



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΩΔΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕ  
ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΚΑΙ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΠΛΕΓΜΑ ΜΕ  
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΑΣΗΣ B-CUBIC SPLINES**

Γεώργιος Πολυζόπουλος

*Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Ν. Πελεκάσης*

ΒΟΛΟΣ 2007



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6047/1  
Ημερ. Εισ.: 13-11-2007  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ  
620.106  
ΠΟΛ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΩΔΙΚΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΕ  
ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΚΑΙ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΠΛΕΓΜΑ ΜΕ  
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΑΣΗΣ B-CUBIC SPLINES**

Γεώργιος Πολυζόπουλος

*Επιβλέπων: Επίκουρος Καθηγητής Ν. Πελεκάσης*

ΒΟΛΟΣ 2007

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b> .....	<b>2</b>
<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</b> .....	<b>4</b>
<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b> .....	<b>5</b>
1.1. Γενικά.....	5
1.2. Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας.....	6
<b>2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ–ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ</b> .....	<b>8</b>
2.1. Το πρόβλημα της συναγωγής με διάχυση.....	8
2.2. Το πρόβλημα της ροής αέρα πάνω από λεπτό υγρό υμένα.....	8
2.2.1 Περιγραφή.....	8
2.2.2 Ορισμός του προβλήματος.....	9
<b>3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ</b> .....	<b>16</b>
3.1. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.....	16
3.2. Συναρτήσεις βάσης .....	16
3.2.1 Συναρτήσεις βάσης cubic splines .....	16
3.3. Αριθμητική επίλυση 1D προβλήματος συναγωγής και διάχυσης.....	18
3.4. Αριθμητική επίλυση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ .....	19
3.5. Μέθοδος μεταβλητού πλέγματος.....	24
3.6. Αλγόριθμοι επίλυσης .....	26
3.6.1 Αλγόριθμος επίλυσης μονοδιάστατης συναγωγής και διάχυσης.....	26
3.6.2 Αλγόριθμος επίλυσης ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ .....	26
3.7. Προσδιορισμός συντελεστών.....	27
<b>4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</b> .....	<b>29</b>
4.1. Μονοδιάστατο πρόβλημα συναγωγής-διάχυσης .....	29
4.2. Πρόβλημα ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.....	36
4.2.1 Έλεγχος στη γραμμική περιοχή .....	36
4.2.2 Συμπεριφορά προσαρμοζόμενου πλέγματος στη μη γραμμική περιοχή .....	42
4.2.3 Ανεξαρτησία πλέγματος .....	50
4.2.4 Επιλογή και επίδραση συντελεστών $w_1$ και $w_2$ .....	52
<b>5. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ</b> .....	<b>56</b>
5.1. Σύνοψη αποτελεσμάτων .....	56
5.2. Μελλοντικές εργασίες.....	56
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b> .....	<b>58</b>

Μέθοδος GMRES .....	59
Εφαρμογή GMRES .....	61
<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ .....</b>	<b>64</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>66</b>

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της μεταπτυχιακής εργασίας μου, Επίκουρο Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση, για την πολύτιμη βοήθεια, την καθοδήγηση και το συνεχές ενδιαφέρον του για την πρόοδο της εργασίας μου καθ' όλη τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της μεταπτυχιακής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Νικόλαο Βλάχο, Βασίλειο Μποντόζογλου, Αναστάσιο Σταμάτη και Γεώργιο Κοζανίδη για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις υποδείξεις τους. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω το Διδάκτορα Κωνσταντίνο Τσιγκλιφή για τις υποδείξεις του και την υποψήφια Διδάκτορα Μαρία Βλαχομήτρου για τη σημαντική βοήθεια και τις πολύτιμες διευκρινίσεις.

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1. Γενικά

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αφορά στην χρήση ανομοιομορφου και μεταβλητού πλέγματος για την αριθμητική επίλυση με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων προβλημάτων στα οποία υπάρχουν μεγάλες απαιτήσεις τόσο σε υπολογιστικό χρόνο όσο και σε μνήμη. Τέτοια προβλήματα συναντώνται συχνά στη Ρευστοδυναμική και οι παραπάνω υπολογιστικοί περιορισμοί απαγορεύουν την περαιτέρω διερεύνηση των φυσικών φαινομένων που εξετάζουν. Η βελτιστοποίηση των απαιτήσεων επιτυγχάνεται με χρήση μεταβλητού πλέγματος, με τη χρήση δηλαδή κόμβων των οποίων η θέση δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτώμενη από τις διακυμάνσεις των αποτελεσμάτων.

Ο τρόπος επίλυσης που προτείνεται στην παρούσα εργασία εφαρμόζεται σε προβλήματα όπου το πλέγμα κυριαρχείται από μια εκ των δύο διαστάσεων. Η πυκνωση του πλέγματος σε μια διάσταση μεταφέρεται ομοιόμορφα και στις υπόλοιπες. Οι ροές που μας ενδιαφέρουν έχουν ως χαρακτηριστικό τη μεταφορά διαταραχών στην κύρια διεύθυνση της ροής. Η αριθμητική προσομοίωση τέτοιου είδους ροών για μεγάλο χρονικό διάστημα μας αναγκάζει να επιλέξουμε μια περιοχή διακριτοποίησης πολύ μεγαλύτερη από την περιοχή στην οποία συγκεντρώνεται η διαταραχή. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το ότι χρειάζεται αρκετά πυκνό πλέγμα στην περιοχή της διαταραχής, έχει ως αποτέλεσμα η χρήση ομοιόμορφου πλέγματος να απαιτεί μεγάλο αριθμό στοιχείων. Η στρωματοποιημένη ροή παρουσία διεπιφάνειας με υγρό φιλμ αποτελεί μια τέτοια περίπτωση. Η περίπτωση αυτή διερευνάται από το εργαστήριο ρευστομηχανικής και στροβιλομηχανών του ΤΜΜΒ του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας και έχει πολλές εφαρμογές. Μια από τις πιο σημαντικές είναι η μελέτη της συμπεριφοράς πτερυγίων αεροσκαφών πάνω στα οποία έχει δημιουργηθεί λεπτός υμένας υγρού εξαιτίας βροχόπτωσης. Η περιοχή αυτή συγκεντρώνει μεγάλο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια επειδή έχει καταγραφεί ένας σημαντικός αριθμός ατυχημάτων κάτω από συνθήκες έντονης βροχόπτωσης. Πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σε εμπορικά πτερύγια στη ΝΑΣΑ [2] έδειξαν την μείωση του συντελεστή ανύψωσης και την αύξηση της οπισθέλκουσας σε τέτοιες συνθήκες. Πιστεύεται ότι η παρουσία του υγρού φιλμ στο πάνω μέρος του πτερυγίου μπορεί να οδηγήσει σε πρόωρη αποκόλληση και κατά συνέπεια σε μείωση της ανυψωτικής δύναμης.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής είναι σε συσκευές όπου υπάρχει συμπύκνωση στρωτών υμένων, όπως είναι οι εναλλάκτες θερμότητας και οι συμπυκνωτήρες. Γενικά, η συμπύκνωση επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την λειτουργία συσκευών στις οποίες χρησιμοποιείται ως μέσο θέρμανσης κορεσμένος ατμός και συνεπώς παίζει καθοριστικό ρόλο στον βέλτιστο σχεδιασμό τους [3].

Τέλος, μια νέα εφαρμογή που φαίνεται να αποκτά όλο και περισσότερο ενδιαφέρον είναι η προσομοίωση ροών μέσα στο ανθρώπινο σώμα. Ως παράδειγμα αναφέρεται η μελέτη της ροής μέσα στο αναπνευστικό σύστημα και κυρίως στον βρογχικό αεραγωγό [4]. Κύριος σκοπός είναι η κατανόηση των διαταραχών που εμφανίζονται και οι οποίες είναι πιθανό να συνδέονται μεταξύ άλλων και με αστάθεια της κανονικής εκπνοής του αέρα π.χ. ροχαλητό. Ένα άλλο παράδειγμα το οποίο παρουσιάζει ενδιαφέρον από ιατρικής απόψεως είναι η ροή μέσα στις κυψελίδες των πνευμόνων στα τοιχώματα των οποίων υπάρχει εκ φύσεως πολύ λεπτό φιλμ υγρού το οποίο διευκολύνει την αναπνοή. Έχει διαπιστωθεί ότι είναι δυνατό σε βρέφη το υγρό αυτό να μην είναι επαρκές, γεγονός που οδηγεί σε ακραίες περιπτώσεις ακόμη και σε θάνατο. Τελευταία, γίνονται προσπάθειες προσομοίωσης τέτοιων ροών με σκοπό να βρεθεί τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος [5].

## **1.2. Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας**

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αποτελείται συνολικά από τέσσερα κεφάλαια. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή των προβλημάτων στα οποία εφαρμόστηκε επίλυση με μεταβλητό πλέγμα. Πρόκειται για μονοδιάστατη επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το φαινόμενο της συναγωγής και διάχυσης και το πρόβλημα της ροής αέρα πάνω από λεπτό φιλμ.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αναλύεται η εφαρμογή των b-cubic splines και επιλύονται αριθμητικά τα δύο προβλήματα. Στη συνέχεια, περιγράφεται η μέθοδος κατασκευής μεταβλητού πλέγματος. Ακολουθεί ο αλγόριθμος επίλυσης για το μονοδιάστατο και το διδιάστατο πρόβλημα. Τέλος, γίνεται μια συζήτηση για τον εμπειρικό προσδιορισμό των συντελεστών βαρύτητας που επηρεάζουν τη μετακίνηση των κόμβων στο μεταβλητό πλέγμα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο υπάρχουν οι εφαρμογές της μεθόδου με αποτελέσματα που λήφθηκαν είτε για τη διαπίστωση της ορθής λειτουργίας είτε για την επίλυση



νέων προβλημάτων. Η διασταύρωση της ορθότητας των αποτελεσμάτων γίνεται με τα μέχρι τώρα γνωστά αποτελέσματα, ενώ τα προβλήματα που επιλύονται είναι σε μεγέθη που μέχρι τώρα δεν ήταν δυνατή η επίλυσή τους παρά μόνο με μεγάλη δαπάνη σε υπολογιστικό χρόνο και μνήμη. Στο τέλος του κεφαλαίου συνοψίζονται τα αποτελέσματα, γίνεται εκτίμηση της μεθόδου και προτείνονται μελλοντικές βελτιώσεις της εργασίας.

## 2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ–ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η χρήση ανομοιομορφου πλέγματος σε δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι η μονοδιάστατη μεταφορά διαταραχής με συναγωγή και διάχυση και το δεύτερο είναι η επίλυση της ροής αερίου οριακού στρώματος πάνω από λεπτό φιλμ υγρού.

### 2.1. Το πρόβλημα της συναγωγής με διάχυση

Το πρόβλημα της συναγωγής με διάχυση είναι από τα πιο συνηθισμένα προβλήματα που συναντώνται στη φύση και περιγράφει φαινόμενα όπως η μετάδοση θερμότητας μέσα σε αγωγό ή η αραίωση ενός διαλύματος λόγω διάχυσης ενός εκ των συστατικών του. Η αδιαστατοποιημένη διαφορική εξίσωση που περιγράφει το

πρόβλημα για μεταφορά σε μία διάσταση είναι  $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ . Η αδιαστατοποιημένες μεταβλητές είναι:  $C = \frac{u'}{u_\infty}$ ,  $x = \frac{x'}{L}$  και  $t = \frac{t'}{L/u}$ .

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται σαν μια απλή εφαρμογή της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε για τη χρήση ανομοιομορφου και μεταβλητού πλέγματος σε μία διάσταση. Ως αρχική συνθήκη χρησιμοποιείται μια λύση της μορφής  $C(x, t = 0) = d \cdot \exp(-wx^2)$  και παρατηρείται η εξέλιξη της στο χώρο και το χρόνο. Στην παραπάνω διαταραχή το  $d$  εκφράζει το μέγεθος της ενώ το  $w$  είναι παράμετρος που καθορίζει το εύρος της. Το γεγονός ότι η συμπεριφορά της παραπάνω εξίσωσης είναι ήδη γνωστή μας βοηθά στο να εκτιμήσουμε καλύτερα την συμπεριφορά της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε. Αυτό που περιμένουμε δηλαδή είναι καθώς η διαταραχή μεταφέρεται και διαχέεται το πλέγμα που χρησιμοποιείται να προσαρμόζεται αναλόγως.

### 2.2. Το πρόβλημα της ροής αέρα πάνω από λεπτό υγρό υμένα

#### 2.2.1. Περιγραφή

Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε ροή αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από στερεή οριζόντια επιφάνεια στην οποία έχει δημιουργηθεί ένα λεπτό φιλμ υγρού εξαιτίας βροχόπτωσης. Σε τέτοιου είδους ροές εμφανίζονται δύο είδη αστάθειας: τα



$$H_0(x) = x^{3/4} \sqrt{\frac{2}{0.332}} \quad (2.1)$$

$$u_0(x_0, y) = x^{1/4} z \sqrt{0.664} \quad (2.2)$$

όπου

$$z = \frac{y}{H_0(x)} \quad (2.3)$$

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων ροής στην αέρια φάση χρησιμοποιήθηκαν οι εξής κλίμακες [9]:  $L$  και  $LRe^{-1/2}$  ως χαρακτηριστικά μήκη στις διευθύνσεις  $x$  και  $Y$  αντίστοιχα,  $U_\infty$  και  $U_\infty Re^{-1/2}$  ως χαρακτηριστικές ταχύτητες στις διευθύνσεις  $x$  και  $Y$  αντίστοιχα. Στην υγρή φάση χρησιμοποιήθηκαν οι κλίμακες  $L$  και  $H_f$  ως χαρακτηριστικά μήκη στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, και  $u_f$ ,  $u_f H_f / L$  ως χαρακτηριστικές ταχύτητες στις διευθύνσεις  $x$  και  $y$  αντίστοιχα.

Με βάση τις κλίμακες που προτείνει η θεωρία τριπλής στιβάδας αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια μήκους  $L$ , πάνω από την οποία διέρχεται συνοριακό στρώμα αέρα, η κατάλληλη τοπική κλίμακα για να περιγράψει την ευστάθεια της ροής σε μια δεδομένη θέση  $x_0$  είναι η  $X = \frac{x - x_0}{\lambda}$ , όπου  $\lambda = Re^{-3/8} L$ . Είναι φανερό ότι επειδή η διαταραγμένη ροή μεταβάλλεται σε μια πολύ μικρή κλίμακα,  $X \sim \lambda = LRe^{-3/8}$ , σε σχέση με την κλίμακα της βασικής ροής,  $x \sim L$ , οι μεταβολές της βασικής ροής ως προς τη νέα κλίμακα  $X$  μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τη βασική ροή ως σχεδόν παράλληλη. Σύμφωνα με τους Smith et al. [1] το μικρότερο πάχος υγρού που μπορεί να προκαλέσει αποκόλληση στη ροή είναι αυτό που είναι συγκρίσιμο με το πάχος του ιξώδους υποστρώματος στον αέρα, δηλαδή  $H_f \sim Re^{-5/8} L$ . Έτσι, για την αδιαστατοποίηση των μεγεθών που καθορίζουν την ευστάθεια συνοριακού στρώματος χρησιμοποιείται ως χαρακτηριστικό μήκος στη διεύθυνση της ροής το χαρακτηριστικό μήκος των στιβάδων  $\lambda = LRe^{-3/8}$  και στη κάθετη διεύθυνση το χαρακτηριστικό ύψος της κατώτερης στιβάδας  $LRe^{-5/8}$ . Ως χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής χρησιμοποιείται η ποσότητα  $\varepsilon U_\infty$ , ενώ στη κάθετη διεύθυνση η  $\varepsilon^3 U_\infty$ . Στο υγρό ως χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής λαμβάνεται η  $\frac{\mu}{\mu_w} \varepsilon U_\infty$ , και στη κάθετη διεύθυνση η  $\frac{\mu}{\mu_w} \varepsilon^3 U_\infty$ . Για την αδιαστατοποίηση της πίεσης χρησιμοποιείται η ποσότητα  $\varepsilon^2 \rho U_\infty^2$ . Οι συγκεκριμένες κλίμακες προκύπτουν ως αποτέλεσμα της ισορροπίας μεταξύ των

όρων συναγωγής, των ιξωδών όρων και της πίεσης [1], [10]. Επίσης, προκύπτει ότι η μικρή μεταβλητή που χρησιμοποιείται στην ασυμπτωτική περιγραφή στην θεωρία τριπλής στιβάδας είναι ίση με  $\varepsilon = \frac{H_f}{LRe^{-1/2}} = Re^{-1/8}$ . Τέλος, η κατάλληλη χρονική

κλίμακα για την μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων είναι η  $T = \frac{\lambda}{u_f} = \frac{\lambda}{\varepsilon \frac{\mu}{\mu_w} U_\infty}$ ,

όπου  $u_f$  η χαρακτηριστική ταχύτητα στο υγρό .

Κατά την επίλυση μας ενδιαφέρει να επικεντρώσουμε στη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων. Επομένως, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη χρονική κλίμακα προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις για το ιξώδες υπόστρωμα του οριακού στρώματος του αέρα:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.4)$$

Ισοζύγιο x-ορμής:

$$\frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.5)$$

Ισοζύγιο Y-ορμής:

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (2.6)$$

Επίσης, ισχύει ο νόμος της αλληλεπίδρασης που εκφράζεται από τη σχέση (2.7) καθώς και η συνέχεια της οριζόντιας ταχύτητας στο όριο μεταξύ του ιξώδους υποστρώματος και του μεσαίου στρώματος που περιγράφεται από την εξίσωση (2.8).

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{X-s} \quad (2.7)$$

$$U(Y \rightarrow \infty) = A(X) \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) + \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) Y \quad (2.8)$$

όπου  $A$  το πάχος μετατόπισης εξαιτίας του ιξώδους υποστρώματος και το  $\frac{\partial U_0}{\partial Y'}$  αναφέρεται στη βασική ροή που ισχύει στο ιξώδες υπόστρωμα και ορίζεται από την παρακάτω σχέση [8]:

$$\frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) = \frac{0.332}{\sqrt{x}} \quad (2.9)$$

Οι εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του υγρού είναι σε αδιάστατη μορφή:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

Ισοζύγιο x-ορμής:

$$\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2 \frac{\rho_w}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial T} + u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial X} - \frac{\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2}{Fr} \left( \frac{\rho_w}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

Ισοζύγιο Y-ορμής:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Με οριακές συνθήκες πάνω στην στερεή επιφάνεια τις συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης. Δηλαδή:

$$\text{Για } y=0 \Rightarrow u = v = 0 \quad (2.13)$$

Στη διεπιφάνεια αέρα – υγρού  $y = Y = H(X, T)$  ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

Συνέχεια ταχύτητας:

$$U = \frac{\mu}{\mu_w} u \quad (2.14)$$

$$V = \frac{\mu}{\mu_w} v \quad (2.15)$$

Συνέχεια οριζόντιας και κάθετης τάσης:

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.16)$$

$$P - p = \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2 \frac{\varepsilon^4 \sigma}{\rho u_f^2 H_f} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \quad (2.17)$$

Ισοζύγιο μάζας υγρού:

$$\frac{\partial H}{\partial T} + u \frac{\partial H}{\partial X} - v = 0 \quad (2.18)$$

Αν θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το υγρό είναι πολύ πιο ιξώδες από τον αέρα λαμβάνουμε το όριο  $\mu/\mu_w \rightarrow 0$  και η εξίσωση της ορμής (2.5) στον αέρα γίνεται:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.19)$$

Στο υγρό, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $(\mu/\mu_w)^2(\rho/\rho_w) \ll 1$ , μπορούμε να αγνοήσουμε τους αδρανειακούς όρους οπότε η (2.11) παίρνει τη μορφή:

$$-\frac{\partial p}{\partial X} - \frac{(\mu/\mu_w)^2}{Fr} \left( \frac{\rho_w}{\rho} - 1 \right) \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.20)$$

Στο όριο αυτό, οι οριακές συνθήκες στην διεπιφάνεια γράφονται:

$$U = u = 0, \quad V = v = 0 \quad \text{και} \quad P = p \quad (2.21)$$

Από την εξίσωση (2.20) με διπλή ολοκλήρωση και με χρήση της οριακής συνθήκης πάνω στην πλάκα προκύπτει:

$$u = \left( \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \frac{y^2}{2} + c(x)y \quad (2.22)$$

$$\text{όπου } \overline{Fr} = \frac{Fr}{(\mu/\mu_w)^2} = O(1)$$

Για  $y = H$  έχουμε:

$$c(x) = \frac{\partial u}{\partial y} - \left( \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) H \quad (2.23)$$

και επειδή ισχύει η εξίσωση (2.16) τελικά:

$$c(x) = \frac{\partial U}{\partial Y} - \left( \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) H \quad (2.24)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας (2.10) παίρνουμε για την κάθετη ταχύτητα:

$$v = - \left( \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) \frac{y^3}{6} - c'(x) \frac{y^2}{2} \quad (2.25)$$

Τελικά, με αντικατάσταση στη σχέση (2.18) προκύπτει για τη διεπιφάνεια:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial T} = & - \frac{\partial H}{\partial X} \left( - \frac{H^2}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial Y} H \right) \\ & - \frac{H^2}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} - H \left( \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial H}{\partial X} \left( \frac{\partial p}{\partial X} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \right) \\ & - \frac{H^3}{6} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Prandtl  $\overline{Y} = Y - H(X, T)$ , με αντικατάσταση της πίεσης  $p$  από τη σχέση (2.17) και με χρήση της ροϊκής συνάρτησης  $\Psi$  προκύπτουν οι τελικές εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος.

Αέρια φάση

$$U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.27)$$

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}} \quad (2.28)$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{x-s} \quad (2.29)$$

$$U(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) (A(X) + \bar{Y} + H - H_0) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{Y}}(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \quad (2.31)$$

### Υγρή φάση

$$\frac{\partial H}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^2}{2} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^3}{3 \overline{We}} \frac{\partial^3 H}{\partial X^3} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{H^3}{3} \frac{(\rho_w/\rho-1)}{\overline{Fr}} \frac{\partial H}{\partial X} \right) \quad (2.32)$$

$$\text{όπου } \frac{1}{\overline{We}} = \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{\varepsilon^4 \sigma}{\rho u_f^2 H_f}, \quad \frac{1}{\overline{Fr}} = \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{g H_f}{u_f^2}.$$

### Διεπιφάνεια

$$\bar{Y} = 0: \quad U = \Psi = 0 \quad (2.33)$$

### Αρχικές συνθήκες

$$A(T=0) = P(T=0) = 0 \quad (2.34)$$

$$U(T=0) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \bar{Y} \quad (2.35)$$

$$H(T=0) = H_0(T=0) + H_D \quad (2.36)$$

Στην εξίσωση (2.36)  $H_D$  είναι η διαταραχή που επιβάλλεται και μπορεί να είναι στιγμιαία:

$$H_D = \delta \sqrt{\frac{W}{\pi}} \exp(-WX^2) \quad (2.37)$$

ή περιοδική:

$$H_D = \delta \sqrt{\frac{W}{\pi}} \exp(-WX^2) \cos(\omega T) \quad (2.38)$$



όπου το  $\delta$  εκφράζει το μέγεθος της διαταραχής και το  $W$  είναι παράμετρος που καθορίζει την έκταση της κατά τη διεύθυνση της ροής.

### 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

#### 3.1. Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται ευρύτατα για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Στη μέθοδο αυτή χρησιμοποιούνται απλά σχήματα (στοιχεία) για την κατασκευή ακόμη και δύσκολων γεωμετριών. Με τα επιλεγμένα στοιχεία γίνεται διακριτοποίηση του χώρου και στη συνέχεια για το καθένα από αυτά κατασκευάζεται μια εξίσωση που διακριτοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει το φυσικό πρόβλημα. Οι συναρτήσεις βάσης εδώ κατασκευάζονται με συστηματικό τρόπο σε αντίθεση με τις κλασσικές μεθόδους. Τελικά, προκύπτουν εξισώσεις της μορφής  $[K^{(e)}]\{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}$ , για κάθε στοιχείο  $u_i$ , όπου  $u$  είναι οι άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο. Στη συνέχεια οι εξισώσεις συνδέονται μεταξύ τους για να προκύψει τελικά το σύστημα εξισώσεων που εκφράζει το συνολικό πρόβλημα. Στο σύστημα εξισώσεων επιβάλλονται οι συνοριακές συνθήκες και ακολουθεί επίλυση. Από τη λύση μπορεί να ακολουθήσει και περαιτέρω επεξεργασία για τον υπολογισμό μεταβλητών που σχετίζονται με τα αποτελέσματα.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων εφαρμόστηκε για τις ανάγκες της εργασίας σε δύο περιπτώσεις: στο πρόβλημα της μονοδιάστατης συναγωγής και διάχυσης και στο πρόβλημα της ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.

#### 3.2. Συναρτήσεις βάσης

Για την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων παίζει η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσεων. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν οι συναρτήσεις βάσης cubic splines οι οποίες περιγράφονται συνοπτικά στη συνέχεια .

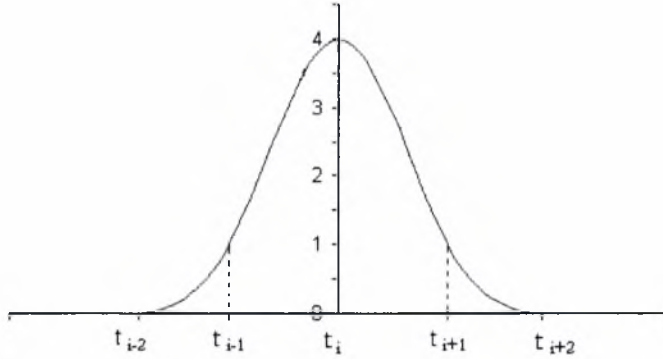
##### 3.2.1. Συναρτήσεις βάσης cubic splines

Οι συναρτήσεις βάσης B-cubic splines μιας διάστασης είναι πολυώνυμα τρίτου βαθμού με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Για την παρεμβολή μίας συνάρτησης η οποία είναι γνωστή σε  $N+1$  σημεία απαιτείται η εισαγωγή δυο βοηθητικών σημείων οπότε αν χρησιμοποιούμε  $N$  στοιχεία έχουμε συνολικά  $N+3$  άγνωστους συντελεστές,  $u_{c_j}$ , όσοι και οι κόμβοι του πλέγματος. Όλοι οι υπολογισμοί βασίζονται σε συντελεστές της μεταβλητής που αντιστοιχούν στους κόμβους του πλέγματος. Έτσι, για

παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας μεταβλητής στη θέση  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N+3} u_{c,j} B_j(t) \quad (3.1)$$

όπου  $B_j$  οι συναρτήσεις βάσης cubic splines και  $u_c$  οι συντελεστές splines της μεταβλητής. Οι συναρτήσεις βάσεις cubic splines απεικονίζονται στο Σχήμα 3-1.



Σχήμα 3-1: Συναρτήσεις βάσης cubic splines σε μία διάσταση

Από το σχήμα είναι φανερό ότι κάθε μια από τις τέσσερις συναρτήσεις είναι δυο φορές συνεχής και παραγωγίσιμη, ότι σε κάθε στοιχείο επιβιώνουν τέσσερις συναρτήσεις βάσης, ενώ σε κάθε κόμβο τρεις. Η ακριβής μορφή των B-cubic splines είναι [11]:

$$B_i(t_j) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t - t_{i-2})^3, & t \in [t_{i-2}, t_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3, & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t)^2 - 3(t_{i+1} - t)^3, & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ (t_{i+2} - t)^3, & t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ 0, & t \notin [t_{i-2}, t_{i+2}] \end{cases} \quad (3.2)$$

και ισχύει:

$$B_i(t_j) = \begin{cases} 4, & j = 1 \\ 1, & j = i \pm 1 \\ 0, & j = i \pm 2 \end{cases} \quad (3.3)$$

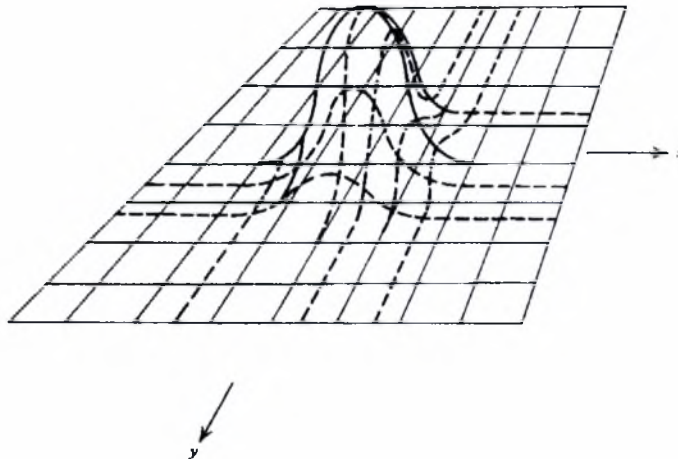
Οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση. Δηλαδή, ισχύει:

$$B_{ij}(x, y) = B_i(x)B_j(y) \quad (3.4)$$

Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας μεταβλητής στη θέση  $x, y$  αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$u(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N+3} u_{c,ij} B_i(x) B_j(y) = \sum_{i,j=1}^{N+3} u_{c,ij} B_{ij}(x, y) \quad (3.5)$$

όπου  $B_{ij}$  οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 3-2 και  $u_c$  οι συντελεστές splines της μεταβλητής.



**Σχήμα 3-2: Συναρτήσεις βάσης cubic splines δύο διαστάσεων**

Αντίστοιχα με τις συναρτήσεις μιας διάστασης και όπως γίνεται αντιληπτό από το σχήμα, οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων είναι δυο φορές συνεχείς και παραγωγίσιμες. Στην περίπτωση αυτή, σε κάθε στοιχείο επιβιώνουν δεκαέξι συναρτήσεις βάσης, ενώ σε κάθε κόμβο εννιά.

### **3.3. Αριθμητική επίλυση 1D προβλήματος συναγωγής και διάχυσης**

Το μονοδιάστατο πρόβλημα της συναγωγής με διάχυση περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Για την επίλυση με πεπερασμένα στοιχεία πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με τη συνάρτηση  $B_i$  που είναι παραγωγίσιμη ως προς  $x$  και  $t$ .

$$\int_{\Omega} \text{Bi} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} \text{Bi} \frac{\partial C}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \text{Bi} \frac{\partial C}{\partial x} dx - \int_{\Omega} \text{Bi} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} \text{Bi} \frac{\partial C}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \text{Bi} \frac{\partial C}{\partial x} dx + \int_{\Omega} \frac{\partial \text{Bi}}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} dx - \int_{\Gamma} \text{Bi} \frac{\partial C}{\partial x} n_x ds = 0$$

Αν υποθέσουμε ότι η  $C$  προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη σχέση:

$$C = \sum_{j=1}^n C_j B_j$$

όπου  $C_j$  είναι οι συντελεστές splines της  $C$  στο σημείο  $(x_j, y_j)$  και  $B_j$  οι προσεγγιστικές συναρτήσεις, η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{j=1}^n \left[ \left( \int_{\Omega_e} \text{Bi} B_j dx \right) \frac{\partial C_j}{\partial t} + \int_{\Omega_e} \text{Bi} \frac{\partial C_j}{\partial x} + \frac{\partial \text{Bi}}{\partial x} \frac{\partial C_j}{\partial x} dx \right] - \int_{\Gamma_e} \text{Bi} \frac{\partial C}{\partial x} n_x ds = 0$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η χρήση συναρτήσεων βάσης splines απαιτεί την εισαγωγή δύο ακόμη εξισώσεων. Για το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιήθηκε η συνθήκη

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \text{ και στα δύο άκρα του πεδίου προσομοίωσης.}$$

### **3.4. Αριθμητική επίλυση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ**

Για την προσομοίωση της ροής ρεύματος αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από λεπτό φιλμ νερού που ρέει υπό την επίδραση της διάτμησης του αέρα απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων (2.27) έως (2.36). Επειδή η αδιαστατοποίηση γίνεται με βάση τη χρονική κλίμακα των διεπιφανειακών κυμάτων η εξίσωση της ορμής του αέρα δεν περιέχει την χρονοπαράγωγο. Προκύπτει, δηλαδή, στον αέρα ένα quasi-stationary πρόβλημα, αφού οι μεταβολές μέσα στο οριακό στρώμα υπάρχουν μόνο ως αποτέλεσμα των μεταβολών που συμβαίνουν στην υγρή φάση. Το πρόβλημα της αέριας φάσης είναι διδιάστατο και μη γραμμικό. Αντίθετα, η χρήση της συγκεκριμένης χρονικής κλίμακας στις εξισώσεις του υγρού έχει ως αποτέλεσμα να αγνοηθούν οι όροι αδράνειας, όταν  $\mu/\mu_w \ll 1$ , και να προκύψει με τον τρόπο αυτό ένα απλοποιημένο πρόβλημα για την εξέλιξη του πάχους του φιλμ.

Η χρονική ολοκλήρωση στο υγρό γίνεται με τη μέθοδο του τραπεζοειδή κανόνα. Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης cubic splines μιας διάστασης και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη στην εξίσωση (2.32) που περιγράφει την κίνηση του υγρού, προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned}
\left[ \int_{-x_0}^{x_0} B_i B_j dX \right] \frac{dh_j}{dt} = & \int_{-x_0}^{x_0} \left( \frac{dB_i}{dX} \frac{H^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{dB_i}{dX} \frac{H^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) dX - \int_{-x_0}^{x_0} \left( \frac{d^2 B_i}{dX^2} \frac{H^3}{3We} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) dX \\
& - \int_{-x_0}^{x_0} \left( \frac{dB_i}{dX} \frac{H^2}{We} \frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} - \frac{dB_i}{dX} \frac{H^3}{3} \frac{\rho_w/\rho-1}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right) dX + \left[ \frac{dB_i}{dX} \frac{H^3}{3We} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right]_{-x_0}^{x_0} - \\
& \left[ B_i \frac{H^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Y} \right]_{-x_0}^{x_0} + \left[ B_i \frac{H^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right]_{-x_0}^{x_0} - \left[ B_i \frac{H^3}{3We} \frac{\partial^3 H}{\partial X^3} \right]_{-x_0}^{x_0} + \left[ B_i \frac{H^3}{3} \frac{\rho_w/\rho-1}{Fr} \frac{\partial H}{\partial X} \right]_{-x_0}^{x_0}
\end{aligned} \quad (3.6)$$

όπου  $B_i, B_j$  οι μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης splines και  $h_j$  οι συντελεστές splines για το ύψος της διεπιφάνειας. Δηλαδή, καταλήγουμε σε ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \frac{d\underline{h}}{dt} = \underline{R} \quad (3.7)$$

όπου  $\underline{R}$  το άνωσμα που προκύπτει από τη διακριτοποίηση του δεξιού μέλους της (3.6), με διάσταση  $M+3$  το οποίο υπολογίζεται κάθε φορά χρησιμοποιώντας τις τιμές της πίεσης και τις ταχύτητας που προκύπτουν από την επίλυση της αέριας φάσης. Ο πίνακας  $\underline{\underline{M}}$  είναι σε μορφή ζώνης (banded) με εύρος ζώνης (band width) 9. Ο πίνακας αυτός κατασκευάζεται και αντιστρέφεται μόνο μια φορά αφού δεν εξαρτάται από το χρόνο. Έτσι, σε κάθε χρονικό βήμα υπολογίζεται μόνο το νέο δεξί μέλος και πολλαπλασιάζεται με τον αντίστροφο του  $\underline{\underline{M}}$ .

Επειδή χρησιμοποιούμε B-cubic splines σαν συναρτήσεις βάσης χρειάζεται να εισάγουμε δυο επιπλέον εξισώσεις. Στο αριστερό άκρο της περιοχής προσομοίωσης χρησιμοποιούμε τη σχέση  $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial X} = 0$ , ενώ στο δεξί άκρο χρησιμοποιούμε ελεύθερη οριακή συνθήκη.

Η επίλυση του πεδίου ταχυτήτων στην αέρια φάση γίνεται για γνωστή κατανομή του ύψους της διεπιφάνειας  $h$  με την απόσταση  $x$ , για τη δεδομένη χρονική στιγμή. Αν  $M$  είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην  $x$ -κατεύθυνση και  $N$  ο αριθμός των στοιχείων στην  $y$ -κατεύθυνση τότε επιλύεται κάθε φορά με τη μέθοδο Newton-Raphson ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{J}} \cdot d\underline{C} = \underline{R} \quad (3.8)$$

όπου  $\underline{R}$  το άνωσμα των υπολοίπων με μέγεθος  $2(M+3) \times (N+3) + 2(M+3)$ ,  $d\underline{C}$  το άνωσμα μεταβολής των αγνώστων και  $\underline{\underline{J}}$  η ιακωβιανή του συστήματος η οποία προκύπτει από την παραγωγή των υπολοίπων ως προς τους αγνώστους. Το άνωσμα  $d\underline{C}$  περιέχει τη μεταβολή των αγνώστων συντελεστών splines με την εξής σειρά:

$\{U_1, \Psi_1, U_2, \Psi_2, \dots, U_{(N+3) \times (M+3)}, \Psi_{(N+3) \times (M+3)}, P_1, A_1, \dots, P_{M+3}, A_{M+3}\}$ . Ο πίνακας  $\underline{\underline{J}}$  είναι σε μορφή τόξου (arrow) η οποία δημιουργείται από τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στην πίεση και το πάχος μετατόπισης. Σχηματικά, ο πίνακας  $\underline{\underline{J}}$  έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x & .. & x & 0 & 0 & .. & 0 & x & .. & x \\ x & .. & x & x & 0 & .. & 0 & x & .. & x \\ 0 & .. & .x. & x & .x. & .. & 0 & x & .. & x \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & x & x & x & .. & 0 & x & .. & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & .. & x & x & .. & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & .. & x & x & .. & x \\ x & x & x & x & x & .. & x & x & .. & x \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & . & .. & x \\ x & x & x & x & x & .. & x & x & .. & x \end{bmatrix}$$

Επομένως, μπορεί να χωριστεί σε τέσσερις επιμέρους πίνακες: έναν πίνακα ζώνης, έναν πίνακα στήλης, έναν πίνακα γραμμής και έναν πίνακα κορυφής. Χρησιμοποιώντας ελεύθερες οριακές ο πίνακας ζώνης έχει διάσταση  $2(M+3)(N+3)$  με εύρος ζώνης  $16(N+3)$ , ο πίνακας στήλης έχει διάσταση  $[2(M+3)(N+3), 2(M+3)]$ , ο πίνακας γραμμής  $[2(M+3), 2(M+3)(N+3)]$  και ο πίνακας κορυφής  $[2(M+3), 2(M+3)]$ . Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περιοδικές οριακές συνθήκες μεταβάλλονται οι διαστάσεις των τεσσάρων πινάκων που αποτελούν την ιακωβιανή του συστήματος. Έτσι, ο πίνακας ζώνης έχει διάσταση  $2MN+6M$  με εύρος ζώνης  $16(N+3)$ , ο πίνακας στήλης έχει διάσταση  $[2MN+6M, 2M+6N+24]$ , ο πίνακας γραμμής  $[2M+6N+24, 2MN+6M]$ , και ο πίνακας κορυφής  $[2M+6N+24, 2M+6N+24]$ . Για την αντιστροφή του πίνακα  $\underline{\underline{J}}$  χρησιμοποιείται κατάλληλη υπορουτίνα που λαμβάνει υπόψη την ιδιαίτερη μορφή του.

Οι επιπλέον εξισώσεις που εισάγονται στο πρόβλημα εξαιτίας της χρήσης συναρτήσεων βάσης splines για την ταχύτητα και την ροϊκή συνάρτηση είναι:

1. Στην διεπιφάνεια ( $\bar{Y} = 0$ ):  $U = \Psi = 0$  (3.9)

2. Στο πάνω άκρο ( $\bar{Y} = +\infty$ ), δηλαδή στα όρια με το μεσαίο στρώμα:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \text{ και } U = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}} \quad (3.10)$$

3. Στο αριστερό άκρο ( $\bar{X} = -\infty$ ) χρησιμοποιήθηκε η λύση της βασικής ροής:

$$4. \quad U = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0)\bar{Y} \quad \text{και} \quad \Psi = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0)\frac{\bar{Y}^2}{2} \quad (3.11)$$

5. Στο δεξί άκρο ( $\bar{X} = +\infty$ ) χρησιμοποιήθηκαν ελεύθερες οριακές συνθήκες για τις παραγωγούς  $\frac{\partial U}{\partial X}$  και  $\frac{\partial \Psi}{\partial X}$ .

6. Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (3.12)$$

7. Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο χρησιμοποιήθηκε ελεύθερη οριακή συνθήκη για τις παραγωγούς  $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}$  και  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y}$ .

Αντίστοιχα, για την πίεση και το πάχος μετατόπισης στο αριστερό άκρο χρησιμοποιούνται οι σχέσεις  $\frac{\partial P}{\partial X} = 0$  και  $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$ , ενώ στο δεξί άκρο εισάγονται ελεύθερες οριακές συνθήκες για τις χωρικές παραγωγούς.

Είναι εμφανές ότι ανεξάρτητα από τη χρήση ελεύθερων ή περιοδικών οριακών συνθηκών, στην περίπτωση επίλυσης ροής αέρα πάνω από λεπτό φιλμ το σύστημα στο οποίο καταλήγουμε είναι αρκετά μεγάλο αφού επιλύουμε ταυτόχρονα και για τις τέσσερις μεταβλητές ( $U, \Psi, P, A$ ). Επιπλέον, ο πίνακας  $\underline{J}$  δεν είναι ανεξάρτητος του χρόνου και κατά συνέπεια θα πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί πολλές φορές. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα να αυξάνεται κατά πολύ ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος γεγονός που καθιστά προσομοιώσεις δύσκολων περιπτώσεων στις οποίες πρέπει να χρησιμοποιηθούν σχετικά μεγάλα πλέγματα πρακτικά αδύνατες. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται με την αποφυγή κατασκευής και αντιστροφής της ιακωβιανής του συστήματος σε κάθε χρονικό βήμα. Επίσης η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που αντιστοιχούν στην αέρια φάση γίνεται επαναληπτικά με τη μέθοδο GMRES (Παράρτημα). Οι απαιτήσεις σε μνήμη και υπολογιστικό χρόνο μειώνονται ακόμη περισσότερο με τη χρήση μεταβλητού πλέγματος που περιγράφεται στην παράγραφο 3.5. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να οδηγηθούμε σε ακριβείς λύσεις ακόμη και με τη χρήση του μισού αριθμού των κόμβων.

Στη ροή αέρα πάνω από λεπτό υμένα υπάρχει ανάντη επίδραση η οποία υπεισέρχεται μέσω του νόμου αλληλεπίδρασης που εκφράζεται από τη σχέση (2.7). Η σχέση αυτή λαμβάνει υπόψη όλο το πεδίο ροής, κάτι που είναι αδύνατο να γίνει κατά την αριθμητική επίλυση αφού είμαστε αναγκασμένοι να περιοριστούμε μέσα σε ένα



πεπερασμένο διάστημα, ενώ το πεδίο ορισμού της (2.7) εκτείνεται στο άπειρο. Επιπλέον, η αριθμητική επίλυση με συναρτήσεις βάσης splines απαιτεί υποχρεωτικά την εισαγωγή επιπρόσθετων εξισώσεων και στο δεξί άκρο, ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός των συντελεστών στα βοηθητικά σημεία. Όμως στο δεξί άκρο του πεδίου προσομοίωσης δεν μπορούμε να ξέρουμε τι συμβαίνει και έτσι η χρήση οριακών συνθηκών μπορεί να προκαλέσει επιπλέον ανάντη επίδραση. Το γεγονός αυτό, και επειδή η επίλυση γίνεται για μεγάλο χρονικό διάστημα μας αναγκάζει να επιλύσουμε σε ένα μεγαλύτερο διάστημα από ότι πραγματικά μας ενδιαφέρει με κύριο στόχο να μπορέσουμε να αποφύγουμε την επίδραση των δεξιών οριακών συνθηκών. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε να λύνουμε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα, κάτι που φυσικά απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο.

Το παραπάνω πρόβλημα αντιμετωπίζεται με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας για όλες τις μεταβλητές περιοδικές οριακές συνθήκες. Η περιοδικότητα πρώτης παράγωγου για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης εκφράζεται από τη σχέση:

$$-C(1) + C(3) + C(M+1) - C(M+3) = 0$$

ενώ για περιοδικότητα τιμής χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$C(1) + 4C(2) + C(3) - C(M+1) - 4C(M+2) - C(M+3) = 0$$

Αντίστοιχα, για διδιάστατες συναρτήσεις βάσης η περιοδικότητα πρώτης παραγωγού δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & -C(1, j-1) - 4C(1, j) - C(1, j+1) + C(3, j-1) + 4C(3, j) + \\ & C(3, j+1) + C(M+1, j-1) + 4C(M+1, j) + C(M+1, j+1) - \\ & C(M+3, j-1) - 4C(M+3, j) - C(M+3, j+1) = 0 \end{aligned}$$

και η περιοδικότητα τιμής από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & C(1, j-1) + 4C(1, j) + C(1, j+1) + 4C(2, j-1) + 16C(2, j) + 4C(2, j+1) + \\ & C(3, j-1) + 4C(3, j) + C(3, j+1) - C(M+1, j-1) - 4C(M+1, j) - \\ & C(M+1, j+1) - 4C(M+2, j-1) - 16C(M+2, j) - 4C(M+2, j+1) - \\ & C(M+3, j-1) - 4C(M+3, j) - C(M+3, j+1) = 0 \end{aligned}$$

όπου  $C(i, j)$  οι άγνωστοι συντελεστές splines,  $i$  δείκτης που δηλώνει τη θέση στην  $x$ -κατεύθυνση και  $j$  τη θέση στη  $y$ -κατεύθυνση.

Με τον παραπάνω τρόπο καθυστερείται η ανάντη επίδραση για μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης. Το μειονέκτημα των περιοδικών συνθηκών είναι ότι πρέπει η περιοχή προσομοίωσης να είναι τέτοια ώστε να μην φτάσει η διαταραχή στο δεξί άκρο, επειδή αν φτάσει θα εισέλθει πάλι από το αριστερό άκρο. Οι περιοδικές

συνθήκες συμπεριφέρονται καλύτερα κατά την επίλυση της ροής αέρα πάνω από το υγρό φιλμ για περιπτώσεις όπου θέλουμε να προσομοιώσουμε μη γραμμικά φαινόμενα ή φαινόμενα που θέλουν αρκετό χρόνο να εξελιχθούν.

### 3.5. Μέθοδος μεταβλητού πλέγματος

Πολλά υπολογιστικά προβλήματα επιλύονται με χρήση πλέγματος με ισαπέχοντες κόμβους. Αυτό αποτελεί ευκολία για τον προγραμματιστή στην κατασκευή του πλέγματος, αλλά παρουσιάζει αρκετές αδυναμίες κατά την εφαρμογή του. Η κυριότερη είναι ότι σε σημεία όπου υπάρχουν έντονες μεταβολές απαιτείται πύκνωση του πλέγματος για να πάρουμε σωστά αποτελέσματα. Αν γνωρίζουμε που εμφανίζονται οι μεταβολές αυτές μπορούμε εξαρχής να εφαρμόσουμε πιο πυκνό πλέγμα τοπικά και πιο αραιό στο υπόλοιπο πεδίο εξοικονομώντας χρόνο. Αυτό όμως είναι μια ειδική περίπτωση και δε συναντάται συχνά. Συνήθως οι έντονες μεταβολές δεν είναι στάσιμες. Συνεπώς, απαιτείται η τοπική πύκνωση του πλέγματος ανάλογα με τη θέση των διαταραχών έτσι ώστε να υπάρχει ακρίβεια στους υπολογισμούς και εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου και μνήμης.

Για την εφαρμογή της μεθόδου ξεκινάμε από ένα ομοιόμορφο πλέγμα με  $N$  κόμβους. Στη συνέχεια με κατάλληλο μετασχηματισμό και λαμβάνοντας υπόψη συγκεκριμένη συνάρτηση βάρους οι κόμβοι ανακατανέμονται σε νέο ανομοιόμορφο πλέγμα. Με τη διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται πύκνωση σε περιοχές όπου η συνάρτηση βάρους παίρνει μεγάλες τιμές. Το  $w(\chi)$  είναι συνήθως μια θετική συνάρτηση βάρους που χρησιμοποιείται ως μέτρο του αριθμητικού σφάλματος κατά την εκτίμηση της συνάρτησης και των παραγώγων της ή της μεταβολής της λύσης. Αντί να λύσουμε διαφορική εξίσωση για τη θέση των νέων σημείων στο πλέγμα  $\chi(p)$  μπορούμε να την εξετάσουμε ως Euler εξίσωση για την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^L \frac{1}{\chi_p^2 w(\chi)} d\chi \quad (3.13)$$

Ο σχηματισμός αυτός δίνει την παρακάτω σταθερά:

$$c = \frac{1}{N-1} \int_0^L w(\chi) d\chi \quad (3.14)$$

και μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για τον υπολογισμό των νέων κόμβων του πλέγματος

$$\int_0^{x_i} w(\chi) d\chi = \frac{i-1}{N-1} \int_0^L w(\chi) d\chi \quad i=2,3,\dots,N-1 \quad (3.15)$$

Η συνάρτηση βάρους που χρησιμοποιήθηκε για τα προβλήματα που εξετάζονται στην παρούσα εργασία είναι:

$$w(\chi) = (1 + d|f_{\eta}| + b|f_{\eta\eta}|) \quad (3.16)$$

όπου στο πρόβλημα μεταφοράς με συναγωγή και διάχυση είναι  $f_{\eta} = \frac{\partial C}{\partial x}$  και

$f_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ , ενώ στη επίλυση της διφασικής ροής αέρα-υγρού χρησιμοποιήθηκε

$f_{\eta} = \frac{\partial h}{\partial x}$  και  $f_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ . Οι συντελεστές  $b$  και  $d$  αποτελούν την επίδραση της κλίσης και

της καμπυλότητας στη συνάρτηση βάρους αντίστοιχα και επιλέγονται κάθε φορά με τη διαδικασία δοκιμής και σφάλματος. Περισσότερες πληροφορίες για μονοδιάστατη προσαρμογή πλέγματος και κριτήρια επιλογής συνάρτησης βάρους μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Thompson, Warsi and Mastin [12].

Για την εφαρμογή της μεθόδου προσαρμογής του πλέγματος κατασκευάστηκε υπορουτίνα στην οποία εισάγουμε τις αρχικές θέσεις των κόμβων και επιστρέφει το νέο πλέγμα. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ακόλουθη: Αρχικά υπολογίζεται το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $w(x)$  σε κάθε κόμβο.

$$\int_{x_0}^{x_k} w(x) dx, \quad k=1,2,\dots,N$$

Ο υπολογισμός των παραπάνω ολοκληρωμάτων γίνεται με τη χρήση σημείων Gauss.

Οι τιμές των ολοκληρωμάτων χαρακτηρίζονται ως  $w_k$ ,  $k=1,2,\dots,N$ . Με βάση την

τιμή που λαμβάνουμε για τον  $N$ -οστό κόμβο  $w_N$   $\left( = \int_{x_0}^{x_N} w(x) dx \right)$  γίνεται

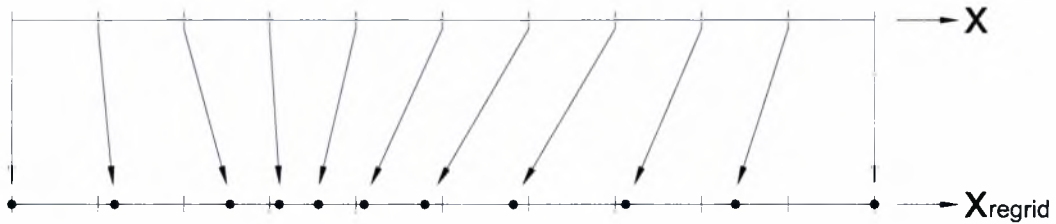
ισοκατανομή των τιμών  $w$  και οι νέες χαρακτηρίζονται ως  $w_{\text{equal}}$ .

$$w_{\text{equal}} = \frac{\int_{x_0}^{x_N} w(x) dx}{N-1}$$

Από την επίλυση της εξίσωσης  $\int_{x_{j-1}}^{x_j} w(x) dx = w_{\text{equal}}(j) - w_{\text{equal}}(j-1)$  ως προς  $x_j$

μπορούμε να βρούμε τη νέα θέση του κόμβου  $j$ .

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλους τους κόμβους και οι καινούριες θέσεις (πλέγμα) αποθηκεύονται για την επίλυση του επόμενου βήματος. Η αντιστοίχιση των κόμβων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα 3-3: Αντιστοίχιση κόμβων από το αρχικό στο νέο πλέγμα**

Στο νέο πλέγμα οι κόμβοι «έλκονται» από τις περιοχές με μεταβλητή κλίση ή καμπυλότητα. Συνεπώς, σε περιοχές με σταθερή κλίση και καμπυλότητα αναμένεται οι κόμβοι να ισοκατανέμονται στο νέο πλέγμα, ενώ εκεί που δεν είναι σταθερή έστω και η μία από τις δύο αναμένεται συσσώρευση. Η ένταση της συσσώρευσης εξαρτάται από τις τιμές των συντελεστών βαρύτητας και περιγράφεται στην παράγραφο 3.7.

### **3.6. Αλγόριθμοι επίλυσης**

#### **3.6.1. Αλγόριθμος επίλυσης μονοδιάστατης συναγωγής και διάχυσης**

Στο πρόβλημα αυτό επιβάλλουμε αρχικά μια διαταραχή στο ρευστό και παρατηρούμε πως αυτή εξελίσσεται χρονικά. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Για  $t = 0$  επιβάλλεται μια διαταραχή στο σύστημα.
2. Με βάση τις αρχικές τιμές και την διαταραχή επιλύεται το πρόβλημα.
3. Στη συνέχεια, από τις τιμές των λύσεων που λάβαμε κάνουμε ανακατανομή των κόμβων του πλέγματος για τον υπολογισμό στην επόμενη χρονική στιγμή.
4. Η διαδοχική επίλυση συνεχίζεται, για όσο χρονικό διάστημα χρειαστεί προκειμένου να περιγραφεί πλήρως η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, με τη μέθοδο του τραπεζοειδή κανόνα.

#### **3.6.2. Αλγόριθμος επίλυσης ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ**

Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος απαιτεί την διαδοχική λύση των εξισώσεων του αέρα και του υγρού. Δηλαδή, από την λύση του αέρα προκύπτουν οι τιμές της πίεσης και της διάτμησης που θα χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι στο

πρόβλημα του υγρού. Με την σειρά του το υγρό παρέχει τις νέες τιμές του ύψους της διεπιφάνειας που θα χρησιμοποιηθούν πάλι ως δεδομένα για τη νέα επίλυση του προβλήματος στον αέρα. Επομένως, ο αλγόριθμος αποτελείται από τα εξής βήματα:

1. Για  $t = 0$  επιβάλλεται μια διαταραχή στην διεπιφάνεια του υγρού – αέρα.
2. Με βάση τις αρχικές τιμές και την διαταραχή επιλύεται το πρόβλημα στην αέρια φάση και προκύπτουν οι νέες τιμές της πίεσης και της διάτμησης.
3. Στη συνέχεια με δεδομένη πίεση και διάτμηση επιλύεται το πρόβλημα στην υγρή φάση από όπου προκύπτουν οι νέες τιμές για το σχήμα της διεπιφάνειας οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πάλι για την επίλυση στον αέρα.
4. Με βάση το σχήμα της διεπιφάνειας προκύπτει το νέο πλέγμα και υπολογίζονται σε αυτό οι τιμές όλων των υπόλοιπων μεταβλητών.
5. Η διαδοχική επίλυση των προβλημάτων αέρα-υγρού συνεχίζεται, για όσο χρονικό διάστημα χρειαστεί προκειμένου να περιγραφεί πλήρως η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, με τη μέθοδο του τραπεζοειδή κανόνα.

### **3.7. Προσδιορισμός συντελεστών**

Για τον προσδιορισμό της τιμής των συντελεστών  $b$  και  $d$  στην (3.16) δεν υπάρχει κάποιος κανόνας. Οι τιμές τους εξαρτώνται κάθε φορά από το είδος του προβλήματος και συνεπώς γίνονται πειραματικά με δοκιμή και σφάλμα. Πάντως ένας γενικός κανόνας, εφόσον οι τιμές των  $b$  και  $d$  επηρεάζουν τη μετακίνηση των κόμβων ανάλογα με την κλίση και την καμπυλότητα αντίστοιχα, είναι όταν υπάρχουν πολλές διακυμάνσεις να μη δίνονται υψηλές τιμές για να μη δημιουργείται μεγάλη πύκνωση. Η μεγάλη πύκνωση θα οδηγήσει σε απόκλιση της διαδικασίας Newton-Raphson, εντός του αλγόριθμου υπολογισμού του νέου πλέγματος και σε αδυναμία λήψης αποτελεσμάτων.

Όπως θα αναφερθεί και παρακάτω, στην περίπτωση της επίλυσης της εξίσωσης συναγωγής-διάχυσης όπου υπήρχε μόνο μία έντονη μεταβολή και μάλιστα ομαλή, οι τιμές των  $b$  και  $d$  μπορούσαν να κυμανθούν από 0,1 έως και 30. Το 0,1 προκαλούσε πολύ μικρή μετατόπιση στους κόμβους, ενώ το 30 εντονότερη. Τιμές μεγαλύτερες από 30 οδηγούσαν σε απόκλιση του κώδικα. Αντίθετα, στην περίπτωση του οριακού στρώματος πάνω από υγρό φιλμ, όπου αρχικά υπήρχε μια έντονη και σημειακή μεταβολή οι τιμές των συντελεστών μπορούσαν να κυμανθούν αρχικά γύρω από την τιμή 0,2 για αδιάστατο χρόνο,  $t$ , μέχρι 6,5. Στη συνέχεια, λόγω της έντονης πύκνωσης εξαιτίας αύξησης των διαταραχών, ο κώδικας απέκλινε και απαιτούνταν η μείωσή

τους ακόμα και στο μισό. Σε μεγάλες χρονικές στιγμές, όπου οι διαταραχές αυξάνονται κατά πολύ, η τιμή τους επηρεάζει σημαντικά την ευστάθεια του προγράμματος. Για παράδειγμα, ελάττωση της τιμής από 0,07 σε 0,06 μπορεί να κάνει τον κώδικα να αποκλίνει, ενώ καταλληλότερη τιμή των μεταβλητών  $b$ ,  $d$  βρέθηκε να είναι της τάξης 0,068.

Από τα παραπάνω φαίνεται η «ευαισθησία» που έχει η τιμή των συντελεστών τόσο στην περίπτωση μεγάλων τιμών (λόγω αδυναμίας υπολογισμού του νέου πλέγματος), όσο και στις μικρές τιμές (λόγω μείωσης της ακρίβειας του αλγόριθμου επίλυσης του συνολικού προβλήματος). Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι αν με ομοιόμορφο πλέγμα λαμβάνουμε λύση μέχρι μια χρονική στιγμή τότε στην επίλυση με προσαρμοζόμενο πλέγμα σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή υπάρχει περίπτωση να αποκλίνει ο αλγόριθμος προσαρμογής πλέγματος λόγω μεγάλης πύκνωσης και να απαιτείται μείωση των συντελεστών. Μεγαλύτερη μείωση από την αναγκαία θα οδηγήσει σε περίπου ομοιόμορφο πλέγμα με αποστάσεις μεταξύ των κόμβων μεγαλύτερες από αυτές που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

## 4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η υπορουτίνα προσαρμογής του πλέγματος εφαρμόστηκε σε δύο υπολογιστικά προβλήματα. Αρχικά δοκιμάστηκε στο πρόγραμμα “soliton” που λύνει μια διαταραχή που υπακούει στη διαφορική εξίσωση συναγωγής-διάχυσης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης splines σε μία διάσταση. Η δεύτερη εφαρμογή αφορά το πρόγραμμα “rainfall” για την επίδραση του αέρα σε λεπτό υγρό υμένα. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται διδιάστατα, αλλά η προσαρμογή του πλέγματος εφαρμόστηκε και πάλι μόνο στην κύρια διεύθυνση της ροής.

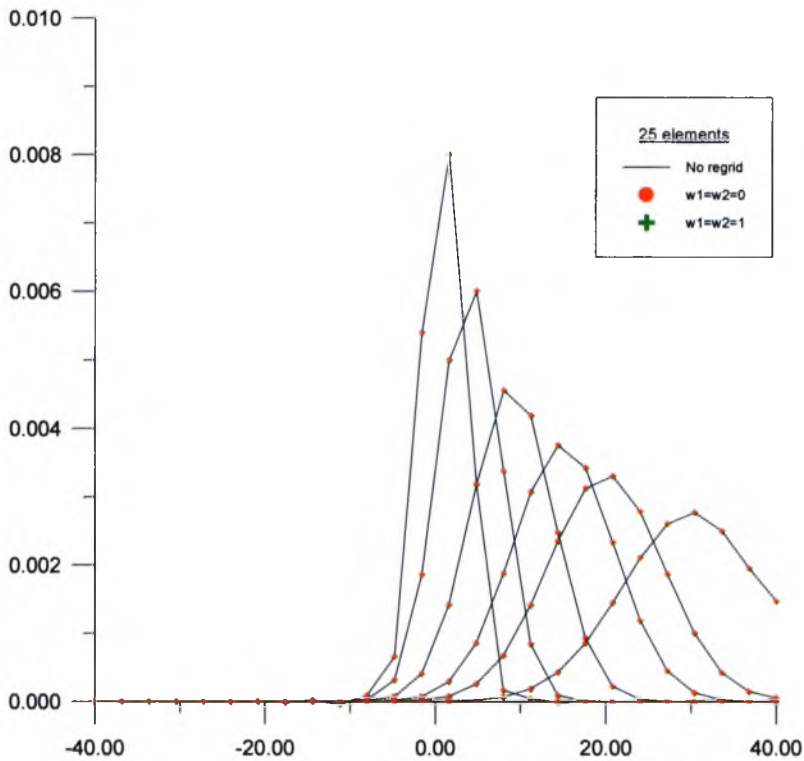
### 4.1. Μονοδιάστατο πρόβλημα συναγωγής-διάχυσης

Η εφαρμογή στο πρόβλημα αυτό αποσκοπούσε κυρίως στην επαλήθευση της ορθότητας των αποτελεσμάτων της υπορουτίνας που αναπτύχθηκε και στον πειραματισμό με τις τιμές των συντελεστών  $b$  και  $d$  στην (3.16).

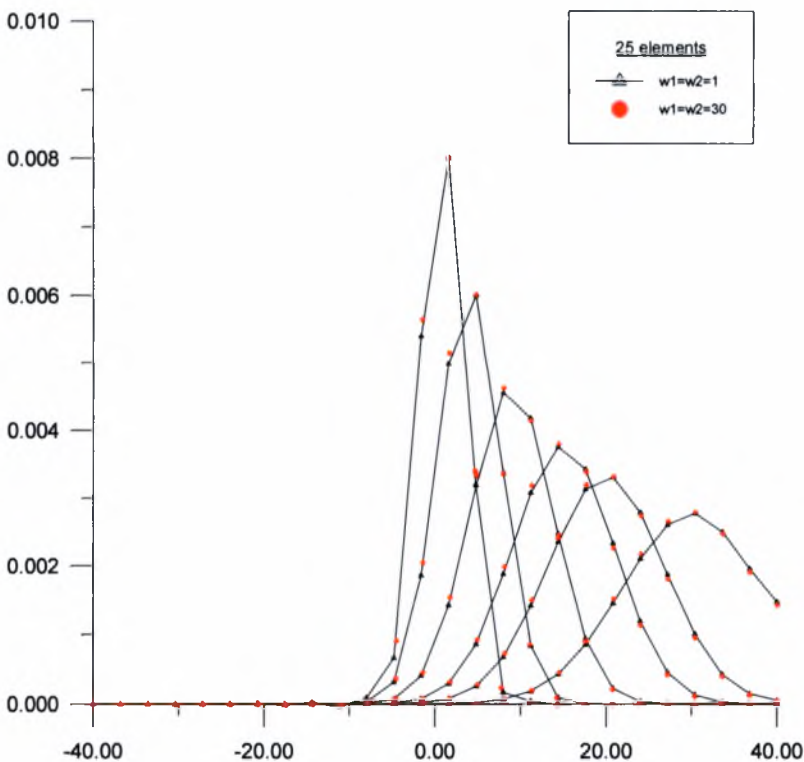
Για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων συγκρίνουμε τις λύσεις από την επίλυση του προβλήματος χωρίς τη χρήση της υπορουτίνας με τα αποτελέσματα όταν χρησιμοποιείται η υπορουτίνα ανακατανομής των κόμβων με μηδενικούς συντελεστές ( $w_1=w_2=0$ ). Η εφαρμογή έγινε για 25, 50 και 100 στοιχεία.

Στο Σχήμα 4-1 και στο Σχήμα 4-2 φαίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την εξέλιξη του φαινομένου για αδιάστατο χρόνο  $t=1, t=4, t=9, t=15, t=20$  και  $t=30$  και 25 στοιχεία. Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι η λύση παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από την ύπαρξη των συντελεστών (που εδώ χαρακτηρίζονται ως  $w_1$  και  $w_2$ ). Παρατηρούμε επίσης, ότι η συσσώρευση των κόμβων είναι εντονότερη όσο η τιμή τους μεγαλώνει (μεγαλύτερη από 10, Σχήμα 4-2, Σχήμα 4-4, Σχήμα 4-6), ενώ για μικρές τιμές η μετακίνηση είναι τόσο μικρή που το πλέγμα είναι σχεδόν ομοιόμορφο (Σχήμα 4-1, Σχήμα 4-3, Σχήμα 4-5). Αυτό συμβαίνει γιατί ο αριθμός των κόμβων είναι αρκετά μεγάλος και οι διακυμάνσεις δεν είναι έντονες. Την πύκνωση την αντιλαμβανόμαστε ευκολότερα στις εντονότερες διαταραχές που συμβαίνουν σε μικρούς χρόνους ( $t=1$  και  $t=4$ ) σε αντίθεση με τις ηπιότερες διαταραχές στους μεγαλύτερους ( $t=9, t=15, t=20$  και  $t=30$ ). Μπορούμε ακόμη να δούμε ότι όταν υπάρχει πύκνωση στην περιοχή της «καμπάνας» αυξάνουν οι αποστάσεις των κόμβων εκατέρωθεν αυτής, ενώ κοντά στο μέγιστο (περιοχή με έντονη κλίση και καμπυλότητα) οι κόμβοι πλησιάζουν ακόμη περισσότερο (Σχήμα 4-7, Σχήμα 4-8, για

25 στοιχεία, Σχήμα 4-9, Σχήμα 4-10 για 50 στοιχεία και Σχήμα 4-11, Σχήμα 4-12 για 100 στοιχεία).

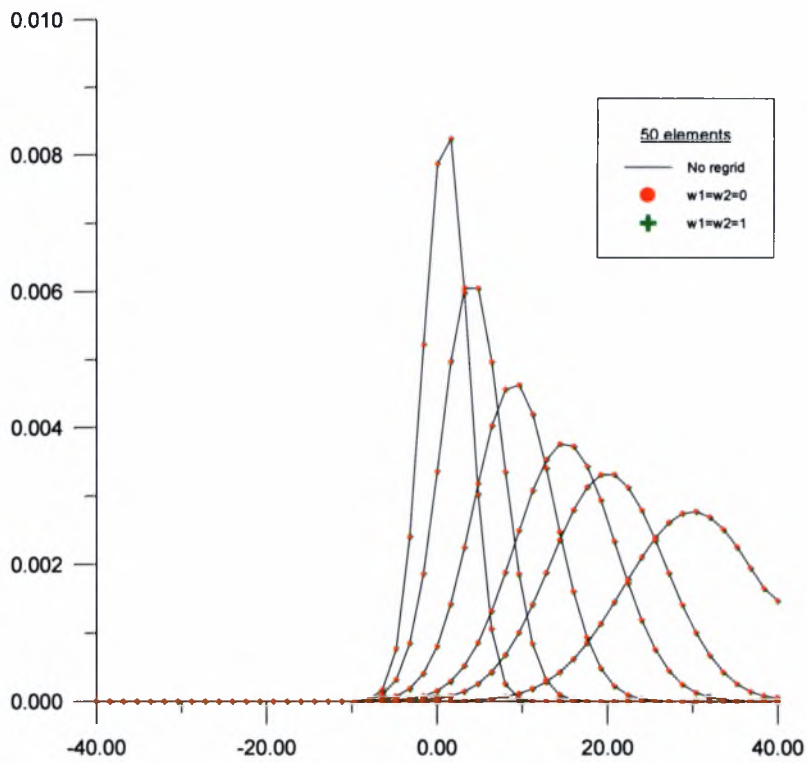


Σχήμα 4-1: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 25 στοιχεία

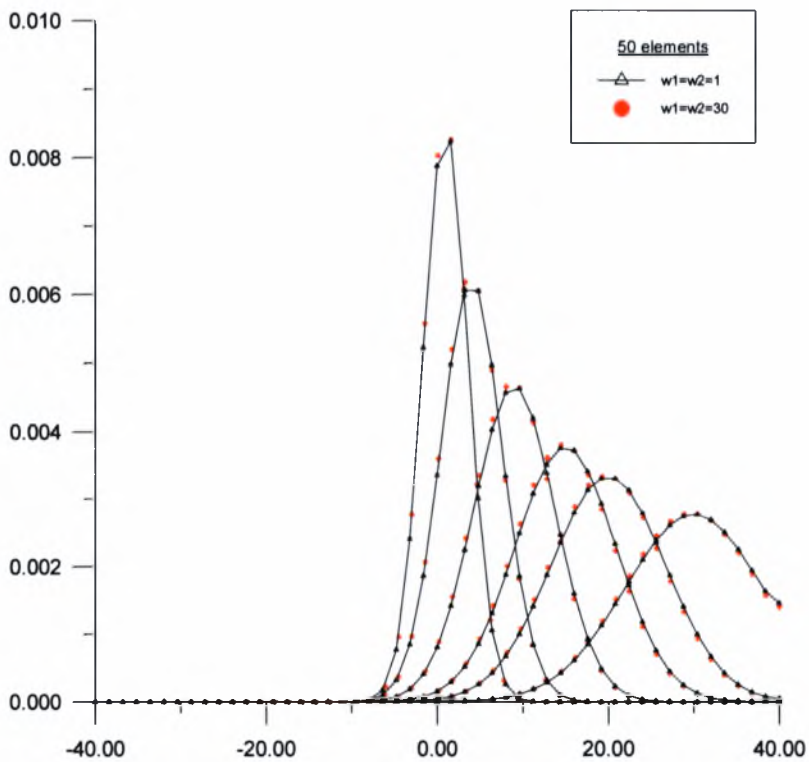


Σχήμα 4-2: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 25 στοιχεία

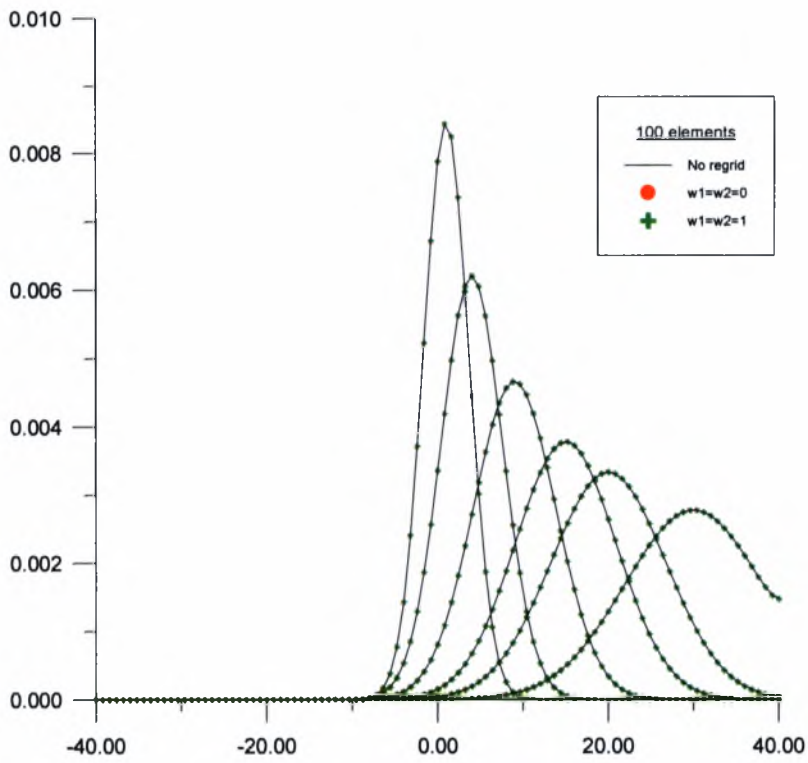




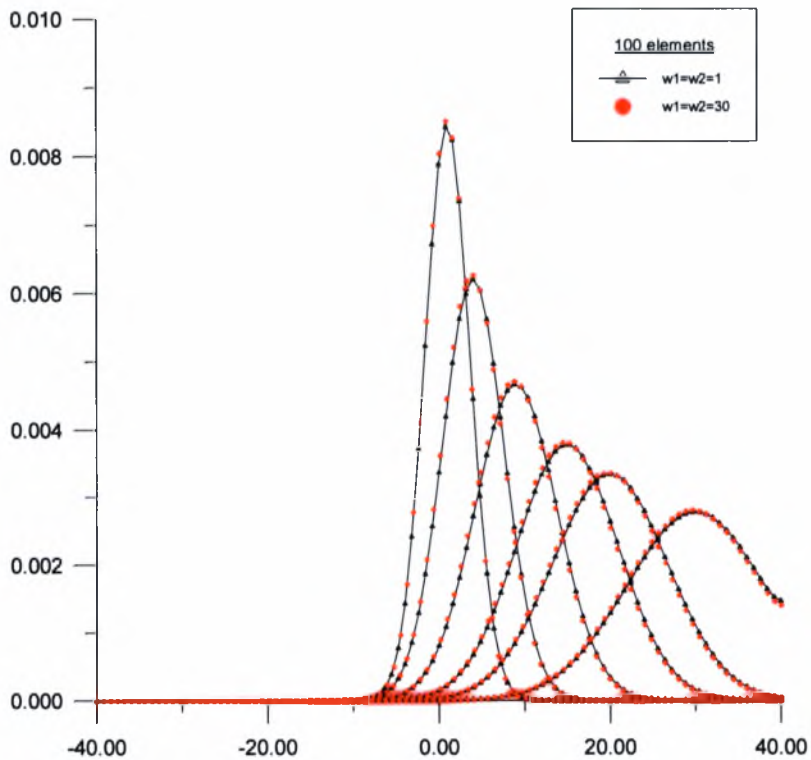
Σχήμα 4-3: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 50 στοιχεία



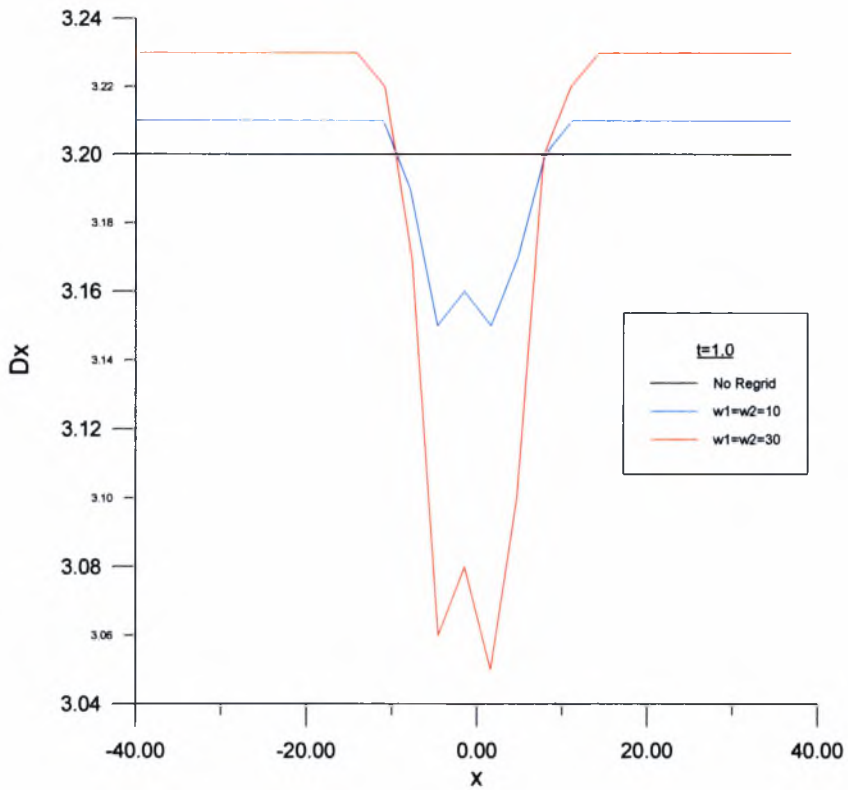
Σχήμα 4-4: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 50 στοιχεία



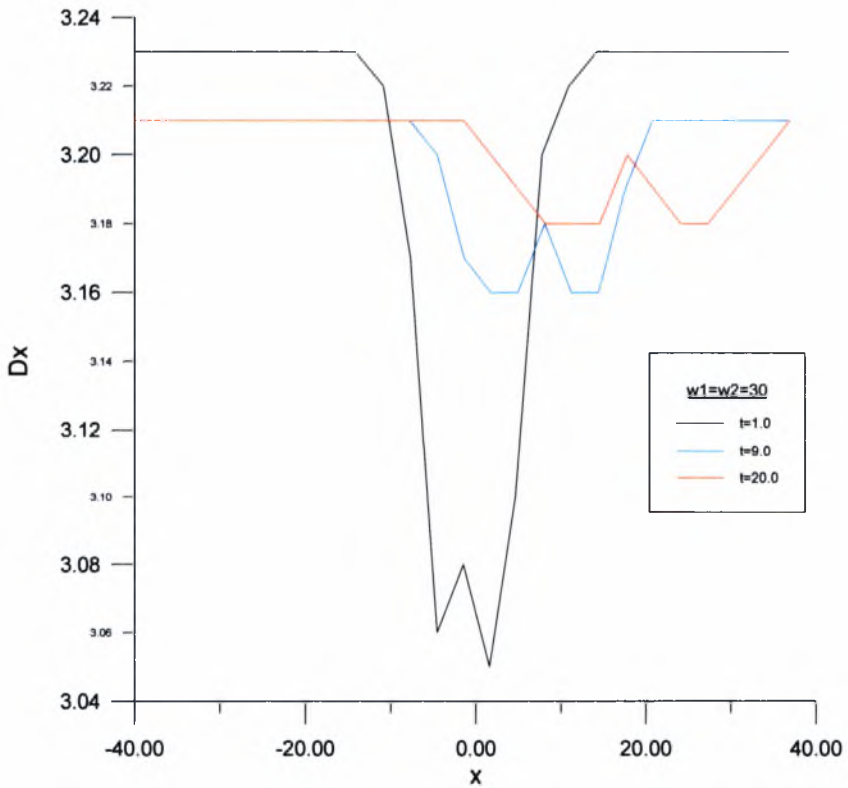
Σχήμα 4-5: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 100 στοιχεία



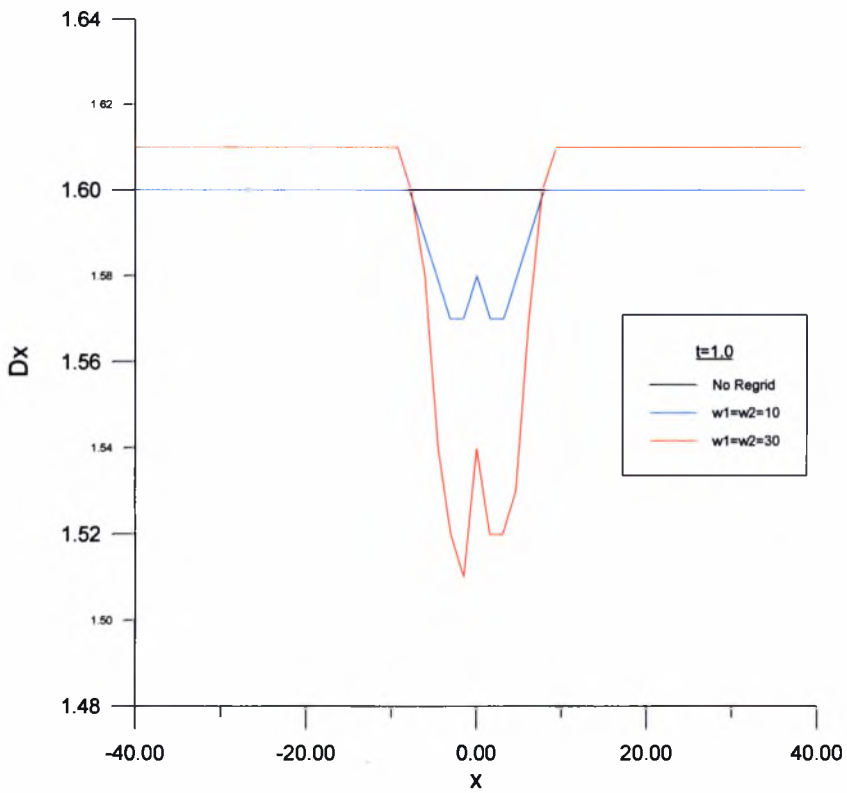
Σχήμα 4-6: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 100 στοιχεία



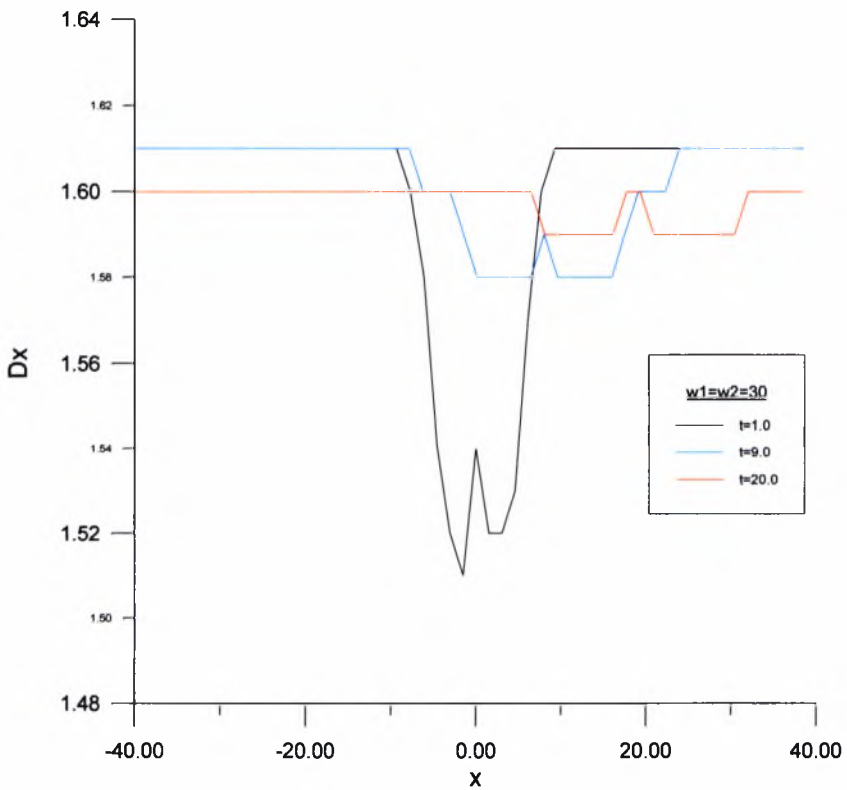
**Σχήμα 4-7: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την αύξηση των  $w_1$  και  $w_2$  για δεδομένη χρονική στιγμή (25 στοιχεία)**



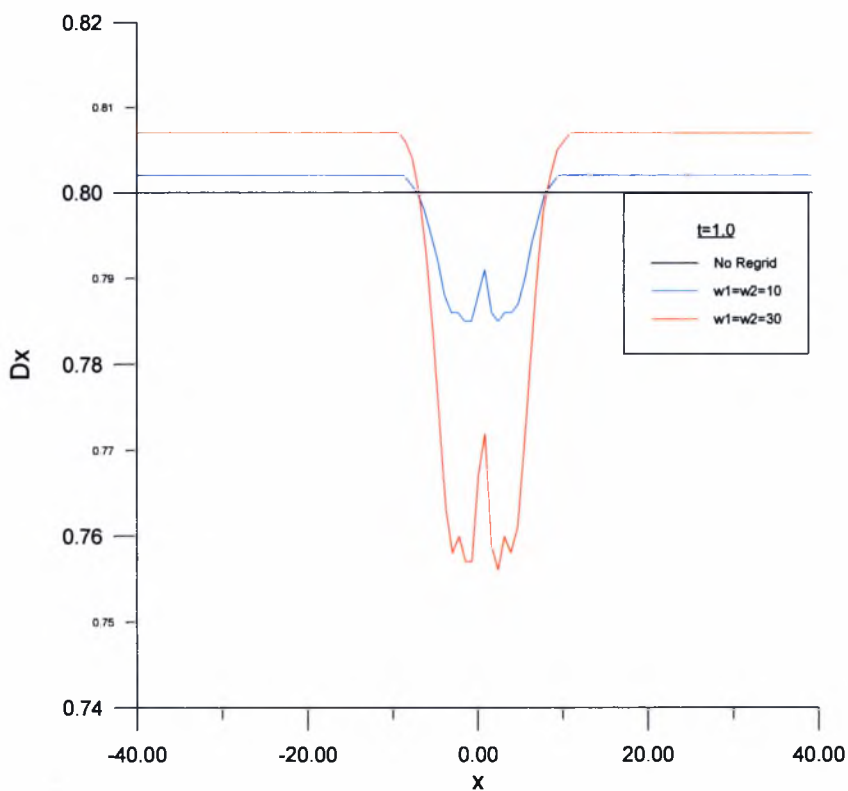
**Σχήμα 4-8: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την πάροδο του χρόνου για σταθερή τιμή των  $w_1$  και  $w_2$  (25 στοιχεία)**



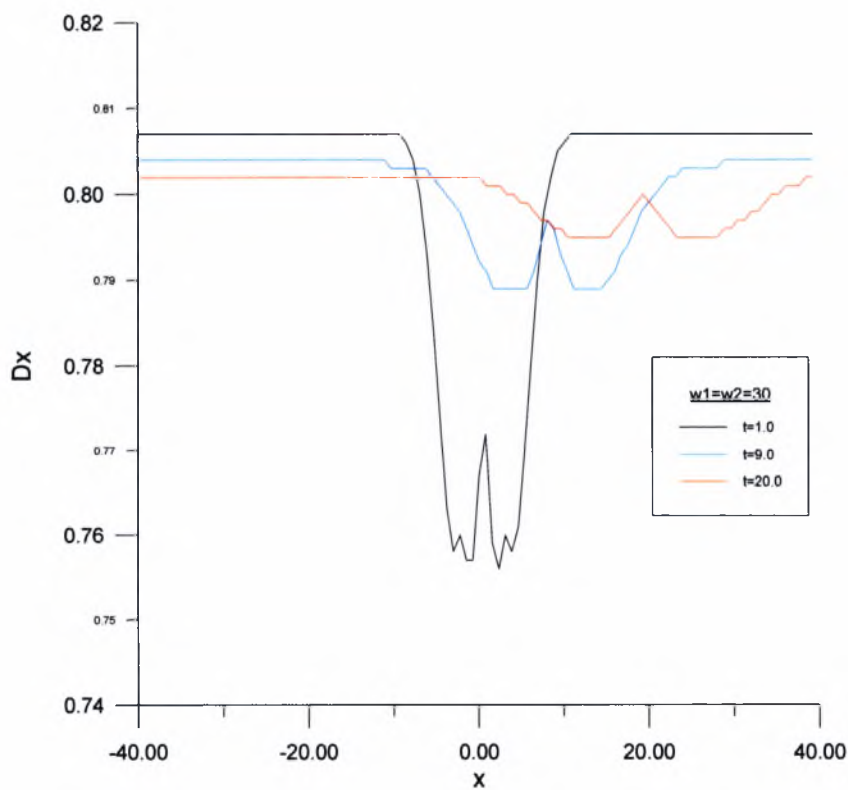
Σχήμα 4-9: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την αύξηση των  $w_1$  και  $w_2$  για δεδομένη χρονική στιγμή (50 στοιχεία)



Σχήμα 4-10: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την πάροδο του χρόνου για σταθερή τιμή των  $w_1$  και  $w_2$  (50 στοιχεία)



Σχήμα 4-11: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την αύξηση των  $w_1$  και  $w_2$  για δεδομένη χρονική στιγμή (100 στοιχεία)



Σχήμα 4-12: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την πάροδο του χρόνου για σταθερή τιμή των  $w_1$  και  $w_2$  (100 στοιχεία)

## 4.2. Πρόβλημα ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ

Το πρόγραμμα “rainfall” επιλύει τη ροή αέρα πάνω από λεπτό υγρό υμένα όπως αυτό ορίστηκε και περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ απαιτητικό σε υπολογιστικό χρόνο. Για να βελτιωθεί ο υπολογιστικός χρόνος εφαρμόζονται δύο μέθοδοι. Αρχικά με την αποφεύγεται η κατασκευή και αντιστροφή της ιακωβιανής του συστήματος σε κάθε χρονικό βήμα. Στη συνέχεια, επειδή η μεγαλύτερη κατανάλωση χρόνου γίνεται κατά την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που αντιστοιχούν στην αέρια φάση, αυτή γίνεται επαναληπτικά με τη μέθοδο GMRES. Παρόλα αυτά, η επίλυση προβλημάτων με έντονες διαταραχές, που απαιτεί μεγάλο αριθμό υπολογιστικών σημείων, καθίσταται πρακτικά μη εφαρμόσιμη αφού οι υπολογιστικοί χρόνοι αυξάνονται υπερβολικά. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκε μια υπορουτίνα που μετατοπίζει τους κόμβους του πλέγματος ανάλογα με τις διαταραχές. Δηλαδή, σε θέσεις με έντονη κλίση και καμπυλότητα υπάρχει πυκνωση του πλέγματος σε αντίθεση με τις υπόλοιπες περιοχές, ενώ ο συνολικός αριθμός των κόμβων να παραμένει σταθερός.

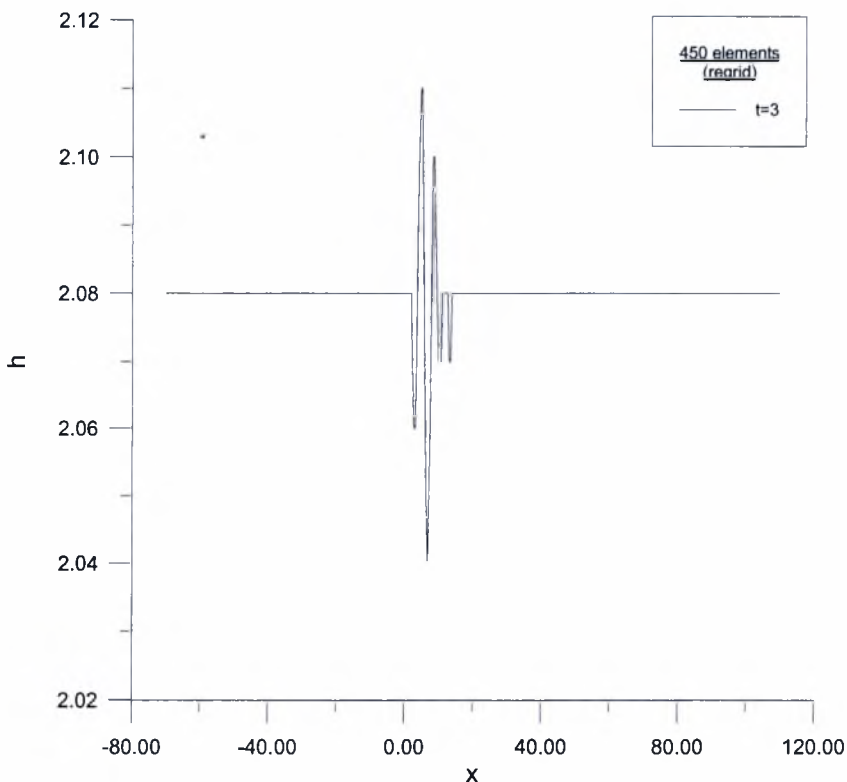
Οι εφαρμογές αποσκοπούσαν αρχικά στον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων και στη διασταύρωση με τα υπάρχοντα για ομοίμορφο πλέγμα. Επίσης, έπρεπε να διαπιστωθεί ότι τα αποτελέσματα δε διαφοροποιούνται με την αλλαγή των συντελεστών. Τέλος, έγινε προσπάθεια επίλυσης του προβλήματος με μικρότερο αριθμό κόμβων με σκοπό να μειωθούν οι χρόνοι υπολογισμού. Όλες οι περιπτώσεις αφορούν επίλυση στο εύρος  $[-70,110]$  για αρχική διαταραχή 0,4 και χρονικό βήμα 0,001 εκτός από τον αρχικό έλεγχο στη γραμμική περιοχή όπου η αρχική διαταραχή είναι 0,01.

### 4.2.1. Έλεγχος στη γραμμική περιοχή

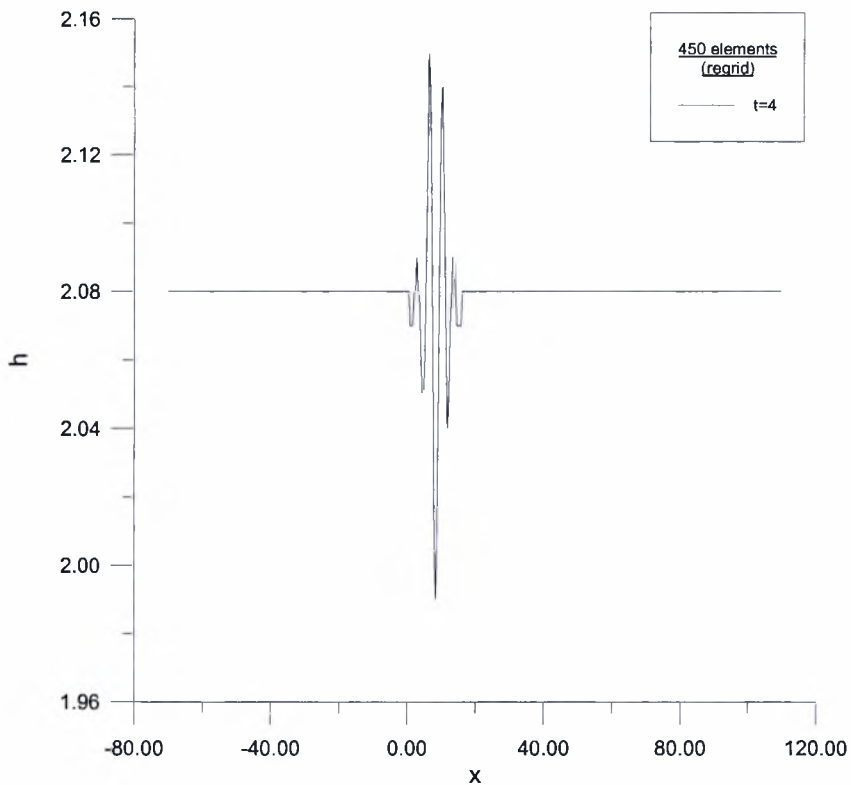
Αρχικά, τα διεπιφανειακά κύματα που προκαλούνται από τη διάτμηση του οριακού στρώματος πάνω από λεπτό φιλμ υγρού εξετάζονται ως αποτέλεσμα γραμμικών διαταραχών. Τα κύματα αυτά μπορεί να είναι είτε συναγωγικώς, είτε απολύτως ασταθή. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται ανήκουν στην περίπτωση συναγωγικής αστάθειας. Για την προσομοίωση της περίπτωσης αυτής επιβάλλεται μια γραμμική διαταραχή και στη συνέχεια συγκρίνονται το μήκος κύματος, η περίοδος και η ταχύτητα του κυματοπακέτου που προκύπτουν αριθμητικά με τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας. Η διαταραχή αυτή εφαρμόζεται στιγμιαία στο σύστημα τη χρονική στιγμή  $t=0$  και είναι της μορφής  $D = \delta \exp[-W(X - X_0)^2]$ , όπου

το  $\delta$  είναι παράμετρος που καθορίζει το μέγεθος της διαταραχής και το  $W$  την έκταση της στο χώρο. Για την εφαρμογή αυτή είναι  $\delta=0.01$  και  $W=4$ . Το πρόβλημα επιλύεται με τη μεθοδολογία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3. Στη συνέχεια, υπολογίζεται το αριθμητικό μήκος κύματος της διαταραχής με ανάλυση FFT (Fast Fourier Transform) σε ένα στιγμιότυπο της διαταραχής. Είναι σημαντικό το στιγμιότυπο να ληφθεί σε χρόνο αρκετά μεγαλύτερο από την περίοδο του κυματοπακέτου. Η περίοδος υπολογίζεται με ανάλυση FFT στη χρονική εξέλιξη της διαταραχής για μια δεδομένη θέση. Και πάλι η απόσταση της θέσης που θα επιλεγεί από το σημείο επιβολής της διαταραχής πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερη από το μήκος κύματος του κυματοπακέτου ώστε να ισχύουν τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας.

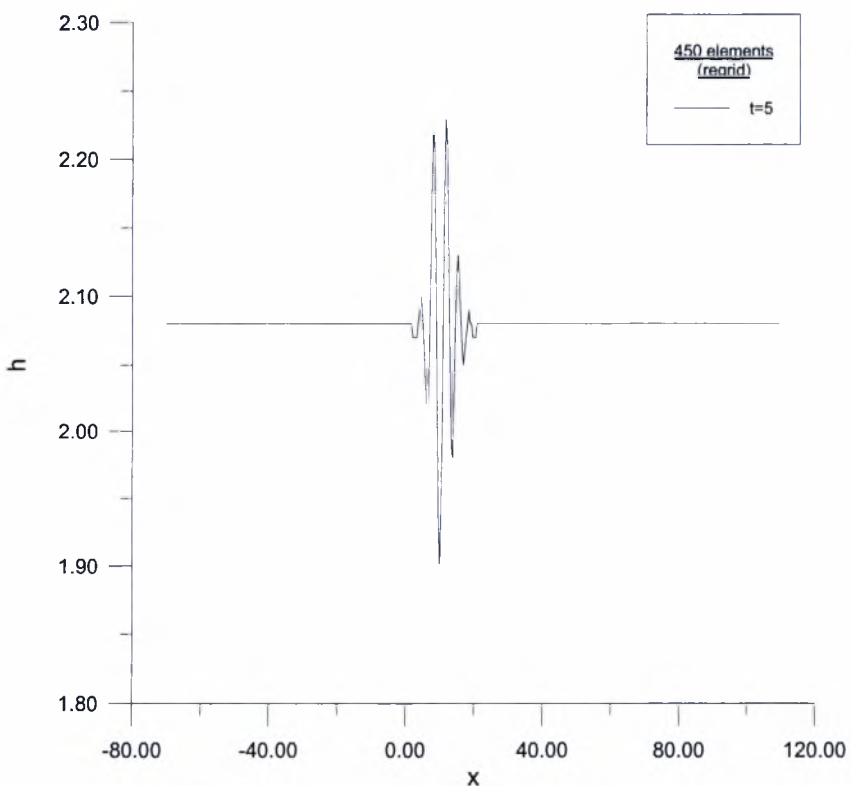
Στα παρακάτω σχήματα (Σχήμα 4-13 έως Σχήμα 4-15) φαίνονται στιγμιότυπα της διεπιφάνειας για τις χρονικές στιγμές  $t=3$  έως  $t=5$ . Οι λύσεις αυτές λήφθηκαν με χρήση μεταβλητού πλέγματος και 450 στοιχεία. Ακολούθως, (Σχήμα 4-16 έως Σχήμα 4-22) φαίνονται στιγμιότυπα της διεπιφάνειας για τις ίδιες χρονικές στιγμές μόνο που η επίλυση εδώ έγινε με 250 στοιχεία και μεταβλητό πλέγμα. Στο Σχήμα 4-20 δίνεται για τη θέση  $X=20$  η χρονική εξέλιξη της πίεσης και στη συνέχεια ανάλυση FFT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος και της περιόδου.



**Σχήμα 4-13: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t=3$  (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**

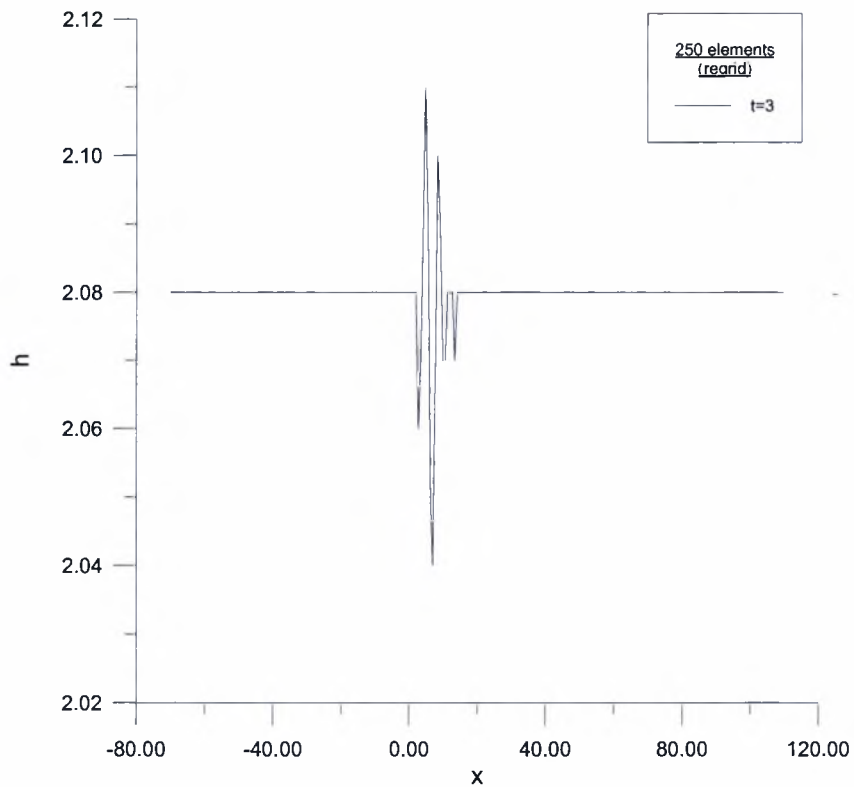


**Σχήμα 4-14: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t=4$  (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**

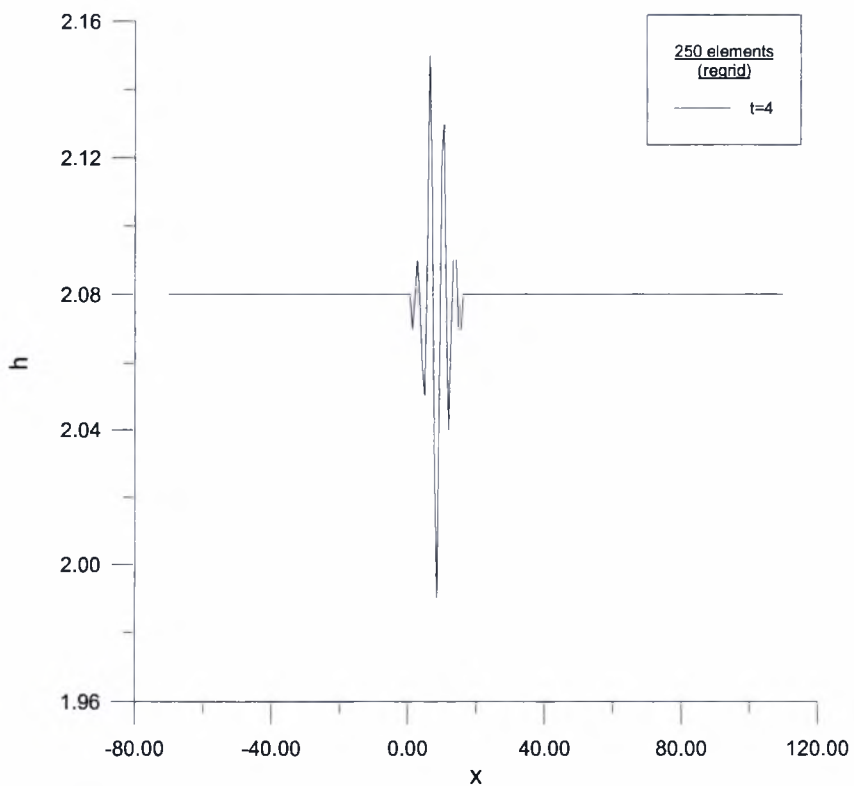


**Σχήμα 4-15: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t=5$  (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**

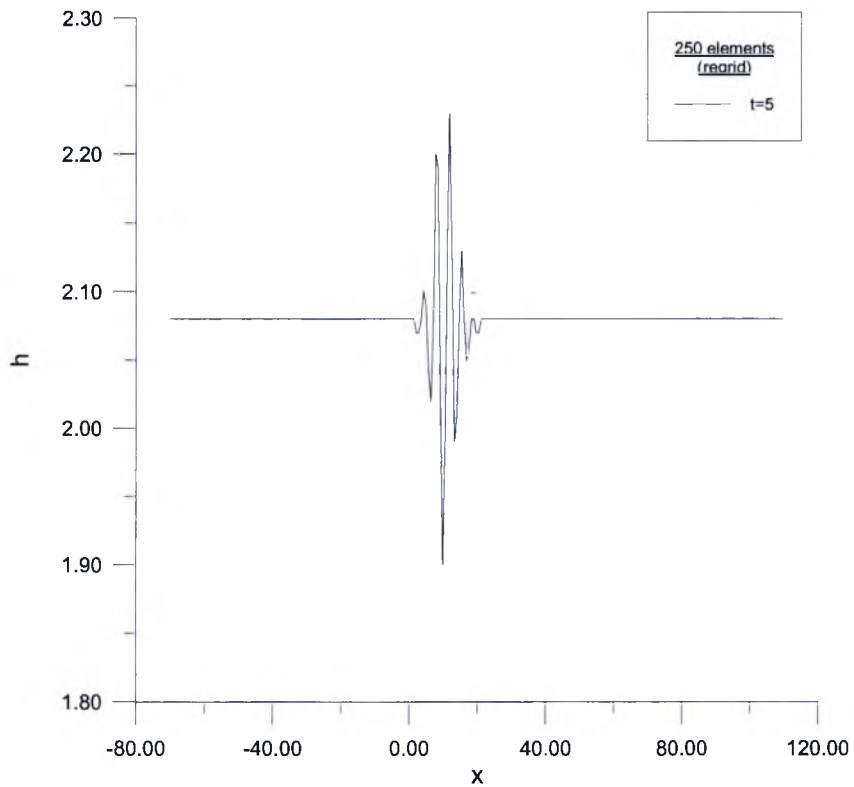




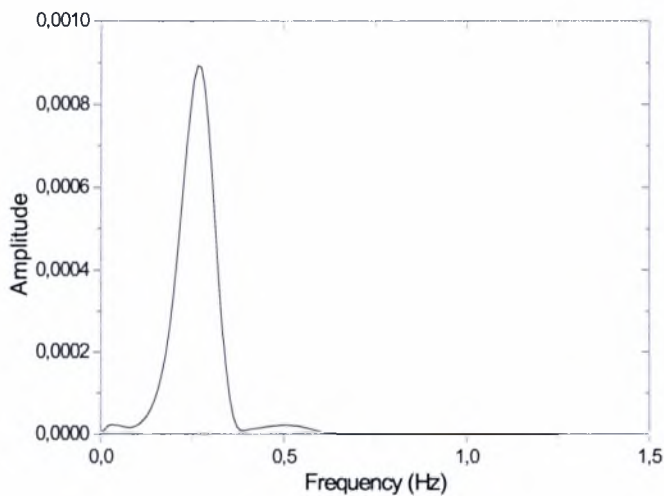
**Σχήμα 4-16: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t=3$  (250 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**



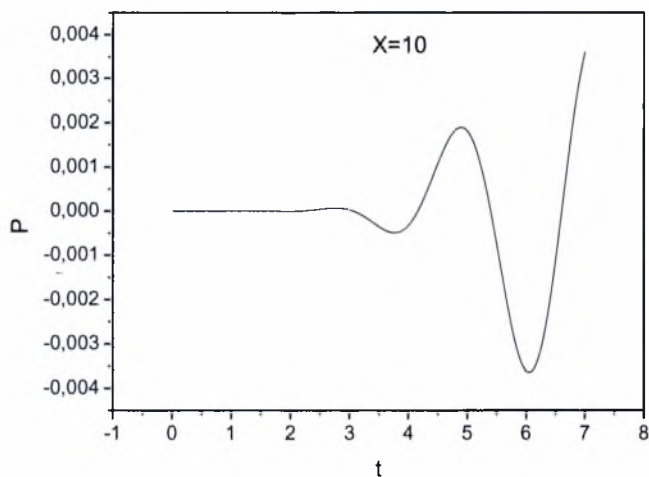
**Σχήμα 4-17: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t=4$  (250 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**



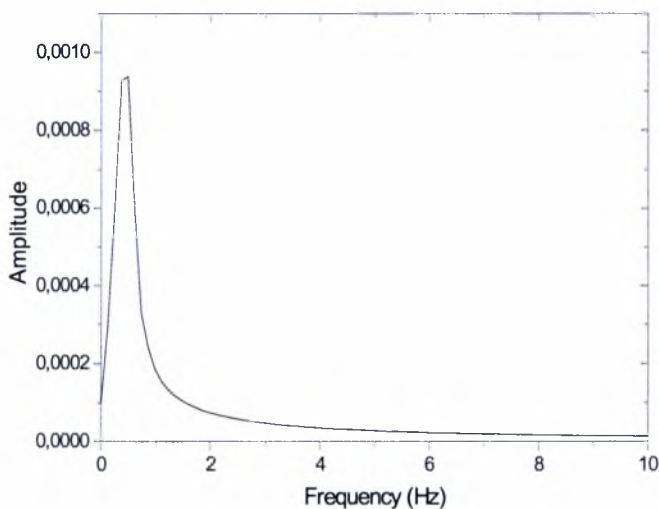
**Σχήμα 4-18: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t=5$  (250 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**



**Σχήμα 4-19: Ανάλυση FFT στα δεδομένα από το Σχήμα 4-18 για τον υπολογισμό του μήκους κύματος**



**Σχήμα 4-20:** Χρονική εξέλιξη της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή



**Σχήμα 4-21:** Ανάλυση FFT στα δεδομένα από το Σχήμα 4-18 για τον υπολογισμό της περιόδου

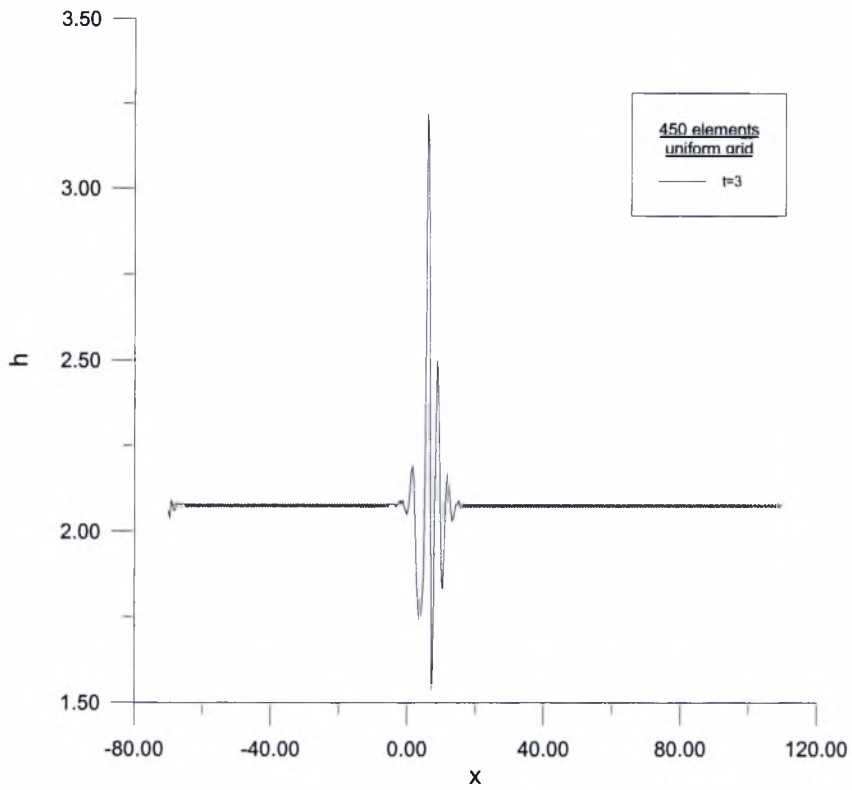
Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα διεπιφανειακά κύματα με την αριθμητική προσομοίωση με ομοιόμορφο πλέγμα 450 στοιχείων και με μεταβλητό πλέγμα 450 και 250 στοιχείων. Φαίνεται ότι με τη χρήση μεταβλητού πλέγματος λαμβάνουμε με εξίσου καλή ακρίβεια τα χαρακτηριστικά των διεπιφανειακών κυμάτων για την περίπτωση συναγωγικής αστάθειας, όπως και με το ομοιόμορφο.

Χαρακτηριστικό	Ομοιόμορφο πλέγμα (250 στοιχεία)	Ομοιόμορφο πλέγμα (450 στοιχεία)	Μεταβλητό πλέγμα (250 στοιχεία)	Μεταβλητό πλέγμα (450 στοιχεία)
Μήκος κύματος	3.76	3.80	3.83	3.83
Περίοδος	2,49	2.50	2.45	2.45
Ταχύτητα κυματοπακέτου	2.30	2.20	2.20	2.20

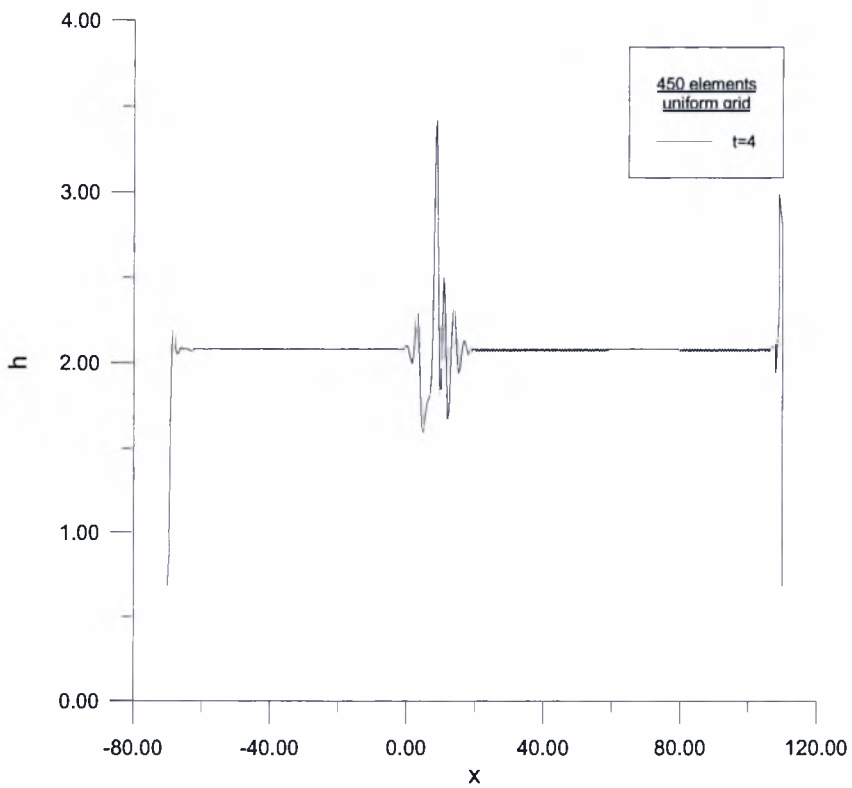
#### 4.2.2. Συμπεριφορά προσαρμοζόμενου πλέγματος στη μη γραμμική περιοχή

Για τη σύγκριση της μεθόδου με την περίπτωση του ομοιόμορφου πλέγματος εξετάσαμε αρχικά την επίλυση του προβλήματος με 250 στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορέσαμε να λάβουμε καθόλου αποτελέσματα. Η πύκνωση των στοιχείων σε 450 μας οδήγησε σε λύσεις για τις πρώτες χρονικές στιγμές (Σχήμα 4-22). Σύντομα όμως εμφανίζονται αστάθειες 2δx λόγω σφάλματος οι οποίες τελικά διαστρεβλώνουν τη λύση σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή. Το αποτέλεσμα δεν μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο από τη χρονική στιγμή 4 και μετά (Σχήμα 4-23). Για να εξετάσουμε την εξέλιξη της διαταραχής με την πάροδο του χρόνου και να λάβουμε στιγμιότυπα της πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα με 900 στοιχεία έχοντας πάντα ομοιόμορφο πλέγμα. Η χρήση πιο πυκνού πλέγματος εξαλείφει τις αστάθειες 2δx που παρατηρήθηκαν προηγουμένως και δίνει ομαλή λύση (Σχήμα 4-24). Στο Σχήμα 4-25 φαίνεται το στιγμιότυπο της διαταραχής στη χρονική στιγμή  $t=19$ .

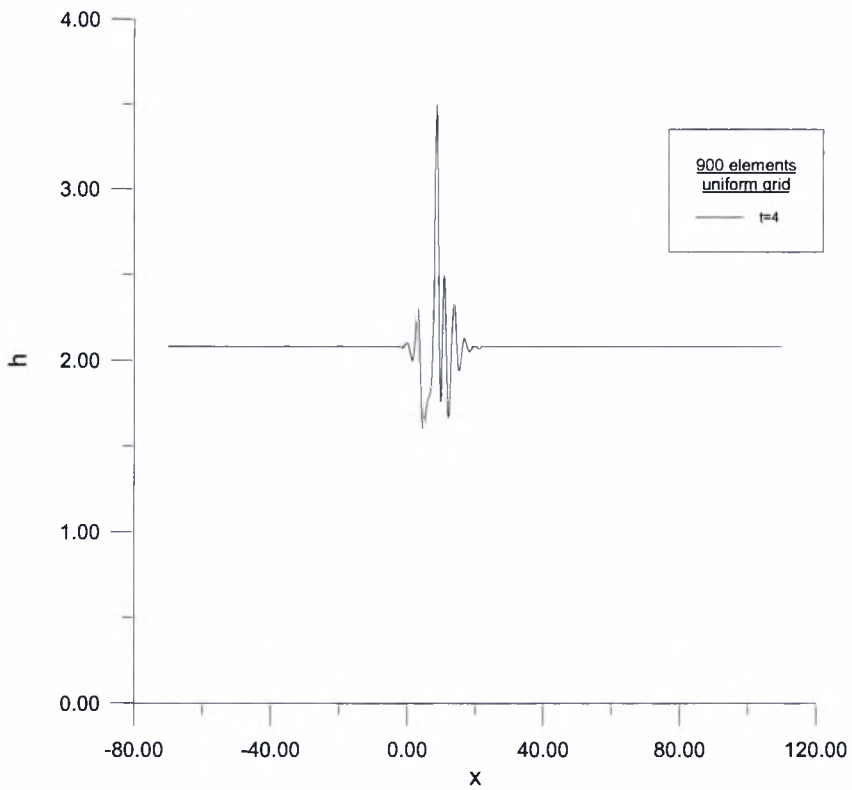
Αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι η διαταραχή που ακολουθεί την αρχική. Αυτή δεν παρατηρείται στις μικρές χρονικές στιγμές γιατί είναι μικρή και εξελίσσεται με την πάροδο του χρόνου ακριβώς όπως και η κυρίως διαταραχή. Το φαινόμενο δημιουργείται επειδή περιορίζουμε το πεδίο επίλυσης με περιοδική συνοριακή συνθήκη στα άκρα, ενώ κανονικά εκτείνεται μέχρι το άπειρο.



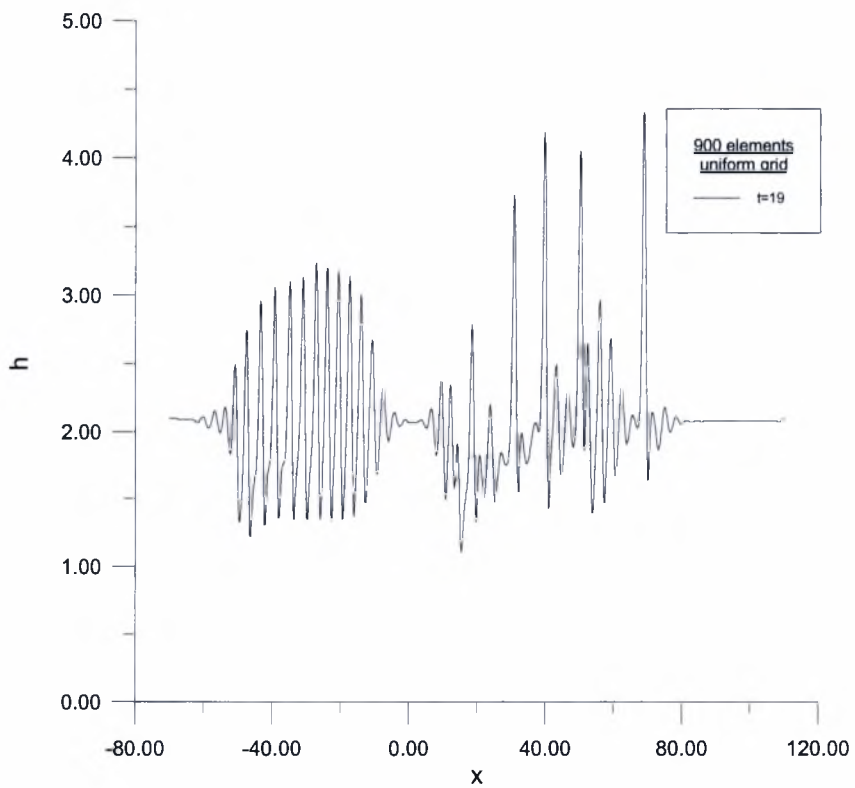
**Σχήμα 4-22: Στιγμιότυπο για ομοιόμορφο πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=3$  (450 στοιχεία)**



**Σχήμα 4-23: Στιγμιότυπο για ομοιόμορφο πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=4$  (450 στοιχεία)**



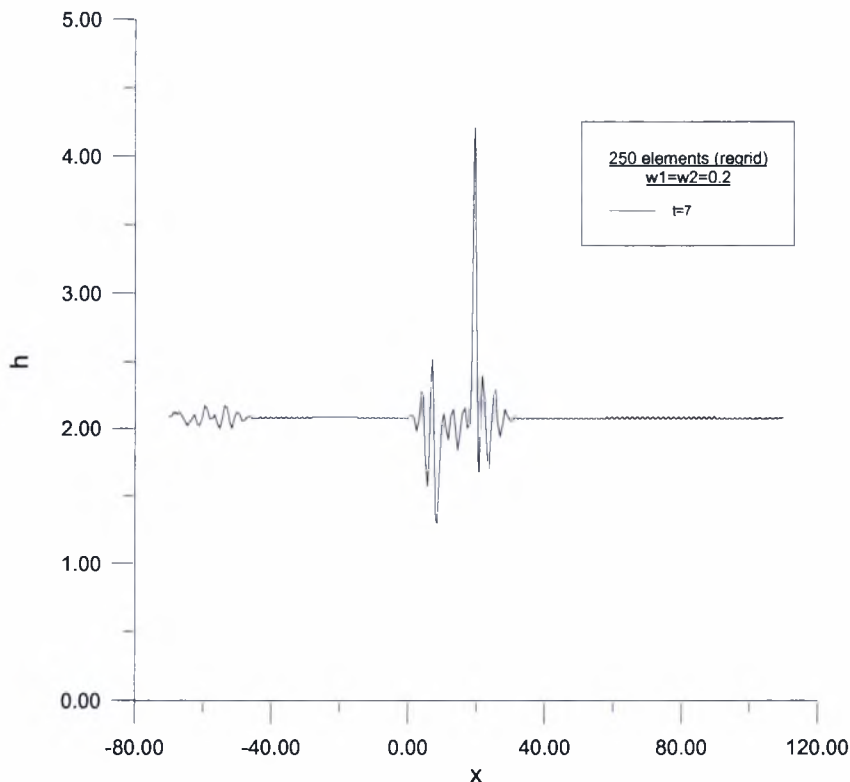
**Σχήμα 4-24: Στιγμιότυπο για ομοιόμορφο πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=4$  (900 στοιχεία)**



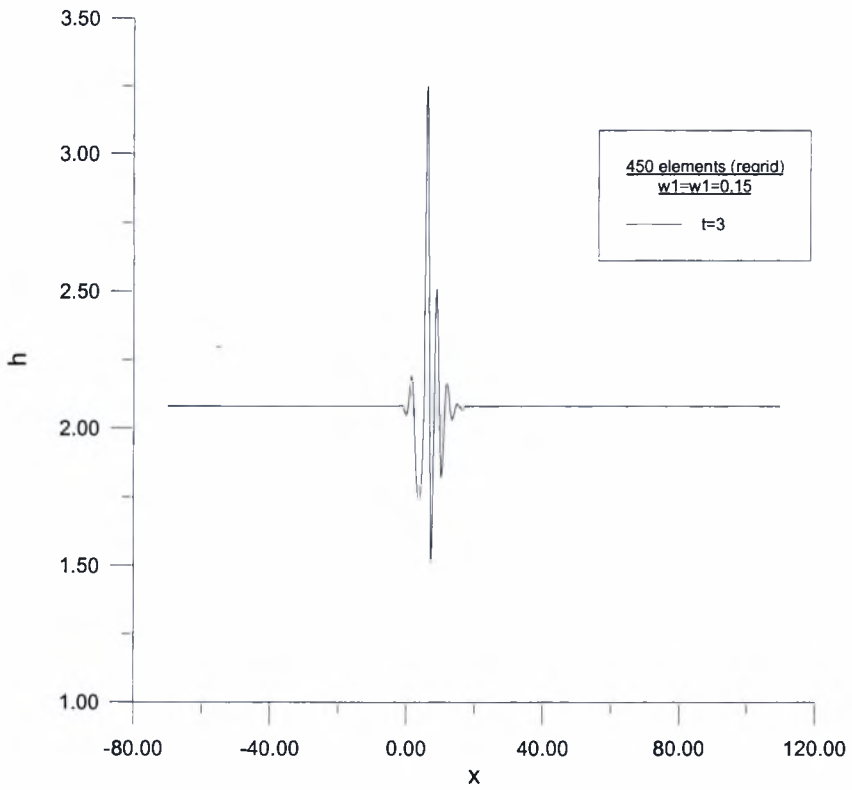
**Σχήμα 4-25: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=19$  (900 στοιχεία)**

Για την επίλυση με προσαρμοζόμενο μεταβλητό πλέγμα έγινε αρχικά δοκιμή με 250 στοιχεία. Το αποτέλεσμα είναι ικανοποιητικό για μικρούς χρόνους, αλλά εμφανίζονται αστάθειες 2δx λόγω υπολογιστικού σφάλματος (Σχήμα 4-26). Συνεπώς, η λύση με 250 κόμβους δεν είναι αποδεκτή και δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την εξέλιξη του φαινομένου. Ωστόσο, η χρήση 450 κόμβων δίνει τα σωστά αποτελέσματα σε όλες τις χρονικές στιγμές (Σχήμα 4-27 έως Σχήμα 4-30). Τα αποτελέσματα αυτά είναι σύμφωνα με εκείνα που λήφθηκαν με ομοιόμορφο πλέγμα και 900 στοιχεία. Με την πάροδο του χρόνου παρατηρούμε ότι αρχικά εμφανίζεται μια κορυφή και πίσω από αυτή υπάρχει η τάση να δημιουργηθούν και άλλες. Οι κορυφές αυτές είναι πιο ευδιάκριτες στις επόμενες χρονικές στιγμές και δεν ξεπερνούν ένα μέγιστο ύψος. Στους μεγάλους χρόνους (Σχήμα 4-29 και Σχήμα 4-30) εντοπίζουμε επίσης την εξέλιξη της διαταραχής λόγω συνοριακής συνθήκης στο αριστερό άκρο, όπως συμβαίνει και με το ομοιόμορφο πλέγμα.

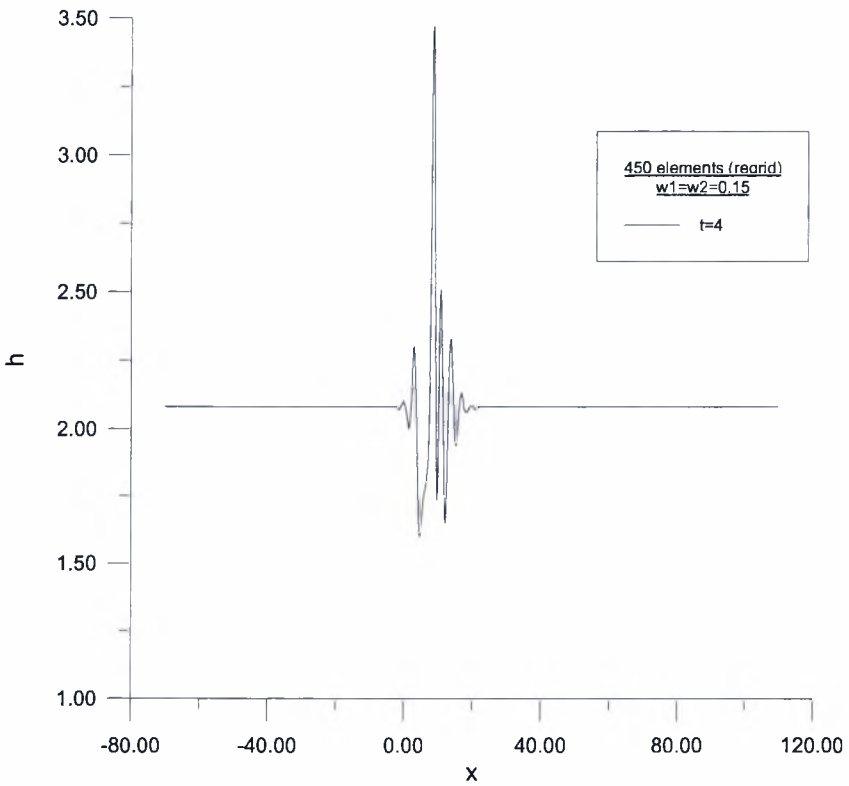
Πίσω από τις κορυφές υπάρχει η τάση δημιουργίας ανακυκλοφορίας. Με την πάροδο του χρόνου παρατηρείται μια περιοδικότητα στην ανακυκλοφορία ενώ ταυτόχρονα μετακινείται προς τα δεξιά ακολουθώντας τη μέγιστη διαταραχή (Σχήμα 4-31 έως Σχήμα 4-35).



Σχήμα 4-26: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=7$  (250 στοιχεία)

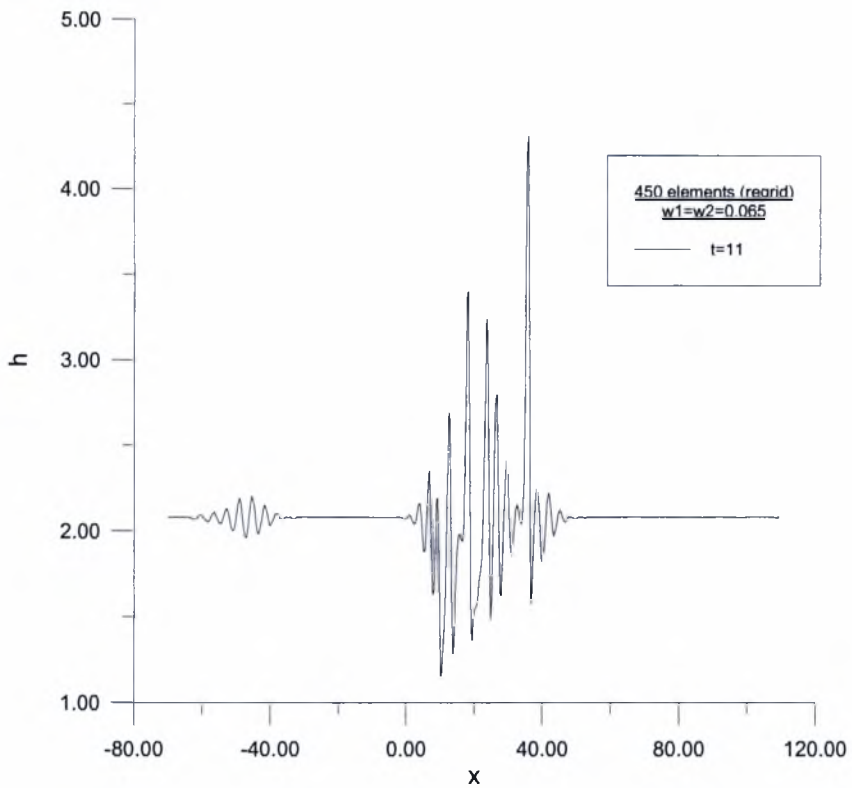


**Σχήμα 4-27: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή t=3 (450 στοιχεία)**

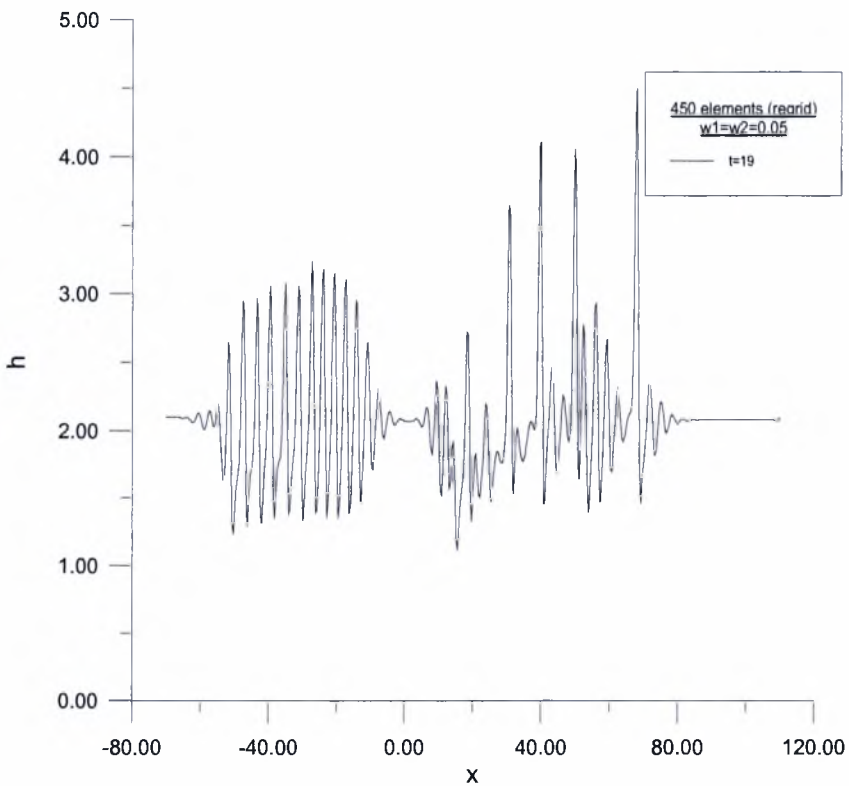


**Σχήμα 4-28: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή t=4 (450 στοιχεία)**

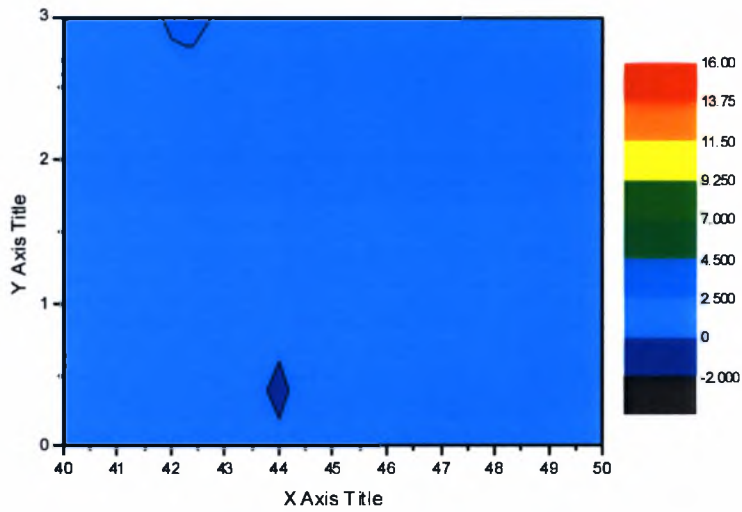




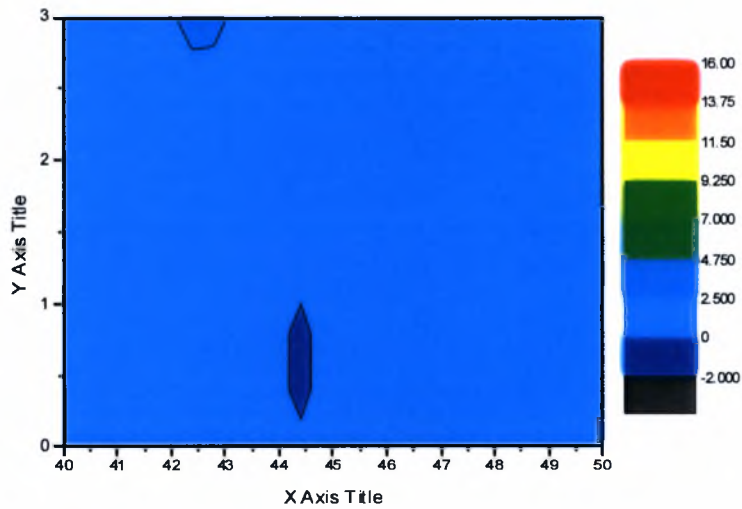
**Σχήμα 4-29: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=11$  (450 στοιχεία)**



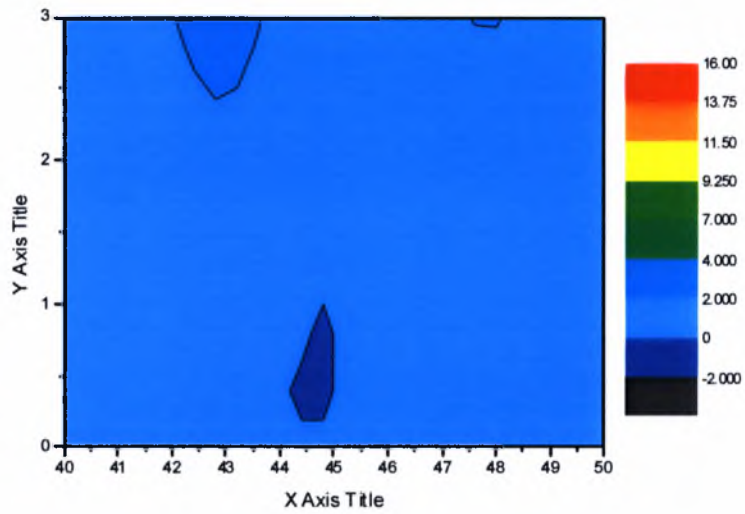
**Σχήμα 4-30: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=19$  (450 στοιχεία)**



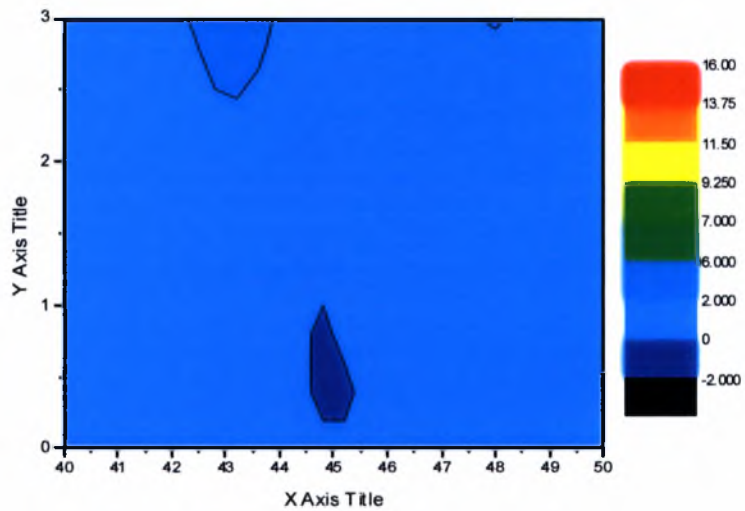
Σχήμα 4-31: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή  $t=17,5$  στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)



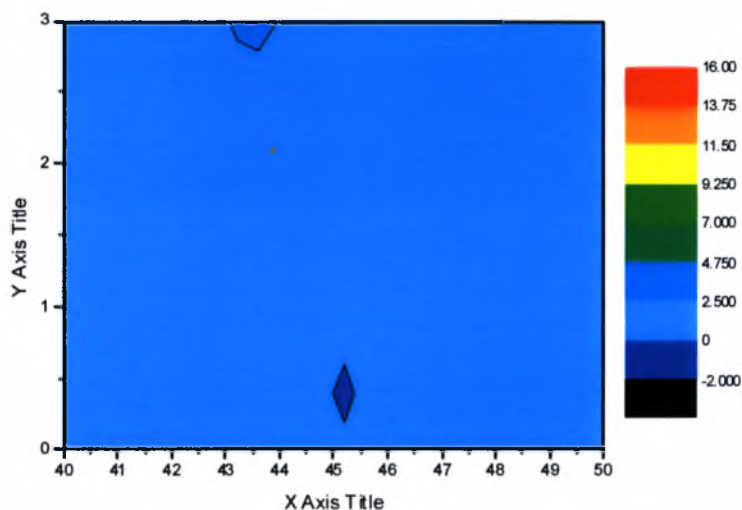
Σχήμα 4-32: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή  $t=17,6$  στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)



Σχήμα 4-33: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή  $t=17,7$  στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)



Σχήμα 4-34: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή  $t=17,8$  στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)

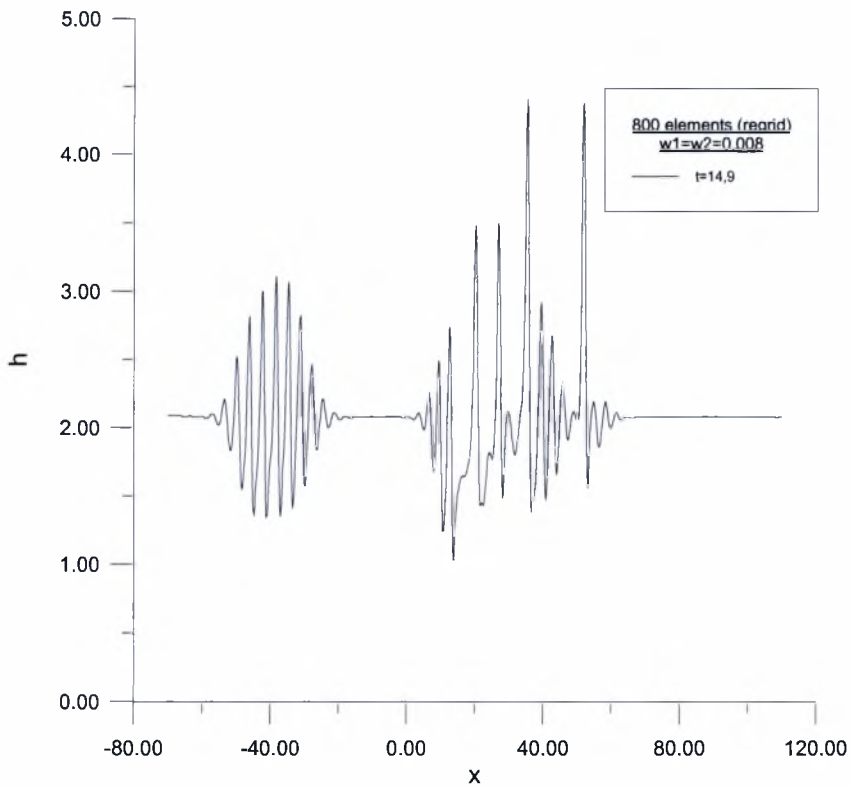


**Σχήμα 4-35: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή  $t=17,9$  στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα)**

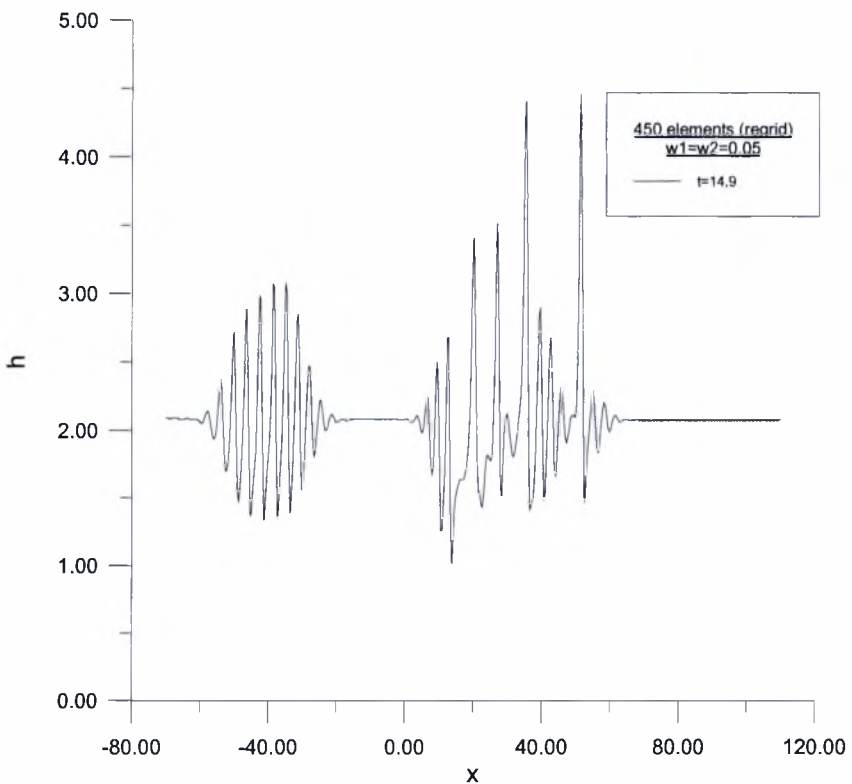
#### 4.2.3. Ανεξαρτησία πλέγματος

Για να βεβαιωθούμε ότι τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από τον αριθμό των κόμβων έγινε σύγκριση των αποτελεσμάτων για 450 στοιχεία και 800 στοιχεία. Η αρχική διαταραχή ήταν 0,4 (μη γραμμική περιοχή) και το διάστημα επίλυσης από -70 έως 110.

Αν συγκρίνουμε το Σχήμα 4-36 και το Σχήμα 4-37 στη χρονική στιγμή  $t=14,9$  παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση ούτε στη γενική μορφή, ούτε στα ύψη των κορυφών. Με μια πιο λεπτομερή εξέταση μπορεί κάποιος να διακρίνει πολύ μικρές διαφορές ως προς τη θέση των κορυφών. Αυτό οφείλεται στη χρήση μεταβλητού πλέγματος γιατί οι κόμβοι δε συμπίπτουν στα δύο στιγμιότυπα, αφού η ακριβής θέση τους εξαρτάται από τον αριθμό τους και την τιμή των συντελεστών για την ίδια πάντα λύση και χρονική στιγμή.



**Σχήμα 4-36: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=14,9$  (800 στοιχεία)**

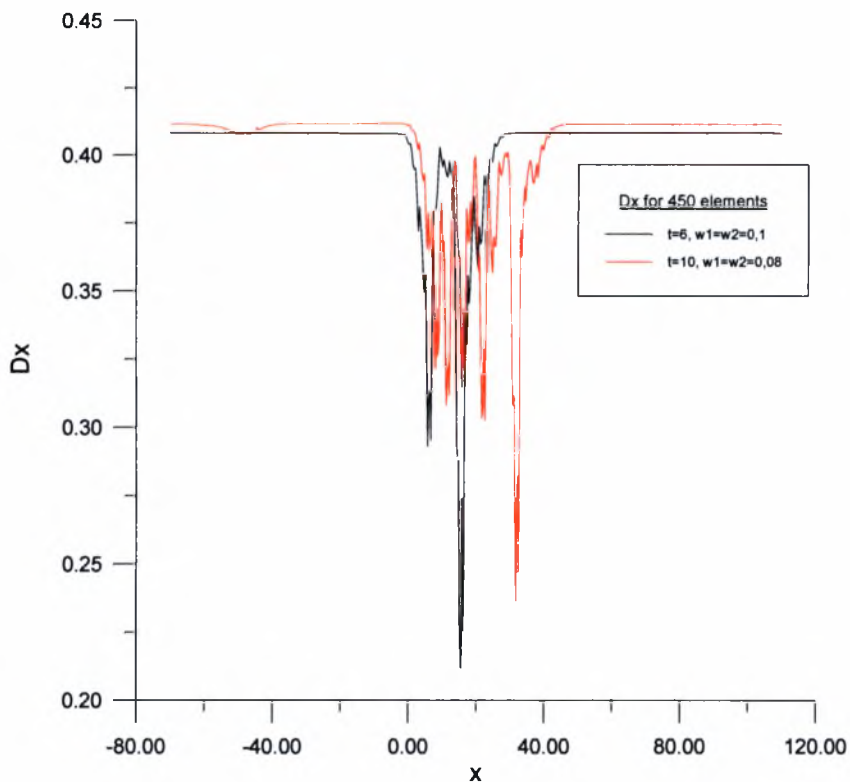


**Σχήμα 4-37: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή  $t=14,9$  (450 στοιχεία)**

#### 4.2.4. Επιλογή και επίδραση συντελεστών $w_1$ και $w_2$

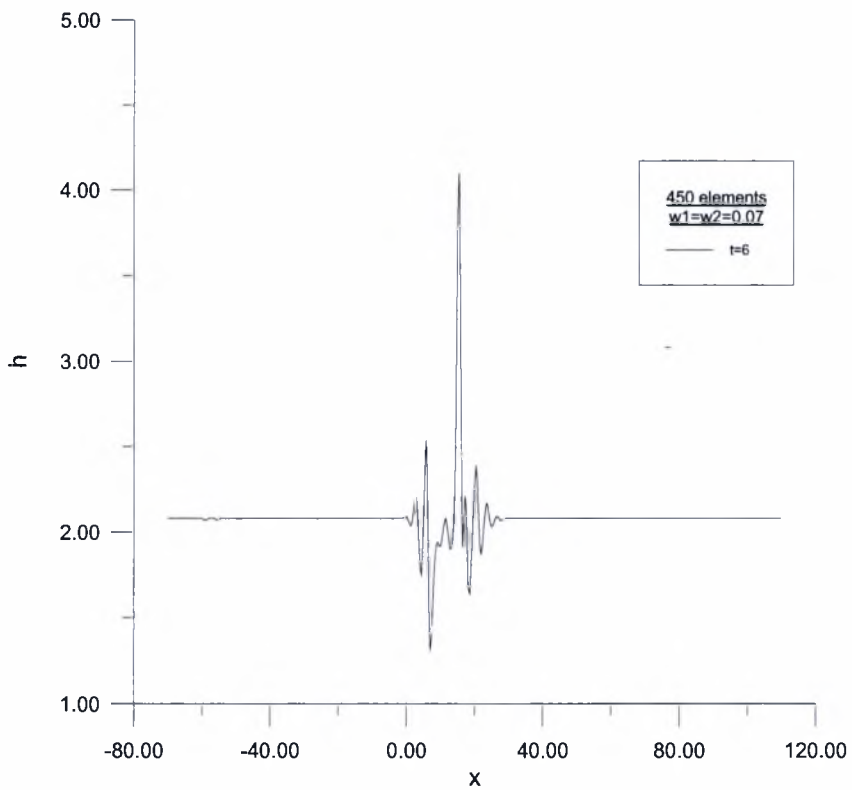
Σε αντίθεση με το πρόβλημα συναγωγής-διάχυσης εδώ υπάρχει μια έντονη διαταραχή. Στην αρχή εμφανίζει μια μόνο κορυφή, αλλά με την πάροδο του χρόνου αυτές πολλαπλασιάζονται και μεγαλώνουν. Μάλιστα, σε μεγάλους χρόνους εμφανίζεται και δεύτερη διαταραχή που οφείλεται σε αριθμητικό σφάλμα από τις συνοριακές συνθήκες όπως αναλύθηκε παραπάνω. Για τους λόγους αυτούς οι συντελεστές κυμαίνονται πολύ χαμηλότερα απ' ό,τι στο μονοδιάστατο πρόβλημα. Έτσι εδώ, επιλέγονται συντελεστές της τάξης του 0,1 κατά την εκκίνηση και με το πέρασμα του χρόνου μειώνονται. Η μείωση οφείλεται στην αδυναμία επίλυσης του προβλήματος γιατί οι διαταραχές μεγαλώνουν και πληθαίνουν με συνέπεια να «έλκουν» όλο και περισσότερο τους κόμβους. Όταν αυτοί έρθουν πολύ κοντά ο αλγόριθμος υπολογισμού του νέου πλέγματος εμφανίζει σφάλμα. Η επίλυση συνεχίζεται από τη χρονική στιγμή και μετά με μείωση των συντελεστών. Η εμπειρία έδειξε ότι σε τέτοιες περιπτώσεις η μείωση δεν πρέπει να ξεπερνά το 20% στα πρώτα βήματα και το 10% όταν οι διαταραχές πολλαπλασιάζονται. Στην περίπτωσή μας οι διαταραχές που προκύπτουν λόγω σφάλματος στις συνοριακές συνθήκες αυξάνονται και αυτές με αποτέλεσμα να γίνεται και σε αυτή την περιοχή ανακατανομή των κόμβων. Έτσι, προς τις τελευταίες χρονικές στιγμές της επίλυσης η μείωση των συντελεστών έφτανε το 5% για να διατηρηθεί το πλέγμα αρκετά πυκνό ώστε να λαμβάνουμε λύση αλλά και αρκετά αραιό για τον υπολογισμό του νέου πλέγματος.

Η ελάττωση της απόστασης των κόμβων  $\Delta x$  σε διάφορες στιγμές επίλυσης φαίνεται στο Σχήμα 4-38. Παρατηρούμε ότι κοντά στην ψηλότερη κορυφή το  $\Delta x$  μειώνεται στο μισό ενώ στις υπόλοιπες στο 75%. Σημειώνεται ότι με ομοιόμορφο πλέγμα με 900 στοιχεία η απόσταση πρέπει να είναι 0,2 για την ορθή επίλυση. Στη χρονική στιγμή  $t=10$  που εμφανίζεται μια ακόμη διαταραχή στο αριστερό άκρο υπάρχει τοπική πύκνωση. Η πύκνωση αυτή είναι αδιάφορη για την εύρεση της λύσης (αφού η σημαντική διαταραχή είναι στο κέντρο), παρόλα αυτά έλκει τους κόμβους οι οποίοι θα μπορούσαν να μετατοπισθούν προς την περιοχή ενδιαφέροντος.

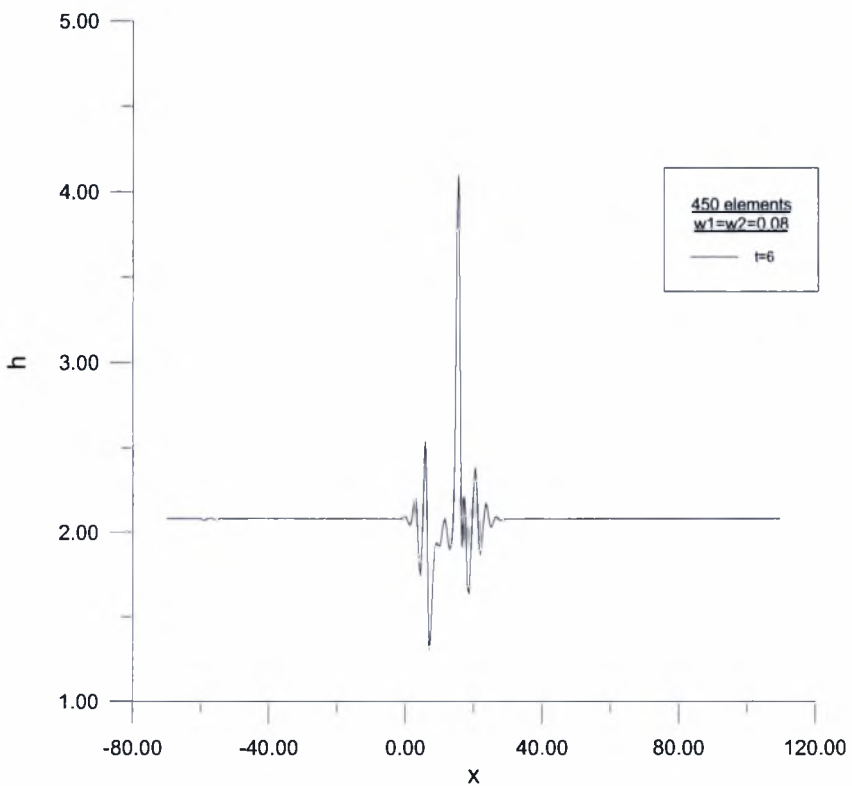


**Σχήμα 4-38: Ελάττωση του  $\Delta x$  ανάλογα με την πάροδο του χρόνου (450 στοιχεία)**

Εξετάζεται επίσης κατά πόσο η διαφοροποίηση των συντελεστών οδηγεί σε διαφορετικό αποτέλεσμα. Αυτό σημαίνει ότι ανεξάρτητα από την τιμή τους θα πρέπει το αποτέλεσμα να είναι το επιθυμητό γιατί δεν υπάρχει προκαθορισμένη τιμή την οποία λαμβάνουν όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.7. Για το λόγο αυτό εξετάζουμε τις λύσεις για τη χρονική στιγμή  $t=7$  με συντελεστές  $w_1=w_2=0,07$  και  $w_1=w_2=0,08$  (Σχήμα 4-39, Σχήμα 4-40).



**Σχήμα 4-39: Λύση τη χρονική στιγμή  $t=6$  για  $w_1=w_2=0,07$**



**Σχήμα 4-40: Λύση τη χρονική στιγμή  $t=6$  για  $w_1=w_2=0,08$**



Όπως φαίνεται δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση στις δύο λύσεις και αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι ανεξάρτητο από τις τιμές των συντελεστών. Οι διαφορετικές τιμές επηρεάζουν μόνο το βαθμό επίλυσης κάθε φορά, δηλαδή μέχρι ποια χρονική στιγμή θα φτάσει η λύση. Αν από εκείνη τη στιγμή και μετά υπάρχουν πολύ έντονες διακυμάνσεις θα απαιτηθεί τροποποίηση των συντελεστών όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Γενικά, οι τιμές των συντελεστών αποδίδονται αρχικά με δοκιμή και στη συνέχεια, όπου χρειάζεται, αυξομειώνονται βάσει εμπειρίας.

## 5. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

### 5.1. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Από τα αποτελέσματα που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 4 μπορούμε να οδηγηθούμε σε μερικά συμπεράσματα. Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι η μέθοδος δουλεύει σωστά μετά από εφαρμογές τόσο στο στην περίπτωση της μονοδιάστατης διάχυσης (πρόγραμμα “soliton”), όσο και στο στην περίπτωση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ (πρόγραμμα “rainfall”). Επίσης, παρατηρήσαμε ότι οι τιμές των συντελεστών επηρεάζουν τη θέση των κόμβων και αυτό γίνεται πιο έντονα σε περιοχές με έντονη κλίση και καμπυλότητα. Σε περιοχές που δεν υπάρχουν διαταραχές οι κόμβοι ισοκατανέμονται. Οι αρχικές τιμές των συντελεστών για τη μετατόπιση των σημείων ελέγχου δεν μπορούν υπολογιστούν εξαρχής γιατί εξαρτώνται από το είδος του προβλήματος. Αυτό γίνεται με δοκιμή και εκτιμάται από εμπειρία. Παρόλα αυτά, μπορούμε να πούμε ότι όταν απαιτείται ελάττωση της τιμής τους λόγω συσσώρευσης διαταραχών (και συνεπώς συσσώρευσης κόμβων) αυτή πρέπει να κυμαίνεται από 10%-20% και να φθάνει ακόμη και το 5%. Αυτό συμβαίνει για να εξασφαλίσουμε ικανοποιητική συσσώρευση σημείων αλλά και να μην απέχουν πολύ μεταξύ τους. Διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να λάβουμε λύσεις σε προβλήματα που είναι πολύ απαιτητικά σε υπολογιστικό χρόνο και μνήμη αφού το πλέγμα μειώνεται αρκετά ανάλογα με την περίπτωση. Στα προβλήματα που εξετάστηκαν καταφέραμε να μειώσουμε τον αριθμό των κόμβων στο μισό (από 900 σε 450) και να πάρουμε αποτελέσματα για μικρούς χρόνους (μέχρι  $t=7$ ) με ακόμη λιγότερους (250 κόμβοι) πριν το υπολογιστικό σφάλμα γίνει έντονο. Η μείωση των κόμβων συμβάλλει σημαντικά στη μείωση του υπολογιστικού χρόνου και τελικά εξαλείφονται τα υπολογιστικά σφάλματα και παίρνουμε ομαλές λύσεις.

### 5.2. Μελλοντικές εργασίες

Η ανάπτυξη αυτού του αλγόριθμου μπορεί να χαρακτηριστεί ως βοηθητικό εργαλείο για την επίλυση απαιτητικών υπολογιστικών προβλημάτων. Η εφαρμογή του έγινε σε συγκεκριμένα προβλήματα όπου φάνηκε η χρησιμότητά του. Ωστόσο, επειδή λειτουργεί σε μία διάσταση, θα μπορούσε να βελτιωθεί αρχικά αν κατασκευαστεί για επίλυση διδιάστατου ίσως και τριδιάστατου πλέγματος. Σε προβλήματα που χρησιμοποιούν τέτοια πλέγματα ο αριθμός των κόμβων είναι πολύ μεγάλος και η διαδικασία επίλυσης πολύ αργή. Επίσης, θα μπορούσε να

κατασκευαστεί έτσι ώστε να προσαρμόζεται σε κυκλικές και κατ' επέκταση κυκλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες για την κάλυψη αναγκών σε άλλου τύπου προβλήματα όπως φαινόμενα που περιέχουν φυσαλίδες κλπ.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Μέθοδος GMRES

Η ανάπτυξη επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης μεγάλων συστημάτων απασχολεί τους ερευνητές εδώ και πολλές δεκαετίες. Για την επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος της μορφής  $Ax=B$  απαιτείται μια καλή αρχική πρόβλεψη. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας κατάλληλη προσέγγιση για τον πίνακα  $A$  γίνεται προσπάθεια να βελτιωθεί η πρόβλεψη μειώνοντας το λάθος. Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας  $A$  μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα ενός προσεγγιστικού πίνακα  $K$  και ενός άλλου πίνακα  $\Lambda$  τότε σχηματικά η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται ως εξής: στο βήμα  $i+1$  βρίσκεται η νέα προσεγγιστική λύση  $x_{i+1}$  από το σύστημα  $Kx_{i+1} = Kx_i + b - \Lambda x_i - Kx_i \xrightarrow{r_i=b-Ax_i} Kx_{i+1} = Kx_i + r_i$ . Με τη διαδικασία αυτή, παίρνουμε ικανοποιητικούς ρυθμούς σύγκλισης, ειδικά για θετικά ορισμένους πίνακες  $K$  [16].

Οι επιστήμονες για πολλές δεκαετίες έκαναν προσπάθειες να αναπτύξουν καλύτερες και πιο γρήγορες επαναληπτικές μεθόδους. Μια από τις μεθόδους, η οποία χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, είναι η GMRES (Generalized Minimum Residual). Η μέθοδος αυτή, αναπτύχθηκε το 1986 από τους Y. Saad & M. Schultz για την επίλυση μεγάλων, μη συμμετρικών, αραιών συστημάτων [17].

Η βάση για την ανάπτυξη της μεθόδου τέθηκε στην δεκαετία του 50 από τους C. Lanczos και W. Arnoldi οι οποίοι είχαν την ιδέα της διατήρησης όλων των προσεγγιστικών λύσεων μέχρι ένα σημείο της επαναληπτικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, πρότειναν τον συνδυασμό των προσεγγίσεων ώστε να προκύψει μια καλύτερη λύση. Ο Lanczos παρατήρησε ότι η βασική επανάληψη οδηγεί σε προσεγγίσεις  $x_i$  οι οποίες βρίσκονται σε καλά κατασκευασμένους υποχώρους,  $K_i[A, r^{(0)}]$ , που ορίζονται από τα διανύσματα  $r^{(0)}, Ar^{(0)}, A^2r^{(0)}, \dots, A^{i-1}r^{(0)}$ , όπου  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  το υπόλοιπο της επίλυσης του συστήματος εξισώσεων. Ένας τέτοιος υποχώρος ονομάζεται Krylov υποχώρος τάξεως  $i$ . Στη συνέχεια ο Lanczos απέδειξε ότι για τον υποχώρο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα μια ορθοκανονική βάση γεγονός που απλοποίησε σημαντικά τους υπολογισμούς.

Στην μέθοδο GMRES κατασκευάζεται στον Krylov υποχώρο τάξεως  $k$  η προσέγγιση  $x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k(A, r^{(0)})$ . Ο υποχώρος  $K_k$  περιγράφεται με την βοήθεια μίας ορθοκανονικής βάσης  $V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$  με πρώτο στοιχείο το

$v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$ . Για τον υπολογισμό της ορθοκανονικής βάσης

$V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$  του Krylov υποχώρου

$K_k \equiv \text{span}\{v^{(1)}, Av^{(1)}, \dots, A^{k-1}v^{(1)}\} = K_k[A, r^{(0)}]$  χρησιμοποιείται η μέθοδος του

Arnoldi. Η τελευταία αντί των ιδιοσυναρτήσεων του  $F$  υπολογίζει αυτές του upper-Hessenberg πίνακα  $H_k = [h_{ij}]$  ( $1 \leq i, j \leq k$ ,  $h_{ij} = 0$   $j < i - 1$ ) για τον οποίο ισχύει ότι:

$$H_k = V_k^T A V_k$$

$$A V_k = V_k H_k + h_{k+1,k} [0, \dots, v^{(k+1)}] \rightarrow A V_k = V_{k+1} \tilde{H}_k, \tilde{H}_k = [h_{i,j}]_{1 \leq i \leq k+1, 1 \leq j \leq k}$$

Ο αλγόριθμος λειτουργεί ως εξής: Με  $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$  κατασκευάζεται μία αλληλουχία ορθοκανονικών διανυσμάτων έτσι ώστε το τελευταίο,  $v^{(k+1)}$ , να είναι ορθογώνιο στα διανύσματα που συνιστούν τον Krylov χώρο  $K_k$ . Η διαδικασία παραγωγής των  $v^{(k)}$  βασίζεται στην διαφοροποιημένη μέθοδο Gram-Schmidt [16]. Έτσι έχουμε ότι:

$$x^{(k)} = x^{(0)} + V_k y^{(k)} \rightarrow A x^{(k)} - b = A x^{(0)} - b + A V_k y^{(k)}$$

για κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα  $y^{(k)}$ . Αντικαθιστώντας τον ορισμό του  $H_k$  στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$r^{(k)} = r^{(0)} - V_{k+1} \tilde{H}_k y^{(k)} = V_{k+1} (\|r^{(0)}\| e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)}), e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T$$

Λόγω της ορθοκανονικότητας των  $v^{(k)}$  ισχύει ότι:

$$\|r^{(k)}\| \equiv \beta_k = \|\beta_0 e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)}\|, \|r^{(0)}\| \equiv \beta_0$$

και τα  $y^{(k)}$  επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η Ευκλείδεια νόρμα  $\|r^{(k)}\| = \|b - A x^{(k)}\|$ . Αυτό συνιστά ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων το οποίο, με δεδομένη την μορφή του  $H_k$  λύνεται χωρίς ιδιαίτερες υπολογιστικές απαιτήσεις. Επίσης, για την μείωση των απαιτήσεων σε μνήμη και του υπολογιστικού φόρτου κατά επανάληψη, λόγω υπέρμετρης αύξησης του μεγέθους του  $H_k$ , υπάρχει η δυνατότητα επανεκκίνησης του αλγορίθμου κάθε  $m$  βήματα, όπου  $m$  είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος. Ο αλγόριθμος της GMRES περιγράφεται συνοπτικά ως εξής [17]:

Επιλέγεται μια αρχική πρόβλεψη  $x(0)$  και υπολογίζονται τα:

$$r^{(0)} = f - A x^{(0)} \text{ και } v^{(1)} = \frac{r^{(0)}}{\|r^{(0)}\|}$$

Υπολογισμός των  $v(k)$  ώστε να ικανοποιείται η ορθοκανονικότητα.  
Επαναλαμβάνεται για  $j=1,2,\dots,m$

$$h_{i,j} = (Av^{(j)}, v^{(i)}), \text{ για } i=1,2,\dots,j$$

$$\hat{v}^{(j+1)} = Av^{(j)} - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v^{(i)}$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{v}^{(j+1)}\|, v^{(j+1)} = \frac{\hat{v}^{(j+1)}}{h_{j+1,j}}$$

Υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση  $x^{(m)} = x^{(0)} + V_m y^{(m)}$  όπου το  $y^{(m)}$  ελαχιστοποιεί το μέτρο  $\|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\|, y \in \mathbb{R}^m$

Η διαδικασία ξεκινάει πάλι και υπολογίζεται το  $r^{(m)} = f - Ax^{(m)}$

Σε περίπτωση που ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης,  $\beta_k < \tau\beta_0, \tau \ll 1$ , σταματάμε.

Αν δεν ικανοποιείται τίθεται  $x^{(0)} = x^{(m)}$  και  $v^{(1)} = \frac{r^{(m)}}{\|r^{(m)}\|}$  και επιστρέφουμε στο

δεύτερο βήμα.

### **Εφαρμογή GMRES**

Η GMRES είναι μια επαναληπτική μέθοδος και επομένως συμπεριφέρεται καλύτερα όταν ο πίνακας του συστήματος είναι καλά ορισμένος, δηλαδή εάν δεν έχει μηδενικές τιμές στην κύρια διαγώνιο. Στο πρόβλημα ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Για το λόγο αυτό, πριν την εφαρμογή της GMRES ο πίνακας θα πρέπει να τροποποιηθεί με κάποιο κατάλληλο preconditioner.

Γενικά, το preconditioning είναι οποιαδήποτε διαδικασία με την οποία τροποποιείται ένα αρχικό γραμμικό σύστημα ώστε να είναι πιο εύκολο να επιλυθεί επαναληπτικά. Αυτό συνήθως ισοδυναμεί με την απαίτηση οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου συστήματος να είναι κατανεμημένες σε ένα όσο το δυνατόν πιο στενό διάστημα γύρω από την μονάδα. Για παράδειγμα, η τροποποίηση ενός συστήματος ώστε όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου να είναι μονάδα αποτελεί μια εξεζητημένη περίπτωση preconditioning όπου εισάγεται ο βοηθητικός πίνακας  $M$ , preconditioner, ο οποίος ταυτίζεται με τον  $A$ . Τις περισσότερες φορές κατά την εφαρμογή του preconditioning σε ένα σύστημα της μορφής  $Ax=b$  εισάγεται ένας απλοποιημένος πίνακας  $M$ , ο οποίος διατηρεί όσο πιο πολλά από τα χαρακτηριστικά

του A είναι δυνατόν, και τελικά το σύστημα παίρνει μία από τις δύο παρακάτω μορφές:

$$[M^{-1}A]x = M^{-1}b, \quad [AM^{-1}][Mx] = b$$

που είναι γνωστές με το όνομα αριστερό ή δεξί preconditioning. Συνήθως προτιμάται το δεξί preconditioning διότι δεν εξαρτάται η προς ελαχιστοποίηση νόρμα από τον πίνακα M. Στην περίπτωση αυτή, η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται στη συνέχεια λειτουργεί με τους πίνακες  $M^{-1}$  και A [16]. Υπολογίζεται η ορθοκανονική βάση,

$$V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)} \dots v^{(k)}\}, \quad \text{του Krylov υποχώρου}$$

$$K_k = \text{span} \left\{ r^{(0)}, AM^{-1}r^{(0)}, (AM^{-1})^2 r^{(0)}, \dots (AM^{-1})^{k-1} r^{(0)} \right\} \text{ και τελικά υπολογίζεται}$$

η k προσέγγιση με την βοήθεια του τύπου,

$$x^{(k)} = x^{(0)} + M^{-1}V_k y^{(k)}$$

Έτσι δεν χρειάζεται η αποθήκευση του πίνακα  $AM^{-1}$  παρά μόνο η χρήση του αντιστρόφου  $M^{-1}$ .

Ένας από τους πιο απλούς και πιο συνηθισμένους τρόπους να οριστεί ένας preconditioner είναι η εφαρμογή Incomplete LU παραγοντοποίησης στον αρχικό πίνακα A. Έτσι ο  $M^{-1}$  υπολογίζεται άμεσα με την βοήθεια των L και U. Αν θεωρήσουμε έναν αραιό πίνακα A με στοιχεία  $a_{ij}$  με  $i, j = 1, \dots, n$  τότε κατά την εφαρμογή του ILU υπολογίζεται ο κάτω τριγωνικός πίνακας L και ο άνω τριγωνικός πίνακας U ώστε το υπόλοιπο  $R=LU-A$  να ικανοποιεί κάποιο κριτήριο όπως π.χ. το να μην έχει μηδενικά στοιχεία σε κάποιες συγκεκριμένες θέσεις. Ο αλγόριθμος του ILU βασίζεται στην χρήση της απαλοιφής Gauss ώστε να εξαλείφουν κάποια στοιχεία σε προκαθορισμένες θέσεις εκτός της κυρίας διαγωνίου και μπορεί να περιγραφεί με τα παρακάτω βήματα [18]:

1. For  $i=2, \dots, n$  Do:
2. For  $k=1, \dots, i-1$  and if  $(i,k) \notin P$  Do:
3. 
$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$
4. For  $j=k+1, \dots, n$  and for  $(i,j) \notin P$  Do:
5. 
$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$$
6. End do
7. End do
8. End do



όπου το  $P$  είναι μια καθορισμένη μηδενική μορφή που ορίζεται ως εξής:

$$P \subset \{(i, j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι σε κάθε βήμα  $i$  του αλγόριθμου κατασκευάζεται η αντίστοιχη γραμμή των  $L$  και  $U$  και η  $i$  γραμμή του  $A$  μπορεί να ξαναγραφεί με βάση τις γραμμές αυτές. Οι προηγούμενες γραμμές των  $L$  και  $U$   $1, \dots, i-1$  χρησιμοποιούνται αλλά δεν τροποποιούνται. Η διαδικασία αυτή δεν γίνεται πλήρως και η έκτασή της καθορίζεται από τη μορφή του υποσυνόλου  $P$ .

Η χρήση του Incomplete LU factorization και της GMRES στο συγκεκριμένο πρόβλημα στηρίχτηκε σε υπορουτίνες που διατίθενται στην προσωπική ιστοσελίδα του Youcef Saad.

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 2-1: Σχηματική απεικόνιση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.....	9
Σχήμα 3-1: Συναρτήσεις βάσης cubic splines σε μία διάσταση.....	17
Σχήμα 3-2: Συναρτήσεις βάσης cubic splines δύο διαστάσεων.....	18
Σχήμα 3-3: Αντιστοίχιση κόμβων από το αρχικό στο νέο πλέγμα.....	26
Σχήμα 4-1: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 25 στοιχεία.....	30
Σχήμα 4-2: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 25 στοιχεία.....	30
Σχήμα 4-3: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 50 στοιχεία.....	31
Σχήμα 4-4: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 50 στοιχεία.....	31
Σχήμα 4-5: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 100 στοιχεία.....	32
Σχήμα 4-6: Εξέλιξη διαταραχής στις χρονικές στιγμές 1, 4, 9, 15, 20 και 30 για 100 στοιχεία.....	32
Σχήμα 4-7: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την αύξηση των $w_1$ και $w_2$ για δεδομένη χρονική στιγμή (25 στοιχεία).....	33
Σχήμα 4-8: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την πάροδο του χρόνου για σταθερή τιμή των $w_1$ και $w_2$ (25 στοιχεία).....	33
Σχήμα 4-9: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την αύξηση των $w_1$ και $w_2$ για δεδομένη χρονική στιγμή (50 στοιχεία).....	34
Σχήμα 4-10: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την πάροδο του χρόνου για σταθερή τιμή των $w_1$ και $w_2$ (50 στοιχεία).....	34
Σχήμα 4-11: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την αύξηση των $w_1$ και $w_2$ για δεδομένη χρονική στιγμή (100 στοιχεία).....	35
Σχήμα 4-12: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την πάροδο του χρόνου για σταθερή τιμή των $w_1$ και $w_2$ (100 στοιχεία).....	35
Σχήμα 4-13: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=3$ (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	37
Σχήμα 4-14: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=4$ (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	38
Σχήμα 4-15: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=5$ (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	38
Σχήμα 4-16: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=3$ (250 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	39
Σχήμα 4-17: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=4$ (250 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	39
Σχήμα 4-18: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για γραμμική στιγμιαία διαταραχή τη χρονική στιγμή $t=5$ (250 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	40
Σχήμα 4-19: Ανάλυση FFT στα δεδομένα από το Σχήμα 4-18 για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.....	40
Σχήμα 4-20: Χρονική εξέλιξη της πίεσης για γραμμική στιγμιαία διαταραχή.....	41
Σχήμα 4-21: Ανάλυση FFT στα δεδομένα από το Σχήμα 4-18 για τον υπολογισμό της περιόδου.....	41
Σχήμα 4-22: Στιγμιότυπο για ομοιόμορφο πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=3$ (450 στοιχεία).....	43

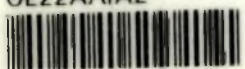
Σχήμα 4-23: Στιγμιότυπο για ομοιόμορφο πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=4$ (450 στοιχεία).....	43
Σχήμα 4-24: Στιγμιότυπο για ομοιόμορφο πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=4$ (900 στοιχεία).....	44
Σχήμα 4-25: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=19$ (900 στοιχεία).....	44
Σχήμα 4-26: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=7$ (250 στοιχεία).....	45
Σχήμα 4-27: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=3$ (450 στοιχεία).....	46
Σχήμα 4-28: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=4$ (450 στοιχεία).....	46
Σχήμα 4-29: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=11$ (450 στοιχεία).....	47
Σχήμα 4-30: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=19$ (450 στοιχεία).....	47
Σχήμα 4-31: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή $t=17,5$ στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	48
Σχήμα 4-32: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή $t=17,6$ στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	48
Σχήμα 4-33: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή $t=17,7$ στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	49
Σχήμα 4-34: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή $t=17,8$ στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	49
Σχήμα 4-35: Εντοπισμός ανακυκλοφορίας τη χρονική στιγμή $t=17,9$ στη μέγιστη διαταραχή (450 στοιχεία – μεταβλητό πλέγμα).....	50
Σχήμα 4-36: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=14,9$ (800 στοιχεία).....	51
Σχήμα 4-37: Στιγμιότυπο για μεταβλητό πλέγμα τη χρονική στιγμή $t=14,9$ (450 στοιχεία).....	51
Σχήμα 4-38: Ελάττωση του $\Delta x$ ανάλογα με την πάροδο του χρόνου (450 στοιχεία) .	53
Σχήμα 4-39: Λύση τη χρονική στιγμή $t=6$ για $w_1=w_2=0,07$ .....	54
Σχήμα 4-40: Λύση τη χρονική στιγμή $t=6$ για $w_1=w_2=0,08$ .....	54

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Smith, F.T., Brighton, P. W. M., Jackson, P. S. & Hunt, J. C. R. (1981), 'On boundary-layer flow past two-dimensional obstacles', *J. Fluid Mech.*, 113, 123-152.
2. Campell, B.A. & Bezos, M. (1989), 'Steady state and transitional aerodynamic characteristics of a wing in simulated heavy rain', NASA, TP-2932.
3. Smyrnaioi, D. N. Pelekasis N. A. & Tsamopoulos, I. A. (2002). 'Two phase boundary layer flow in laminar film condensation over a horizontal tube.' *Phys. Fluids* 14 (6): 1945-1957.
4. Huang, L. (2001), 'Viscous flutter of a finite elastic membrane in Poiseuille flow, *Journal of Fluids and Structures*, 15, 1061-1088.
5. Grotberg, J. B. (1994), 'Pulmonary flow and transport phenomena', *Annual Review of Fluid Mechanics*, 26, 529-571.
6. Stewartson, K. (1974), 'Multi-structured boundary layers on flat plates and related bodies', *Advances in Applied Mechanics*, 14, 145-239.
7. Pelekasis, N. A. & Tsamopoulos, J. A. (2001), 'Linear stability analysis of a gas boundary layer flowing past a thin liquid film over a flat plate', *J. Fluid Mech.*, 436, 321-352.
8. Pelekasis, N. A, Tsamopoulos, . J. A. & Manolis, G. D. (1992), 'A hybrid finite- boundary element method for inviscid flows with free surface', *J. Comp. Phys.*101(2), 231-251.
9. Smyrnaioi D. N., Pelekasis N. A. & Tsamopoulos I. A. (2000), 'Boundary layer flow of air past solid surfaces in the presence of rainfall' *J. Fluid Mech*, 425, 79-110.
10. Smyrnaioi, D. N. (2002), 'Interfacial phenomena and hydrodynamic instabilities in boundary layer flows', PhD, University of Patras.
11. Timoshin, S.N. (1997), 'Instabilities in a high-Reynolds number boundary layer on a film-coated surface', *J. Fluid Mech.*, 353, 163-195.
12. Prenter, P. M. (1989), 'Splines and Variational Methods', John Wiley & Sons.
13. Thompson J.F., Warsi, Z.U.A., Mastin, C.W. (1995), 'Numerical Grid Generation. Foundations and Applications', North Holland.
14. Reddy J.N. (1993), 'An Introduction to the Finite Element Method', McGraw-Hill.

15. Pelekasis, N. A. (1991), 'A study on Drop and Bubble Dynamics via a Hybrid Boundary Element - Finite Element Methodology'. Ph.D Thesis, Chemical Engineering Department of SUNY Buffalo.
16. Elman, H., Silvester, D. & Wathen, A. (2005), 'Finite Elements and Fast Iterative Solvers', Oxford Science Publications.
17. Saad, Y. & Schultz, M.H (1986), 'GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems', SIAM J. Sci. Stat. Comput., 7, 856-869.
18. Saad, Y. (1996), 'Iterative Methods for Sparse Linear Systems', PWS
19. Βλαχομήτρον Μαρία (2006), 'Ανάπτυξη κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για την ροή συνοριακού στρώματος πάνω από στερεές επιφάνειες ή υγρό φιλμ', Μεταπτυχιακή εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091281

