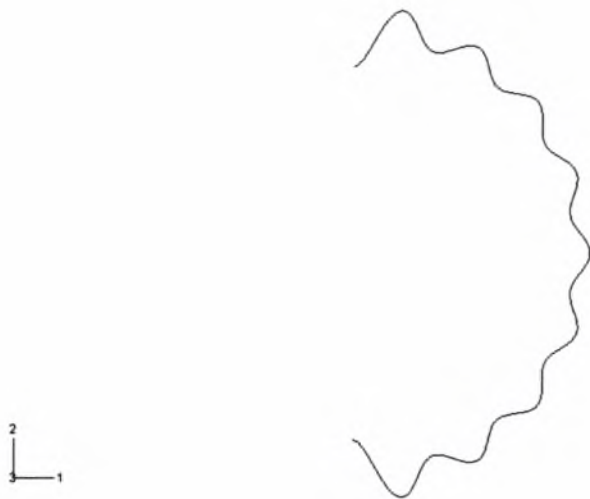
Διαπιστώνουμε αριθμητικά ότι οι συναρτήσεις που περιγράφουν τις ακτινικές μετατοπίσεις είναι αυτές του πίνακα 2, εκτός από την περίπτωση όπου $R/T=1000$.

Η αριθμητική ακτινική μετατόπιση τότε αντιστοιχεί στο πολώνυμο Legendre βαθμού 54.

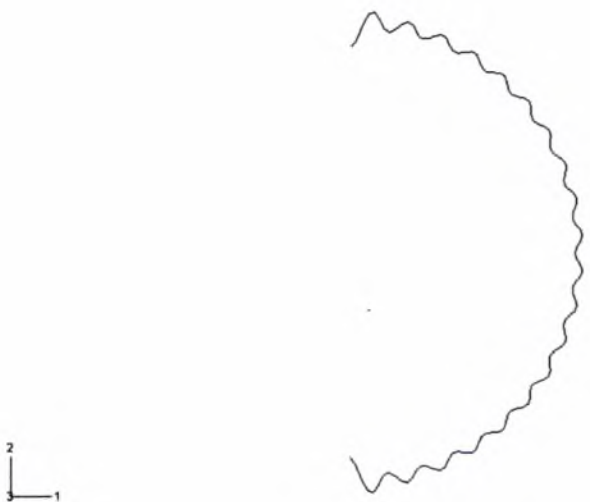
Οι αντίστοιχες “πραγματικές” μορφές λυγισμού για κάθε περίπτωση που εξετάζουμε φαίνονται στα σχήματα 4, 5, 6 και 7.



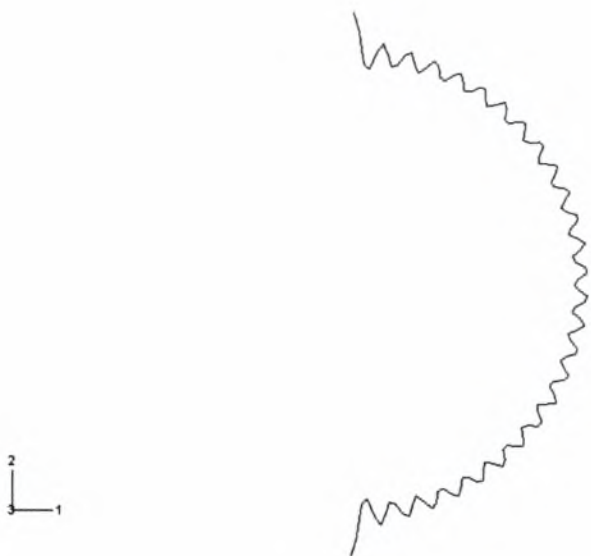
Σχήμα 4 : Μορφή λυγισμού αξονοσυμμετρικής σφαίρας, $R/T = 20$



Σχήμα 5 : Μορφή λυγισμού αξονοσυμμετρικής σφαίρας, $R/T = 100$



Σχήμα 6 : Μορφή λυγισμού αξονοσυμμετρικής σφαίρας, $R/T = 500$

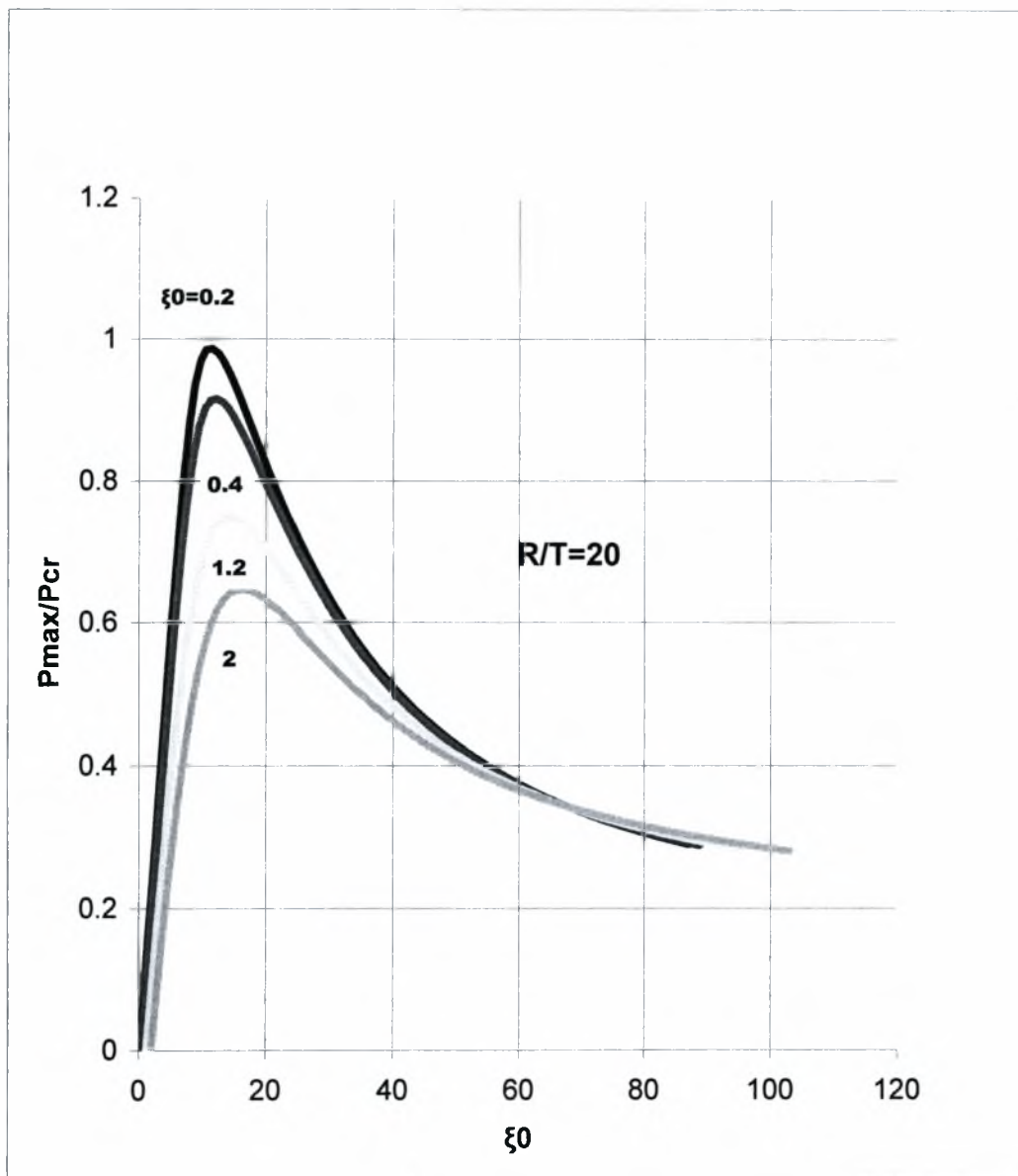


Σχήμα 7 : Μορφή λυγισμού αξονοσυμμετρικής σφαίρας, $R/T = 1000$

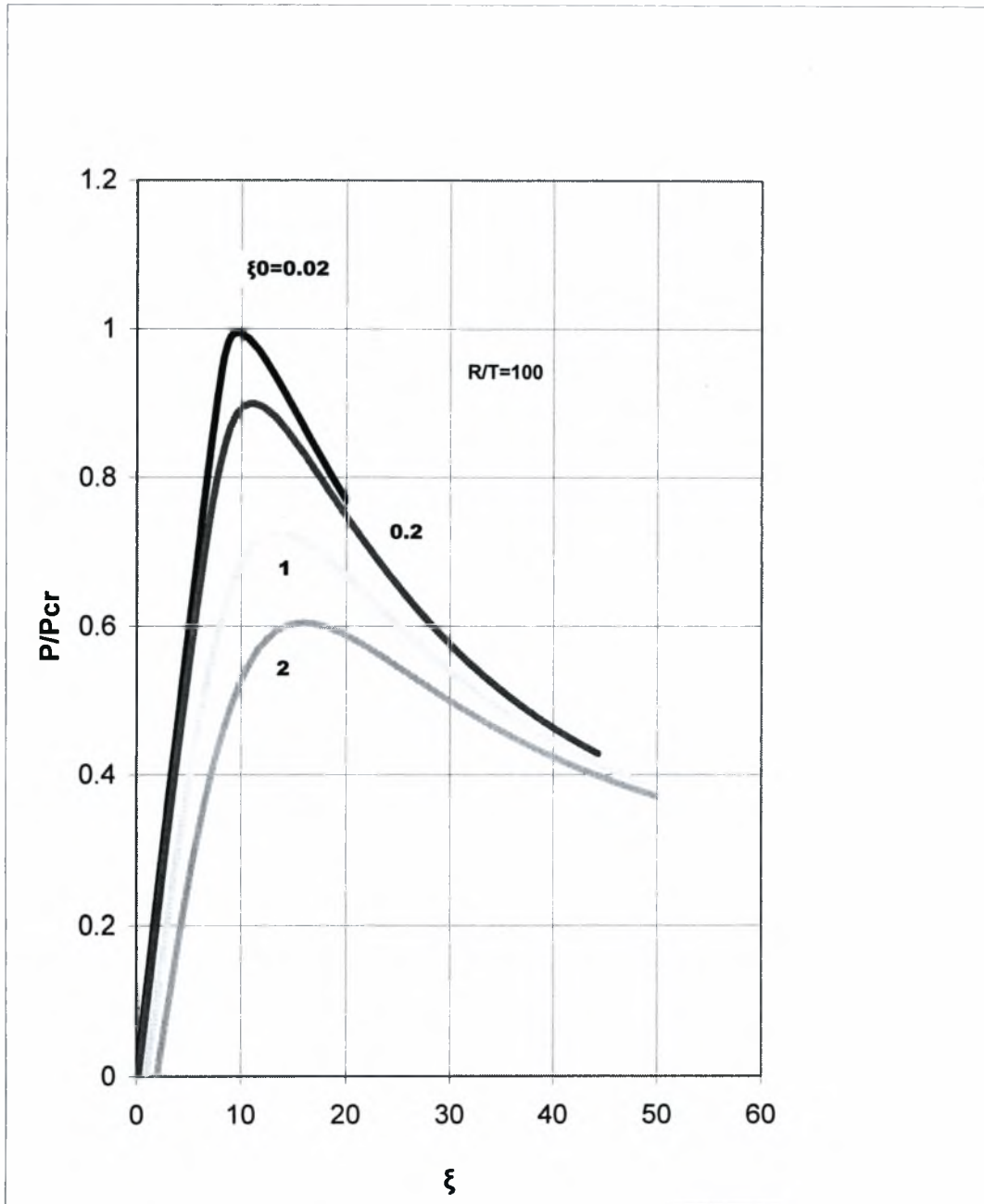
4.4 Μεταλυγισμική συμπεριφορά και επιρροή ατελειών

Στο μοντέλο μας χρησιμοποιούμε αρχικές ατέλειες στην μορφή της πρώτης μορφής λυγισμού (ιδιομορφής) όπως προκύπτει από την ανάλυση ιδιοτιμών. Για διάφορες μικρές τιμές των αρχικών ατελειών υπολογίζουμε τον δρόμο ισορροπίας της αξονοσυμμετρικής σφαίρας χαράσσοντας το διάγραμμα του λόγου P/P_{cr} συναρτήσει της παραμέτρου διαταραχής ξ . Η παράμετρος ξ προέρχεται από το γινόμενο της εγκάρσιας μετατόπισης του “βόρειου πόλου”, δηλαδή στο σημείο $\theta = 0$ επί του λόγου R/T .

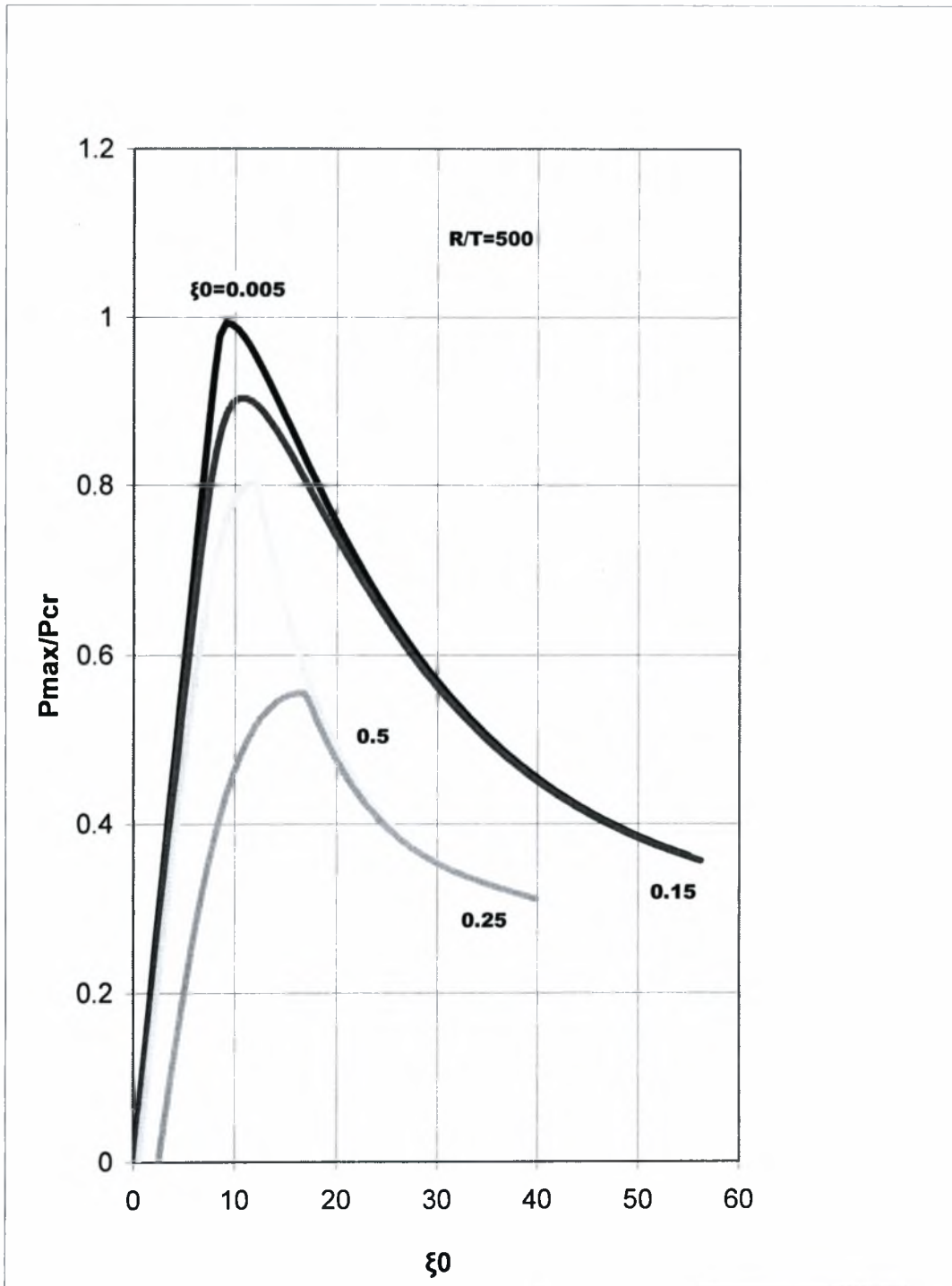
Για τους λόγους $R/T = 20, 100, 500, 1000$, χαράσσουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα όπως φαίνονται στα σχήματα 8, 9, 10 και 11.



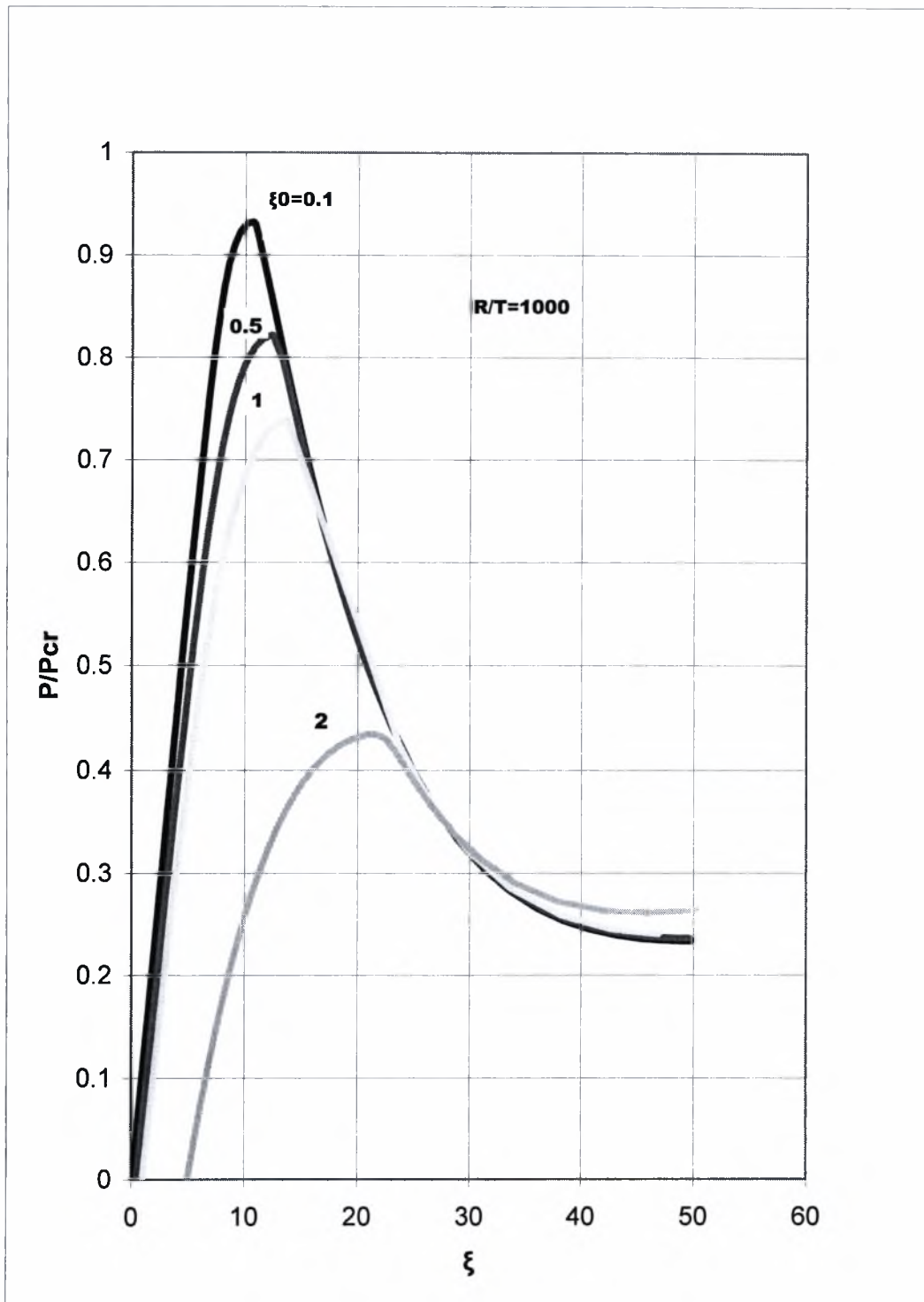
Σχήμα 8 : Διάγραμμα πίεσης-μετατόπισης για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T = 20$



Σχήμα 9 : Διάγραμμα πίεσης-μετατόπισης για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T = 100$

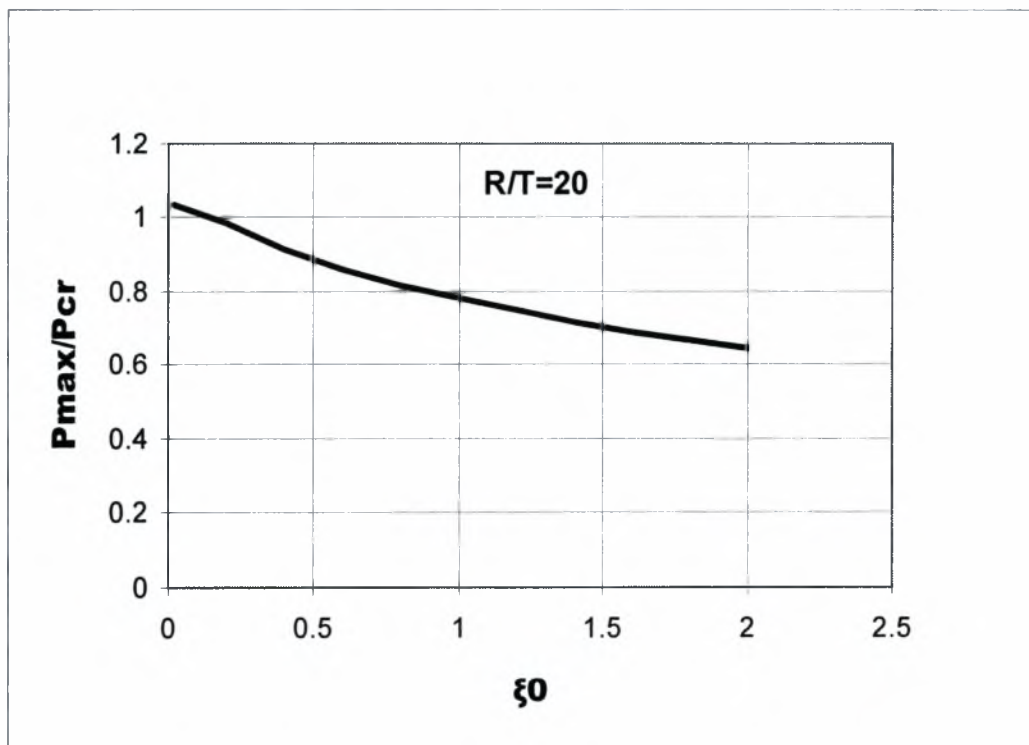


Σχήμα 10 : Διάγραμμα πίεσης-μετατόπισης για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T = 500$

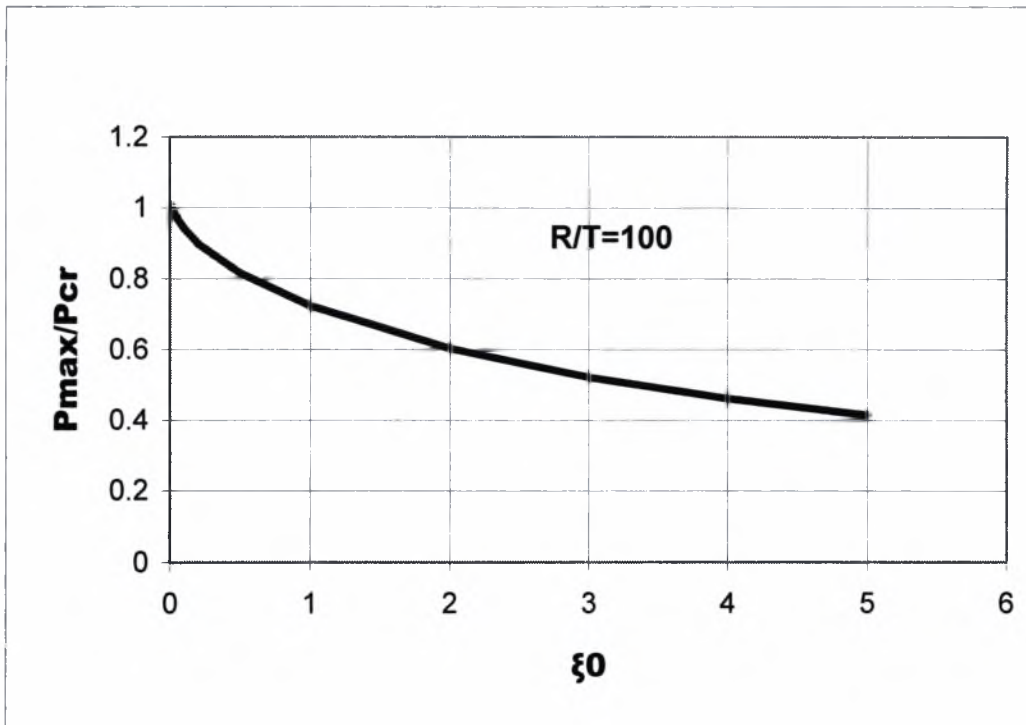


Σχήμα 11 : Διάγραμμα πίεσης-μετατόπισης για αξονοσυμμετρική σφαίρα, $R/T = 1000$

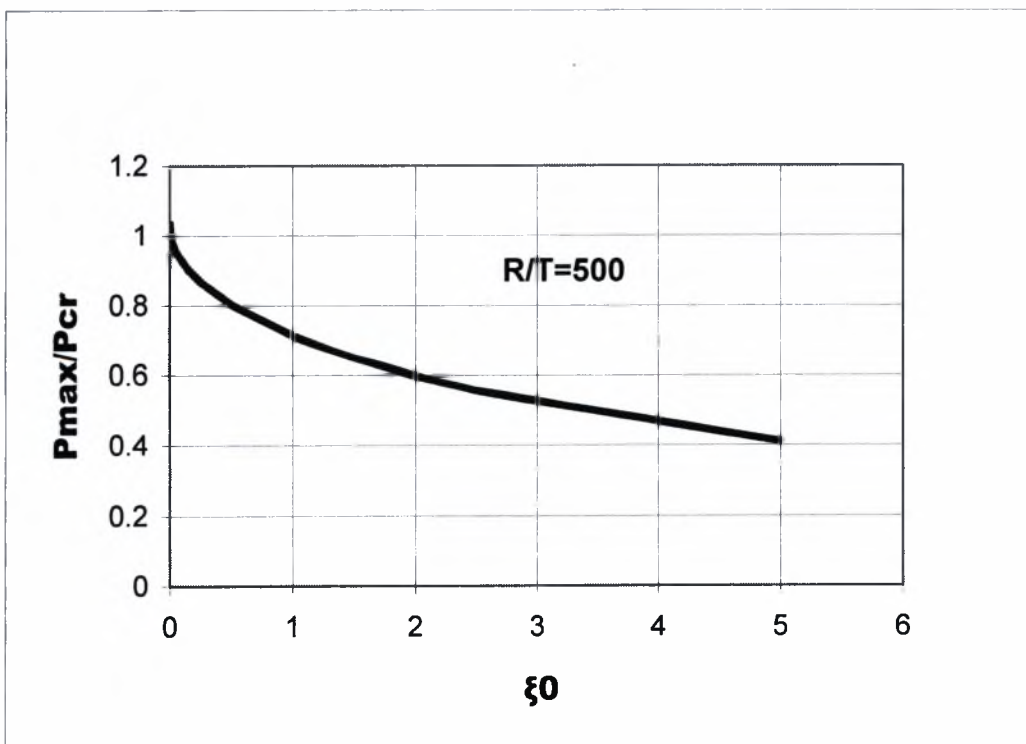
Διαπιστώνουμε αριθμητικά ότι το κέλυφός μας με αρχικές ατέλειες “αστοχεί” σε πίεση μικρότερη από αυτή που δείχνει η κρίσιμη πίεση της τέλει κατασκευής. Το αξονοσυμμετρικό κέλυφός μας είναι δηλαδή ευαίσθητο σε αρχικές ατέλειες και μάλιστα καθώς αυξάνουμε τις αρχικές ατέλειες το μέγιστο φορτίο ελαττώνεται. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν χαράξουμε το λόγο P_{max}/P_{cr} συναρτήσει της αρχικής ατέλειας ξ_0 για τις διάφορες γεωμετρίες μας όπως φαίνονται στα σχήματα 12, 13, 14 και 15.



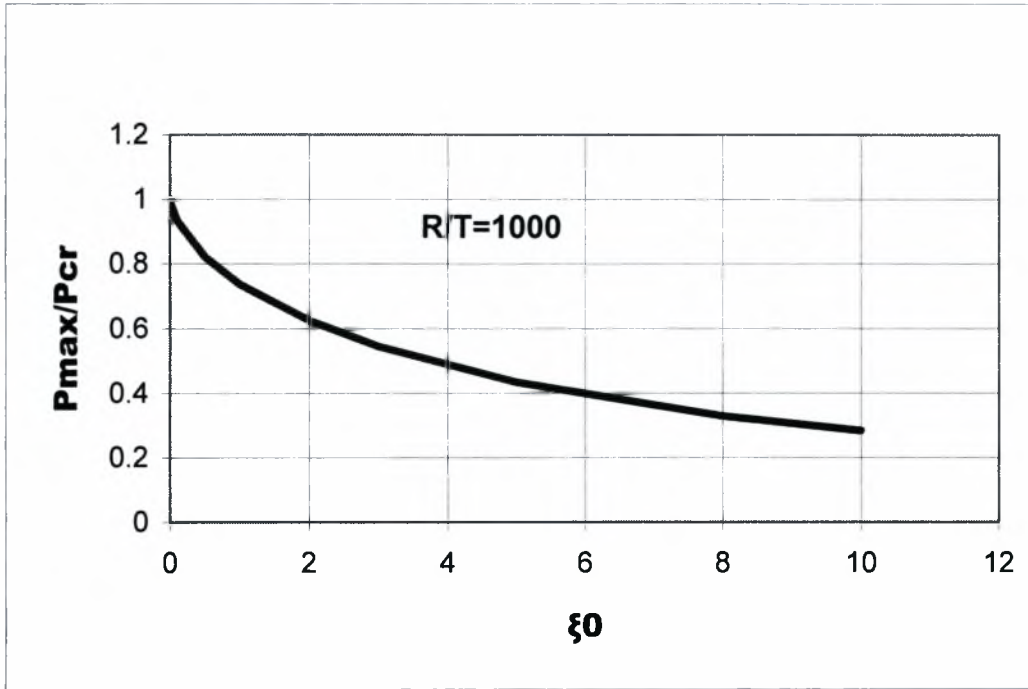
Σχήμα 12 : Διάγραμμα P_{max}/P_{cr} συναρτήσει ξ_0 για $R/T = 20$



Σχήμα 13 : Διάγραμμα P_{max}/P_{cr} συναρτήσει ξ_0 για $R/T = 100$



Σχήμα 14 : Διάγραμμα P_{max}/P_{cr} συναρτήσει ξ_0 για $R/T = 500$



Σχήμα 15 : Διάγραμμα P_{max}/P_{cr} συναρτήσει ξ_0 για $R/T = 1000$

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ασχοληθήκαμε με το λυγισμό και τη μεταλυγισμική συμπεριφορά ελαστικών, ισοτροπικών, σφαιρικών κελυφών σταθερού πάχους με αξονοσυμμετρική συμπεριφορά, τα οποία υπόκεινται σε ομοιόμορφη εξωτερική πίεση.

Υπολογίσαμε για το σφαιρικό κέλυφος την κρίσιμη πίεση λυγισμού και διαπιστώσαμε ότι αυτή αντιστοιχεί σε άπειρες μορφές λυγισμού κάτι που δείχνει μία σοβαρή ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες. Την ίδια μεθοδολογία επαναλαμβάνουμε για την περίπτωση που στο σφαιρικό κέλυφος επιβάλλεται καθαρά αξονοσυμμετρική παραμόρφωση. Η ανάλυση έδειξε πως η κρίσιμη πίεση λυγισμού αντιστοιχεί σε μία μόνο ιδιομορφή. Για την αξονοσυμμετρική παραμορφώσιμη σφαίρα, υπολογίσαμε την αρχική κλίση του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας και διαπιστώσαμε ότι αυτή είναι ασταθής. Για την επαλήθευση των προηγούμενων αναλυτικών αποτελεσμάτων, προσομοιώσαμε αριθμητικά το αξονοσυμμετρικό κέλυφος με πεπερασμένα στοιχεία, υπολογίζοντας την κρίσιμη πίεση λυγισμού και την αντίστοιχη ιδιομορφή λυγισμού της, για διάφορες γεωμετρίες του κελύφους. Στη συνέχεια υποθέτοντας στην αξονοσυμμετρική σφαίρα ατέλειες στην μορφή της πρώτης ιδιομορφής λυγισμού της, διαπιστώσαμε αριθμητικά ότι “αστοχεί” σε πίεση μικρότερη από αυτή που δείχνει η κρίσιμη πίεση της τέλειας σφαίρας. Τα αποτελέσματα επίσης δείχνουν ότι για αυξανόμενο εύρος ατέλειας έχουμε μείωση του οριακού φορτίου πίεσης του σφαιρικού κελύφους.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Zoelly, R., 1915. Ube rein Knickungsproblem an der Kugelschale. Dissertation Zurich
- [2] Scrwerin, E., Zur, 1922. Stabilitat der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmassigen Aussendruck, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 2, 81
- [3] Neut, A. Van Der, Elastic stability of a thin spherical shell. Dissertation Delf (1932)
- [4] Karman, T. Von and Tsien H. S. ,1939. The buckling of spherical shells by external pressure. J. Aero. Sei. 7, 43
- [5] Koiter, W. T., 1945. On the stability of elastic equilibrium. Dissertation Delf.
- [6] Hutchinson J. W. , 1967. Imperfection Sensitivity of externally pressurized spherical shells. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME. 49-55.
- [7] Thompson J. M. T. The rotationally-symmetric branching behaviour of a complete spherical shell
- [8] Bazant Z.P., Cedolin L., 1991. Stability of Structures, Oxford University Press.
- [9] Whittaker, E. T. and G. N. Watson, 1952. Modern Analysis. Cambridge University Press.
- [10] Budiansky B. Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures. Advances in Applied Mechanics, Vol. 14 (Yih, C.-S., ed.), pp. 1–65, New York: Academic Press. 1974.
- [11] Hutchinson J. W. and Koiter W. T., 1970. Postbuckling Theory. Applied Mechanics Reviews, 1353-1366.
- [12] Fitch J. R., 1968. "The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load", Int. J. Solids Struct.,4, 434–446.
- [13] Tsien H. S., 1942. A Theory for the buckling of Thin Shells. Journal of the aeronautical sciences. 373-384.
- [14] Flügge W. Stresses in Shells[M], 1960.Berlin:Springer-Verlag.
- [15] Καραμάνος Σ., 2003. Μη γραμμική ανάλυση κατασκευών-ευστάθεια, Μέρος Α, Β και Γ. Σημειώσεις Μαθήματος. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.
- [16] Timoshenko S. P. and Gere J. M. 1961. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, New-York.

[17] Axelrad E. L. 1985. On Local Buckling of Thin Shells. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 20, No. 4, pp 249-259.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091867

