



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ
Πεδίο Άρεως, 38334 Βόλος, Τηλ.: +30 421 074090 - 94, Fax: +30 421 074090

Διδακτορική Διατριβή

**«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
ΑΕΡΙΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΛΕΠΤΟ ΥΜΕΝΑ ΥΓΡΟΥ ΠΛΑΝΩ ΣΕ
ΠΤΕΡΥΓΑ»**

ΒΛΑΧΟΜΗΤΡΟΥ ΜΑΡΙΑ

Βόλος, 2008



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 6554/1
Ημερ. Εισ.: 17-09-2008
Δωρεά: Συγγραφέα
Ταξιθετικός Κωδικός: Δ
620.106
ΒΛΑ

**«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ
ΑΕΡΙΟΥ ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΛΕΠΤΟ ΥΜΕΝΑ ΥΓΡΟΥ
ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΤΕΡΥΓΑ»**

ΒΛΑΧΟΜΗΤΡΟΥ ΜΑΡΙΑ

**Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών**

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Βόλος

Το παρόν χρηματοδοτήθηκε από την Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας μέσω του ερευνητικού προγράμματος ΠΕΝΕΔ 2001-558: «Μελέτη της βροχόπτωσης στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά πτέρυγας αεροσκάφους».

**«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΑΕΡΙΟΥ
ΟΡΙΑΚΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΛΕΠΤΟ ΥΜΕΝΑ ΥΓΡΟΥ ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΤΕΡΥΓΑ»**

©Βλαχομήτρου Μαρία, 2008

Εργαστήριο Ρευστομηχανικής και Στροβιλομηχανών
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Βόλος, Ελλάδα

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Επταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Βλάχος Νικόλαος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Μποντόζογλου Βασίλειος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τέταρτος Εξεταστής	Δρ. Τσαμόπουλος Ιωάννης Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
Πέμπτος Εξεταστής	Δρ. Ανδρίτσος Νικόλαος Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Έκτος Εξεταστής	Δρ. Σταπουντζής Ερρίκος Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Έβδομος Εξεταστής	Δρ. Πανίδης Θρασύβουλος Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα από όλα, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα της διατριβής μου, Αν. Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση, για την ανεκτίμητη υποστήριξη και συνεχή καθοδήγηση του όλα αυτά τα χρόνια. Η ολοκλήρωση της παρούσης διατριβής θα ήταν αμφίβολη χωρίς τις δικές του ιδέες και τη βαθιά του αφοσίωση στην επιστήμη.

Θα ήθελα να εκφράσω την ιδιαίτερη ευγνωμοσύνη μου στους Καθηγητές της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής κ.κ. Νικόλαο Βλάχο και Βασίλη Μποντόζογλου για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις τους από την αρχή της ενασχόλησης μου με το αντικείμενο της συγκεκριμένης διατριβής. Επίσης, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς επιτροπής, Καθηγητές κ.κ. Νικόλαο Ανδρίτσο, Ερρίκο Σταμπούντζη, Ιωάννη Τσαμόπουλο και Θρασύμβουλο Πανίδα για την προσεκτική ανάγνωση της διατριβής και τα πολύτιμα σχόλια τους.

Θα ήταν μεγάλη παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον εκλιπόντα Καθηγητή κ. Δ. Παπαηλίου ο οποίος εξασφάλισε την χρηματοδότηση της συγκεκριμένης διατριβής μέσω του προγράμματος ΠΕΝΕΔ 2001.

Οφείλω, επίσης, να ευχαριστήσω τον δρ. Τσιγκλίφη Κωνσταντίνο για την άψογη συνεργασία όλα τα χρόνια που υπήρξε υποψήφιος διδάκτωρ στο Εργαστήριο Υπολογιστικής Ρευστομηχανικής, για την βοήθεια του σε θέματα προγραμματισμού και την παροχή των γνώσεων του πάνω στο λειτουργικό σύστημα του LINUX.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύζυγο μου Πασχάλη Χλόπτσιο για την σημαντική υποστήριξη που μου προσέφερε καθώς και για την κατανόηση και την υπομονή που έδειξε όλο αυτό το διάστημα.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου Γεώργιο και Ευαγγελία Βλαχομήτρου και τον αδελφό μου Αποστόλη Βλαχομήτρο για την ηθική υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διατριβή εξετάζεται η ευστάθεια στρωτού συνοριακού στρώματος αέρα που ρέει με υψηλό αριθμό Re πάνω από λεπτό υμένα υγρού. Η περίπτωση της ροής πάνω από λεπτό υμένα συναντάται σε περυσία αεροσκαφών κάτω από συνθήκες βροχόπτωσης ή κατά την εναπόθεση de/anti-icing υγρών στην επιφάνεια τους, καθώς και σε περιπτώσεις όπου λαμβάνει χώρα συμπύκνωση ατμών π.χ. εναλλάκτες θερμότητας. Για την προσομοίωση των παραπάνω ροών χρησιμοποιούνται τα μοντέλα που προτείνει η θεωρία τριπλής στιβάδας. Η αριθμητική επίλυση γίνεται με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων με διδιάστατες συναρτήσεις βάσης κυβικά splines.

Κατά την προσομοίωση της αλληλεπίδρασης αέρα με λεπτό υμένα υγρού αποδεικνύεται ότι για πολύ ιξώδη υγρά, όπως είναι πολλά de/anti-icing ρευστά, η αδράνεια του υγρού δεν επηρεάζει την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Αντίθετα, για λιγότερα ιξώδη υγρά, όπως είναι το νερό, οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού έχουν καταλυτική επίδραση στη συμπεριφορά της ροής. Εκτός από το λόγο ιξωδών διαπιστώνεται ότι το πάχος του υγρού υμένα και η διάτμηση του αέρα καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το αν οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού είναι σημαντικές. Για την υπό εξέταση ροή αρχικά ανακτώνται τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας καθώς και κάποια πειραματικά ευρήματα.

Στη συνέχεια, και για την περίπτωση των πολύ ιξωδών υγρών, εξετάζεται η ασθενώς μη γραμμική περιοχή για την οποία εξάγεται η μη γραμμική μιγαδική εξίσωση Schrödinger (i.e. nonlinear-complex Ginzburg-Landau equation). Με βάση την αναλυτική προσέγγιση κοντά στην κρίσιμη περιοχή με βάση των αριθμό Fr , $\omega_i \approx 0$, αποδεικνύεται ότι στην υπερκρίσιμη περιοχή δημιουργούνται κορυφές που αυξάνονται συνεχώς δίνοντας ιδιαίρον σημείο σε πεπερασμένο χρόνο. Αντίθετα, στην υποκρίσιμη περιοχή υπάρχουν οδεύοντα κύματα αλλά αυτά συναντώνται για αφύσικα μεγάλα πλάτη αρχικών διαταραχών. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το ότι τα de/anti icing υγρά χαρακτηρίζονται από αριθμούς Fr μακριά από την κρίσιμη περιοχή μειώνει την σημασία αυτών των κυμάτων. Η ασθενώς μη γραμμική ανάλυση των ασταθών κυματοπακέτων όταν ο ρυθμός αύξησης του πιο ασταθούς κύματος είναι σημαντικός, $\omega_i = O(1)$, είναι δυνατή στα άκρα του κυματοπακέτου όπου υπάρχει οριακή αστάθεια. Για την περίπτωση αυτή προβλέπεται η δυνατότητα δημιουργίας μετωπικών κυμάτων και συνεπώς μονοχρωματικών οδεύοντων κυμάτων τα οποία μάλιστα είναι ευσταθή σε πλευρικές αστάθειες. Τα παραπάνω ευρήματα της ανάλυσης ευστάθειας επαληθεύονται από τις δυναμικές προσομοιώσεις που διεξήχθησαν.

Στη μη-γραμμική περιοχή, δηλαδή για μεγάλα πλάτη διαταραχών ή για μεγάλα χρονικά διαστήματα από την επιβολή της διαταραχής, καταγράφονται δυο διαφορετικές

ενδιαφέρουσες συμπεριφορές. Για τα πολύ ιξώδη υγρά το κυματοπακέτο που αναπτύσσεται αποκτά ένα μέγιστο ύψος, περίπου το διπλάσιο του αρχικού, και σταματάει να αυξάνεται πέρα από αυτό σχηματίζοντας κυματομορφές τύπου solitons. Πίσω από την αρχική κορυφή υπάρχει η τάση να σχηματιστούν και άλλες κορυφές που και αυτές θα αποκτήσουν το συγκεκριμένο ύψος κορεσμού. Μπροστά από τις κορυφές παρατηρείται περιοδική εμφάνιση ήπιας ανακυκλοφορίας. Το φαινόμενο αυτό αποδίδεται σε συντονισμό μεταξύ των κυμάτων που αποτελούν το ασταθές κυματοπακέτο και κυμάτων μεγάλου μήκους που δημιουργούνται λόγω της μη γραμμικής εξέλιξης των ασταθών κυμάτων. Το φαινόμενο αυτό έχει παρατηρηθεί σε κύματα βαρύτητας σε υγρό μικρού βάθους, όταν η φασική ταχύτητα των κυμάτων μεγάλου μήκους συμπέσει με την ταχύτητα ομάδας κάποιου από τα κύματα μικρού μήκους, όταν τα τελευταία είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Αυτό συμβαίνει και στο παρόν πρόβλημα στα άκρα του ασταθούς κυματοπακέτου. Η συνεχής μεταφορά ενέργειας στα κύματα μεγάλου μήκους σε συνδυασμό με την αργή χωροχρονικά διαμόρφωσή τους οδηγεί στον σχηματισμό των κυματομορφών solitons που παρατηρούνται αριθμητικά.

Αντίθετα, για λιγότερο ιξώδη ρευστά το κυματοπακέτο σχηματίζει μια κορυφή με συνεχώς αυξανόμενο ύψος, ενώ πίσω από την κορυφή δημιουργείται μια κοιλότητα με αρκετά μικρό πάχος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο σχηματισμός έντονης περιοχής ανακυκλοφορίας μπροστά από την κορυφή μέγιστου ύψους, καθώς και οι απότομες και μεγάλες μεταβολές που παρατηρούνται στην πίεση του συνοριακού στρώματος και τη διάτμηση που δέχεται η στερεή επιφάνεια. Η εμφάνιση της συνεχώς αυξανόμενης κορυφής σε συνδυασμό με την δημιουργία ισχυρών εστιών ανακυκλοφορίας, ενδεχομένως εξηγεί την μετρούμενη μείωση της αποδοτικότητας πτερύγων σε συνθήκες προσομοιούμενης βροχόπτωσης η οποία έχει αποδοθεί σε ελάττωση του φαινομένου σχήματος της πτέρυγας. Με παραμετρική ανάλυση μέσω των δυναμικών προσομοιώσεων καταγράφεται ο σταθεροποιητικός ρόλος της επιφανειακής τάσης στην μη γραμμική περιοχή και η δυνατότητα χρήσης τασιενεργών ουσιών για την αύξηση της επιφανειακής τάσης του υγρού και κατά συνέπεια την σταθεροποίηση του συνοριακού στρώματος.

Τέλος, επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι δεν υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ των Tollmien-Schlichting (TS) και των διεπιφανειακών κυμάτων αφού για ροή ρευστών με διαφορετικά ιξώδη αναπτύσσονται σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Παράλληλα, η ανάπτυξη διεπιφανειακών κυματώσεων μπορεί να ευθύνεται για την πρόωρη μετάβαση σε τύρβη μέσω κυμάτων μικρότερου μήκους κύματος από το προβλεπόμενο με βάση τα κύματα TS, η οποία παρατηρείται κατά τη ροή συνοριακού στρώματος πάνω από ιξώδη ρευστά.

ABSTRACT

The stability of a laminar boundary layer of air that flows in high Re above a thin liquid film is examined. Such flow arrangements arise above wing sections under rainfall conditions or when de/anti-icing fluids are sprayed on their surface, in the context of steam condensation etc. The simulation of the flow is based on the scales relevant to triple deck theory. In this context, a numerical method based on the finite element methodology has been developed in order to describe the flow of a gas boundary flow above a thin liquid film. The overall two-layer problem is solved using the 2D B-cubic splines as basis functions with significant savings in CPU time and accuracy over the traditional biquadratic Lagrangian basis functions.

It is found that for very viscous liquids, i.e. many de/anti-icing fluids, film inertia doesn't affect the evolution of the waves in the gas-liquid interface. On the contrary for less viscous liquids inertia has a significant effect on the flow. Besides the ratio of viscosities and densities between the two phases, the thickness of the film as well as the shear of the boundary layer determine whether inertia forces of the liquid are important or not.

The results of linear stability analysis are first recovered for the flow under consideration. In a next stage, weakly non-linear stability analysis is performed for very viscous films and the nonlinear-complex Schrödinger equation is derived. Based on the analytical approach, using the Froude number as the operating parameter, it is shown that in the supercritical regime near the neutral stability curve, $\omega_{i,max} \approx 0$ and positive, wave crests are developed with constantly increasing height eventually leading to a finite time singularity. On the contrary, in the subcritical regime traveling waves appear, but only for unnaturally large amplitudes of the initial disturbance. Nevertheless, the Froude numbers that correspond to de/anti icing liquids lead to growth rates far away from the neutral area, which reduces the significance of the waves observed near the neutral stability curve. Weakly non-linear analysis of the unstable wavepacket when the growth rate of the most unstable wave is substantial, $\omega_{i,max} = O(1)$, is possible only near the edges of the wavepacket. It is predicted that fronts that are stable to side band disturbances can be formed. The results of weakly non-linear stability analysis are verified with numerical simulations.

In the fully non-linear regime two different yet interesting behaviors are observed. For very viscous liquids the wave packet develops spikes with amplitudes approximately twice the initial height of the interface and eventually solitary waves are formed. In front of the spikes a periodic appearance of mild reversal flow is observed. The spikes appear through the mechanism of resonance between short waves of the unstable wavepacket and long waves, which develop due to the self-interaction of short waves over a long time. The phenomenon of

resonance has been observed in the evolution of capillary Stokes waves and it occurs when the phase velocity of the long waves coincides with the group velocity of a short wave of the unstable wave packet. A similar behavior is noticed in the flow under consideration for very viscous films. The constant transport of energy to the long waves combined with their slow modulation in time eventually lead to the formation of solitons, which are also captured by the numerical simulations in this regime.

On the other hand, for less viscous liquids, e.g water, the unstable wave packet forms only one crest that continuously increases in height without any evidence of saturation. Upstream of the crest a cavity of very small film thickness is exhibited by the simulations. The appearance of a large area of intense flow reversal downstream of the crest is also of interest. Another important observation is that large and sharp changes develop in the pressure of the boundary layer as well as in the shear that is exerted on the solid surface. This behavior may be associated with the loss of airfoil performance that was measured under simulated rainfall conditions and has been ascribed to the loss of effective camber. A parametric analysis via the numerical simulations proves the stabilizing effect of the surface tension in the non-linear regime. Consequently use of surfactants, in order to increase the liquid's surface tension, may be employed in order to decelerate growth of large amplitude wave crests and postpone any severe rearrangement of the boundary layer structure due to film growth. In fact, any method of active boundary layer control that detunes the short to long wave resonance may be useful in that respect.

It is also verified that there is no resonant interaction between Tollmien-Schlichting (TS) and interfacial waves, since they develop in different time scales when the two fluids have very different viscosities and densities. Moreover, the formation of interfacial instabilities may be responsible for the premature transition to turbulence, through smaller wavelengths compared with the most unstable TS wave, which has been observed in experiments of boundary layer flows above viscous films.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Λατινικοί χαρακτήρες

A	= αδιάστατο πάχος μετατόπισης
A_i	= Airy συνάρτηση
b_1	= συντελεστής βάρους κλίσης διεπιφάνειας για κατασκευή άνισου πλέγματος
b_2	= συντελεστής βάρους καμπυλότητας διεπιφάνειας για κατασκευή άνισου πλέγματος
b_i	= μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης κυβικών splines
B_{ij}	= δισδιάστατες συναρτήσεις βάσης κυβικών splines
c	= φασική ταχύτητα οδεύοντος κύματος
C_1	= διαμόρφωση λύσης ροϊκής συνάρτησης από ασθενώς μη γραμμική ανάλυση
C_s	= ταχύτητα κυματοπακέτου
C_p	= φασική ταχύτητα κυματοπακέτου
d	= πλάτος διαταραχής
d_1	= διαμόρφωση λύσης διεπιφάνειας από ασθενώς μη γραμμική ανάλυση
dC	= άνυσμα αγνώστων συντελεστών στην αέρια φάση
E_1	= διαμόρφωση λύσης πάχους μετατόπισης από ασθενώς μη γραμμική ανάλυση
$f(n)$	= αδιάστατη συνάρτηση λύσης Blasius
F_D	= συνολική οπισθέλκουσα
$F_{D,f}$	= οπισθέλκουσα τριβής
$F_{D,p}$	= οπισθέλκουσα πίεσης
Fr	= αριθμός Froude υγρού, $Fr = u_f^2 / gH_f$
\overline{Fr}	= μετασχηματισμένος αριθμός Froude υγρού, $\overline{Fr} = Fr(\mu_w / \mu)^2$
G_1	= διαμόρφωση λύσης πίεσης από ασθενώς μη γραμμική ανάλυση
h_1	= μήκος πεπερασμένου στοιχείου
h	= αδιάστατο πάχος υγρού
H_D	= διαταραχή στην διεπιφάνεια
H_f	= χαρακτηριστικό πάχος υγρού
H_0	= πάχος βασικής ροής για τον υγρό υμένα

\underline{J}_1	= πίνακας από διακριτοποίηση εξισώσεων υγρού
\underline{J}_2	= ιακωβιανή συστήματος εξισώσεων στην αέρια φάση
k	= κυματαριθμός διαταραχής
k_{max}	= πραγματικός κυματαριθμός για μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης
k_r	= πραγματικό μέρος κυματαριθμού
k_i	= φανταστικό μέρος κυματαριθμού
k_o	= κυματαριθμός απόλυτης αστάθειας
K_k	= Kγυίον υποχώρος τάξεως k
L	= μήκος πλάκας με διαστάσεις
M	= αδιάστατη παράμετρος, $M = (\mu / \mu_w)^2 (\rho_w / \rho)$
M_p	= πίνακας για preconditioning του συστήματος $Ax=b$
M_x	= αριθμός πεπερασμένων στοιχείων στη διεύθυνση της ροής
M_y	= αριθμός πεπερασμένων στοιχείων στη εγκάρσια διεύθυνση για το αέριο
N_y	= αριθμός πεπερασμένων στοιχείων στη εγκάρσια διεύθυνση για το υγρό
n	= αδιάστατη μεταβλητή λύσης Blasius, $n = y' / \delta$
p	= αδιάστατη πίεση στο υγρό
p'	= διαταραχή στην πίεση της βασικής ροής του συνοριακού στρώματος
P	= αδιάστατη πίεση στο ιξώδες υπόστρώμα της τριπλής στιβάδας
P_A	= πίεση με διαστάσεις στο συνοριακό στρώμα
P_o	= πίεση βασικής ροής στο συνοριακό στρώμα
P'	= αδιάστατη πίεση στο μεσαίο στρώμα της τριπλής στιβάδας
P''	= αδιάστατη πίεση στο ανώτερο στρώμα της τριπλής στιβάδας
Q	= ογκομετρική παροχή υγρού
\dot{r}	= ρυθμός βροχόπτωσης
\underline{R}_2	= άνυσμα των υπολοίπων στην αέρια φάση
Re	= αριθμός Reynolds αερίου, $Re = U_\infty L / \nu$
Re_x	= τοπικός αριθμός Reynolds, $Re_x = U_\infty x_d / \nu$
S_1, S_2, S_3	= συντελεστές εξίσωσης Schrödinger
t	= αδιάστατος χρόνος με βάση χρονική κλίμακα διεπιφανειακών
t'	= χρόνος με διαστάσεις

T_{IN}	= χρονική κλίμακα για διεπιφανειακά κύματα
T_{TS}	= χρονική κλίμακα για κύματα Tollmien-Schlichting
u	= αδιάστατη ταχύτητα υγρού στην οριζόντια διεύθυνση
u'	= διαταραχή στην οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας
u_f	= χαρακτηριστική ταχύτητα υγρού
u_0	= ταχύτητα βασικής ροής για τον υγρό υμένα
U	= αδιάστατη οριζόντια ταχύτητα αερίου στο ιξώδες υπόστρωμα
U_0	= ταχύτητα βασικής ροής στο συνοριακό στρώμα
U_A	= οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας με διαστάσεις στο συνοριακό στρώμα
U^*	= μετασχηματισμένη ταχύτητα με βάση την ταχύτητα c , $U^* = U - c$
U_∞	= ταχύτητα αερίου ρεύματος με διαστάσεις
v	= αδιάστατη ταχύτητα υγρού στην εγκάρσια διεύθυνση
v'	= διαταραχή στην κάθετη συνιστώσα ταχύτητας
V	= αδιάστατη κάθετη ταχύτητα αερίου στο ιξώδες υπόστρωμα
\bar{V}	= μετασχηματισμένη κάθετη ταχύτητα αερίου στο ιξώδες υπόστρωμα
V_A	= κάθετη συνιστώσα ταχύτητας με διαστάσεις στο συνοριακό στρώμα
V''	= αδιάστατη κάθετη ταχύτητα στο ανώτερο στρώμα της τριπλής στιβάδας
V_{Gr}	= ταχύτητα μεταφοράς κατά μήκος ακτίνας
V_k	= ορθοκανονική βάση του Krylov υποχώρου τάξεως k
w	= εύρος διαταραχής στην διεύθυνση ροής
$w(x)$	= συνάρτηση βάρους για κατασκευή ανομοιόμορφου πλέγματος
W	= πάχος στερεής επιφάνειας
We	= αριθμός Weber υγρού, $We = \rho u_f^2 H_f / \varepsilon^2 \sigma$
\overline{We}	= μετασχηματισμένος αριθμός Weber υγρού, $\overline{We} = We(\mu_w / \mu)^2$
x	= αδιάστατη οριζόντια διεύθυνση με βάση το μήκος L
x'	= οριζόντια διεύθυνση με διαστάσεις
x_d	= απόσταση με διαστάσεις από την αρχή της στερεής επιφάνειας
X	= αδιάστατη οριζόντια διεύθυνση με βάση το μήκος της τριπλής στιβάδας
y	= αδιάστατη κάθετη διεύθυνση στο υγρό με βάση πάχος ιξώδους υποστρώματος

y'	= κάθετη διεύθυνση με διαστάσεις
\bar{y}	= μετασχηματισμένη μεταβλητή για κάθετη διεύθυνση υγρού, $\bar{y} = y/H(X, t)$
Y	= αδιάστατη κάθετη διεύθυνση στο αέριο με βάση πάχος ιξώδους υποστρώματος
\bar{Y}	= μετασχηματισμένη μεταβλητή για κάθετη διεύθυνση αερίου, $\bar{Y} = Y - H(X, t)$
Y'	= αδιάστατη κάθετη διεύθυνση στο μεσαίο στρώμα της τριπλής στιβάδας
Y''	= αδιάστατη κάθετη διεύθυνση στο ανώτερο στρώμα της τριπλής στιβάδας

Ελληνικά σύμβολα

δ	= πάχος συνοριακού στρώματος
ε	= μικρή μεταβλητή για ασυμπτωτική περιγραφή τριπλής στιβάδας
ε_1	= μικρή μεταβλητή στην ασθενώς μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας
ζ	= μεγάλη χωρική κλίμακα για ασθενώς μη γραμμική ανάλυση
θ	= γωνία που σχηματίζει το στερεό με κύρια διεύθυνση ροής
Λ	= παράγοντας σχήματος
λ	= αδιάστατη διάτμηση συνοριακού στρώματος βασικής ροής
λ_{td}	= κλίμακα μήκους τριπλής στιβάδας
μ	= ιξώδες αερίου
μ_w	= ιξώδες υγρού
ν	= κινηματικό ιξώδες αερίου $\nu = \mu / \rho$
ξ'	= τοπική κλίμακα για εφαρμογή μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων
ξ_1	= μετασχηματισμένη μεταβλητή για την οριζόντια απόσταση, $\xi_1 = X - ct$
ρ	= πυκνότητα αερίου
ρ_w	= πυκνότητα υγρού
σ	= ρυθμός ανάπτυξης διαταραχής
τ	= αργή χρονική κλίμακα για ασθενώς μη γραμμική ανάλυση
τ_w	= διατμητική τάση
φ	= συνάρτηση δυναμικού
φ_α	= αδιάστατη συνάρτηση δυναμικού
Ψ	= αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση στο ιξώδες υπόστρωμα

Ψ_{ij}	= δισδιάστατες συναρτήσεις βάσης τετραγωνικών lagrange
ψ	= αδιάστατη ροϊκή συνάρτηση στο υγρό
ψ_i	= μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης τετραγωνικών lagrange
ω	= συχνότητα διαταραχής
$\omega_{i,c}$	= κρίσιμη τιμή ρυθμού ανάπτυξης
$\omega_{o,i}$	= φανταστικό μέρος απόλυτης συχνότητας
ω_r	= συχνότητα περιοδικής στο χρόνο διαταραχής
ω_v	= μετασχηματισμένη συχνότητα, $\omega_v = \omega - kV_{Gr}$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Γενικά	1
1.2 Συνοριακό στρώμα.....	2
1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση αλληλεπίδρασης συνοριακού στρώματος με ρευστό..	8
1.4 Οργάνωση Διατριβής.....	16
2. ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	18
2.1 Γενικά	18
2.2 Θεωρία τριπλής στιβάδας.....	19
2.3 Εξισώσεις ροής αέρα πάνω από λεπτό υμένα υγρού	20
2.3.1 Βασική ροή.....	20
2.3.2 Εξισώσεις ροής.....	23
2.3.3 Εξισώσεις ροής για οδεύοντα κύματα στο όριο $M \rightarrow 0$	28
3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ	30
3.1 Γενικά.....	30
3.2 Ευστάθεια συνοριακού στρώματος.....	31
3.2 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας οριακού στρώματος πάνω από υγρό υμένα.....	36
3.2.1 Σχέση διασποράς.....	36
3.2.2 Μέθοδος ‘Pinching’.....	37
3.3 Ασθενώς μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας.....	44
4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ	56
4.1 Γενικά.....	56
4.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων.....	57
4.2.1 Περιγραφή μεθόδου.....	57
4.2.2 Συναρτήσεις βάσης	57
4.2.2.1 Συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange.....	58
4.2.2.2 Συναρτήσεις βάσης cubic splines.....	59
4.3 Συνοριακές συνθήκες.....	62
4.3.1 Ελεύθερες συνοριακές συνθήκες.....	63
4.3.2 Περιοδικές συνοριακές συνθήκες.....	64
4.4 Επίλυση συστήματος πεπερασμένων στοιχείων.....	65
4.4.1 Μέθοδος GMRES.....	66
4.4.2 Εφαρμογή μεθόδου GMRES	69
4.5 Μέθοδος μεταβλητού πλέγματος.....	71

4.6 Μεθοδολογία επίλυσης.....	73
4.6.1 Προσομοίωση διεπιφανειακών κυμάτων για υγρά μεγάλου ξώδους... ..	74
4.6.2 Προσομοίωση διεπιφανειακών με εισαγωγή αδράνειας υγρού.....	77
4.6.3 Επίλυση συνολικού προβλήματος ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.....	78
4.6.4 Αλγόριθμοι επίλυσης.....	78
5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΑΠΟΥΣΙΑ	
ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΥΓΡΟΥ.....	80
5.1 Γενικά.....	80
5.2 Αποτελέσματα στη γραμμική περιοχή.....	81
5.3 Αποτελέσματα στην ασθενώς μη-γραμμική περιοχή.....	89
5.4 Αποτελέσματα στη μη-γραμμική περιοχή.....	100
5.5 Συμπεράσματα.....	113
6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΕ	
ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΤΟ ΥΓΡΟ.....	116
6.1 Γενικά.....	116
6.2 Αποτελέσματα	116
6.2.1 Επίδραση αδράνειας στη γραμμική περιοχή.....	116
6.2.2 Επίδραση αδράνειας στη μη-γραμμική περιοχή.....	122
6.2.3 Προσδιορισμός κρίσιμης τιμής M_c	132
6.2.4 Επίδραση πάχους υγρού στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων.....	136
6.2.5 Επίδραση επιφανειακής τάσης στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων...	140
6.3 Συμπεράσματα.....	143
7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ	
TOLLMIEN-SCHLICHTING ΚΥΜΑΤΩΝ.....	146
7.1 Γενικά.....	146
7.2 Αποτελέσματα.....	146
8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.....	153
8.1 Συμπεράσματα.....	153
8.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	157
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	160

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση της δημιουργίας υγρού φιλμ πάνω σε πτέρυγα σε περίπτωση βροχόπτωσης.....	1
Σχήμα 1.2: Ροή γύρω από πτερύγιο (α) χωρίς αποκόλληση και (β) με αποκόλληση.....	6
Σχήμα 1.3: Διάφορες τεχνικές ελέγχου συνοριακού στρώματος: (α) με αναρρόφηση, (β) με έγχυση και (γ) πτερύγιο με οπές.....	8
Σχήμα 2.1: Σχηματική απεικόνιση θεωρίας τριπλής στιβάδας	20
Σχήμα 2.2: Σχηματική απεικόνιση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.....	21
Σχήμα 3.1: Καμπύλη ευστάθειας συνοριακού στρώματος για άτριβη ροή.....	33
Σχήμα 3.2: Καμπύλη ευστάθειας συνοριακού στρώματος για άτριβη ροή και για ροή με σημαντικές τις ιξώδεις δυνάμεις.....	34
Σχήμα 3.3: Επίδραση της πτώσης πίεσης στην ευστάθεια συνοριακού στρώματος.....	36
Σχήμα 3.4: Σχηματική αναπαράσταση (α) ευστάθειας, (β) συναγωγικής και (γ) απόλυτης αστάθειας στη γραμμική περιοχή	40
Σχήμα 3.5: Σχηματική αναπαράσταση (α) ευστάθειας, (β) συναγωγικής και (γ) απόλυτης αστάθειας στη μη-γραμμική περιοχή	44
Σχήμα 3.6: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k_i)$ κοντά στην κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας ($\omega_{i,c} \approx 0$).....	45
Σχήμα 3.7: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k_r)$ για σύστημα αέρα deicing.....	46
Σχήμα 3.8: Σχηματική αναπαράσταση μετωπικού κύματος	54
Σχήμα 4.1: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης quadratic lagrange σε μια διάσταση.....	58
Σχήμα 4.2: Διακριτοποίηση πεδίου επίλυσης με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης lagrange σε δυο διαστάσεις.....	59
Σχήμα 4.3: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης cubic splines σε μια διάσταση.....	60
Σχήμα 4.4: Διακριτοποίηση πεδίου επίλυσης με συναρτήσεις βάσης κυβικών splines σε δυο διαστάσεις.....	61
Σχήμα 4.5: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης κυβικών splines δυο διαστάσεων.....	62
Σχήμα 5.1: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k_r)$ για το σύστημα αέρα-deicing.....	82

Σχήμα 5.2: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-deicing για γραμμική στιγμιαία διαταραχή, $d=0.001$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$	83
Σχήμα 5.3: Ανάλυση FT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.....	84
Σχήμα 5.4: Στιγμιότυπο (α) της πίεσης και (β) του πάχους μετατόπισης για το σύστημα αέρα-deicing για γραμμική στιγμιαία διαταραχή, $d=0.001$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$	85
Σχήμα 5.5: Χρονική εξέλιξη της πίεσης για το σύστημα αέρα-deicing για γραμμική στιγμιαία διαταραχή.....	85
Σχήμα 5.6: Ανάλυση FT για τον υπολογισμό της περιόδου.....	85
Σχήμα 5.7: Χωροχρονική εξέλιξη και ανάλυση FT περιοδικής διαταραχής στο σύστημα αέρα deicing.....	88
Σχήμα 5.8: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για το σύστημα αέρα-λαδιού για γραμμική στιγμιαία διαταραχή.....	89
Σχήμα 5.9: Κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k/H_0)$	90
Σχήμα 5.10: Κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k/H_0)$ για τιμές παραμέτρων κάτω από κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.....	91
Σχήμα 5.11: Στιγμιότυπα της διεπιφάνειας για τιμές παραμέτρων κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.....	92
Σχήμα 5.12 Κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k/H_0)$ για τιμές παραμέτρων πάνω από κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.....	94
Σχήμα 5.13: Στιγμιότυπα της διεπιφάνειας για τιμές παραμέτρων πάνω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.....	95
Σχήμα 5.14: Ανάλυση FFT στα τρία τελευταία στιγμιότυπα του σχήματος 5.13.....	96
Σχήμα 5.15: Μορφή λύσης Schrödinger για την περιοχή πάνω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.....	97
Σχήμα 5.16: Μορφή λύσης Schrödinger για την περιοχή κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.....	98
Σχήμα 5.17: Λύση Schrödinger τύπου front στην υπερκρίσιμη περιοχή για το σύστημα αέρα-deicing, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$	100
Σχήμα 5.18: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων στη μη-γραμμική περιοχή για το σύστημα αέρα-deicing και αρχικό ύψος 2.07617, $x_0=0.8$	101
Σχήμα 5.19: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων	

(α), (β), (γ) για αρχική διαταραχή με $d=0.2$ και (δ), (ε), (ζ) με $d=0.4$ για το σύστημα αέρα-deicing και αρχικό ύψος 2.07617 , $x_0=0.8$	103
Σχήμα 5.20: Μορφή της διεπιφάνειας στην περιοχή της απότομης κορυφής για το σύστημα αέρα-deicing με αρχικό ύψος 2.07617 , $x_0=0.8$ και για αρχική διαταραχή με $d=0.4$	103
Σχήμα 5.21: Μη-γραμμική χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-deicing για διαταραχή με $d=0.001$ και αρχικό ύψος 4 , $x_0=0.8$	105
Σχήμα 5.22: Εξέλιξη ανακυκλοφορίας μπροστά από τις κορυφές μέγιστου ύψους.....	106
Σχήμα 5.23 Χωροχρονική εξέλιξη πίεσης στο συνοριακό στρώμα και διάτμησης που ασκείται στην στερεή επιφάνεια για το σύστημα αέρα-deicing, $d=0.001$, $H_0=4$, $x_0=0.8$	108
Σχήμα 5.24: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-νερού για γραμμική διαταραχή ($d=0.001$) και αρχικό ύψος 3.32671 , $x_0=1.5$	109
Σχήμα 5.25: Ανάλυση FT σε όλο το πεδίο προσομοίωσης για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.....	110
Σχήμα 5.26: Στιγμιότυπα διεπιφάνειας αέρα-νερού και ανάλυση FT γύρω από την περιοχή $X=0$ για το τον υπολογισμό του μήκους κύματος της απόλυτης αστάθειας.....	111
Σχήμα 6.1: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για το σύστημα αέρα-deicing με το μοντέλο που αγνοεί την αδράνεια του υγρού, $d=0.001$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$	117
Σχήμα 6.2: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για το σύστημα αέρα-deicing με το μοντέλο που περιλαμβάνει την αδράνεια του υγρού, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$	117
Σχήμα 6.3: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-νερού όταν συμπεριλαμβάνεται η αδράνεια του υγρού, $d=0.001$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$	118
Σχήμα 6.4: Ανάλυση FT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος στο σύστημα αέρα-νερού όταν συμπεριλαμβάνεται η αδράνεια του υγρού, $d=0.001$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$	119
Σχήμα 6.5: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i=f(k)$ για το σύστημα αέρα-νερού	

(α) όταν αγνοείται και (β) όταν συμπεριλαμβάνεται η αδράνεια του υγρού, $x_0=1.5, H_0=3.32671$	120
Σχήμα 6.6: Στιγμιότυπο διεπιφάνειας αέρα-νερού και ανάλυση FT γύρω από την περιοχή $X=0$ για τον υπολογισμό του μήκους κύματος της απόλυτης αστάθειας.....	121
Σχήμα 6.7: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού, $d=0.001$, $x_0=1.5, H_0=3.32671$	123
Σχήμα 6.8: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού για διαταραχή (α), (β), (γ) με $d=0.1$ και (δ), (ε), (ζ) με $d=0.4$ στη θέση $x_0=1.5, H_0=3.32671$	124
Σχήμα 6.9: Χωροχρονική εξέλιξη ροϊκής συνάρτησης στην αέρια φάση για το σύστημα αέρα-νερού, $d=0.1, x_0=1.5, H_0=3.32671$	126
Σχήμα 6.10: Χωροχρονική εξέλιξη πίεσης στην αέρια φάση και διάτμησης στην στερεή επιφάνεια για το σύστημα αέρα-νερού, $d=0.1, x_0=1.5, H_0=3.32671$	128
Σχήμα 6.11: Χωροχρονική εξέλιξη ροϊκής συνάρτησης στην υγρή φάση για το σύστημα αέρα-νερού, $d=0.1, x_0=1.5, H_0=3.32671$	128
Σχήμα 6.12: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού για γραμμική διαταραχή ($d=0.001$), $x_0=0.6, H_0=1.67324$	129
Σχήμα 6.13: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού για γραμμική περιοδική διαταραχή $x_0=0.6, H_0=1.67324$	131
Σχήμα 6.14: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού όταν επιτρέπονται οι μεταβολές με την απόσταση $x=x_0+Re^{-3/8}X$, $x_0=1.5, Re=10^5, d=0.1$	132
Σχήμα 6.15: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-D100, $d=0.8, x_0=0.8, H_0=2.07617$	134
Σχήμα 6.16: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-D75, $d=0.8, x_0=0.8, H_0=2.07617$	134
Σχήμα 6.17: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα M75, $d=0.8, x_0=0.8, H_0=2.07617$	135
Σχήμα 6.18: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-M50, $d=0.1, x_0=0.8, H_0=2.07617$	136
Σχήμα 6.19: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων ($d=0.4, x_0=0.8$) για το σύστημα (α)-(γ) αέρα-M50 με $H_0=1.46$ και (δ)-(ε) αέρα-νερού με $H_0=0.73$	138

Σχήμα 6.20: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων στη θέση $x_0=0.8$ (α)-(γ) για το σύστημα αέρα-D75 με $H_0=2.5$ και (δ)-(ζ) για το σύστημα αέρα-M75 με $H_0=3$	140
Σχήμα 6.21: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειας αέρα-νερού στη θέση $x_0=0.6$ για $\overline{We} = 46.296$	141
Σχήμα 6.22: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειας αέρα-νερού στη θέση $x_0=0.6$ για $\overline{We} = 20.37$	142
Σχήμα 6.23: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειας αέρα-νερού στη θέση $x_0=0.6$ για $\overline{We} = 8.64$	143
Σχήμα 7.1: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας όταν για $t=0$ επιβάλλεται διαταραχή με $d=0.001$ στην διεπιφάνεια.....	147
Σχήμα 7.2: Πάχος μετατόπισης όταν για $t=0$ επιβάλλεται διαταραχή με $d=0.001$ στην διεπιφάνεια.....	147
Σχήμα 7.3: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας πριν την επιβολή της διαταραχής στο συνοριακό στρώμα.....	148
Σχήμα 7.4: Εξέλιξη διεπιφάνειας αν δεν επιβληθεί διαταραχή στο συνοριακό στρώμα.....	148
Σχήμα 7.5: Εξέλιξη διεπιφάνειας μετά την επιβολή της δεύτερης διαταραχής στο συνοριακό στρώμα.....	149
Σχήμα 7.6: Στιγμιότυπα του πάχους μετατόπισης μετά την επιβολή της δεύτερης διαταραχής στο συνοριακό στρώμα.....	149
Σχήμα 7.7: Ανάλυση FFT στα στιγμιότυπα του πάχους μετατόπισης του σχήματος 7.6.....	151

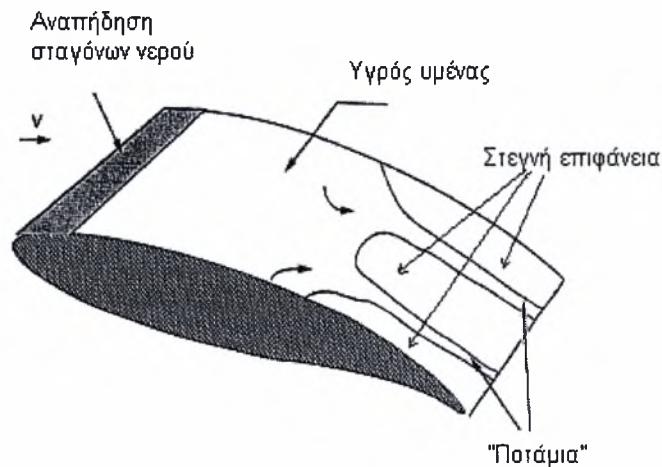
ΠΙΝΑΚΕΣ

Πίνακας 5.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-deicing $x_0=0.8, H_0=2.07617$	86
Πίνακας 5.2: Συντελεστές Schrödinger στα δυο άκρα του πιο ασταθούς κυματοπακέτου για το σύστημα αέρα-deicing, $x_0=0.8, H_0=2.07617$	99
Πίνακας 5.3: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-νερού, $x_0=1.5, H_0=3.32671$	109
Πίνακας 6.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-deicing.....	117
Πίνακας 6.2: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-νερού.....	120
Πίνακας 6.3: Αδιάστατες παράμετροι για de-icing ρευστά.....	133

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά

Η παρούσα διατριβή αφορά στην αριθμητική μελέτη των ασταθειών που εμφανίζονται όταν αέριο ρεύμα με υψηλό αριθμό Re ρέει πάνω από λεπτό υμένα υγρού. Η αλληλεπίδραση του στρωτού συνοριακού στρώματος του αέρα με τον υμένα κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορεί να οδηγήσει σε μη γραμμικές συμπεριφορές, όπως είναι ο σχηματισμός δινών ανακυκλοφορίας και η αποκόλληση. Η περίπτωση της ροής αέρα πάνω από λεπτό υγρό υμένα έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές. Μια από τις πιο σημαντικές είναι η μελέτη της συμπεριφοράς πτερυγίων αεροσκαφών πάνω στα οποία έχει δημιουργηθεί λεπτός υμένας υγρού εξαιτίας βροχόπτωσης ή εναπόθεσης στην επιφάνεια τους de/anti-icing υγρών. Η περιοχή αυτή συγκεντρώνει μεγάλο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια επειδή έχει καταγραφεί ένας σημαντικός αριθμός ατυχημάτων κάτω από συνθήκες έντονης βροχόπτωσης. Πειράματα που πραγματοποιήθηκαν σε εμπορικά πτερύγια στη ΝΑΣΑ (Campbell & Bezos, 1989), έδειξαν την μείωση του συντελεστή άνωσης και την αύξηση της οπισθέλκουσας σε τέτοιες συνθήκες. Στο Σχήμα 1.1 δίνεται η εξέλιξη του υμένα υγρού πάνω σε πτέρυγα, όπως έχει προκύψει από πειραματικές παρατηρήσεις για συνθήκες βροχόπτωσης.



Σχήμα 1.1: Σχηματική αναπαράσταση της δημιουργίας υγρού φιλμ πάνω σε πτέρυγα σε περίπτωση βροχόπτωσης.

Επίσης, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η επίδραση που έχει στα χαρακτηριστικά των πτερυγίων ο ψεκασμός τους με de/anti-icing ρευστά ώστε να αποφευχθεί ο

σηματισμός πάγου στην επιφάνεια τους. Πειραματικές μετρήσεις (Hendrickson & Hill, 1987 ; Hill & Zierten, 1993) που έγιναν σε πτερύγια που η επιφάνεια τους καλύπτεται από τέτοια ρευστά έδειξαν ότι η παρουσία του υγρού υμένα επηρεάζει σημαντικά τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά τους. Πιστεύεται ότι η παρουσία του υγρού υμένα στο πάνω μέρος του πτερυγίου μπορεί να οδηγήσει σε πρόωρη αποκόλληση και κατά συνέπεια σε μείωση της ανυψωτικής δύναμης.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής είναι σε συσκευές όπου υπάρχει συμπύκνωση στρωτών υμένων, όπως είναι οι εναλλάκτες θερμότητας και οι συμπυκνωτήρες. Γενικά, η συμπύκνωση επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό την λειτουργία συσκευών στις οποίες χρησιμοποιείται ως μέσο θέρμανσης κορεσμένος ατμός και συνεπώς παίζει καθοριστικό ρόλο στον βέλτιστο σχεδιασμό τους (Smyrniotis et al., 2002).

1.2 Συνοριακό στρώμα

Το συνοριακό στρώμα ορίστηκε για πρώτη φορά από τον Ludwig Prandtl σε εργασία που παρουσιάστηκε στις 12 Αυγούστου το 1904 στο τρίτο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στη Γερμανία. Σύμφωνα με τον Prandtl όταν ρευστό κινείται πάνω από στερεή επιφάνεια υπάρχει ένα λεπτό στρώμα πάνω από το στερεό μέσα στο οποίο η επίδραση του ιξώδους είναι σημαντική. Το γεγονός αυτό επέτρεψε στους επιστήμονες να απλοποιήσουν τις πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes χωρίζοντας τη ροή πάνω από σώματα σε δυο περιοχές: στο συνοριακό στρώμα μέσα στο οποίο οι ιξώδεις δυνάμεις είναι σημαντικές και στην εξωτερική ροή όπου το ιξώδες μπορεί να αγνοηθεί και η ροή είναι αποτέλεσμα μόνο των δυνάμεων αδρανείας και πίεσης.

Κύριο χαρακτηριστικό του συνοριακού στρώματος είναι το πάχος του δ το οποίο ορίζεται ως η απόσταση από την στερεή επιφάνεια στην οποία η ταχύτητα ροής είναι περίπου ίση με το 99% της εξωτερικής ταχύτητας U_∞ . Αποδεικνύεται ότι το πάχος του στρωτού συνοριακού στρώματος πάνω από μια στερεή πλάκα εξαρτάται από την απόσταση από την αρχή της πλάκας και από τον τοπικό αριθμό Re σύμφωνα με τη σχέση:

$$\delta \sim \frac{x_d}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (1.1)$$

όπου $\text{Re}_x = U_\infty x_d / \nu$. Από την παραπάνω αναλογία είναι φανερό ότι το πάχος του συνοριακού στρώματος αυξάνεται με την απόσταση ($\delta \sim x_d^{0.5}$) ή με τη μείωση του Re_x . Η σταθερά αναλογίας στην σχέση (1.1) εξαρτάται από την μορφή της

κατανομής της ταχύτητας εντός του συνοριακού στρώματος. Καθώς αυξάνεται η απόσταση x_d το συνοριακό στρώμα από στρωτό μετατρέπεται σε τυρβώδες. Το πάχος του τυρβώδους συνοριακού στρώματος είναι μεγαλύτερο σε σχέση με το στρωτό και για ροή πάνω από πλάκα αποδεικνύεται ότι μεταβάλλεται με την απόσταση x_d σύμφωνα με την αναλογία $\delta \sim x_d^{0.8}$. Η απόσταση x_d για την οποία συμβαίνει η μετάβαση σε τύρβη εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως το είδος της προσπίπτουσας ροής, η τραχύτητα της στερεής επιφάνειας, η ύπαρξη κλίσης πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής, η μεταφορά θερμότητας κ.α. Η παράμετρος που καθορίζει το είδος του συνοριακού στρώματος είναι ο τοπικός αριθμός Reynolds. Για ροή πάνω από επίπεδη πλάκα ο κρίσιμος αριθμός Re πάνω από τον οποίο το συνοριακό στρώμα γίνεται τυρβώδες είναι της τάξης $Re_c = 5 \cdot 10^5$. Εκτός από το πάχος δ ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό μέγεθος του συνοριακού στρώματος είναι το πάχος μετατόπισης. Το τελευταίο ορίζεται ως η απόσταση της μετατόπισης των ροϊκών γραμμών της εξωτερικής ροής η οποία προκαλείται από την κίνηση εκτός του συνοριακού στρώματος μάζας ρευστού που παρεμποδίζεται από την παρουσία του.

Η μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού πυκνότητας ρ και ιξώδους μ πάνω από επίπεδη πλάκα περιγράφεται από τις εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes:

$$\frac{\partial U_A}{\partial x'} + \frac{\partial V_A}{\partial y'} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho \left(U_A \frac{\partial U_A}{\partial x'} + V_A \frac{\partial U_A}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P_A}{\partial x'} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_A}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U_A}{\partial y'^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\rho \left(U_A \frac{\partial V_A}{\partial x'} + V_A \frac{\partial V_A}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P_A}{\partial y'} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_A}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V_A}{\partial y'^2} \right) \quad (1.4)$$

Ο Prandtl βασιζόμενος στη φύση του συνοριακού στρώματος έκανε κάποιες υποθέσεις με στόχο την απλοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes. Έτσι, θεωρώντας σχετικά μεγάλους αριθμούς Re και εξαιρώντας την περιοχή πολύ κοντά στην αρχή της πλάκας, διατύπωσε δυο σωστές παραδοχές. Σύμφωνα με την πρώτη παραδοχή η αξονική ταχύτητα μέσα στο συνοριακό στρώμα είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την εγκάρσια, $U_A \gg V_A$. Η δεύτερη παραδοχή αναφέρει ότι οι μεταβολές της αξονικής ταχύτητας είναι πολύ μεγαλύτερες στην y' -κατεύθυνση παρά στην x' -κατεύθυνση, $\frac{\partial U_A}{\partial y'} \gg \frac{\partial U_A}{\partial x'}$. Με βάση τις παραδοχές του Prandtl οι εξισώσεις που

τελικά περιγράφουν την ροή του συνοριακού στρώματος παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial U_A}{\partial x'} + \frac{\partial V_A}{\partial y'} = 0 \quad (1.5)$$

$$\rho \left(U_A \frac{\partial U_A}{\partial x'} + V_A \frac{\partial U_A}{\partial y'} \right) = - \frac{dP_A}{dx'} + \mu \frac{\partial^2 U_A}{\partial y'^2} \quad (1.6)$$

όπου η πτώση πίεσης dP_A / dx' επιβάλλεται από την εξωτερική άτριβη ροή μέσω της εξίσωσης Bernoulli. Πάνω στην στερεή επιφάνεια ισχύουν οι συνθήκες μη ολίσθησης και μη διείσδυσης, ενώ στο όριο μεταξύ συνοριακού στρώματος και εξωτερικής ροής πρέπει να υπάρχει συνέχεια της αξονικής ταχύτητας. Δηλαδή:

$$\text{Για } y' = 0: \quad U_A = V_A = 0 \quad (1.7)$$

$$\text{Για } y' \rightarrow \infty: \quad U_A = U_\infty(x') \quad (1.8)$$

όπου $U_\infty(x')$ η κατανομή της ταχύτητας εκτός συνοριακού στρώματος.

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν τόσο για στρωτή όσο και για τυρβώδη ροή. Παρά το γεγονός ότι διατυπώθηκαν για ροή ρευστού πάνω από πλάκα, ισχύουν και για ροή πάνω από στερεές επιφάνειες μικρής καμπυλότητας. Για επιφάνειες με μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας απαιτείται ο μετασχηματισμός τους εισάγοντας κάποιο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων (Παπαιωάνου, 1996).

Οι εξισώσεις του συνοριακού στρώματος για στρωτή ροή πάνω από επίπεδη οριζόντια πλάκα ($dP_A / dx' = 0$) επιλύθηκαν για πρώτη φορά από τον Blasius, ο οποίος υπέθεσε την αρχή ομοιότητας για την κατανομή της ταχύτητας στο συνοριακό στρώμα μέσω μιας αδιάστατης συνάρτησης $f(\eta)$. Δηλαδή θεώρησε ότι ισχύει:

$$\frac{U}{U_\infty} = f(\eta) \quad \text{όπου } \eta = y' / \delta = y' \sqrt{U_\infty / \nu x'}. \quad \text{Με τον τρόπο αυτό κατέληξε στην}$$

παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση, η λύση της οποίας αναφέρεται ως λύση Blasius:

$$f \cdot f'' + 2f''' = 0 \quad (1.9)$$

με συνοριακές συνθήκες $f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 0$.

Κατά τη μελέτη προβλημάτων ροής σε συνοριακό στρώμα σημαντικό ρόλο παίζει ο ακριβής υπολογισμός της οπισθέλκουσας δύναμης F_D η οποία έχει την κατεύθυνση της ροής και προκαλείται από τις διατμητικές τάσεις και τις δυνάμεις πίεσης που ασκούνται στην επιφάνεια του στερεού. Για διδιάστατη ροή πάνω από

επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ με την κύρια κατεύθυνση ροής η οπισθέλκουσα τριβής $F_{D,f}$ και η οπισθέλκουσα πίεσης $F_{D,p}$ προκύπτουν ολοκληρώνοντας τις διατμητικές τάσεις και τις δυνάμεις πίεσης αντίστοιχα στο σύνολο της στερεής επιφάνειας:

$$F_D = F_{D,f} + F_{D,p} = \iint \tau_w \cos \theta dA + \iint P_A \sin \theta dA \quad (1.10)$$

όπου τ_w , P_A η τοπική διατμητική τάση και πίεση που ασκείται στην στερεή επιφάνεια, αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στην κύρια κατεύθυνση ροής η δύναμη πίεσης είναι εκείνη που δίνει τη συνολική οπισθέλκουσα. Αντίθετα, όταν η επιφάνεια είναι παράλληλη προς την κύρια κατεύθυνση ροής μόνο η οπισθέλκουσα τριβής συνεισφέρει στη συνολική οπισθέλκουσα αφού η δύναμη πίεσης, αν και σημαντική, δρα κάθετα στην κύρια κατεύθυνση ροής. Επομένως, για ροή παράλληλα σε στερεή πλάκα μήκους L και πάχους W η οπισθέλκουσα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$F_D = \int_0^L \tau_w W dx' = \int_0^L \mu \left. \frac{dU_A}{dy'} \right|_{y'=0} W dx' \quad (1.11)$$

Η οπισθέλκουσα πίεσης που δέχεται ένα στερεό σώμα που περιβάλλεται από ρευστό μπορεί να αυξηθεί σημαντικά αν συμβεί αποκόλληση του συνοριακού στρώματος. Εκτός από την οπισθέλκουσα, η αποκόλληση επηρεάζει καθοριστικά και την δύναμη άνωσης που αναπτύσσεται σε ένα σώμα, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στην περίπτωση των αεροπλάνων. Για να συμβεί αποκόλληση του συνοριακού στρώματος θα πρέπει να υπάρχει επαρκής αύξηση της πίεσης κατά τη διεύθυνση της ροής. Η μεγάλη αύξηση της πίεσης σε συνδυασμό με τις διατμητικές δυνάμεις που δέχεται το ρευστό έχουν ως αποτέλεσμα την επιβράδυνση του. Η επιβράδυνση του ρευστού συνεχίζεται μέχρι κάποια στοιχεία του κοντά στο τοίχωμα να φτάσουν σε ηρεμία. Όταν η ταχύτητα του ρευστού μηδενιστεί τότε μηδενίζονται και οι ιξώδεις δυνάμεις. Επειδή όμως η αντιτιθέμενη κλίση πίεσης συνεχίζει να δρα, το ρευστό αναγκάζεται να αντιστρέψει τη ροή και να αλλάξει κατεύθυνση. Η αποκόλληση του συνοριακού στρώματος συμβαίνει στο σημείο όπου εμφανίζεται η αναστροφή του ρευστού. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο αποκόλλησης και προσδιορίζεται από τη

σχέση $\tau_w = \mu \left. \frac{\partial U_A}{\partial y'} \right|_{y'=0} = 0$. Είναι φανερό ότι η αποκόλληση του συνοριακού

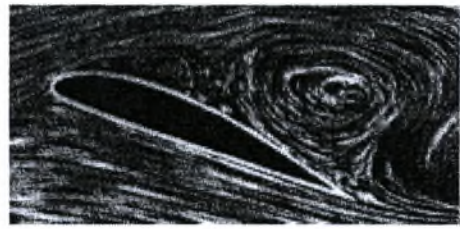
στρώματος πρέπει να συμβαίνει ώστε η ροή να μπορεί να συνεχίσει προς την κατεύθυνση αύξησης της πίεσης. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι το πάχος

του συνοριακού στρώματος αυξάνει απότομα όταν συμβεί αποκόλληση του. Στην περίπτωση αυτή οι παραδοχές του Prandtl για το συνοριακό στρώμα δεν ισχύουν πλέον και κατά συνέπεια για να επιλυθεί η ροή γύρω από σημεία αποκόλλησης θα πρέπει είτε να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις Navier-Stokes, είτε να περιγραφεί το συνοριακό στρώμα με κάποιες ασυμπτωτικές εξισώσεις όπως γίνεται στα πλαίσια της παρούσας διατριβής.

Στο Σχήμα 1.2 δίνεται η ροή γύρω από ένα πτερύγιο για διαφορετικές γωνίες πρόσπτωσης. Για μικρές γωνίες πρόσπτωσης (μέχρι 10°) η ροή δεν αποκολλάται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2α. Καθώς αυξάνεται η γωνία πρόσπτωσης η αύξηση της πίεσης γίνεται πιο απότομη στο τμήμα αναρρόφησης του πτερυγίου και κατά συνέπεια υπάρχει κίνδυνος αποκόλλησης. Η αποκόλληση τελικά παρατηρείται για γωνία περίπου ίση με 15° (Σχήμα 1.2β). Το σημείο αποκόλλησης βρίσκεται στο τμήμα αναρρόφησης πολύ κοντά στο μπροστινό άκρο του πτερυγίου. Η παραπάνω συμπεριφορά έχει ως αποτέλεσμα τόσο τη μείωση του συντελεστή ανύψωσης όσο και την αύξηση της οπισθέλκουσας (Schlichting, 1979).



(α)



(β)

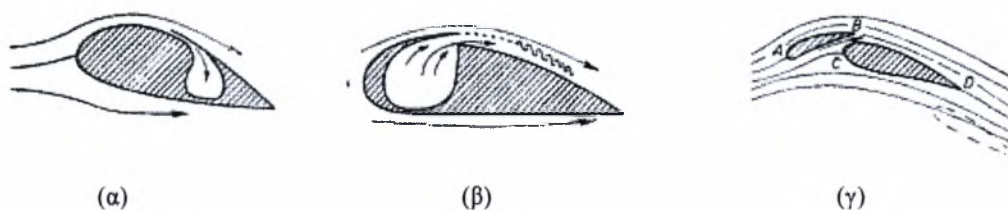
Σχήμα 1.2: Ροή γύρω από πτερύγιο (α) χωρίς αποκόλληση και (β) με αποκόλληση (Schlichting, 1979).

Όπως είναι φυσικό, σε πρακτικές εφαρμογές, μεγάλη σημασία δίνεται στον έλεγχο του συνοριακού στρώματος γύρω από στερεά σώματα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές που έχουν ως κύριο στόχο να επηρεάσουν τη συνολική ροή προς την επιθυμητή κατεύθυνση ελέγχοντας τη δομή και τα χαρακτηριστικά του συνοριακού στρώματος. Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στη μείωση της συνολικής οπισθέλκουσας που ασκείται στο σώμα. Επομένως, κατά τον σχεδιασμό τους θα πρέπει να συνυπολογιστεί η επίπτωση δυο διαφορετικών επιδράσεων. Η μια είναι η αύξηση της οπισθέλκουσας πίεσης εξαιτίας της παρουσίας του συνοριακού στρώματος και η άλλη είναι η αύξηση της οπισθέλκουσας τριβής ως αποτέλεσμα των διατμητικών δυνάμεων που ασκούνται στην επιφάνεια του στερεού.

Σε υψηλούς αριθμούς Re είναι επιθυμητή η διατήρηση στρωτού συνοριακού στρώματος επειδή σε σχέση με το τυρβώδες στρώμα οδηγεί σε μικρότερο συντελεστή τριβής. Έτσι, με σκοπό να αποφευχθεί η μετάβαση του συνοριακού στρώματος από στρωτή σε τυρβώδη μορφή, καθώς αυτό αναπτύσσεται κατά μήκος της στερεής επιφάνειας, εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές. Μια από τις πιο συνηθισμένες τεχνικές είναι ο σχεδιασμός του σώματος με το κατάλληλο αεροδυναμικό σχήμα με σκοπό την μετατόπιση του σημείου μετάβασης σε τύρβη όσο γίνεται κατάντη της ροής (Schlichting, 1979). Είναι γνωστό ότι το σημείο μετάβασης από στρωτή σε τυρβώδη ροή επηρεάζεται σημαντικά από την κλίση πίεσης της εξωτερικής ροής και μάλιστα η ύπαρξη ενισχυτικής κλίσης πίεσης δρα σταθεροποιητικά, ενώ η μετάβαση σε τύρβη σε μια τέτοια περίπτωση πραγματοποιείται σε πολύ μεγαλύτερους αριθμούς Re . Παράδειγμα χρήσης της συγκεκριμένης τεχνικής είναι η κατασκευή πτερυγίων στρωτής ροής (laminar airfoils). Στην περίπτωση αυτή το επιθυμητό αποτέλεσμα επιτυγχάνεται μετατοπίζοντας το μέγιστο πάχος προς τα πίσω αφήνοντας με τον τρόπο αυτό το μεγαλύτερο τμήμα της επιφάνειας κάτω από πίεση που μειώνεται κατά τη διεύθυνση της ροής. Μια άλλη τεχνική είναι η αναρρόφηση κατά την οποία απομακρύνεται μέρος του συνοριακού στρώματος με τη βοήθεια είτε μιας πορώδους επιφάνειας, είτε οπών αναρρόφησης (Σχήμα 1.3α). Με τον τρόπο αυτό μειώνεται το πάχος του συνοριακού στρώματος και καθυστερείται η μετάβαση σε τύρβη. Η συγκεκριμένη τεχνική, παρά το γεγονός ότι σε εργαστηριακά πειράματα αποδείχθηκε ιδιαίτερα αποτελεσματική, δεν θεωρείται πρακτική επειδή αφενός είναι μηχανικά πολύπλοκη και αφετέρου απαιτείται αρκετή ενέργεια για τη μεταφορά του ρευστού.

Σε χαμηλότερους αριθμούς Re είναι ευκολότερο να διατηρηθεί στρωτό το συνοριακό στρώμα και με τον τρόπο αυτό να διατηρηθεί χαμηλά η οπισθέλκουσα τριβής. Παρόλα αυτά υπάρχει περίπτωση η κατανομή ταχυτήτων να επηρεαστεί από την ύπαρξη θετικής κλίσης πίεσης και τελικά το συνοριακό στρώμα να οδηγηθεί σε αποκόλληση, γεγονός που αυξάνει σημαντικά την οπισθέλκουσα πίεσης. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται ειδικοί μηχανισμοί δημιουργίας τύρβης επειδή το προφίλ ταχύτητας της τυρβώδους ροής επιτρέπει την ύπαρξη θετικής κλίσης πίεσης χωρίς να υπάρχει ενδεχόμενο αποκόλλησης. Έτσι, με τον τρόπο αυτό η ολική οπισθέλκουσα ελαττώνεται παρά την αύξηση της οπισθέλκουσας τριβής εξαιτίας του τυρβώδους συνοριακού στρώματος. Με βάση την παραπάνω λογική τοποθετούνται μηχανισμοί δημιουργίας δινών σε μερικά είδη αεροσκαφών. Επίσης, ο σχεδιασμός πολλών σωμάτων γίνεται έτσι ώστε το σχήμα τους να βοηθά στην ανάκτηση της

πίεσης με στόχο να μειώνεται ή και να εξαφανίζεται το φαινόμενο της στρωτής αποκόλλησης. Μια άλλη τεχνική είναι η έγχυση ρευστού μέσα από οπές που τοποθετούνται στην στερεή επιφάνεια (Σχήμα 1.3β). Το ρευστό εξέρχεται με μεγάλη ταχύτητα από την οπή και επιταχύνει το συνοριακό στρώμα με αποτέλεσμα να είναι δυνατή η καθυστέρηση της αποκόλλησης του συνοριακού στρώματος. Η παραπάνω τεχνική έχει χρησιμοποιηθεί μεταξύ άλλων σε κατασκευή πτερυγίων αεροσκαφών με σκοπό την αύξηση του συντελεστή ανύψωσης (Schlichting, 1979). Στο Σχήμα 1.3γ δίνεται η περίπτωση τέτοιου τύπου πτερυγίων (slotted wings). Το συνοριακό στρώμα από το Α έως το Β παραμένει στρωτό χωρίς να προλάβει να συμβεί η αποκόλληση. Στο σημείο C με τη βοήθεια του επιπλέον ρευστού δημιουργείται ένα νέο συνοριακό στρώμα το οποίο αν οι συνθήκες το επιτρέπουν μπορεί να φτάσει ως το πίσω άκρο του πτερυγίου χωρίς να αποκολληθεί. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να αποφευχθεί η αποκόλληση και κατά συνέπεια να αυξηθεί ο συντελεστής ανύψωσης ακόμα και για σχετικά μεγάλες γωνίες πρόσπτωσης (Schlichting, 1979).



Σχήμα 1.3: Διάφορες τεχνικές ελέγχου συνοριακού στρώματος: (α) με αναρρόφηση, (β) με έγχυση και (γ) πτερύγιο με οπές (Schlichting, 1979).

Γενικά, σε κάθε περίπτωση γίνεται προσπάθεια βελτιστοποίησης του σχεδιασμού με συνεκτίμηση της επίδρασης από την αύξηση της οπισθέλκουσας πίεσης εξαιτίας πιθανής αποκόλλησης του στρωτού συνοριακού στρώματος και της επίδρασης από την αύξηση της οπισθέλκουσας τριβής που δημιουργείται από τη μετατροπή του συνοριακού στρώματος σε τυρβώδες.

1.3 Βιβλιογραφική ανασκόπηση αλληλεπίδρασης συνοριακού στρώματος με ρευστό

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει να μελετηθεί το πώς η παρουσία του υγρού πάνω στην στερεή επιφάνεια επηρεάζει τα παραπάνω χαρακτηριστικά του

συνοριακού στρώματος και κατά συνέπεια την αεροδυναμική συμπεριφορά των σωμάτων.

Αν και η συγκεκριμένη διατριβή επικεντρώνεται στη μελέτη των διεπιφανειακών ασταθειών που αναπτύσσονται κατά την αλληλεπίδραση στρωτού συνοριακού στρώματος με υγρό υμένα, κρίνεται σκόπιμο αρχικά να αναφερθούν κάποια πειράματα που αφορούν στο σύνολο την συμπεριφορά της ροής συνοριακού στρώματος πάνω από υμένα υγρού και επικεντρώνονται στην επίδραση που αυτή έχει στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της στερεής επιφάνειας. Μια από αυτές τις μελέτες πραγματοποιήθηκε από τη ΝΑΣΑ στα πλαίσια ερευνητικού προγράμματος όπου έγινε προσπάθεια να προσδιοριστεί η βασική αεροδυναμική συμπεριφορά πτερυγίων κατά την απογείωση και την προσγείωση σε συνθήκες έντονης βροχόπτωσης (Bezous et al., 1992). Η έντονη βροχόπτωση επηρεάζει την αεροδυναμική συμπεριφορά των αεροσκαφών μέσω τριών μηχανισμών: την αλληλεπίδραση του υμένα με το συνοριακό στρώμα, την δημιουργία τραχύτητας στον υμένα εξαιτίας της συνεχούς πτώσης σταγονιδίων βροχής και την μεταφορά ορμής μεταξύ του συνοριακού στρώματος και των σταγονιδίων του υμένα που εκτινάσσονται λόγω της εναπόθεσης νέων σωματιδίων. Τα παραπάνω φαινόμενα δρουν ταυτόχρονα δημιουργώντας ένα πολύπλοκο δυναμικό σύστημα. Οι Bezous et al. (1992) πραγματοποίησαν πειράματα χρησιμοποιώντας πτερύγιο τύπου NACA 64-210 και σύστημα προσομοίωσης της βροχόπτωσης με ρυθμό μεταξύ 16 και 46 g/m³. Χρησιμοποίησαν γωνίες πρόσπτωσης από 0-20° για την διαδικασία της απογείωσης και από 4-20° για την προσγείωση, ενώ ο αριθμός Reynolds της ροής κυμάνθηκε μεταξύ 10⁶ και 3·10⁶. Και στις δυο περιπτώσεις διαπίστωσαν ότι η αύξηση της βροχόπτωσης οδηγεί σε σημαντική μείωση της μέγιστης ανύψωσης και σε αύξηση της οπισθέλκουσας για δεδομένο συντελεστή ανύψωσης. Επιπλέον, κατά την προσγείωση κατέγραψαν μείωση της γωνίας πρόσπτωσης για την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη ανύψωση. Οι παραπάνω ερευνητές παρατήρησαν ότι ο υγρός υμένας δημιουργεί στην τρίτη διάσταση μικρά κανάλια νερού αφήνοντας ακάλυπτα τμήματα της στερεής επιφάνειας και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι εξαιτίας της αλληλεπίδρασης του υμένα με το συνοριακό στρώμα η ενεργή κύρτωση του πτερυγίου μεταβάλλεται διαρκώς γεγονός που επηρεάζει αρνητικά την απόδοση του πτερυγίου σε όλο το φάσμα των γωνιών πρόσπτωσης. Τέλος, πραγματοποίησαν πειράματα ώστε να μελετηθεί ο ρόλος της διεπιφανειακής τάσης του νερού με το πτερύγιο. Έτσι, χρησιμοποίησαν κάποια αντιτασιενεργό ουσία ώστε να ελαττωθεί η

επιφανειακή τάση του νερού και παρατήρησαν ότι η μείωση της επιφανειακής τάσης δεν επηρεάζει σημαντικά τις απώλειες κατά τη διαδικασία της προσγείωσης.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα πειραματική μελέτη (Yip, 1985) που πραγματοποιήθηκε στο Ερευνητικό Κέντρο Langley της NASA αφορά στην επίδραση της βροχής στη συμπεριφορά πτερυγίων που έχουν σχεδιαστεί για στρωτή ροή. Στα πειράματα χρησιμοποιήθηκαν υμένες πάχους μεταξύ 0.1 και 1 mm και διαπιστώθηκε ότι η επίδραση της παρουσίας του υγρού υμένα είναι παρόμοια με αυτή της τοποθέτησης στο πτερύγιο μηχανισμών μετάβασης σε τύρβη. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και τα πειράματα των Hansman και Barsotti (1985) που πραγματοποιήθηκαν στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης και στα οποία χρησιμοποιήθηκε αριθμός Reynolds ίσος με $3.1 \cdot 10^5$. Στην τελευταία μελέτη παρατηρήθηκε επίσης ότι η αρνητική επίδραση στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά της πτέρυγας μεγαλώνει όταν η στερεή επιφάνεια καλυφτεί από κερί.

Οι Hanratty & Engen (1957), ο van Rossum (1959) και οι Cohen και Hanratty (1965) πραγματοποίησαν κάποια πειράματα με υμένες πάχους μεγαλύτερου των 0.05 cm και διαπίστωσαν ότι όταν η ροή του αέρα είναι αρκετά μεγάλη τότε εμφανίζονται διεπιφανειακές αστάθειες εξαιτίας της μεταφοράς ενέργειας από το αέριο ρεύμα σε μικρές διαταραχές της διεπιφάνειας.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η έρευνα του Craik (1966) ο οποίος μελέτησε τόσο πειραματικά όσο και θεωρητικά την ευστάθεια της ροής αέρα πάνω από λεπτούς υμένες νερού με πάχη μικρότερα από αυτά που χρησιμοποίησαν οι προηγούμενοι ερευνητές. Στα πειράματα ο Craik παρατήρησε μια καινούργια μορφή αστάθειας που είναι διαφορετική από αυτή που αναπτύσσεται πάνω από υμένες μεγαλύτερου πάχους. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποίησε πειράματα μέσα σε δύο ορθογωνικά κανάλια ύψους 0.1524 m και 0.0254 m. Το μήκος και το πλάτος των καναλιών ήταν 1.1684 m και 0.2895 m αντίστοιχα. Ο Craik μελέτησε τις διεπιφανειακές αστάθειες για διαφορετικά πάχη υγρού και διαφορετικές ταχύτητες ροής αέρα. Παρατήρησε ότι διατηρώντας σταθερή τη ροή του αέρα, για σχετικά μεγάλα πάχη υγρού εμφανίζονται περιοδικά κύματα που ταξιδεύουν με τη βοήθεια της ροής μακριά από την θέση εμφάνισής τους, ενώ μειώνοντας το πάχος του υμένα διαπίστωσε ότι η περιοδικότητα των κυμάτων χάνεται. Τα περιοδικά κύματα, τα οποία ο Craik τα ονομάζει «γρήγορα κύματα», είναι ημιτονοειδή κύματα, με μήκη κύματος που κυμαίνονται μεταξύ 10 και 20 mm και η ταχύτητα μεταφοράς τους είναι αρκετά μεγαλύτερη από την ταχύτητα της διεπιφάνειας. Τα κύματα που εμφανίζονται για λεπτό πάχος υγρού, ο Craik τα

ονομάζει «αργά κύματα», έχουν απότομες κορυφές που τις ακολουθεί μια περιοχή διαταραχών μικρότερου ύψους και κινούνται με μικρότερη ταχύτητα από αυτή της διεπιφάνειας. Για σταθερή ταχύτητα αέρα το πλάτος των «αργών κυμάτων» αυξάνεται καθώς μειώνεται το πάχος του υγρού και τοπικές μετρήσεις έδειξαν ότι το μέγιστο ύψος που αποκτούν είναι πολύ μεγαλύτερο από το μέσο πάχος του υγρού. Οι ταχύτητες αέρα που χρησιμοποίησε ο Craik κυμαίνονται μεταξύ 3.36 και 6.83 m/sec και τα πάχη υγρού για τα οποία παρατήρησε την εμφάνιση των «αργών κυμάτων» από 0.128 έως 0.307 mm. Μειώνοντας ακόμη περισσότερο το πάχος του υγρού παρατήρησε ότι σχηματίζονται στεγνές περιοχές πάνω στη στερεή επιφάνεια. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη των «αργών κυμάτων» ανήκουν στις χωροχρονικές κλίμακες ισχύος της θεωρίας τριπλής στιβάδας και μέσα στους στόχους της παρούσας μελέτης είναι να επιβεβαιωθούν οι παραπάνω πειραματικές παρατηρήσεις και να εξηγηθούν οι μηχανισμοί που τις διέπουν.

Οι Hendrickson και Hill (1987) μελέτησαν τα κύματα που αναπτύσσονται όταν αέρας ρέει πάνω από ένα de-icing ρευστό το οποίο καλύπτει την επιφάνεια πτερυγίου με μήκος χορδής 0.279 m. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε στους $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, το πάχος του υγρού που χρησιμοποιήθηκε ήταν 1.1mm και καταγράφηκε το μήκος των κυμάτων που παρατηρούνται. Παρόλα αυτά, οι Ozgen et al. (1998) απέδειξαν ότι τα κύματα που καταγράφηκαν από τους Hendrickson και Hill ανήκουν στην κατηγορία των Tollmien-Schlichting και όχι των διεπιφανειακών.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα δουλειά είναι αυτή των Ludwig και Hornung (1989) οι οποίοι προσπάθησαν να απομονώσουν το πιο ασταθές κυματοπακέτο που προβλέπεται από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας στην αέρια φάση βασίστηκε στις κλασσικές εξισώσεις του συνοριακού στρώματος, ενώ αγνόησαν την επίδραση της βαρύτητας και των αδρανειακών δυνάμεων του υγρού. Όσον αφορά στο πειραματικό τμήμα της μελέτης, βασιζόμενοι στη μέθοδο οπτικοποίησης ροής, κάλυψαν στερεή επιφάνεια μήκους 50cm με λεπτό υμένα λαδιού που περιέχει κατάλληλα στερεά σωματίδια. Η επιφάνεια, στη συνέχεια, εκτίθεται σε ροή αέρα και υπό την επίδραση του το υγρό αρχίζει να ρέει. Κατά τη διάρκεια ροής του υγρού τα σωματίδια τακτοποιούνται σε γραμμές ευθυγραμμισμένες με τη διατμητική τάση που θα ασκούσαν στην επιφάνεια απουσία του υμένα. Με την παραπάνω διαδικασία κατάφεραν να οπτικοποιήσουν και να καταγράψουν τα χαρακτηριστικά των διεπιφανειακών κυμάτων που αναπτύσσονται στη ροή. Πιο συγκεκριμένα, για το στρωτό συνοριακό στρώμα χρησιμοποίησαν ταχύτητα αέρα 36

m/sec και παρατήρησαν αρχικά την ανάπτυξη περιοδικών κυμάτων που σχηματίζουν γωνία 45° με τη διεύθυνση της κύριας ροής και στην συνέχεια την γρήγορη ανάπτυξη κατά τη διεύθυνση της ροής περιοδικού κυματοπακέτου που έχει το μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης και μήκος κύματος που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία για τα διεπιφανειακά κύματα. Αυξάνοντας την ταχύτητα του αέρα κατέγραψαν πάλι τη γραμμική συμπεριφορά του πιο γρήγορα αναπτυσσόμενου διεπιφανειακού κύματος στη στρωτή περιοχή κοντά στο μπροστινό άκρο, αλλά στην μεταβατική και τυρβώδη περιοχή παρατήρησαν ότι το κυματοπακέτο παύει να είναι περιοδικό.

Τέλος, μια πιο πρόσφατη μελέτη είναι αυτή των Ozgen et al. (2002). Οι παραπάνω ερευνητές προσπάθησαν να καταγράψουν τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που αναπτύσσονται όταν αέριο ρεύμα τυρβώδους ροής ρέει είτε πάνω από de-icing, είτε πάνω από anti-icing ρευστό και το θέτει σε κίνηση. Χρησιμοποίησαν ρευστά με διαφορετικές ιδιότητες και παρατήρησαν ότι πάνω από μια κρίσιμη ταχύτητα του αέρα αναπτύσσονται διδιάστατα κύματα. Τα χαρακτηριστικά των κυμάτων, όπως το μήκος και η ταχύτητα μεταφοράς τους, μετρήθηκαν χρησιμοποιώντας την τεχνική απορρόφησης φωτός, η οποία συνδέει το πάχος του ρευστού με την μετρούμενη ένταση του φωτός. Στη συνέχεια, τα πειραματικά αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τις προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας. Κατά τη διάρκεια των πειραμάτων παρατήρησαν ότι μειώνοντας αρκετά το πάχος του υμένα υπάρχει σημαντική μείωση τόσο στο μήκος κύματος όσο και στη ταχύτητα των διεπιφανειακών κυμάτων. Επίσης, συνέκριναν τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που κατέγραψαν με τις πειραματικές παρατηρήσεις του Craik (1966) και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι αυτά ανήκουν στην κατηγορία των «γρήγορων» κυμάτων αφού είναι σχεδόν περιοδικά, έχουν ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα της διεπιφάνειας και τα μήκη κύματος τους κυμαίνονται μεταξύ 1-2 cm. Τέλος, παρατήρησαν ότι όταν το πάχος του υμένα γίνει πολύ λεπτό τότε εμφανίζονται μη περιοδικά κύματα καθώς και στεγνές περιοχές πάνω στην στερεή επιφάνεια.

Αν και οι πειραματικές έρευνες στον τομέα αυτό δεν είναι πολλές, αντίθετα πολλές μελέτες έχουν γίνει για την ευστάθεια των συγκεκριμένων ροών στη γραμμική περιοχή τόσο υπολογιστικά όσο και αναλυτικά. Ο Miles (1960, 1962) μελέτησε την ευστάθεια υγρού υμένα ο οποίος ρέει υπό την επίδραση τυρβώδους συνοριακού στρώματος υπολογίζοντας τη διατμητική τάση που το συνοριακό στρώμα ασκεί σε στερεή επιφάνεια και ενσωματώνοντας στην συνέχεια τον υπολογισμό αυτό στη λύση

της διεπιφάνειας. Κατάφερε τελικά να προσδιορίσει τον κρίσιμο αριθμό Reynolds πάνω από το οποίο εμφανίζονται οι διεπιφανειακές αστάθειες.

Ο Yih (1967) μελέτησε την ευστάθεια διαφασικής ροής Poiseuille για διαταραχές μεγάλου μήκους. Απέδειξε ότι εκτός από τα κύματα Tollmien-Schlichting αναπτύσσονται, εξαιτίας της διαφοράς ιξώδους μεταξύ των δυο ρευστών, διεπιφανειακές αστάθειες για μικρούς αριθμούς Reynolds. Αν και δεν εξέτασε την επίδραση των παραμέτρων του προβλήματος στο ρυθμό ανάπτυξης των ασταθειών, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι αν το πιο ιξώδες ρευστό είναι και το πιο λεπτό το σύστημα είναι ασταθές σε διαταραχές μεγάλου μήκους ανεξάρτητα από τον αριθμό Re. Οι Yiantsios και Higgins (1988) εφάρμοσαν τη θεωρία γραμμικής ευστάθειας για διαφασική ροή Poiseuille και μεταξύ άλλων επιβεβαίωσαν τα αποτελέσματα του Yih. Αργότερα, ο Yih (1990) επικεντρώθηκε στη μελέτη ευστάθειας της ροής κατά την οποία ρευστό ρέει πάνω από άλλο ρευστό μεγαλύτερης πυκνότητας και μεγαλύτερου ιξώδους. Θεώρησε λύση μορφής Blasius μέσα στο συνοριακό στρώμα και κατέγραψε τους ρυθμούς ανάπτυξης και τη φασική ταχύτητα των διεπιφανειακών κυμάτων.

Οι Caroni et al. (1982) επίλυσαν τις εξισώσεις Navier Stokes για μόνιμη και περιοδική ροή αέρα πάνω από περιοδικό κύμα υγρού που μετακινείται με σταθερή ταχύτητα. Για κύματα μικρού πλάτους αναπαράγουν αποτελέσματα προηγούμενων μελετών, όπως είναι η αναλυτική μελέτη του Benjamin (1959). Καθώς το πλάτος του κύματος αυξάνεται παρατήρησαν σημαντικές αλλαγές στην κατανομή της πίεσης πάνω στη διεπιφάνεια αέρα-υγρού.

Οι Hooper και Boyd (1983) μελέτησαν αναλυτικά (ασυμπτωτικά) και υπολογιστικά την ευστάθεια σε διαταραχές μικρού μήκους ανοιχτής διαφασικής ροής μεταξύ δυο ρευστών με διαφορετικό ιξώδες. Απέδειξαν ότι το σύστημα είναι ασταθές για ρευστά ίδιας πυκνότητας και μηδενικής επιφανειακής τάσης. Επιπλέον, παρατήρησαν ότι η επιφανειακή τάση δρα πάντα σταθεροποιητικά, ενώ ο ρόλος που έχει η διαφορά πυκνοτήτων εξαρτάται από το λόγο των ιξωδών. Οι ίδιοι ερευνητές (Hooper και Boyd, 1987) μελέτησαν την διαφασική ροή πάνω από πλάκα για γραμμικό προφίλ διάτμησης. Για μεγάλους αριθμούς Re, παρατήρησαν κύματα με μήκος μεγαλύτερο από το πάχος του υμένα. Όταν το κατώτερο ρευστό είναι και το πιο ιξώδες τα κύματα αυτά μπορεί να έχουν μήκος μεγαλύτερο από το πάχος του ιξώδους υπόστρωματος του συνοριακού στρώματος.

Οι Smith et al. (1981) απέδειξαν ότι τα χαρακτηριστικά της ροής με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από εμπόδιο εξαρτώνται μόνο από το αδιάστατο μήκος και το

αδιάστατο ύψος του εμποδίου. Θεώρησαν δυο περιπτώσεις: τη ροή πάνω από εμπόδιο με μήκος της τάξης του πάχους του συνοριακού στρώματος, και τη ροή πάνω από εμπόδιο μεγάλου μήκους με ύψος της τάξης του πάχους του συνοριακού στρώματος. Στην πρώτη περίπτωση έδειξαν ότι η ροή καθορίζεται από την πίεση που προκαλείται τοπικά γύρω από το εμπόδιο, από το ύψος του εμποδίου και από την κλίμακα μήκους της τριπλής στιβάδας. Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση η ροή καθορίζεται από την πίεση που επικρατεί στην κύρια ροή. Τελικά κατέληξαν στο ότι για την πρώτη περίπτωση το κατάλληλο πλαίσιο για τη μελέτη ευστάθειας ροής καθορίζεται από τη θεωρία της τριπλής στιβάδας. Ο Duck (1985), εισάγοντας τις κλίμακες της τριπλής στιβάδας, μελέτησε για μεγάλο αριθμό Re την ευστάθεια της ροής πάνω από ένα μικρό εμπόδιο που μεταβάλλεται με το χρόνο, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του πεπερασμένου μετασχηματισμού Fourier. Παρατήρησε ότι εξαιτίας της αστάθειας Tollmien-Schlichting εμφανίζονται κύματα που το πλάτος τους μεγαλώνει καθώς μεταφέρονται κατάντη της ροής. Παρόμοιες αριθμητικές προσομοιώσεις έγιναν για πρώτη φορά από τον Smith (1984) και τους συνεργάτες του με χρήση είτε φασματικών μεθόδων, μετασχηματισμό Fourier, είτε πεπερασμένων διαφορών. Εκτενής αναφορά δίνεται σε σχετικό άρθρο (Smith, 1984).

Ο Timoshin (1997) πραγματοποίησε γραμμική ανάλυση ευστάθειας για τη ροή αερίου ρεύματος με υψηλό αριθμό Re πάνω από υγρό υμένα εισάγοντας τις κλίμακες της θεωρίας τριπλής στιβάδας. Θεώρησε παράλληλη τη βασική ροή, σταθερή ογκομετρική παροχή για το υγρό και πραγματοποίησε παραμετρική μελέτη τόσο για την ευστάθεια των κυμάτων Tollmien-Schlichting όσο και για τα διεπιφανειακά. Οι παράμετροι του προβλήματος που εξετάσε είναι ο λόγος ιξωδών και ο λόγος πυκνοτήτων μεταξύ των δύο φάσεων, ο αριθμός We , ο οποίος εκφράζει τις αδρανειακές δυνάμεις σε σχέση με τις επιφανειακές δυνάμεις, και τέλος, ο αριθμός Fr που συγκρίνει τις αδρανειακές με τις βαρυτικές δυνάμεις. Απέδειξε ότι η παρουσία του υμένα καθώς και η αύξηση του ιξώδους του κατώτερου ρευστού αποσταθεροποιούν τα κύματα Tollmien-Schlichting. Επίσης, κατάφερε να ανακτήσει τα διεπιφανειακά κύματα που προβλέπονται από τους Hooper και Boyd (1987) όταν το υγρό μεγαλύτερου ιξώδους βρίσκεται πάνω στην στερεή επιφάνεια, αλλά και όταν ρέει πάνω από το ρευστό μικρότερου ιξώδους. Τέλος, συνέκρινε τα αποτελέσματα της θεωρίας που ανέπτυξε με τα πειράματα των Ludwig και Hornung (1989) που αναφέρθηκαν παραπάνω. Από τη σύγκριση προέκυψε συμφωνία μεταξύ των δύο μελετών ως προς το μήκος κύματος των κυμάτων που αναπτύσσονται.

Οι Tsao, Rothmayer και Ruban (1997) ακολούθησαν την ίδια διαδικασία με αυτή του Timoshin συγκεκριμενοποιώντας την όμως για de/anti-icing ρευστά. Έτσι, θεώρησαν το κατώτερο ρευστό πολύ πιο ιξώδες σε σχέση με το ρευστό που ρέει πάνω και κατάφεραν με τον τρόπο αυτό να αποσυνδέσουν τη δυναμική συμπεριφορά των δύο ρευστών και να επικεντρωθούν στη μελέτη των κυμάτων της διεπιφάνειας.

Οι Pelekasis & Tsamopoulos (2001) διεξήγαγαν μια παρόμοια έρευνα με αυτή του Timoshin θεωρώντας όμως τον σχηματισμό της υγρής φάσης αποτέλεσμα σταθερού ρυθμού βροχόπτωσης και όχι σταθερής ογκομετρικής παροχής. Αποδείχθηκε ότι τα διεπιφανειακά κύματα μπορούν να είναι απολύτως ασταθή για τιμές παραμέτρων (λόγος ιξωδών, λόγος πυκνοτήτων, αριθμός We, αριθμός Fr) με φυσική σημασία. Το είδος της αστάθειας τους καθορίζεται από το μέγεθος των βαρυτικών και επιφανειακών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές δυνάμεις. Επιπλέον, μελέτησαν την επίδραση που έχουν οι παράμετροι We και Fr στην ευστάθεια του συστήματος αέρα-νερού. Απέδειξαν ότι καθώς μειώνεται ο Fr, και κατά συνέπεια αυξάνεται η επίδραση των βαρυτικών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές, η περιοχή της απόλυτης αστάθειας μειώνεται. Όταν ο Fr πάρει μια κρίσιμη τιμή τότε η αστάθεια γίνεται συναγωγική. Επίσης, μειώνοντας τον αριθμό We, και επομένως αυξάνοντας την επίδραση των επιφανειακών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές, η περιοχή της απόλυτης αστάθειας μετακινείται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το μπροστινό άκρο του πτερυγίου. Και στην περίπτωση αυτή, όταν ο We πάρει μια κρίσιμη τιμή τότε η αστάθεια γίνεται συναγωγική. Μεγαλύτερη μείωση είτε στον We, είτε στον Fr, οδηγεί σε ευσταθείς λύσεις γεγονός που επιβεβαιώνει τον σταθεροποιητικό χαρακτήρα της βαρύτητας και της επιφανειακής τάσης.

Τέλος, οι Rothmayer, Matheis και Timoshin (2002) θεώρησαν μικρότερη κλίμακα από αυτή της τριπλής στιβάδας και επικεντρώθηκαν στην περιοχή μέσα στο ιξώδες υπόστρωμα (condensed layer) για την οποία το πάχος μετατόπισης του ιξώδους υποστρώματος μπορεί να θεωρηθεί μηδενικό. Για την περιγραφή της ροής του υμένα επέλεξαν μοντέλο που συμπεριλαμβάνει και τους αδρανειακούς όρους του υγρού. Απέδειξαν ότι για πολύ λεπτούς υμένες το μοντέλο του condensed layer περιγράφει ικανοποιητικά τη γραμμική εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων, ενώ για υμένες μεγαλύτερου πάχους είναι απαραίτητη η εισαγωγή του μοντέλου τριπλής στιβάδας. Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές το πάχος του condensed layer είναι το μικρότερο πάχος για το οποίο η αδράνεια του υγρού γίνεται σημαντική. Επιπλέον, αποτελεί ένα όριο πάχους πάνω από το οποίο η μεταφορά των διεπιφανειακών

κυμάτων κυριαρχείται από την πτώση πίεσης και όχι από τη διάτμηση του αέρα. Τέλος, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι σε κάθε περίπτωση η αδράνεια του υγρού πρέπει να συμπεριλαμβάνεται κατά την μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων.

1.4 Οργάνωση Διατριβής

Η παρούσα διατριβή αποτελείται συνολικά από οχτώ κεφάλαια. Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφονται αναλυτικά τα προβλήματα που θα επιλυθούν αριθμητικά και παρουσιάζονται οι εξισώσεις που τα διέπουν, ενώ στο τρίτο παρουσιάζεται συνοπτικά η γραμμική ανάλυση ευστάθειας για την αλληλεπίδραση συνοριακού στρώματος με υγρό υμένα όπως έχει προκύψει από τη βιβλιογραφία. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται διεξοδικά η ανάπτυξη της ασθενώς μη-γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας και η εξαγωγή της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger για την υπό εξέταση ροή. Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, γίνεται ανάπτυξη της μεθοδολογίας αριθμητικής επίλυσης και αναφέρονται αναλυτικά τα αριθμητικά προβλήματα που προκύπτουν καθώς και τρόποι αντιμετώπισης τους.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τα διεπιφανειακά κύματα για πολύ ιξώδη υγρά ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ο λόγος των ιξωδών μεταξύ των δύο φάσεων τείνει στο μηδέν. Σε αυτό το όριο απουσιάζουν οι αδρανειακοί όροι από το υγρό και, μετά από ολοκλήρωση των εξισώσεων ορμής μέσα στο υγρό, η επίλυση της χωροχρονικής μεταβολής του πάχους του υμένα απλοποιείται περικλείοντας μεταβολές μόνο κατά την αξονική διάσταση. Η ροή στην αέρια φάση επιλύεται χωριστά και η επίδραση της διάτμησης, της πτώσης πίεσης, της επιφανειακής τάσης και της βαρύτητας ενσωματώνονται στην εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή του πάχους του υμένα. Αρχικά γίνεται έλεγχος της αξιοπιστίας της μεθοδολογίας που αναπτύχθηκε με προσομοιώσεις στην γραμμική περιοχή και με ανάκτηση των αποτελεσμάτων της γραμμικής θεωρίας. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι προβλέψεις της ασθενώς μη γραμμικής θεωρίας καθώς και τα αποτελέσματα των δυναμικών προσομοιώσεων στην ίδια περιοχή. Τέλος, η μελέτη επικεντρώνεται στα μη γραμμικά φαινόμενα που κυριαρχούν κατά την χωροχρονική εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το μοντέλο που λαμβάνει υπόψη την αδράνεια του υγρού. Σε αυτή την περίπτωση ανήκουν λιγότερο ιξώδη υγρά και η επίλυση γίνεται σε δυο διαστάσεις τόσο στην αέρια όσο και στην υγρή φάση. Στο κεφάλαιο

αυτό μελετάται η επίδραση που έχει η αδράνεια του υγρού στην εξέλιξη των κυμάτων αρχικά στη γραμμική και στη συνέχεια στη μη- γραμμική περιοχή. Επίσης, γίνεται προσπάθεια να προσδιοριστούν οι περιπτώσεις για τις οποίες η αδράνεια του υγρού είναι σημαντική. Στο έβδομο κεφάλαιο μελετώνται τα διεπιφανειακά κύματα παρουσία των Tollmien-Schlichting για να διαπιστωθεί αν και με ποιο τρόπο αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Για το σκοπό αυτό επιτρέπονται χρονικές μεταβολές όχι μόνο στην υγρή αλλά και την αέρια φάση. Τέλος, στο κεφάλαιο 8 αναφέρονται τα σημαντικότερα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής και προτείνονται κάποιες κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα.

2. ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Γενικά

Κατά τη ροή αέρα πάνω από λεπτό υμένα υγρού εμφανίζονται δύο είδη κυματώσεων: τα κύματα Tollmien-Schlichting και τα διεπιφανειακά. Τα κύματα Tollmien-Schlichting εμφανίζονται στην κύρια μάζα του συνοριακού στρώματος ανεξάρτητα από την παρουσία του υγρού, είναι συναγωγικώς ασταθή, δηλαδή μεταφέρονται με τη βοήθεια της ροής μακριά από το σημείο εμφάνισής τους, και τελικά οδηγούν σε τύρβη. Αντίθετα τα διεπιφανειακά κύματα που αναπτύσσονται στην διεπιφάνεια του υγρού υμένα και του αέρα έχουν μικρότερους ρυθμούς ανάπτυξης σε σχέση με τα κύματα Tollmien-Schlichting και έχει αποδειχθεί, στα όρια ισχύος της γραμμικής θεωρίας, ότι μπορεί να είναι είτε συναγωγικώς, είτε απολύτως ασταθή, δηλαδή να παραμένουν και να αναπτύσσονται στο σημείο εμφάνισής τους (Pelekasis & Tsamopoulos, 2001). Στην παρούσα διατριβή, με την εισαγωγή κατάλληλης χρονικής κλίμακας, επικεντρωνόμαστε στη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων και στην χωροχρονική εξέλιξη τους. Μας ενδιαφέρει επίσης η κατανόηση της αλληλεπίδρασης των διεπιφανειακών κυμάτων με το αέριο συνοριακό στρώμα και η διερεύνηση ύπαρξης πιθανότητας καταστροφής της δομής του συνοριακού στρώματος σαν αποτέλεσμα της ανάπτυξης διεπιφανειακών κυμάτων.

Κατά την επίλυση της ροής αέρα πάνω από το υγρό υμένα αρχικά εξετάζονται περιπτώσεις ρευστών με πολύ μεγαλύτερο ιξώδες από αυτό του αέρα ώστε ο λόγος των ιξωδών τους να μπορεί να θεωρηθεί μηδενικός. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν πολλά από τα anti-icing ρευστά που χρησιμοποιούνται για την αποφυγή δημιουργίας πάγου πάνω σε πτερύγια αεροσκαφών. Στην περίπτωση τέτοιων ρευστών απλοποιείται η επίλυση στην υγρή φάση αφού οι αδρανειακές δυνάμεις μέσα σε αυτή μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Στη συνέχεια, εξετάζονται υγρά για τα οποία ο λόγος ιξωδών μεταξύ αέρας και υγρής φάσης είναι μικρός αλλά όχι τόσο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί μηδενικός. Τέτοια περίπτωση είναι για παράδειγμα η ροή αέρα πάνω από λεπτό υμένα νερού ο οποίος έχει σχηματισθεί πάνω σε πτερύγιο εξαιτίας βροχόπτωσης. Στις μέχρι τώρα αριθμητικές μελέτες δεν υπάρχει διαφοροποίηση στην επίλυση του προβλήματος μεταξύ ιξωδών και πολύ ιξωδών ρευστών. Στόχος μας είναι να διερευνηθεί αν στην περίπτωση ρευστών με ιξώδες της τάξεως του νερού

είναι σωστό να αγνοηθεί η αδράνεια του υγρού και υπό ποιες συνθήκες μπορεί να συμβεί κάτι τέτοιο. Επίσης, αν η αδράνεια δεν μπορεί να αγνοηθεί σε όλες τις περιπτώσεις, θα πρέπει να προσδιοριστεί η επίπτωση που αυτή έχει στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων και να βρεθεί, αν υπάρχει, κάποια κρίσιμη τιμή του λόγου ιξωδών πάνω από την οποία οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού είναι σημαντικές. Τέλος, με την εισαγωγή κατάλληλης χρονικής κλίμακας, γίνεται προσπάθεια μελέτης των διεπιφανειακών κυμάτων παρουσία των Tollmien-Schlichting ώστε να επιβεβαιωθεί, αν είναι δυνατό, το γεγονός ότι αυτά τα δύο είδη κυματώσεων δεν αλληλεπιδρούν για τις περιπτώσεις ρευστών που μας ενδιαφέρουν.

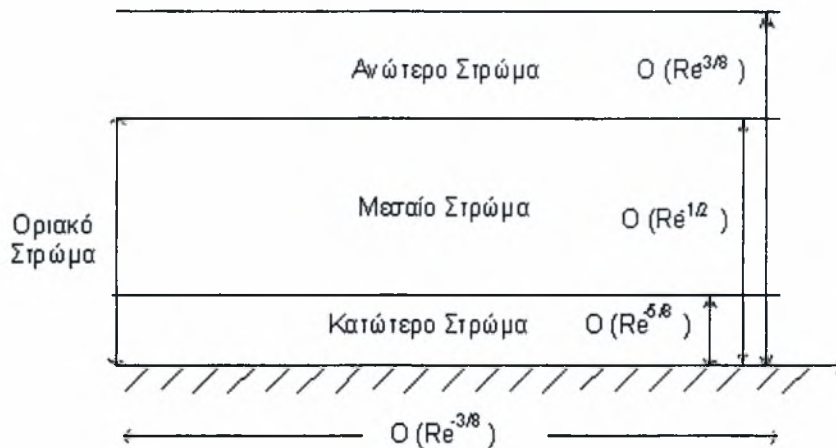
Έχει αποδειχθεί ότι το κατάλληλο πλαίσιο για την μελέτη της ευστάθειας συνοριακού στρώματος παρουσία υγρού φιλμ ή κάποιου εμποδίου καθορίζεται από τη θεωρία τριπλής στιβάδας (Smith et al., 1981) η οποία περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 2.2.

2.2 Θεωρία τριπλής στιβάδας

Η θεωρία της τριπλής στιβάδας διατυπώθηκε από τους Stewartson (1974) και Messiter (1975) και αποτελεί μια ασυμπτωτική περιγραφή του συνοριακού στρώματος γύρω από εμπόδια ή σημεία αποκόλλησης για ροές με μεγάλο αριθμό Re . Η ανάγκη ανάπτυξης της προέκυψε από την αδυναμία της κλασσικής θεωρίας συνοριακού στρώματος να περιγράψει περιοχές της ροής με σημεία αποκόλλησης. Είναι γνωστό ότι όταν συμβεί αποκόλληση του συνοριακού στρώματος το πάχος του αυξάνει απότομα με συνέπεια να μην ισχύουν οι παραδοχές που οδήγησαν στις εξισώσεις της κλασσικής θεωρίας του Prandtl. Αντίθετα, σε περιοχές όπου υπάρχει αποκόλληση δεν είναι σωστό η πίεση να επιβάλλεται από την εξωτερική ροή αλλά θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ εξωτερικής ροής και συνοριακού στρώματος.

Η θεωρία της τριπλής στιβάδας περιγράφει την περιοχή γύρω από σημεία αποκόλλησης ή εμπόδια με τη βοήθεια τριών στιβάδων των οποίων το μήκος κατά τη διεύθυνση της ροής είναι τάξης $O(Re^{-3/8}L)$, όπου L είναι το χαρακτηριστικό μήκος της στερεής επιφάνειας και Re ο αριθμός Reynolds της βασικής ροής. Στην κάθετη διεύθυνση η ροή χωρίζεται σε τρία στρώματα: ένα ιξώδες υπόστρωμα πάχους τάξης $O(Re^{-5/8}L)$, ένα μεσαίο άτριβο αλλά στροβιλώδες στρώμα πάχους τάξης $O(Re^{-1/2}L)$ και ένα ανώτερο άτριβο και αστρόβιλο στρώμα πάχους τάξης $O(Re^{-3/8}L)$. Το ύψος του ιξώδους υποστρώματος προκύπτει αναζητώντας το μικρότερο πάχος για το οποίο

συνυπάρχουν οι αδρανειακές και οι ιξώδεις δυνάμεις. Το χαρακτηριστικό μήκος της τριπλής στιβάδας προσδιορίζεται απαιτώντας την εξισορρόπηση των αδρανειακών και ιξωδών δυνάμεων από την πτώση πίεσης μέσα στο ιξώδες υπόστρωμα ώστε να είναι δυνατή η αλληλεπίδραση με την εξωτερική ροή. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζονται οι τρεις στιβάδες και οι κλίμακες τους.



Σχήμα 2.1: Σχηματική απεικόνιση θεωρίας τριπλής στιβάδας.

Όπως έχει βρεθεί παλαιότερα, οι διαταραχές που μεγαλώνουν πιο γρήγορα στην περίπτωση ροής συνοριακού στρώματος είναι αυτές που το μέγεθος τους ακολουθεί την κλίμακα της τριπλής στιβάδας (Smith et al., 1981). Έτσι, στα πλαίσια της συγκεκριμένης θεωρίας και της ροής που μελετάται, είναι σημαντικό να προσδιοριστεί αν υπάρχουν συνθήκες υπό τις οποίες η δυναμική συμπεριφορά της διεπιφάνειας μπορεί να προκαλέσει σημαντικές αλλαγές στη δομή του συνοριακού στρώματος, όπως για παράδειγμα δημιουργία δινών ανακυκλοφορίας και εκτεταμένη αποκόλληση.

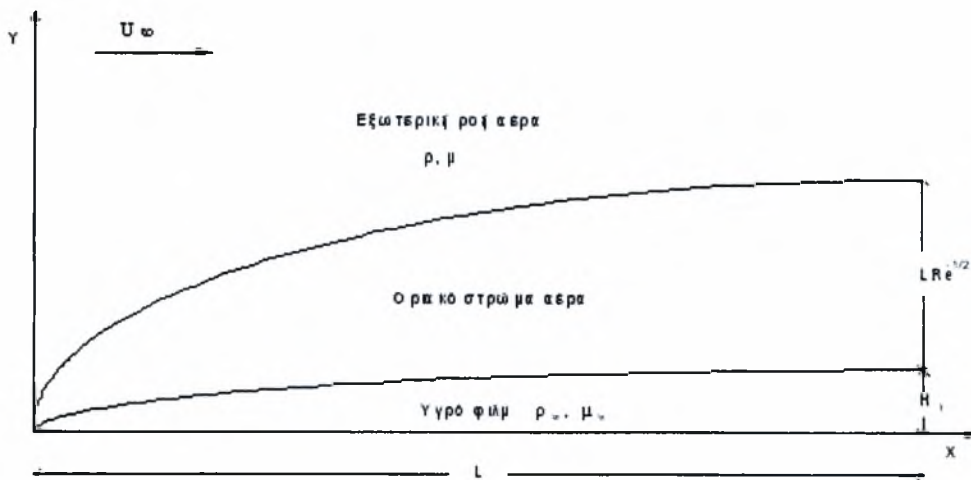
2.3 Εξισώσεις ροής αέρα πάνω από λεπτό υμένα υγρού

2.3.1 Βασική ροή

Θεωρούμε ένα αέριο ρεύμα πυκνότητας ρ και ιξώδους μ το οποίο ρέει με υψηλό αριθμό Re πάνω από οριζόντια πλάκα μήκους L στην επιφάνεια της οποίας έχει σχηματιστεί λεπτός υμένας υγρού. Με βάση την ταχύτητα U_∞ του αέρα ο αριθμός

Reynolds ισούται με $Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$. Υπό την επίδραση της αέριας διάτμησης το υγρό

πυκνότητας ρ_w και ιξώδους μ_w τίθεται σε κίνηση. Μια σχηματική περιγραφή της ροής αέρα πάνω από λεπτό υμένα υγρού δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 2.2: Σχηματική απεικόνιση ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ.

Για την αδιαστατοποίηση των εξισώσεων ροής στην αέρια φάση χρησιμοποιήθηκαν οι εξής κλίμακες (Smyrniotis, 2002): το μήκος της πλάκας L και μια εκτίμηση του πάχους του συνοριακού στρώματος $LRe^{-1/2}$ ως χαρακτηριστικά μήκη στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα, και οι ποσότητες U_∞ και $U_\infty Re^{-1/2}$ ως χαρακτηριστικές ταχύτητες στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα. Στην υγρή φάση χρησιμοποιήθηκε η κλίμακα L στην οριζόντια διεύθυνση και το πάχος του υμένα H_f ως χαρακτηριστικά μήκη στην κάθετη διεύθυνση. Ως χαρακτηριστικές ταχύτητες χρησιμοποιήθηκαν οι ποσότητες u_f και $u_f H_f / L$ στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα, όπου u_f η χαρακτηριστική ταχύτητα του υγρού στην κύρια διεύθυνση ροής. Τα u_f και H_f προκύπτουν εφαρμόζοντας το ισοζύγιο μάζας και το ισοζύγιο τάσεων στην διεπιφάνεια αερίου-υγρού.

Οι εξισώσεις της βασικής ροής για ροή αέρα πάνω από λεπτό υμένα υγρού έχουν υπολογισθεί αριθμητικά και ασυμπτωτικά (Smyrniotis et al., 2000). Στο όριο $\epsilon = H_f / (LRe^{-1/2}) \rightarrow 0$, όπου H_f το πάχος του υγρού και $LRe^{-1/2}$ μια εκτίμηση του πάχους συνοριακού στρώματος, η λύση μέσα στο συνοριακό στρώμα αέρα παίρνει την μορφή Blasius. Αν $U_0 = df/dn$ η ταχύτητα στο συνοριακό στρώμα τότε αυτή ικανοποιεί τη σχέση:

$$2 \frac{d^3 f}{dn^3} + f \frac{d^2 f}{dn^2} = 0 \quad (2.1)$$

με συνοριακές συνθήκες:

$$f(n \rightarrow \infty) = 1 \text{ και } f(n = 0) = \frac{df}{dn}(n = 0) = 0 \quad (2.2)$$

Για τον σχηματισμό του υγρού υμένα εξετάζονται δυο διαφορετικές περιπτώσεις. Η πρώτη λαμβάνει υπόψη ένα σταθερό ρυθμό \dot{r} κατακόρυφης εναπόθεσης υγρού στην επιφάνεια της πλάκας, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην περίπτωση της βροχόπτωσης, ενώ η δεύτερη θεωρεί σταθερή ογκομετρική παροχή Q και ισχύει για παράδειγμα στην περίπτωση των de/anti-icing ρευστών. Όταν ο υμένας έχει σχηματιστεί εξαιτίας ενός σταθερού ρυθμού εναπόθεσης \dot{r} μια εκτίμηση για τις κλίμακες u_f και H_f δίνεται παρακάτω (Pelekasis & Tsamopoulos, 2001):

$$\frac{H_f}{L} = Re^{-1/4} \left(\frac{\mu_w}{\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{\dot{r}}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$\frac{u_f}{U_\infty} = Re^{1/4} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{1/2} \left(\frac{\dot{r}}{U_\infty} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

Στην περίπτωση αυτή το πάχος και η ταχύτητα του υγρού σε αδιάστατη μορφή δίδονται από τις παρακάτω σχέσεις (Smyrniotis et al., 2000):

$$H_0(x) = x^{3/4} \sqrt{\frac{2}{0.332}} \quad (2.5)$$

$$u_0(x) = x^{1/4} \frac{y}{H_0(x)} \sqrt{0.664} \quad (2.6)$$

Όταν ο υγρός υμένας έχει σχηματιστεί ως αποτέλεσμα σταθερής παροχής Q ανά μονάδα επιφάνειας τότε οι κλίμακες u_f και H_f υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\frac{H_f}{L} = Re^{-1/4} \left(\frac{\mu_w}{\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{Q}{LU_\infty} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

$$\frac{u_f}{U_\infty} = Re^{1/4} \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^{1/2} \left(\frac{Q}{LU_\infty} \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

Αντίστοιχα, το πάχος και η ταχύτητα του υγρού σε αδιάστατη μορφή είναι:

$$H_0(x) = x^{1/4} \sqrt{\frac{2}{0.332}} \quad (2.9)$$

$$u_0(x) = x^{-1/4} \frac{y}{H_0(x)} \sqrt{0.664} \quad (2.10)$$

2.3.2 Εξισώσεις ροής

Με βάση τις κλίμακες που προτείνει η θεωρία τριπλής στιβάδας αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια μήκους L , πάνω από την οποία διέρχεται συνοριακό στρώμα αέρα, η κατάλληλη τοπική κλίμακα για να περιγράψει την ευστάθεια της ροής σε μια

δεδομένη θέση x_0 είναι η $X = \frac{x - x_0}{\lambda_d}$, όπου $\lambda_d = Re^{-3/8}L$. Είναι φανερό ότι επειδή η

διαταραγμένη ροή μεταβάλλεται σε μια πολύ μικρή κλίμακα, $X \sim \lambda_d = LRe^{-3/8}$, σε σχέση με την κλίμακα της βασικής ροής, $x \sim L$, οι μεταβολές της βασικής ροής ως προς τη νέα κλίμακα X μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τη βασική ροή ως σχεδόν παράλληλη. Σύμφωνα με τους Smith et al. (1981) για εμπόδιο χαρακτηριστικού μήκους λ_d και πάχους $H_f = \varepsilon Re^{-1/2}$, τοποθετημένο εντός του συνοριακού στρώματος, η αξονική ταχύτητα κοντά στο εμπόδιο είναι τάξης ε και το μικρότερο πάχος υγρού εντός του οποίου μπορούν να συνυπάρξουν οι ιξώδεις και οι αδρανειακοί όροι προσδιορίζεται από το ισοζύγιο

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\lambda_d} \sim \frac{1}{Re} \frac{\varepsilon}{[\varepsilon Re^{-1/2}]^2} \rightarrow \varepsilon \sim \lambda_d^{1/3} \rightarrow H_f \sim \lambda_d^{1/3} Re^{-1/2}. \text{ Προκειμένου δε}$$

αυτό το εμπόδιο να καταστεί δυνατό να αλληλεπιδράσει και ενδεχομένως να προκαλέσει αποκόλληση της εξωτερικής ροής πρέπει το χαρακτηριστικό του μήκους λ_d να είναι τέτοιο ώστε η προκαλούμενη πτώση πίεσης να εξισορροπεί τους ιξώδεις και αδρανειακούς όρους. Έτσι προκύπτει ότι:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim -\frac{\partial P}{\partial x} \rightarrow \frac{\varepsilon^2}{\lambda_d} \sim \frac{H_f}{\lambda_d^2} \rightarrow H_f \sim \lambda_d^{5/3} \rightarrow \lambda_d \sim Re^{-3/8}, \quad H_f \sim Re^{-5/8}, \quad \varepsilon = \frac{H_f}{Re^{-1/2}} = Re^{-1/8}.$$

Συνεπώς για την αδιαστατοποίηση των μεγεθών που καθορίζουν την ευστάθεια συνοριακού στρώματος χρησιμοποιείται ως χαρακτηριστικό μήκος στη διεύθυνση της ροής το χαρακτηριστικό μήκος των στιβάδων $\lambda_d^{1/3} = LRe^{-3/8}$ και στη κάθετη διεύθυνση το χαρακτηριστικό ύψος της ιξώδους στιβάδας $LRe^{-5/8}$. Ως χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής χρησιμοποιείται η ποσότητα εU_∞ , $\varepsilon = Re^{-1/8}$, ενώ στη κάθετη διεύθυνση η $\varepsilon^3 U_\infty$. Στο υγρό ως χαρακτηριστική ταχύτητα στη διεύθυνση της ροής λαμβάνεται η $\frac{\mu}{\mu_w} \varepsilon U_\infty$, και στη κάθετη διεύθυνση η $\frac{\mu}{\mu_w} \varepsilon^3 U_\infty$. Για την

αδιαστατοποίηση της πίεσης χρησιμοποιείται η ποσότητα $\varepsilon^2 \rho U_\infty^2$. Οι συγκεκριμένες κλίμακες προκύπτουν ως αποτέλεσμα της ισορροπίας μεταξύ των όρων συναγωγής, διάχυσης και πίεσης (Smith et al., 1981 ; Timoshin, 1997) όπως περιγράφηκε

παραπάνω. Επίσης, όπως αποδείχθηκε παραπάνω, προκύπτει ότι η μικρή μεταβλητή που χρησιμοποιείται στην ασυμπτωτική περιγραφή στην θεωρία τριπλής στιβάδας

είναι ίση με $\varepsilon = \frac{H_f}{LRe^{-1/2}} = Re^{-1/8}$. Τέλος, η κατάλληλη χρονική κλίμακα για την

μελέτη των κυματώσεων Tollmien-Schlichting είναι ο χρόνος $T_{TS} = \frac{\lambda_y}{\varepsilon U_\infty}$, ενώ για τα

διεπιφανειακά κύματα η αντίστοιχη χρονική κλίμακα ισούται με $T_{IN} = \frac{\lambda_d}{u_f} = \frac{\lambda_d}{\varepsilon \frac{\mu}{\mu_w} U_\infty}$.

Επειδή, στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, η μελέτη επικεντρώνεται στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων χρησιμοποιείται η χρονική κλίμακα που επιβάλλεται από την κίνηση της διεπιφάνειας για την αδιαστατοποίηση του προβλήματος.

Στην αέρια φάση εισάγεται η μετασχηματισμένη μεταβλητή $\bar{Y} = Y - h(X, t)$, όπου h είναι το ύψος της διεπιφάνειας, και μέσω του μετασχηματισμού Prandtl η

μεταβλητή \bar{V} για την οποία ισχύει $\bar{V} = V - U \frac{\partial h}{\partial X} - \frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial h}{\partial t}$. Επομένως, οι αδιάστατες

εξισώσεις που διέπουν την ροή μέσα στο ιξώδες υπόστρωμα του συνοριακού στρώματος είναι:

Ισοζύγιο ορμής στην X-κατεύθυνση:

$$\frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} - \bar{V} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.11)$$

Εισάγοντας την ροϊκή συνάρτηση η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή :

$$\frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.12)$$

όπου:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}} \quad (2.13)$$

Ισοζύγιο ορμής στην Y-κατεύθυνση:

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (2.14)$$

Η πίεση συνδέεται με το πάχος μετατόπισης μέσω του νόμου αλληλεπίδρασης:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{X-s} \quad (2.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση προκύπτει από την επίλυση της Laplace στο ανώτερο στρώμα του συνοριακού στρώματος:

$$\frac{\partial^2 P''}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 P''}{\partial Y'^2} = 0 \quad (2.16)$$

με συνοριακή συνθήκη εκτός του ανώτερου στρώματος:

$$Y'' \rightarrow \infty : P'' = 0 \quad (2.17)$$

και στο όριο μεταξύ μεσαίου και ανώτερου στρώματος:

$$\frac{\partial V''}{\partial X} = -\frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial P''}{\partial Y''}, \quad V' = V'', \quad P = P' = P'' \quad (2.18)$$

όπου Y'', V'', P'' , η εγκάρσια συντεταγμένη, ταχύτητας και πίεσης μέσα στο ανώτερο στρώμα και Y', V', P' οι αντίστοιχες ποσότητες στο μεσαίο στρώμα.

Επίσης, πρέπει να υπάρχει συνέχεια ταχυτήτων μεταξύ του κατώτερου και του μεσαίου στρώματος οπότε προκύπτει ότι:

$$U(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y' = 0) \left(A(X) + \bar{Y} + h - H_0 + \frac{\mu}{\mu_w} H_0 \right) \quad (2.19)$$

όπου το $\frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y' = 0) = \frac{0.332}{\sqrt{x}}$ αναφέρεται στη διάτμηση που ασκείται από το

αέριο στην πλάκα και το H_0 στο πάχος του υγρού όπως αυτά δίνονται από τη λύση της βασικής ροής. Από την εξίσωση (2.19) είναι φανερό ότι για μηδενικό πάχος μετατόπισης, $A=0$, η ταχύτητα του αερίου ρεύματος στην διεπιφάνεια συμπίπτει με την αντίστοιχη τιμή που προβλέπει η βασική ροή.

Στην υγρή φάση εισάγεται η μετασηματισμένη μεταβλητή $\bar{y} = y/h(X, t)$ και στην διεπιφάνεια αερίου – υγρού ($\bar{Y}=0, \bar{y}=1$) εφαρμόζονται οι παρακάτω εξισώσεις:

Συνέχεια ταχυτήτων:

$$U = \frac{\mu}{\mu_w} u \quad (2.20)$$

$$V = \frac{\mu}{\mu_w} v \quad (2.21)$$

Συνέχεια τάσεων:

$$P - p = \frac{1}{We} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.23)$$

Επίσης, ισχύει η κινηματική συνθήκη:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial X} - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial X} = 0 \quad (2.24)$$

Η εξίσωση (2.21) λαμβάνοντας υπόψη την κινηματική συνθήκη (2.24) καταλήγει τελικά στη μορφή:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{\bar{y}} = 0 \quad (2.25)$$

ενώ η κινηματική συνθήκη ορίζοντας $u = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y}$ απλοποιείται και δίνει:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \quad (2.26)$$

Στην εξίσωση της ορμής του υγρού η πίεση αντικαθίσταται από την πίεση του αερίου σύμφωνα με τη σχέση (2.22). Με τον τρόπο αυτό, προκύπτουν οι αδιάστατες εξισώσεις που διέπουν τη ροή μέσα στην υγρή φάση:

Ισοζύγιο ορμής στην X-κατεύθυνση:

$$M \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\bar{y}-1}{h} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) = - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{We} \frac{\partial^3 h}{\partial X^3} - \frac{\left(\frac{\rho_w}{\rho} - 1 \right)}{Fr} \frac{\partial h}{\partial X} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

όπου:

$$u = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.28)$$

Στην εξίσωση (2.27) οι παράμετροι M , \overline{We} και \overline{Fr} καθορίζουν το πόσο σημαντικές είναι στην υγρή φάση οι δυνάμεις αδράνειας, επιφανειακής τάσης και βαρύτητας αντίστοιχα:

$$M = \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{\rho_w}{\rho}, \quad \overline{We} = \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{\varepsilon^4 \sigma}{\rho u_f^2 H_f}, \quad \overline{Fr} = \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{g H_f}{u_f^2} \quad (2.29)$$

Ισοζύγιο ορμής στην Y-κατεύθυνση:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.30)$$

Τέλος, στην στερεή επιφάνεια εφαρμόζονται οι συνθήκες μη-ολίσθησης και μη-διείσδυσης:

$$\bar{y} = 0: \quad u = \psi = 0 \quad (2.31)$$

Επειδή η ροή αέρα γίνεται πάνω από ρευστό με μεγαλύτερο ιξώδες, $\mu/\mu_w \rightarrow 0$, τα κύματα Tollmien-Schlichting που σχηματίζονται στην κύρια μάζα του συνοριακού στρώματος εμφανίζονται πολύ πιο γρήγορα σε σχέση με τα διεπιφανειακά (Pelekasis & Tsamopoulos, 2001). Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ημι-μόνιμη κατάσταση στην αέρια φάση και να δεχτούμε ότι οι μεταβολές μέσα στο συνοριακό στρώμα εξαρτώνται μόνο από τη δυναμική συμπεριφορά της διεπιφάνειας. Κατά συνέπεια τα διεπιφανειακά κύματα μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα από τα κύματα Tollmien-Schlichting. Στο όριο $\mu/\mu_w \rightarrow 0$ το ισοζύγιο ορμής που εκφράζεται από τη σχέση (2.12) παίρνει τη μορφή:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.32)$$

Στην ιδιαίτερη περίπτωση που το υγρό είναι πολύ ιξώδες, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με τα anti-icing ρευστά, ο λόγος των ιξωδών μεταξύ των δύο φάσεων μπορεί να θεωρηθεί μηδενικός έτσι ώστε η παράμετρος $M = \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^2 \frac{\rho_w}{\rho} \rightarrow 0$. Στο όριο

αυτό, η εξίσωση που περιγράφει την ροή μέσα στην υγρή φάση δεν περιλαμβάνει τις αδρανειακές δυνάμεις και περιγράφει την χρονική εξέλιξη της διεπιφάνειας ως αποτέλεσμα των δυνάμεων διάτμησης, πίεσης, βαρύτητας και επιφανειακής τάσης:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{h^2}{2} \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{H^3}{3We} \frac{\partial^3 H}{\partial X^3} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{h^3}{3} \frac{(\rho_w/\rho - 1)}{Fr} \frac{\partial h}{\partial X} \right) \quad (2.33)$$

Επίσης, η συνέχεια των ταχυτήτων όταν λαμβάνεται το όριο $M \rightarrow 0$ δίνει:

$$U = \Psi = 0 \quad (2.34)$$

Τέλος, η εξίσωση που δίνει την ταχύτητα στο όριο μεταξύ κατώτερου και μεσαίου στρώματος παίρνει την μορφή:

$$U(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \frac{\partial U_0}{\partial \bar{Y}'}(x_0, Y' = 0) \left(A(X) + \bar{Y} + h - H_0 \right) \quad (2.35)$$

Σε όλες τις περιπτώσεις ως αρχική συνθήκη χρησιμοποιείται η λύση της βασικής ροής και επιπλέον εισάγεται στην διεπιφάνεια μια διαταραχή H_D :

$$H(t=0) = H_0(t=0) + H_D \quad (2.36)$$

Η διαταραχή που εφαρμόζεται μπορεί να είναι είτε στιγμιαία:

$$H_D = d \sqrt{\frac{w}{\pi}} \exp(-w X^2) \quad (2.37)$$

είτε περιοδική στο χρόνο:

$$H_b = d \sqrt{\frac{w}{\pi}} \exp(-w X^2) \cos(\omega_f t) \quad (2.38)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις η παράμετρος d εκφράζει το μέγεθος της διαταραχής, ενώ η παράμετρος w καθορίζει το εύρος της στην διεύθυνση ροής.

2.3.3 Εξισώσεις για οδεύοντα κύματα στο όριο $M \rightarrow 0$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει να διερευνηθεί το κατά πόσο στις ροές που μελετάμε αναπτύσσονται οδεύοντα κύματα (traveling waves). Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας η αριθμητική αναζήτηση τέτοιων κυμάτων γίνεται για περιπτώσεις όπου η υγρή φάση είναι πολύ πιο ιξώδης από την αέρια. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω σε αυτές τις περιπτώσεις λαμβάνεται το όριο $M \rightarrow 0$ και κατά συνέπεια αγνοούνται οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού κατά την επίλυση.

Θεωρούμε ένα οδεύον κύμα το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα c και εισάγουμε τους μετασχηματισμούς $\xi_1 = X - ct$ και $U^* = U - c$. Με βάση τις νέες μεταβλητές η εξίσωση (2.32) που εκφράζει το ισοζύγιο ορμής παίρνει τη μορφή:

$$(U^* + c) \frac{\partial U^*}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} \frac{\partial U^*}{\partial \bar{Y}} = -\frac{\partial P}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial \bar{Y}^2} \quad (2.39)$$

και η ροϊκή συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση:

$$U^* = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}} \quad (2.40)$$

Η συνέχεια των ταχυτήτων μεταξύ του κατώτερου και του μεσαίου στρώματος δίνει:

$$U^*(\bar{Y} \rightarrow \infty) = \lambda (A + \bar{Y} + h - H_0) - c \quad (2.41)$$

Ο νόμος αλληλεπίδρασης για περιοδικές ροές με περίοδο L_p εκφράζεται από τη σχέση (Tsao et. al, 1997):

$$P = \frac{1}{L_p} \int_{-L_p/2}^{L_p/2} \frac{\partial A}{\partial \xi_1} \cot \left[\frac{\pi(x - \xi_1)}{L_p} \right] d\xi_1 \quad (2.42)$$

Η εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του υγρού μετασχηματίζεται και παίρνει τελικά τη μορφή:

$$-c \frac{\partial h}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h^2}{2} \frac{\partial U^*}{\partial \bar{Y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h^3}{3} \frac{\partial P}{\partial \xi_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h^3}{3We} \frac{\partial^3 h}{\partial \bar{Y}^3} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h^3}{3} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \frac{\partial h}{\partial \xi_1} \right) \quad (2.43)$$

Στην διεπιφάνεια υγρού-αερίου έχουμε:

$$\bar{Y}=0: \quad U^* = -c, \quad \Psi = 0 \quad (2.44)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιείται η παρακάτω σχέση ώστε να υπολογιστεί η φασική ταχύτητα του κύματος:

$$\int_{-L_p/2}^{L_p/2} \cos\left(\frac{2\pi}{L_p} \xi_1\right) \frac{\partial h}{\partial \xi_1} d\xi_1 = 0 \quad (2.45)$$

Τέλος, επιβάλλεται η παρακάτω συνθήκη ώστε να διασφαλίζεται η διατήρηση της μάζας του συστήματος:

$$\int_{-L_p/2}^{L_p/2} h d\xi_1 = \text{const.} \quad (2.46)$$

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

3.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση ευστάθειας της ροής συννοριακού στρώματος πάνω από λεπτό υμένα υγρού. Στη συγκεκριμένη ροή ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η χωροχρονική εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Η ανάλυση ευστάθειας, τόσο στη γραμμική όσο και στην ασθενώς μη-γραμμική περιοχή, αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο που αξίζει να διερευνηθεί το κατά πόσο μπορεί να προβλέψει τη συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων με το πέρασμα του χρόνου.

Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας βασίζεται στη εισαγωγή μικρών, γραμμικών διαταραχών στη βασική λύση του προβλήματος. Για την υπό εξέταση ροή έχει πραγματοποιηθεί γραμμική ανάλυση από τον Timoshin (1997) ο οποίος για την βασική ροή θεώρησε σταθερή ογκομετρική παροχή υγρού, και από τους Pelekasis & Tsamopoulos (2001) οι οποίοι μελέτησαν την περίπτωση του σταθερού ρυθμού εναπόθεσης υγρού πάνω στην στερεή επιφάνεια. Η μελέτη των τελευταίων απέδειξε ότι τα διεπιφανειακά κύματα μπορεί να είναι είτε συναγωγικώς, είτε απολύτως ασταθή, και το είδος της αστάθειας τους καθορίζεται από το μέγεθος των βαρυτικών και επιφανειακών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές δυνάμεις.

Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας περιγράφει ικανοποιητικά την εξέλιξη των γραμμικών διαταραχών για όσο χρονικό διάστημα αυτές συνεχίζουν να παραμένουν μικρές. Υπάρχει ένα όριο στο χρόνο πάνω από το οποίο η μη-γραμμικότητα του φαινομένου γίνεται σημαντική και επιδρά στην εξέλιξη τους. Για να απομονωθεί και να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο η μη-γραμμικότητα μεταβάλλει την συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων εφαρμόζεται η ασθενώς μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Η ανάλυση αυτή επικεντρώνεται σε περιοχές με πολύ μικρό ρυθμό ανάπτυξης και θεωρώντας κατάλληλη αργή χρονική κλίμακα είναι δυνατός ο προσδιορισμός της επίδρασης που έχουν οι μη-γραμμικοί όροι στην εξέλιξη του γραμμικού κύματος. Η ανάλυση ευστάθειας στην ασθενώς μη γραμμική περιοχή οδηγεί τελικά στην εξαγωγή της ανάλογης, για την υπό εξέταση ροή, εξίσωσης Schrödinger. Από την εξίσωση Schrödinger μπορούν να προκύψουν σημαντικά συμπεράσματα για την περιοχή ισχύος της, όπως για παράδειγμα το αν υπάρχουν ή όχι οδεύοντα κύματα ή μετωπικά κύματα και το κατά πόσο αυτά είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Τέλος, υπάρχει περίπτωση η μη-γραμμική συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων κοντά στην κρίσιμη περιοχή να αποτελέσει αρχική συνθήκη

ώστε να προβλεφθεί η συμπεριφορά τους σε περιοχές που απέχουν αρκετά από την περιοχή αυτή ώστε να μπορούν να χαρακτηριστούν ως μη-γραμμικές.

3.2 Ευστάθεια συνοριακού στρώματος

Είναι γνωστό ότι η παράλληλη στρωτή ροή η οποία περιγράφεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes μπορεί να γίνει ασταθής υπό ορισμένες προϋποθέσεις. Η εξίσωση Orr-Sommerfeld είναι μια εξίσωση ιδιοτιμών η οποία μπορεί να προβλέψει με ακρίβεια τις συνθήκες ευστάθειας όταν οι ιξώδεις δυνάμεις είναι σημαντικές. Παραδείγματα τέτοιου είδους ροών σε δύο διαστάσεις είναι η ροή μέσα σε κανάλι, η ροή συνοριακού στρώματος ή στρώματος διάτμησης.

Για την εξαγωγή της εξίσωσης Orr-Sommerfeld εισάγονται μικρές γραμμικές διαταραχές στη βασική ροή και στην συνέχεια γραμμικοποιούνται οι εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes οι οποίες για διδιάστατη ροή έχουν την παρακάτω μορφή:

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial U_A}{\partial x'} + \frac{\partial V_A}{\partial y'} = 0 \quad (3.1)$$

Εξίσωση x-ορμής:

$$\rho \left(U_A \frac{\partial U_A}{\partial x'} + V_A \frac{\partial U_A}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P_A}{\partial x'} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_A}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U_A}{\partial y'^2} \right) \quad (3.2)$$

Εξίσωση y-ορμής:

$$\rho \left(U_A \frac{\partial V_A}{\partial x'} + V_A \frac{\partial V_A}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial P_A}{\partial y'} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_A}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V_A}{\partial y'^2} \right) \quad (3.3)$$

Αν $(U_0(y), 0)$ και P_0 είναι το πεδίο ταχυτήτων και η πίεση της βασικής ροής αντίστοιχα τότε εισάγονται οι διαταραχές u' , v' και p' επί της βασικής ροής έτσι ώστε να ισχύει:

$$U_A = U_0 + u', \quad V_A = v', \quad P_A = P_0 + p' \quad (3.4)$$

Με γραμμικοποίηση των εξισώσεων που διέπουν τη ροή και έχοντας υπόψη ότι οι μεταβολές της ταχύτητας στην y-κατεύθυνση είναι πολύ μεγαλύτερες από τις μεταβολές στην x-κατεύθυνση προκύπτει:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + U_A \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial U_A}{\partial y'} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'} = \nu \nabla^2 u' \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + U_A \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y'} = \nu \nabla'^2 v' \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Squire για μονοδιάστατη βασική ροή, οι διαταραχές κατά τη διεύθυνση της ροής είναι οι πλέον ασταθείς. Επομένως, θεωρούμε την παρακάτω μορφή για τις διαταραχές:

$$u'(x', t') = \hat{u}(y') e^{ik(x' - ct')}, \quad v'(x', t') = \hat{v}(y') e^{ik(x' - ct')}, \quad p'(x', t') = p(y') e^{ik(x' - ct')} \quad (3.8)$$

όπου k είναι ο κυματαριθμός της διαταραχής και $c = C_p + iC_i$ με C_p τη φασική ταχύτητα της διαταραχής και c_i το ρυθμό απόσβεσης του πλάτους της. Με αντικατάσταση των παραπάνω εκφράσεων στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις του προβλήματος προκύπτει:

$$ik\hat{u} + \hat{v} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nu \hat{u}'' - \nu k^2 \hat{u} - ik(U_A - c)\hat{u} = U_A' \hat{v} + ik \frac{\hat{p}}{\rho} \quad (3.10)$$

$$\nu \hat{v}'' - \nu k^2 \hat{v} - ik(U_A - c)\hat{v} = \frac{\hat{p}}{\rho} \quad (3.11)$$

όπου οι τόνοι (') συμβολίζουν την παραγωγή ως προς y .

Εφόσον η ροή διαταραχών είναι διδιάστατη μπορούμε να ορίσουμε τη ροϊκή συνάρτηση $\psi'(x', y', t') = \varphi(y') e^{ik(x' - ct')}$ έτσι ώστε:

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \quad \text{και} \quad v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \quad (3.12)$$

Κατά συνέπεια ισχύει:

$$\hat{u} = \varphi'(y') \quad \text{και} \quad \hat{v} = -ik\varphi(y') \quad (3.13)$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (3.13) στις εξισώσεις (3.10) και (3.11) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\varphi'''' - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi = i \frac{k}{\nu} \left[(U_A - c)(\varphi'' - k^2 \varphi) - U_A'' \varphi \right] \quad (3.14)$$

Χρησιμοποιώντας ως χαρακτηριστικό μήκος το πάχος του συνοριακού στρώματος δ και ως χαρακτηριστική ταχύτητα την ταχύτητα εκτός συνοριακού στρώματος U_∞ εισάγονται οι παρακάτω αδιάστατες μεταβλητές:

$$U_a = \frac{U_A}{U_\infty}, \quad c_a = \frac{c}{U_\infty}, \quad a = k\delta, \quad \text{Re} = \frac{\delta U_\infty}{\nu} \quad (3.15)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3.14) προκύπτει τελικά η εξίσωση Orr-Sommerfeld:

$$\varphi_a'''' - 2a^2 \varphi_a'' + a^4 \varphi_a = ia \text{Re} \left[(U_a - c_a)(\varphi_a'' - a^2 \varphi_a) - U_a'' \varphi_a \right] \quad (3.16)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

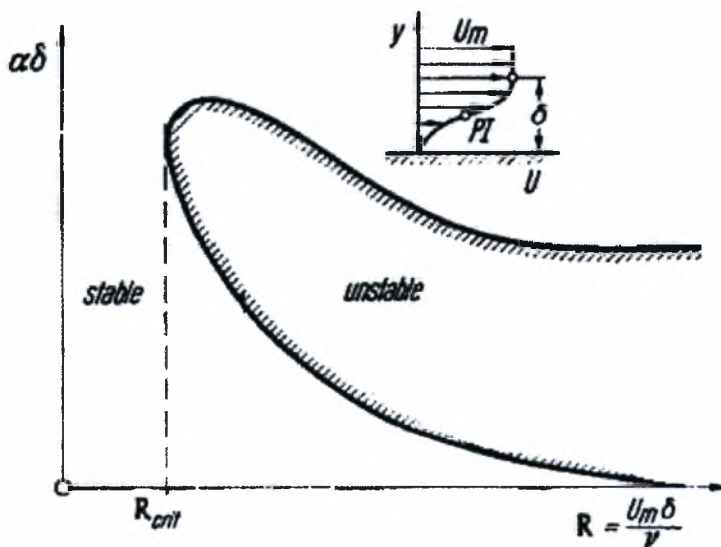
$$\text{Για } y' = 0 \quad \text{ή} \quad y' \rightarrow \infty: \quad \varphi_a = \varphi_a' = 0 \quad (3.17)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (3.16) και (3.17) αποτελεί πρόβλημα ιδιοτιμής για την ταχύτητα φάσης c . Σε περίπτωση που προκύψουν θετικές τιμές για το φανταστικό μέρος της ταχύτητας c ($c_i > 0$) τότε η ροή είναι ασταθής και η γραμμική διαταραχή που εισάγεται στο σύστημα ενισχύεται με το πέρασμα του χρόνου.

Στην περίπτωση που η ροή θεωρηθεί άτριβη, δηλαδή για $\nu = 0$ ($Re \rightarrow \infty$), η εξίσωση Orr-Sommerfeld παίρνει την παρακάτω μορφή η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση Rayleigh:

$$(U_a - c_a)(\varphi_a'' - a^2 \varphi_a) - U_a'' \varphi_a = 0 \quad (3.18)$$

Από την εξίσωση Rayleigh προκύπτει ότι για να υπάρχει αστάθεια θα πρέπει η συνάρτηση $U_a''(y)$ να αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή, αν η κατανομή $U_a(y)$ δεν έχει σημείο καμπής, η ροή χαρακτηρίζεται ως ατριβώς ευσταθής. Στο Σχήμα 3.1 δίνεται η καμπύλη ευστάθειας για άτριβη ροή στην περίπτωση που η κατανομή ταχύτητας παρουσιάζει σημείο καμπής.

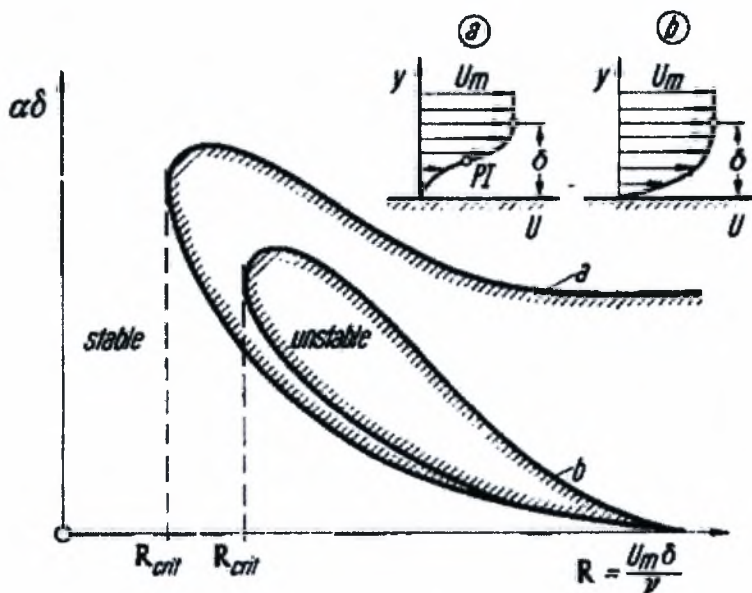


Σχήμα 3.1: Καμπύλη ευστάθειας συνοριακού στρώματος για άτριβη ροή (Schlichting, 1979).

Όπως προκύπτει από το παραπάνω διάγραμμα υπάρχει ένας κρίσιμος αριθμός Re κάτω από τον οποίο όλες οι διαταραχές εξαφανίζονται και κατά συνέπεια το συνοριακό στρώμα είναι ευσταθές. Αντίθετα, για μεγαλύτερους αριθμούς Re

υπάρχουν ασταθείς διαταραχές που ενισχύονται με το χρόνο. Τελικά, αν ο αριθμός Re αυξηθεί πάρα πολύ οι περισσότερες διαταραχές οδηγούν σε τύρβη.

Η ανάλυση της εξίσωσης Rayleigh έδειξε την ύπαρξη ευστάθειας στην περίπτωση που δεν υπάρχει σημείο καμπής στην κατανομή της ταχύτητας. Παρόλα αυτά, στην πραγματικότητα και κάτω από ορισμένες συνθήκες οι ατριβώς ευσταθείς ροές γίνονται ασταθείς εξαιτίας της αποσταθεροποιητικής επίδρασης του ιξώδους. Η συγκεκριμένη αστάθεια είναι γνωστή ως ιξώδης αστάθεια και προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης Orr-Sommerfeld. Στο Σχήμα 3.2 η καμπύλη (b) περικλείει την περιοχή της ιξώδους αστάθειας κατά την οποία οι διαταραχές αναπτύσσονται παρά την έλλειψη σημείου καμπής στο προφίλ ταχύτητας, ενώ η καμπύλη (a) είναι αυτή που δίνεται στο Σχήμα 3.1 και αντιστοιχεί στην άτριβη ροή



Σχήμα 3.2: Καμπύλη ευστάθειας συνοριακού στρώματος για άτριβη ροή και για ροή με σημαντικές τις ιξώδεις δυνάμεις (Schlichting, 1977).

Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός Re η περιοχή της αστάθειας ελαττώνεται και τείνει να συρρικνωθεί καθώς $Re \rightarrow \infty$. Ως αποτέλεσμα είναι δυνατό μια διαταραχή να ενισχύεται αλλά καθώς αυξάνει το πάχος του συνοριακού στρώματος και κατά συνέπεια ο αριθμός Re η ίδια διαταραχή μπορεί στη συνέχεια να αποσβεστεί.

Ο αποσταθεροποιητικός ρόλος του ιξώδους μπορεί να φανεί και με ενεργειακή ανάλυση της υπό εξέταση ροής (Drazin, 2002). Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση

(3.6) με την διαταραχή u' και την εξίσωση (3.7) με την διαταραχή v' και στην συνέχεια προσθέτοντας τις σχέσεις που προκύπτουν παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \right] + U_A \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \right] + \frac{dU_A}{dy'} u' v' = - \left(u' \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' \frac{\partial p'}{\partial y'} \right) + \frac{1}{\text{Re}} (u' \nabla^2 u' + v' \nabla^2 v') \quad (3.19)$$

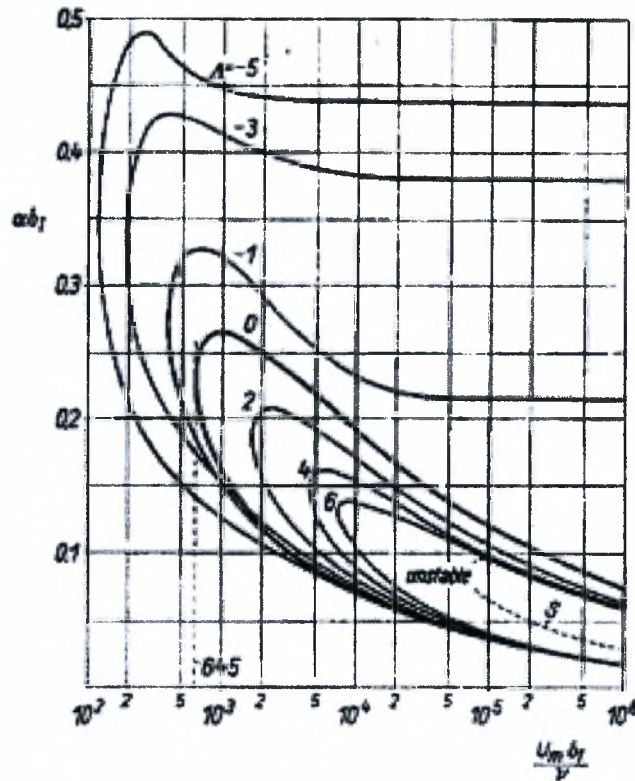
Ολοκληρώνοντας σε όλη την περιοχή ροής προκύπτει:

$$\frac{d}{dt'} \int \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) dA = - \int \frac{dU_A}{dy'} u' v' dA - \frac{1}{\text{Re}} \int \left(\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right) dA \quad (3.20)$$

όπου το αριστερό μέλος αποτελεί τον ρυθμό αύξησης της κινητικής ενέργειας, ο όρος $\int \frac{dU_A}{dy'} u' v' dA$ εκφράζει την μεταφορά ενέργειας από τη βασική ροή στις διαταραχές μέσω του έργου που παράγουν οι τάσεις Reynolds ενώ ο τελευταίος όρος εκφράζει την σκέδαση της ενέργειας λόγω του ιξώδους. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι για ατριβείς ροές δεν υπάρχει μηχανισμός ενίσχυσης των διαταραχών αφού για βασική ροή χωρίς σημεία καμπής ισχύει $\int u' v' dA = 0$ (Drazin, 2002). Αντίθετα, για $\nu \neq 0$ οι τάσεις Reynolds διαφοροποιούνται αισθητά κοντά στα τοιχώματα λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης. Στην περίπτωση αυτή η παραγωγή έργου των τάσεων Reynolds μπορεί να ξεπεράσει την ιξώδη απόσβεση ιδιαίτερα για $\text{Re} \gg 1$ και κατά συνέπεια να εμφανιστεί η ιξώδης αστάθεια.

Τέλος, παρουσιάζεται η επίδραση της πτώσης πίεσης στην ευστάθεια του συνοριακού στρώματος. Στο Σχήμα 3.3 δίνεται το πώς μεταβάλλεται η περιοχή αστάθειας με την μεταβολή της παραμέτρου Λ η οποία παίρνει θετικές τιμές για ενισχυτική κλίση πίεσης και αρνητικές για αντιτιθέμενη κλίση πίεσης. Πιο συγκεκριμένα, η αδιάστατη παράμετρος Λ ονομάζεται παράγοντας σχήματος, εκφράζει τον λόγο των δυνάμεων πίεσης σε σχέση με τις ιξώδεις δυνάμεις και ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση $\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_A}{dx} = - \frac{dP}{dx} \frac{\delta}{\mu U / \delta}$. Είναι φανερό ότι όσο

μεγαλύτερη είναι η πτώση πίεσης τόσο συρρικνώνεται η περιοχή αστάθειας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι όσο μεγαλύτερη είναι η πτώση πίεσης στην κατεύθυνση της ροής τόσο πιο ευσταθής είναι η κατανομή ταχυτήτων.



Σχήμα 3.3: Επίδραση της πτώσης πίεσης στην ευστάθεια συνοριακού στρώματος (Schlichting, 1979).

3.3 Γραμμική ανάλυση ευστάθειας συνοριακού στρώματος πάνω από υγρό υμένα

3.3.1 Σχέση Διασποράς

Για την γραμμική ανάλυση ευστάθειας της ροής αέρα πάνω από υγρό λεπτό υμένα θεωρούμε τις παρακάτω μικρές διαταραχές στη βασική ροή:

$$H = H_0 + d H_1 E, U = U_0 + d U_1(\bar{Y}) E, P = d P_1 E, \Psi = \frac{\partial U_0}{\partial \bar{Y}} \frac{\bar{Y}^2}{2} + d \Psi_1(\bar{Y}) E, A = d A_1 E$$

όπου $d \ll 1$ το πλάτος της διαταραχής, U_1, Ψ_1 συναρτήσεις του \bar{Y} , H_1, P_1, A_1 σταθερές και $E = e^{i(kx - \omega t)}$.

Στο όριο $M \rightarrow 0$ με γραμμικοποίηση των εξισώσεων (2.13) έως (2.15) και (2.31) έως (2.35), και για μηδενική ταχύτητα διεπιφάνειας προκύπτει η σχέση διασποράς για τα κύματα Tollmien-Schlichting (Smith 1979a,b):

$$\frac{dA_i}{dz} + \frac{(kH_0^2 A_2)^{1/3}}{A_2^2} i^{1/3} k H_0 \int_0^z A_i dt = 0 \quad (3.21)$$

$$\text{όπου: } z = -\frac{H_0 \omega i^{1/3}}{(kH_0^2 A_2)^{2/3}} \quad \text{και} \quad A_2(x_0) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(y=0)$$

Στο ίδιο όριο, με γραμμικοποίηση των εξισώσεων (2.13) έως (2.15) και (2.31) έως (2.35) και απαιτώντας την εξισορρόπηση της διάτμησης όπως αυτή υπολογίζεται στην υγρή και την αέρια φάση προκύπτει η σχέση διασποράς για τα διεπιφανειακά κύματα η οποία, σε συμφωνία με τον Timoshin (1997) και με τους Pelekasis & Tsamopoulos (2001), εκφράζεται από την εξίσωση:

$$\omega = kH_0 \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} - \frac{iH_0^3 k^4}{3We} - i \frac{(\rho_w/\rho-1)}{Fr} k^2 \frac{H_0^3}{3} + \frac{H_0^2 \left(\left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)}{2} \frac{A_i(z=0) \left(ik \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)^{2/3} k|k| - \frac{2}{3} \left(ik \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right) H_0 k|k| A_i'(z=0)}{|k| \left(ik \left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} A_i dz + A_i'(z=0) \left(\left. \frac{\partial U_0}{\partial Y'} \right|_{Y'=0} \right)^2} \quad (3.22)$$

όπου A_i η συνάρτηση Airy και A_i' η πρώτη παραγωγός της.

Στην περίπτωση που δεν λαμβάνεται το όριο $M \rightarrow 0$ δεν είναι δυνατή η εξαγωγή της σχέσης διασποράς αναλυτικά και κατά συνέπεια η ανάλυση ευστάθειας γίνεται αριθμητικά. Για την συγκεκριμένη ροή έχει πραγματοποιηθεί ανάλυση ευστάθειας τόσο για την περίπτωση που ισχύει το όριο $M \rightarrow 0$ όσο και για την περίπτωση που η αδράνεια του υγρού θεωρείται σημαντική (Timoshin, 1997; Pelekasis & Tsamopoulos, 2001). Η επίλυση της εξίσωσης διασποράς, είτε υπάρχει σε αναλυτική μορφή είτε όχι, γίνεται με τη βοήθεια της μεθόδου 'Pinching' η οποία περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.2.2. Με τη βοήθεια της μεθόδου αυτής, προκύπτει ότι τα διεπιφανειακά κύματα μπορεί να είναι είτε συναγωγικώς ασταθή, δηλαδή να μεταφέρονται με την ροή μακριά από το σημείο εμφάνισής τους, είτε απολύτως ασταθή, δηλαδή να παραμένουν στο σημείο εμφάνισής τους και να μεγαλώνουν τοπικά. Το είδος της αστάθειας στην περίπτωση των διεπιφανειακών κυμάτων καθορίζεται από το μέγεθος των επιφανειακών και βαρυτικών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές (Pelekasis & Tsamopoulos, 2001).

3.3.2 Μέθοδος 'Pinching'

Η μέθοδος Pinching χρησιμοποιείται για τη διερεύνηση της ύπαρξης αστάθειας και, σε περίπτωση που όντως υπάρχει αστάθεια, για το χαρακτηρισμό της ως απόλυτη ή συναγωγική. Η διερεύνηση του χαρακτήρα της αστάθειας, σχηματικά, αποτελείται από δύο μέρη τα οποία σχετίζονται με την επίλυση της σχέσης διασποράς που προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας που αναφέρθηκε παραπάνω (Huerge & Monkewitz, 1990).

Αρχικά, ο κυματαριθμός k θεωρείται πραγματικός αριθμός, ενώ η συχνότητα ω μιγαδικός (χρονική ανάλυση). Αν από την επίλυση της σχέσης διασποράς προκύψουν κάποιες θετικές τιμές για το ω_i , τότε η ροή χαρακτηρίζεται ως ασταθής. Για το χαρακτηρισμό της αστάθειας ως απόλυτης ή συναγωγικής τόσο ο κυματαριθμός όσο και η συχνότητα λαμβάνονται ως μιγαδικοί αριθμοί. Στόχος είναι η εύρεση του μιγαδικού αριθμού k_0 στον οποίο αντιστοιχεί μηδενική ταχύτητα πακέτου, δηλαδή

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} = 0. \text{ Η μιγαδική συχνότητα } \omega_0 = \omega(k_0) \text{ ονομάζεται απόλυτη συχνότητα και}$$

παρέχει το ρυθμό ανάπτυξης του κυματοπακέτου που παραμένει κοντά στο σημείο επιβολής της διαταραχής. Τα κύματα στα οποία αντιστοιχεί ω_{i0} αρνητικό ονομάζονται συναγωγικώς ασταθή και χαρακτηρίζουν διαταραχές που ταξιδεύουν μαζί με την ροή μακριά από το σημείο γέννησής τους, ενώ τα κύματα με θετικό ω_{i0} είναι απολύτως ασταθή και μεγαλώνουν τοπικά.

Τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούν να επεξηγηθούν θεωρητικά με τη βοήθεια του μοντέλου Ginzburg-Landau το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g(k) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{i}{2} f(k) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + is(k)(R - R_c) \psi = \delta'(x) \delta'(t) \quad (3.23)$$

όπου $g(k) = \omega_k$ είναι μια πραγματική και σταθερή ταχύτητα κυματοπακέτου, $f(k) = \omega_{kk}$ και $s(k) = \omega_R$ μιγαδικές σταθερές με $\omega_{kk,i} < 0$ και δ' η συνάρτηση δέλτα. Έχει αποδειχθεί ότι το απλό αυτό μοντέλο προκύπτει στο πλαίσιο γραμμικής ανάλυσης πολλών προβλημάτων αναπτυσσόμενης ροής, όπως το υπόψη πρόβλημα, με κατάλληλη διαμόρφωση της χωρικής μεταβλητής (Craik, 1985). Πρόκειται δε για το γραμμικό μέρος της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger που περιγράφει την ασθενώς μη γραμμική συμπεριφορά κυμάτων με κυματαριθμό k . Το μοντέλο αυτό περιγράφει αρκετά φαινόμενα που συμβαίνουν στο πλαίσιο ασθενών διαταραχών.

Με βάση τις ιδιότητες της σχέσης διασποράς στο φασματικό επίπεδο (k, ω) έχουν εξαχθεί τα μαθηματικά κριτήρια που αναφέρθηκαν παραπάνω για τον καθορισμό του είδους της αστάθειας (Huerre & Monkewitz, 1990). Η εξίσωση μπορεί να λυθεί με την μέθοδο του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier στον χώρο και τον χρόνο. Έτσι, ο διπλός μετασχηματισμός Fourier $\hat{\psi}$ της ψ στο επίπεδο (k, ω) δίνεται από την σχέση:

$$\hat{\psi} = \frac{1}{-i\omega + ikg(k) + if(k)k^2/2 + is(k)(R - R_0)} \quad (3.24)$$

Στην παραπάνω σχέση ο παρανομαστής είναι κατ' ουσία η σχέση διασποράς, $D(k, \omega(k))$, και αν για $R=R_0$ ισχύει $\omega=0$ οι συναρτήσεις $g(k)$, $f(k)$ δίνουν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο του ω ως προς k , ενώ η $s(k)$ δίνει την παράγωγο του ω ως προς R . Εκφράζοντας την συνάρτηση ψ σαν τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της $\hat{\psi}$ παίρνουμε το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{FL} \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{D[k, \omega; R]} d\omega dk \quad (3.25)$$

Η καμπύλη L στο μιγαδικό επίπεδο της συχνότητας είναι μια ευθεία οριζόντια γραμμή πάνω από όλες τις ιδιομορφίες της προς ολοκλήρωση συνάρτησης ώστε να ισχύει $\psi(x, t) = 0$ για κάθε x όταν $t < 0$. Η καμπύλη F στο μιγαδικό επίπεδο του κυματαριθμού λαμβάνεται αρχικά κατά μήκος του πραγματικού άξονα. Αν θεωρήσουμε ότι η σχέση διασποράς μπορεί να πάρει τη μορφή $D[\omega, k]=0 \rightarrow \omega=\omega(k)$, τότε μετά από υπολογισμό υπολοίπου (residue calculation) στο επίπεδο του ω , η συνάρτηση ψ είναι ίση με:

$$\psi(x, t) = -\frac{i}{2\pi} H(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(kx - \omega(k)t)}}{D[k, \omega(k); R]} dk \quad (3.26)$$

όπου $H(t)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ασυμπτωτικά για $t \rightarrow \infty$ και για δεδομένο x/t με τη μέθοδο steepest descent (Bender & Orszag, 1978). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει:

$$\psi(x, t) \propto -(2\pi)^{-1/2} e^{i\pi/4} \frac{e^{i[k_* x - \omega(k_*) t]}}{\left[\frac{\partial D}{\partial \omega} [k_*, \omega(k_*)] \left[\frac{d^2 \omega}{dk^2} (k_*) t \right] \right]^{1/2}} \quad (3.27)$$

όπου k_* ο κυματαριθμός για τον οποίο ισχύει :

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} (k_*) = \frac{x}{t} \quad (3.28)$$

Επομένως, η συνάρτηση ψ παίρνει τη μορφή ενός κυματοπακέτου στο φυσικό επίπεδο (x, t) . Κατά μήκος της ακτίνας x/t σε κάθε κυματοπακέτο επικρατεί ο μιγαδικός κυματαριθμός για τον οποίο η πραγματική ταχύτητα πακέτου ικανοποιεί τη σχέση (3.28). Ο χρονικός ρυθμός αύξησης κατά μήκος της κάθε ακτίνας είναι $\sigma = \omega_i(k_*) - (x/t) k_{*i}$.

Στα περισσότερα προβλήματα ο χρονικός ρυθμός αύξησης $\omega_i(k)$, όπου k πραγματικός, αποκτά μια μέγιστη τιμή $\omega_{i_{\max}} \equiv \omega_i(k_{\max})$ για την πραγματική τιμή του

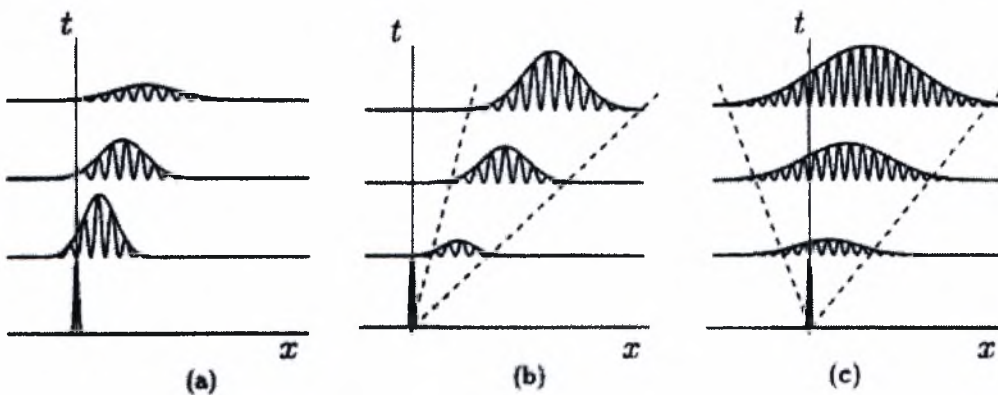
k για την οποία ισχύει $\frac{\partial \omega_i}{\partial k}(k_{\max}) = 0$. Αυτός ο μέγιστος ρυθμός αύξησης $\omega_{i_{\max}}$ παρατηρείται στο κυματοπακέτο $\psi(x,t)$ κατά μήκος της συγκεκριμένης ακτίνας $\frac{x}{t} = \frac{\partial \omega_i}{\partial k}(k_{\max})$ και αντιστοιχεί στη μέγιστη δυνατή τιμή του σ . Είναι φανερό ότι :

- Αν $\omega_{i_{\max}} > 0$ η ροή είναι γραμμικά ασταθής
- Αν $\omega_{i_{\max}} < 0$ η ροή είναι γραμμικά ευσταθής.

Για την διάκριση της αστάθειας σε συναγωγική και σε απόλυτη είναι απαραίτητο να διερευνηθεί η συμπεριφορά με το χρόνο του κύματος με κυματαριθμό k_0 που αντιστοιχεί στην ακτίνα $x/t=0$. Αυτός ο κυματαριθμός έχει μηδενική ταχύτητα πακέτου $\frac{\partial \omega}{\partial k}(k_0) = 0$. Ο απόλυτος ρυθμός αύξησης ορίζεται ως $\omega_{0,i} \equiv \omega_i(k_0)$ και είναι αυτός που χαρακτηρίζει την χρονική εξέλιξη του κύματος με κυματαριθμό k_0 που παρατηρείται σε μια δεδομένη θέση στο όριο $t \rightarrow \infty$. Το πρόσημο του $\omega_{0,i}$ είναι αυτό που καθορίζει τον απόλυτο ή τον συναγωγικό χαρακτήρα της αστάθειας. Έτσι:

- Αν $\omega_{0,i} > 0$ η ροή είναι απόλυτα ασταθής
- Αν $\omega_{0,i} < 0$ η ροή είναι συναγωγικά ασταθής.

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται ποιοτικά οι περιπτώσεις ευστάθειας, συναγωγικής και απόλυτης αστάθειας.



Σχήμα 3.4: Σχηματική αναπαράσταση (α) ευστάθειας, (β) συναγωγικής και (γ) απόλυτης αστάθειας στη γραμμική περιοχή (Couairion, & Chomaz, 1997).

Στην περίπτωση που στο σύστημα επιβάλλεται μια γραμμική περιοδική διαταραχή συχνότητας ω_i στο σημείο $x=0$ και με έναρξη τη στιγμή $t=0$, η εξίσωση (3.23) θα έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + g(k) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{i}{2} f(k) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + is(k)(R - R_c) \psi = \delta'(x) H(t) e^{-i\omega_f t} \quad (3.29)$$

Η επίλυση της εξίσωσης με τον τρόπο που αναφέρθηκε παραπάνω δίνει:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) \propto & -(2\pi)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \frac{e^{i[k_+ x - \omega(k_+) t]}}{[\omega(k_+) - \omega_f] \frac{\partial D}{\partial \omega}[k_+, \omega(k_+)] \left[\frac{d^2 \omega}{dk^2}(k_+) t \right]^{1/2}} + \\ & i \frac{e^{i[k^+(\omega_f) x - \omega_f t]}}{\frac{\partial D}{\partial k}[k^+(\omega_f), \omega_f; R]} H(x) - i \frac{e^{i[k^-(\omega_f) x - \omega_f t]}}{\frac{\partial D}{\partial k}[k^-(\omega_f), \omega_f; R]} H(-x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Είναι φανερό ότι η λύση αποτελείται από δύο μέρη: μια παροδική κατάσταση που είναι όμοια με αυτή που ισχύει για τη στιγμιαία διαταραχή δέλτα και που περιγράφηκε παραπάνω και από μια 'μόνιμη κατάσταση' που είναι αποτέλεσμα της επιβολής της διαταραχής με συχνότητα ω_f και η οποία διατηρείται χρονικά. Αποτέλεσμα της δεύτερης κατάστασης είναι η εμφάνιση κυμάτων που αυξάνονται ή μειώνονται χωρικά. Αν η ροή είναι απόλυτα ασταθής η παροδική κατάσταση δεν θα απομακρυνθεί και επομένως, αργά ή γρήγορα, θα κυριαρχήσει επί της μόνιμης κατάστασης. Αν όμως η ροή είναι συναγωγικά ασταθής, η μεταβατική κατάσταση θα αποχωρήσει και στη ροή θα επικρατήσουν τα χωρικά μεταβαλλόμενα κύματα της μόνιμης κατάστασης. Μάλιστα, το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων δίνεται από το πραγματικό μέρος k_r του μιγαδικού κυματαριθμού $k = k_r + ik_i$ που προκύπτει από τη σχέση διασποράς $k = f(\omega_f, \text{παράμετροι})$ με ω_f πραγματικό αριθμό (χωρική ανάλυση). Επομένως, γίνεται αντιληπτό ότι οι χωρικά αυξανόμενες διαταραχές έχουν σημασία μόνο στη περίπτωση συναγωγικής αστάθειας.

Η μέθοδος pinching μας δίνει επίσης τη δυνατότητα να διερευνηθεί το αν υπάρχει ενδεχόμενο γενικευμένης (global) αστάθειας, δηλαδή αστάθειας που επεκτείνεται σε όλο το πεδίο ροής και δεν δρα τοπικά. Για το σκοπό αυτό, θεωρούνται μιγαδικοί αριθμοί η συχνότητα, ο κυματαριθμός αλλά και η απόσταση. Στόχος είναι να προσδιοριστεί ο κυματαριθμός k_0 και η απόσταση x_0 ώστε να ισχύει:

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (3.31)$$

Στην περίπτωση που ισχύει $\omega_i(k_0, x_0) < 0$ το σύστημα είναι global ευσταθές, ενώ σε αντίθετη περίπτωση εμφανίζεται global αστάθεια.

Όπως προαναφέρθηκε στην παράγραφο 3.3.1, η σχέση διασποράς μπορεί να εξαχθεί αναλυτικά μόνο όταν λαμβάνεται το όριο $M \rightarrow 0$. Στην περίπτωση που

αγνοούνται οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού, οι Pelekasis & Tsamopoulos (2001) εφάρμοσαν αριθμητικά τη μέθοδο pinching για να προσδιορίσουν τη σχέση διασποράς των Tollmien-Schlichting και των διεπιφανειακών κυμάτων. Για το σκοπό αυτό θεώρησαν τον κυματαριθμό και την συχνότητα μιγαδικές παραμέτρους και επέλυσαν αριθμητικά το σύστημα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων λαμβάνοντας ως παραμέτρους του προβλήματος τον λόγο πυκνοτήτων, τον λόγο ιξωδών, τον αριθμό Froude, τον αριθμό Weber και την θέση στη οποία επιβάλλεται η διαταραχή. Παρόλο που για δεδομένες τιμές παραμέτρων υπάρχουν συνήθως πολλές λύσεις ιδιοτιμών, ενδιαφέρει να προσδιοριστούν μόνο οι πιο ασταθείς. Η διαδικασία που ακολούθησαν οι παραπάνω ερευνητές περιγράφεται συνοπτικά ως εξής: Αρχικά πραγματοποιείται η χρονική ανάλυση ευστάθειας θεωρώντας τη συχνότητα ω μιγαδική και τον κυματαριθμό k πραγματικό αριθμό. Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί η συχνότητα πραγματική και ο κυματαριθμός μιγαδικός (χωρική ανάλυση). Εισάγεται μια αξιόπιστη αρχική συνθήκη και προσδιορίζονται οι άγνωστες ιδιοτιμές για τις παραμέτρους του προβλήματος. Η αριθμητική επίλυση βασίζεται στη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων σε συνδυασμό με την μέθοδο Newton-Raphson ώστε να επιτευχθεί ευκολότερα και γρηγορότερα σύγκλιση. Από την χρονική ανάλυση ευστάθειας προκύπτει η πιο ασταθής ιδιομορφή. Στο επόμενο στάδιο θεωρούνται μιγαδικοί αριθμοί τόσο η συχνότητα όσο και ο κυματαριθμός και επαναλαμβάνονται οι υπολογισμοί θεωρώντας τον κυματαριθμό k ως άγνωστη μεταβλητή. Τα σημεία που είναι ουδέτερα ασταθή κατά τη χρονική ανάλυση ($\omega_r = 0$) είναι και ουδέτερα ασταθή κατά τη χωρική ανάλυση ($k_i = 0$). Επιπλέον, κοντά στις περιοχές των ουδέτερων σημείων μπορεί να εφαρμοστεί η σχέση $k_i \approx -k_r \omega_i / \omega_r$, ως αξιόπιστη αρχική συνθήκη για τον προσδιορισμό του μιγαδικού κυματαριθμού ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας (Gaster, 1965). Από τη στιγμή που υπάρχει λύση, έστω και κοντά στα ουδέτερα σημεία, είναι εύκολο να επεκταθεί ώστε να καλύψει όλο το εύρος των παραμέτρων του προβλήματος. Με την παραπάνω διαδικασία κατασκευάζονται τα διαγράμματα pinching στα οποία απεικονίζεται το πως μεταβάλλεται το φανταστικό μέρος k_i του κυματαριθμού ως συνάρτηση του πραγματικού μέρους k_r για δεδομένο ρυθμό ανάπτυξης ω_r . Το σημείο στο οποίο οι διάφορες διακλαδώσεις τείνουν να συγκλίνουν προσδιορίζει το ρυθμό ανάπτυξης του κυματοπακέτου που παραμένει στην περιοχή όπου επιβλήθηκε η διαταραχή, δηλαδή κατά μήκος της ακτίνας $x/t=0$. Επομένως, το σημείο της σύγκλισης αντιστοιχεί στην

απόλυτη συχνότητα το πρόσημο του φανταστικού μέρους της οποίας προσδιορίζει την απόλυτη ή συναγωγική φύση της αστάθειας.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι η παραπάνω μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί κατά μήκος οποιασδήποτε ακτίνας x/t και όχι μόνο για να διαπιστωθεί τι συμβαίνει στην περιοχή που αρχικά επιβλήθηκε η διαταραχή ($x/t=0$), (Brevdo et al., 1999). Η διαδικασία είναι η ίδια με τη μόνη διαφορά ότι η συχνότητα ω μετασχηματίζεται μέσω της σχέσης $\omega_v = \omega - kV_{Gr}$ και αναζητείται η συχνότητα ω_v και

$$\text{ο κυματαριθμός } k \text{ ώστε να ισχύει } \frac{d\omega_v}{dk} = 0, \text{ όπου } V_{Gr} = \frac{x}{t} = \frac{\partial\omega_r}{\partial k_r}, \quad \left. \frac{\partial\omega_i}{\partial k_r} \right|_{k=k_r+ik_i} = 0$$

και $\omega_i = \omega_{i,\max}(k = k_r + ik_i)$. Στην παρούσα διατριβή μας ενδιαφέρει να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά που επικρατούν κατά μήκος των ακτινών που περικλείουν το πιο ασταθές κυματοπακέτο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.4(β) και 3.4(γ). Οι ακτίνες αυτές χαρακτηρίζονται από μηδενικό ρυθμό ανάπτυξης, $\sigma_i = \omega_i - V_{Gr}k_i \approx 0$, κάποιο μιγαδικό κυματαριθμό k' και κάποια μιγαδική συχνότητα ω' . Μέσω της μεθόδου pinching, εισάγοντας διάφορες τιμές για την ταχύτητα V_{Gr} , προσδιορίζεται τελικά η συχνότητα ω_v και ο κυματαριθμός k' έτσι ώστε $\sigma = \omega_v \approx 0$. Με βάση τις τιμές αυτές υπολογίζεται εύκολα και η μιγαδική συχνότητα ω' . Η μέθοδος pinching, όπως περιγράφεται παραπάνω, είναι γνωστή και ως μέθοδος collision. Πρέπει να αναφερθεί ότι για να βρεθούν τα χαρακτηριστικά της αριστερής ακτίνας η ταχύτητα μειώνεται σταδιακά σε σχέση με την ταχύτητα του κύματος με τον μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης, ενώ αυξάνεται για να προσδιοριστούν τα χαρακτηριστικά της δεξιάς ακτίνας.

Εναλλακτικά, η ταχύτητα, ο κυματαριθμός και η συχνότητα που επικρατούν κατά μήκος των ακτινών που περικλείουν το πιο ασταθές κυματοπακέτο μπορούν να βρεθούν μέσω της μεθόδου saddle point (Brevdo et al., 1999). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αυξάνοντας σταδιακά το φανταστικό μέρος του κυματαριθμού, σε σχέση με την τιμή μηδέν που αντιστοιχεί στο πιο ασταθές κύμα του κυματοπακέτου, επιλύεται η σχέση διασποράς και καταγράφεται το πραγματικό μέρος του κυματαριθμού για το οποίο ισχύει $\omega_i = \omega_{i,\max}(k = k_r + ik_i)$ και $\sigma_i = \omega_i - V_{Gr}k_i \approx 0$ όπου $V_{Gr} = \frac{x}{t} = \frac{\partial\omega_r}{\partial k_r}$. Με

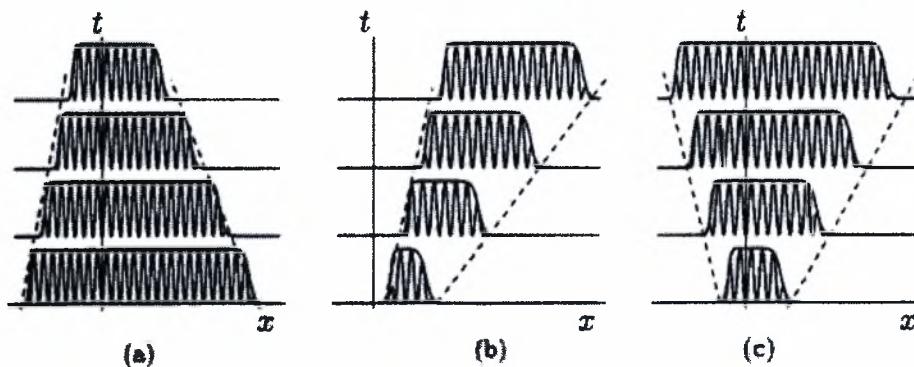
τον τρόπο αυτό υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά που επικρατούν στην ακτίνα πάνω στην οποία κινείται το δεξί άκρο του κυματοπακέτου. Για τον προσδιορισμό της

αριστερής ακτίνας η διαδικασία είναι ίδια με μόνη διαφορά ότι το φανταστικό μέρος του κυματηριθμού αναζητείται σε αρνητικές τιμές.

Οι μέθοδοι saddle point και collision εφαρμόστηκαν από τους Brevdo et al. (1999) για να μελετηθεί διεξοδικά η δομή του πιο ασταθούς κυματοπακέτου που αναπτύσσεται κατά τη ροή υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο. Στη συγκεκριμένη μελέτη διαπιστώθηκε η καλύτερη αξιοπιστία της μεθόδου collision αφού η μέθοδος saddle point δεν μπόρεσε να δώσει αποτελέσματα για ένα σημαντικό τμήμα της περιοχής των ασταθών ακτινών που παρατηρούνται στο κυματοπακέτο.

3.4 Ασθενώς μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας συνοριακού στρώματος πάνω από υγρό υμένα

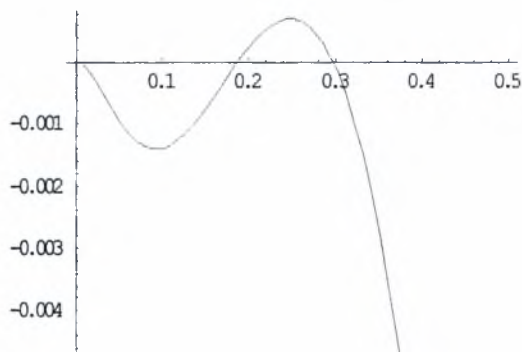
Αρχικά θα πρέπει να αναφερθεί ότι αν οι γραμμικές αστάθειες που περιγράφονται στο Σχήμα 3.4 εξελιχθούν σε μεγάλους χρόνους η συμπεριφορά τους δεν θα περιγράφεται πλέον από τη γραμμική θεωρία. Σε μεγάλους χρόνους η μη-γραμμικότητα του φαινομένου επηρεάζει την εξέλιξη των ασταθειών αυτών οι οποίες σύμφωνα με τη θεωρία συμπεριφέρονται όπως απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3.5: Σχηματική αναπαράσταση (α) ευστάθειας, (β) συναγωγικής και (γ) απόλυτης αστάθειας στη μη-γραμμική περιοχή (Couairion, & Chomaz, 1997).

Το επόμενο στάδιο στην μελέτη της ευστάθειας της υπό εξέταση ροής είναι η ανάλυση της συμπεριφοράς της στην ασθενώς μη γραμμική περιοχή. Η ανάλυση που ακολουθεί αφορά στις περιπτώσεις διεπιφανειακών κυμάτων όπου το υγρό είναι αρκετά ιξώδες ώστε να μπορεί να αγνοηθεί η αδράνεια του. Όπως προαναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας τέτοιου είδους ροές περιγράφονται από τις εξισώσεις (2.13) έως (2.15) και (2.31) έως (2.35).

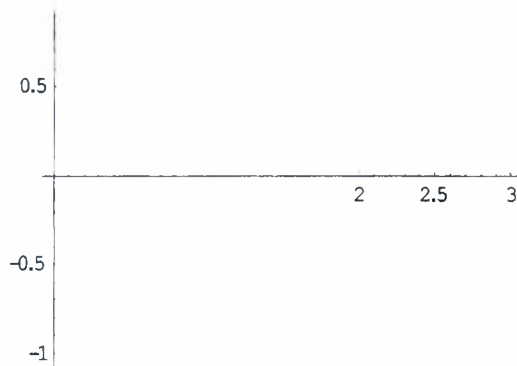
Για την ασθενώς μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας πρέπει να καθοριστούν κατάλληλες χωρικές και χρονικές κλίμακες και να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μη-γραμμικοί όροι αρχίζουν να επηρεάζουν την εξέλιξη του γραμμικού κύματος. Σύμφωνα με τους Benjamin (1961) και Stewartson & Stuart (1971), οι οποίοι μελέτησαν την ασυμπτωτική συμπεριφορά δισδιάστατων γραμμικών κυμάτων διασποράς, μετά την έλευση χρόνου τάξης $O(\omega_i^{-1})$ το κυματοπακέτο διαχέεται και καταλαμβάνει ένα χαρακτηριστικό μήκος τάξης $O(\omega_i^{-1/2})$. Έτσι, αν επικεντρωθούμε σε περιοχές κοντά στην κρίσιμη περιοχή ευστάθειας όπου $\omega_{i,c} \approx 0$, για χρόνο τάξης ω_i^{-1} η μη-γραμμικότητα του φαινομένου αρχίζει να γίνεται σημαντική. Παρόλα αυτά, το γεγονός ότι τα πλάτη του εξακολουθούν να παραμένουν μικρά μας επιτρέπει να χαρακτηρίζουμε την επίδραση των μη-γραμμικών όρων στην εξέλιξη της ροής ως ασθενή. Στην κατηγορία αυτή ανήκει η καμπύλη ευστάθειας που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.6 και αντιστοιχεί σε σύστημα ρευστών με παραμέτρους $\mu/\mu_w = 1.67 \cdot 10^{-6}$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{We} = 59.88$, $\overline{Fr} = 3227$, $\lambda = 0.371$ και $H_0 = 2.076$. Είναι εμφανές ότι ο μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης $\omega_{i,max}$ βρίσκεται πολύ κοντά στην κρίσιμη τιμή $\omega_{i,c} \approx 0$.



Σχήμα 3.6: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k)$ κοντά στην κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας ($\omega_{i,c} \approx 0$).

Εκτός από την περιοχή κοντά στην κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας, και στις περιοχές στα άκρα κάθε κυματοπακέτου οι διαταραχές μεταβάλλονται με μικρό ρυθμό ανάπτυξης ώστε $\omega_i = O(\varepsilon_i^2)$. Η διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων υπεισέρχεται μέσω του κυματαριθμού k . Στην περιοχή κοντά στην κρίσιμη καμπύλη ο κυματαριθμός θεωρείται πραγματικός αριθμός αφού μελετάται η συμπεριφορά του πιο ασταθούς κύματος του κυματοπακέτου ($k_i = 0, \frac{\partial \omega_i}{\partial k_r} = 0$). Αντίθετα, σε ροές πιο

κοντά στην πραγματικότητα, με μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης αρκετά μακριά από την κρίσιμη τιμή, αναφερόμαστε στα άκρα του κυματοπακέτου και κινούμαστε κατά μήκος της ακτίνας x/t η οποία χαρακτηρίζεται από κάποιον μιγαδικό κυματαριθμό k_* . Στην δεύτερη κατηγορία ανήκει η καμπύλη ευστάθειας που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.7 και αντιστοιχεί σε σύστημα ρευστών αέρα de-icing με παραμέτρους $\mu/\mu_w = 1.67 \cdot 10^{-6}$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{Fr} = 3.94 \cdot 10^4$, $\overline{We} = 59.88$, $\lambda = 0.371$ και $H_0 = 2.076$. Είναι εμφανές ότι ο μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης $\omega_{i,max}$ βρίσκεται πολύ μακριά από την κρίσιμη τιμή $\omega_{i,c} \approx 0$.



Σχήμα 3.7: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k_r)$ για σύστημα αέρα-deicing.

Όμως, ο μέγιστος ρυθμός ανάπτυξης αφορά στο πιο ασταθές κύμα του κυματοπακέτου και παρατηρώντας τα Σχήματα 3.4 (β) και (γ) αντιστοιχεί στην εξέλιξη της μέγιστης κορυφής του κυματοπακέτου. Από τα ίδια σχήματα γίνεται αντιληπτό ότι στα άκρα του κυματοπακέτου οι ρυθμοί ανάπτυξης είναι πολύ μικρότεροι. Επομένως, σε συστήματα με μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης μακριά από την κρίσιμη τιμή, η ασθενώς μη γραμμική θεωρία μελετά την συμπεριφορά των κυμάτων που εξελίσσονται κατά μήκος των ακτινών που περικλείουν το ασταθές κυματοπακέτο. Μάλιστα, η πραγματική ταχύτητα των συγκεκριμένων ακτινών πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $\frac{\partial \omega_i}{\partial k_r}(k_*) = \frac{x}{t}$ και ο χρονικός ρυθμός αύξησης κατά μήκος

τους είναι $\sigma = \omega_i(k_*) - (x/t)k_{*,i} = O(\epsilon_1^2)$. Ο προσδιορισμός των χαρακτηριστικών που επικρατούν στην περιοχή κοντά στα άκρα του κυματοπακέτου, δηλαδή το μήκος κύματος, ο μιγαδικός κυματαριθμός και η μιγαδική συχνότητα, γίνεται εφαρμόζοντας είτε τη μέθοδο collision, είτε τη μέθοδο pinching, όπως αυτές περιγράφηκαν αναλυτικά στο τέλος της παραγράφου 3.3.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι αν εισαχθεί στο πρόβλημα μια μικρή παράμετρος ε_1 τέτοια ώστε $\omega_1 = O(\varepsilon_1^2)$ τότε μέσα σε χρόνο $O(\varepsilon_1^{-2})$ και για μια απόσταση $O(\varepsilon_1)$ μπορεί να μελετηθεί η μη-γραμμική συμπεριφορά της ροής. Επομένως, χρησιμοποιώντας την μικρή παράμετρο ε_1 εισάγονται οι παρακάτω μετασχηματισμοί:

$$\xi = x - C_p t, \quad \zeta = (x - C_g t)\varepsilon_1, \quad \tau = \varepsilon_1^2 t, \quad C_p = \frac{\omega_r}{k}, \quad C_g = \frac{d\omega_r}{dk} \quad (3.32)$$

όπου C_p , C_g είναι η φασική ταχύτητα και η ταχύτητα κυματοπακέτου αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι η παράμετρος ε_1 εδώ δεν συνδέεται με τον αριθμό Re αλλά με μία αρχική διαταραχή στην βασική ροή.

Πριν την εισαγωγή των παραπάνω μεταβλητών στο πρόβλημα μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις ροής με βάση τις παρακάτω σχέσεις για την ροϊκή συνάρτηση και το ύψος της διεπιφάνειας:

$$\Psi = \lambda \frac{\bar{Y}^2}{2} + \Phi, \quad h = H_0 + f \quad (3.33)$$

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση που περιγράφει το ισοζύγιο x-ορμής στην αέρια φάση γίνεται:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \bar{Y}^4} = \left(\lambda \bar{Y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}} \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X \partial \bar{Y}^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \bar{Y}^3} \quad (3.34)$$

Η εξίσωση που συνδέει την πίεση με το πάχος μετατόπισης δεν μεταβάλλεται, ενώ η συνοριακή συνθήκη που ισχύει εκτός του ιξώδους υπόστρωματος παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = \lambda (A + f) \quad (3.35)$$

Η ροή του υγρού για την περίπτωση που το ιξώδες του είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μπορεί να ληφθεί το όριο $M \rightarrow 0$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{(H_0 + f)^2}{2} \left(\lambda + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{Y}^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{(H_0 + f)^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{(H_0 + f)^3}{3We} \frac{\partial^3 f}{\partial X^3} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{(H_0 + f)^3}{3} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \frac{\partial f}{\partial X} \right) \quad (3.36)$$

Τέλος, στην διεπιφάνεια αέρα-υγρού εφαρμόζονται οι σχέσεις:

$$\bar{Y} = 0: \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (3.37)$$

Οι μεταβλητές του προβλήματος μπορεί να αναπτυχθούν ως προς την μικρή μεταβλητή ε ως εξής:

$$\Phi = \varepsilon_1 \Phi_1(\xi, \zeta, \tau, \bar{Y}) + \varepsilon_1^2 \Phi_2(\xi, \zeta, \tau, \bar{Y}) + \varepsilon_1^3 \Phi_3(\xi, \zeta, \tau, \bar{Y}) + O(\varepsilon_1^4) \quad (3.38)$$

$$f = \varepsilon_1 f_1(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon_1^2 f_2(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon_1^3 f_3(\xi, \zeta, \tau) + O(\varepsilon_1^4) \quad (3.39)$$

$$P = \varepsilon_1 P_1(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon_1^2 P_2(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon_1^3 P_3(\xi, \zeta, \tau) + O(\varepsilon_1^4) \quad (3.40)$$

$$A = \varepsilon_1 A_1(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon_1^2 A_2(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon_1^3 A_3(\xi, \zeta, \tau) + O(\varepsilon_1^4) \quad (3.41)$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω εκφράσεων στις εξισώσεις ροής του προβλήματος και εισάγοντας τους μετασχηματισμούς που περιγράφονται από την εξίσωση (3.32) καταλήγουμε αρχικά στο πρόβλημα τάξης ε_1 . Το πρόβλημα αυτό είναι ουσιαστικά το ίδιο πρόβλημα που προκύπτει και από την γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Η μόνη διαφορά είναι ότι επειδή ο χρόνος έχει μετασχηματιστεί με βάση μια αργή κλίμακα οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος αναφέρονται σε διαταραχές επί της βασικής ροής. Έτσι, το πρόβλημα τάξης ε εκφράζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \bar{Y}^4} = \lambda \bar{Y} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi \partial \bar{Y}^2} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{Y}} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = \lambda (A_1 + f_1) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \bar{Y}^2} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.44)$$

$$\bar{Y} = 0: \quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (3.45)$$

$$P_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A_1}{\partial s} \frac{ds}{x-s} \quad (3.46)$$

$$-C_p \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = -\frac{H_0^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi \partial \bar{Y}^2} - H_0 \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{H_0^3}{3} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi^2} + \frac{H_0^3}{3} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} - \frac{H_0^3}{3We} \frac{\partial^4 f_1}{\partial \xi^4} \quad (3.47)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η λύση του προβλήματος τάξεως ε που υπάρχει είναι της μορφής:

$$\Phi_1 = C_1(\zeta, \tau, \bar{Y}) e^{ik\xi} + c.c, \quad f_1 = d_1(\zeta, \tau) e^{ik\xi} + c.c \quad (3.48)$$

$$A_1 = E_1(\zeta, \tau) e^{ik\xi} + c.c, \quad P_1 = G_1(\zeta, \tau) e^{ik\xi} + c.c \quad (3.49)$$

με αντικατάσταση στις εξισώσεις (3.42) μέχρι (3.47) οι συντελεστές C_1 , E_1 και G_1 μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις του d_1 :

$$E_1 = \frac{-\lambda^{5/3} A_i'(0)}{\lambda^{5/3} A_i'(0) - i^{1/3} k^{4/3} \int_0^\infty A_i dz} d_1 = \widehat{E}_1 d_1 \quad (3.50)$$

$$G_1 = \frac{-k\lambda^{5/3} A_i'(0)}{\lambda^{5/3} A_i'(0) - i^{1/3} k^{4/3} \int_0^\infty A_i dz} d_1 = \widehat{G}_1 d_1 \quad (3.51)$$

$$C_1(z) = \frac{\lambda(E_1 + d_1)}{(ik\lambda)^{1/3}} \left(z + \frac{\int_0^z (A_i(s)z - A_i(s)s) ds}{\int_0^\infty A_i(z) dz} + \frac{A_i'(0)}{\int_0^\infty A_i(z) dz} \right) = \widehat{C}_1 d_1 \quad (3.52)$$

Όπου $z = \frac{y}{H_0(x)}$, $\lambda = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y' = 0) = \frac{0.332}{\sqrt{x}}$ και A_i, A_i' η συνάρτηση Airy και η

πρώτη παράγωγος της.

Το πρόβλημα τάξεως ϵ_1 περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial \bar{Y}^4} = \lambda \bar{Y} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \xi \partial \bar{Y}^2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Y} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi \partial \bar{Y}^2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \bar{Y}^3} + \lambda \bar{Y} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \zeta \partial \bar{Y}^2} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{Y}} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = \lambda (A_2 + f_2) \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \bar{Y}^2} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.55)$$

$$\bar{Y} = 0: \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (3.56)$$

$$P_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1}{\partial \zeta} \right) \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (3.57)$$

$$-C_p \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \frac{H_0^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \xi \partial \bar{Y}^2} + H_0 \lambda \frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{H_0^3}{3} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi^2} - \frac{H_0^3}{3} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{\text{Fr}} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi^2} + \frac{H_0^3}{3\text{We}} \frac{\partial^4 f_2}{\partial \xi^4} = R_1 + R_2 \quad (3.58)$$

όπου οι συναρτήσεις R_1, R_2 αντιπροσωπεύουν τους γνωστούς γραμμικούς και μη-γραμμικούς όρους αντίστοιχα. Στην τελευταία εξίσωση οι γραμμικοί όροι που προέρχονται από την επίλυση του $O(\epsilon_1)$ προβλήματος και εκφράζονται από τον όρο R_1 θα πρέπει να μηδενισθούν ώστε να αποφεύγονται ασταθείς όροι της μορφής $\xi e^{ik\xi}$ και η συνολική λύση να διατηρεί την περιοδικότητά της (εναλλακτική λύση Fredholm). Η εφαρμογή του παραπάνω περιορισμού οδηγεί στον υπολογισμό της ταχύτητας κυματοπακέτου η οποία ισούται με:

$$C_g = \frac{\frac{H_0^2}{2} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \zeta \partial Y^2} + H_0 \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} - \frac{H_0^3}{3} 2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{H_0^3}{3} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{H_0^3}{3 We} 4 \frac{\partial^4 f_1}{\partial \zeta \partial \xi^3}}{\frac{\partial f_1}{\partial \zeta}} \quad (3.59)$$

Στην εξίσωση (3.58) οι μη γραμμικοί όροι είναι:

$$R_2 = -H_0 f_1 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial \xi \partial Y^2} - H_0 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial Y^2} - f_1 \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + H_0^2 f_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi^2} + H_0^2 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial P_1}{\partial \xi} + H_0^2 f_1 \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + H_0^2 \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} \right)^2 - \frac{H_0^2 f_1}{We} \frac{\partial^4 f_1}{\partial \xi^4} - \frac{H_0^2}{We} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \frac{\partial^3 f_1}{\partial \xi^3} \quad (3.60)$$

Το πρόβλημα τάξης ε_1^2 έχει λύση της μορφής:

$$\Phi_2 = \hat{C}_2 d_1^2 e^{i2k\xi} + c.c., \quad P_2 = \hat{G}_2 d_1^2 e^{i2k\xi} + c.c., \quad A_2 = \hat{E}_2 d_1^2 e^{i2k\xi} + c.c., \quad f_2 = \hat{d}_2 d_1^2 e^{i2k\xi} + c.c.$$

και με αντικατάσταση στις εξισώσεις (3.53) μέχρι (3.58) καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τους $\hat{C}_2, \hat{E}_2, \hat{G}_2, \hat{d}_2$:

$$2ik\lambda \bar{Y} \frac{\partial \hat{C}_2}{\partial Y} - \frac{\partial^3 \hat{C}_2}{\partial Y^3} + 2ik\hat{G}_2 = -ik \left(\frac{\partial \hat{C}_1}{\partial Y} \right)^2 + ik\hat{C}_1 \frac{\partial^2 \hat{C}_1}{\partial Y^2} \quad (3.61)$$

$$\bar{Y} = 0: \quad \hat{C}_2 = \frac{\partial \hat{C}_2}{\partial Y} = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \hat{C}_2}{\partial Y} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = \lambda (\hat{E}_2 + \hat{d}_2) \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{C}_2}{\partial Y^2} (\bar{Y} \rightarrow \infty) = 0 \quad (3.64)$$

$$\hat{G}_2 = 2k\hat{E}_2 \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} -2ikC_p \hat{d}_2 + ikH_0^2 \frac{\partial^2 \hat{C}_2}{\partial Y^2} + 2ikH_0 \lambda \hat{d}_2 + 4k^2 \frac{H_0^3}{3} \hat{G}_2 + 16k^4 \frac{H_0^3}{3We} \hat{d}_2 + \\ 4k^2 \frac{H_0^3}{3} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \hat{d}_2 = -2ikH_0 \frac{\partial^2 \hat{C}_1}{\partial Y^2} - ik\lambda - 2k^2 H_0^2 \hat{G}_1 - 2k^4 \frac{H_0^2}{We} - \\ 2k^2 H_0^2 \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Για να ολοκληρωθεί ο ορισμός του προβλήματος ώστε να είναι δυνατός ο προσδιορισμός της μεταβλητής d_1 και κατά συνέπεια όλων των υπολοίπων μεταβλητών πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και το πρόβλημα τάξεως ε_1^3 . Για το σκοπό αυτό εισάγουμε στην εξίσωση ροής του υγρού έναν επιπλέον όρο, ο οποίος εκφράζει την επίδραση που έχει στη συνολική λύση η ποσότητα $e^{i\omega t}$, δεδομένου ότι στην

κλίμακα χρόνου που χρησιμοποιείται γίνεται σημαντικός. Ο επιπλέον όρος προκύπτει από την παραγωγή του f_1 ως προς t και ισούται με $\frac{-\omega_i}{k_r} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = \frac{-\omega_i}{k_r} d_1 e^{ik\xi}$. Στην συνέχεια απομονώνουμε όλους τους όρους που συνεισφέρουν στη λύση τάξεως ϵ και τους μηδενίζουμε για να επιβάλουμε με τον τρόπο αυτό την ύπαρξη περιοδικής λύσης πεπερασμένου πλάτους. Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί τελικά σε μια εξίσωση που περιγράφει την ασθενώς μη-γραμμική εξέλιξη της διαταραχής:

$$\frac{\partial d_1}{\partial \tau} + S_1 \frac{\partial^2 d_1}{\partial \zeta^2} - S_2 d_1 + S_3 d_1^2 \bar{d}_1 = 0 \quad (3.67)$$

όπου

$$S_1 = -\frac{H_0^3}{3} \widehat{G}_1 - \frac{2H_0^3}{We} k_r^2 - \frac{H_0^3}{3} \frac{\rho_w}{\rho} \frac{\rho-1}{Fr} \quad (3.68)$$

$$S_2 = \pm \frac{\omega_i'}{k_r} \quad (3.69)$$

Η παράμετρος ω_i' είναι πρώτης τάξεως και ορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τη σχέση $\omega_i = \epsilon_i^2 \omega_i'$. Το πρόσημο του S_2 εξαρτάται αποκλειστικά από το αν επικεντρωνόμαστε στην περιοχή πάνω ή κάτω από την κρίσιμη γραμμική καμπύλη ευστάθειας. Αν η τιμή του ω_i' για δεδομένες τιμές παραμέτρων είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη τιμή $\omega_{i,c}$, το πρόσημο του S_2 είναι θετικό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικό.

Τέλος, η παράμετρος S_3 είναι ίση με:

$$S_3 = \frac{ik}{2} \frac{\partial^2 \widehat{C}_1}{\partial Y^2} + ik \frac{\partial^2 \widehat{C}_1}{\partial Y^2} + H_0 ik \frac{\partial^2 \widehat{C}_2}{\partial Y^2} + H_0 \widehat{d}_2 ik \frac{\partial^2 \widehat{C}_1}{\partial Y^2} + \widehat{d}_2 ik \kappa + H_0^2 \widehat{G}_2 2k^2 - H_0 \widehat{G}_1 k^2 - H_0^2 \widehat{d}_2 \widehat{G}_1 k^2 + 2H_0 \widehat{G}_1 k^2 + \frac{7H_0^2}{We} \widehat{d}_2 k^4 + \frac{H_0}{We} k^4 + H_0^2 \widehat{d}_2 k^2 \frac{\rho_w}{Fr} \frac{\rho-1}{Fr} + H_0 k^2 \frac{\rho_w}{Fr} \frac{\rho-1}{Fr} \quad (3.70)$$

Η εξίσωση (3.67) είναι πολύ σημαντική επειδή περιγράφει ικανοποιητικά την μη-γραμμική συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων για τιμές παραμέτρων που οδηγούν κοντά στην κρίσιμη γραμμική περιοχή, αλλά και τις περιοχές κοντά στα άκρα κυματοπακέτων που προέρχονται από παραμέτρους μακριά από την κρίσιμη περιοχή. Ουσιαστικά αποτελεί το ανάλογο της εξίσωσης Schrödinger για την περίπτωση της ροής που μελετάμε. Από την εξίσωση αυτή μπορούν να εξαχθούν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την ύπαρξη ή όχι οδευόντων κυμάτων (traveling waves) και μετώπων (fronts) στα όρια της περιοχής που ισχύει. Ο συντελεστής S_2 στην εξίσωση (3.67) αντιπροσωπεύει την επίδραση που έχει το ω_i στην εξέλιξη του

κύματος στα χρονικά πλαίσια που θεωρούνται. Αναγκαίο κριτήριο για την ύπαρξη οδευόντων κυμάτων κοντά στην κρίσιμη περιοχή ευστάθειας είναι η εξουδετέρωση της επίδρασης του ω_1 από την επίδραση του S_3 . Επομένως, επειδή ο συντελεστής S_2 είναι πραγματικός αριθμός, θα πρέπει σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο ο συντελεστής S_2 και το πραγματικό μέρος του συντελεστή S_3 να έχουν το ίδιο πρόσημο. Σε διαφορετική περίπτωση οι δύο επιδράσεις θα προστίθενται και το κύμα θα συνεχίζει να μεγαλώνει χωρίς να αποκτά ποτέ ένα ύψος κορεσμού. Τέλος, στην περίπτωση που οδευόντα κύματα υπάρχουν μόνο για τιμές πάνω από την κρίσιμη τιμή k , η αστάθεια χαρακτηρίζεται ως υπερκρίσιμη, ενώ αν υπάρχουν μόνο για τιμές κάτω από την τιμή k χαρακτηρίζεται ως υποκρίσιμη.

Στην περίπτωση που η εξίσωση (3.67) προβλέψει ότι υπάρχουν οδευόντα κύματα στην κρίσιμη περιοχή, μας ενδιαφέρει να προσδιοριστεί η εξέλιξη τους στο χρόνο καθώς και να διερευνηθεί η ευστάθεια τους σε πλευρικές αστάθειες. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι ίδια με αυτή που περιγράφεται από τους Stewartson & Stuart (1971) και τον Lin (1974) στην ανάλυση τους για ασθενώς μη-γραμμική ευστάθεια ροής Poiseuille και ιξώδους υμένα σε κεκλιμένο επίπεδο, αντιστοίχως. Από τη στιγμή που αναφερόμαστε σε μονοχρωματικό οδευόν κύμα οι χωρικές μεταβολές είναι αμελητέες και κατά συνέπεια ο όρος $S_1 \frac{\partial^2 d_1}{\partial \zeta^2}$ στην εξίσωση (3.67) μπορεί να μηδενιστεί. Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσωσης θα έχει τη μορφή:

$$d_1(\tau) = (d_1 \bar{d}_1)^{1/2} \exp[iB(\tau)\tau] \quad (3.71)$$

όπου

$$d_1 \bar{d}_1 = \frac{S_2 \exp(2S_2(\tau - \tau_0))}{1 + \text{Re}(S_3) \exp(2S_2(\tau - \tau_0))} \quad (3.72)$$

$$\text{και } B(\tau) = -\frac{\text{Im}(S_3)}{\tau} \int_{\tau_0}^{\tau} d_1 \bar{d}_1(\tau) d\tau \quad (3.73)$$

Καθώς $\tau \rightarrow \infty$ οι παραπάνω εκφράσεις γίνονται:

$$d_1 \bar{d}_1(\tau \rightarrow \infty) = \frac{S_2}{\text{Re}(S_3)}, \quad B(\tau \rightarrow \infty) = -\frac{\text{Im}(S_3)}{\text{Re}(S_3)} S_2 \quad (3.74)$$

Κατά συνέπεια η λύση που προκύπτει για το d_1 από την εξίσωση (3.71) έχει τη μορφή:

$$d_1(\tau \rightarrow \infty) = \left(\frac{S_2}{\text{Re}(S_3)} \right)^{1/2} e^{-\frac{\text{Im}(S_3)}{\text{Re}(S_3)} S_2 \tau} \quad (3.75)$$

Επιπλέον, προκύπτει ότι η φασική ταχύτητα που παρατηρείται στη χρονική κλίμακα που χρησιμοποιείται πρέπει να διορθωθεί με έναν όρο τάξεως ε^2 :

$$C_p^* = C_p + \frac{\text{Im}(S_3) S_2}{\text{Re}(S_3) k} \varepsilon^2 \quad (3.76)$$

Τέλος, εξετάζεται η ευστάθεια δεδομένου κύματος με κυματαριθμό k σε πλευρικές διαταραχές. Για το σκοπό αυτό επιτρέπουμε χωρικές μεταβολές του παραπάνω μονοχρωματικού κύματος με μήκος κύματος της τάξεως δk , και πλάτους τάξης δ , με αποτέλεσμα το d_1 να γίνεται:

$$d_1 = d_1(\tau \rightarrow \infty) + [d \cdot d_2(\tau)e^{ikz} + d \cdot d_3(\tau)e^{-ikz}] e^{-iQ\tau} \quad (3.77)$$

όπου d είναι το μέγεθος της διαταραχής ($d \ll 1$) και το Q ισούται με:

$$Q = \frac{\text{Im}(S_3)}{\text{Re}(S_3)} S_2 \quad (3.78)$$

Με αντικατάσταση της έκφρασης (3.77) στην εξίσωση (3.71) καταλήγουμε σε σύστημα δυο εξισώσεων με αγνώστους τα d_2, \bar{d}_3 :

$$\frac{\partial d_2}{\partial \tau} + A_1 d_2 + A_2 \bar{d}_3 = 0 \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial \bar{d}_3}{\partial \tau} + A_3 d_2 + A_4 \bar{d}_3 = 0 \quad (3.80)$$

Όπου για S_1 πραγματικό αριθμό (Lin, 1974):

$$A_1 = S_2 - S_1 k^2 + i S_2 \frac{\text{Im}(S_3)}{\text{Re}(S_3)}, \quad A_2 = S_3 \frac{S_2}{\text{Re}(S_3)} \quad (3.81)$$

$$A_3 = \bar{S}_3 \frac{S_2}{\text{Re}(S_3)}, \quad A_4 = S_2 - S_1 k^2 - i S_2 \frac{\text{Im}(S_3)}{\text{Re}(S_3)} \quad (3.82)$$

Οι διαταραχές που θεωρήθηκαν παραπάνω είναι γραμμικές και επομένως στα όρια ισχύος της γραμμικής θεωρίας το σύστημα των εξισώσεων (3.79) και (3.80) έχει λύση της μορφής:

$$d_2 = c_2 e^{\lambda_1 \tau}, \quad \bar{d}_3 = c_3 e^{\lambda_1 \tau} \quad (3.83)$$

όπου οι σταθερές c_2, c_3 καθορίζονται από την γραμμική ανάλυση ευστάθειας και η ιδιοτιμή λ_1 ισούται με (Lin, 1974):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[-(A_4 + A_1) \pm \left\{ (A_4 + A_1)^2 - 4(A_4 A_1 - A_3 A_2) \right\}^{1/2} \right] \quad (3.84)$$

Το κριτήριο για ευστάθεια σε πλευρικές διαταραχές απαιτεί να ισχύει:

$$\text{Re}(\lambda_1) < 0 \quad (3.85)$$

Από το οποίο με αντικατάσταση προκύπτει η ακόλουθη συνθήκη για την ευστάθεια των οδοντών κυμάτων κοντά στην κρίσιμη περιοχή όταν S_1 είναι πραγματικός αριθμός (Lin, 1974):

$$S_1 k^2 < S_2 \mp S_2 \quad (3.86)$$

Για την περίπτωση που αναφερόμαστε στα άκρα του κυματοπακέτου οι Saarlos και Hohenberg (1997) μελέτησαν την γενικευμένη μιγαδική εξίσωση Ginzburg-Landau ώστε να εξαχθούν κάποια γενικά κριτήρια σχετικά με την ύπαρξη ή όχι μετώπων (fronts), Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Σχηματική αναπαράσταση μετωπικού κύματος (Couairion, & Chomaz, 1997).

Στη συγκεκριμένη μελέτη μας ενδιαφέρει να εξεταστεί το κατά πόσο το γραμμικό κυματοπακέτο εξελισσόμενο σε μεγάλους χρόνους μπορεί να πάρει μια μορφή τύπου μετώπου. Η γενικευμένη εξίσωση Ginzburg-Landau έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \varepsilon d_1 + (b_1 + ic_1) \frac{\partial^2 d_1}{\partial x^2} - (b_3 - ic_3) |d_1|^2 d_1 - (b_5 - ic_5) |d_1|^4 d_1 \quad (3.87)$$

Είναι φανερό ότι για $b_5 = c_5 = 0$ η εξίσωση (3.87) έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (3.67) που ισχύει για την περίπτωση που μελετάμε. Οι Saarlos και Hohenberg (1997) απέδειξαν ότι στην περίπτωση που $b_5 = c_5 = 0$ και $b_3 > 0$ το σύστημα εμφανίζει υπερκρίσιμη αστάθεια, ενώ αν ισχύει $b_3 < 0$ η αστάθεια χαρακτηρίζεται ως υποκρίσιμη. Οι ίδιοι ερευνητές απέδειξαν ότι για οποιοσδήποτε τιμές των παραμέτρων της εξίσωσης (3.87) και για υπερκρίσιμη αστάθεια υπάρχουν μόνο μετωπικά κύματα που κινούνται με ταχύτητα που προβλέπεται από την γραμμική θεωρία. Αντίθετα, η υποκρίσιμη αστάθεια επιτρέπει και την ύπαρξη μη γραμμικών μετώπων.

Στη συνέχεια, οι ίδιοι ερευνητές (Saarlos & Hohenberg, 1997) εξέτασαν το κατά πόσο τα μήκη κύματος που κυριαρχούν στις περιοχές του κυματοπακέτου με μικρό ρυθμό ανάπτυξης είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές στην ασθενώς μη-γραμμική

περιοχή. Η διαδικασία που ακολούθησαν είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε από τον Lin (1974) και περιγράφηκε αναλυτικά παραπάνω. Έτσι, θεωρώντας ότι $d_1(x,t) = a(x,t)e^{i\varphi(x,t)}$ κατέληξαν ότι αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει ευστάθεια σε πλευρικές διαταραχές:

$$1 - \frac{c_1 c_3}{b_1 b_3} > 0 \quad (3.88)$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην εξίσωση (3.67) προκύπτει ότι για $S_{3,r} > 0$ το σύστημα εμφανίζει υπερκρίσιμη αστάθεια, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η αστάθεια είναι υποκρίσιμη. Τέλος, το κριτήριο ευστάθειας που πρέπει να ισχύει στις περιοχές με μικρό ρυθμό αύξησης ώστε τα μήκη κύματος που παρατηρούνται να είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές είναι:

$$1 + \frac{\text{Im}[S_1]\text{Im}[S_3]}{\text{Re}[S_1]\text{Re}[S_3]} > 0 \quad (3.89)$$

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

4.1 Γενικά

Έχοντας ως βάση το πρόβλημα ροής που περιγράφηκε στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύχθηκε μια αριθμητική μεθοδολογία που λαμβάνει υπόψη τις ιδιαιτερότητες της συγκεκριμένης ροής και παρέχει την επιθυμητή ακρίβεια στον ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό χρόνο.

Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιείται η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων με συναρτήσεις βάσης κυβικά splines. Η μη-γραμμικότητα των εξισώσεων αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο Newton-Raphson, ενώ όπου απαιτείται χρονική ολοκλήρωση γίνεται με τον κανόνα του τραπεζίου.

Στο πρόβλημα ροής αερίου πάνω από υγρό υμένα για την μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων θεωρείται ημι-μόνιμη κατάσταση στο αέριο συνοριακό στρώμα. Στην αέρια φάση το πρόβλημα είναι διδιάστατο, ενώ όταν δεν λαμβάνονται υπόψη οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού η επίλυση στην υγρή φάση γίνεται σε μια διάσταση. Αντίθετα, όταν η αδράνεια του υγρού συμπεριλαμβάνεται στις εξισώσεις τότε το πρόβλημα είναι διδιάστατο τόσο στην αέρια όσο και στην υγρή φάση. Για την μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων παρουσία των Tollmien-Schlichting διαταραχών δεν επιβάλλεται η παραδοχή της ημιμόνιμης κατάστασης και η επίλυση στις δυο φάσεις γίνεται ταυτόχρονα. Η επιπλέον ανάντη επίδραση που εισάγεται εξαιτίας της χρήσης συνοριακής συνθήκης στο δεξί άκρο της περιοχής προσομοίωσης εξαλείφεται εισάγοντας ελεύθερες ή περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Για την ελάττωση των υπολογιστικών απαιτήσεων τόσο σε χρόνο όσο και σε μνήμη κατά το μέγιστο δυνατό εφαρμόζονται τρία βήματα. Το πρώτο είναι η αποφυγή κατασκευής και αντιστροφής της ιακωβιανής του συστήματος σε κάθε χρονικό βήμα, το δεύτερο είναι η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτουν επαναληπτικά με τη μέθοδο GMRES, και τέλος σε περιπτώσεις όπου απαιτείται μεγάλο πλέγμα και σημαντική πυκνωση εισάγεται ανομοιόμορφο και μεταβλητό πλέγμα το οποίο προσαρμόζεται ανάλογα με την κλίση και την καμπυλότητα των διαταραχών. Τέλος, το διάστημα διακριτοποίησης στην y -κατεύθυνση λαμβάνεται τέτοιο ώστε η δεύτερη μερική παράγωγος της ταχύτητας ως προς y να είναι μηδέν στο πάνω άκρο της περιοχής προσομοίωσης,

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right|_{\bar{Y} \rightarrow \infty} = 0.$$

4.2 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

4.2.1 Περιγραφή μεθόδου

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων χρησιμοποιείται ευρύτατα για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Ανάμεσα στα πλεονεκτήματα της είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περιπτώσεις όπου το πεδίο προσομοίωσης είναι αρκετά πολύπλοκο ή μεταβλητό, καθώς και για προσομοιώσεις όπου δεν απαιτείται η ίδια τάξη ακρίβειας σε όλο το πεδίο επίλυσης. Τα βήματα που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων είναι τα εξής:

- Επίλογή κατάλληλων στοιχείων και συναρτήσεων βάσης ψ_i .
- Διακριτοποίηση του πεδίου επίλυσης.
- Κατασκευή του πίνακα συνεκτικότητας ο οποίος προσδιορίζει για κάθε στοιχείο τους κόμβους του πλέγματος που συνεισφέρουν στην επίλυση στο συγκεκριμένο στοιχείο.
- Υπολογισμό των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των κόμβων (π.χ. συντεταγμένες).
- Κατασκευή των διακριτοποιημένων διαφορικών εξισώσεων σε κάθε στοιχείο του πεδίου προσεγγίζοντας την άγνωστη μεταβλητή g με μια σχέση της μορφής

$$g = \sum_{i=1}^n g_i \psi_i. \quad \text{Τελικά, προκύπτει σε κάθε στοιχείο } e \text{ ένα σύστημα}$$

$$[K^{(e)}] \{g^{(e)}\} = \{F^{(e)}\}.$$

- Σύνδεση των τοπικών διακριτοποιημένων εξισώσεων για τον ορισμό του συνολικού προβλήματος.
- Επιβολή των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος.
- Επίλυση του συνολικού συστήματος εξισώσεων.

4.2.2 Συναρτήσεις βάσης

Κατά την επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων παίζει η επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης.

Στην παρούσα μελέτη χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις βάσης κυβικών splines για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων. Στα πλαίσια μεταπτυχιακής εργασίας (Βλαχομήτρου, 2006) πραγματοποιήθηκε σύγκριση της αποτελεσματικότητας των τετραγωνικών συναρτήσεων βάσης lagrange και των cubic splines για την επίλυση της ροής αέρα πάνω από οριζόντια πλάκα. Η ανάλυση που έγινε κατέληξε στο

συμπέρασμα ότι οι συναρτήσεις βάσης lagrange αδυνατούν να δώσουν λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα, σε αντίθεση με τις συναρτήσεις κυβικών splines που παρέχουν ικανοποιητικά αποτελέσματα, ανεξάρτητα από το αριθμητικό πλέγμα που χρησιμοποιείται. Εκτιμάται ότι η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις βάσης κυβικών splines είναι μεγαλύτερης τάξης από τις τετραγωνικές lagrange και επιπλέον επιτρέπουν τη συνέχεια της πρώτης και δεύτερης παραγώγου. Η αδυναμία των συναρτήσεων lagrange να δώσουν λύσεις ανεξάρτητες του αριθμητικού πλέγματος έχει παρατηρηθεί και σε άλλες περιπτώσεις όπως είναι η μελέτη της δυναμικής φυσαλίδων και σταγόνων (Pelekasis, 1991; Pelekasis et al., 1992).

Στην συνέχεια παρουσιάζονται συνοπτικά οι συναρτήσεις βάσης quadratic lagrange και cubic splines για προσομοίωση σε μία και σε δύο διαστάσεις.

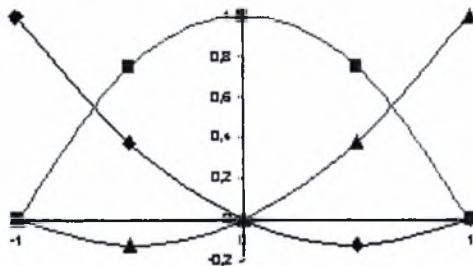
4.2.2.1 Τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης lagrange

Για την επίλυση προβλημάτων σε μια διάσταση με τετραγωνικές συναρτήσεις lagrange χρησιμοποιούνται 3 κόμβοι σε κάθε στοιχείο. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχείο e με συντεταγμένες μεταξύ x_e και x_{e+1} τότε οι τετραγωνικές συναρτήσεις lagrange είναι πολυώνυμα δευτέρου βαθμού που δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζονται στο Σχήμα 4.1:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{1}{2}\xi'(1-\xi') \\ \psi_2 &= (1+\xi')(1-\xi') \\ \psi_3 &= \frac{1}{2}\xi'(1+\xi')\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου $\xi' = \frac{2x - (x_e + x_{e+1})}{x_{e+1} - x_e}$ μετασχηματισμένη μεταβλητή ξ' που παίρνει τιμές μεταξύ -

1 και 1 σε κάθε στοιχείο.



Σχήμα 4.1: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης quadratic lagrange σε μια διάσταση.

Οι τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης lagrange είναι συνεχείς χωρίς όμως να διαθέτουν συνεχείς παραγώγους. Όπως όλες οι συναρτήσεις της κατηγορίας lagrange, έχουν τις εξής ιδιότητες σε ένα στοιχείο e :

$$\psi_i^e(\xi^e) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^3 \psi_i^e(\xi^e) = 1$$

Χρησιμοποιώντας τις συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης οι μεταβλητές του προβλήματος σε κάθε στοιχείο προσεγγίζονται με μια σχέση της μορφής:

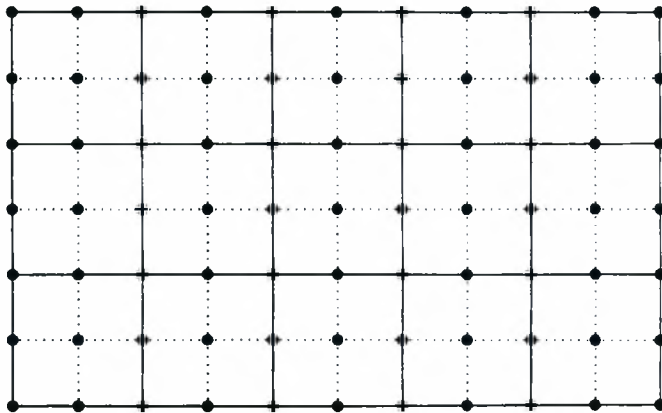
$$g = \sum_{i=1}^3 g_i \psi_i \quad (4.2)$$

όπου i οι τρεις κόμβοι σε κάθε στοιχείο, g_i είναι οι τιμές της παραμέτρου που πρέπει να υπολογιστούν και ψ_i οι συναρτήσεις βάσης.

Αντίστοιχα, οι τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης lagrange δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση και κατά συνέπεια επιβιώνουν εννιά σε κάθε στοιχείο. Δηλαδή, ισχύει:

$$\Psi_{ij}(x, y) = \psi_i(x)\psi_j(y), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται ο τρόπος διακριτοποίησης του πεδίου προσομοίωσης σε δύο διαστάσεις στην περίπτωση που για την επίλυση χρησιμοποιούνται τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης lagrange.



Σχήμα 4.2: Διακριτοποίηση πεδίου επίλυσης με τετραγωνικές συναρτήσεις βάσης lagrange σε δυο διαστάσεις.

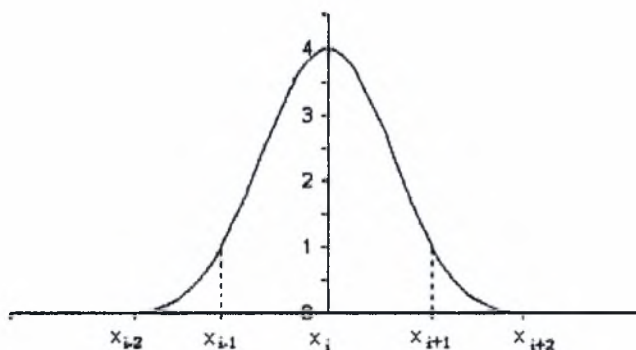
4.2.2.2 Συναρτήσεις βάσης κυβικών splines

Οι συναρτήσεις βάσης B-cubic splines μιας διάστασης είναι πολώνυμα τρίτου βαθμού με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Για την παρεμβολή μίας συνάρτησης η οποία είναι γνωστή σε M_x+1 σημεία απαιτείται η εισαγωγή δυο βοηθητικών σημείων οπότε

αν χρησιμοποιούμε M_x στοιχεία έχουμε συνολικά M_x+3 άγνωστους συντελεστές, g_{c_j} , όσοι και οι κόμβοι του πλέγματος. Η εισαγωγή των επιπλέον σημείων είναι απαραίτητη ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου. Όλοι οι υπολογισμοί βασίζονται στους συντελεστές της μεταβλητής που αντιστοιχούν στους κόμβους του πλέγματος. Έτσι, για παράδειγμα αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας μεταβλητής στη θέση $x \in [x_i, x_{i+1}]$ αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{M_x+3} g_{c,j} b_j(x) \tag{4.4}$$

όπου b_j οι συναρτήσεις βάσης κυβικών splines και g_c οι συντελεστές splines της μεταβλητής. Για να είναι εφικτός ο προσδιορισμός των συντελεστών splines χρειάζονται δυο επιπλέον εξισώσεις. Συνήθως χρησιμοποιείται κάποια συνοριακή συνθήκη για την πρώτη ή τη δεύτερη παράγωγο στα δυο άκρα του πεδίου προσομοίωσης (Prender, 1989). Οι συναρτήσεις βάσεις κυβικών splines για επίλυση σε μια διάσταση απεικονίζονται στο Σχήμα 4.3.



Σχήμα 4.3: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης cubic splines σε μια διάσταση.

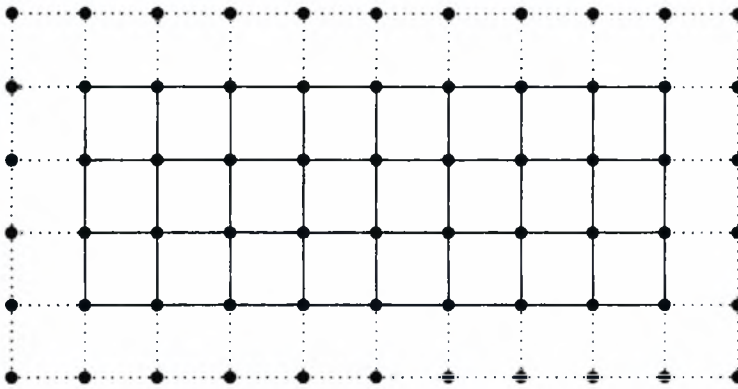
Από το σχήμα είναι φανερό ότι κάθε μια από τις τέσσερις συναρτήσεις είναι δυο φορές συνεχής και παραγωγίσιμη, ότι σε κάθε στοιχείο επιβιώνουν τέσσερις συναρτήσεις βάσης, ενώ σε κάθε κόμβο τρεις. Η ακριβής μορφή των κυβικών splines είναι (Prender, 1989):

$$b_i(x_j) = \frac{1}{h_1^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h_1^3 + 3h_1^2(x - x_{i-1}) + 3h_1(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h_1^3 + 3h_1^2(x_{i+1} - x) + 3h_1(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0, & x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}] \end{cases} \tag{4.5}$$

όπου $h_1 = x_{i+1} - x_i$ και ισχύει:

$$b_i(x_j) = \begin{cases} 4, & j=1 \\ 1, & j=i \pm 1 \\ 0, & j=i \pm 2 \end{cases} \quad (4.6)$$

Για την επίλυση σε δύο διαστάσεις, αν M_x είναι ο αριθμός των στοιχείων στην μια και M_y ο αριθμός των στοιχείων στην άλλη κατεύθυνση τότε απαιτείται συνολικά η εισαγωγή $2(M_x+1)+2(M_y+1)+4$ βοηθητικών κόμβων. Μια απεικόνιση της διακριτοποίησης του πεδίου για επίλυση σε δύο διαστάσεις με συναρτήσεις κυβικών splines δίνεται στο Σχήμα 4.4 όπου οι διακεκομμένες γραμμές αντιστοιχούν στα επιπλέον βοηθητικά σημεία.



Σχήμα 4.4: Διακριτοποίηση πεδίου επίλυσης με συναρτήσεις βάσης κυβικών splines σε δυο διαστάσεις.

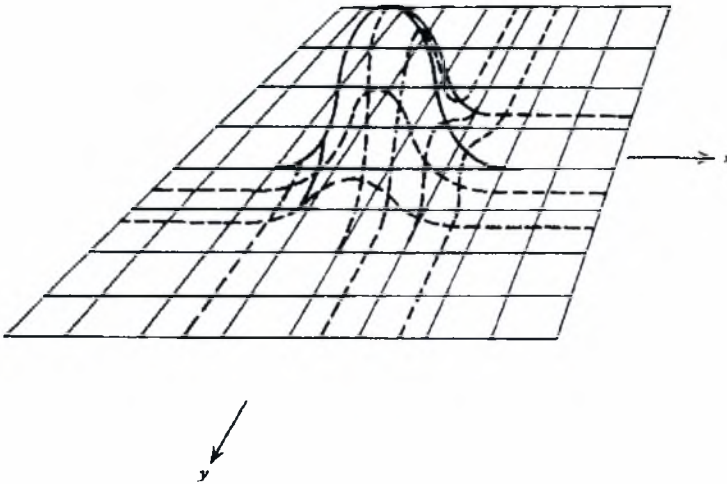
Οι συναρτήσεις βάσης cubic splines δυο διαστάσεων προκύπτουν ως γινόμενο των μονοδιάστατων συναρτήσεων βάσης της μιας με την άλλη διάσταση. Δηλαδή, ισχύει:

$$B_{ij}(x, y) = b_i(x)b_j(y), \quad i=1, \dots, 4, \quad j=1, \dots, 4 \quad (4.7)$$

Χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης κυβικών splines δυο διαστάσεων σε κάθε στοιχείο επιβιώνουν δεκαέξι συναρτήσεις, ενώ σε κάθε κόμβο εννιά. Η μορφή τους στο χώρο δίνεται στο Σχήμα 4.5. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή μιας μεταβλητής στη θέση x, y αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{M_x+3} \sum_{j=1}^{M_y+3} b_i(x)b_j(y)g_{c,ij} = \sum_{i=1}^{M_x+3} \sum_{j=1}^{M_y+3} B_{ij}(x, y)g_{c,ij} \quad (4.8)$$

όπου B_{ij} οι συναρτήσεις βάσης κυβικών splines δυο διαστάσεων και g_c οι συντελεστές splines της μεταβλητής.



Σχήμα 4.5: Απεικόνιση συναρτήσεων βάσης κυβικών splines δυο διαστάσεων (Prender, 1989).

Αντίστοιχα με τις συναρτήσεις μιας διάστασης και όπως γίνεται αντιληπτό από το Σχήμα 4.5, οι συναρτήσεις βάσης κυβικών splines δυο διαστάσεων είναι δυο φορές συνεχείς και παραγωγίσιμες.

4.3 Συνοριακές συνθήκες

Η επιβολή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών στο πρόβλημα που μελετάται είναι πολύ σημαντική αφού έτσι ολοκληρώνεται ο σωστός ορισμός του προβλήματος και κατά συνέπεια η αριθμητική προσομοίωση μπορεί να οδηγήσει σε λύση. Η εισαγωγή των συνοριακών συνθηκών είναι πιο εύκολη στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται συναρτήσεις lagrange, ενώ στην περίπτωση των splines η επιβολή τους είναι λίγο πιο πολύπλοκη.

Στο πρόβλημα προσομοίωσης των διεπιφανειακών κυμάτων υπάρχει ανάντη επίδραση η οποία υπεισέρχεται μέσω του νόμου αλληλεπίδρασης που εκφράζεται από τη σχέση 2.15. Η σχέση αυτή λαμβάνει υπόψη όλο το πεδίο ροής, κάτι που είναι αδύνατο να συμβεί κατά την αριθμητική επίλυση αφού είμαστε αναγκασμένοι να περιοριστούμε μέσα σε ένα πεπερασμένο διάστημα, ενώ το πεδίο ορισμού της (2.15) εκτείνεται στο άπειρο. Επιπλέον, η αριθμητική επίλυση με συναρτήσεις βάσης splines απαιτεί υποχρεωτικά την εισαγωγή επιπρόσθετων εξισώσεων και στο δεξί άκρο, ώστε να είναι εφικτός ο υπολογισμός των συντελεστών στα βοηθητικά σημεία. Όμως, στο δεξί άκρο του πεδίου προσομοίωσης δεν μπορούμε να ξέρουμε τι συμβαίνει και έτσι η χρήση συνοριακών συνθηκών μπορεί να προκαλέσει επιπλέον ανάντη επίδραση. Το γεγονός αυτό, και επειδή η επίλυση γίνεται για μεγάλο χρονικό διάστημα, μας

αναγκάζει να επιλύσουμε σε ένα μεγαλύτερο χωρικό πεδίο από ότι πραγματικά μας ενδιαφέρει με κύριο στόχο να μπορέσουμε να αποφύγουμε την επίδραση των δεξιών συνοριακών συνθηκών. Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε να λύνουμε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα, κάτι που φυσικά απαιτεί μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη.

Το παραπάνω πρόβλημα αντιμετωπίζεται με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας για όλες τις μεταβλητές ελεύθερη συνοριακή συνθήκη για την πρώτη παράγωγο στο δεξί άκρο του πεδίου επίλυσης ή χρησιμοποιώντας για όλες τις μεταβλητές περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Η επιλογή των κατάλληλων συνοριακών συνθηκών εξαρτάται κάθε φορά από το πρόβλημα που επιλύεται. Όμως, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι παρά το γεγονός ότι με τη χρήση ελεύθερων ή περιοδικών συνοριακών συνθηκών μπορούμε να πάρουμε λύση για ένα μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης, δεν μπορούμε να πάμε σε πάρα πολύ μεγάλους χρόνους επειδή υπάρχει ανάντη επιρροή εξαιτίας της φυσικής του προβλήματος

4.3.1 Ελεύθερες συνοριακές συνθήκες

Η ελεύθερη συνοριακή συνθήκη είναι μία σχέση που συσχετίζει τους συντελεστές splines στο δεξί άκρο, χωρίς ουσιαστικά να επιβάλει καμία τιμή για την παράγωγο. Η σχέση αυτή προκύπτει αν η παράγωγος γραφεί μια φορά με τη βοήθεια των συντελεστών splines και μια φορά χρησιμοποιώντας πεπερασμένες διαφορές. Εξισώνοντας τις δυο σχέσεις προκύπτει η εξίσωση που εκφράζει την ελεύθερη συνοριακή συνθήκη (Prender, 1989). Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης η παράγωγος με τη βοήθεια των συντελεστών splines C περιγράφεται από τη σχέση:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_N = \sum_{j=1}^{N+3} C_j \frac{\partial b_j(x)}{\partial x} \quad (4.9)$$

ενώ με πεπερασμένες διαφορές έχουμε:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_N = \frac{3g_N - 4g_{N-1} + g_{N-2}}{2\Delta x} \quad (4.10)$$

όπου οι τιμές των g μπορούν και αυτές να γραφούν μέσω των συντελεστών splines χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$g = \sum_{j=1}^{N+3} C_j b_j(x) \quad (4.11)$$

Στις σχέσεις (4.9) και (4.11) οι τιμές των συναρτήσεων βάσης είναι γνωστές. Έτσι, εξισώνοντας τις σχέσεις (4.9) και (4.10) σε συνδυασμό με την (4.11) προκύπτει η

ελεύθερη συνοριακή συνθήκη και για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης έχει την μορφή:

$$0.25C(i-3) - 1.5C(i-1) + 2C(i) - 0.75C(i+1) = 0 \quad (4.12)$$

Αντίστοιχα, για συναρτήσεις βάσης δύο διαστάσεων η ελεύθερη συνοριακή συνθήκη δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & -0.375C(i-1, j-1) - 1.5C(i-1, j) - 0.375C(i-1, j+1) + 0.5C(i, j-1) + 2C(i, j) + \\ & 0.5C(i, j+1) - 0.1875C(i+1, j-1) - 0.75C(i+1, j) - 0.1875C(i+1, j+1) + \\ & 0.0625C(i-3, j-1) + 0.25C(i-3, j) + 0.0625C(i-3, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου C οι άγνωστοι συντελεστές splines της μεταβλητής, i δείκτης που δηλώνει τη θέση στην x -κατεύθυνση και j τη θέση στη y -κατεύθυνση.

Με την διαδικασία αυτή, είναι δυνατή η εξάλειψη της ανάντη επίδρασης για μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης.

4.3.2 Περιοδικές συνοριακές συνθήκες

Εναλλακτικά, αντί για τη χρήση ελεύθερων συνοριακών συνθηκών μπορούμε να εισάγουμε στο πρόβλημα περιοδικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα. Η περιοδικότητα πρώτης παραγώγου για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης εκφράζεται από τη σχέση:

$$-C(1) + C(3) + C(M_x + 1) - C(M_x + 3) = 0 \quad (4.14)$$

ενώ για περιοδικότητα τιμής χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$C(1) + 4C(2) + C(3) - C(M_x + 1) - 4C(M_x + 2) - C(M_x + 3) = 0 \quad (4.15)$$

Αντίστοιχα, για διδιάστατες συναρτήσεις βάσης η περιοδικότητα πρώτης παραγώγου δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & -C(1, j-1) - 4C(1, j) - C(1, j+1) + C(3, j-1) + 4C(3, j) + \\ & C(3, j+1) + C(M_x + 1, j-1) + 4C(M_x + 1, j) + C(M_x + 1, j+1) - \\ & C(M_x + 3, j-1) - 4C(M_x + 3, j) - C(M_x + 3, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

και η περιοδικότητα τιμής από τη σχέση:

$$\begin{aligned} & C(1, j-1) + 4C(1, j) + C(1, j+1) + 4C(2, j-1) + 16C(2, j) + 4C(2, j+1) + \\ & C(3, j-1) + 4C(3, j) + C(3, j+1) - C(M_x + 1, j-1) - 4C(M_x + 1, j) - \\ & C(M_x + 1, j+1) - 4C(M_x + 2, j-1) - 16C(M_x + 2, j) - 4C(M_x + 2, j+1) - \\ & C(M_x + 3, j-1) - 4C(M_x + 3, j) - C(M_x + 3, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου $C(i, j)$ οι άγνωστοι συντελεστές splines, i δείκτης που δηλώνει τη θέση στην x -κατεύθυνση και j τη θέση στη y -κατεύθυνση.

Και με τους δύο τρόπους που αναφέρθηκαν παραπάνω καθυστερείται η ανάντη επίδραση για μεγάλο εύρος του χρόνου προσομοίωσης. Το μειονέκτημα των

περιοδικών συνθηκών είναι ότι πρέπει η περιοχή προσομοίωσης να είναι τέτοια ώστε να μην φτάσει η διαταραχή στο δεξί άκρο, επειδή αν φτάσει θα εισέλθει πάλι από το αριστερό άκρο.

4.4 Επίλυση συστήματος πεπερασμένων στοιχείων

Η προσομοίωση με την μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων καταλήγει τελικά στην επίλυση ενός συστήματος της μορφής $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Όταν ο πίνακας \underline{A} είναι σταθερός τότε κατασκευάζεται και αντιστρέφεται μόνο μια φορά γεγονός που καθιστά την αριθμητική επίλυση μη χρονοβόρα. Αντίθετα, στην περίπτωση των ροών που μελετάμε, ο πίνακας \underline{A} μεταβάλλεται με το χρόνο, γεγονός που σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίζεται και να αντιστρέφεται πολλές φορές κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Το αποτέλεσμα είναι η σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου. Επιπλέον, σε περιπτώσεις όπου απαιτείται πύκνωση του αριθμητικού πλέγματος χρειάζεται παράλληλα να μειωθεί και το χρονικό βήμα ώστε να αποφευχθούν αστάθειες. Η μείωση όμως του χρονικού βήματος αυξάνει αυτόματα τις φορές που πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί ο πίνακας \underline{A} . Όλα τα παραπάνω, έχουν ως αποτέλεσμα οι υπολογιστικοί χρόνοι να είναι τέτοιας τάξεως ώστε πολλές προσομοιώσεις στις οποίες απαιτείται πυκνό πλέγμα να είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν.

Στα πλαίσια μεταπτυχιακής εργασίας (Βλαχομήτρου, 2006) διαπιστώθηκε ότι την μεγαλύτερη κατανάλωση του χρόνου για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων την έχουμε στην αντιστροφή της ιακωβιανής \underline{A} του συστήματος των εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Newton-Raphson. Το πρόβλημα της μεγάλης απαίτησης σε υπολογιστικό χρόνο αντιμετωπίστηκε μερικώς με την αποφυγή κατασκευής και αντιστροφής του \underline{A} σε κάθε χρονικό βήμα. Η ενέργεια αυτή, βασίστηκε στο ότι στα συγκεκριμένα προβλήματα χρησιμοποιούνται αρκετά μικρά χρονικά βήματα και οι αλλαγές στη λύση δεν είναι πολύ γρήγορες. Έτσι, με τη διαδικασία αυτή, όταν κατασκευαστεί και αντιστραφεί ο πίνακας \underline{A} δεν ξαναμεταβάλλεται για όσο το δυνατό περισσότερα χρονικά βήματα. Βέβαια, με τον τρόπο αυτό η Newton-Raphson δεν συγκλίνει τετραγωνικά και έτσι απαιτούνται περισσότερες επαναλήψεις. Παρόλα αυτά το κέρδος από την αποφυγή της αντιστροφής του πίνακα είναι τόσο μεγάλο που ξεπερνά κατά πολύ το κόστος αύξησης των

επαναλήψεων. Ο αριθμός των χρονικών βημάτων για τα οποία μπορούμε να διατηρήσουμε αναλλοίωτη την ιακωβιανή ποικίλει από πρόβλημα σε πρόβλημα και εξαρτάται από το πόσο δύσκολο είναι να προσομοιωθεί και από το πόσο γρήγορα συμβαίνουν οι μεταβολές μέσα σε αυτό. Γενικά, ο αριθμός αυτός μπορεί να κυμανθεί από 1 μέχρι 500.

Η παραπάνω αντιμετώπιση λύνει το πρόβλημα του αυξημένου υπολογιστικού χρόνου όταν η λύση δεν μεταβάλλεται πολύ γρήγορα και δεν απαιτούνται πολύ μεγάλα αριθμητικά πλέγματα. Παρόλα αυτά, κατά την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων είναι πολλές οι περιπτώσεις όπου πρέπει να χρησιμοποιηθεί μεγάλο πλέγμα, πολύ μικρό χρονικό βήμα και για να εμφανιστούν κάποια φαινόμενα θα πρέπει η προσομοίωση να προχωρήσει αρκετά μακριά στο χρόνο. Σε τέτοιες προσομοιώσεις η ιακωβιανή δεν μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη για πολλά χρονικά βήματα και κατά συνέπεια πρέπει να κατασκευαστεί και να αντιστραφεί πολλές φορές κατά τη διάρκεια μιας επίλυσης. Παράλληλα η χρήση πυκνού πλέγματος αυξάνει κατακόρυφα το χρόνο που καταναλώνεται για επίλυση του συστήματος $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ με αντιστροφή μια φορά.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε μεγάλα αριθμητικά πλέγματα πρέπει με κάποιο τρόπο να μειώσουμε σημαντικά το χρόνο που καταναλώνεται στην επίλυση του συστήματος. Για το σκοπό αυτό, εγκαταλείφθηκε η ιδέα της απευθείας επίλυσης του συστήματος με αντιστροφή και διερευνήθηκε η δυνατότητα χρήσης κάποιας επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης. Τελικά, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος GMRES η οποία περιγράφεται αναλυτικά στη συνέχεια.

4.4.1 Μέθοδος GMRES

Η ανάπτυξη επαναληπτικών μεθόδων επίλυσης μεγάλων συστημάτων απασχολεί τους ερευνητές εδώ και πολλές δεκαετίες. Για την επαναληπτική επίλυση ενός συστήματος της μορφής $\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ απαιτείται μια καλή αρχική πρόβλεψη. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας κατάλληλη προσέγγιση για τον πίνακα \underline{A} γίνεται προσπάθεια να βελτιωθεί η πρόβλεψη μειώνοντας το λάθος. Αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας \underline{A} μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα ενός προσεγγιστικού πίνακα \underline{K} και ενός άλλου πίνακα $\underline{\Lambda}$ τότε σχηματικά η επαναληπτική διαδικασία περιγράφεται ως εξής: στο βήμα $i+1$ βρίσκεται η νέα προσεγγιστική λύση x_{i+1} από το σύστημα $Kx_{i+1} = Kx_i + b - \Lambda x_i \xrightarrow{\tau_i = b - Ax_i} Kx_{i+1} = Kx_i + \tau_i$.

Με τη διαδικασία αυτή, παίρνουμε ικανοποιητικούς ρυθμούς σύγκλισης, ειδικά για θετικά ορισμένους πίνακες \underline{K} (Elman et al., 2005).

Ερευνητές για πολλές δεκαετίες έκαναν προσπάθειες να αναπτύξουν καλύτερες και πιο γρήγορες επαναληπτικές μεθόδους. Μια από τις μεθόδους, η οποία χρησιμοποιείται όλο και περισσότερο για την επίλυση μεγάλων συστημάτων, είναι η GMRES (Generalized Minimum Residual). Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε το 1986 από τους Saad και Schultz για την επίλυση μεγάλων, μη συμμετρικών, αραιών συστημάτων (Saad & Schultz, 1986).

Η βάση για την ανάπτυξη της μεθόδου τέθηκε στην δεκαετία του 50 από τους Lanczos και Arnoldi οι οποίοι είχαν την ιδέα της διατήρησης όλων των προσεγγιστικών λύσεων μέχρι ένα σημείο της επαναληπτικής διαδικασίας. Στη συνέχεια, πρότειναν τον συνδυασμό των προσεγγίσεων ώστε να προκύψει μια καλύτερη λύση. Ο Lanczos παρατήρησε ότι η βασική επανάληψη οδηγεί σε προσεγγίσεις x_i οι οποίες βρίσκονται σε καλά κατασκευασμένους υποχώρους, $K_i[A, r^{(0)}]$, που ορίζονται από τα διανύσματα $r^{(0)}$, $A r^{(0)}$, $A^2 r^{(0)}$, ..., $A^{i-1} r^{(0)}$, όπου $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ το υπόλοιπο της επίλυσης του συστήματος εξισώσεων. Ένας τέτοιος υπόχωρος ονομάζεται Krylon υπόχωρος τάξεως i . Στη συνέχεια ο Lanczos απέδειξε ότι για τον υποχώρο αυτό μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα μια ορθοκανονική βάση γεγονός που απλοποίησε σημαντικά τους υπολογισμούς.

Στην μέθοδο GMRES κατασκευάζεται στον Krylon υπόχωρο τάξεως k η προσέγγιση $x^{(k)} \in x^{(0)} + K_k(A, r^{(0)})$. Ο υποχώρος K_k περιγράφεται με την βοήθεια μίας ορθοκανονικής βάσης $V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$ με πρώτο στοιχείο το $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$. Για τον υπολογισμό της ορθοκανονικής βάσης $V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$ του Krylon υποχώρου $K_k \equiv \text{span}\{v^{(1)}, Av^{(1)}, \dots, A^{k-1}v^{(1)}\} = K_k[A, r^{(0)}]$ χρησιμοποιείται η μέθοδος του Arnoldi. Η τελευταία αντί των ιδιοσυναρτήσεων του F υπολογίζει αυτές του upper-Hessenberg πίνακα $H_k = [h_{ij}]$ ($1 \leq i, j \leq k$, $h_{ij} = 0$ $j < i - 1$) για τον οποίο ισχύει ότι:

$$H_k = V_k^T A V_k \quad (4.18)$$

$$A V_k = V_k H_k + h_{k+1,k} [0, \dots, v^{(k+1)}] \rightarrow A V_k = V_{k+1} \tilde{H}_k, \quad \tilde{H}_k = [h_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq k+1, \\ 1 \leq j \leq k}} \quad (4.19)$$

Ο αλγόριθμος λειτουργεί ως εξής: Με $v^{(1)} = r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$ κατασκευάζεται μία αλληλουχία ορθοκανονικών διανυσμάτων έτσι ώστε το τελευταίο, $v^{(k+1)}$, να είναι

ορθογώνιο στα διανύσματα που συνιστούν τον Krylov χώρο K_k . Η διαδικασία παραγωγής των $v^{(k)}$ βασίζεται στην διαφοροποιημένη μέθοδο Gram-Schmidt (Elman et al., 2005). Έτσι έχουμε ότι:

$$x^{(k)} = x^{(0)} + V_k y^{(k)} \rightarrow Ax^{(k)} - b = Ax^{(0)} - b + AV_k y^{(k)} \quad (4.20)$$

για κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα $y^{(k)}$. Αντικαθιστώντας τον ορισμό του H_k στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$r^{(k)} = r^{(0)} - V_{k+1} \tilde{H}_k y^{(k)} = V_{k+1} \left(\|r^{(0)}\| e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)} \right), \quad e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)^T \quad (4.21)$$

Λόγω της ορθοκανονικότητας των $v^{(k)}$ ισχύει ότι:

$$\|r^{(k)}\| \equiv \beta_k = \left\| \beta_0 e^{(1)} - \tilde{H}_k y^{(k)} \right\|, \quad \|r^{(0)}\| \equiv \beta_0 \quad (4.22)$$

και τα $y^{(k)}$ επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η Ευκλείδεια νόρμα $\|r^{(k)}\| = \|b - Ax^{(k)}\|^2$. Αυτό συνιστά ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων το οποίο, με δεδομένη την μορφή του H_k λύνεται χωρίς ιδιαίτερες υπολογιστικές απαιτήσεις. Επίσης, για την μείωση των απαιτήσεων σε μνήμη και του υπολογιστικού φόρτου κατά επανάληψη, λόγω υπέρμετρης αύξησης του μεγέθους του H_k , υπάρχει η δυνατότητα επανεκκίνησης του αλγορίθμου κάθε m βήματα, όπου m είναι μια προκαθορισμένη παράμετρος. Ο αλγόριθμος της GMRES περιγράφεται συνοπτικά ως (Saad & Schultz, 1986):

- Επιλέγεται μια αρχική πρόβλεψη $x^{(0)}$ και υπολογίζονται τα:

$$r^{(0)} = f - Ax^{(0)} \quad \text{και} \quad v^{(1)} = \frac{r^{(0)}}{\|r^{(0)}\|}$$

- Υπολογισμός των $v^{(k)}$ ώστε να ικανοποιείται η ορθοκανονικότητα.

Επαναλαμβάνεται για $j=1, 2, \dots, m$

$$h_{i,j} = (Av^{(j)}, v^{(i)}), \quad \text{για} \quad i=1, 2, \dots, j$$

$$\tilde{v}^{(j+1)} = Av^{(j)} - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v^{(i)}$$

$$h_{j+1,j} = \|\tilde{v}^{(j+1)}\|, \quad v^{(j+1)} = \frac{\tilde{v}^{(j+1)}}{h_{j+1,j}}$$

- Υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση

$$x^{(m)} = x^{(0)} + V_m y^{(m)} \quad \text{όπου το} \quad y^{(m)} \quad \text{ελαχιστοποιεί το μέτρο}$$

$$\left\| \beta e_1 - \tilde{H}_m y \right\|, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

- Η διαδικασία ξεκινάει πάλι και υπολογίζεται το $r^{(m)} = f - Ax^{(m)}$

Σε περίπτωση που ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης, $\beta_k < \tau\beta_0$, $\tau \ll 1$, σταματάμε.

Αν δεν ικανοποιείται τίθεται $x^{(0)} = x^{(m)}$ και $v^{(1)} = \frac{r^{(m)}}{\|r^{(m)}\|}$ και

επιστρέφουμε στο δεύτερο βήμα.

4.4.2 Εφαρμογή GMRES

Η GMRES είναι μια επαναληπτική μέθοδος και επομένως συμπεριφέρεται καλύτερα όταν ο πίνακας του συστήματος είναι καλά ορισμένος, δηλαδή δεν έχει μηδενικές τιμές στην κύρια διαγώνιο. Στα προβλήματα που μελετάμε όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Για το λόγο αυτό, πριν την εφαρμογή της GMRES ο πίνακας θα πρέπει να τροποποιηθεί με κάποιο κατάλληλο preconditioner.

Γενικά, το preconditioning είναι οποιαδήποτε διαδικασία με την οποία τροποποιείται ένα αρχικό γραμμικό σύστημα ώστε να είναι πιο εύκολο να επιλυθεί επαναληπτικά. Αυτό συνήθως ισοδυναμεί με την απαίτηση οι ιδιοτιμές του τροποποιημένου συστήματος να είναι κατανεμημένες σε ένα όσο το δυνατόν πιο στενό διάστημα γύρω από την μονάδα. Για παράδειγμα, η τροποποίηση ενός συστήματος ώστε όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου να είναι μονάδα αποτελεί μια εξεζητημένη περίπτωση preconditioning όπου εισάγεται ο βοηθητικός πίνακας M_p , preconditioner, ο οποίος ταυτίζεται με τον A . Τις περισσότερες φορές κατά την εφαρμογή του preconditioning σε ένα σύστημα της μορφής $Ax=b$ εισάγεται ένας απλοποιημένος πίνακας M_p , ο οποίος διατηρεί όσο πιο πολλά από τα χαρακτηριστικά του A είναι δυνατόν, και τελικά το σύστημα παίρνει μία από τις δύο παρακάτω μορφές:

$$[M_p^{-1}A]x = M_p^{-1}b, \quad [AM_p^{-1}][M_p x] = b$$

που είναι γνωστές με το όνομα αριστερό ή δεξί preconditioning. Συνήθως προτιμάται το δεξί preconditioning διότι δεν εξαρτάται η προς ελαχιστοποίηση νόρμα από τον πίνακα M_p . Στην περίπτωση αυτή, η επαναληπτική διαδικασία που εφαρμόζεται στη συνέχεια λειτουργεί με τους πίνακες M_p^{-1} και A (Elman et al., 2005). Υπολογίζεται η ορθοκανονική βάση, $V_k = \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)}\}$, του Krylov υποχώρου

$K_k = \text{span} \left\{ r^{(0)}, AM_p^{-1}r^{(0)}, (AM_p^{-1})^2 r^{(0)}, \dots, (AM_p^{-1})^{k-1} r^{(0)} \right\}$ και τελικά υπολογίζεται η k

προσέγγιση με την βοήθεια του τύπου,

$$x^{(k)} = x^{(0)} + M_p^{-1}V_k y^{(k)}$$

Έτσι δεν χρειάζεται η αποθήκευση του πίνακα AM_p^{-1} παρά μόνο η χρήση του αντιστρόφου M_p^{-1} .

Ένας από τους πιο απλούς και πιο συνηθισμένους τρόπους να οριστεί ένας preconditioner είναι η εφαρμογή Incomplete LU παραγοντοποίησης στον αρχικό πίνακα A . Έτσι ο M_p^{-1} υπολογίζεται άμεσα με την βοήθεια των L και U . Αν θεωρήσουμε έναν αραιό πίνακα A με στοιχεία a_{ij} με $i, j = 1, \dots, n$ τότε κατά την εφαρμογή του ILU υπολογίζεται ο κάτω τριγωνικός πίνακας L και ο άνω τριγωνικός πίνακας U ώστε το υπόλοιπο $R=LU-A$ να ικανοποιεί κάποιο κριτήριο όπως π.χ. το να μην έχει μηδενικά στοιχεία σε κάποιες συγκεκριμένες θέσεις. Ο αλγόριθμος του ILU βασίζεται στην χρήση της απαλοιφής Gauss ώστε να επαλειφθούν κάποια στοιχεία σε προκαθορισμένες θέσεις εκτός της κυρίας διαγωνίου και μπορεί να περιγραφεί με τα παρακάτω βήματα (Saad,1996):

1. For $i=2, \dots, n$ Do:
2. For $k=1, \dots, i-1$ and if $(i,k) \notin P$ Do:
3.
$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$
4. For $j=k+1, \dots, n$ and for $(i,j) \notin P$ Do:
5.
$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik} a_{kj}$$
6. End do
7. End do
8. End do

όπου το P είναι μια καθορισμένη μηδενική μορφή που ορίζεται ως εξής:

$$P \subset \{(i, j) \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι σε κάθε βήμα i του αλγόριθμου κατασκευάζεται η αντίστοιχη γραμμή των L και U και η i γραμμή του A μπορεί να ξαναγραφεί με βάση τις γραμμές αυτές. Οι προηγούμενες γραμμές των L και U $1, \dots, i-1$ χρησιμοποιούνται αλλά δεν τροποποιούνται. Η διαδικασία αυτή δεν γίνεται πλήρως και η έκτασή της καθορίζεται από τη μορφή του υποσυνόλου P .

Η χρήση του Incomplete LU factorization και της GMRES στο συγκεκριμένο πρόβλημα στηρίχτηκε σε υπορουτίνες που διατίθενται στην προσωπική ιστοσελίδα του Youcef Saad. Στις υπορουτίνες αυτές οι μεταβλητές που εισάγονται είναι ο αριθμός των μέγιστων επαναλήψεων και το μέγεθος του Krylov υποχώρου για την GMRES καθώς και η έκταση εφαρμογής του Incomplete LU factorization. Επίσης, για την χρήση των παραπάνω υπορουτινών ο πίνακας του συστήματος προς επίλυση πρέπει να εισαχθεί σε συγκεκριμένη μορφή, την CSR (Compressed Sparse Row Format). Σύμφωνα με τη μορφή αυτή αποθηκεύονται μόνο τα μη-μηδενικά στοιχεία του πίνακα και ο συνολικός πίνακας δεν κατασκευάζεται ποτέ. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια τριών ανυσμάτων από τα οποία το πρώτο περιέχει όλα τα μη-μηδενικά στοιχεία, το δεύτερο δίνει τη στήλη στην οποία βρίσκεται κάθε μη μηδενικό στοιχείο και το τελευταίο καθορίζει τι αύξοντα αριθμό έχει στη μη-μηδενική αρίθμηση το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε σειράς.

4.5 Μέθοδος μεταβλητού πλέγματος

Σε πολλά υπολογιστικά προβλήματα απαιτείται μεγάλη πύκνωση σε περιοχές με έντονες διαταραχές οι οποίες όμως δεν αφορούν όλο το πεδίο επίλυσης. Αν γνωρίζουμε που εμφανίζονται οι μεταβολές αυτές μπορούμε εξ αρχής να εφαρμόσουμε πιο πυκνό πλέγμα τοπικά και πιο αραιό στο υπόλοιπο πεδίο εξοικονομώντας τόσο σε υπολογιστικό χρόνο όσο και σε μνήμη. Μια τέτοια περίπτωση είναι η προσομοίωση της ροής ρευστού πάνω από τοίχωμα το οποίο αποτελείται από ένα ελαστικό τμήμα που παρεμβάλλεται μεταξύ δυο μη ελαστικών τμημάτων. Είναι αυτονόητο ότι οι μεγαλύτερες μεταβολές στο πεδίο ροής θα λαμβάνουν χώρα πάνω από το ελαστικό κομμάτι και κατά συνέπεια η μεγαλύτερη πύκνωση πρέπει να αφορά το τμήμα αυτό. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις ροών με έντονο συναγωγικό χαρακτήρα όπου οι έντονες μεταβολές δεν είναι στάσιμες, όπως συμβαίνει για παράδειγμα κατά την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων. Σε τέτοιες ροές απαιτείται η τοπική πύκνωση του πλέγματος ανάλογα με τη θέση των διαταραχών έτσι ώστε να υπάρχει η επιθυμητή ακρίβεια στους υπολογισμούς και ταυτόχρονα εξοικονόμηση υπολογιστικού χρόνου και μνήμης. Η μέθοδος που εφαρμόζεται για την κατασκευή του μεταβαλλόμενου πλέγματος στην περίπτωση που οι διαταραχές δεν είναι στάσιμες περιγράφεται αναλυτικά παρακάτω.

Για την εφαρμογή της μεθόδου ξεκινάμε από ένα ομοιόμορφο πλέγμα με N κόμβους. Στη συνέχεια με κατάλληλο μετασχηματισμό και λαμβάνοντας υπόψη

συγκεκριμένη συνάρτηση βάρους οι κόμβοι ανακατανέμονται σε νέο ανομοιόμορφο πλέγμα. Με τη διαδικασία αυτή επιτυγχάνεται πύκνωση σε περιοχές όπου η συνάρτηση βάρους παίρνει μεγάλες τιμές. Το $w(\chi)$ είναι συνήθως μια θετική συνάρτηση βάρους που χρησιμοποιείται ως μέτρο του αριθμητικού σφάλματος κατά την εκτίμηση της συνάρτησης και των παραγώγων της ή της μεταβολής της λύσης. Αντί να λύσουμε διαφορική εξίσωση για τη θέση των νέων σημείων στο πλέγμα $\chi(p)$ μπορούμε να την εξετάσουμε ως Euler εξίσωση για την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος:

$$I = \int_0^L \frac{1}{\chi_p^2 w(\chi)} d\chi \quad (4.23)$$

Η προσέγγιση αυτή δίνει την παρακάτω σταθερά:

$$c' = \frac{1}{N-1} \int_0^L w(\chi) d\chi \quad (4.24)$$

και μετά από αλγεβρικές πράξεις προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για τον υπολογισμό των νέων κόμβων του πλέγματος:

$$\int_0^{\chi} w(\chi) d\chi = \frac{i-1}{N-1} \int_0^L w(\chi) d\chi \quad i=2,3,\dots,N-1 \quad (4.25)$$

Η συνάρτηση βάρους που χρησιμοποιήθηκε για το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης αερίου συνοριακού στρώματος με λεπτό υμένα υγρού είναι:

$$w(x) = (1 + b_1 |f_n| + b_2 |f_{nn}|) \quad (4.26)$$

όπου $f_n = \frac{\partial h}{\partial x}$, $f_{nn} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ και h το σχήμα της διεπιφάνειας. Οι συντελεστές b_1 και b_2

αποτελούν την επίδραση της κλίσης και της καμπυλότητας στη συνάρτηση βάρους αντίστοιχα και επιλέγονται κάθε φορά με τη διαδικασία δοκιμής και σφάλματος. Περισσότερες πληροφορίες για μονοδιάστατη προσαρμογή πλέγματος και κριτήρια επιλογής συνάρτησης βάρους μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Thompson, Warsi and Mastin (1995).

Στα πλαίσια μεταπτυχιακής εργασίας (Πολυζόπουλος, 2007) κατασκευάστηκε υπορουτίνα στην οποία εισάγονται οι αρχικές θέσεις των κόμβων και υπολογίζεται με βάση την κλίση και την καμπυλότητα των διαταραχών το νέο πλέγμα. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι η ακόλουθη: Αρχικά υπολογίζεται το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $w(x)$ σε κάθε κόμβο.

$$\int_{x_0}^{x_k} w(x) dx, \quad k=1,2,\dots,N$$

Ο υπολογισμός των παραπάνω ολοκληρωμάτων γίνεται με τη χρήση σημείων Gauss. Οι τιμές των ολοκληρωμάτων χαρακτηρίζονται ως w_k , $k=1,2,\dots,N$. Με βάση την τιμή που λαμβάνεται για τον N-οστό κόμβο w_N $\left(= \int_{x_0}^{x_N} w(x) dx \right)$ γίνεται ισοκατανομή των τιμών w και οι νέες χαρακτηρίζονται ως w_{equal} .

$$w_{\text{equal}} = \frac{\int_{x_0}^{x_N} w(x) dx}{N-1}$$

Από την επίλυση της εξίσωσης $\int_{x_{j-1}}^{x_j} w(x) dx = w_{\text{equal}}(j) - w_{\text{equal}}(j-1)$ ως προς x_j βρίσκεται

η νέα θέση του κόμβου j .

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλους τους κόμβους και οι καινούριες θέσεις (πλέγμα) αποθηκεύονται για την επίλυση του επόμενου χρονικού βήματος.

4.6 Μεθοδολογία επίλυσης

Για την προσομοίωση της ροής ρεύματος αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από λεπτό φιλμ υγρού το οποίο ρέει υπό την επίδραση της διάτμησης του αέρα εξετάζονται τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση μελετώνται τα διεπιφανειακά κύματα για ημι-μόνιμη κατάσταση στην αέρια φάση και με απύσες τις αδρανειακές δυνάμεις του υγρού. Στην περίπτωση αυτή αντιστοιχούν υγρά που το ιξώδες τους είναι αρκετά μεγαλύτερο από το ιξώδες του αερίου, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με τα περισσότερα anti/de-icing ρευστά. Στην δεύτερη περίπτωση που εξετάζεται διατηρείται η ημι-μόνιμη κατάσταση στην αέρια φάση αλλά στην υγρή εισάγονται οι αδρανειακές δυνάμεις με σκοπό να προσδιοριστεί αν και πότε η αδράνεια του υγρού επηρεάζει την εξέλιξη του φαινομένου. Τέλος, επιτρέπονται μεταβολές ως προς το χρόνο τόσο στην αέρια όσο και στην υγρή φάση για να είναι δυνατή η μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων παρουσία των Tollmien-Schlichting, ώστε να ελεγχθεί αν υπάρχει πιθανότητα αλληλεπίδρασης τους. Για την χρονική ολοκλήρωση, όπου απαιτείται, χρησιμοποιείται ο κανόνας τραπεζίου, η μη γραμμικότητα του προβλήματος αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο Newton-Raphson, ενώ το τελικό σύστημα εξισώσεων που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων επιλύεται επαναληπτικά με τη μέθοδο GMRES.

4.6.1 Προσομοίωση διεπιφανειακών κυμάτων για υγρά μεγάλου ιξώδους

Για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων για περιπτώσεις όπου το ιξώδες του υγρού είναι πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με το ιξώδες του αερίου χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (2.13) έως (2.15) και (2.31) έως (2.35).

Επειδή για την μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων η αδιαστατοποίηση γίνεται με βάση την αργή χρονική κλίμακα τους, η εξίσωση της ορμής του αέρα δεν περιέχει την χρονοπαράγωγο. Προκύπτει, δηλαδή, στον αέρα ένα διδιάστατο μη γραμμικό quasi-stationary πρόβλημα, αφού οι μεταβολές μέσα στο συνοριακό στρώμα υπάρχουν μόνο ως αποτέλεσμα των μεταβολών που συμβαίνουν στην υγρή φάση. Αντίθετα, η χρήση της συγκεκριμένης χρονικής κλίμακας στις εξισώσεις του υγρού έχει ως αποτέλεσμα να αγνοηθούν οι όροι αδράνειας, όταν $M=(\mu/\mu_w)^2(\rho_w/\rho)\ll 1$, και να προκύψει με τον τρόπο αυτό ένα απλοποιημένο πρόβλημα για την εξέλιξη του πάχους του υμένα.

Εισάγοντας τις συναρτήσεις βάσης cubic splines μιας διάστασης και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη στην εξίσωση 2.33 που περιγράφει την κίνηση του υγρού, προκύπτει η ασθενής μορφή της:

$$\int_{-x_0}^{x_0} b_i \frac{dh}{dt} dX = \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{db_i}{dX} \frac{h^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{db_i}{dX} \frac{h^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right) dX - \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{d^2 b_i}{dX^2} \frac{h^3}{3We} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \right) dX - \int_{-x_0}^{x_0} \left(\frac{db_i}{dX} \frac{h^2}{We} \frac{\partial h}{\partial X} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} - \frac{db_i}{dX} \frac{h^3}{3} \frac{\rho_w/\rho-1}{Fr} \frac{\partial h}{\partial X} \right) dX + \left[\frac{db_i}{dX} \frac{h^3}{3We} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \right]_{-x_0}^{x_0} - \left[b_i \frac{h^2}{2} \frac{\partial U}{\partial Y} \right]_{-x_0}^{x_0} + \left[b_i \frac{h^3}{3} \frac{\partial P}{\partial X} \right]_{-x_0}^{x_0} - \left[b_i \frac{h^3}{3We} \frac{\partial^3 h}{\partial X^3} \right]_{-x_0}^{x_0} + \left[b_i \frac{h^3}{3} \frac{\rho_w/\rho-1}{Fr} \frac{\partial h}{\partial X} \right]_{-x_0}^{x_0} \quad (4.27)$$

όπου b_i , b_i οι μονοδιάστατες συναρτήσεις βάσης splines. Δηλαδή, καταλήγουμε σε ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{J}_1 \cdot \frac{dh}{dt} = \underline{R}_1 \quad (4.28)$$

Αν M_x είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην x-κατεύθυνση τότε οι άγνωστοι συντελεστές για το ύψος της διεπιφάνειας είναι $M_x + 3$ και υπολογίζονται κάθε φορά χρησιμοποιώντας τις τιμές της πίεσης και της ταχύτητας που προκύπτουν από την επίλυση της αέριας φάσης.

Επειδή χρησιμοποιούμε κυβικά splines σαν συναρτήσεις βάσης χρειάζεται να εισάγουμε δυο επιπλέον εξισώσεις. Στο αριστερό άκρο της περιοχής προσομοίωσης

χρησιμοποιούμε τη σχέση $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial X} = 0$, ενώ στο δεξί άκρο χρησιμοποιούμε ελεύθερη ή περιοδική συνοριακή συνθήκη.

Το πρόβλημα στην αέρια φάση επιλύεται σε κάθε χρονική στιγμή με δεδομένες τιμές για το ύψος της διεπιφάνειας που παρέχονται από τη λύση στο υγρό. Η διακριτοποίηση του ισοζυγίου ορμής στην x-κατεύθυνση (2.32) δίνει:

$$\int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} B_i \left(U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) dx dy - \int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial X} P dx dy + \int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} dx dy + \int_0^{y_{\text{inf}}} B_i (P_{x_0} - P_{-x_0}) dy - \int_{-x_0}^{x_0} B_i \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{y=y_{\text{inf}}} - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{y=0} \right) dx = 0 \quad (4.29)$$

και από τον ορισμό της ροϊκής συνάρτησης έχουμε:

$$\int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} B_i \left(U - \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \right) dx dy = 0 \quad (4.30)$$

Με την βοήθεια των συναρτήσεων splines η πίεση υπολογίζεται σε κάθε κόμβο μέσω του ολοκληρώματος του νόμου αλληλεπίδρασης που εκφράζεται από τη σχέση (2.15), ενώ το πάχος μετατόπισης βρίσκεται με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης (2.34) για την ταχύτητα μεταξύ του μεσαίου και του κατώτερου στρώματος.

Οι επιπλέον εξισώσεις που εισάγονται στο πρόβλημα εξαιτίας της χρήσης συναρτήσεων βάσης splines για την ταχύτητα και την ροϊκή συνάρτηση είναι:

- Στην διεπιφάνεια ($\bar{Y} = 0$): $U = \Psi = 0$
- Στο πάνω άκρο ($\bar{Y} = +\infty$), δηλαδή στα όρια με το μεσαίο στρώμα:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \quad \text{και} \quad U = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{Y}}$$

- Στο αριστερό άκρο ($\bar{X} = -\infty$) χρησιμοποιήθηκε η λύση της βασικής ροής:

$$U = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \bar{Y} \quad \text{και} \quad \Psi = \frac{\partial U_0}{\partial Y'}(x_0, Y'=0) \frac{\bar{Y}^2}{2}$$

- Στο δεξί άκρο ($\bar{X} = +\infty$) χρησιμοποιούνται ελεύθερες συνοριακές ή περιοδικές συνθήκες για τις παραγώγους $\frac{\partial U}{\partial \bar{X}}$ και $\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{X}}$.

- Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{X} \partial \bar{Y}} = 0$$

- Στα επιπλέον γωνιακά σημεία στο αριστερό άκρο χρησιμοποιούνται ελεύθερες συνοριακές ή περιοδικές συνθήκες για τις παραγωγούς $\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}$ και $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y}$.

Αντίστοιχα, για την πίεση και το πάχος μετατόπισης στο αριστερό άκρο χρησιμοποιούνται οι σχέσεις $\frac{\partial P}{\partial X} = 0$ και $\frac{\partial A}{\partial X} = 0$, ενώ στο δεξι άκρο εισάγονται ελεύθερες ή περιοδικές συνοριακές συνθήκες για τις χωρικές παραγώγους.

Αν M_x είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην x-κατεύθυνση και M_y ο αριθμός των στοιχείων στην y-κατεύθυνση τότε επιλύεται κάθε φορά στην αέρια φάση με τη μέθοδο Newton-Raphson ένα σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{J}}_2 \cdot \underline{dC} = \underline{R}_2 \quad (4.31)$$

όπου \underline{R}_2 το άνυσμα των υπολοίπων με μέγεθος $2(M_x+3) \times (M_y+3) + 2(M_x+3)$, \underline{dC} το άνυσμα των αγνώστων και $\underline{\underline{J}}_2$ η ιακωβιανή του συστήματος η οποία προκύπτει από την παραγωγή των υπολοίπων ως προς τους αγνώστους. Το άνυσμα \underline{dC} περιέχει τους άγνωστους συντελεστές splines των μεταβλητών με την εξής σειρά: $\{U_1, \Psi_1, U_2, \Psi_2, \dots, U_{(M_x+3)(M_y+3)}, \Psi_{(M_x+3)(M_y+3)}, P_1, A_1, \dots, P_{M_x+3}, A_{M_x+3}\}$. Ο πίνακας $\underline{\underline{J}}_2$ είναι σε μορφή τόξου (arrow) η οποία δημιουργείται από τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στην πίεση και το πάχος μετατόπισης. Σχηματικά, ο πίνακας $\underline{\underline{J}}_2$ έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} x & .. & x & 0 & 0 & .. & 0 & x & .. & x \\ x & .. & x & x & 0 & .. & 0 & x & .. & x \\ 0 & .. & .x. & x & .x. & .. & 0 & x & .. & x \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & x & x & x & .. & 0 & x & .. & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & .. & x & x & .. & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & .. & x & x & .. & x \\ x & x & x & x & x & .. & x & x & .. & x \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & . & .. & x \\ x & x & x & x & x & .. & x & x & .. & x \end{bmatrix}$$

Επομένως, μπορεί να χωριστεί σε τέσσερις επιμέρους πίνακες: έναν πίνακα ζώνης, έναν πίνακα στήλης, έναν πίνακα γραμμής και έναν πίνακα κορυφής. Χρησιμοποιώντας ελεύθερες συνοριακές ο πίνακας ζώνης έχει διάσταση $2(M_x+3)(M_y+3)$ με εύρος ζώνης $16(M_y+3)$, ο πίνακας στήλης έχει διάσταση $[2(M_x+3)($

M_y+3), $2(M_x+3)$], ο πίνακας γραμμής [$2(M_x+3)$, $2(M_x+3)(M_y+3)$] και ο πίνακας κορυφής [$2(M_x+3)$, $2(M_x+3)$]. Στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται περιοδικές συνοριακές συνθήκες μεταβάλλονται οι διαστάσεις των τεσσάρων πινάκων που αποτελούν την ιακωβιανή του συστήματος. Έτσι, ο πίνακας ζώνης έχει διάσταση $2M_x M_y+6M_x$ με εύρος ζώνης $16(M_y+3)$, ο πίνακας στήλης έχει διάσταση [$2M_x M_y+6M_x$, $2M_x+6M_y+24$], ο πίνακας γραμμής [$2M_x+6M_y+24$, $2M_x M_y+6M_x$], και ο πίνακας κορυφής [$2M_x+6M_y+24$, $2M_x+6M_y+24$].

Επειδή όμως η επίλυση του συστήματος γίνεται επαναληπτικά με τη μέθοδο GMRES ο παραπάνω πίνακας δεν κατασκευάζεται ποτέ αλλά από την αρχή αποθηκεύονται μόνο τα μη μηδενικά στοιχεία του σε μορφή CSR (Compressed Sparse Row Format) η οποία περιγράφηκε στην παράγραφο 4.4.2.

4.6.2 Προσομοίωση διεπιφανειακών κυμάτων με εισαγωγή αδράνειας υγρού

Για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων λαμβάνοντας υπόψη τις αδρανειακές δυνάμεις του υγρού χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (2.13) έως (2.15), (2.19), (2.20), (2.23), (2.25) έως (2.28), (2.31) και (2.32). Και στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα στην αέρια φάση είναι σε ημι-μόνιμη κατάσταση. Επομένως, για την αριθμητική επίλυση ακολουθείται η ίδια διαδικασία που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Δηλαδή, επιλύεται το πρόβλημα στην αέρια φάση για δεδομένο σχήμα διεπιφάνειας. Οι τιμές της πίεσης και της διάτμησης που προκύπτουν χρησιμοποιούνται με την σειρά τους για τον προσδιορισμό της θέσης της διεπιφάνειας στην νέα χρονική στιγμή. Στην επίλυση της ροής στην αέρια φάση δεν αλλάζει τίποτα. Η μόνη διαφορά βρίσκεται στην επίλυση της υγρής φάσης όπου τώρα το πρόβλημα ροής είναι διδιάστατο και επομένως περισσότερο απαιτητικό. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων η εξίσωση που εκφράζει το ισοζύγιο ορμής στο υγρό διακριτοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-x_0}^{x_0} B_i \left(\frac{\mu}{\mu_w} \right)^2 \frac{\rho_w}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{y-1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy - \int_0^1 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial X} P dx dy + \\ & \int_0^1 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial X} \frac{1}{We} \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} dx dy + \int_0^1 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial X} \frac{(\rho_w / \rho - 1)}{Fr} \frac{\partial h}{\partial X} dx dy + \int_0^1 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial Y} \frac{1}{h^2} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \\ & \int_0^1 B_i (P_{x_0} - P_{-x_0}) dy - \int_0^1 B_i \frac{1}{We} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \Big|_{x_0} - \frac{\partial^2 h}{\partial X^2} \Big|_{-x_0} \right) dy - \int_{-x_0}^{x_0} B_i \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_{inf}} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Οι άγνωστες μεταβλητές που υπολογίζονται κάθε φορά μέσα στην υγρή φάση είναι το σχήμα της διεπιφάνειας, η ταχύτητα και η ροϊκή συνάρτηση του υγρού. Αν M_x είναι ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιούνται στην x-κατεύθυνση και N_y ο αριθμός των στοιχείων στην y-κατεύθυνση μέσα στην υγρή φάση τότε οι συνολικοί άγνωστοι στο υγρό είναι, αντί για M_x+3 που ήταν στην προηγούμενη περίπτωση, $2(M_x+3)(N_y+3)+M_x+3$.

4.6.3 Επίλυση συνολικού προβλήματος ροής αέρα πάνω από υγρό φιλμ

Για την επίλυση του συνολικού προβλήματος ροής αέρα πάνω από λεπτό υγρό φιλμ, ώστε να είναι δυνατή η μελέτη της συμπεριφοράς των διεπιφανειακών κυμάτων παρουσία των Tollmien-Schlichting, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις (2.12) έως (2.15), (2.19), (2.20), (2.23), (2.25) έως (2.28) και (2.31). Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει πλέον η παραδοχή της ημιμόνιμης κατάστασης και το πρόβλημα επιλύεται ταυτόχρονα και στις δυο φάσεις. Η διακριτοποίηση του ισοζυγίου ορμής στην x-κατεύθυνση δίνει:

$$\int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} B_i \left(\frac{\mu}{\mu_w} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) dx dy - \int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial X} P dx dy + \int_0^{y_{\text{inf}}} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{\partial B_i}{\partial Y} \frac{\partial U}{\partial Y} dx dy + \int_0^{y_{\text{inf}}} B_i (P_{x_0} - P_{-x_0}) dy - \int_{-x_0}^{x_0} B_i \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{y=y_{\text{inf}}} - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{y=0} \right) dx = 0 \quad (4.33)$$

Ο αριθμός των αγνώστων τόσο στην υγρή όσο και στην αέρια φάση είναι ο ίδιος όπως και στην περίπτωση που θεωρούμε ημι-μόνιμη κατάσταση στο αέριο και οι αδρανειακές δυνάμεις συμπεριλαμβάνονται στο υγρό.

4.6.4 Αλγόριθμοι επίλυσης

Όταν η αριθμητική επίλυση γίνεται για ημι-μόνιμη κατάσταση στην αέρια φάση χρησιμοποιείται ο παρακάτω αλγόριθμος:

- Για $t = 0$ επιβάλλεται μια διαταραχή στην διεπιφάνεια του υγρού – αέρα.
- Με βάση τις αρχικές τιμές και την διαταραχή επιλύεται το πρόβλημα στην αέρια φάση και προκύπτουν οι νέες τιμές της πίεσης και της διάτμησης.
- Στη συνέχεια με δεδομένη πίεση και διάτμηση επιλύεται το πρόβλημα στην υγρή φάση από όπου προκύπτουν οι νέες τιμές για το σχήμα της διεπιφάνειας οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν πάλι για την επίλυση στον αέρα.
- Με βάση το σχήμα της διεπιφάνειας υπολογίζεται, αν χρειάζεται, το νέο πλέγμα ώστε να λαμβάνονται υπόψη η κλίση και η καμπυλότητα της διεπιφάνειας.

- Η διαδοχική επίλυση των προβλημάτων αέρα-υγρού συνεχίζεται, για όσο χρονικό διάστημα χρειαστεί προκειμένου να περιγραφεί πλήρως η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, με τον κανόνα τραπεζίου.

Όταν επιλύεται το συνολικό πρόβλημα ο αλγόριθμος που ακολουθείται είναι ο ίδιος με τη μόνη διαφορά ότι η επίλυση των δύο φάσεων γίνεται ταυτόχρονα.

5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΥΓΡΟΥ

5.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων όταν το ιξώδες του υγρού είναι αρκετά μεγάλο ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι $M \rightarrow 0$. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν για παράδειγμα τα anti-icing ρευστά που χρησιμοποιούνται για την αποφυγή δημιουργίας πάγου πάνω σε πτερύγια αεροσκαφών. Στο παραπάνω όριο η επίλυση στη υγρή φάση γίνεται σε μια διάσταση αφού από την εξίσωση κίνησης απουσιάζουν οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού.

Αρχικά παρουσιάζονται αποτελέσματα στην περιοχή ισχύος της γραμμικής θεωρίας όπου γίνεται σύγκριση μεταξύ των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των προβλέψεων της γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας. Ως γραμμική θεωρείται η περιοχή που χαρακτηρίζεται (α) από μικρό πλάτος αρχικής διαταραχής οπότε καλύπτει μεγάλο εύρος της χρονικής εξέλιξης του φαινομένου ή (β) σχετικά μεγάλο πλάτος αρχικής διαταραχής οπότε καλύπτει μικρό εύρος της χρονικής εξέλιξης του φαινομένου. Επίσης, γίνεται σύγκριση και με ορισμένα πειράματα που είναι διαθέσιμα στη βιβλιογραφία.

Στο επόμενο στάδιο, η μελέτη επικεντρώνεται στην ασθενώς μη γραμμική περιοχή. Διερευνάται η δυναμική συμπεριφορά για τιμές παραμέτρων για τις οποίες (α) η σχέση διασποράς δίνει $\omega_{i,\max}$ θετικό και περίπου ίσο με το μηδέν για k πραγματικό και (β) η σχέση διασποράς δίνει $\omega_{i,\max} > 0$ για k πραγματικό. Στην τελευταία περίπτωση μελετάται η συμπεριφορά κοντά στα άκρα του ασταθούς κυματοπακέτου όπου επικρατούν συνθήκες ουδέτερης ευστάθειας:

$$\sigma_i = \omega_i - V_{Gr} k_i \approx 0, \quad \omega = \omega_r + i\omega_i = D(k = k_r + ik_i), \quad (5.1)$$

$$V_{Gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\partial\omega_r}{\partial k_r} + i \frac{\partial\omega_i}{\partial k_r} \Big|_{k=k_r+ik_i} = \frac{\partial\omega_r}{\partial k_r}, \quad \frac{\partial\omega_i}{\partial k_r} \Big|_{k=k_r+ik_i} = 0, \quad \omega_i = \omega_{i,\max}(k = k_r + ik_i). \quad (5.2)$$

Ο κυματαριθμός k είναι μιγαδικός και χρειάζεται να υπολογισθεί. Όπως περιγράφηκε και στο τρίτο κεφάλαιο η ταχύτητα κύματος V_{Gr} και ο κυματαριθμός k υπολογίζονται είτε βρίσκοντας το k_i για το οποίο $\omega_{i,\max} - k_i V_{Gr} = 0$, είτε μέσω της μεθόδου pinching για σχέση διασποράς για την οποία ισχύει ότι:

$$\omega_v = \omega - kV_{Gr}, \quad \frac{d\omega_v}{dk} = 0. \quad (5.3)$$

Στο τμήμα αυτό παρουσιάζονται αρχικά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την ανάλυση της εξίσωσης Schrödinger. Πιο συγκεκριμένα, διερευνάται αν υπάρχουν τιμές παραμέτρων για τις οποίες υπάρχουν οδεύοντα κύματα και εξετάζεται το κατά πόσο αυτά είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Για να επιβεβαιωθούν τα παραπάνω αποτελέσματα πραγματοποιούνται και αριθμητικές προσομοιώσεις στην περιοχή αυτή.

Τέλος, μελετάται η εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων στην μη-γραμμική περιοχή είτε εισάγοντας διαταραχές μεγάλου πλάτους, είτε παρακολουθώντας τη χωροχρονική εξέλιξη γραμμικών διαταραχών για μεγάλο χρονικό διάστημα. Το στάδιο αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον αφενός επειδή είναι πιο κοντά στην πραγματικότητα και αφετέρου γιατί διευκρινίζει το κατά πόσο η γραμμική και μη-γραμμική θεωρία μπορούν να περιγράψουν ικανοποιητικά την συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις επικεντρώνονται σε τιμές παραμέτρων μακριά από την ασθενώς μη-γραμμική περιοχή που είναι και πιο κοντά σε πραγματικές περιπτώσεις anti-icing ρευστών.

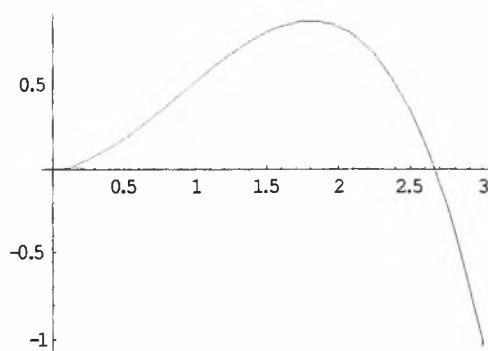
5.2 Αποτελέσματα στη γραμμική περιοχή

Αρχικά εξετάζεται η ροή αέρα πάνω από ένα de-icing ρευστό που χρησιμοποιήθηκε σε πειράματα από τους Hendrickson και Hill (1987). Ο Yih (1990) όπως και οι Ozgen et al. (1998) προσπάθησαν να επιβεβαιώσουν με γραμμική ανάλυση ευστάθειας τα πειραματικά αποτελέσματα. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα δεδομένα του παραπάνω πειράματος χρησιμοποιούνται απλώς σαν μια περίπτωση πραγματικού ρευστού. Στο παρόν κεφάλαιο δεν γίνεται προσπάθεια να αναπαραχθούν αριθμητικά τα πειραματικά αποτελέσματα αφού οι Ozgen et al. (1998) απέδειξαν ότι τα κύματα που παρατηρήθηκαν στο πείραμα των Hendrickson και Hill ανήκουν στην κατηγορία των Tollmien-Schlichting κυματώσεων και όχι στα διεπιφανειακά. Προσομοιώσεις της ανάπτυξης των Tollmien-Schlichting κυμάτων παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7. Με βάση τις παραμέτρους που προτείνονται από τους Ozgen et al. και χρησιμοποιώντας τις κλίμακες τριπλής στιβάδας εισάγονται οι παρακάτω τιμές παραμέτρων: $\mu/\mu_w = 1.67 \cdot 10^{-6}$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{Fr} = 3.94 \cdot 10^4$, $\overline{We} = 59.88$. Επιλέγεται ένα αρχικό ύψος υγρού ίσο με $H_0 = 2.07617$, επιβάλλεται μια στιγμιαία γραμμική διαταραχή στη διεπιφάνεια ($d = 0.001$ and $W = 4$) στη θέση $x = 0.8$ και υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά του κύματος που σχηματίζεται. Για την προσομοίωση χρησιμοποιείται χρονικό βήμα 0.001 και χωρικό βήμα 0.2 και 0.4 στην x-κατεύθυνση και στην y-κατεύθυνση αντίστοιχα, ενώ το διάστημα διακριτοποίησης στην y-κατεύθυνση λαμβάνεται ίσο με $\overline{Y}_\infty = 8$.

Στόχος είναι να συγκριθούν τα αποτελέσματα που προβλέπονται από τη γραμμική θεωρία για το μήκος κύματος, την περίοδο και την ταχύτητα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων. Για τις παραπάνω τιμές παραμέτρων η γραμμική ανάλυση ευστάθειας προβλέπει συναγωγική αστάθεια. Η καμπύλη ευστάθειας όπως αυτή προβλέπεται από τη θεωρία για το συγκεκριμένο σύστημα δίνεται στο Σχήμα 5.1. Αριθμητικά η περίοδος του κυματοπακέτου υπολογίζεται με ανάλυση FT (Fourier Transformation) στην χρονική εξέλιξη της διαταραχής για μια δεδομένη θέση. Είναι σημαντικό η απόσταση της θέσης που θα επιλεγεί από το σημείο επιβολής της διαταραχής να είναι αρκετά μεγαλύτερη από το μήκος κύματος του κυματοπακέτου ώστε να ισχύουν τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας. Στην περίπτωση αυτή οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τον μετασχηματισμό Fourier είναι:

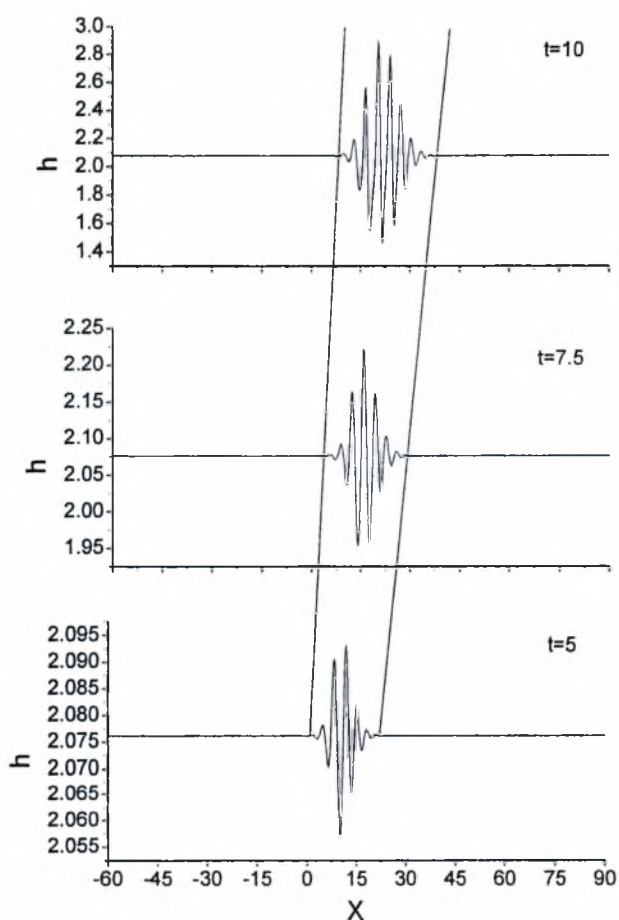
$$h(X_0, T) = \sum_{n=-N/2}^{n=N/2} c_n(X_0) e^{i \frac{2n\pi}{T_L} T}, \quad c_n = \frac{1}{T_L} \int_{-T_L/2}^{T_L/2} h(X_0, T) e^{-i \frac{2n\pi}{T_L} T} dT, \quad N\Delta T = T_L \quad (5.1)$$

όπου T_L είναι το χρονικό διάστημα για το οποίο γίνεται ο μετασχηματισμός και X_0 είναι η θέση για την οποία καταγράφονται οι μεταβολές της διεπιφάνειας με το χρόνο. Ανάλογα, το αριθμητικό μήκος κύματος της διαταραχής υπολογίζεται με ανάλυση FT σε ένα στιγμιότυπο της διαταραχής. Πάλι το στιγμιότυπο πρέπει να ληφθεί σε χρόνο αρκετά μεγαλύτερο από την περίοδο του κυματοπακέτου. Με την ανάλυση Fourier καταγράφονται οι μέγιστες τιμές του φάσματος $\max_{1 \leq n \leq N/2} |c_n|$ και με βάση αυτές υπολογίζονται οι χωρικές και οι χρονικές κλίμακες της ροής $\omega_n = 2n\pi/T_L$, $k_n = 2n\pi/L$. Τέλος, η ταχύτητα κυματοπακέτου u_G , υπολογίζεται αριθμητικά μέσω της σχέσης $u_G = (X_{2m} - X_{1m}) / (T_{2m} - T_{1m})$, όπου X_{1m} , X_{2m} η μέγιστη κατά απόλυτη τιμή κορυφή του κυματοπακέτου σε δυο διαφορετικές χρονικές τιμές T_1 , T_2 , έτσι ώστε να ισχύει $X_{im} \gg 2\pi/k_n$ και $T_{im} \gg 2\pi/\omega_n$ for $i=1,2$.



Σχήμα 5.1: Καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k_r)$ για το σύστημα αέρα-deicing.

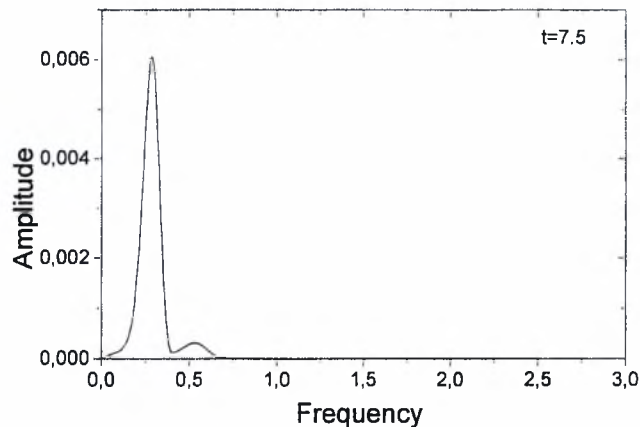
Στο Σχήμα 5.2 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα του σχήματος της διεπιφάνειας από όπου γίνεται αντιληπτός ο συναγωγικός χαρακτήρας της αστάθειας. Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της επιβολής διαταραχής είναι να σχηματιστεί ένα ασταθές κυματοπακέτο που μεταφέρεται με τη βοήθεια της ροής μακριά από το σημείο επιβολής της και καθώς μεταφέρεται το μήκος που καταλαμβάνει και το πλάτος του μεγαλώνουν. Αναμένεται το κύμα αυτό να εμπεριέχει τις ασταθείς κυματομορφές που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Επίσης, φαίνονται και οι κλίσεις των δυο ευθειών οι οποίες περικλείουν το κυματοπακέτο και οι οποίες συμφωνούν με τις ταχύτητες που προβλέπονται από τη θεωρία για τα άκρα του ασταθούς κυματοπακέτου όπου υπάρχει μηδενικός ρυθμός αύξησης.



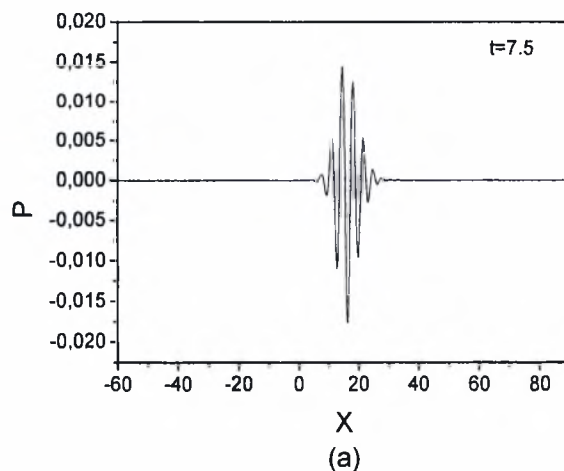
Σχήμα 5.2: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-deicing για γραμμική στιγμιαία διαταραχή, $d=0.001$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

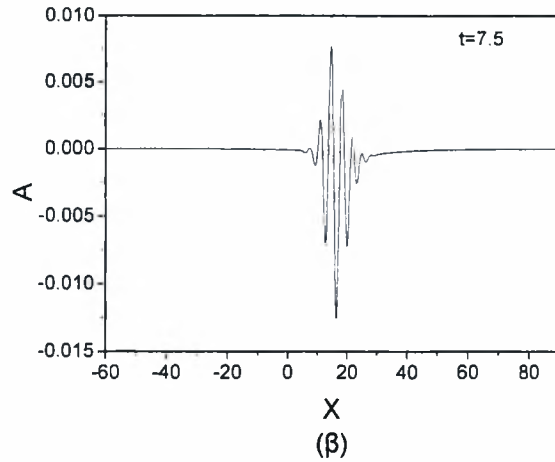
Στο Σχήμα 5.3 δίνεται η ανάλυση FT στο σχήμα της διεπιφάνειας που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t=7.5$ για τον υπολογισμό του μήκους κύματος. Στο Σχήμα 5.4

δίνεται για τη χρονική στιγμή $t=7.5$ η μορφή της πίεσης και του πάχους μετατόπισης, στο Σχήμα 5.5 απεικονίζεται για τη θέση $X=20$ η χρονική εξέλιξη της πίεσης και στο 5.6 δίνεται η ανάλυση FT στο σήμα του Σχήματος 5.5 για τον υπολογισμό της περιόδου. Τέλος, στον πίνακα 5.1 δίνονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για τα διεπιφανειακά κύματα με την αριθμητική προσομοίωση καθώς και οι τιμές που προβλέπει η γραμμική θεωρία για το πλέον ασταθές κύμα δηλαδή το μήκος κύματος η συχνότητα και η ταχύτητα ομάδας που αντιστοιχούν στο κύμα το οποίο μεγαλώνει γρηγορότερα λόγω αστάθειας και το οποίο μεταφέρεται με την αντίστοιχη ταχύτητα ομάδας V_{Gr} .

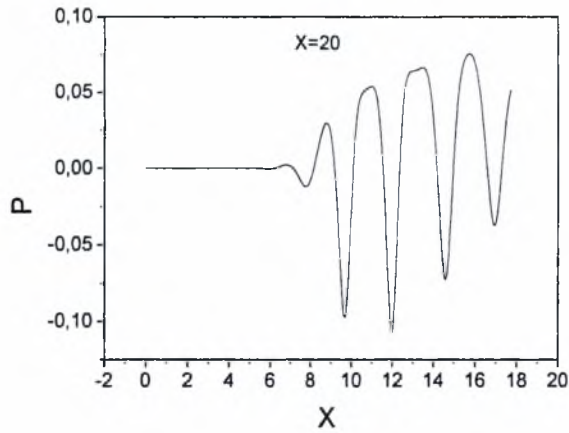


Σχήμα 5.3: Ανάλυση FT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.

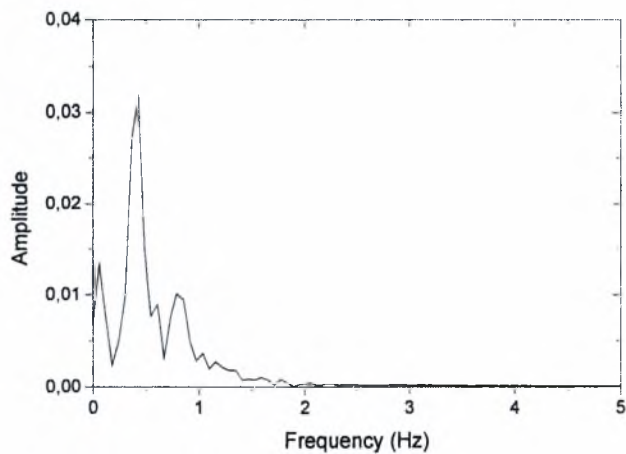




Σχήμα 5.4: Στιγμιότυπο (α) της πίεσης και (β) του πάχους μετατόπισης για το σύστημα αέρα-deicing για γραμμική στιγμιαία διαταραχή, $d=0.001$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.



Σχήμα 5.5: Χρονική εξέλιξη της πίεσης για το σύστημα αέρα-deicing για γραμμική στιγμιαία διαταραχή.



Σχήμα 5.6: Ανάλυση FT για τον υπολογισμό της περιόδου.

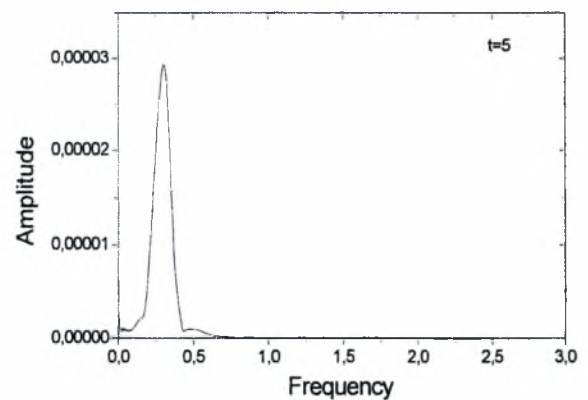
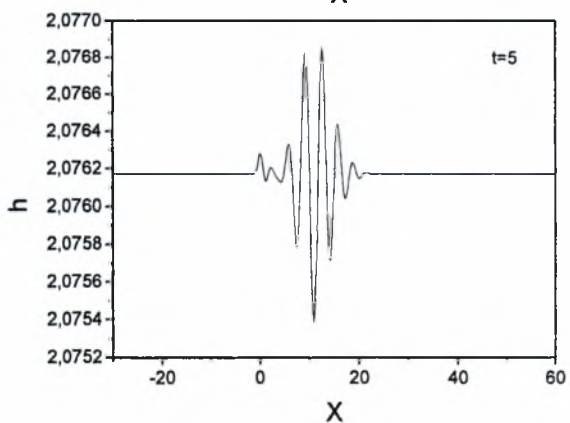
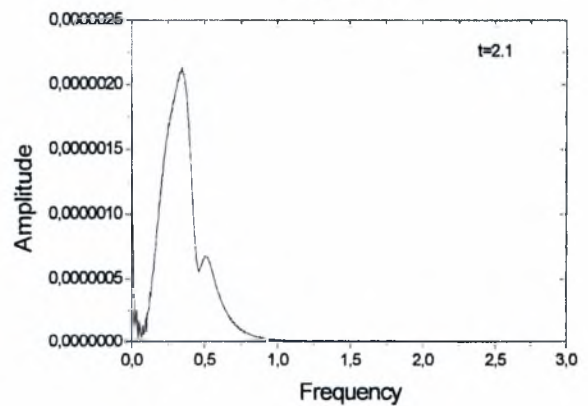
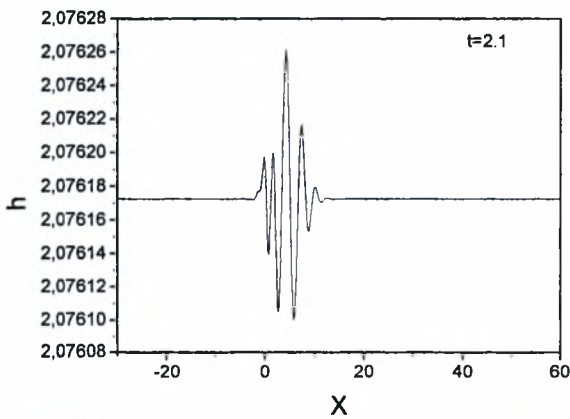
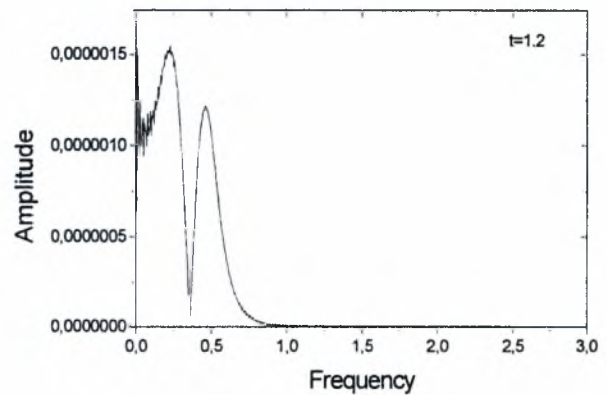
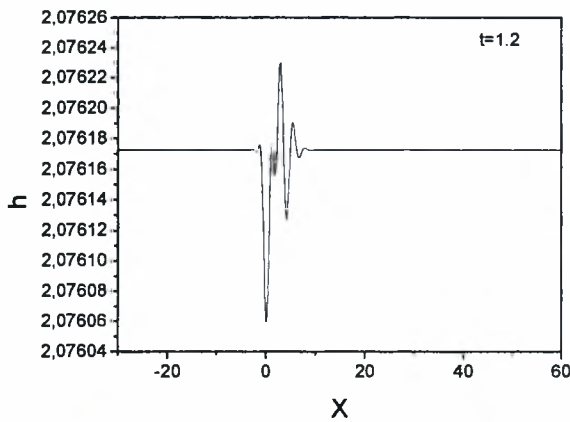
	Γραμμική θεωρία	Αριθμητικά αποτελέσματα
Μήκος κύματος	3.47	3.53
Περίοδος	2.32	2.34
Ταχύτητα	2.2	2.26

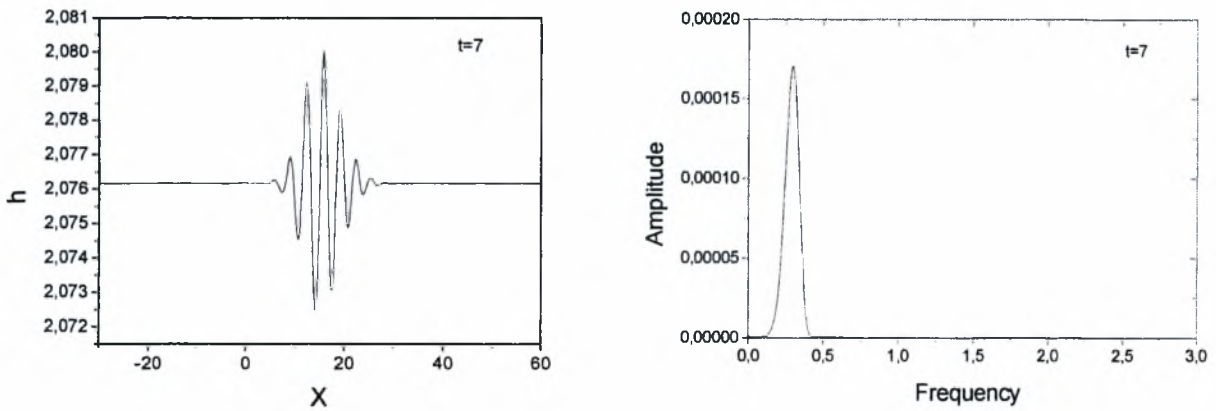
Πίνακας 5.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-deicing, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

Παρατηρούμε ότι τα χαρακτηριστικά του κυματοπακέτου προσδιορίζονται ικανοποιητικά με την αριθμητική μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε. Ένα άλλο σημείο στο οποίο συμφωνούν η αριθμητική επίλυση με τη γραμμική θεωρία είναι στην ταχύτητα με την οποία μεταφέρονται τα δυο άκρα του κυματοπακέτου, τα σημεία δηλαδή που έχουν σχεδόν μηδενικό ρυθμό ανάπτυξης. Πράγματι για το δεξί άκρο η θεωρία προβλέπει ταχύτητα ίση με $V_R = 2.75$ και για το αριστερό ταχύτητα $V_L = 0.4$. Αντίστοιχα, οι ταχύτητες που υπολογίζονται αριθμητικά είναι $V_R = 2.84$ και $V_L = 0.45$. Από τα παραπάνω είναι φανερό, ότι το αριθμητικό μοντέλο προβλέπει ικανοποιητικά τα χαρακτηριστικά των διεπιφανειακών κυμάτων για την περίπτωση του συστήματος αέρα-deicing.

Στη συνέχεια διερευνάται το αποτέλεσμα της επιβολής μιας περιοδικής στο χρόνο διαταραχής στο ίδιο σύστημα αέρα-deicing. Επειδή το συγκεκριμένο σύστημα ρευστών, όπως είδαμε παραπάνω, στη θέση $x=0.8$ εμφανίζει συναγωγική αστάθεια αναμένουμε ότι θα εμφανιστεί το ασταθές κυματοπακέτο με τα χαρακτηριστικά που δίνονται στον πίνακα 5.1. Εξαιτίας όμως της περιοδικής διαταραχής περιμένουμε, σύμφωνα με τη θεωρία, να εμφανιστεί και μια δεύτερη χωρικά ασταθής κατάσταση, εφόσον η συχνότητα που επιβάλλεται ανήκει στην ασταθή περιοχή. Το μήκος κύματος της χωρικά ασταθούς διαμόρφωσης καθορίζεται από τον κυματαριθμό που αντιστοιχεί στην συχνότητα της διαταραχής που επιβάλλεται. Η εξέλιξη διαταραχής με $d=0.001$, $W=4$ και $\omega_f = 9$ απεικονίζεται στο Σχήμα 5.7. Παρατηρούμε ότι το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην ασταθή συχνότητα που επιβάλλεται εμφανίζεται από την αρχή της προσομοίωσης πριν ακόμη το ασταθές κυματοπακέτο σχηματιστεί κανονικά και απομακρυνθεί μακριά από το σημείο $X=0$. Το γεγονός αυτό γίνεται αντιληπτό τόσο από το σχήμα της διεπιφάνειας όπου μέχρι τη χρονική $t=5$ διακρίνονται δυο μήκη κύματος, όσο και από τα διαγράμματα της ανάλυσης FT. Πιο συγκεκριμένα, μέχρι τη στιγμή $t=5$ στο φάσμα της

ανάλυσης εμφανίζονται δυο κορυφές. Η δεξιά κορυφή κυμαίνεται γύρω από την τιμή 0.46 και αντιστοιχεί στο μήκος κύματος ($\lambda=2.1$) που προκαλείται από την περιοδικότητα της διαταραχής, ενώ η αριστερή κορυφή που έχει τιμή 0.29 αντιστοιχεί στο ασταθές κυματοπακέτο. Καθώς όμως η ροή εξελίσσεται σε μεγαλύτερους χρόνους επικρατεί τελικά το κυματοπακέτο που εμπεριέχει το πιο ασταθές μήκος κύματος χωρίς να υπάρχει κάποια εμφανής επίδραση της περιοδικής κατάστασης. Το γεγονός ότι οι δυο ασταθείς καταστάσεις εμφανίζονται ταυτόχρονα οφείλεται στο ότι αφενός η ταχύτητα του πιο ασταθούς κυματοπακέτου δεν είναι πολύ μεγάλη και αφετέρου η χωρικά ασταθής διαμόρφωση έχει σχετικά μεγάλο ρυθμό ανάπτυξης. Το σημαντικό πάντως είναι ότι η ροή τελικά κυριαρχείται από το πιο ασταθές κύμα και την εξέλιξη του ακόμη και στην περίπτωση περιοδικής διαταραχής.

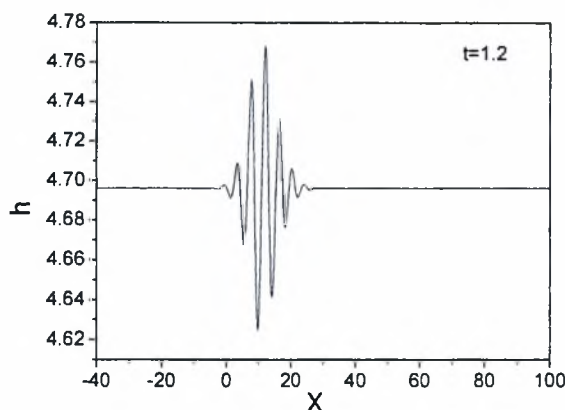




Σχήμα 5.7: Χωροχρονική εξέλιξη και ανάλυση FT περιοδικής διαταραχής το σύστημα αέρα-deicing .

Το δεύτερο σύστημα ρευστών που εξετάζεται είναι η αλληλεπίδραση αερίου συνοριακού στρώματος με λεπτό υμένα λαδιού. Σκοπός είναι η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα πειράματα που πραγματοποίησαν οι Ludwig και Hornung (1989). Οι παραπάνω ερευνητές χρησιμοποίησαν μια πλάκα μήκους 4.59 cm η οποία καλύπτεται από υμένα λαδιού με ιξώδες 2.9 gr/cm·s και πυκνότητα 1gr/cm³. Το φιλμ που σχηματίζεται έχει πάχος 0.015cm, ενώ ο συντελεστής επιφανειακής τάσης ισούται με 0.02N/m. Ρεύμα αέρα πυκνότητας 1.205 gr/cm³ ρέει πάνω από το υγρό με ταχύτητα 36 m/sec και θέτει το υγρό σε κίνηση. Ο αέρας στις συνθήκες πειράματος έχει κινηματικό ιξώδες 0.15 cm²/sec και ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται ότι είναι ίσος με Re=110160. Με βάση τις παραπάνω τιμές και χρησιμοποιώντας τις κλίμακες της τριπλής στιβάδας προκύπτουν οι παρακάτω παράμετροι για την προσομοίωση του πειράματος: $\mu/\mu_w = 6.232 \cdot 10^{-5}$, $\rho/\rho_w = 0.001205$, $\overline{Fr} = 2.18 \cdot 10^5$, $\overline{We} = 46.089$, $H_0 = 4.696$, $\lambda = 0.332$. Οι αδιάστατες τιμές του πάχους του υμένα και της διάτμησης που του ασκείται από τον αέρα υπολογίζονται από την λύση της βασικής ροής για σταθερή παροχή του υγρού. Τόσο το πείραμα όσο και η ανάλυση του Timoshin (1997) έδειξαν ότι εισάγοντας στο παραπάνω σύστημα μια διαταραχή σχηματίζεται κυματοπακέτο με μήκος κύματος ίσο με 0.245 cm. Στο Σχήμα 5.8 δίνεται η χωρική εξάρτηση του πάχους του φιλμ μετά από αδιάστατο χρόνο $t=1.2$ όταν για $t=0$ επιβάλλεται μια στιγμιαία γραμμική διαταραχή στη διεπιφάνεια με $d=0.001$. Για την συγκεκριμένη προσομοίωση χρησιμοποιείται χωρικό βήμα 0.2 στην x-κατεύθυνση, 0.4 στην y-κατεύθυνση και χρονικό βήμα ίσο με 0.001. Εφαρμόζοντας ανάλυση FT στο σήμα του Σχήματος 5.8 υπολογίζεται ότι το αδιάστατο μήκος κύματος είναι ίσο με 4.26. Αν μετατρέψουμε το αδιάστατο μήκος σε ποσότητα με διαστάσεις, χρησιμοποιώντας την κλίμακα μήκους της τριπλής στιβάδας $LRe^{-3/8}$,

καταλήγουμε σε μήκος κύματος ίσο με 0.25cm , το οποίο είναι σε συμφωνία τόσο με την ανάλυση του Timoshin, όσο και με τα πειραματικά αποτελέσματα των Ludwig and Hornung. Το κυματοπακέτο που έχει σχηματιστεί ως αποτέλεσμα της γραμμικής διαταραχής είναι αυτό που η γραμμική ανάλυση ευστάθειας χαρακτηρίζει ως πιο ασταθές επειδή έχει το μεγαλύτερο ρυθμό ανάπτυξης.



Σχήμα 5.8: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για το σύστημα αέρα-λαδιού για γραμμική στιγμιαία διαταραχή.

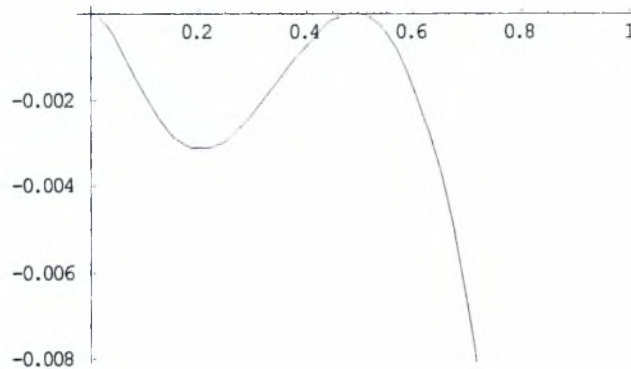
5.3 Αποτελέσματα στην ασθενώς μη-γραμμική περιοχή

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο είδαμε ότι για μικρές γραμμικές διαταραχές η αριθμητική επίλυση μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τη ροή αφού συμφωνεί τόσο με τη θεωρία όσο και με κάποια πειράματα. Στο επόμενο στάδιο μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο η μη-γραμμικότητα αρχίζει να επηρεάζει την εξέλιξη των ασταθειών. Για το σκοπό αυτό επικεντρώνασθε σε περιοχές με πολύ μικρό ρυθμό ανάπτυξης και εισάγοντας κατάλληλη αργή χρονική κλίμακα προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την επίδραση που έχουν οι μη-γραμμικοί όροι στην εξέλιξη του γραμμικού κύματος.

Η ανάλυση ευστάθειας στην ασθενώς μη-γραμμική περιοχή παρουσιάστηκε εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο και οδήγησε τελικά στη εξίσωση (3.67) που είναι το ανάλογο της εξίσωσης Schrödinger για τη ροή που μελετάμε. Η εξίσωση (3.67) είναι πολύ σημαντική επειδή περιγράφει ικανοποιητικά την μη-γραμμική συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων για τιμές παραμέτρων είτε κοντά στην κρίσιμη γραμμική περιοχή, είτε στα άκρα των κυματοπακέτων όταν ο ρυθμός αύξησης του πιο ασταθούς κύματος είναι σημαντικός. Όπως προαναφέρθηκε στο τρίτο κεφάλαιο, από την εξίσωση Schrödinger μπορούν να εξαχθούν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με την ύπαρξη ή όχι οδευόντων

κυμάτων (traveling waves) και μετωπικών κυμάτων (front) και αν υπάρχουν να διαπιστωθεί το κατά πόσο αυτά είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές.

Για την ανάλυση της εξίσωσης Schrödinger αρχικά χρησιμοποιήθηκαν τιμές παραμέτρων για διαφορετικά ρευστά κοντά στην κρίσιμη περιοχή. Τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε ήταν ανεξάρτητα από τις τιμές αυτές και για αυτό, στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, θα παρουσιαστεί μόνο μια από αυτές. Έτσι, διατηρώντας τις τιμές για το λόγο ιξωδών, το λόγο πυκνοτήτων και τον αριθμό \overline{We} ίδιες με τις τιμές του συστήματος αέρα-deicing που χρησιμοποιήθηκε στην προσομοίωση στη γραμμική περιοχή ($\mu/\mu_w = 1.67 \cdot 10^{-6}$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{We} = 59.88$, $H_0 = 2.076$) προσδιορίστηκε ο κρίσιμος αριθμός Froude ($\overline{Fr}_c = 3185.48$) για τον οποίο έχουμε ουδέτερη ευστάθεια ($\omega_{i,c} \approx 0$). Στο Σχήμα 5.9 δίνεται η μορφή της κρίσιμης καμπύλης ευστάθειας $\omega_i = f(k/H_0)$ από όπου υπολογίζεται ότι ο κρίσιμος κυματαριθμός ισούται με $k_c = 0.236011$.



Σχήμα 5.9: Κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k/H_0)$.

Στη συνέχεια υπολογίζεται η παράμετρος ω_i' η οποία είναι πρώτης τάξεως, $O(\epsilon)$, ως προς την αρχική διαταραχή επί της βασικής ροής και ορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τη

$$\text{σχέση } \omega_i = \epsilon^2 \omega_i'. \text{ Για το συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρούμε ότι } \omega_i' = \frac{1}{4(\mu/\mu_w)} \left. \frac{d\omega_i}{d\overline{Fr}} \right|_{\overline{Fr} \rightarrow \overline{Fr}_c},$$

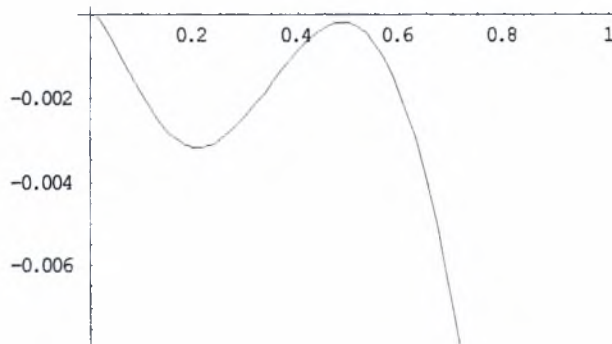
όπου $\left. \frac{d\omega_i}{d\overline{Fr}} \right|_{\overline{Fr} \rightarrow \overline{Fr}_c}$ η παράγωγος του ω_i κοντά στην κρίσιμη περιοχή. Με τα δεδομένα της

συγκεκριμένης ροής η παράμετρος ω_i' υπολογίζεται ότι είναι ίση με $\omega_i' = 2.459$.

Έχοντας προσδιορίσει όλες τις απαραίτητες παραμέτρους υπολογίζονται οι συντελεστές S_1 , S_2 και S_3 της εξίσωσης (3.67) για τιμές του $\overline{F\Gamma}$ που οδηγούν σε τιμές $\omega_{i,\max}$ πάνω από την κρίσιμη τιμή $\omega_{i,c} = 0$ και για τιμές $\overline{F\Gamma}$ που δίνουν μέγιστο ρυθμό ανάπτυξης κάτω από το $\omega_{i,c} = 0$. Από τη σύγκριση των συντελεστών προκύπτουν σημαντικά συμπεράσματα. Όπως αναφέρεται στο κεφάλαιο 3 έχει αποδειχθεί ότι αναγκαίο κριτήριο για την ύπαρξη μονοχρωματικών οδευόντων κυμάτων, δηλαδή οδευόντων κυμάτων που χαρακτηρίζονται από μία συχνότητα, είναι ο συντελεστής S_2 και το πραγματικό μέρος του συντελεστή S_3 να έχουν το ίδιο πρόσημο. Υπολογίζοντας τους παραπάνω συντελεστές για την περιοχή πάνω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας προκύπτει ότι δεν υπάρχουν οδεύοντα κύματα. Αντίθετα, οι υπολογισμοί για $\omega_{i,\max}$ κάτω από την κρίσιμη τιμή $\omega_{i,c}$ οδηγούν στο συμπέρασμα ότι στην περιοχή αυτή υπάρχουν οδεύοντα κύματα με χαρακτηριστικό κυματαριθμό $k_c \approx 0.236$.

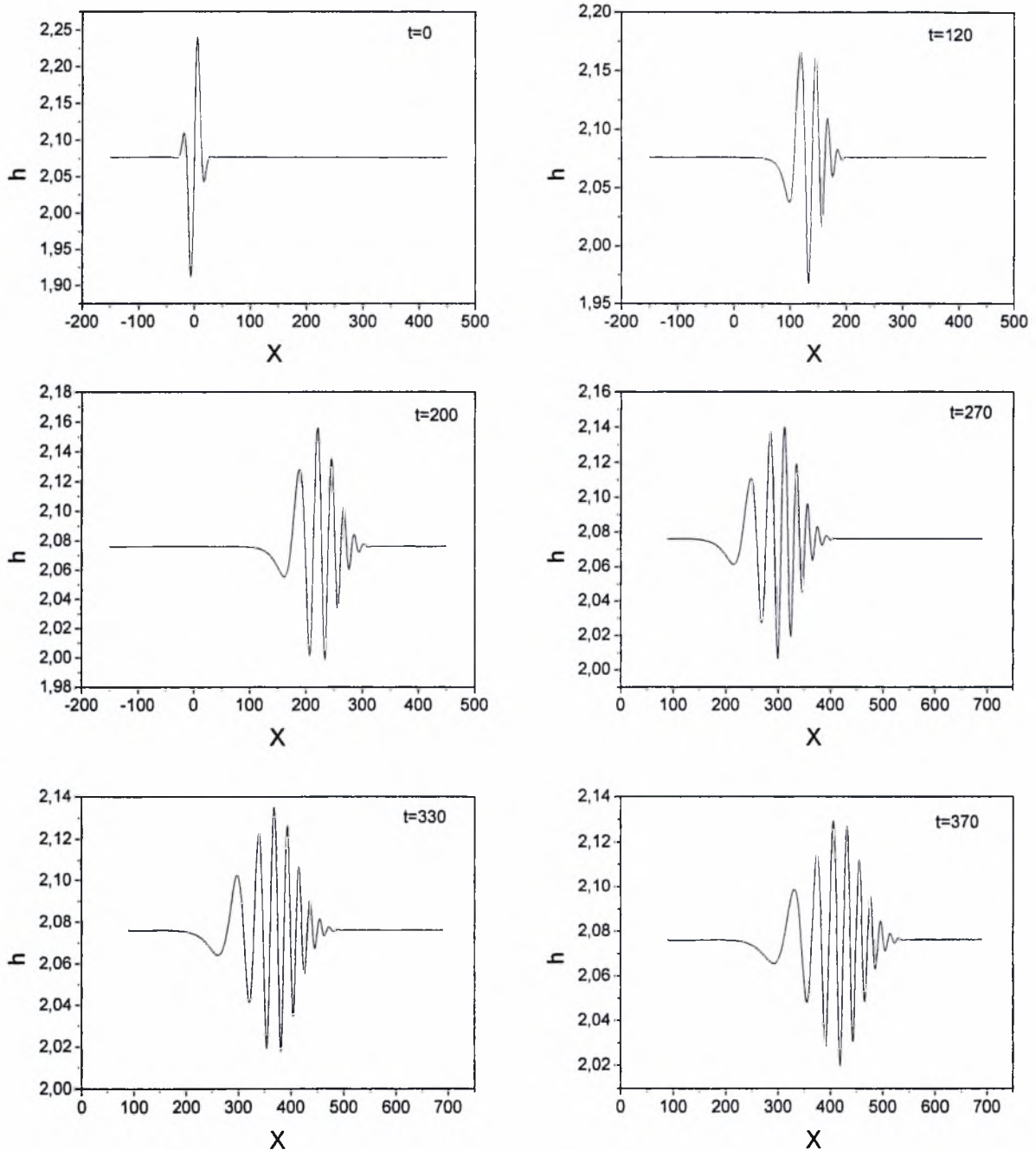
Από τη στιγμή που υπάρχουν οδεύοντα κύματα το επόμενο στάδιο είναι να προσδιοριστεί το κατά πόσο αυτά είναι ευσταθή σε side-band διαταραχές. Η απαραίτητη συνθήκη για ευστάθεια, για τις περιπτώσεις ροών που μελετάμε δίδεται από την σχέση (3.89). Το κριτήριο αυτό δίνει ευστάθεια σε sideband διαταραχές για την υπό εξέταση περίπτωση. Με σκοπό να αποδειχθούν τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω πραγματοποιήθηκαν αριθμητικές προσομοιώσεις τόσο στην περιοχή πάνω, όσο και στην περιοχή κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.

Για την προσομοίωση στη περιοχή κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας ο αριθμός $\overline{F\Gamma}$ τίθεται ίσος με 3180.465. Η καμπύλη ευστάθειας για τις συγκεκριμένες παραμέτρους δίνεται στο Σχήμα 5.10.



Σχήμα 5.10: Κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας $\omega_i = f(k/H_0)$ για τιμές παραμέτρων κάτω από κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.

Για $t=0$ επιβάλλεται στη διεπιφάνεια μια διαταραχή με μήκος κύματος κοντά στο κρίσιμο ($L_c = 26.6$), το οποίο καθορίζεται από τον κρίσιμο κυματαριθμό $k_c = 0.236$, και παρατηρείται η χωροχρονική εξέλιξη της. Η μορφή της διαταραχής που χρησιμοποιείται είναι $f = d \cdot \sin(ax) \cdot \exp(-wx^2)$ με $a=0.23$ και $w=0.005$. Το μήκος κύματος της παραπάνω διαταραχής είναι ίσο με 27.4, ενώ το πλάτος της d λαμβάνεται ίσο με 0.2. Στο Σχήμα 5.11 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα της διεπιφάνειας,



Σχήμα 5.11: Στιγμιότυπα της διεπιφάνειας για τιμές παραμέτρων κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.

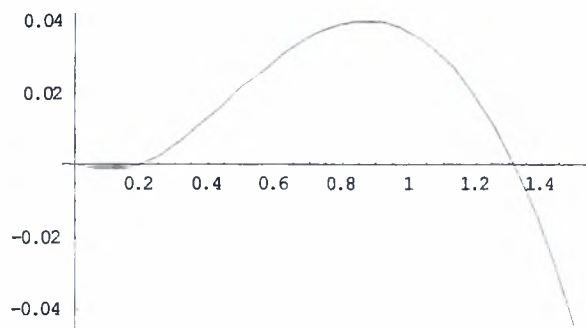
Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι σχηματίζεται ένα κυματοπακέτο που καθώς αναπτύσσεται το πλάτος του μειώνεται πολύ αργά. Το γεγονός ότι το πλάτος του μειώνεται συνεχώς, έστω και αργά, σε συνδυασμό με την μορφή του κυματοπακέτου επιβεβαιώνει το γεγονός ότι δεν υπάρχουν οδεύοντα κύματα στην περιοχή κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι και στις δύο περιπτώσεις η λύση συμπεριφέρεται σαν ένα αργά εξελισσόμενο soliton της κλασσικής μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi|\psi|^2 = 0, \quad |\psi| = a \operatorname{sech}\left\{a(x-ct)/\sqrt{2}\right\}. \quad (5.1)$$

Αναπτύσσεται δηλαδή αργά αλλά σταθερά ένας φάκελος διαμόρφωσης γύρω από μία κυματομορφή στο κρίσιμο μήκος κύματος. Η διαφορά από την λύση (5.1) είναι ότι εδώ δεν φαίνεται να υπάρχει κορεσμός του πλάτους διαμόρφωσης. Αντίθετα το τελευταίο μειώνεται πολύ αργά αλλά συστηματικά. Αριθμητική επίλυση της (3.67) δείχνει ότι αυτό θα καταλήξει μέχρι την πλήρη απόσβεση του κύματος, μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Για σημαντικό χρονικό διάστημα όμως έχουν μία λύση τύπου soliton σαν αυτήν που απεικονίζουν τα γραφήματα στο Σχήμα 5.11.

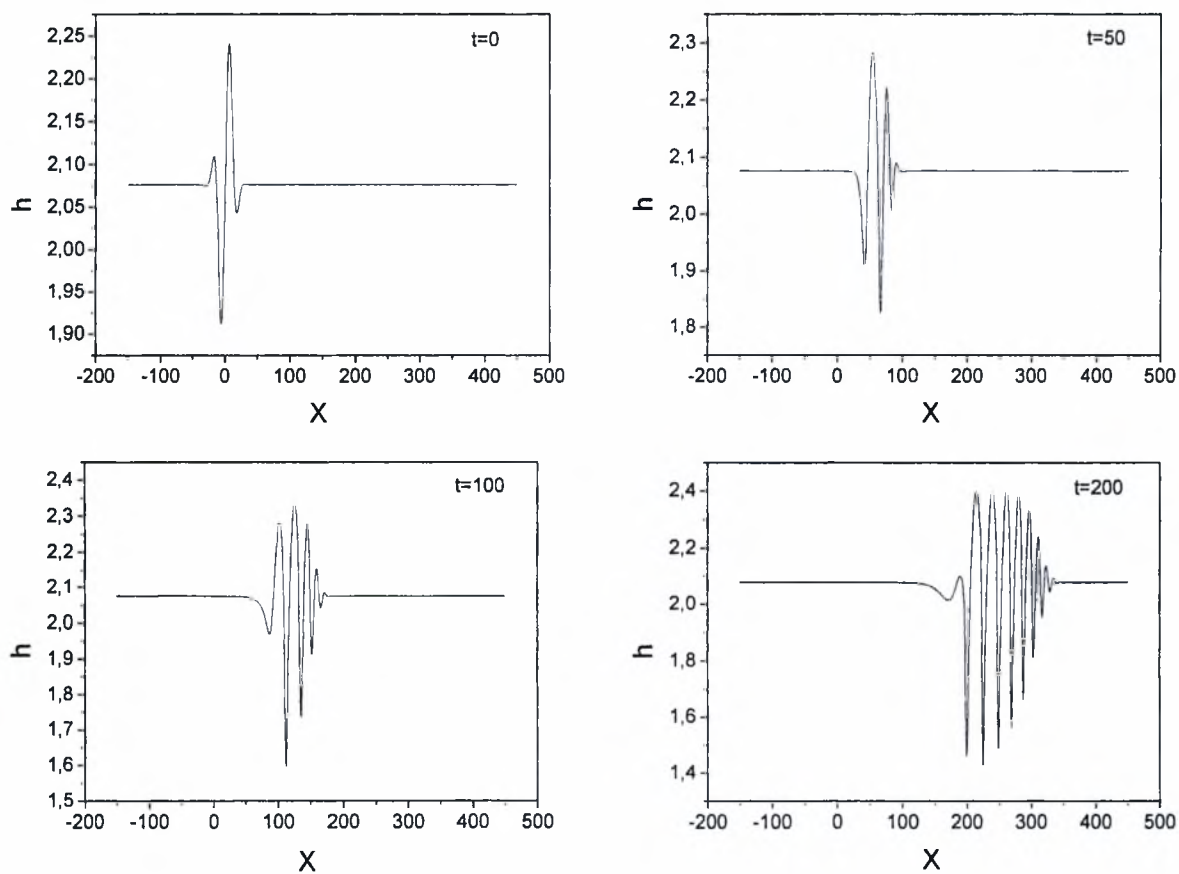
Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι ανάλογο πρόβλημα έχει μελετηθεί στην βιβλιογραφία από τους Segur et al. (2005) αναφορικά με την επίδραση της απόσβεσης στην μονοδιάστατη και στην διδιάστατη μη γραμμική εξίσωση Schrodinger. Πρόκειται για την εξ. (3.67) με την προσθήκη όρου διασποράς σε δεύτερη κατεύθυνση. Μάλιστα έδειξαν ότι για κύματα μεγάλου βάθους, όπου οι σταθερές S_1 και S_3 είναι φανταστικοί αριθμοί, τα μονοχρωματικά οδεύοντα κύματα είναι ευσταθή ως προς την αστάθεια Benjamin-Feir όταν υπάρχει απόσβεση, δηλαδή για $S_2 < 0$. Κάτι τέτοιο ισχύει και στην παρούσα περίπτωση, εδώ οι σταθερές S_1 και S_3 είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου η γραμμική ανάλυση ευστάθειας δείχνει ευστάθεια τύπου Benjamin-Feir για $S_2 < 0$. Το ίδιο δείχνουν και οι προσομοιώσεις που αναφέρονται παραπάνω για την υποκρίσιμη περιοχή.

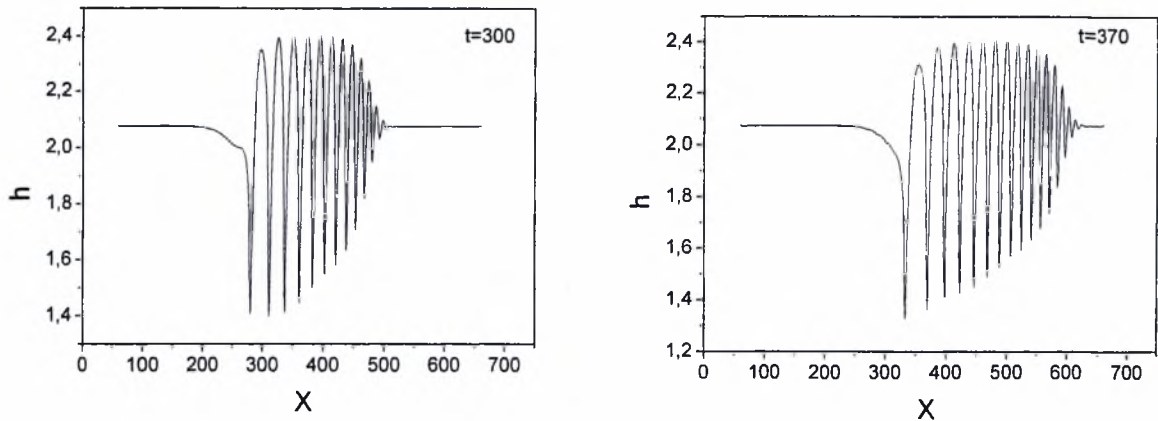
Στη συνέχεια, εξετάζεται αριθμητικά η περιοχή λίγο πάνω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας. Επιλέγονται οι παράμετροι $\mu/\mu_w = 1.67 \cdot 10^{-6}$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{We} = 59.88$, $H_0 = 2.07617$ και $\overline{Fr} = 3944.2$ για τις οποίες η καμπύλη ευστάθειας δίνεται στο Σχήμα 5.12.



Σχήμα 5.12 Κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας $\omega_1 = f(k/H_0)$ για τιμές παραμέτρων πάνω από κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.

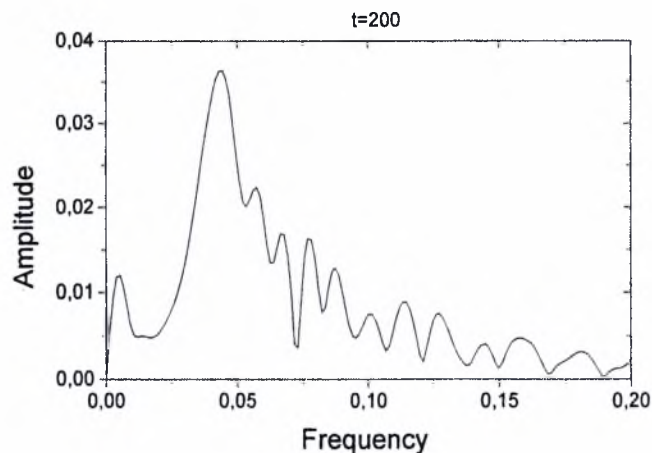
Εφαρμόζεται στη διεπιφάνεια μια διαταραχή της μορφής $f = d \cdot \sin(ax) \cdot \exp(-wx^2)$ ή $f = d \cdot \exp(-wx^2)$ και καταγράφεται η εξέλιξη της στο χώρο και το χρόνο. Στο Σχήμα 5.13 παρουσιάζονται διάφορα στιγμιότυπα για διαταραχή $f = d \cdot \sin(ax) \cdot \exp(-wx^2)$ με $a=0.23$, $w=0.005$, και $d=0.2$.

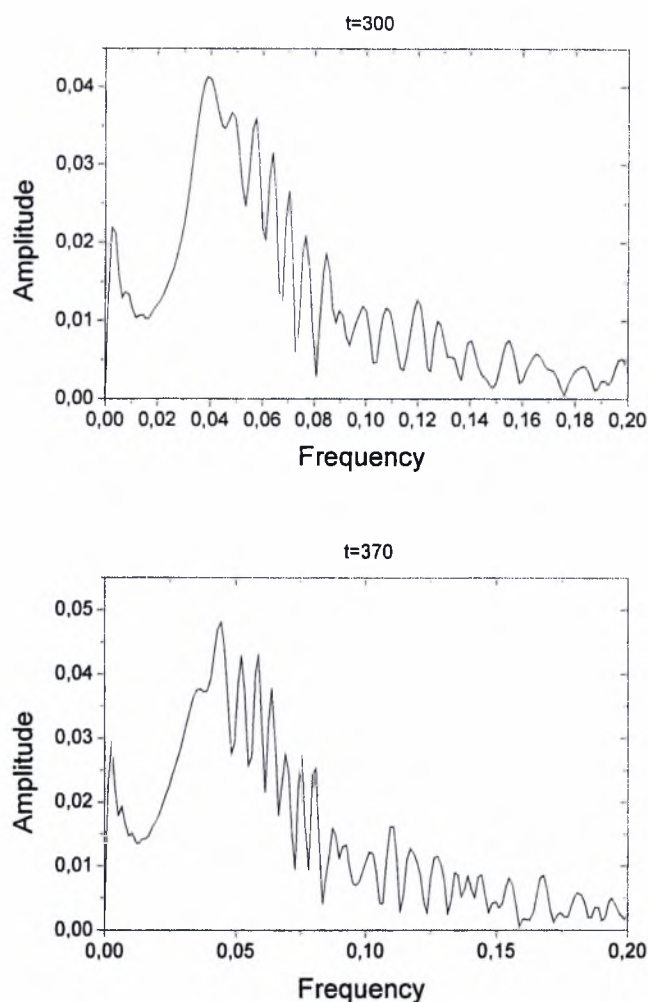




Σχήμα 5.13: Στιγμιότυπα της διεπιφάνειας για τιμές παραμέτρων πάνω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας.

Από τα παραπάνω στιγμιότυπα παρατηρούμε μια ενδιαφέρουσα συμπεριφορά όπου δεν σχηματίζεται κυματοπακέτο ενώ η αστάθεια καταλαμβάνει όλο και περισσότερο χώρο, έχει την τάση να φτάνει σε κορεσμό ως προς τις κορυφές αλλά στις κοιλάδες βαίνει μειούμενη. Επίσης, αν παρατηρήσουμε τα μήκη κύματος των διαταραχών θα δούμε ότι καθώς το κύμα εξελίσσεται στο χρόνο όλο και περισσότερα κύματα κάνουν την εμφάνισή τους με μήκος κύματος που ξεκινάει από το κρίσιμο και βαίνει μειούμενο. Πρόκειται δηλαδή για μία σταδιακή και προϊούσα «μόλυνση» όλο και μεγαλύτερου μέρους του πεδίου με ασταθείς κυματομορφές με μήκος κύματος που ανήκει στο πακέτο των ασταθών κυμάτων για τις δεδομένες τιμές παραμέτρων. Αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό αν εφαρμόσουμε ανάλυση FT στο σχήμα της διεπιφάνειας όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.14. Η παραπάνω συμπεριφορά επαναλαμβάνεται όσο κοντά στην κρίσιμη περιοχή και αν ψάξουμε.

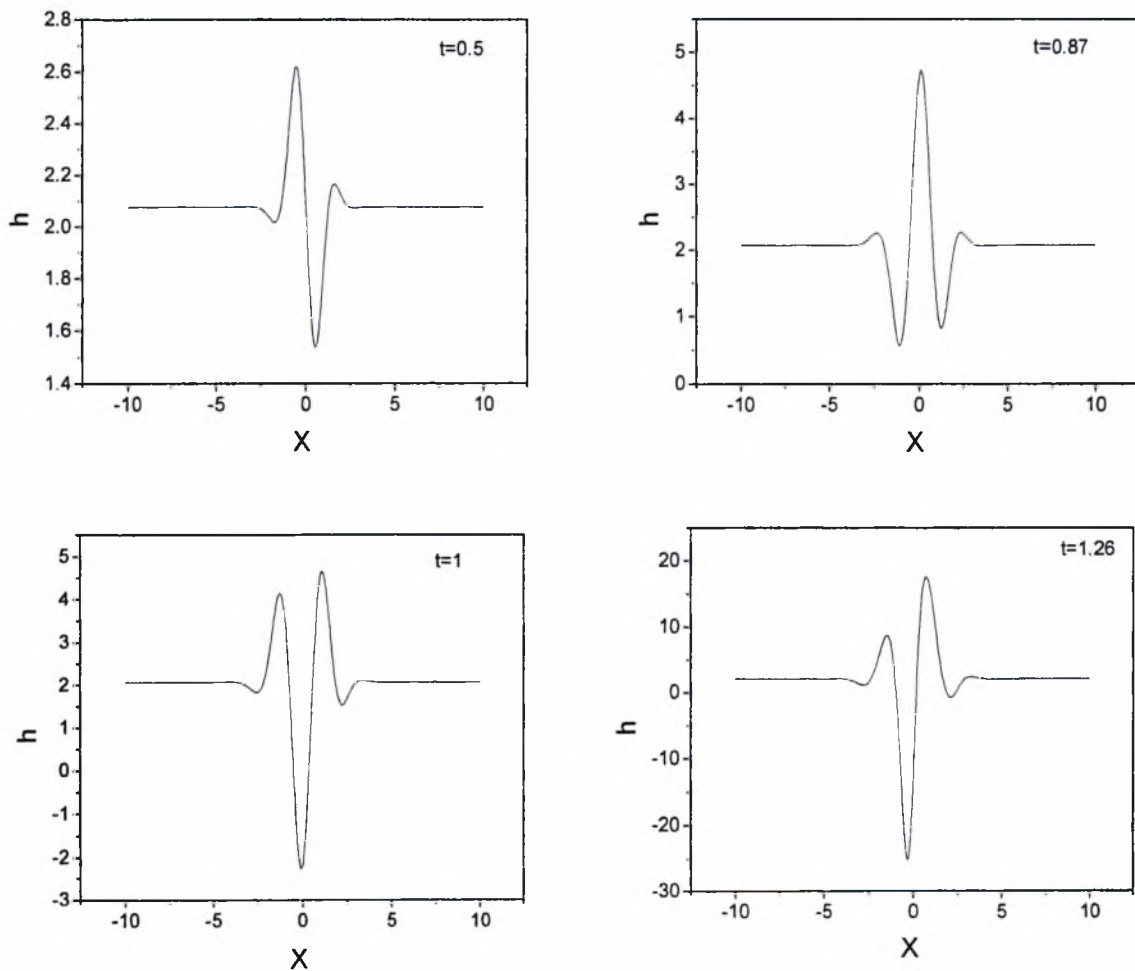




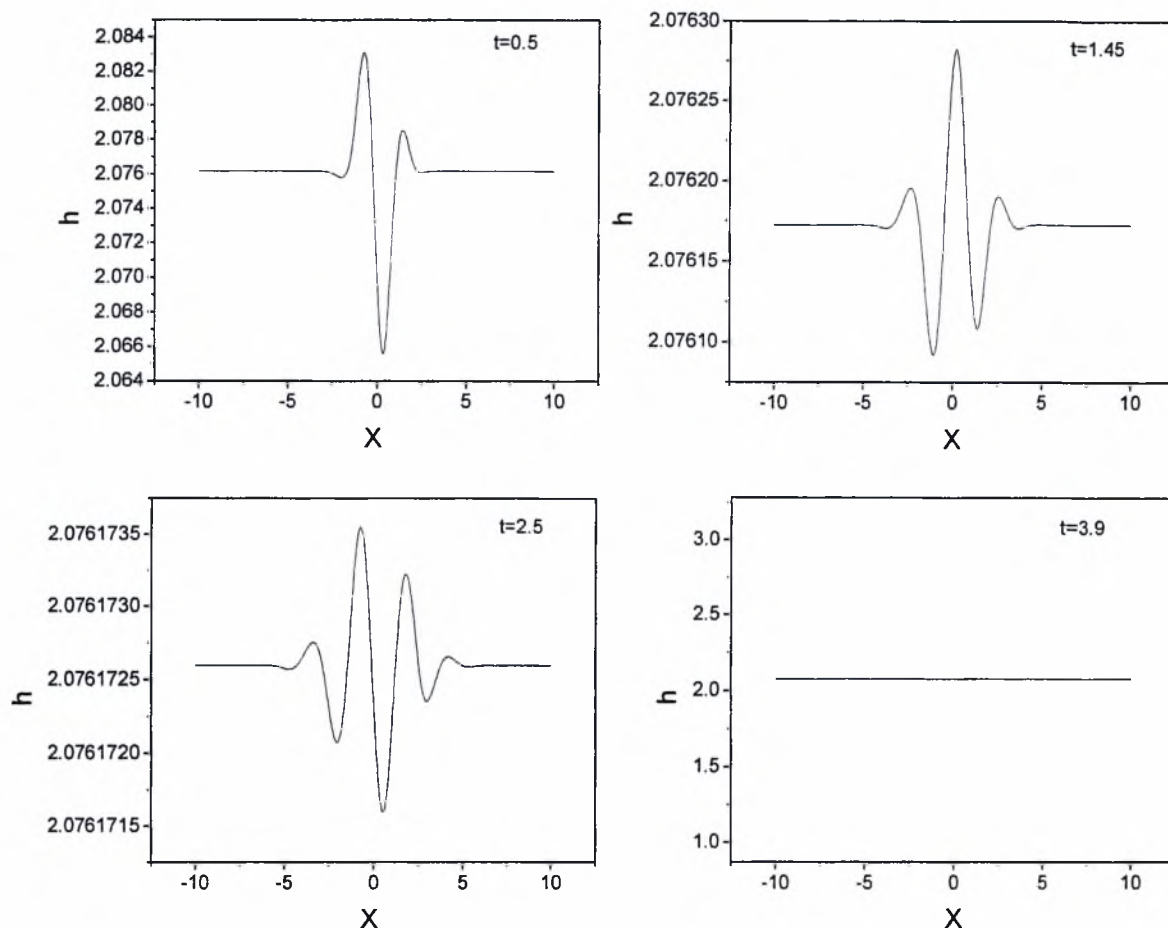
Σχήμα 5.14: Ανάλυση FFT στα τρία τελευταία στιγμιότυπα του σχήματος 5.13.

Η παραπάνω συμπεριφορά, αντιστοιχεί σε υποκρίσιμη (subcritical) αστάθεια. Μπορεί δε να φανεί και με επίλυση της εξίσωσης Schrödinger για τις τιμές των σταθερών που προκύπτουν για τις εν λόγω προσομοιώσεις και για έναν κυματαριθμό από αυτούς που σχηματίζουν το ασταθές κυματοπακέτο. Στα Σχήματα 5.15 και 5.16 δίνεται η μορφή της λύσης για την διεπιφάνεια που προκύπτει από την εξίσωση Schrödinger για τις περιοχές πάνω και κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας. Η συμπεριφορά στην υποκρίσιμη περιοχή, $S_2 < 0$ επαναλαμβάνεται μέχρι μία μέγιστη τιμή της αρχικής διαταραχής πάνω από την οποία έχουμε αύξηση και σχηματισμό μετωπικού κύματος. Η μέγιστη αυτή τιμή είναι αρκετά μεγάλη. Ανάλογα, στις δυναμικές προσομοιώσεις του προβλήματος ακόμα και για μεγάλα αρχικά πλάτη παρατηρείται απόσβεση. Δημιουργία μετώπων δεν παρατηρήθηκε στις δυναμικές προσομοιώσεις για τα πλάτη αρχικής διαταραχής που ελέγχθηκαν. Ας σημειωθεί ότι το όριο πλάτους διαταραχής που

προβλέπεται από την αριθμητική επίλυση της Schrödinger για αύξηση των κυματομορφών στην υποκρίσιμη περιοχή είναι πάρα πολύ μεγάλο. Έτσι δεν διερευνήθηκε η δυνατότητα εμφάνισης μετωπικών κυμάτων στην υποκρίσιμη περιοχή για πολύ μεγάλες αρχικές διαταραχές. Στην υπερκρίσιμη περιοχή η Schrödinger δίνει δημιουργία μίας κορυφής που μεγαλώνει συνεχώς χωρίς ένδειξη κορεσμού. Οι δυναμικές προσομοιώσεις στην υπερκρίσιμη περιοχή δίνουν σχηματισμό πολλών κορυφών που αναπτύσσονται αργά και συστηματικά με μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο εύρος των ασταθών κυματαριθμών. Τα παραπάνω ευρήματα υποδηλώνουν υποκρίσιμη αστάθεια.



Σχήμα 5.15: Μορφή λύσης Schrödinger για την περιοχή πάνω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας



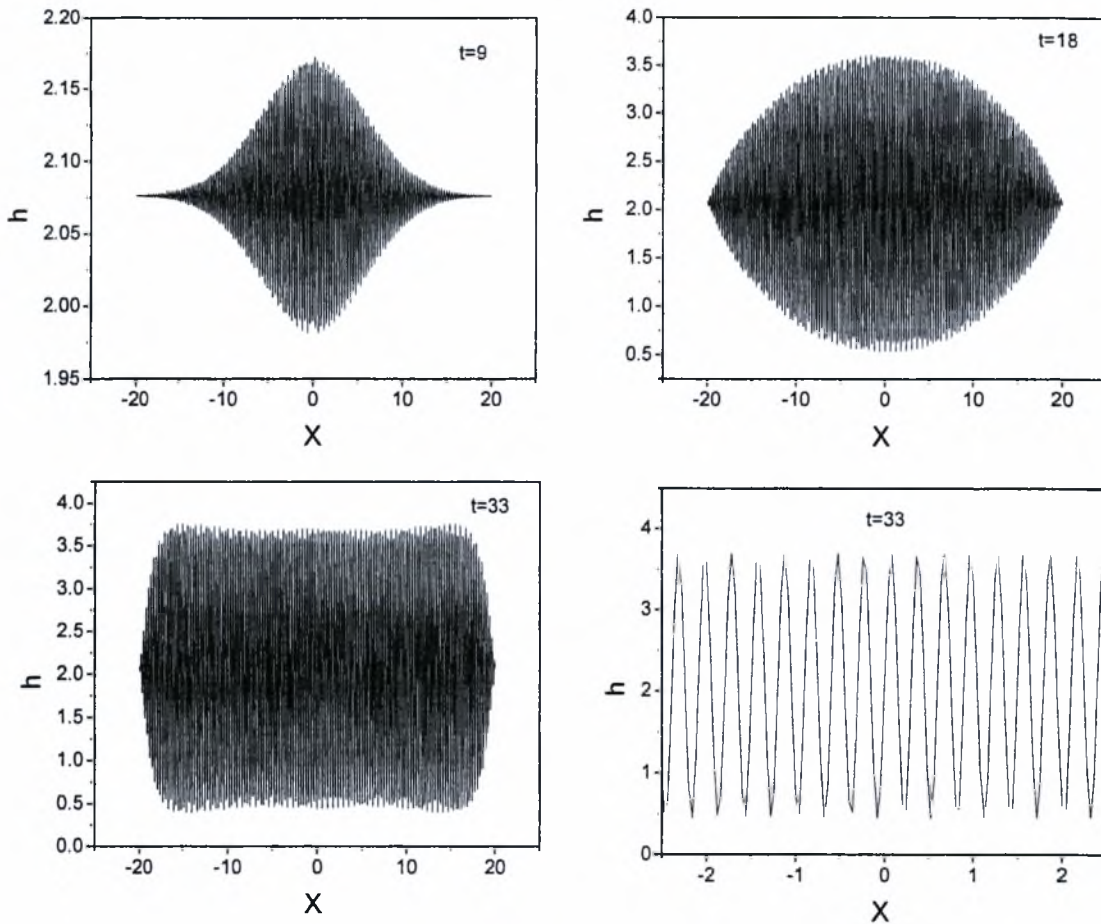
Σχήμα 5.16: Μορφή λύσης Schrödinger για την περιοχή κάτω από την κρίσιμη καμπύλη ευστάθειας

Όπως αναφέρθηκε εκτενώς στο τρίτο κεφάλαιο η εξίσωση Schrödinger (3.67), η οποία προκύπτει κατά την ασθενώς μη γραμμική ανάλυση, μπορεί να εφαρμοστεί εκτός από την κρίσιμη περιοχή και στην περιοχή κοντά στα άκρα του κυματοπακέτου όπου παρατηρούνται σχεδόν μηδενικοί ρυθμοί αύξησης. Έτσι, θεωρώντας το σύστημα αέρα de-icing με αρχικό πάχος υγρού $H_0=2.07617$ και λαμβάνοντας την περίπτωση που η διαταραχή επιβάλλεται στη θέση $x_0=0.8$ υπολογίζονται μέσω της ανάλυσης ευστάθειας τα χαρακτηριστικά που ισχύουν στα άκρα του κυματοπακέτου. Πιο συγκεκριμένα, το αριστερό άκρο του κυματοπακέτου κινείται με ταχύτητα $V_L=0.4$ χαρακτηρίζεται από τον κυματαριθμό $k_L=2.1-0.85i$ και την συχνότητα $\omega_v=2.5+0.038i$. Αντίστοιχα, το δεξί άκρο του κυματοπακέτου κινείται με ταχύτητα $V_R=2.75$ και αντιστοιχεί στον κυματαριθμό $k_R=1.926+0.57i$ και την συχνότητα $\omega_v=-1.93+0.0084i$. Η σχέση διασποράς στο όριο $k \rightarrow 0$ δίνει φασική ταχύτητα $C_p \approx 0.8$. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι η ακτίνα με το μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης, η οποία αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη κορυφή του γραμμικού κυματοπακέτου, κινείται με ταχύτητα $C_g = 2.2$ και αντιστοιχεί στον πραγματικό

κυματαριθμό $k=1.782$ και στην συχνότητα με το μεγαλύτερο φανταστικό μέρος $\omega_v = -0.883+0.883i$. Με βάση τις χαρακτηριστικές τιμές στα δύο άκρα του κυματοπακέτου υπολογίζονται οι συντελεστές S_1, S_2, S_3 της εξίσωσης Schrödinger και εξάγονται ορισμένα χρήσιμα συμπεράσματα. Έτσι, και στις δύο περιπτώσεις υπολογίζεται ότι ισχύει $S_{3,r} > 0$ γεγονός που χαρακτηρίζει την αστάθεια στις παραπάνω περιοχές ως supercritical. Κατά συνέπεια, σύμφωνα με τους Saarloos και Hohenberg (1997) για την υπό εξέταση ροή υπάρχουν μόνο γραμμικά και όχι μη γραμμικά fronts. Όσον αφορά στην ευστάθεια σε πλευρικές διαταραχές στις περιοχές κοντά στα άκρα διαπιστώνεται ότι ικανοποιείται το κριτήριο (3.89) στο αριστερό άκρο του κυματοπακέτου αλλά όχι στο δεξί άκρο. Παρατηρώντας το πώς αλλάζει το πραγματικό μέρος του κυματαριθμού από την μια άκρη του κυματοπακέτου ως την άλλη διαπιστώνεται ότι οι αλλαγές δεν είναι σημαντικές. Πράγματι, ξεκινάει από την τιμή 2.1 στο αριστερό άκρο για να μειωθεί ως την τιμή 1.78 στη μέγιστη κορυφή του κυματοπακέτου και τελικά να καταλήξει στην τιμή 1.92 στο δεξί άκρο. Επίλυση της εξίσωσης Schrödinger με τις τιμές που προκύπτουν από την ασθενώς μη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, πίνακας 5.2, επιβεβαιώνει την παραπάνω εικόνα, Σχήμα 5.17, και δίνει σχηματισμό μετωπικών κυμάτων στην υπερκρίσιμη περιοχή για μικρά πλάτη διαταραχών. Οι δυναμικές προσομοιώσεις δίνουν παρόμοιο ύψος της διεπιφάνειας όταν αρχίζει η δημιουργία του μετώπου πριν αυτή διακοπεί από την εμφάνιση solitons.

	Αριστερό άκρο	Δεξί άκρο
S_1	$-0.88+0.943i$	$-0.801-0.839i$
S_2	0.476	0.519
S_3	$0.918-0.59i$	$0.862-1.294i$

Πίνακας 5.2: Συντελεστές Schrödinger στα δυο άκρα του πιο ασταθούς κυματοπακέτου για το σύστημα αέρα-deicing, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

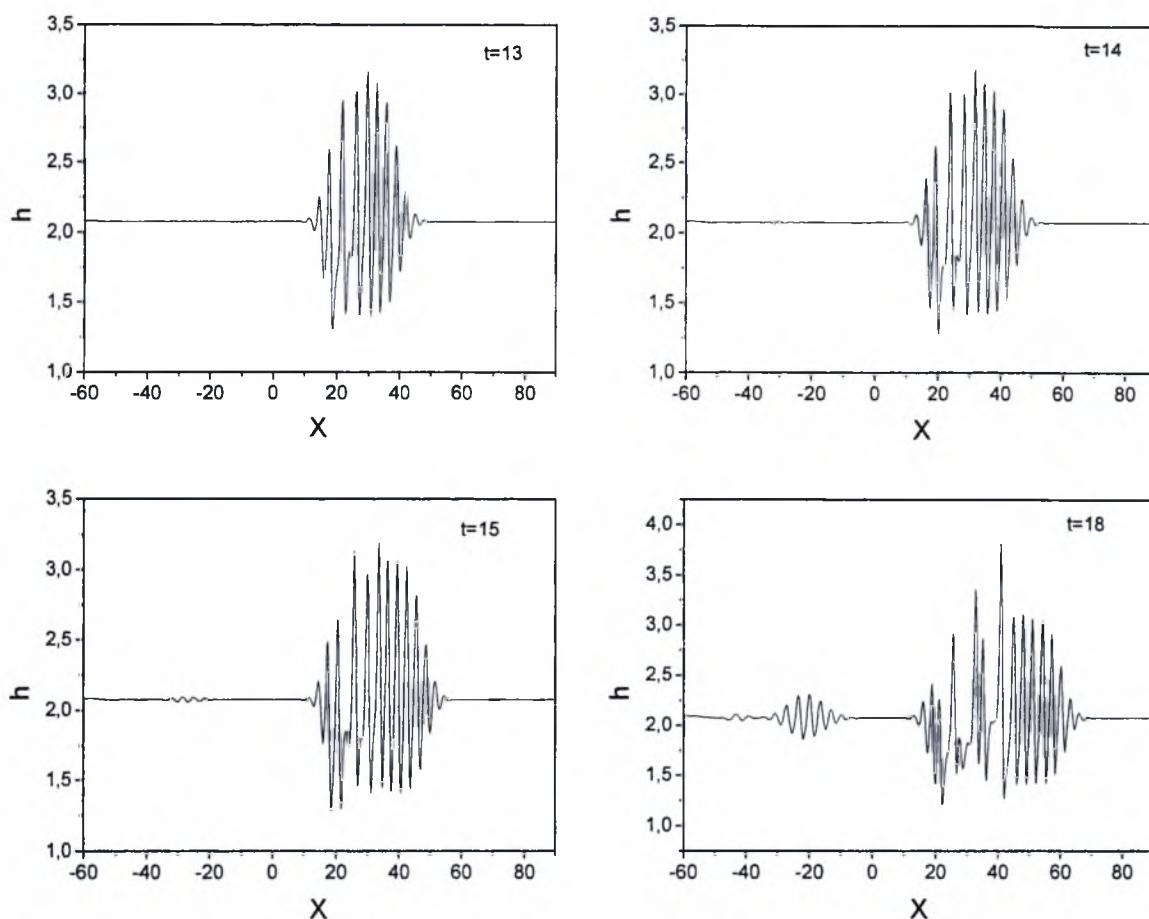


Σχήμα 5.17: Λύση Schrödinger τύπου front στην υπερκρίσιμη περιοχή για το σύστημα αέρα-deicing, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

5.4 Αποτελέσματα στη μη-γραμμική περιοχή

Στο τελευταίο στάδιο αυτού του κεφαλαίου επικεντρωνόμαστε σε προσομοιώσεις στη μη-γραμμική περιοχή η οποία παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον αφού αντιστοιχεί σε πραγματικές περιπτώσεις.

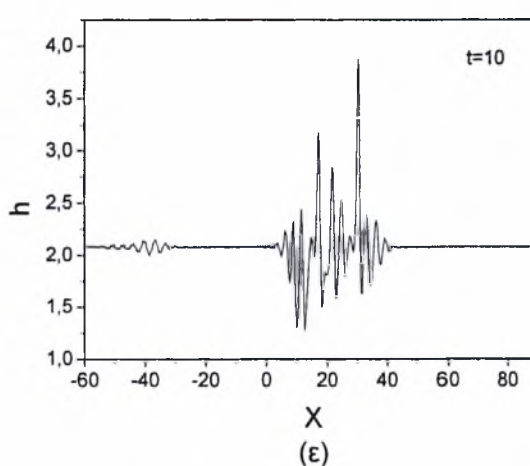
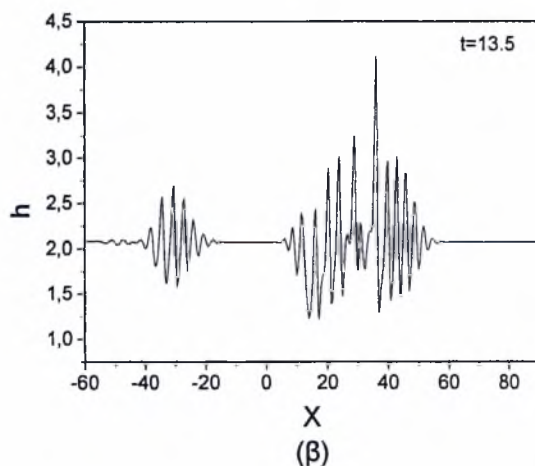
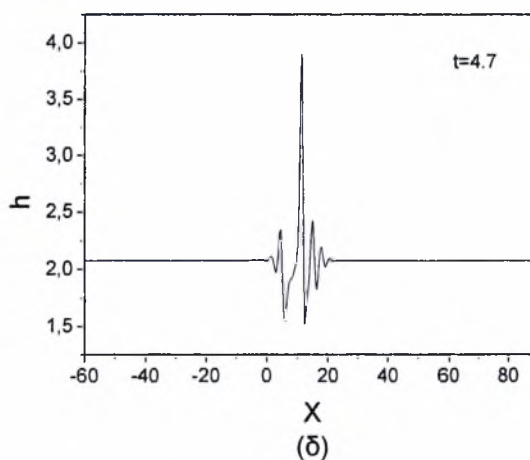
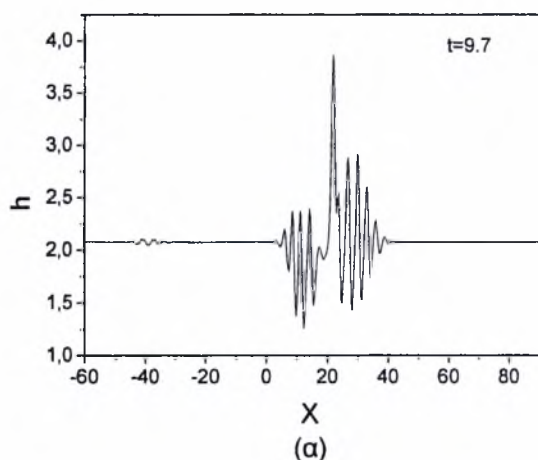
Έτσι, αν επιστρέψουμε στην προσομοίωση του συστήματος αέρα-de-icing που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων στη γραμμική περιοχή, και επιτρέψουμε στις γραμμικές διαταραχές να εξελιχθούν για μεγάλο χρονικό διάστημα ή εναλλακτικά επιβάλουμε διαταραχές μεγάλου πλάτους, τότε περνάμε από τη γραμμική στην μη-γραμμική περιοχή. Στο Σχήμα 5.18 δίνεται η εξέλιξη της γραμμικής διαταραχής, που επιβλήθηκε στην αρχή του κεφαλαίου ($d=0.001$, $W=0.4$) και αποτυπώνεται στο Σχήμα 5.2, σε ακόμη μεγαλύτερους χρόνους ώστε να μελετηθεί η μη-γραμμική συμπεριφορά της.

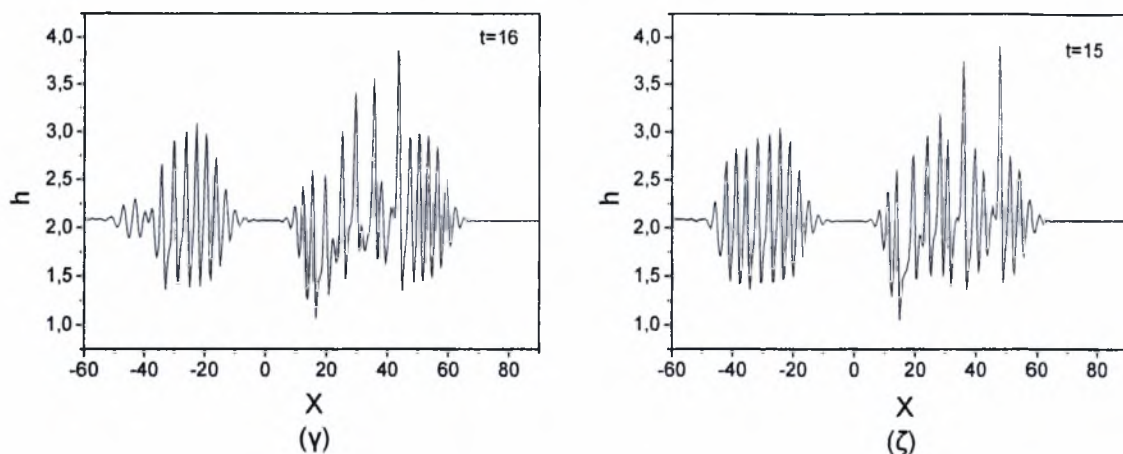


Σχήμα 5.18: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων στη μη-γραμμική περιοχή για το σύστημα αέρα-deicing και αρχικό ύψος 2.07617, $x_0=0.8$.

Παρατηρούμε ότι το κυματοπακέτο που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία καθώς εξελίσσεται στο χρόνο χάνει τη γνωστή μορφή που έχει στη γραμμική περιοχή. Αντίθετα, έχει την τάση να δημιουργήσει μια κυματομορφή που συνεχίζει να χαρακτηρίζεται από το μήκος κύματος που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία αλλά που οι κορυφές του και οι κοιλάδες του έχουν συγκεκριμένο πλάτος. Υπάρχει δηλαδή μια τάση κορεσμού και η διαμόρφωση που σχηματίζεται μοιάζει να έχει τη μορφή που προβλέπεται από τη θεωρία για τη μη-γραμμική εξέλιξη της συναγωγικής αστάθειας, όπως αυτή δίνεται στο Σχήμα 3.5(β) του τρίτου κεφαλαίου. Επίσης, παρατηρούμε ότι τείνει να αποκτήσει τη λύση μετωπικού κύματος που προβλέπεται από τη Schrödinger (Σχήμα 5.17). Παρόλα αυτά, στη συγκεκριμένη ροή τα κύματα που αποτελούν το κυματοπακέτο γίνονται ασταθή. Κοντά στην αριστερή πλευρά δημιουργούνται κύματα μεγάλου μήκους με αποτέλεσμα το κυματοπακέτο να αποσυντίθεται για να σχηματίσει σταδιακά συστοιχία κυμάτων που χαρακτηρίζονται από κορυφές συγκεκριμένου ύψους. Μάλιστα, έχει προσδιοριστεί ότι το μέγιστο ύψος που αποκτούν οι κορυφές είναι περίπου

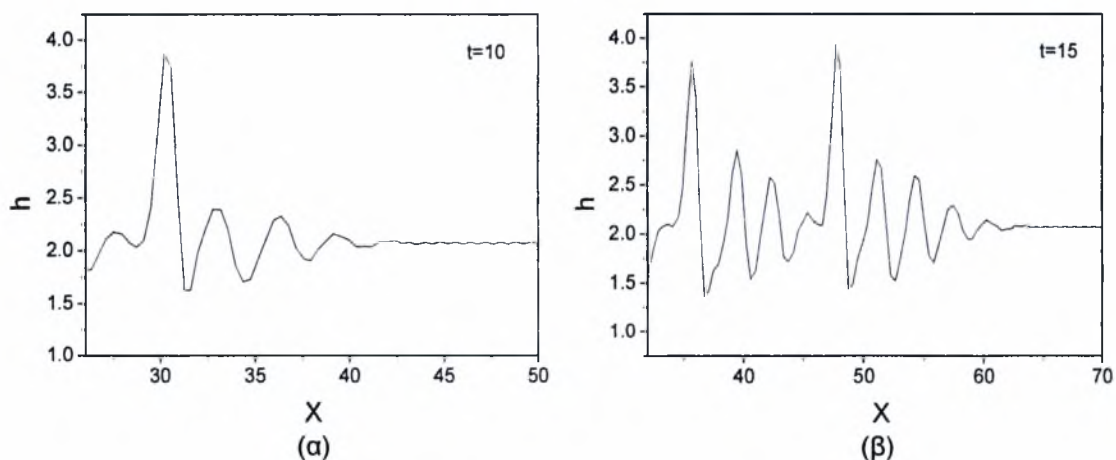
διπλάσιο από το αρχικό ύψος της διεπιφάνειας. Επίσης, διαπιστώθηκε ότι η παραπάνω συμπεριφορά της ροής δεν εξαρτάται από το μέγεθος της αρχικής διαταραχής η οποία επηρεάζει μόνο τον χρόνο στον οποίο το κυματοπακέτο αποκτά το μέγιστο ύψος κορεσμού. Στο Σχήμα 5.19 δίνεται η εξέλιξη της διεπιφάνειας για δυο διαφορετικές διαταραχές με πλάτος $d=0.2$ και $d=0.4$. Είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική διαταραχή τόσο πιο γρήγορα το κυματοπακέτο αποσυντίθεται και σχηματίζει κορυφές διπλάσιου ύψους. Οι κορυφές που σχηματίζονται μεταφέρονται με σταθερή ταχύτητα ($u_g = 3.75$) μεγαλύτερη από την ταχύτητα του γραμμικού κυματοπακέτου ($c_g = 2.2$), έχουν μεγαλύτερο μήκος κύματος και ο ρυθμός με τον οποίο αναπτύσσονται δείχνει ότι τελικά αυτές είναι που θα κυριαρχήσουν στην ροή. Μάλιστα, αν η αρχική διαταραχή είναι αρκετά μεγάλη δεν προλαβαίνει να εξελιχθεί καθόλου το αρχικό κυματοπακέτο αλλά αντίθετα παρατηρείται από την αρχή η διαμόρφωση με τις κορυφές.





Σχήμα 5.19: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων (α), (β), (γ) για αρχική διαταραχή με $d=0.2$ και (δ), (ε), (ζ) με $d=0.4$ για το σύστημα αέρα-deicing και αρχικό ύψος 2.07617 , $x_0=0.8$.

Όπως φαίνεται από το σχήμα της διεπιφάνειας γύρω από τις κορυφές, μπροστά τους υπάρχει μια περιοχή που χαρακτηρίζεται από μικρότερα πλάτη και μήκη κύματος. Η ακριβής μορφή της διεπιφάνειας στην περιοχή της απότομης κορυφής φαίνεται καλύτερα στο Σχήμα 5.20. Η διαμόρφωση αυτή θυμίζει τα κύματα τύπου soliton που αναπτύσσονται όταν μεγάλα μήκη κύματος κυριαρχούν σε κύματα νερού.

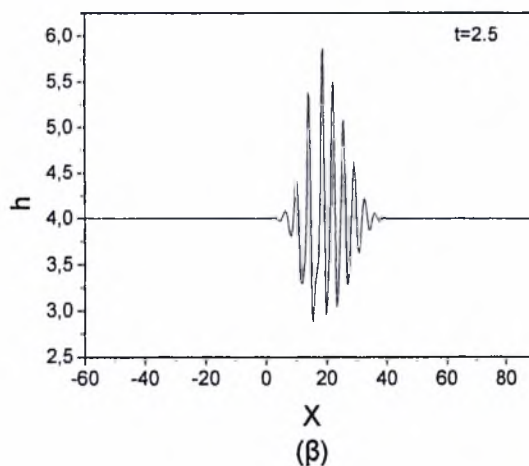
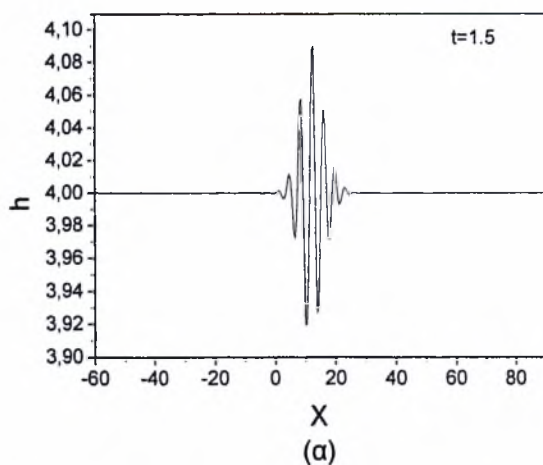


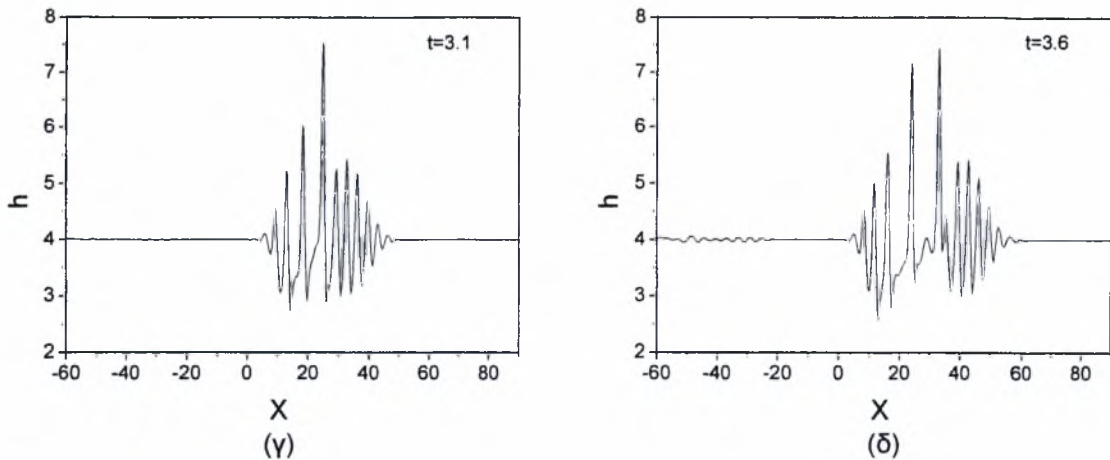
Σχήμα 5.20: Μορφή της διεπιφάνειας στην περιοχή της απότομης κορυφής για το σύστημα αέρα-deicing με αρχικό ύψος 2.07617 , $x_0=0.8$ και για αρχική διαταραχή με $d=0.4$.

Ένα άλλο στοιχείο που είναι σημαντικό να σχολιασθεί αφορά στο μικρό κύμα που βρίσκεται αριστερά του κύριου κυματοπακέτου στα διαγράμματα των Σχημάτων 5.18 και

5.19. Το κύμα αυτό δεν σχετίζεται με την αρχική διαταραχή που επιβάλλεται αλλά είναι αποτέλεσμα αριθμητικής διαταραχής που προέρχεται από το αριστερό άκρο του πεδίου προσομοίωσης. Η αριθμητική διαταραχή προκύπτει επειδή είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε ένα πεπερασμένο πεδίο προσομοίωσης, ενώ οι εξισώσεις ροής που επιλύονται αφορούν όλο το πεδίο ροής. Η διαταραχή αυτή είναι πολύ μικρή (τάξεως 10^{-6}) και μάλιστα περιοδική στο χρόνο, με περίοδο το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείται. Το μικρό κύμα που παρατηρούμε είναι αυτό που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία ως το πιο ασταθές και τα χαρακτηριστικά του είναι ίδια με αυτά που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της επιβολής γραμμικών διαταραχών στο σύστημα αέρα-de-icing και δίνονται στον πίνακα 5.1. Το κύμα αυτό είναι αδύνατο να μην εμφανιστεί και για να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα επηρεάσει την εξέλιξη της κύριας διαταραχής που επιβάλλεται στο σημείο $X=0$ θα πρέπει το αριστερό άκρο της περιοχής επίλυσης να είναι αρκετά μακριά. Το γεγονός ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των δυο κυματοπακέτων επιβεβαιώθηκε τόσο με πύκνωση πλέγματος όσο και με την μετακίνηση του αριστερού άκρου προσομοίωσης ακόμη πιο αριστερά. Σε κάθε περίπτωση η συμπεριφορά του κύριου κυματοπακέτου δεν μεταβλήθηκε.

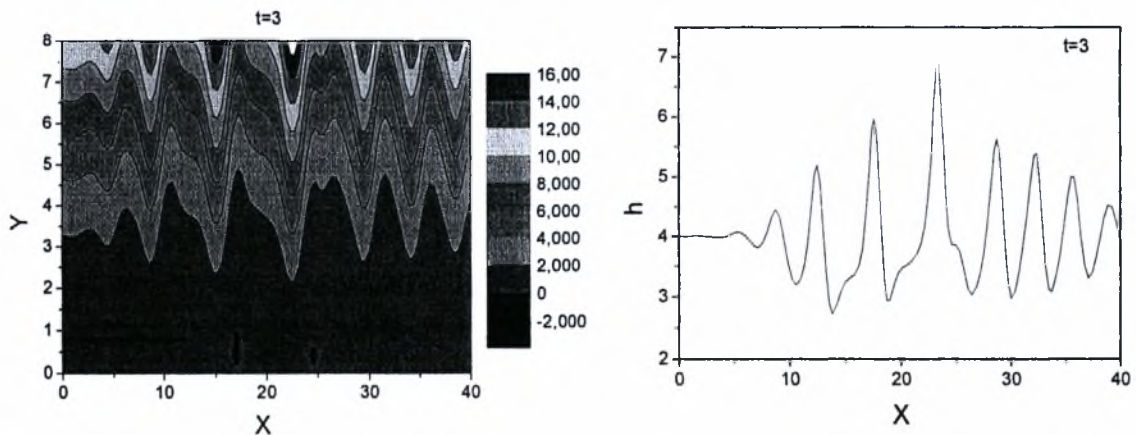
Στη συνέχεια, για να επιβεβαιωθεί το εύρημα ότι το ύψος κορεσμού είναι περίπου ίσο με το διπλάσιο του αρχικού ύψους της διεπιφάνειας πραγματοποιούμε την προσομοίωση του παραπάνω συστήματος για διαφορετικό αρχικό ύψος. Επιλέγεται αρχικό ύψος $H_0=4$ αντί για $H_0=2.07617$, επιβάλλεται μια διαταραχή με $d=0.001$ στη θέση $x=0.8$ και στο Σχήμα 5.21 καταγράφεται η εξέλιξη της διεπιφάνειας. Από το σχήμα γίνεται πάλι φανερό ότι το ύψος κορεσμού που αποκτά το κύμα είναι περίπου το διπλάσιο του αρχικού. Επίσης, παρατηρούμε ότι καθώς εξελίσσεται το φαινόμενο χρονικά υπάρχει η τάση πίσω από το αρχική κορυφή να δημιουργηθούν και άλλες κορυφές που θα αποκτήσουν το μέγιστο ύψος.

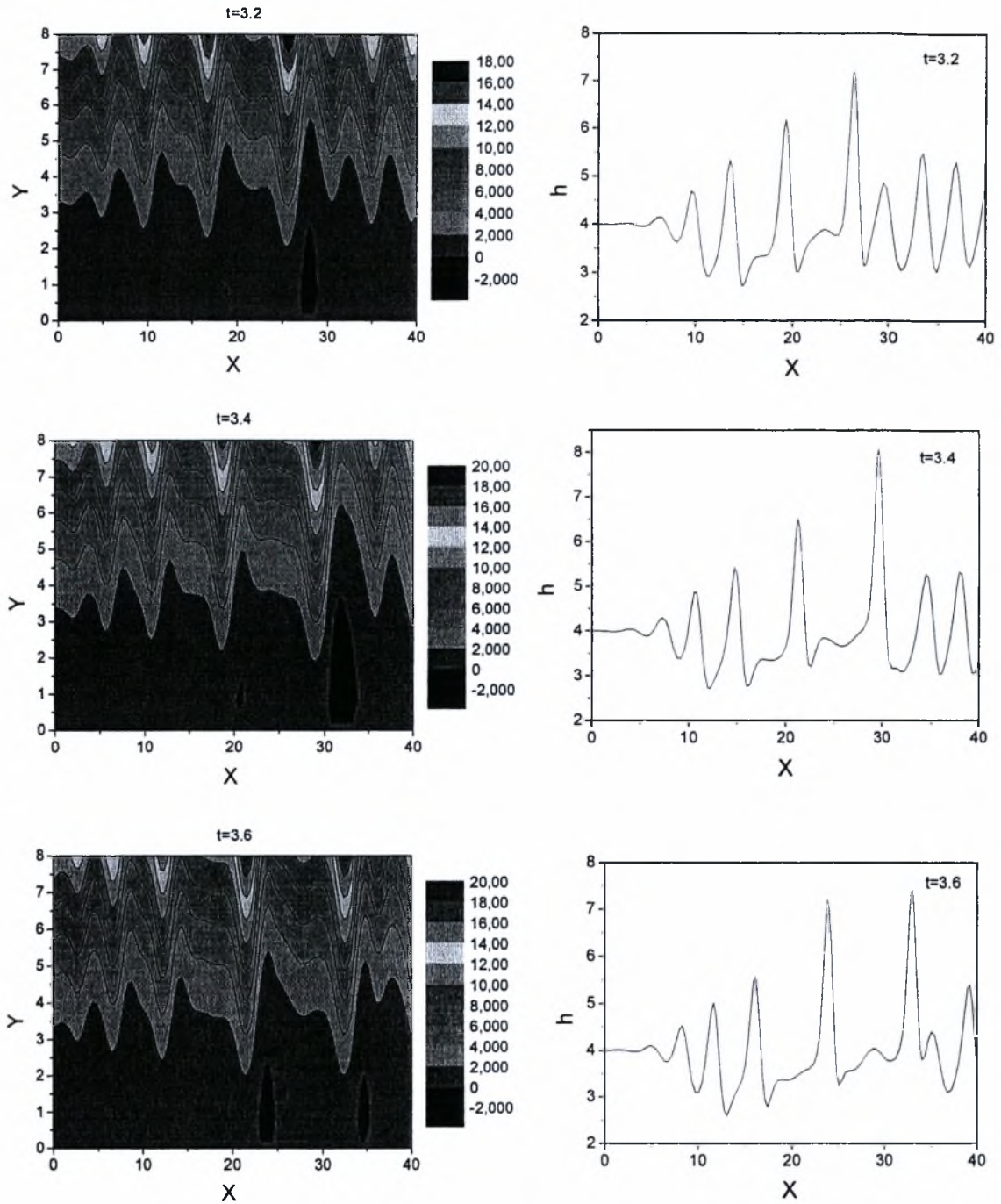




Σχήμα 5.21: Μη-γραμμική χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-deicing για διαταραχή με $d=0.001$ και αρχικό ύψος 4, $x_0=0.8$.

Αν εξετάσουμε την ροϊκή συνάρτηση που αντιστοιχεί στη ροή που περιγράφεται από τα διαγράμματα του Σχήματος 5.21 παρατηρούμε ότι μπροστά από την κορυφή μέγιστου ύψους σχηματίζεται μια περιοχή ήπιας ανακυκλοφορίας. Η εξέλιξη της ανακυκλοφορίας δίνεται στο Σχήμα 5.22 όπου παρουσιάζεται η ροϊκή συνάρτηση για διάφορα στιγμιότυπα καθώς και το σχήμα της διεπιφάνειας στο αντίστοιχο στιγμιότυπο. Υπενθυμίζεται ότι η διεπιφάνεια αντιστοιχεί σε $\bar{Y}=0$. Είναι φανερό ότι καθώς η κορυφή του κύματος μετακινείται προς τα δεξιά η ανακυκλοφορία μετατοπίζεται και αυτή. Παρατηρούμε ότι η ένταση της δεν παραμένει σταθερή αλλά η δίνη που δημιουργείται εμφανίζεται, εξαφανίζεται και ξαναεμφανίζεται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Δηλαδή, έχουμε την περιοδική εμφάνιση περιοχών ήπιας ανακυκλοφορίας. Το φαινόμενο της ανακυκλοφορίας παρατηρείται όχι μόνο στην πρώτη κορυφή, αλλά μπροστά από κάθε κορυφή μέγιστου ύψους.

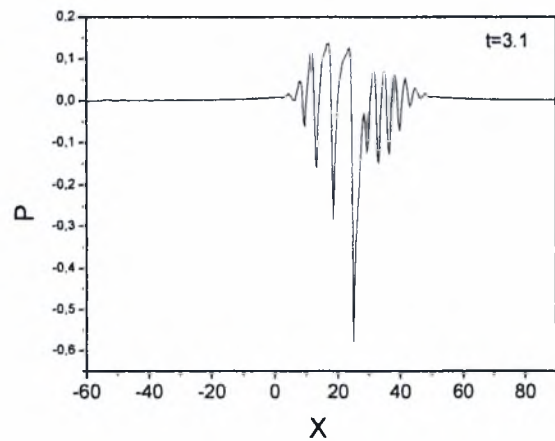
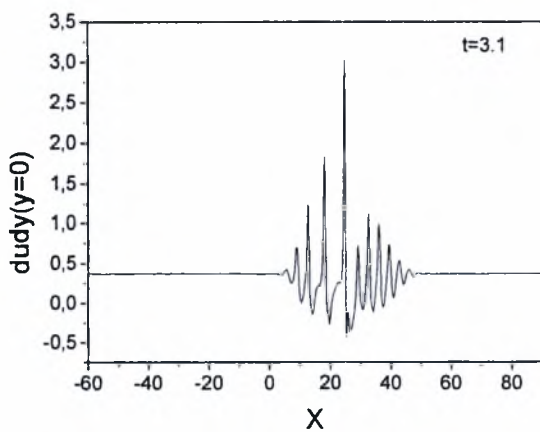
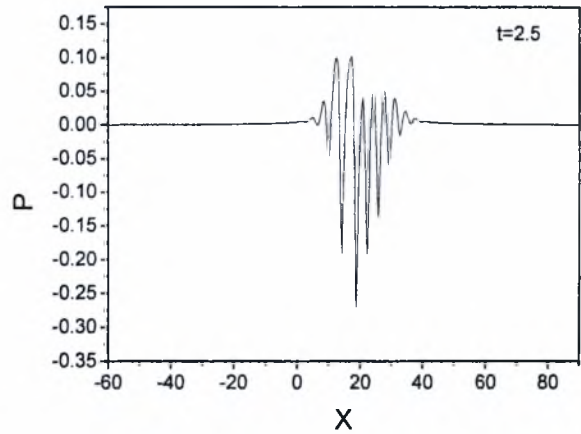
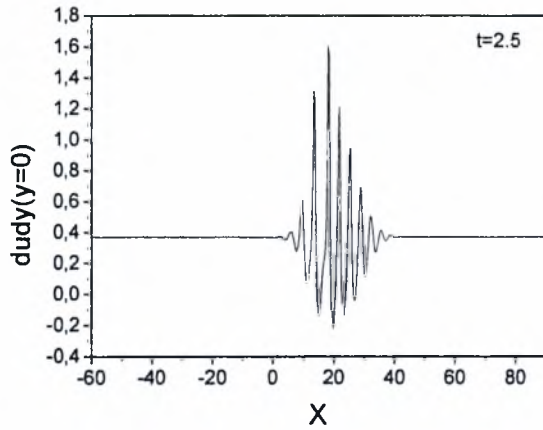
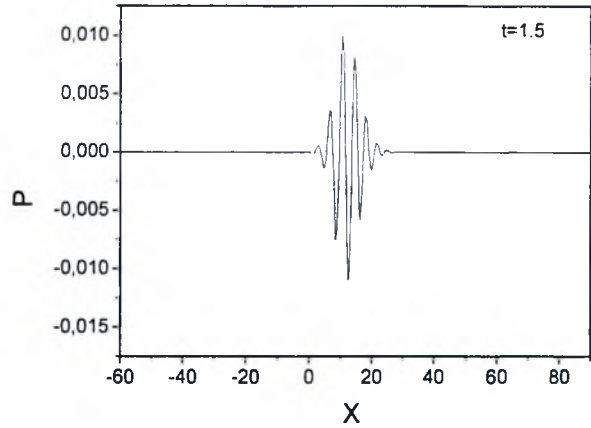
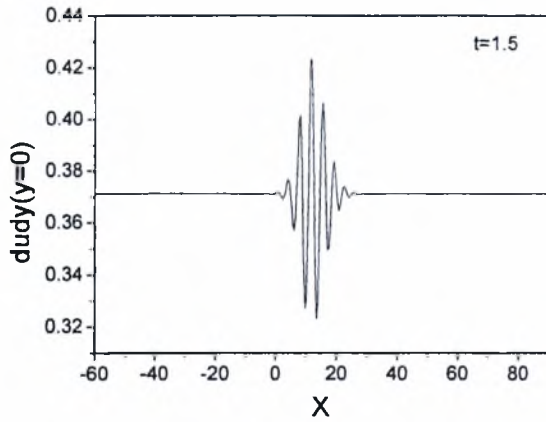


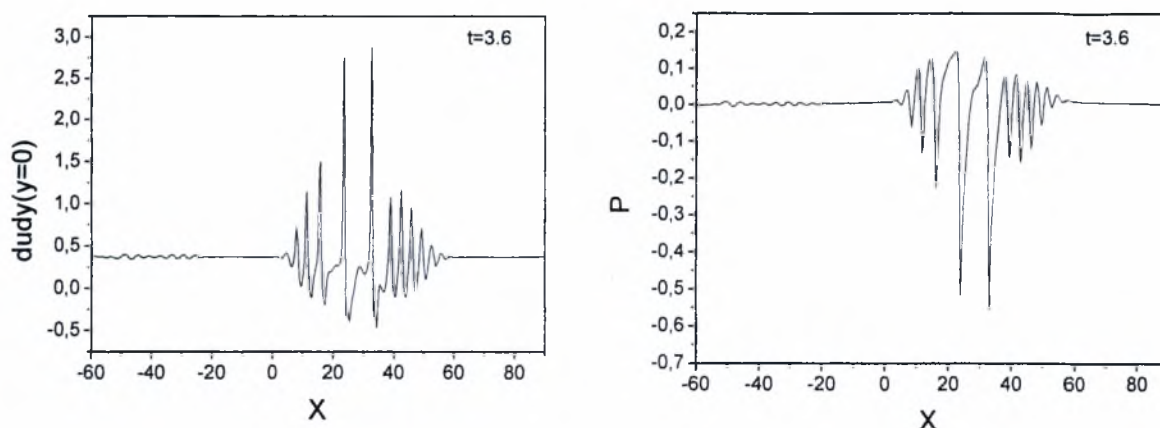


Σχήμα 5.22: Εξέλιξη ανακυκλοφορίας μπροστά από τις κορυφές μέγιστου ύψους.

Τέλος, ιδιαίτερη σημασία έχει να αποτυπωθεί η εξέλιξη της πίεσης στο συνοριακό στρώμα καθώς και της διάτμησης που ασκείται στην στερεή επιφάνεια. Στο Σχήμα 5.23 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα των δυο αυτών μεταβλητών για την περίπτωση του συστήματος αέρα-deicing όταν εφαρμόζεται αρχική διαταραχή με πλάτος $d=0.001$ στη θέση $x=0.8$ διεπιφάνειας αρχικού ύψους $H_0=4$. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι

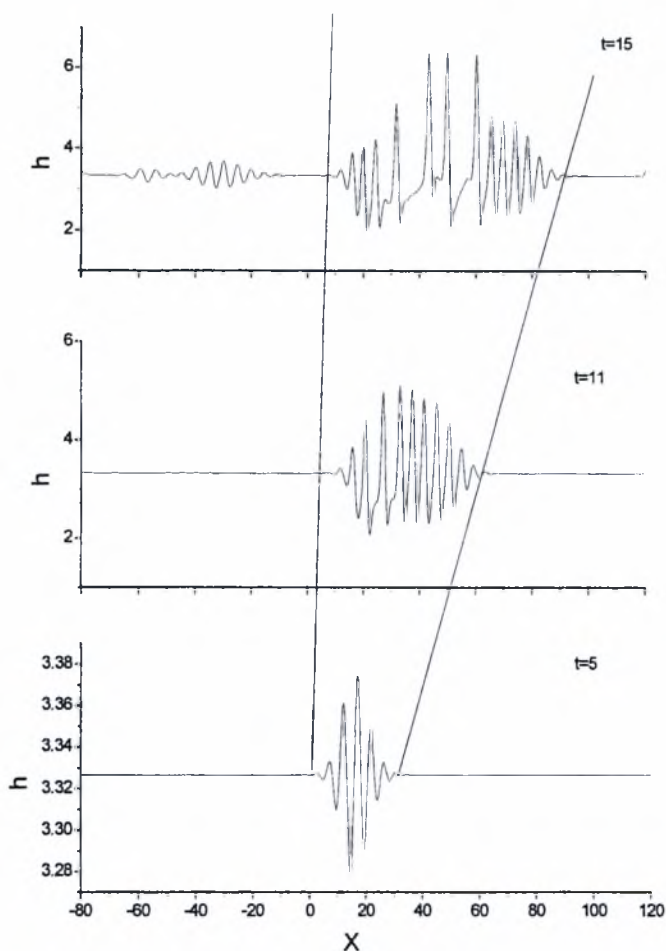
σε περίπτωση που δεν υπήρχε ο υγρός υμένας η διάτμηση που θα ασκούταν από το συνοριακό στρώμα στην στερεή επιφάνεια θα είχε σταθερή τιμή ίση με 0.3711.





Σχήμα 5.23: Χωροχρονική εξέλιξη πίεσης στο συνοριακό στρώμα και διάτμησης που ασκείται στην στερεή επιφάνεια για το σύστημα αέρα-deicing, $d=0.001$, $H_0=4$, $x_0=0.8$.

Στο επόμενο στάδιο εξετάζεται η περίπτωση της ροής αέρα πάνω από λεπτό υμένα νερού, αν και ο λόγος ιξωδών για το σύστημα αυτό δεν μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρός ($M \approx 0.3$). Η προσομοίωση γίνεται για δυο λόγους: αφενός θέλουμε να αποδείξουμε ότι η παραπάνω μη-γραμμική συμπεριφορά εμφανίζεται συστηματικά όταν αγνοούνται οι αδρανειακοί όροι, και αφετέρου για να έχουμε κάποια αποτελέσματα που θα μας βοηθήσουν να απομονώσουμε, στο επόμενο κεφάλαιο, την επίδραση που έχει η αδράνεια του υγρού στην εξέλιξη του φαινομένου. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται είναι: $\mu/\mu_w = 0.018$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{Fr} = 92592.592$, $\overline{We} = 46.296$. Στην προσομοίωση αυτή χρησιμοποιούμε χωρικό βήμα 0.2 στην x -κατεύθυνση και 0.4 στην y -κατεύθυνση, ενώ το χρονικό βήμα τίθεται ίσο με 0.001. Θεωρούμε ότι το αρχικό ύψος της διεπιφάνειας είναι $H_0=3.32671$, επιβάλλεται μια γραμμική διαταραχή ($d=0.001$ και $W=4$) στη θέση $x=1.5$ και καταγράφεται η εξέλιξη της διεπιφάνειας. Στο Σχήμα 5.24 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα της διεπιφάνειας. Όσον αφορά στη γραμμική εξέλιξη της διαταραχής, στον πίνακα 5.3 δίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα καθώς και οι προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας. Από τις τιμές του πίνακα γίνεται εμφανές ότι υπάρχει συμφωνία μεταξύ του μοντέλου και της θεωρίας για τα χαρακτηριστικά του πιο ασταθούς κυματοπακέτου. Αν επιτρέψουμε στην γραμμική διαταραχή να εξελιχθεί αρκετά στο χρόνο τότε παρατηρείται η ίδια μη-γραμμική συμπεριφορά που περιγράφηκε αναλυτικά προηγουμένως για το σύστημα αέρα-deicing.

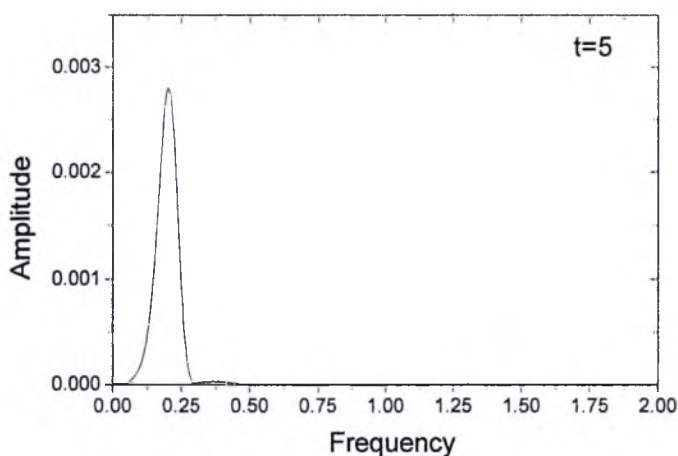


Σχήμα 5.24: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-νερού για γραμμική διαταραχή ($d=0.001$) και αρχικό ύψος 3.32671 , $x_0=1.5$.

	Γραμμική θεωρία (επικίνδυνο κύμα)	Γραμμική θεωρία (απόλυτη αστάθεια)	Αριθμητικά αποτελέσματα
Μήκος κύματος	4.8	4.17	4.87
Περίοδος	2	1.9	2.05
Ταχύτητα	3	0	3.1

Πίνακας 5.3: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-νερού, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.

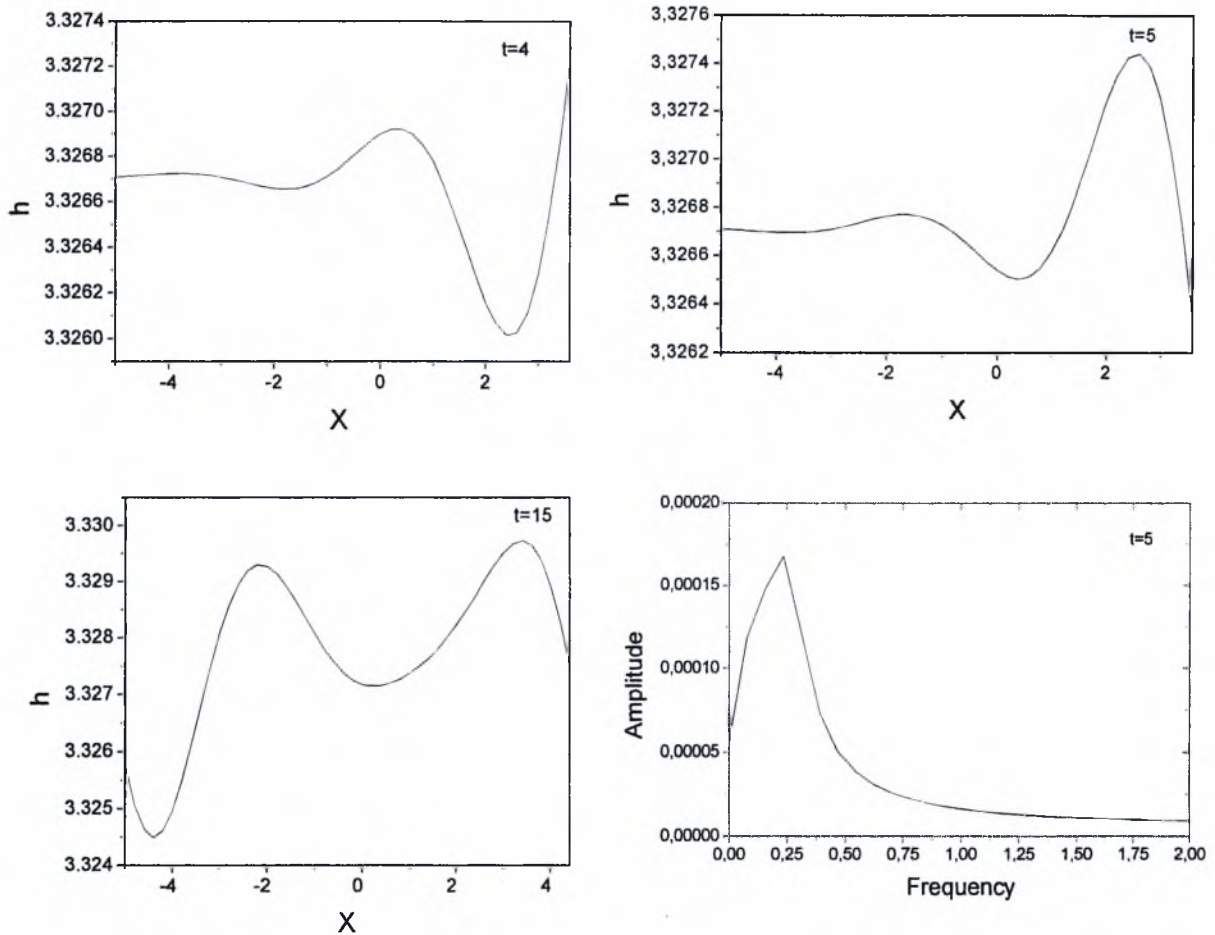
Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι για τις συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων η γραμμική θεωρία προβλέπει απόλυτη αστάθεια με χαρακτηριστικά που δίνονται στο πίνακα 5.3 και με ρυθμό ανάπτυξης $\omega_{i0} = 0.077$. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι το ασταθές κυματοπακέτο δεν θα απομακρυνθεί από τη θέση $X=0$ και αναμένουμε στη περιοχή αυτή να αναπτυχθεί αστάθεια η οποία θα αυξάνεται τοπικά και δεν θα απομακρύνεται. Αν σε οποιαδήποτε στιγμή, εφόσον το κυματοπακέτο συμπεριφέρεται ακόμη γραμμικά, εφαρμόσουμε ανάλυση FT σε όλο το πεδίο προσομοίωσης τότε όπως είναι αναμενόμενο παίρνουμε το πιο ασταθές μήκος κύματος αφού αυτό έχει το μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης. Πράγματι, στο Σχήμα 5.25, όπου δίνεται η ανάλυση FT που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t=5$, η μέγιστη κορυφή εμφανίζεται για την τιμή 0.205 και επομένως το μήκος κύματος που προκύπτει ισούται με 4.87.



Σχήμα 5.25: Ανάλυση FT σε όλο το πεδίο προσομοίωσης για τον υπολογισμό του μήκους κύματος.

Με σκοπό να διαπιστωθεί αν το μήκος κύματος της απόλυτης αστάθειας εμφανίζεται έστω και για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα επικεντρωνόμαστε στην περιοχή γύρω από τη θέση $X=0$ και όχι σε όλο το πεδίο προσομοίωσης. Στο Σχήμα 5.26 δίνονται το σχήμα της διεπιφάνειας στην περιοχή αυτή καθώς και η ανάλυση FT του σχήματος. Το μέγιστο του μετασχηματισμού Fourier αντιστοιχεί στη τιμή 0.23438 και επομένως το μήκος κύματος στην περιοχή ισούται με 4.26. Η παραπάνω τιμή είναι πολύ κοντά στο μήκος κύματος που δίνεται στον πίνακα 5.3 για την απόλυτη αστάθεια. Το συμπέρασμα ότι το συγκεκριμένο μήκος κύματος αφορά την απόλυτη αστάθεια ενισχύεται από το γεγονός ότι το αριστερό άκρο της διαταραχής βρίσκεται κοντά στην θέση $X=0$ για όλο το χρονικό διάστημα της προσομοίωσης κάτι που συνεπάγεται μηδενική ταχύτητα διάδοσης. Στο

ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε στο Σχήμα 5.24, όπου δίνεται το σχήμα της διεπιφάνειας σε όλο το πεδίο, την ευθεία που ορίζει την μεταφορά του αριστερού άκρο του κυματοπακέτου. Με τον τρόπο αυτό καταφέρνουμε να αποτυπώσουμε έστω και τοπικά τα χαρακτηριστικά της απόλυτης αστάθειας. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η απόλυτη αστάθεια δεν είναι τόσο σημαντική στην εξέλιξη της ροής η οποία κυριαρχείται τελικά, όπως θα δούμε παρακάτω, από την μη-γραμμική εξέλιξη και αλληλεπίδραση των ασταθών κυμάτων του κυματοπακέτου..



Σχήμα 5.26: Στιγμιότυπα διεπιφάνειας αέρα-νερού και ανάλυση FT γύρω από την περιοχή $X=0$ για το τον υπολογισμό του μήκους κύματος της απόλυτης αστάθειας.

Στο τελευταίο στάδιο αυτού του κεφαλαίου γίνεται προσπάθεια να χαρακτηριστεί η φύση των κυματώσεων μεγάλου μήκους με τις απότομες κορυφές που παρατηρήθηκαν αριθμητικά καθώς και να διευκρινιστεί, αν είναι δυνατόν, ο μηχανισμός μέσω του οποίου αναπτύσσονται. Η πρώτη σκέψη ήταν να διερευνηθεί το κατά πόσο οι κορυφές που σχηματίζονται στην μη-γραμμική περιοχή μπορούν να χαρακτηριστούν ως οδεύοντα κύματα. Για το σκοπό αυτό επιλύθηκαν αριθμητικά οι εξισώσεις (2.39) έως (2.46).

Πρέπει να αναφερθεί ότι υπάρχει δυσκολία στην αναζήτηση οδευόντων κυμάτων στη μη-γραμμική περιοχή επειδή δεν είναι εύκολο να αναπτυχθεί μια αναλυτική προσέγγιση και κατά συνέπεια δεν είναι ξεκάθαρο ποιες είναι οι αρχικές συνθήκες που πρέπει να χρησιμοποιηθούν. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκαν ως αρχικές συνθήκες τόσο οι προβλέψεις της γραμμικής και της ασθενώς μη γραμμικής θεωρίας όσο και τα αποτελέσματα των δυναμικών προσομοιώσεων για μη γραμμικές διαταραχές. Σε κάθε περίπτωση η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (2.39) έως (2.46) απέτυχε στο να δώσει λύση.

Κατά την μελέτη των διδιάστατων ασταθειών που παρατηρούνται σε κύματα βαρύτητας υγρού υμένα, οι Djordjevic και Redekopp (1976) παρατήρησαν την εμφάνιση κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος (resonance). Οι παραπάνω ερευνητές επέκτειναν την ανάλυση των Davey και Stewartson (1974) ώστε να συμπεριληφθούν τριχοειδή φαινόμενα. Έτσι απέδειξαν ότι όταν η ταχύτητα ομάδας ενός κύματος από αυτά που εμπεριέχονται στο οδούν κυματοπακέτο συμπίπτει με την φασική ταχύτητα κύματος στο όριο $k \rightarrow 0$, τότε τα δύο κύματα συντονίζονται και αναπτύσσονται κυματώσεις μεγάλου μήκους. Η εμφάνιση του μεγάλου μήκους κύματος οφείλεται στην μη-γραμμική εξέλιξη του μικρότερου μήκους κύματος. Αυτό γίνεται κατανοητό αν θεωρήσουμε ότι το πρόβλημα τάξεως ε χαρακτηρίζεται από τον κυματαριθμό k , οπότε στο πρόβλημα τάξεως ε^2 εμφανίζονται οι κυματαριθμοί $k_1 = 2k$ και $k_2 = 0$ από τους οποίους ο τελευταίος αντιστοιχεί σε κύμα μεγάλου μήκους. Με άλλα λόγια το κύμα με μεγάλο μήκος κύματος είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης του αρχικού κύματος με τον εαυτό του σε μεγάλους χρόνους. Από τη στιγμή που εμφανιστεί το μεγάλο μήκος κύματος αντλεί ενέργεια από το κύμα μικρού μήκους.

Πιστεύεται ότι ανάλογος πρέπει να είναι ο μηχανισμός δημιουργίας των δομών μεγάλου μήκους που παρατηρούνται στην παρούσα μελέτη. Η πιθανότητα αυτή ενισχύεται από το ότι, όπως αποδείχθηκε από την ασθενώς μη γραμμική ανάλυση, τα μήκη κύματος κοντά στο αριστερό άκρο του ασταθούς κυματοπακέτου είναι σε μεγάλους χρόνους ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Παράλληλα οι ταχύτητες ομάδας στα δύο άκρα του κυματοπακέτου ($V_L=0.4$, $V_R=2.75$) περικλείουν την φασική ταχύτητα ($V=0.77$) όπως προβλέπεται από την σχέση διασποράς για $k \rightarrow 0$ και μάλιστα η φασική ταχύτητα βρίσκεται κοντά στην περιοχή του αριστερού άκρου. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι όταν δοθεί ο απαραίτητος χρόνος κάποιο από τα κύματα του ασταθούς κυματοπακέτου θα συντονιστεί με το κύμα μεγάλου μήκους, ώστε το τελευταίο να εξελιχθεί με τρόπο ανάλογο με αυτόν που παρατηρείται στα κύματα βαρύτητας. Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι

πραιτέρω διαμόρφωση του κύματος αυτού περιγράφεται από την Kuramoto Shivashinsky (Craik, 1985) η οποία δίνει λύσεις της μορφής που παίρνουμε από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αλληλεπίδρασης με τα anti-cing ρευστά και που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.20. Ας σημειωθεί επίσης ότι πρόσφατη θεωρητική μελέτη (Clamond & Germain, 1999) αναδεικνύει αυτήν ακριβώς την αλληλεπίδραση της Schrödinger που αποτελεί διαμόρφωση του γραμμικού κυματοπακέτου, με την Korteweg-de Vries που αποτελεί διαμόρφωση του κύματος μεγάλου μήκους. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσονται συστηματικά κύματα μεγάλου μήκους, σαν αποτέλεσμα συντονισμού με τα οδεύοντα κύματα του ασταθούς κυματοπακέτου, που εξελίσσονται σε solitons όπως δείχνουν οι αριθμητικές προσομοιώσεις. Λόγω της αμελητέας αδράνειας η διαδικασία αυτή γίνεται γρήγορα και τα solitons προλαβαίνουν να φτάσουν σε μεγάλο ύψος. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως η ταχύτητα μεταφοράς τους μεγαλώνει με το ύψος όπως και στα solitons ενώ, λόγω και του παρόμοιου σχετικού ύψους, δεν παρατηρούνται συγχωνεύσεις μεταξύ τους διότι αυτό απαιτεί πολύ μεγαλύτερο χρόνο από αυτόν της προσομοίωσης. Η πολύ αργή αλληλεπίδραση solitons με μικρές διαφορές στο ύψος έχει αποδειχθεί πειραματικά (Vlachogiannis & Bontozoglou, 2001) και θεωρητικά (Malamataris et al, 2002) κατά τη μελέτη των κυματώσεων που εμφανίζονται όταν λεπτοί υμένες υγρού ρέουν κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου. Πιο συγκεκριμένα, οι Βλαχογιάννης και Μποντόζογλου (2001) παρατήρησαν ότι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να συγχωνευτούν δυο κύματα εξαρτάται κυρίως από τη διαφορά που υπάρχει στα ύψη τους και μάλιστα υπάρχει μια ελάχιστη διαφορά ύψους κάτω από την οποία τα δύο κύματα δεν αλληλεπιδρούν ποτέ.

5.5 Συμπεράσματα

Με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο αυτό συμπεραίνουμε ότι οι αριθμητικές προσομοιώσεις για $M \rightarrow 0$ μπορούν να περιγράψουν ικανοποιητικά τα φαινόμενα που λαμβάνουν χώρα τόσο στην γραμμική όσο και στην ασθενώς μη γραμμική περιοχή.

Όσον αφορά στη μη-γραμμική περιοχή παρατηρείται μια ενδιαφέρουσα συμπεριφορά κατά την οποία το πιο επικίνδυνο κυματοπακέτο που προβλέπει η γραμμική θεωρία γίνεται ασταθές, δημιουργεί κορυφές με μέγιστο ύψος περίπου το διπλάσιο του αρχικού και σταματάει να αυξάνεται πέρα από αυτό. Πίσω από την αρχική κορυφή υπάρχει η τάση να σχηματιστούν και άλλες κορυφές που και αυτές θα αποκτήσουν το συγκεκριμένο ύψος κορεσμού. Οι κορυφές είναι κύματα μεγάλου μήκους κύματος που

κινούνται με ταχύτητα σταθερή και μεγαλύτερη από την ταχύτητα του γραμμικού κυματοπακέτου. Μπροστά από τις κορυφές παρατηρείται περιοδική εμφάνιση ήπιας ανακυκλοφορίας, ενώ γύρω τους παρατηρούνται σημαντικές αλλαγές στην πίεση και την διάτμηση που δέχεται η στερεή επιφάνεια. Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται ανεξάρτητα από το υγρό που χρησιμοποιείται και από το αρχικό ύψος του.

Όσον αφορά στη φύση των κυματώσεων που εμφανίζονται στην μη γραμμική περιοχή παρατηρήθηκε ότι η συμπεριφορά τους είναι παρόμοια με αυτήν που βρήκαν οι Djordjevic και Redekopp (1976) κατά την ανάλυση των ασταθειών που αναπτύσσονται σε κύματα βαρύτητας υγρού υμένα. Κατά πάσα πιθανότητα ο μηχανισμός ανάπτυξης των κορυφών είναι ανάλογος με τον μηχανισμό που αναγνωρίστηκε από τους παραπάνω ερευνητές. Πιο συγκεκριμένα, η εμφάνιση των δομών μεγάλου μήκους πρέπει να οφείλεται στον συντονισμό (resonance) που συμβαίνει όταν η ταχύτητα ομάδας ενός μικρού μήκους κύματος του ασταθούς κυματοπακέτου, ταυτίζεται με τη φασική ταχύτητα των κυμάτων μεγάλου μήκους στο όριο $k \rightarrow 0$. Αρχικά, η εμφάνιση μέσα στο κυματοπακέτο του μεγάλου μήκους κύματος οφείλεται στην μη γραμμική εξέλιξη του μικρού μήκους κύματος σε μεγάλους χρόνους. Το γεγονός αυτό ενισχύεται από το ότι τα μήκη κύματος κοντά στο αριστερό άκρο του κυματοπακέτου είναι, σε μεγάλους χρόνους, ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η τιμή της φασικής ταχύτητας των κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος αντιστοιχεί σε κύμα που βρίσκεται κοντά στο αριστερό άκρο και επιπλέον ο σχηματισμός των κορυφών παρατηρείται ότι συστηματικά ξεκινάει από την αριστερή περιοχή του κυματοπακέτου. Τέλος, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η συμπεριφορά της ροής στην μη-γραμμική περιοχή δεν μπορεί να περιγραφεί πλήρως από την εξίσωση Schrödinger. Αντίθετα, θα πρέπει να αντιμετωπιστεί σε συνδυασμό με την αντίστοιχη για τη συγκεκριμένη ροή εξίσωση Kuramoto-Shivashinsky η οποία προκύπτει από την διαμόρφωση κυμάτων μεγάλου μήκους.

Ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι στην μη-γραμμική περιοχή παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά είτε όταν επιβάλλεται περιοδική διαταραχή, είτε όταν η διαταραχή επιβάλλεται σε σημείο που η θεωρία προβλέπει απόλυτη αστάθεια. Το γεγονός αυτό, πιθανώς να οφείλεται στο ότι ο μη γραμμικός συντονισμός των μικρών με το μεγάλο μήκος κύματος, όπως περιγράφηκε παραπάνω, είναι πολύ έντονος και κυριαρχεί επί της ανάπτυξης του ασταθούς κυματοπακέτου και των χωρικά ασταθών κυμάτων.

Τέλος παρουσιάζει ενδιαφέρον να γίνει μια ποιοτική σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με κάποιες πειραματικές παρατηρήσεις που είναι διαθέσιμες στη

βιβλιογραφία. Σε πειράματα που πραγματοποίησαν οι Ozgen et al. (2002) με de-icing ρευστά παρατήρησαν περιοδικά κύματα με φασική ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα της διεπιφάνειας. Στην ίδια μελέτη κατέγραψαν και την εμφάνιση μη περιοδικών κυμάτων για πολύ λεπτές υμένες. Κατά την προσομοίωση του συστήματος αέρα-deicing που παρουσιάστηκε παραπάνω η φασική ταχύτητα υπολογίστηκε ίση με 1.5, ενώ η ταχύτητα διεπιφάνειας ισούται με 0.77. Επομένως, υπάρχει συμφωνία με τους παραπάνω ερευνητές ως προς τη σχέση μεταξύ φασικής ταχύτητας και ταχύτητας διεπιφάνειας, όχι όμως και ως προς την περιοδική φύση των κυμάτων. Τα κύματα που καταγράφονται στην παρούσα μελέτη είναι σε όλες τις περιπτώσεις μη-περιοδικά εκτός και αν αναφερόμαστε στη γραμμική περιοχή. Σε κάθε περίπτωση είναι σημαντικό να πραγματοποιηθεί ένα πιο συγκεκριμένο πείραμα που θα δίνει απαντήσεις σε όσο το δυνατόν περισσότερα από τα ερωτήματα που προκύπτουν, στο πλαίσιο και των θεωρητικών/αριθμητικών ευρημάτων της παρούσας διατριβής.

6. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΜΕ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΤΟ ΥΓΡΟ

6.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων με το μοντέλο που λαμβάνει υπόψη τις αδρανειακές δυνάμεις του υγρού. Στόχος είναι να καθοριστεί το αν και σε ποιες περιπτώσεις η αδράνεια του υγρού επηρεάζει την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων και αν την επηρεάζει να προσδιοριστεί ο τρόπος με τον οποίο επιδρά.

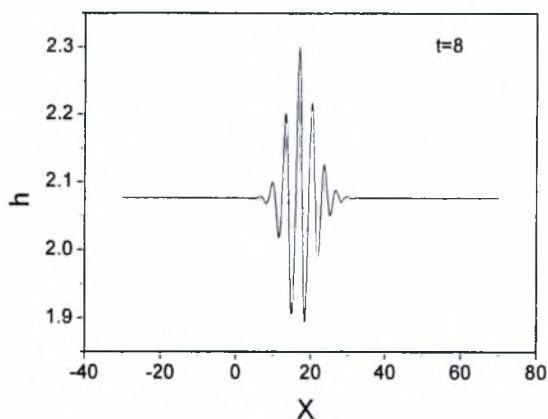
Αρχικά, παρουσιάζονται προσομοιώσεις στην γραμμική περιοχή τόσο για το σύστημα αέρα-deicing, όσο και για το σύστημα αέρα-νερού. Αφού γίνει σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων που προκύπτουν και των αντίστοιχων αποτελεσμάτων που εξήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, η μελέτη επικεντρώνεται στη μη-γραμμική περιοχή όπου διαπιστώνεται η επίδραση που έχει η αδράνεια στις συγκεκριμένες ροές. Επίσης, γίνεται προσπάθεια να καθοριστεί, αν είναι δυνατό, ο ελάχιστος λόγος ιξωδών μεταξύ των δυο ρευστών πάνω από τον οποίο η αδράνεια διαφοροποιεί την εξέλιξη της ροής. Τέλος, μελετάται η επίδραση που έχει στη ροή το ύψος του υγρού υμένα και η επιφανειακή του τάση.

6.2 Αποτελέσματα

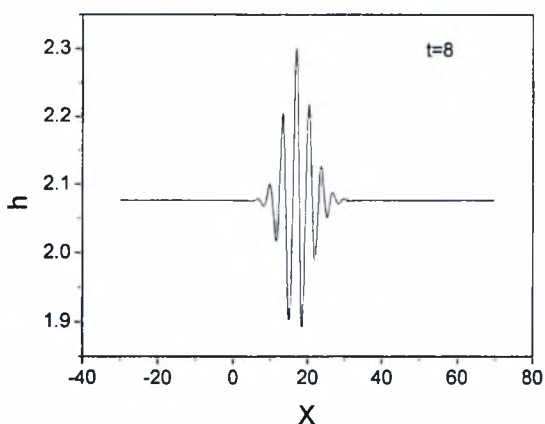
6.2.1 Επίδραση αδράνειας στη γραμμική περιοχή

Η πρώτη περίπτωση που εξετάζεται είναι η ροή αέρα πάνω από λεπτό υμένα με τις ιδιότητες του de-icing ρευστού που χρησιμοποιήθηκε στις προσομοιώσεις του προηγούμενου κεφαλαίου. Επιβάλλεται η ίδια στιγμιαία διαταραχή ($d=0.001$ και $W=4$) και καταγράφεται η εξέλιξη της στο χώρο και το χρόνο. Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιείται χωρικό βήμα 0.1 στην x-κατεύθυνση και 0.4 στη y-κατεύθυνση, ενώ το χρονικό βήμα ισούται με 0.001. Στο διάγραμμα 6.1 δίνεται το ύψος της διεπιφάνειας για τη συγκεκριμένη ροή όπως προκύπτει αγνοώντας τις αδρανειακές δυνάμεις του υγρού, ενώ στο διάγραμμα 6.2 δίνεται το αποτέλεσμα της προσομοίωσης με το μοντέλο που συμπεριλαμβάνει την αδράνεια του υγρού. Από τα δύο διαγράμματα γίνεται φανερό ότι δεν υπάρχει καμιά διαφορά μεταξύ των δυο προσομοιώσεων. Το παραπάνω συμπέρασμα γίνεται καλύτερα αντιληπτό από τα δεδομένα του πίνακα 6.1 όπου δίνονται τα χαρακτηριστικά του κύματος όπως υπολογίζονται με βάση τα δύο μοντέλα και όπως προβλέπονται από τη γραμμική θεωρία. Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο ροής που αγνοεί την

αδράνεια του υγρού είναι ικανό να περιγράψει την δυναμική συμπεριφορά του συγκεκριμένου συστήματος.



Σχήμα 6.1: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για το σύστημα αέρα-δείcing με το μοντέλο που αγνοεί την αδράνεια του υγρού, $d=0.001$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

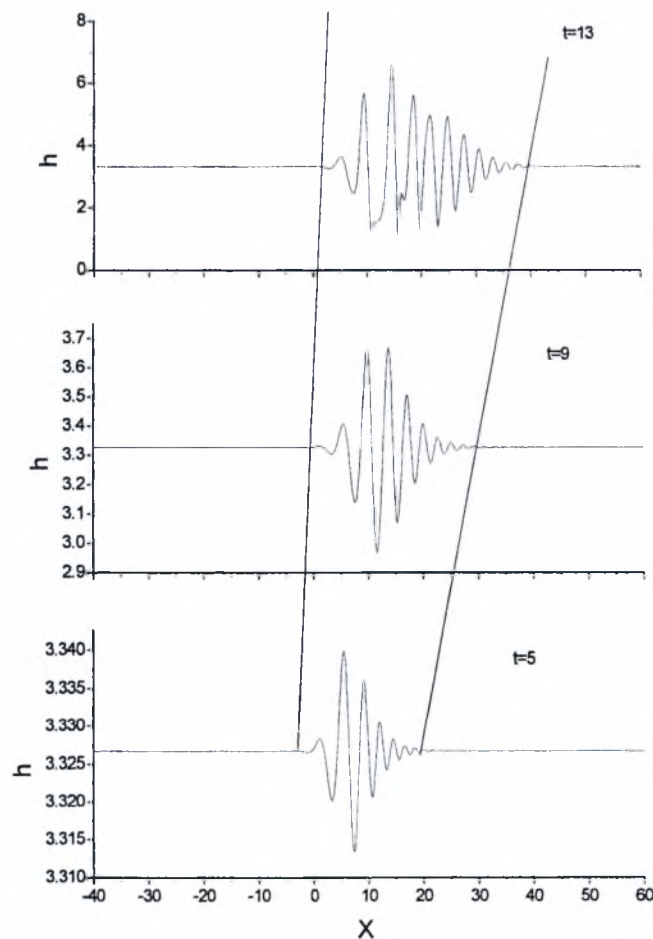


Σχήμα 6.2: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για το σύστημα αέρα-δείcing με το μοντέλο που περιλαμβάνει την αδράνεια του υγρού, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

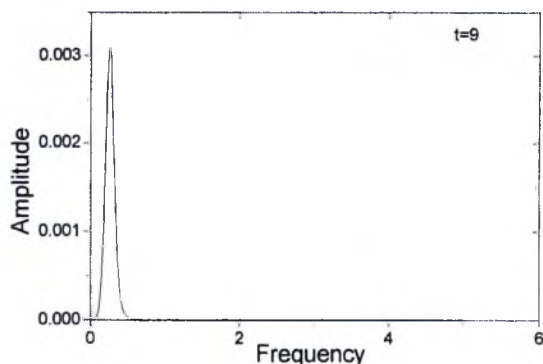
	Γραμμική θεωρία με αδράνεια και χωρίς αδράνεια	Αποτελέσματα χωρίς αδράνεια	Αποτελέσματα με αδράνεια
Μήκος κύματος	3.47	3.53	3.53
Περίοδος	2.32	2.34	2.34
Ταχύτητα	2.2	2.26	2.26

Πίνακας 6.1: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-δείcing.

Στη συνέχεια εξετάζεται η εξέλιξη γραμμικής διαταραχής ($d=0.0001$ και $W=4$) στο σύστημα αέρα-νερού για τις ίδιες τιμές παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο κατά την προσομοίωση του συστήματος με το μοντέλο που αγνοεί την αδράνεια του υγρού (Σχήμα 5.24). Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι για τις συγκεκριμένες τιμές παραμέτρων η γραμμική ανάλυση ευστάθειας προβλέπει απόλυτη αστάθεια όταν η διαταραχή επιβάλλεται σε θέση x_0 για την οποία ισχύει $0.7 \leq x_0 \leq 2.5$. Μάλιστα, στη θέση $x_0=1.5$, όπου επιβάλλεται η διαταραχή, αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος ρυθμός ανάπτυξης της απόλυτης αστάθειας και ισούται με $\omega_0 \approx 0.09$. Στο Σχήμα 6.3 δίνεται το σχήμα της διεπιφάνειας που προκύπτει χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.001 και χωρικό βήμα 0.1, 0.4 στην x-κατεύθυνση και στη y-κατεύθυνση αντίστοιχα.

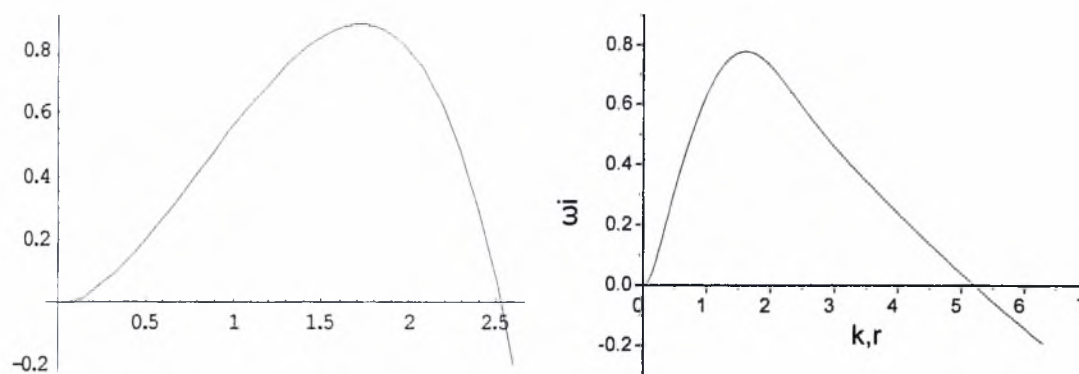


Σχήμα 6.3: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-νερού όταν συμπεριλαμβάνεται η αδράνεια του υγρού, $d=0.001$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.



Σχήμα 6.4: Ανάλυση FT για τον υπολογισμό του μήκους κύματος στο σύστημα αέρα-νερού όταν συμπεριλαμβάνεται η αδράνεια του υγρού, $d=0.001$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.

Εφαρμόζοντας ανάλυση FT (Σχήμα 6.4) στο σχήμα της διεπιφάνειας υπολογίζεται ότι το μήκος κύματος της διαταραχής ισούται με 3.9, ενώ το αντίστοιχο μήκος κύματος όταν αγνοείται η αδράνεια του υγρού είναι 4.87. Επιπλέον, η ταχύτητα του κυματοπακέτου και η περίοδος υπολογίζονται ίσες με 1.45 και 3 αντίστοιχα, αντί για 3 και 2.05 που ήταν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Από τις παραπάνω παρατηρήσεις προκύπτει ως συμπέρασμα ότι η αδράνεια του υγρού φαίνεται να διαφοροποιεί την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-νερού. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι καθυστερείται η μεταφορά της διαταραχής, αφού η ταχύτητα της μειώνεται στο μισό, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει και κάποια σημαντική μείωση στο μήκος κύματος που αυξάνεται πιο γρήγορα από όλα τα ασταθή κύματα που εμπεριέχονται στο οδεύον κυματοπακέτο. Πρέπει να σημειωθεί ότι η γραμμική ανάλυση ευστάθειας των διεπιφανειακών κυμάτων συμπεριλαμβανομένης της επίδρασης της αδράνειας προβλέπει πράγματι μείωση της ταχύτητας του κυματοπακέτου και μείωση του μήκους κύματος, όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί, σε σχέση με το μοντέλο που αγνοεί την αδράνεια. Η διαφορά που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία για τα χαρακτηριστικά του πιο ασταθούς κυματοπακέτου φαίνεται και στο Σχήμα 6.5 όπου δίνονται τα αποτελέσματα της σχέσης διασποράς για τα δύο διαφορετικά μοντέλα.



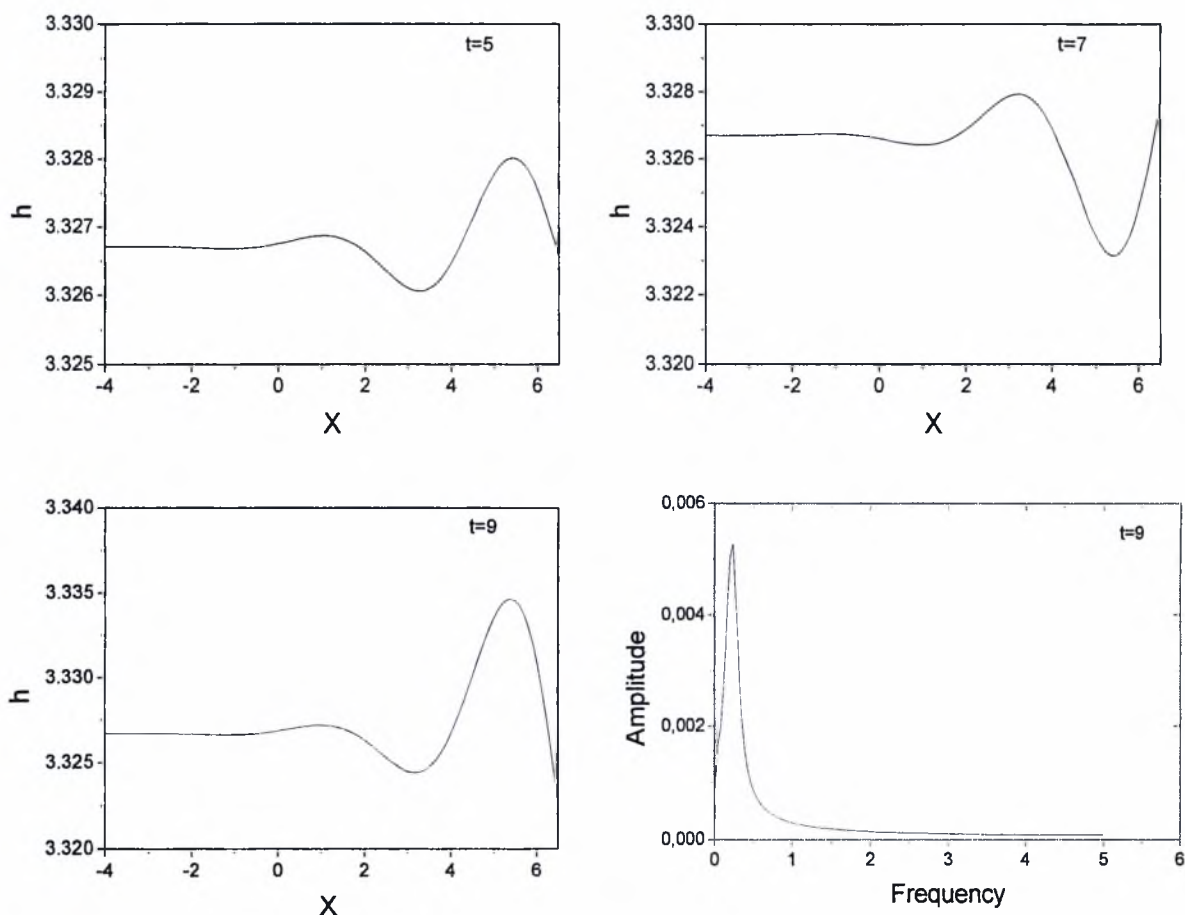
Σχήμα 6.5: Καμπύλη ευστάθειας $\eta_i = f(k)$ για το σύστημα αέρα-νερού (α) όταν αγνοείται και (β) όταν συμπεριλαμβάνεται η αδράνεια του υγρού, $x_0 = 1.5$, $H_0 = 3.32671$.

	Γραμμική θεωρία (επικίνδυνο κύμα)	Γραμμική θεωρία (απόλυτη αστάθεια)	Αριθμητικά αποτελέσματα
Μήκος κύματος	3.85	4.45	3.9
Περίοδος	3	3.8	3
Ταχύτητα	1.5	0	1.45

Πίνακας 6.2: Σύγκριση αριθμητικών αποτελεσμάτων με αποτελέσματα γραμμικής θεωρίας για διεπιφανειακά κύματα στο σύστημα αέρα-νερού.

Παραπάνω παρατηρήσαμε ότι λαμβάνοντας υπόψη όλο το πεδίο προσομοίωσης λαμβάνονται τα χαρακτηριστικά του ασταθούς κυματοπακέτου της γραμμικής θεωρίας. Παρόλα αυτά, η θεωρία προβλέπει απόλυτη αστάθεια για το συγκεκριμένο σύστημα ρευστών. Για να δούμε αν το μήκος κύματος της απόλυτης αστάθειας εμφανίζεται έστω και μόνο τοπικά γύρω από τη θέση $X=0$ επικεντρωνόμαστε στην περιοχή αυτή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.4. Με ανάλυση FT στο σχήμα της διεπιφάνειας βρίσκεται ότι το μήκος κύματος που επικρατεί είναι ίσο με 4.3, τιμή που βρίσκεται πολύ κοντά στο μήκος κύματος της απόλυτης αστάθειας που δίνεται στον πίνακα 6.2. Τα δύο διαφορετικά μήκη κύματος που εμφανίζονται γίνονται αντιληπτά και με προσεκτική παρατήρηση των διαγραμμάτων του Σχήματος 6.3. Είναι φανερό ότι στο αριστερό άκρο του κυματοπακέτου επικρατεί μεγαλύτερο μήκος κύματος από ότι στο υπόλοιπο. Το γεγονός ότι δεν αποτυπώνεται καθαρά η απόλυτη αστάθεια ίσως

να μπορεί να εξηγηθεί μερικώς με τη μεγάλη διαφορά που υπάρχει μεταξύ του ρυθμού ανάπτυξης της ($\omega_{0i} \approx 0.09$) και του πιο ασταθούς κύματος ($\omega_i = 0.78$). Έτσι το μήκος κύματος με μηδενική ταχύτητα ομάδας αποτελεί περίπου το αριστερό άκρο του ασταθούς κυματοπακέτου με περίπου μηδενικό ρυθμό αύξησης. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να αναφερθεί ότι στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και όταν επικεντρώνουμε κοντά στην αρχή των αξόνων $X=0$, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 6.6. Δηλαδή η διαταραχή δεν απομακρύνεται ποτέ από το $X=0$ ενώ κοντά στο άκρο αυτό χαρακτηρίζεται από το μήκος κύματος για $V_{Gi}=0$.



Σχήμα 6.6: Στιγμιότυπο διεπιφάνειας αέρα-νερού και ανάλυση FT γύρω από την περιοχή $X=0$ για τον υπολογισμό του μήκους κύματος της απόλυτης αστάθειας.

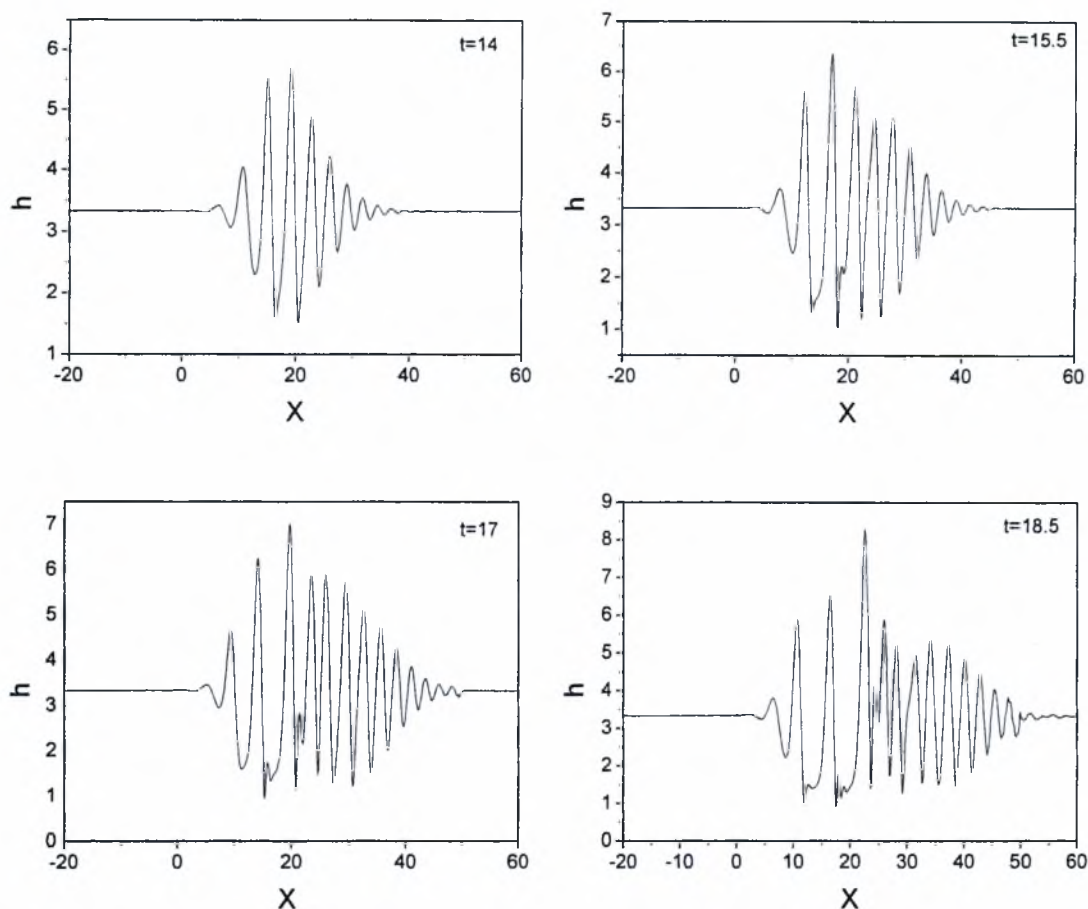
Μέχρι στιγμής παρουσιάστηκαν δυο διαφορετικές περιπτώσεις ροής και είδαμε ότι μόνο στη μία η αδράνεια του υγρού επηρεάζει την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Το εύρημα αυτό μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα αν παρατηρήσουμε την εξίσωση (2.27) που αντιστοιχεί στο ισοζύγιο ορμής του υγρού στη x -κατεύθυνση και στην οποία οι αδρανειακοί όροι πολλαπλασιάζονται με την ποσότητα

$M = (\mu/\mu_w)^2 \rho_w/\rho$. Χρησιμοποιώντας τις τιμές των παραμέτρων που αντιστοιχούν στο σύστημα αέρα-de-icing η ποσότητα που πολλαπλασιάζει τους αδρανειακούς όρους υπολογίζεται ότι είναι ίση με $2.7 \cdot 10^{-9}$ ενώ για το σύστημα αέρα-νερού η αντίστοιχη ποσότητα ισούται με 0.324. Επομένως, γίνεται κατανοητό ότι στην περίπτωση του de-icing ρευστού η ποσότητα που καθορίζει το αν η αδράνεια του υγρού είναι σημαντική ή όχι είναι πολύ μικρή και κατά συνέπεια το αποτέλεσμα των προσομοιώσεων είναι αναμενόμενο. Αντίθετα, στην περίπτωση του νερού η αντίστοιχη ποσότητα δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα με φυσικό επακόλουθο την διαφοροποίηση του αποτελέσματος όταν η αδράνεια του υγρού λαμβάνεται υπόψη.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι δεν είναι πάντα σωστό να αγνοούνται οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού κατά τη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων. Αντίθετα, η αδράνεια του υγρού φαίνεται ότι παίζει σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων και κατά συνέπεια πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν αποφασίζουμε να την αγνοήσουμε.

6.2.2 Επίδραση αδράνειας στη μη-γραμμική περιοχή

Στα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω διαπιστώθηκε ο τρόπος με τον οποίο η αδράνεια του υγρού επηρεάζει την συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων στη γραμμική περιοχή. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στη μη-γραμμική περιοχή. Αν επιστρέψουμε στις προσομοιώσεις των διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-νερού και αφήσουμε την διαταραχή να εξελιχθεί αρκετά στο χρόνο ή εφαρμόσουμε κάποια διαταραχή μεγάλου πλάτους παρατηρούμε μια διαφορετική συμπεριφορά από αυτή που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι το κυματοπακέτο που σχηματίζεται γίνεται ασταθές και δίνει κύματα μεγάλου μήκους με απότομες κορυφές οι οποίες αποκτούν ένα μέγιστο ύψος κορεσμού και σταματάνε να μεγαλώνουν περαιτέρω. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι πίσω από την αρχική κορυφή εμφανίζονται και άλλες τέτοιες κορυφές. Η παραπάνω συμπεριφορά δεν παρατηρείται όταν η αδράνεια του υγρού γίνεται σημαντική. Στο Σχήμα 6.7 παρουσιάζεται η εξέλιξη της γραμμικής διαταραχής που δίνεται στο Σχήμα 6.3 σε ακόμη μεγαλύτερους χρόνους ώστε η μη-γραμμικότητα να επηρεάσει την συμπεριφορά της διεπιφάνειας αέρα-νερού.

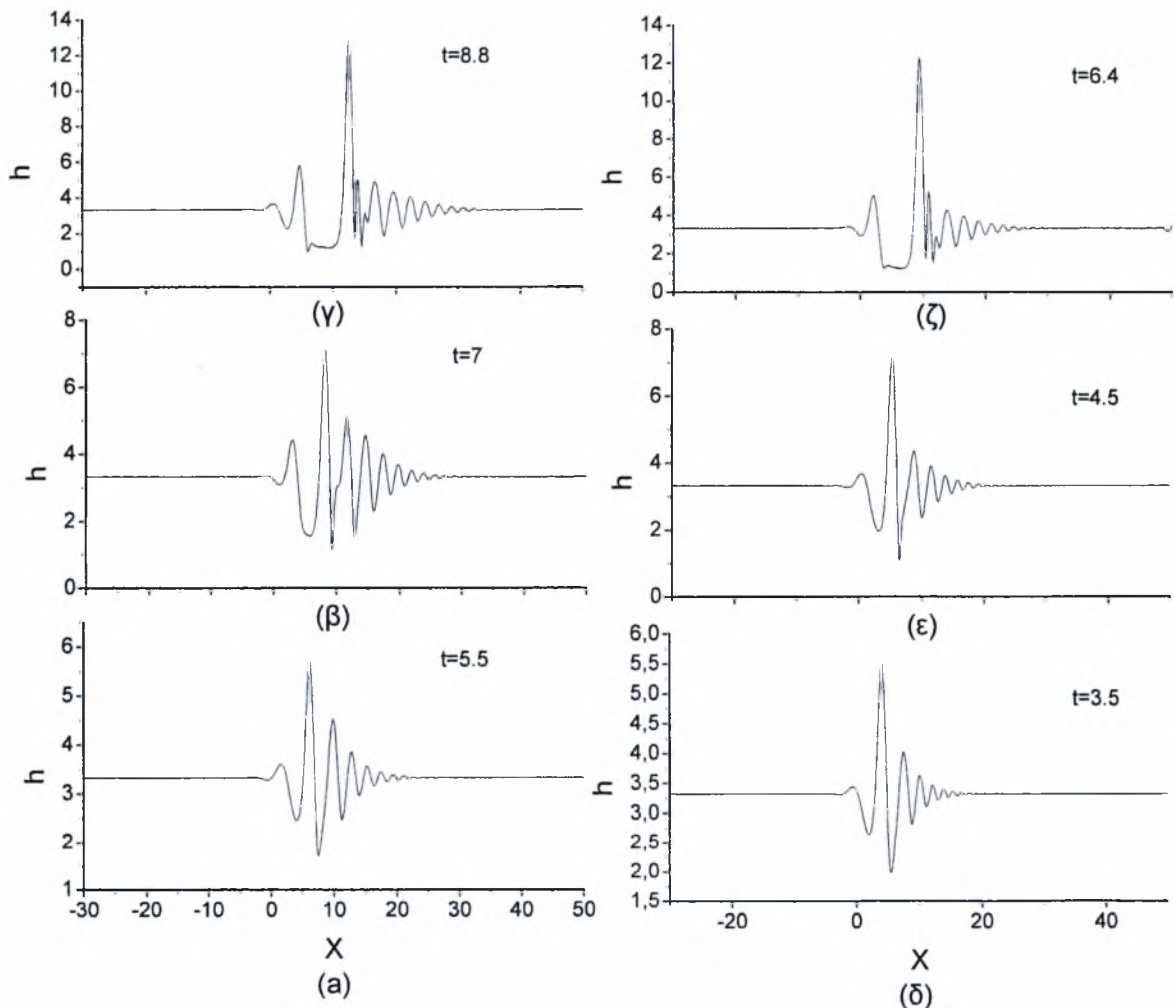


Σχήμα 6.7: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού, $d=0.001$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι όταν η αδράνεια του υγρού είναι σημαντική αναπτύσσεται μια κορυφή με πλάτος που ξεπερνά το διπλάσιο του αρχικού ύψους του υγρού και μάλιστα δεν φαίνεται να υπάρχει η τάση να σταματάει να αυξάνεται πέρα από ένα συγκεκριμένο ύψος κορεσμού. Και στην περίπτωση αυτή έχουμε εμφάνιση κυμάτων μεγάλου μήκους λόγω συντονισμού όμως δημιουργείται μόνο μία υψηλή κορυφή η οποία μεγαλώνει συνεχώς και καθορίζει την εξέλιξη του σχήματος της διεπιφάνειας. Το κυματοπακέτο αρχικά διαιρείται σε δύο περιοχές. Στην πρώτη υπάρχει συντονισμός ενώ στην δεύτερη φαίνεται να δημιουργείται μετώπου. Στην περιοχή που συναντώνται δημιουργείται μία μεγάλη κορυφή η οποία αναπτύσσεται απορροφώντας κυρίως υγρή μάζα από τα ανάντη του κύματος μεγάλου μήκους. Λόγω της αδράνειας του φιλμ δεν είναι δυνατός ο κορεσμός της κορυφής δίνοντας έτσι έντονες ριπές που θυμίζουν περιπτώσεις δημιουργίας ιδιάζοντος σημείου σε πεπερασμένο χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση ο φορμαλισμός τριπλής

στοιβάδας χάνει την σημασία του λόγω του μεγάλου πάχους μετατόπισης της ροής στην αέρια φάση και της επακόλουθης αλλοίωσης του συνοριακού στρώματος.

Η παραπάνω μη γραμμική συμπεριφορά αποτυπώνεται καλύτερα όταν εφαρμόζονται στο σύστημα διαταραχές μεγαλύτερου πλάτους και κατά συνέπεια απαιτείται μικρότερο χρονικό διάστημα για να επηρεαστούν τα διεπιφανειακά κύματα από τη μη γραμμικότητα της ροής. Στο Σχήμα 6.8 δίνεται η χωροχρονική εξέλιξη της διεπιφάνειας για αρχική διαταραχή με $d=0.1$ και $d=0.4$. Όπως και στην περίπτωση που η αδράνεια δεν θεωρείται σημαντική, το πλάτος της αρχικής διαταραχής επηρεάζει μόνο το πόσο γρήγορα θα εμφανιστεί η κορυφή και όχι τη συμπεριφορά της διεπιφάνειας.

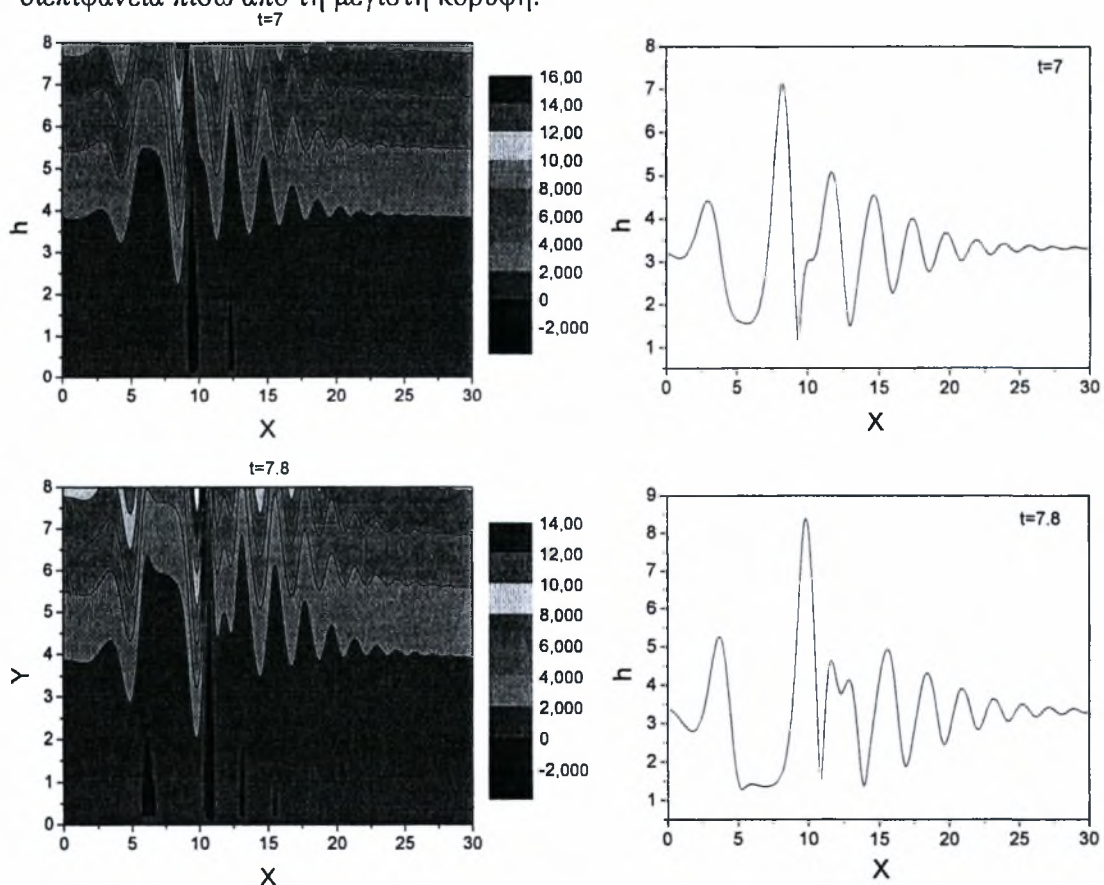


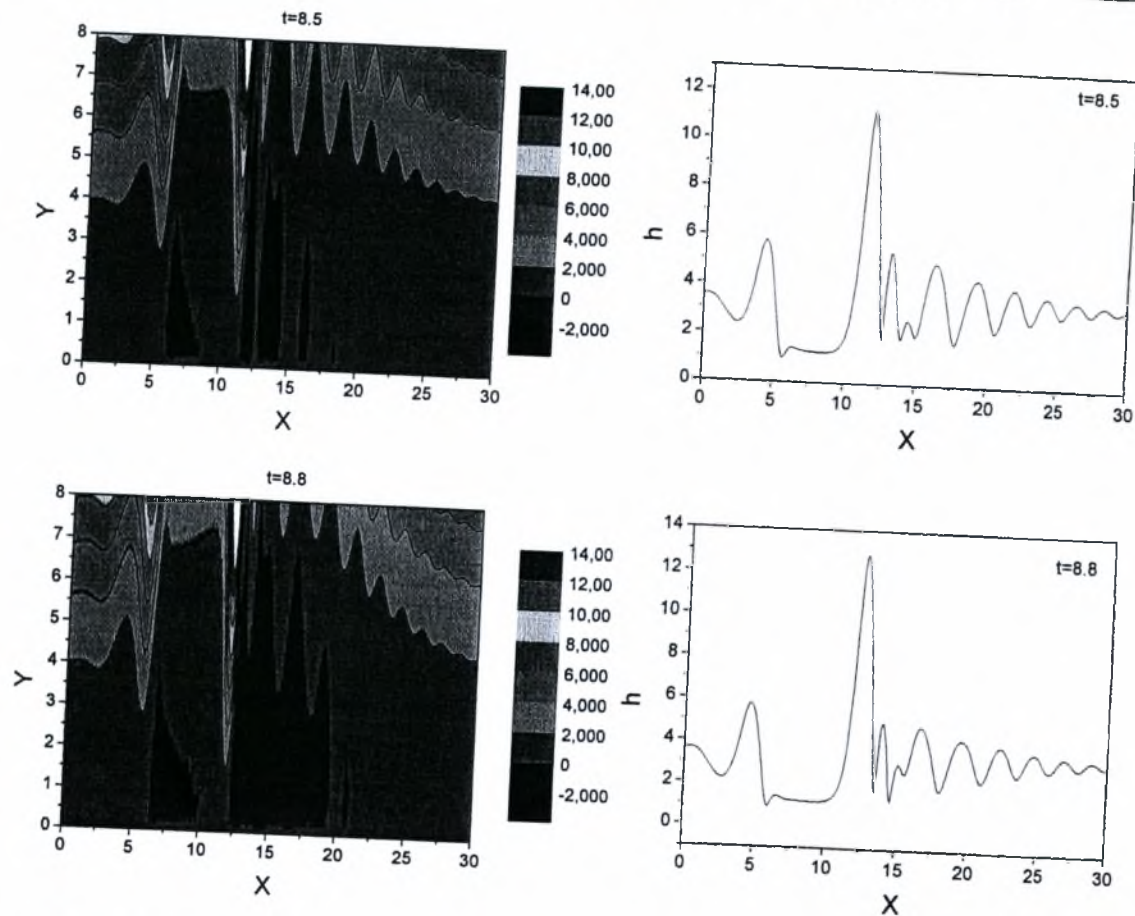
Σχήμα 6.8: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού για διαταραχή (α), (β), (γ) με $d=0.1$ και (δ), (ε), (ζ) με $d=0.4$ στη θέση $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.

Από τα διαγράμματα των σχημάτων 6.7 και 6.8 γίνεται αντιληπτό ότι ανεξάρτητα από την αρχική διαταραχή η κορυφή που σχηματίζεται ξεπερνά κατά

πολύ το διαπλάσιο του αρχικού ύψους και δεν φαίνεται να υπάρχει κάποια ένδειξη ότι το κύμα θα φτάσει κάποιο συγκεκριμένο ύψος κορεσμού. Επίσης, παρατηρείται ότι πίσω από τη μέγιστη κορυφή αναπτύσσεται μια περιοχή στην οποία το υγρό φιλμ γίνεται πάρα πολύ λεπτό καθώς το πάχος του προσεγγίζει την τιμή 0.8. Η ταχύτητα με την οποία μετακινείται η κορυφή αυξάνεται καθώς μεγαλώνει το πλάτος της και ταυτόχρονα η έκταση της κοιλότητας που την ακολουθεί αυξάνεται κατά τη διεύθυνση της ροής. Τέτοιες περιοχές όπου το πάχος του φιλμ μειώνεται πολύ έχουν καταγραφεί στα πειράματα του Craik (1966) ο οποίος παρατήρησε τα διεπιφανειακά κύματα που αναπτύσσονται στη διεπιφάνεια αέρα – νερού για υψηλούς αριθμούς Reynolds και για λεπτούς υμένες. Στα ίδια πειράματα καταγράφηκε και η ανάπτυξη απότομων κορυφών το ύψος των οποίων είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μέσο πάχος του υμένα.

Στο Σχήμα 6.9 δίνονται διάφορα στιγμιότυπα της ροϊκής συνάρτησης στην αέρια φάση για την περίπτωση που στο σύστημα επιβάλλεται αρχική διαταραχή πλάτους $d=0.1$. Υπενθυμίζεται ότι η διεπιφάνεια αντιστοιχεί στη θέση $\bar{Y} = 0$. Διαπιστώνεται ότι μπροστά από τη μέγιστη κορυφή αναπτύσσεται μια περιοχή έντονης ανακυκλοφορίας η οποία μεγαλώνει πολύ γρήγορα. Επίσης, παρατηρείται μία δεύτερη μικρότερη περιοχή ανακυκλοφορίας μέσα στην κοιλότητα που σχηματίζει η διεπιφάνεια πίσω από τη μέγιστη κορυφή.

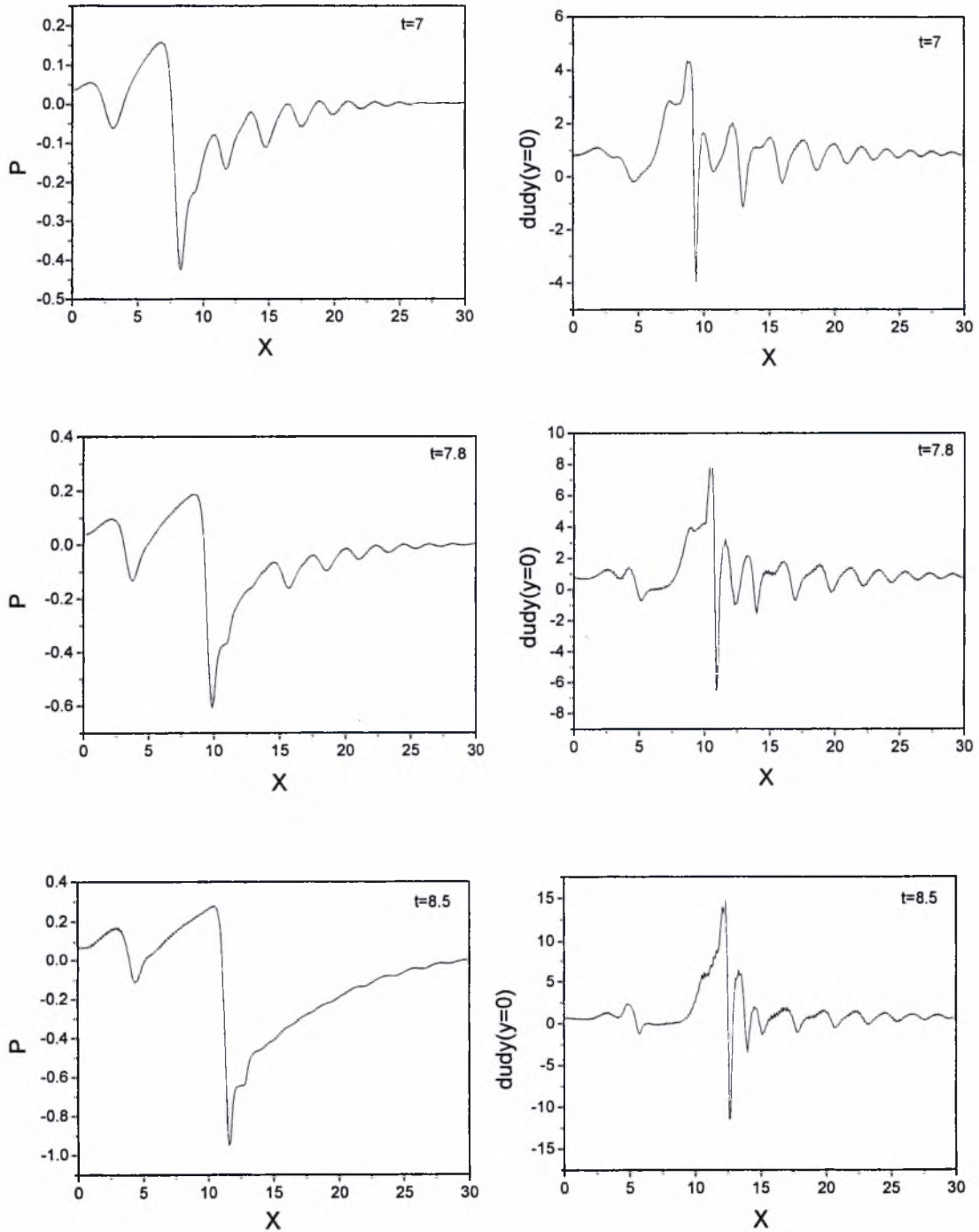


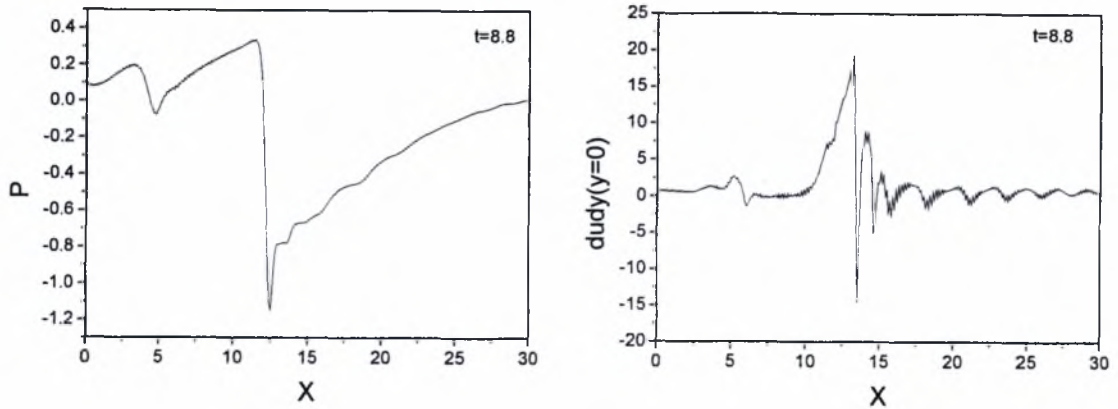


Σχήμα 6.9: Χωροχρονική εξέλιξη ροικής συνάρτησης στην αέρια φάση για το σύστημα αέρα-νερού, $d=0.1$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.

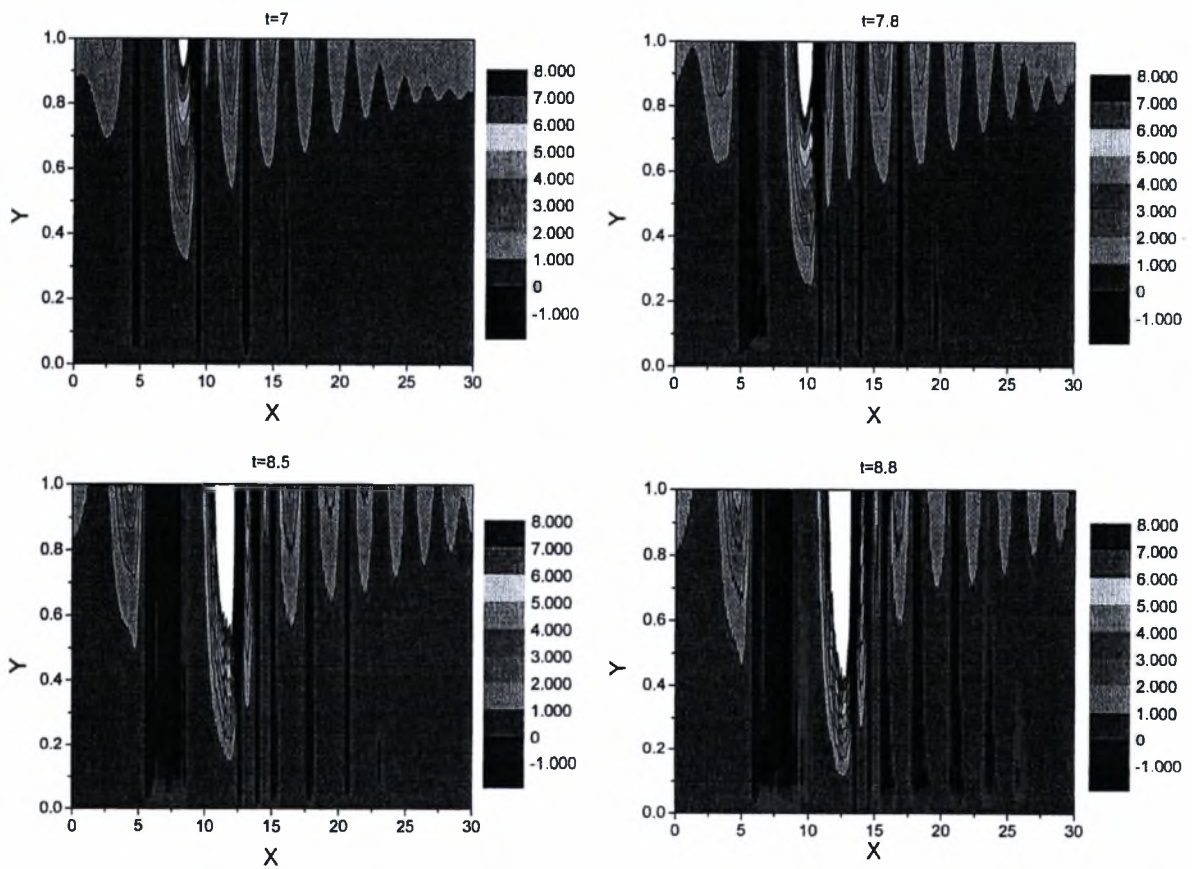
Εκτός από την παρουσία έντονης ανακυκλοφορίας στο συνοριακό στρώμα ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει, όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή της παρούσας διατριβής, η κατανομή της πίεσης στο συνοριακό στρώμα καθώς και της διάτμησης που ασκείται στην στερεή επιφάνεια. Στο Σχήμα 6.10 δίνονται η μορφή της πίεσης στην αέρια φάση και η διάτμηση στην επιφάνεια του στερεού που αντιστοιχούν στα στιγμιότυπα του Σχήματος 6.8. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι η διάτμηση που δέχεται η επιφάνεια του στερεού από το συνοριακό στρώμα στην περίπτωση που απουσιάζει ο υγρός υμένας είναι σταθερή και ίση με 0.271. Από τα διαγράμματα του Σχήματος 6.10 είναι φανερό ότι στην περιοχή της έντονης ανακυκλοφορίας έχουμε μεγάλη αύξηση τόσο της πίεσης όσο και της διάτμησης στην στερεή επιφάνεια. Με βάση τα παραπάνω οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η επίδραση που έχει η αδράνεια στο σύστημα αέρα-νερού είναι πολύ σημαντική και αξίζει να διερευνηθεί το αν υπάρχει, εξαιτίας της επίδρασης αυτής, πιθανότητα καταστροφής της δομής του συνοριακού στρώματος αλλά και το πώς η

αλληλεπίδραση των δυο ρευστών επηρεάζει τα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά του στερεού. Τέλος, στο Σχήμα 6.11 παρουσιάζονται τα αντίστοιχα στιγμιότυπα για τη ροϊκή συνάρτηση του υγρού όπου παρατηρούνται περιοχές έντονης ανακυκλοφορίας που εκτείνονται από την επιφάνεια της πλάκας μέχρι την διεπιφάνεια υγρού-αέρα.





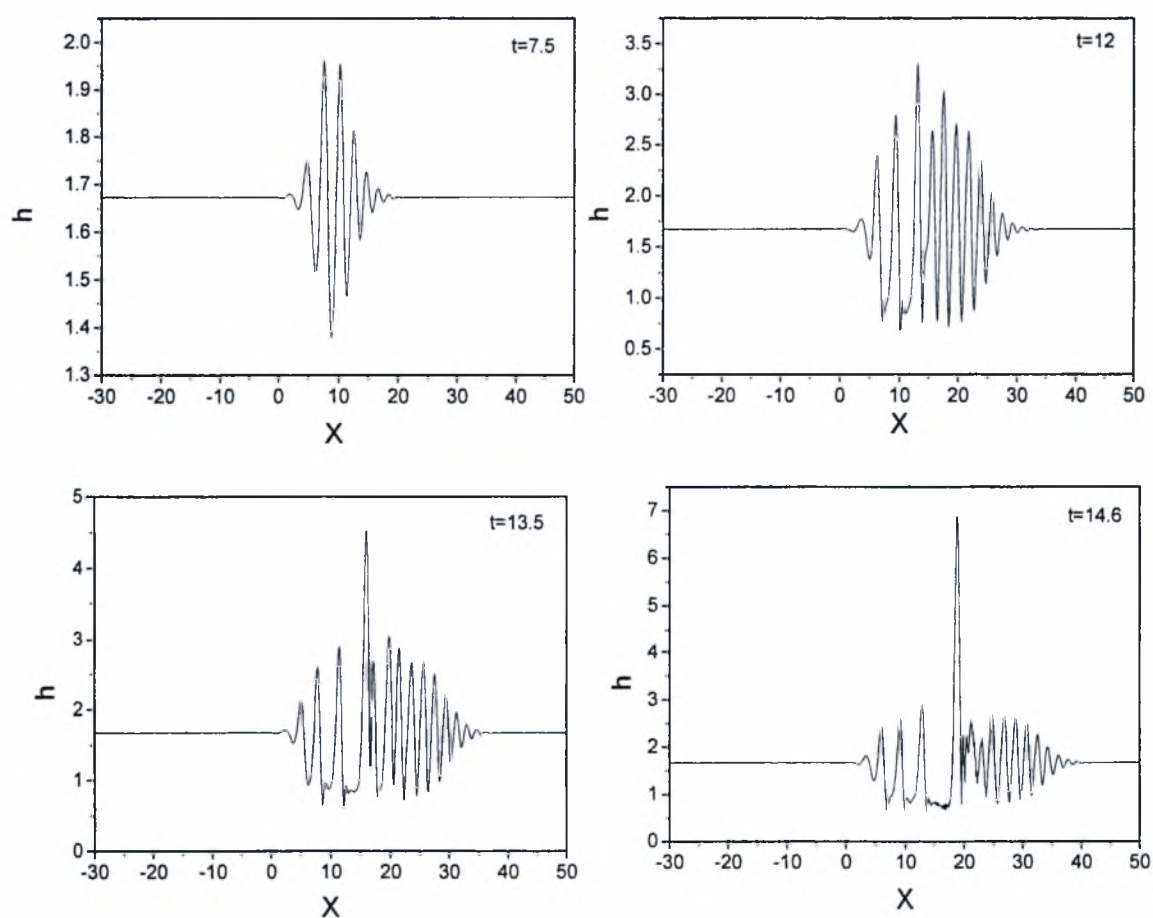
Σχήμα 6.10: Χωροχρονική εξέλιξη πίεσης στην αέρια φάση και διάτμησης στην στερεή επιφάνεια για το σύστημα αέρα-νερού, $d=0.1$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.



Σχήμα 6.11: Χωροχρονική εξέλιξη ροϊκής συνάρτησης στην υγρή φάση για το σύστημα αέρα-νερού, $d=0.1$, $x_0=1.5$, $H_0=3.32671$.

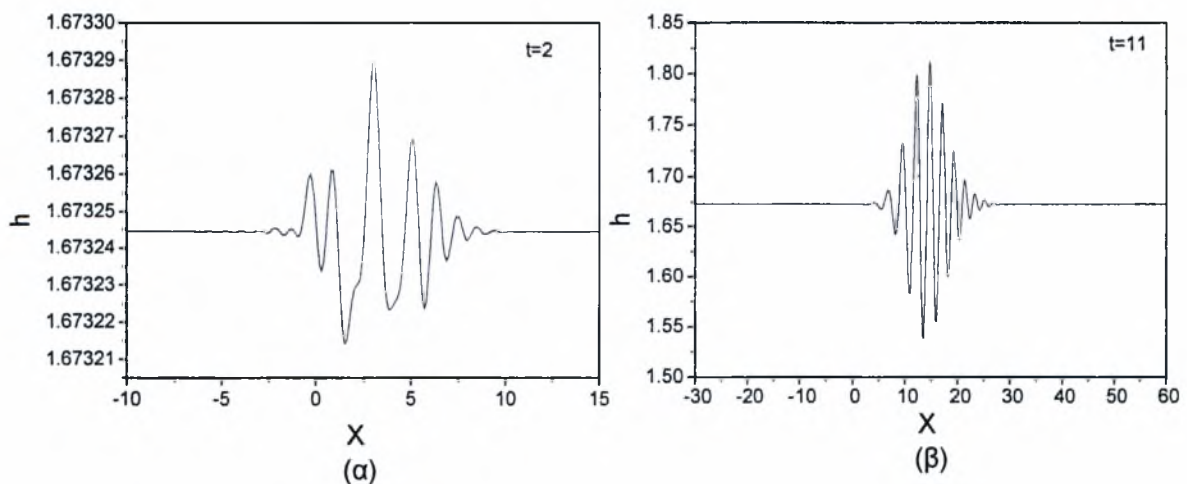
Η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αέρα νερού που παρουσιάστηκε παραπάνω αφορά στην επιβολή στιγμιαίας διαταραχής στη θέση $x_0=1.5$ της

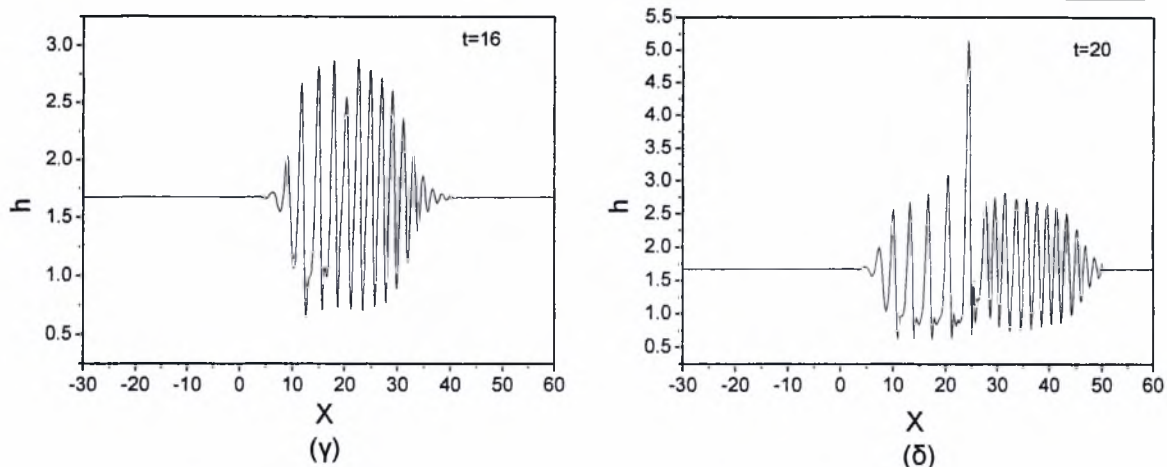
διεπιφάνειας για την οποία η θεωρία προβλέπει απόλυτη αστάθεια. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η παραπάνω συμπεριφορά του συστήματος αέρα-νερού παρατηρείται ανεξάρτητα από τη φύση της αστάθειας που προβλέπει η γραμμική θεωρία αλλά και από το αν η αρχική διαταραχή που ασκείται είναι περιοδική στο χρόνο ή όχι. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό επιβάλλοντας την διαταραχή τη θέση $x_0=0.6$ για την οποία, σύμφωνα με τη θεωρία, προβλέπεται συναγωγική αστάθεια. Στο Σχήμα 6.12 δίνεται η εξέλιξη της διεπιφάνειας για γραμμική ($d=0.001$), μη περιοδική διαταραχή. Παρατηρούμε ότι αρχικά εμφανίζεται ένα κυματοπακέτο με πιο γρήγορα αυξανόμενο μήκος κύματος 2.6, περίοδο 2.4 και ταχύτητα 1.3, χαρακτηριστικά που συμφωνούν με τις προβλέψεις της γραμμικής θεωρίας. Στην συνέχεια παρατηρείται η γνωστή μη γραμμική συμπεριφορά κατά την οποία το κυματοπακέτο, καθώς αυξάνει σε πλάτος, γίνεται ασταθές και αναπτύσσεται μια κορυφή με συνεχώς αυξανόμενο ύψος.



Σχήμα 6.12: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού για γραμμική διαταραχή ($d=0.001$), $x_0=0.6$, $H_0=1.67324$.

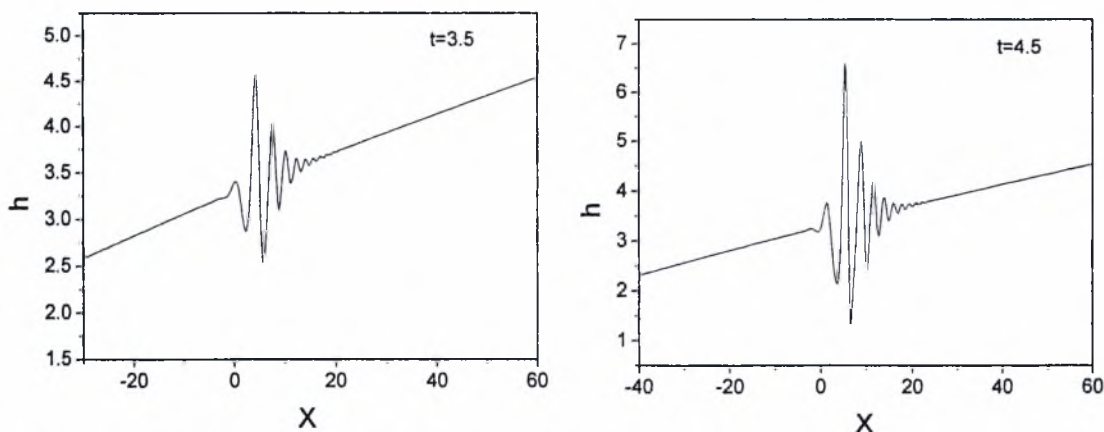
Στο Σχήμα 6.13 παρουσιάζεται η εξέλιξη της διεπιφάνειας στην περίπτωση που επιβάλλεται στη θέση $x=0.6$ γραμμική ($d=0.001$) και περιοδική ($\omega=12$) στο χρόνο διαταραχή. Για την συγκεκριμένη συχνότητα, η οποία ανήκει στην ασταθή περιοχή, η χωρική ανάλυση ευστάθειας προβλέπει ότι εκτός από το πιο ασταθές κυματοπακέτο θα διαμορφωθεί μια χωρικά ασταθής κατάσταση με μήκος κύματος 1.1. Κατά την δυναμική προσομοίωση αρχικά και για ένα μικρό χρονικό διάστημα (μέχρι $t=3$) εμφανίζεται το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στην συχνότητα που επιβάλλεται. Στο ίδιο χρονικό διάστημα αρχίζει να εμφανίζεται σιγά-σιγά και το μήκος κύματος του πιο ασταθούς κύματος. Για παράδειγμα στο πρώτο στιγμιότυπο ($t=2$) του Σχήματος 6.13 στην περιοχή κοντά στη θέση $X=0$ παρατηρείται το μήκος κύματος της χωρικά ασταθούς κατάστασης, ενώ λίγο πιο δεξιά επικρατεί το μήκος κύματος με τον μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης. Καθώς η διαταραχή εξελίσσεται στο χρόνο και επειδή το πιο επικίνδυνο κύμα έχει το μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης ($\omega_{i,max}=0.87$) τελικά επικρατεί επί της χωρικά ασταθούς διαμόρφωσης. Πράγματι, στο δεύτερο στιγμιότυπο ($t=11$) του Σχήματος 6.13 εμφανίζεται μόνο το ασταθές κυματοπακέτο. Η ανάλυση FT στα δυο αυτά στιγμιότυπα επιβεβαιώνει τις παραπάνω παρατηρήσεις. Αφήνοντας την διεπιφάνεια να εξελιχθεί σε ακόμη μεγαλύτερους χρόνους αποτυπώνεται η αποσύνθεση του γραμμικού κυματοπακέτου και η ανάπτυξη μιας κορυφής το πλάτος της οποίας δεν φαίνεται να σταματά να αυξάνεται.

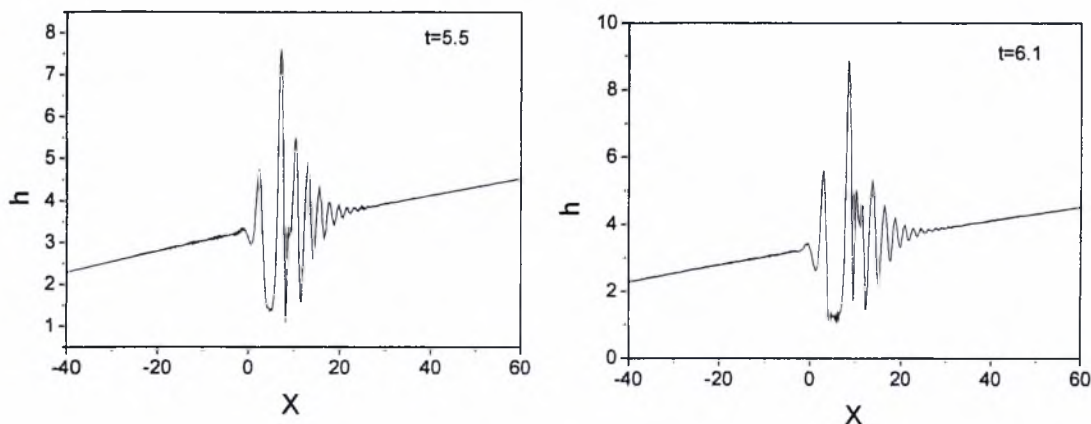




Σχήμα 6.13: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού για γραμμική περιοδική διαταραχή $x_0=0.6$, $H_0=1.67324$.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζει να διευρυνθεί ο τρόπος με τον οποίο συμπεριφέρεται η ροή όταν η θεωρία προβλέπει γενικευμένης (global) αστάθεια, δηλαδή αστάθεια που δεν δρα μόνο τοπικά αλλά εξαπλώνεται σε όλο το πεδίο ροής. Για να επιτραπεί η εμφάνιση γενικευμένων ασταθειών πρέπει να ληφθεί υπόψη η μεταβολή του πάχους του υγρού με την απόσταση. Για το σύστημα αέρα-νερού έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει η πιθανότητα γενικευμένης αστάθειας, σύμφωνα με τους Πελεκάση και Τσαμόπουλο (2001) και τη σχετική ανάλυση που παρουσιάστηκε αναλυτικά στο τρίτο κεφάλαιο. Στο Σχήμα 6.14 απεικονίζεται η χωροχρονική εξέλιξη της διεπιφάνειας αέρα-νερού όταν επιτρέπονται μεταβολές του πάχους του υμένα με την απόσταση, $x=x_0+Re^{-3/8}X$, και η διαταραχή επιβάλλεται στη θέση $x_0=1.5$. Για την συγκεκριμένη περίπτωση η θεωρία προβλέπει την ανάπτυξη γενικευμένης αστάθειας με ρυθμό $\omega_{Gr} \approx 0.02$. Παρά τις προβλέψεις της θεωρίας, η δυναμική προσομοίωση αποτυπώνει την ίδια συμπεριφορά κατά την οποία η ροή κυριαρχείται από μια κορυφή που συνεχώς αυξάνεται σε πλάτος. Και εδώ δεν εμφανίζεται γενικευμένη αστάθεια διότι ο ρυθμός αύξησής της είναι πολύ μικρός ενώ η εμφάνιση της μεγάλης κορυφής προηγείται και κυριαρχεί στην δυναμική του συστήματος.





Σχήμα 6.14: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού όταν επιτρέπονται οι μεταβολές με την απόσταση $x=x_0+Re^{-3/8}X$, $x_0=1.5$, $Re=10^5$, $d=0.1$.

Οι τελευταίες προσομοιώσεις απέδειξαν ότι για το σύστημα αέρα-νερού η τελική μορφή της διεπιφάνειας καθορίζεται από την εμφάνιση της ολοένα αυξανόμενης κορυφής. Ο μηχανισμός παραγωγής αυτής της κορυφής κρίνεται ότι είναι παρόμοιος με αυτόν της παραγωγής κορυφών όταν αγνοείται η αδράνεια. Κατ' αναλογία με την ερμηνεία που δόθηκε στην τελευταία περίπτωση, εάν εξεταστεί η ταχύτητα ομάδας των ακραίων κυμάτων του ασταθούς κυματοπακέτου, αυτή κυμαίνεται μεταξύ του 0 και 1.5~2 οπότε η φασική ταχύτητα στο όριο $k \rightarrow 0$, όπως προβλέπεται από την γραμμική σχέση διασποράς, ανήκει στο διάστημα αυτό. Όπως φαίνεται και από τα Σχήματα 6.7, 6.12 και 6.13 αναπτύσσονται και άλλες κορυφές που συνδέονται με κύματα μεγάλου μήκους οι οποίες όμως δεν εξελίσσονται περαιτέρω. Φαίνεται δε να κυριαρχούνται από την μεγάλη κορυφή που εμφανίστηκε πρώτη και η οποία μεγαλώνει συνεχώς εξαντλώντας το ανάντη τμήμα της λόγω της μεγάλης αδράνειας. Έτσι τα κύματα που ακολουθούν δεν έχουν υλικό να απορροφήσουν με αποτέλεσμα να παραμένουν στάσιμα σε μέγεθος.

6.2.3 Προσδιορισμός κρίσιμης τιμής M

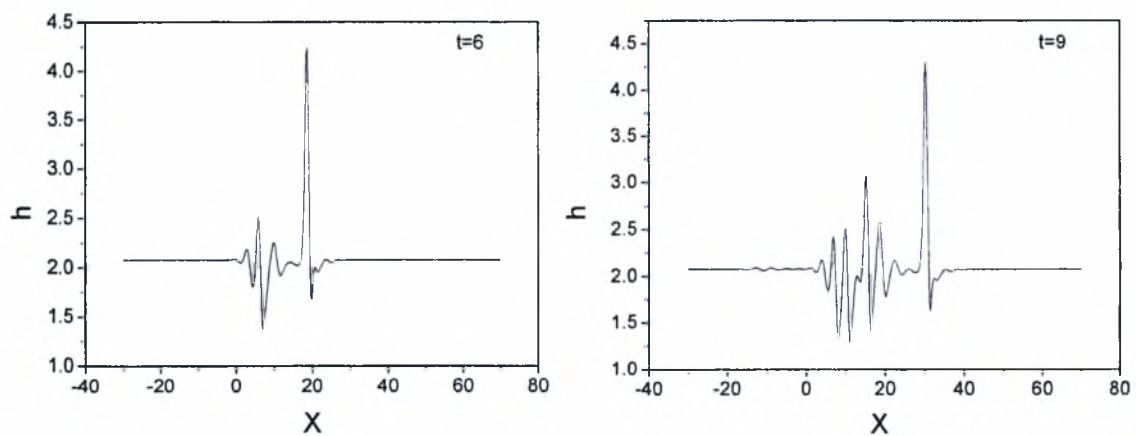
Μέχρι στιγμής αποδείξαμε ότι η αδράνεια του υγρού δεν μπορεί να αγνοηθεί σε όλες τις περιπτώσεις αφού η επίδραση που έχει εξαρτάται από το πόσο περισσότερο ιξώδες είναι το υγρό σε σχέση με το αέριο. Στην συνέχεια γίνεται προσπάθεια να καθοριστεί ο ελάχιστος λόγος ιξωδών πάνω από τον οποίο η αδράνεια του υγρού αρχίζει να επηρεάζει την εξέλιξη της ροής. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται τέσσερα διαφορετικά de-icing ρευστά των οποίων οι ιδιότητες δίνονται από τους Ozgen et al. (2002). Το χαρακτηριστικό μήκος L της επιφάνειας θεωρείται ίσο με 0.279m, το αέριο ρεύμα ρέει με ταχύτητα $U_\infty = 27.28\text{m/sec}$ και το αρχικό ύψος του

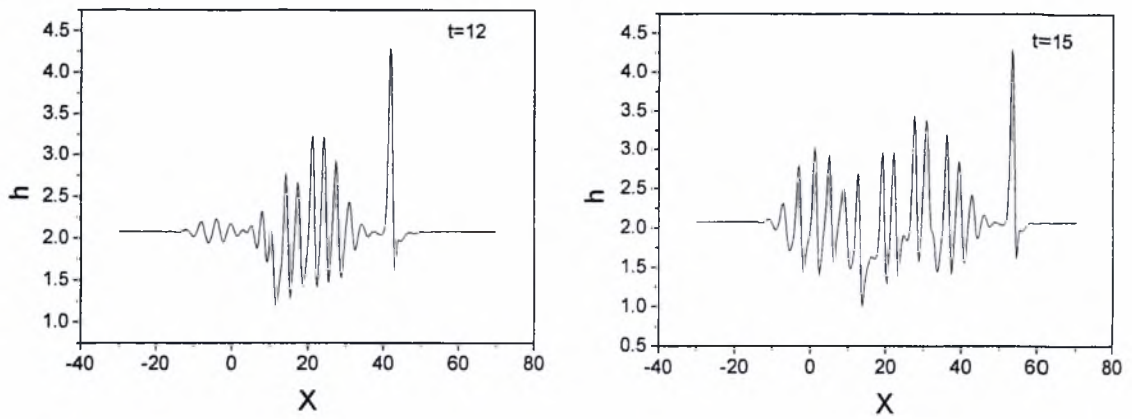
υγρού υμένα λαμβάνεται ίσο με $H_0 = 2.076$. Στον πίνακα 6.3 δίνονται οι αδιάστατες τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται για κάθε ένα από τα de-icing ρευστά.

Υγρό ρευστό	ρ/ρ_w	μ/μ_w	M	\overline{Fr}	\overline{We}
M75 (25% νερό)	0.00131	$1.22 \cdot 10^{-3}$	0.00114	39425.148	58.63
M50 (60% νερό)	0.00132	$2.83 \cdot 10^{-3}$	0.006	39425.15	65.81
D100 (αδιάλυτο)	0.00128	$9.38 \cdot 10^{-4}$	0.00068	39425.155	47.37
D75 (25% νερό)	0.001	$1.98 \cdot 10^{-3}$	0.0039	39425.13	59.38

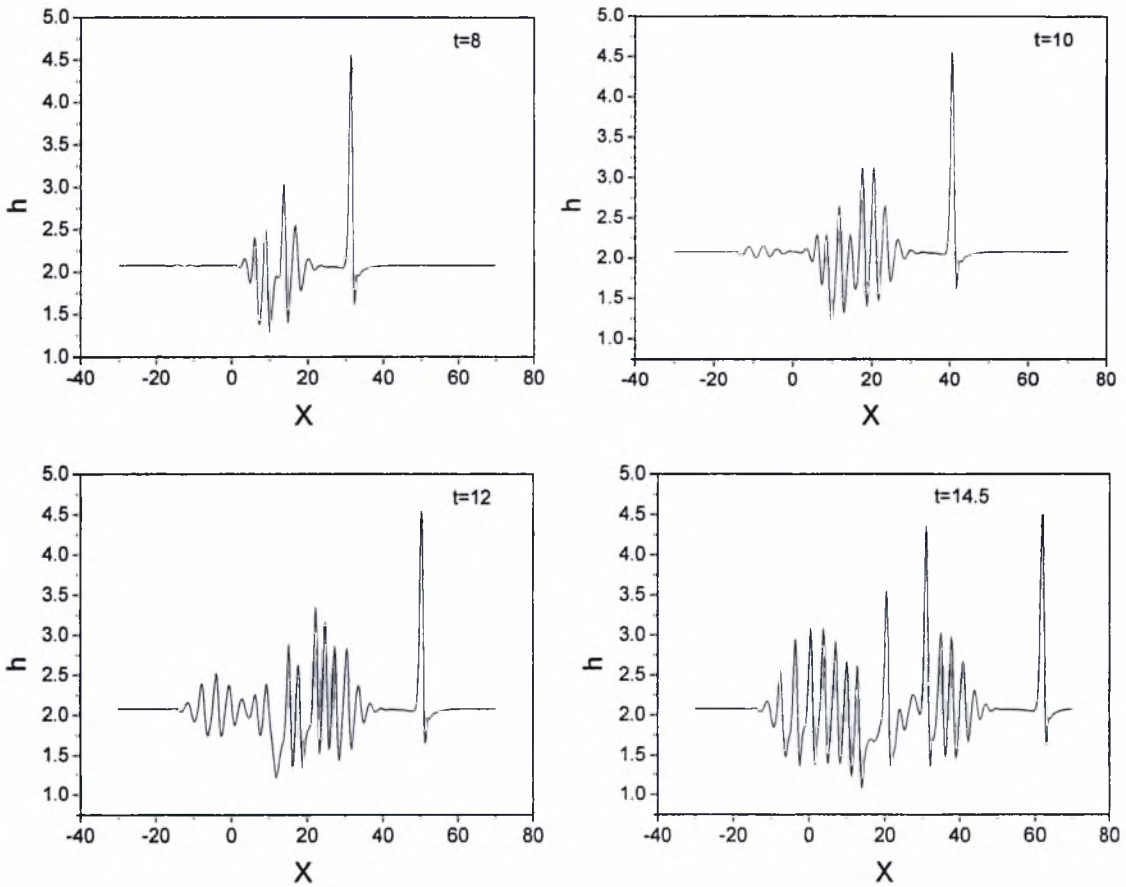
Πίνακας 6.3: Αδιάστατες παράμετροι για de-icing ρευστά.

Στα Σχήματα 6.15 έως 6.18 δίνονται στιγμιότυπα των διεπιφανειακών κυμάτων για κάθε ένα από τα τέσσερα διαφορετικά de-icing ρευστά. Για τα ρευστά M75, D100, D75 χρησιμοποιήθηκε αρχική διαταραχή με $d=0.8$, ενώ για το ρευστό M50 επιβάλλεται διαταραχή με $d=0.1$. Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται χρονικό βήμα ίσο με 0.001 και χωρικό βήμα 0.2, 0.4 στη x-και y-κατεύθυνση αντίστοιχα.

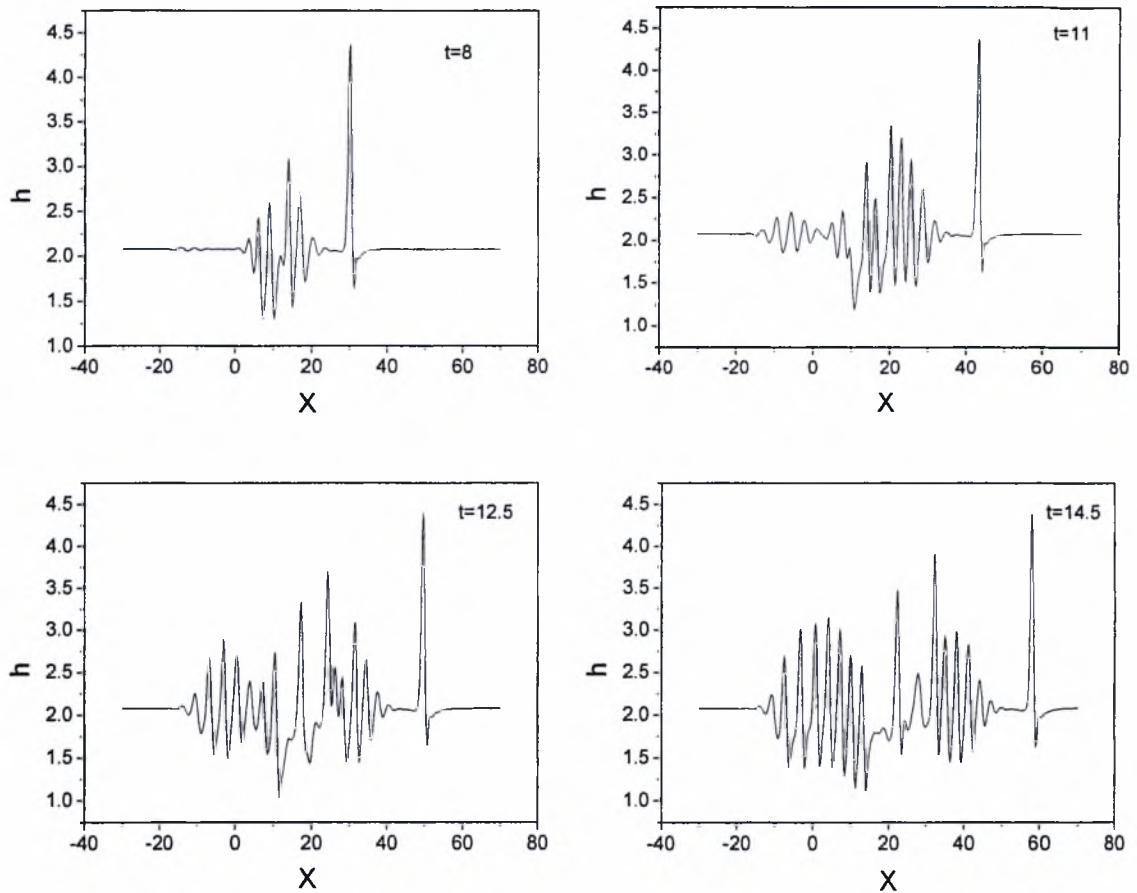




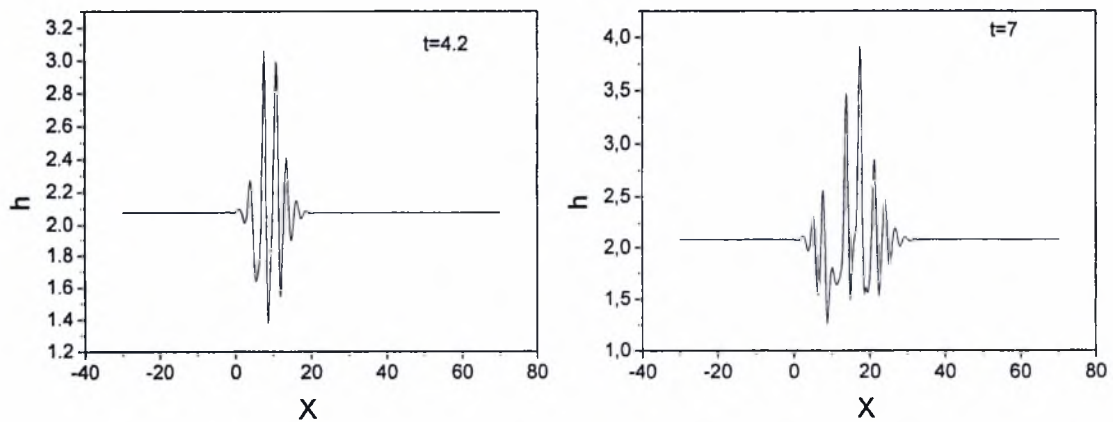
Σχήμα 6.15: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-D100, $d=0.8$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

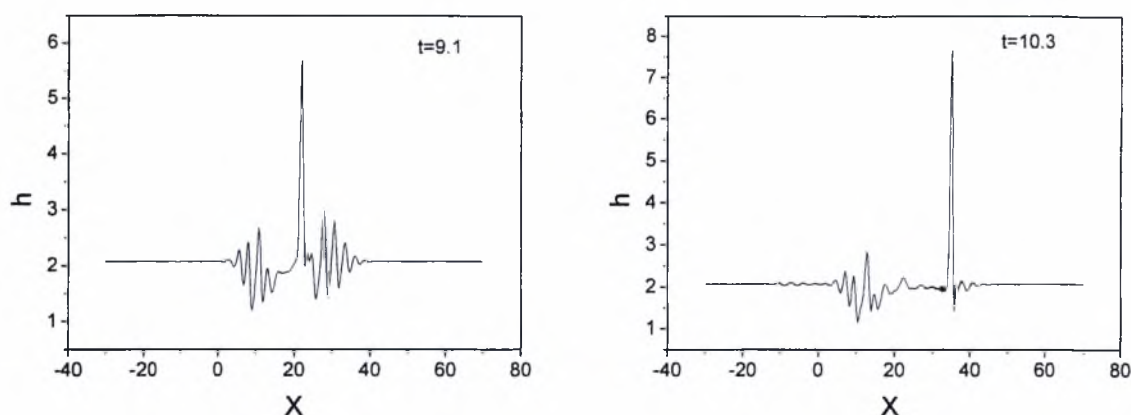


Σχήμα 6.16: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-D75, $d=0.8$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.



Σχήμα 6.17: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα M75, $d=0.8$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.





Σχήμα 6.18: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων για το σύστημα αέρα-M50, $d=0.1$, $x_0=0.8$, $H_0=2.07617$.

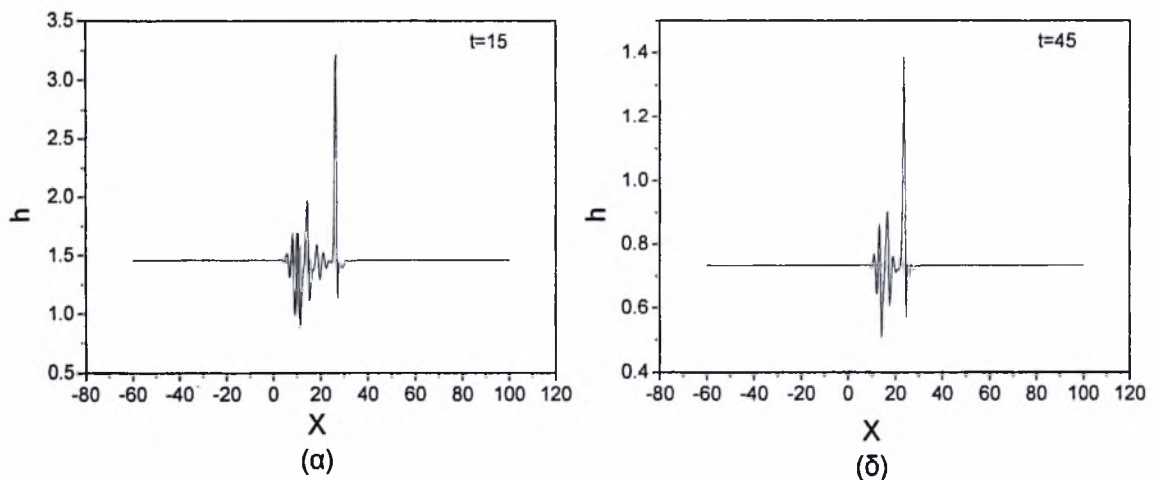
Από τα παραπάνω διαγράμματα γίνεται αντιληπτό ότι μόνο το ρευστό M50 εμφανίζει μια συνεχώς αυξανόμενη κορυφή. Τα υπόλοιπα τρία σχηματίζουν κορυφές που δεν ξεπερνούν το διπλάσιο του αρχικού πάχους. Συμπεραίνουμε επομένως ότι η αδράνεια επηρεάζει την εξέλιξη του φαινομένου μόνο στην περίπτωση του ρευστού M50. Από τις τιμές της παραμέτρου M που δίνονται στον πίνακα 6.2 παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ της παραμέτρου M που αντιστοιχεί στο σύστημα αέρα-M50 ($M \approx 0.006$) και αυτής του συστήματος αέρα-D75 ($M \approx 0.0039$). Παρόλα αυτά, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μεγάλη διαφορά στη συμπεριφορά των δυο ρευστών. Μπορούμε επομένως να συμπεράνουμε ότι, για το συγκεκριμένο πάχος υγρού ($H_0=2.07617$) και τη διάτμηση που αντιστοιχεί στη δεδομένη θέση ($x_0=0.8$), η ελάχιστη τιμή της παραμέτρου M πάνω από την οποία η αδράνεια επιδρά σημαντικά στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων κυμαίνεται γύρω από την τιμή που αντιστοιχεί στο σύστημα αέρα-M50. Το εύρημα αυτό ενισχύει ακόμα περισσότερο το συμπέρασμα ότι πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή του κατάλληλου μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση συγκεκριμένου συστήματος ρευστών.

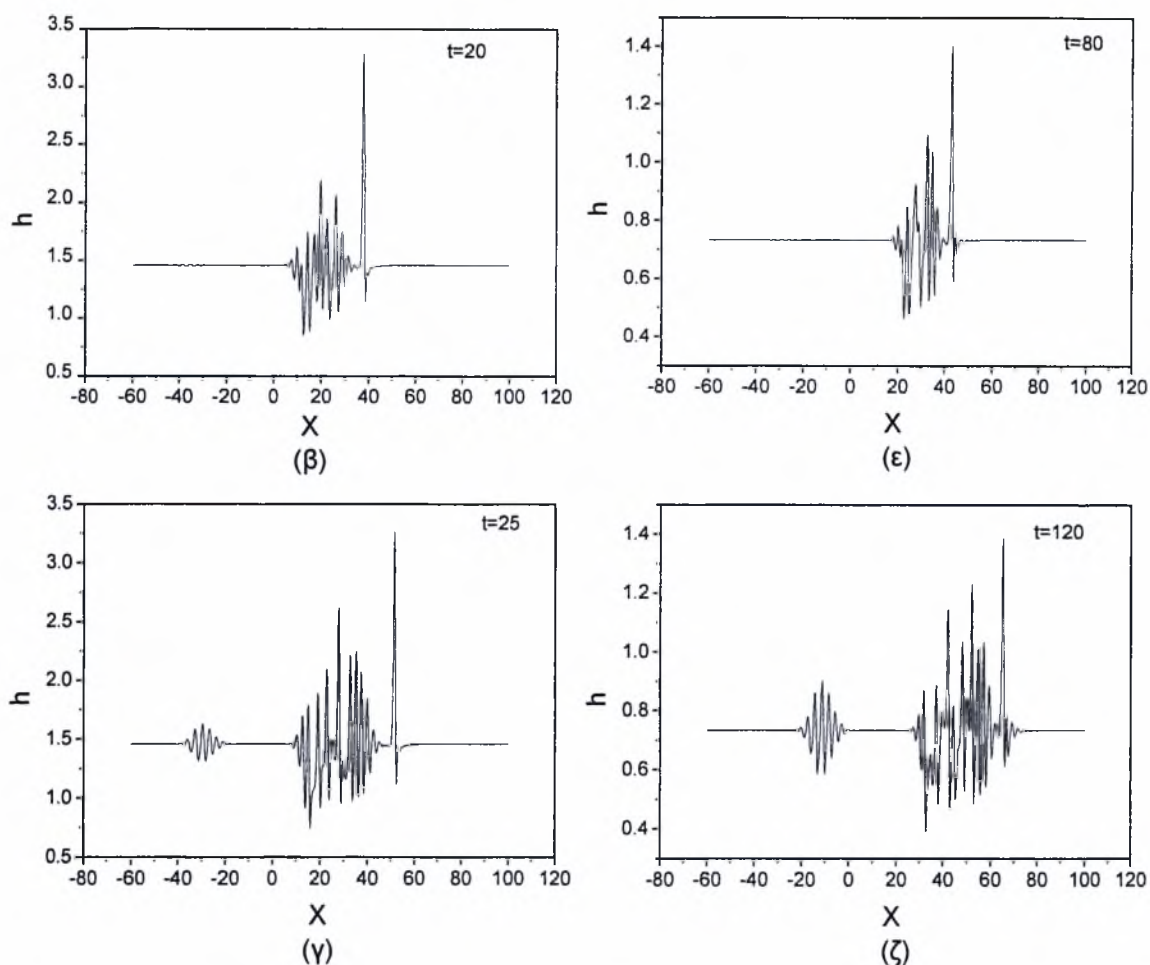
6.2.4 Επίδραση πάχους υγρού στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων

Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο αποδείχθηκε ότι για δεδομένο πάχος υμένα και δεδομένη διάτμηση υπάρχει μία κρίσιμη τιμή της παραμέτρου M πάνω από την οποία η αδράνεια επηρεάζει σημαντικά την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Στην συνέχεια, εξετάζεται το κατά πόσο η συμπεριφορά των κυμάτων διεπιφάνειας

εξαρτάται από το πάχος του υγρού, για δεδομένο σύστημα ρευστών και για δεδομένη διάτμηση.

Αρχικά, εξετάζεται το σύστημα αέρα-M50 για το οποίο διαπιστώθηκε ότι για αρχικό πάχος υγρού $H_0=2.07617$ και για διάτμηση ($\lambda=0.3711$) που αντιστοιχεί στη θέση $x_0=0.8$ η αδράνεια προκαλεί την εμφάνιση μιας συνεχώς αυξανόμενης κορυφής. Για το ίδιο σύστημα ρευστών, διατηρείται σταθερή η διάτμηση και μεταβάλλεται το αρχικό πάχος του υγρού ώστε να διαπιστωθεί αν υπάρχει κάποια αλλαγή στη συμπεριφορά του συστήματος. Στο Σχήμα 6.19 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για αρχικό πάχος υμένα $H_0=1.46$. Είναι εμφανές ότι η συμπεριφορά των δυο ρευστών άλλαξε με την μείωση του πάχους του υγρού. Πιο συγκεκριμένα, αν και ο λόγος των ιξωδών δεν μεταβάλλεται, η μείωση του πάχους του υμένα έχει ως αποτέλεσμα τα κύματα της διεπιφάνειας να μην σχηματίσουν μια κορυφή που συνεχώς αυξάνεται σε πλάτος, αλλά αντίθετα να συμπεριφερθούν όπως τα συστήματα στα οποία αγνοείται η αδράνεια του υγρού. Με άλλα λόγια, μειώνοντας το πάχος του υγρού η αδράνεια παύει να παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων του συγκεκριμένου συστήματος. Η αλλαγή αυτή στην συμπεριφορά της ροής παρατηρείται και για το σύστημα αέρα-νερού αν το πάχος του νερού μειωθεί αρκετά ($H_0=0.73$), όπως φαίνεται στα στιγμιότυπα (δ)-(ζ) του Σχήματος 6.19. Η μόνη διαφορά είναι ότι χρειάζεται μεγαλύτερη μείωση στο πάχος του υμένα για το σύστημα αέρα-νερού επειδή η παράμετρος M του συγκεκριμένου συστήματος ($M=0.324$) είναι αρκετά μεγαλύτερη από την τιμή της παραμέτρου για το σύστημα αέρα-M50 ($M=0.006$).

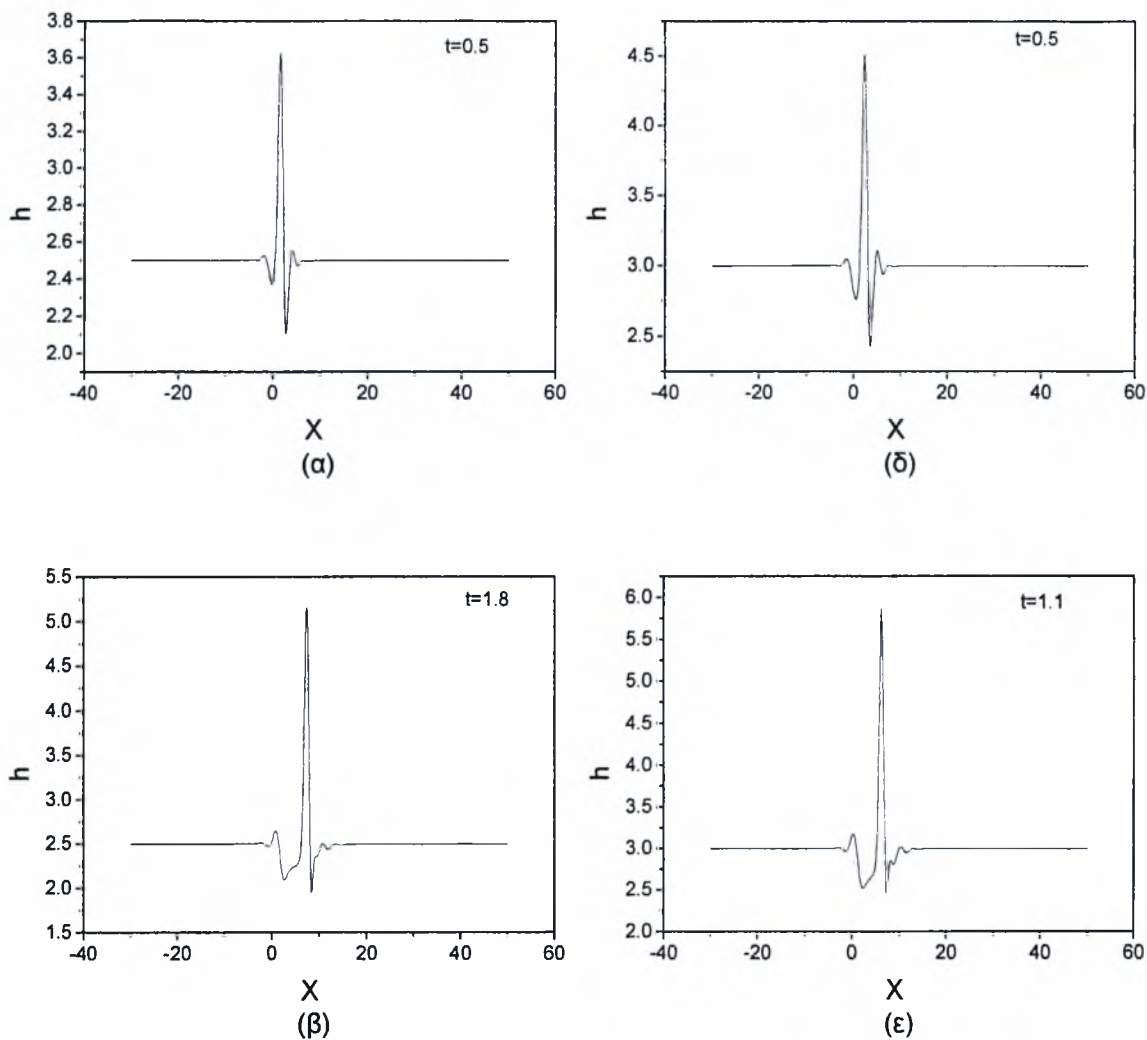


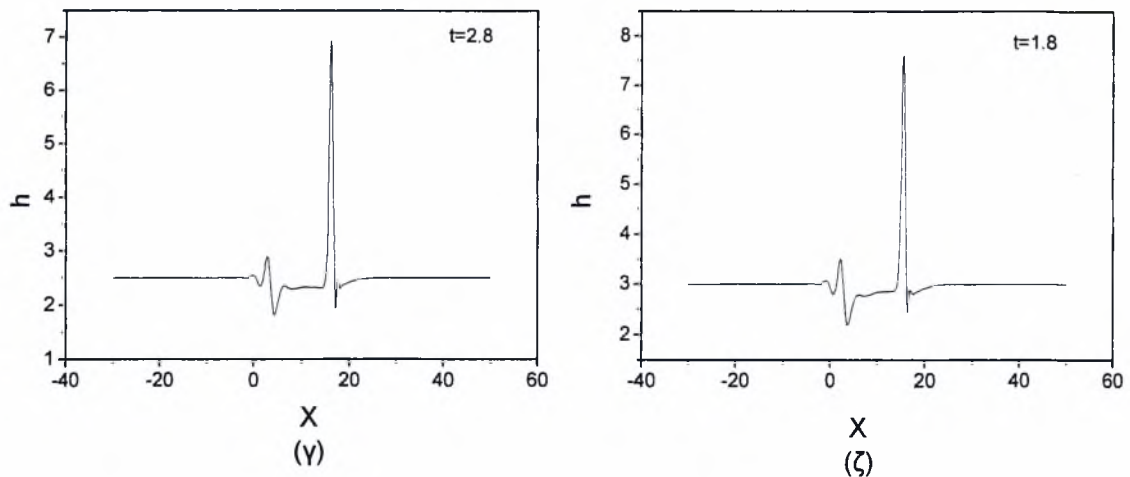


Σχήμα 6.19: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων ($d=0.4$, $x_0=0.8$) για το σύστημα (α)-(γ) αέρα-M50 με $H_0=1.46$ και (δ)-(ε) αέρα-νερού με $H_0=0.73$.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, αν θεωρηθεί ένα σύστημα ρευστών για το οποίο δεν έχει καταγραφεί επίδραση της αδράνειας του υγρού και αυξηθεί το αρχικό πάχος του υμένα τότε είναι αναμενόμενο να διαφοροποιηθεί η συμπεριφορά του. Ειδικότερα, αναμένεται να μεταβεί, από τον σχηματισμό κορυφών διπλάσιου πάχους από το αρχικό, στην ανάπτυξη μιας μόνο κορυφής που συνεχώς αυξάνεται. Πράγματι, θεωρώντας το σύστημα αέρα-D75 και αυξάνοντας το αρχικό ύψος του υγρού από 2.076 σε 2.5, Σχήμα 6.20, παρατηρούμε ότι η αδράνεια του υμένα είναι αυτή που καθορίζει την εξέλιξη της διεπιφάνειας. Στο ίδιο σχήμα και στα διαγράμματα (δ), (ε) και (ζ) παρουσιάζεται η συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων όταν στο σύστημα αέρα-M75 το αρχικό ύψος αυξηθεί από 2.076 σε 3. Και στην περίπτωση αυτή η αδράνεια του υγρού παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη της ροής. Η μόνη διαφορά μεταξύ των δυο περιπτώσεων είναι στην τιμή του κρίσιμου

ύψους του υμένα πάνω από την οποία η αδράνεια γίνεται σημαντική. Είναι αυτονόητο ότι, επειδή η παράμετρος M για το σύστημα αέρα-M75 ($M=0.00114$) είναι μικρότερη από την αντίστοιχη παράμετρο του συστήματος αέρα-D75 ($M\approx 0.0039$), το κρίσιμο πάχος του υγρού θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο για το πρώτο σύστημα ρευστών. Όντως, όπως προκύπτει από το Σχήμα 6.20, το κρίσιμο ύψος για το σύστημα αέρα-M75 ισούται με $H_c=3$, ενώ η αντίστοιχη τιμή για το σύστημα αέρα-D75 είναι $H_c=2.5$.





Σχήμα 6.20: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειακών κυμάτων στη θέση $x_0=0.8$ (α)-(γ) για το σύστημα αέρα-D75 με $H_0=2.5$ και (δ)-(ζ) για το σύστημα αέρα-M75 με $H_0=3$.

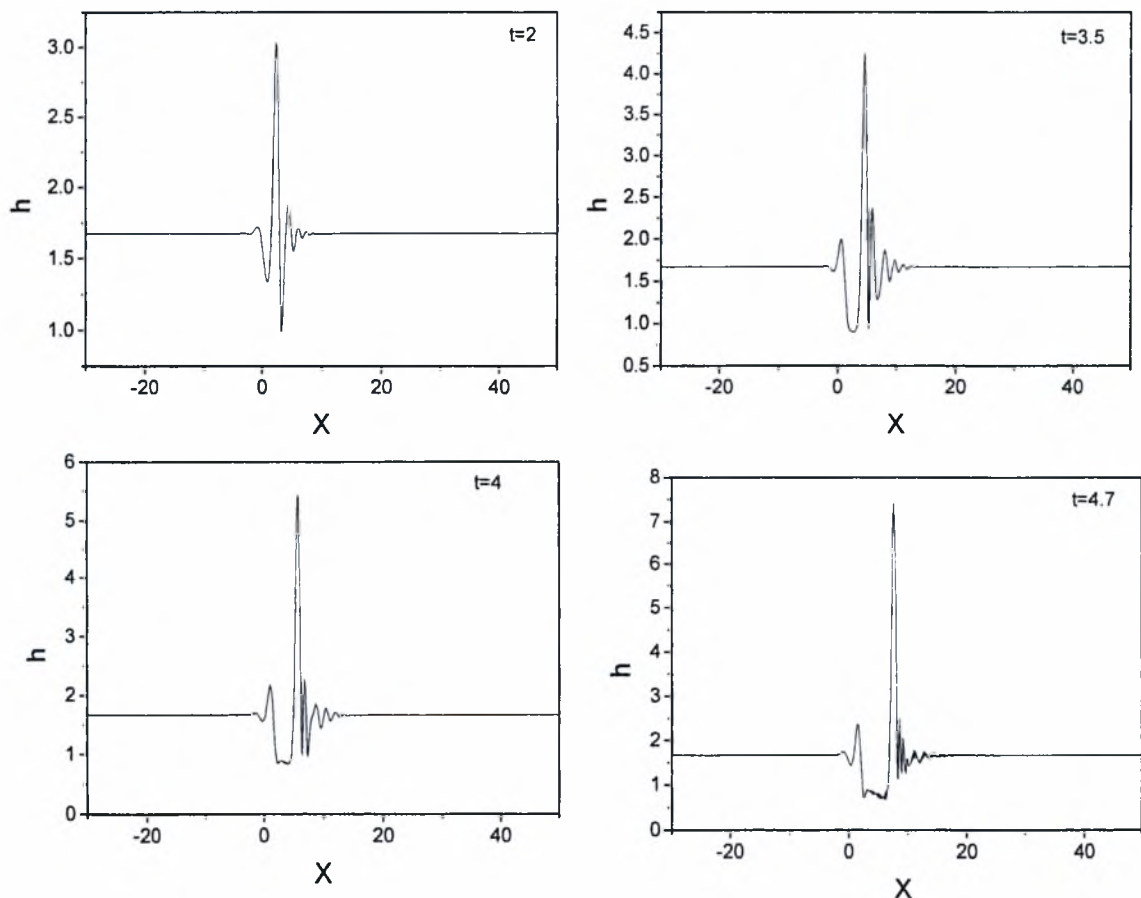
Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, το πόσο σημαντική είναι η αδράνεια του υγρού στην εξέλιξη της ροής δεν εξαρτάται μόνο από το λόγο ιξωδών μεταξύ των δυο φάσεων, αλλά και από το αρχικό πάχος του υγρού υμένα. Πιο συγκεκριμένα αποδείχθηκε ότι για δεδομένο σύστημα ρευστών, μεταβάλλοντας το πάχος του υγρού μεταβάλλεται και η επίδραση που έχει η αδράνεια στο σύστημα. Το συμπέρασμα αυτό είναι λογικό αφού αυξάνοντας το πάχος του υμένα αυξάνεται η μαζική παροχή του και κατά συνέπεια η αδράνεια του γίνεται λιγότερο σημαντική. Παρόλα αυτά, πρέπει να τονισθεί ότι αν το υγρό είναι πολύ πιο ιξώδες από το αέριο, ώστε ο λόγος των ιξωδών μεταξύ των δύο φάσεων να μπορεί να θεωρηθεί μηδενικός, η αύξηση του πάχους του υμένα δεν προκαλεί καμία αλλαγή στην εξέλιξη της ροής. Τέτοια περίπτωση είναι το σύστημα αέρα de-icing που χρησιμοποιήθηκε για τις προσομοιώσεις στην γραμμική περιοχή. Για το συγκεκριμένο σύστημα η τιμή της παραμέτρου M ισούται με $2.7 \cdot 10^{-9}$ και, όπως είναι αναμενόμενο, παρατηρήθηκε ότι αυξάνοντας το πάχος του δεν μεταβάλλεται η συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων.

6.2.5 Επίδραση επιφανειακής τάσης στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων

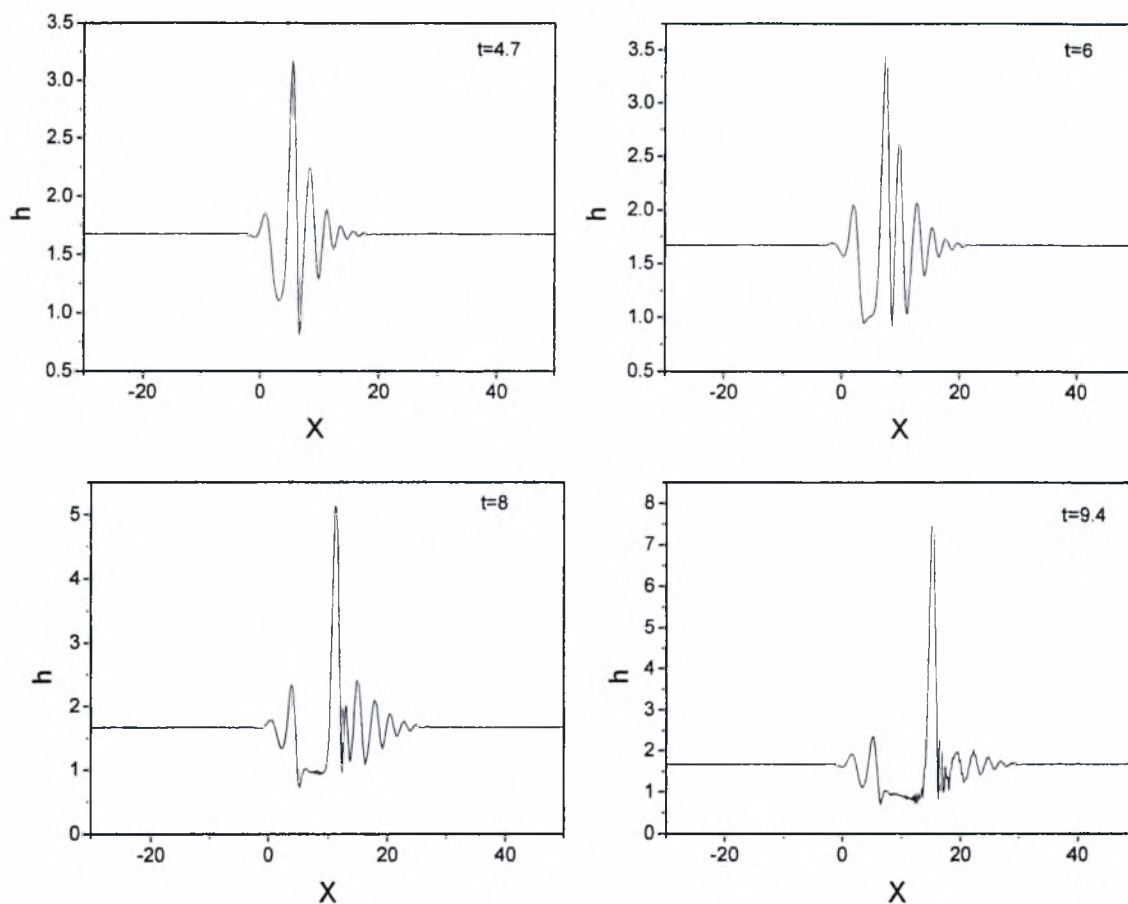
Μια άλλη παράμετρος του προβλήματος που αξίζει να διερευνηθεί το πώς επηρεάζει την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων στη μη γραμμική περιοχή είναι η επιφανειακή τάση του υγρού. Όσον αφορά στην γραμμική περιοχή έχει αποδειχθεί

(Pelekasis & Tsamopoulos, 2001) ότι μειώνοντας τον αριθμό We , και επομένως αυξάνοντας την επίδραση των επιφανειακών δυνάμεων σε σχέση με τις αδρανειακές, η περιοχή της απόλυτης αστάθειας μετακινείται σε μεγαλύτερες αποστάσεις. Όταν ο We πάρει μια κρίσιμη τιμή τότε η αστάθεια γίνεται συναγωγική, ενώ ακόμη μεγαλύτερη μείωση οδηγεί σε ευσταθείς λύσεις γεγονός που επιβεβαιώνει τον σταθεροποιητικό χαρακτήρα της επιφανειακής τάσης στην γραμμική περιοχή.

Για να μελετηθεί η επίδραση της επιφανειακής τάσης στην μη-γραμμική περιοχή, θεωρείται το σύστημα αέρα-νερού με παραμέτρους $\mu/\mu_w = 0.018$, $\rho/\rho_w = 0.001$, $\overline{Fr} = 92592.592$ και αρχικό ύψος υμένα $H_0 = 1.67324$. Στη συνέχεια, πραγματοποιούνται προσομοιώσεις με διαφορετικούς αριθμούς We ώστε να παρατηρηθούν τυχόν αλλαγές στην συμπεριφορά της ροής. Επιβάλλεται στη θέση $x_0 = 0.6$ της διεπιφάνειας διαταραχή αρχικού πλάτους $d = 0.4$ και καταγράφεται η εξέλιξη της στο χώρο και το χρόνο. Στο Σχήμα 6.21 δίνονται τα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης για $\overline{We} = 46.296$, ενώ στο Σχήμα 6.22 χρησιμοποιείται $\overline{We} = 20.37$.

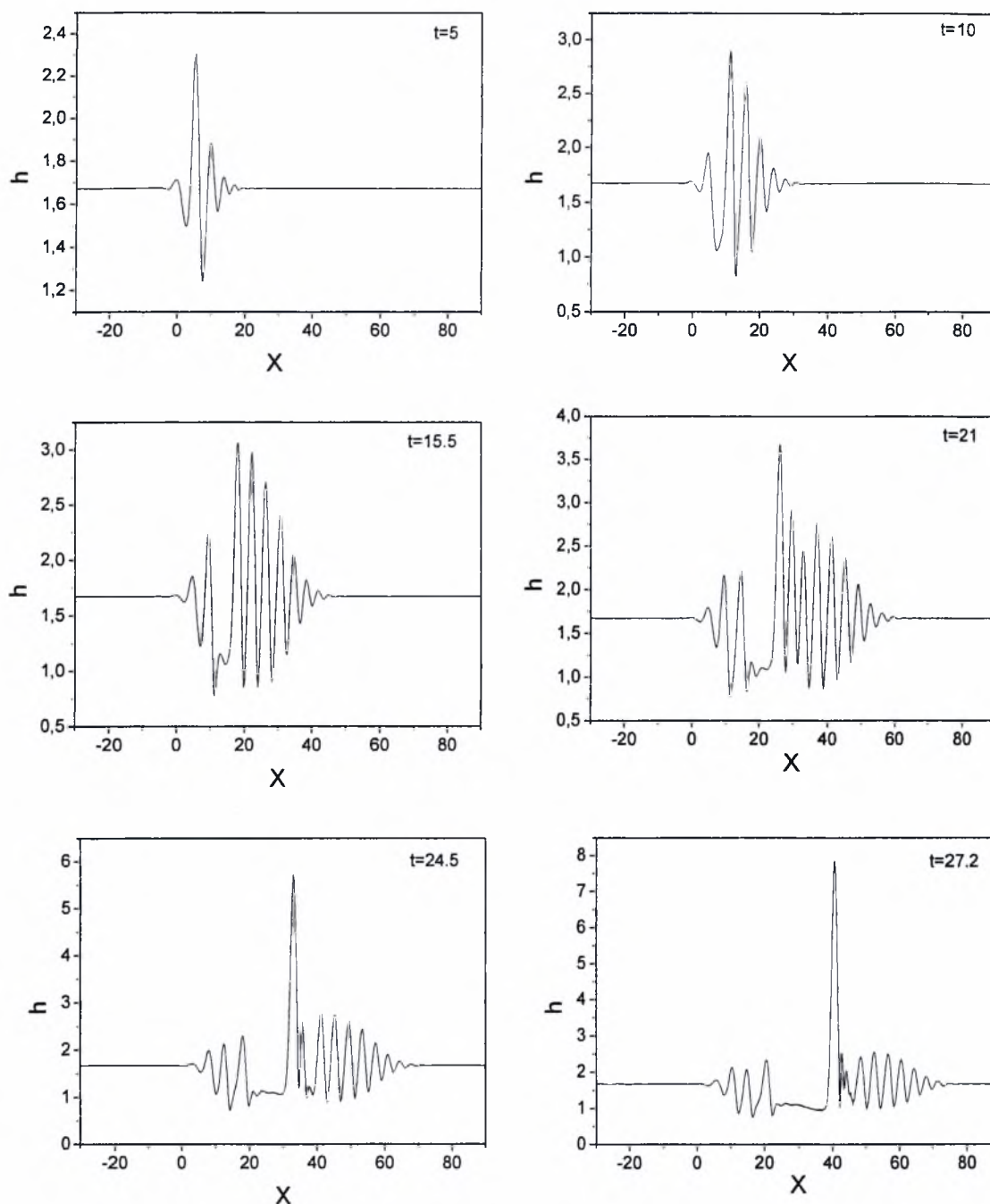


Σχήμα 6.21: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφάνειας αέρα-νερού στη θέση $x_0 = 0.6$ για $\overline{We} = 46.296$



Σχήμα 6.22: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειας αέρα-νερού στη θέση $x_0=0.6$ για $\overline{We} = 20.37$.

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι εμφανές ότι μεταβάλλοντας τον αριθμό We και κατά συνέπεια την επιφανειακή τάση, η ροή συμπεριφέρεται κατά τον ίδιο τρόπο ποιοτικά. Παρόλα αυτά, παρατηρείται ότι όταν μειώνεται ο αριθμός We υπάρχει μια σημαντική καθυστέρηση στην ανάπτυξη της κορυφής που αυξάνεται συνεχώς. Δηλαδή, αυξάνοντας την επιφανειακή τάση η μη γραμμικότητα του φαινομένου αργεί να κυριαρχήσει στη ροή, γεγονός που αποδεικνύει τον σταθεροποιητικό ρόλο της στην ανάπτυξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Επομένως, η επιφανειακή τάση καθορίζει μόνο το πόσο γρήγορα θα εξελιχθεί η αστάθεια, χωρίς να επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο αυτή θα εξελιχθεί. Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται με περαιτέρω μείωση του αριθμού We , όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.23 που αντιστοιχεί σε $\overline{We} = 8.64$. Πράγματι, ενώ η μορφή που παίρνει τελικά το σχήμα της διεπιφανειας είναι ίδια και στις τρεις περιπτώσεις, το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να συμβεί αυτό είναι πολύ μεγαλύτερο στην τελευταία περίπτωση η οποία αντιστοιχεί και στην μεγαλύτερη επιφανειακή τάση.



Σχήμα 6.23: Χωροχρονική εξέλιξη διεπιφανειας αέρα-νερού στη θέση $x_0=0.6$ για $\overline{We} = 8.64$.

6.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αποδείχθηκε ότι όταν το ιξώδες του υγρού είναι πολύ μεγάλο, ώστε να ισχύει $M \rightarrow 0$, η αδράνεια του δεν έχει καμία επίδραση στην εξέλιξη της ροής. Αντίθετα, για λιγότερο ιξώδη υγρά η αδράνεια επηρεάζει σημαντικά την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων. Πιο συγκεκριμένα, στην γραμμική περιοχή παρατηρείται μείωση της ταχύτητας μεταφοράς τους και μια διαφοροποίηση στο

μήκος κύματος τους. Η επίδραση όμως είναι πιο σημαντική στην μη-γραμμική περιοχή όπου το κυματοπακέτο σχηματίζει μια κορυφή με συνεχώς αυξανόμενο ύψος, ενώ πίσω της δημιουργείται μια κοιλότητα με αρκετά μικρό πάχος. Αποδεικνύεται ότι, ανεξάρτητα από το είδος της αστάθειας που προβλέπει η θεωρία και από το είδος της διαταραχής που επιβάλλεται, η ροή κυριαρχείται από την μη γραμμική συμπεριφορά του ασταθούς κυματοπακέτου.

Σχετικά με τον μηχανισμό μέσω του οποίου αναπτύσσεται η κορυφή με το πλάτος που συνεχώς αυξάνεται, είναι πιθανό να προέρχεται από ανάλογο φαινόμενο συντονισμού όπως οι κορυφές που εμφανίζονται όταν απουσιάζει η αδράνεια. Και εδώ έχουμε εμφάνιση κυμάτων μεγάλου μήκους που δεν ανήκουν στο ασταθές κυματοπακέτο και τα οποία, στο γραμμικό όριο, παρουσιάζουν φασική ταχύτητα που μπορεί να οδηγήσει σε συντονισμό με τα μικρά μήκη κύματος του ασταθούς κυματοπακέτου. Εξαιτίας της αδράνειας τα οδεύοντα κύματα μεγάλου μήκους που εμφανίζονται αργότερα αργούν πολύ να αναπτυχθούν και, ως εκ τούτου κυριαρχεί το προπορευόμενο κύμα μεγάλου μήκους το οποίο μεγαλώνει αδιάκοπα καταναλώνοντας την ανάντη περιοχή του. Το κύμα που σχηματίζεται κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα καθώς αυξάνεται και τροφοδοτείται συνεχώς με ενέργεια από τα ανάντη του, μέχρι να δώσει την δομή που περιγράφηκε και η οποία μπορεί να καταστρέψει την ακεραιότητα του συνοριακού στρώματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο σχηματισμός έντονης περιοχής ανακυκλοφορίας μπροστά από την κορυφή μέγιστου ύψους και αξίζει να διερευνηθεί το κατά πόσο μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή της δομής του συνοριακού στρώματος. Τέλος, διαπιστώθηκε ότι η συγκεκριμένη μη γραμμική συμπεριφορά προκαλεί έντονες μεταβολές στην πίεση του συνοριακού στρώματος αλλά και στην διάτμηση που δέχεται η στερεή επιφάνεια.

Μελετώντας τις παραμέτρους που καθορίζουν το αν οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού είναι σημαντικές αποδείχθηκε ότι, για δεδομένο πάχος υγρού και δεδομένη διάτμηση αέρα, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου M πάνω από την οποία η αδράνεια του υμένα γίνεται σημαντική. Μια άλλη σημαντική διαπίστωση είναι ότι για δεδομένο σύστημα ρευστών, δεδομένη τιμή της παραμέτρου $M \neq 0$, το πάχος του υμένα καθορίζει σε σημαντικό βαθμό τη συμπεριφορά της ροής. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι μεταβάλλοντας το πάχος του υγρού, και κατά συνέπεια τη μαζική παροχή του, η συμπεριφορά της ροής μπορεί να μεταπέσει από την μη-γραμμική συμπεριφορά που παρατηρείται όταν αγνοούνται οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού

στην συμπεριφορά που κυριαρχείται από την επίδραση της αδράνειας του υγρού και αντίστροφα. Οι παραπάνω παρατηρήσεις αποδεικνύουν πέρα από κάθε αμφιβολία ότι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή κατά την επιλογή του μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση των διεπιφανειακών κυμάτων. Εξετάζοντας την επίδραση που έχει στην μη γραμμική εξέλιξη της ροής η επιφανειακή τάση του υγρού διαπιστώθηκε ότι ο ρόλος της είναι σταθεροποιητικός. Πράγματι, η αύξηση της επιφανειακής τάσης έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του χρονικού διαστήματος για το οποίο η ροή κυριαρχείται από τη γραμμική συμπεριφορά και με τον τρόπο αυτό καθυστερεί η εμφάνιση υψηλών κορυφών που δημιουργούν προβλήματα στην ανάπτυξη του συνοριακού στρώματος.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να επιχειρηθεί μια ποιοτική σύγκριση μεταξύ της συμπεριφοράς των διεπιφανειακών κυμάτων που καταγράφηκε στο συγκεκριμένο κεφάλαιο και των πειραματικών παρατηρήσεων του Craik (1966). Ο Craik πραγματοποίησε πειράματα σε κανάλι με νερό και κατέγραψε διεπιφανειακά κύματα τα οποία τα χαρακτήρισε ως ‘αργά κύματα’ επειδή η φασική τους ταχύτητα είναι μικρότερη ή της ίδιας τάξης μεγέθους με την ταχύτητα της διεπιφάνειας. Στην ίδια μελέτη παρατήρησε ότι τα ‘αργά κύματα’ είναι μη περιοδικά και καθώς εξελίσσονται σχηματίζουν απότομες κορυφές το ύψος των οποίων είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μέσο πάχος του υμένα. Επίσης, παρατήρησε ότι για λεπτά πάχη υγρού υμένα είναι δυνατό να σχηματιστούν στην στερεή επιφάνεια ‘στεγνές’ περιοχές. Κατά την προσομοίωση του συστήματος αέρα-νερού που παρουσιάστηκε παραπάνω η φασική ταχύτητα υπολογίστηκε ίση με 1.1, ενώ η ταχύτητα διεπιφάνειας ισούται με 0.77. Με βάση τις παραπάνω τιμές θα μπορούσε να χαρακτηρίσει κανείς τα κύματα που καταγράφονται αριθμητικά ως ‘αργά’ σύμφωνα με τον ορισμό του Craik. Επίσης, υπάρχει συμφωνία μεταξύ των δυο μελετών ως προς την μη περιοδικότητα των κυμάτων και την ανάπτυξη απότομων κορυφών μεγάλου ύψους. Όσον αφορά στην καταγραφή ‘στεγνών’ περιοχών θα μπορούσε ενδεχομένως να αναφέρεται σε περιοχές όπου το πάχος του υγρού είναι πάρα πολύ λεπτό. Αριθμητικά για το σύστημα αέρα-νερού εντοπίστηκαν τέτοιες περιοχές στην κοιλότητα που ακολουθεί την κορυφή μεγάλου ύψους.

7. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ- TOLLMIEN SCHLICHTING ΚΥΜΑΤΩΝ

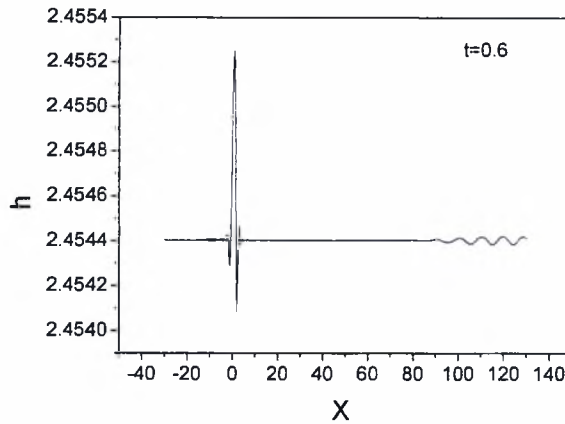
7.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό επιλύονται οι εξισώσεις που εκφράζουν το συνολικό πρόβλημα της ροής αερίου συνοριακού στρώματος πάνω από λεπτό υμένα υγρού. Αυτό σημαίνει ότι οι αδρανειακοί όροι περιλαμβάνονται στην υγρή φάση και παράλληλα επιτρέπονται χρονομεταβολές τόσο στην αέρια όσο και στην υγρή φάση. Με άλλα λόγια η παραδοχή της ημι-μόνιμης κατάστασης μέσα στην αέρια φάση δεν ισχύει. Στόχος της επίλυσης του συνολικού προβλήματος είναι να επιβεβαιωθεί το γεγονός ότι τα κύματα Tollmien-Schlichting δεν αλληλεπιδρούν με τα διεπιφανειακά και κατά συνέπεια η εισαγωγή διαφορετικών χρονικών κλιμάκων για την μελέτη τους είναι δικαιολογημένη.

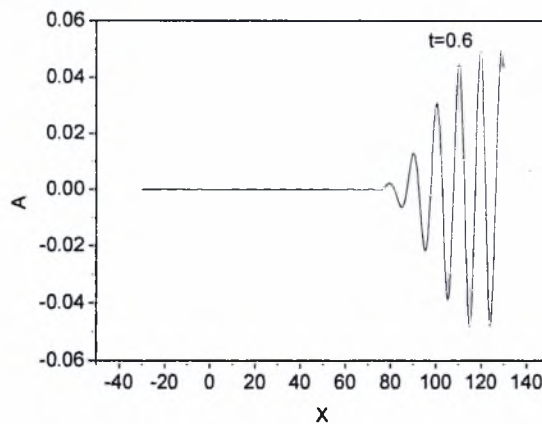
7.2 Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στο σύστημα αέρα-νερού και πραγματοποιούμε δυο διαφορετικές προσομοιώσεις. Για την αριθμητική επίλυση χρησιμοποιείται χωρικό βήμα 0.1 στην x-κατεύθυνση και 0.4 στην y-κατεύθυνση. Το χρονικό βήμα λαμβάνεται ίσο με 0.001.

Στην πρώτη προσομοίωση θεωρείται υμένας αρχικού ύψους 2.45, επιβάλλεται στη θέση $x_0=1$ της διεπιφάνειας μια γραμμική διαταραχή ($d=0.001$, $W=4$) και καταγράφεται η εξέλιξη της. Στο Σχήμα 7.1, όπου δίνεται ένα στιγμιότυπο της διεπιφάνειας για $t=0.6$, φαίνεται καθαρά ότι πριν ακόμα η διαταραχή που επιβάλλεται σχηματίσει το διεπιφανειακό κύμα, το πιο επικίνδυνο κύμα των Tollmien-Schlichting έχει αναπτυχθεί και έχει μεταφερθεί ως το δεξί άκρο της περιοχής προσομοίωσης. Το ακριβές σχήμα του κύματος Tollmien-Schlichting μπορεί να παρατηρηθεί καλύτερα στο διάγραμμα 7.2 όπου αποτυπώνεται το πάχος μετατόπισης στην ίδια χρονική στιγμή. Εφαρμόζοντας ανάλυση FT στο σήμα του διαγράμματος 7.2 υπολογίζεται ότι το αριθμητικό μήκος του κύματος είναι ίσο με 9.3. Η τιμή αυτή είναι σε συμφωνία με το μήκος που προβλέπεται από τη γραμμική θεωρία και αντιστοιχεί στο πιο επικίνδυνο κύμα των Tollmien-Schlichting.



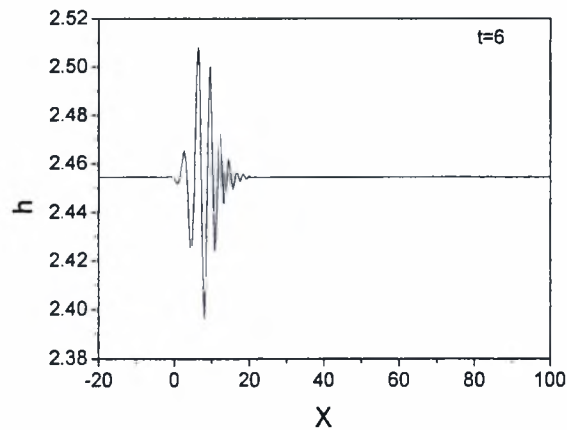
Σχήμα 7.1: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας όταν για $t=0$ επιβάλλεται διαταραχή με $d=0.001$ στην διεπιφάνεια.



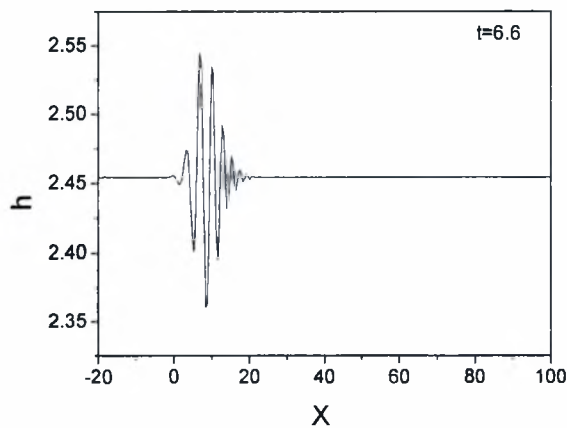
Σχήμα 7.2: Πάχος μετατόπισης όταν για $t=0$ επιβάλλεται διαταραχή με $d=0.001$ στην διεπιφάνεια.

Στη δεύτερη προσομοίωση επιβάλλουμε την ίδια διαταραχή ($d=0.001$) στην διεπιφάνεια και εισάγοντας την παραδοχή της ημι-μόνιμης κατάστασης στην αέρια φάση αφήνουμε το διεπιφανειακό κυματοπακέτο που σχηματίζεται να εξελιχθεί μέχρι μια συγκεκριμένη τιμή $t=6$. Στη συνέχεια, και στην ίδια χρονική στιγμή επιβάλλεται μια δεύτερη διαταραχή στην κύρια μάζα του συνοριακού στρώματος ($X=0, Y=2$). Ταυτόχρονα αποσύρεται η παραδοχή της ημι-μόνιμης κατάστασης και επιτρέπονται μεταβολές με το χρόνο και στις δυο φάσεις. Με τη διαδικασία αυτή καταφέρνουμε να παρατηρήσουμε τον σχηματισμό των Tollmien-Schlichting μετά την ανάπτυξη των διεπιφανειακών κυμάτων και κατά συνέπεια να εξεταστεί αν υπάρχει πιθανότητα αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο.

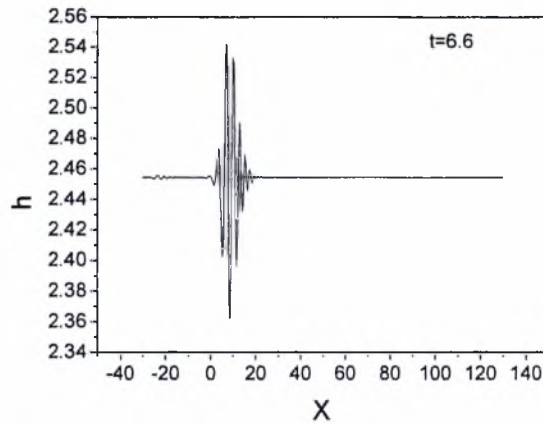
Στο Σχήμα 7.3 δίνεται η μορφή της διεπιφάνειας ακριβώς πριν εφαρμοστεί η δεύτερη διαταραχή στο συνοριακό στρώμα ($t=6$). Στο Σχήμα 7.4 φαίνεται ποία θα ήταν η εξέλιξη της διεπιφάνειας αν δεν επιβαλλόταν η δεύτερη διαταραχή και στο 7.5 φαίνεται η εξέλιξη της μετά τη επιβολή της διαταραχής και την άρση της παραδοχής για ημι-μόνιμη κατάσταση στο συνοριακό στρώμα. Τέλος, στο Σχήμα 7.6 παρουσιάζεται το πάχος μετατόπισης που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t=6.1$ και το πάχος μετατόπισης που αντιστοιχεί στο στιγμιότυπο του Σχήματος 7.5.



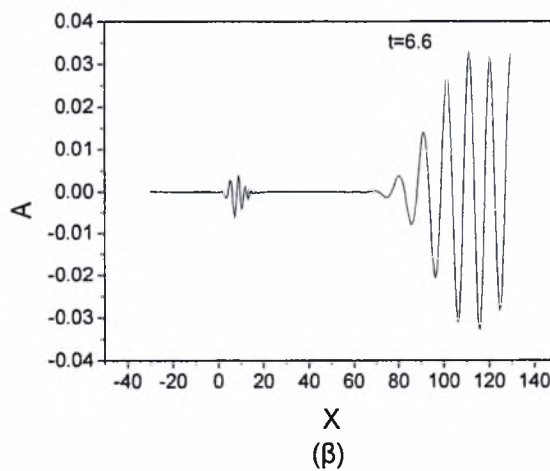
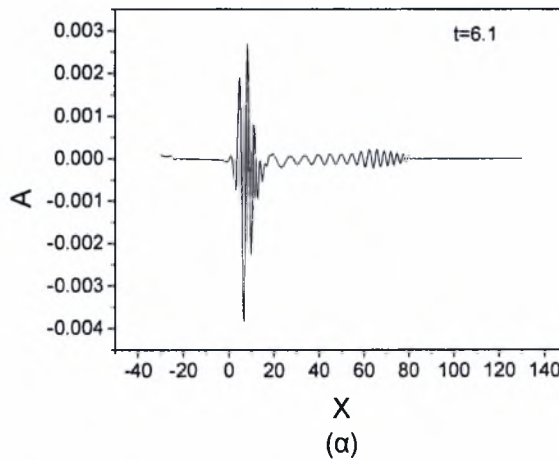
Σχήμα 7.3: Στιγμιότυπο της διεπιφάνειας πριν την επιβολή της διαταραχής στο συνοριακό στρώμα.



Σχήμα 7.4: Εξέλιξη διεπιφάνειας αν δεν επιβληθεί διαταραχή στο συνοριακό στρώμα.

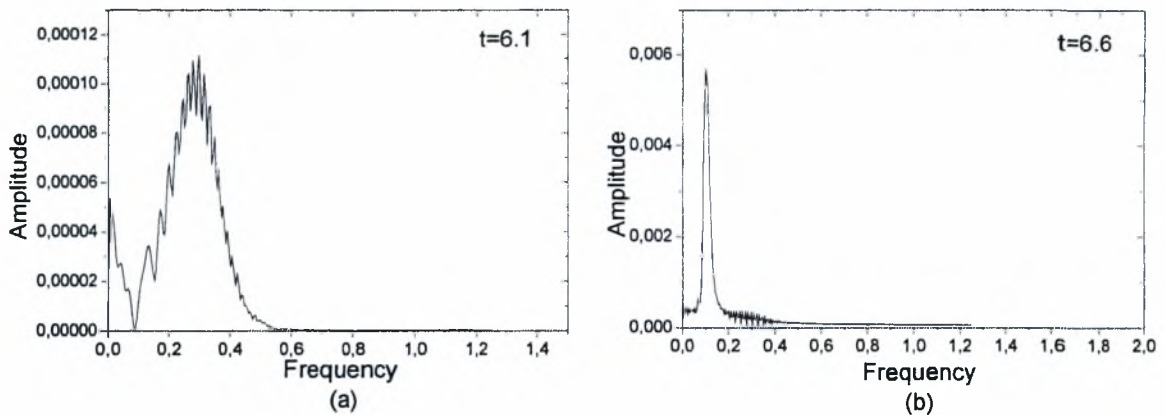


Σχήμα 7.5: Εξέλιξη διεπιφάνειας μετά την επιβολή της δεύτερης διαταραχής στο συνοριακό στρώμα.



Σχήμα 7.6: Στιγμιότυπα του πάχους μετατόπισης μετά την επιβολή της δεύτερης διαταραχής στο συνοριακό στρώμα.

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε σε αυτή την προσομοίωση είναι ότι πριν το πιο ασταθές κύμα του κυματοπακέτου των Tollmien-Schlichting σχηματιστεί, αναπτύσσεται ένα άλλο κύμα το οποίο είναι πιο γρήγορο και προπορεύεται, άλλα έχει μικρότερο ρυθμό ανάπτυξης. Η μορφή του κύματος φαίνεται καθαρά στο διάγραμμα 7.6(α) και το μήκος κύματος του είναι περίπου ίσο με αυτό του διεπιφανειακού κύματος. Επειδή οι μεταβολές των διεπιφανειακών κυμάτων γίνονται πολύ αργά σε σχέση με τις μεταβολές στα κύματα Tollmien-Schlichting, το συνοριακό στρώμα αντιλαμβάνεται το κύμα της διεπιφάνειας ως ένα σταθερό εμπόδιο με σταθερό μήκος κύματος ($\lambda=3.3$). Πράγματι, η περίοδος του διεπιφανειακού κύματος ($T_{in}=2.8$) είναι πολύ μεγαλύτερη από την περίοδο του πιο ασταθούς κύματος των Tollmien-Schlichting ($T_{TS}=0.07$) και κατά συνέπεια το συνοριακό στρώμα συμπεριφέρεται σαν να υπάρχει κάποιο σταθερό εμπόδιο πάνω στην στερεή επιφάνεια. Επιπλέον, για το συγκεκριμένο σύστημα ρευστών που εξετάζεται τυχαίνει το μήκος κύματος της διεπιφάνειας να ανήκει στην ασταθή περιοχή των κυματώσεων Tollmien-Schlichting και μάλιστα να έχει μεγαλύτερη ταχύτητα από το πιο ασταθές κυματοπακέτο και για το λόγο αυτό προπορεύεται. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με τη σχέση διασποράς των Tollmien-Schlichting κύματος, ο ρυθμός ανάπτυξης του κύματος με μήκος κύματος ίσο με αυτό του πιο ασταθούς κύματος του κυματοπακέτου των διεπιφανειακών ισούται με $\omega_i=7.3$, ενώ ο ρυθμός ανάπτυξης του πιο ασταθούς Tollmien-Schlichting κυματοπακέτου προβλέπεται ότι είναι ίσος με $\omega_{i,max}=13$. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά έχει καταγραφεί παλαιότερα σε μελέτες με αντικείμενο την επίδραση στερεών εμποδίων που ταλαντώνονται στην εξέλιξη των κυμάτων Tollmien-Schlichting (Duck, 1985). Με το πέρασμα του χρόνου πίσω από το κύμα που προπορεύεται αναπτύσσεται πολύ γρήγορα το πιο ασταθές κυματοπακέτο. Το ενδιαφέρον σε αυτή την προσομοίωση είναι ότι τα κύματα Tollmien-Schlichting σχηματίζονται στη θέση $X=0$, αναπτύσσονται και διαπερνούν το διεπιφανειακά κύματα χωρίς να τα επηρεάσουν καθόλου. Το εύρημα αυτό γίνεται καλύτερα αντιληπτό με σύγκριση των σχημάτων 7.4 και 7.5 τα οποία είναι πανομοιότυπα. Στο διάγραμμα 7.6(β) φαίνεται καθαρά ότι το κύμα της διεπιφάνειας βρίσκεται γύρω από τη θέση $X=10$ όταν το πιο ασταθές κύμα των Tollmien-Schlichting έχει διασχίσει και έχει φτάσει στο δεξί άκρο του πεδίου προσομοίωσης. Εφαρμόζοντας ανάλυση FT στα δύο στιγμιότυπα του πάχους μετατόπισης του Σχήματος 7.6 ανακτώνται τα δύο διαφορετικά χαρακτηριστικά μήκη κύματος των Tollmien-Schlichting, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7: Ανάλυση FFT στα στιγμιότυπα του πάχους μετατόπισης του σχήματος 7.6.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να σχολιασθεί ότι ίσως η ανάπτυξη του κύματος που προπορεύεται του ασταθούς κυματοπακέτου να μπορεί να εξηγήσει το φαινόμενο κατά το οποίο η μετάβαση σε τύρβη παρουσία ιξωδών υμένων χαρακτηρίζεται από μικρότερα μήκη κύματος σε σύγκριση με το πιο ασταθές Tollmien-Schlichting κύμα. Έχει αποδειχθεί (Timoshin, 1997) ότι για ρευστά ίσης πυκνότητας και σχετικά μικρού λόγου ιξωδών το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο πιο ασταθές Tollmien-Schlichting κύμα μειώνεται σημαντικά. Υπάρχει έτσι η πιθανότητα, για κατάλληλη τιμή της επιφανειακής τάσης, να εξισωθεί το μήκος κύματος του πιο ασταθούς Tollmien-Schlichting κυματοπακέτου με το πιο ασταθές διεπιφανειακό κύμα. Σε μια τέτοια περίπτωση και επειδή υπάρχει η τάση να ενσωματωθούν τα δύο κύματα, i.e Tollmien-Schlichting όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7.6α, το πιο ασταθές κυματοπακέτο θα αναπτυχθεί πολύ πιο γρήγορα και απότομα. Παρόλα αυτά θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ταύτιση των δύο πιο επικίνδυνων κυμάτων δεν είναι αναγκαία για να προκληθεί η μετάβαση σε τύρβη αφού και σε περιπτώσεις όπου τα δυο μήκη κύματος δεν συμπίπτουν, όπως είναι το σύστημα αέρα-νερού, υπάρχει ένα κύμα Tollmien-Schlichting που χαρακτηρίζεται από το μήκος κύματος του πιο ασταθούς διεπιφανειακού κυματοπακέτου. Κατά συνέπεια σε περιπτώσεις που αυτό το κύμα έχει την τάση να αναπτυχθεί σε τρισδιάστατη μορφή η μετάβαση σε τύρβη μπορεί να συμβεί πολύ πιο γρήγορα από ότι αναμένεται.

Τέλος, θα πρέπει να αναφερθεί ότι η παραπάνω συμπεριφορά των Tollmien-Schlichting κυμάτων είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος της αρχικής διαταραχής.

Επομένως, οι προσομοιώσεις για το σύστημα αέρα-νερού που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο αυτό επιβεβαίωσαν πέρα από κάθε αμφιβολία το γεγονός ότι δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των Tollmien-Schlichting και των διεπιφανειακών κυμάτων. Μάλιστα όσο μικρότερος είναι ο λόγος των ιξωδών μεταξύ αέριας και υγρής φάσης τόσο πιο αργή είναι η χρονική κλίμακα ανάπτυξης των διεπιφανειακών κυμάτων. Συνεπώς, η μελέτη των δυο ειδών κυμάτων χωριστά είναι απολύτως δικαιολογημένη και διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση της φυσικής του προβλήματος.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

8.1 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που εξάγονται από τη μελέτη των διεπιφανειακών κυμάτων με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή είναι:

- Το μοντέλο που αγνοεί τις αδρανειακές δυνάμεις του υγρού είναι κατάλληλο να προσομοιώσει τη ροή αερίου συνοριακού στρώματος πάνω από πολύ ιξώδη ρευστά όπως είναι πολλά ρευστά της κατηγορίας των de-icing. Αντίθετα, σε λιγότερο ιξώδη υγρά, όπως είναι το νερό, η αδράνεια του υγρού επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων και κατά συνέπεια δεν πρέπει να αγνοηθεί. Αποδείχθηκε ότι, για δεδομένο πάχος υγρού και δεδομένη διάτμηση αέρα, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της παραμέτρου M πάνω από την οποία η αδράνεια του υμένα γίνεται σημαντική.
- Μια άλλη παράμετρος που εντείνει την επίδραση της αδράνειας στην δυναμική της ροής είναι το πάχος του υγρού υμένα. Για συγκεκριμένο σύστημα ρευστών βρέθηκε ότι μεταβάλλοντας το πάχος του υγρού, και κατά συνέπεια τη μαζική παροχή του, η συμπεριφορά της ροής μπορεί να μεταπέσει από την συμπεριφορά που παρατηρείται όταν αγνοούνται οι αδρανειακές δυνάμεις του υγρού στην συμπεριφορά που χαρακτηρίζεται από την επίδραση της αδράνειας του υγρού και αντίστροφα.
- Η γραμμική ανάλυση ευστάθειας περιγράφει ικανοποιητικά τα φαινόμενα που παρατηρούνται στην γραμμική περιοχή, δηλαδή για τιμές των αριθμών Froude και Weber για τις οποίες υπάρχει συνοριακή αστάθεια των διεπιφανειακών κυμάτων και/ή σχετικά νωρίς στην χρονική εξέλιξη του φαινομένου όταν ο ρυθμός ανάπτυξης του πιο ασταθούς κύματος είναι σημαντικός. Αντίστοιχα, η ασθενώς μη-γραμμική θεωρία ισχύει για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα και παίρνει την μορφή της μη γραμμικής, μιγαδικής εξίσωσης Ginzburg-Landau ή μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger για τις υπό εξέταση ροές. Η ασθενώς μη γραμμική θεωρία προβλέπει ότι στην κρίσιμη περιοχή, $\omega_{i,max} \approx 0$, υπάρχει υποκρίσιμη αστάθεια και δημιουργία κορυφών που μεγαλώνουν συνεχώς στην υπερκρίσιμη περιοχή. Οι προβλέψεις της ασθενώς μη-γραμμικής θεωρίας επιβεβαιώνονται με δυναμικές προσομοιώσεις στην περιοχή αυτή. Η ασθενώς μη γραμμική ανάλυση των ασταθών κυματοπακέτων όταν ο ρυθμός αύξησης του πιο ασταθούς κύματος είναι σημαντικός, $\omega_{i,max} = O(1)$,

είναι δυνατή στα άκρα του κυματοπακέτου όπου υπάρχει συνοριακή αστάθεια. Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger, όπως προκύπτει στα εν λόγω άκρα, προβλέπει την δυνατότητα δημιουργίας μετωπικών κυμάτων και συνεπώς μονοχρωματικών οδευόντων κυμάτων τα οποία μάλιστα στο αριστερό άκρο είναι ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Παράλληλα όμως διαφαίνεται η δυνατότητα συντονισμού μεταξύ των κυμάτων μικρού μήκους κύματος του ασταθούς κυματοπακέτου και κυμάτων μεγάλου μήκους, κοντά στο αριστερό άκρο του κυματοπακέτου. Ο συντονισμός συμβαίνει όταν η ταχύτητα ομάδας, u_g , του μικρού μήκους κύματος ταυτίζεται με τη φασική ταχύτητα του μεγάλου μήκους κύματος, c_p . Αρχικά, η εμφάνιση του κύματος μεγάλου μήκους μέσα στο κυματοπακέτο οφείλεται στην μη γραμμική αλληλεπίδραση του κύματος μικρού μήκους με τον εαυτό του μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Η περαιτέρω διαμόρφωση των κυμάτων μεγάλου μήκους οδηγεί σε solitons.

- Για ροές που δεν επηρεάζονται από την αδράνεια του υγρού, όταν η ροή εξελίσσεται στην μη-γραμμική περιοχή, δηλαδή για τιμές του Froude και του Weber αρκετά μεγαλύτερες από την κρίσιμη, γεγονός που είναι και πιο κοντά στην πραγματικότητα, παρατηρείται μια ενδιαφέρουσα συμπεριφορά κατά την οποία το ασταθές κυματοπακέτο εξελίσσεται αρχικά σύμφωνα με την γραμμική θεωρία, αποκτά ένα μέγιστο ύψος περίπου διπλάσιο του αρχικού και σταματάει να αυξάνεται πέρα από αυτό. Πίσω από την αρχική κορυφή υπάρχει η τάση να σχηματιστούν και άλλες κορυφές και αυτές να αποκτήσουν το συγκεκριμένο ύψος κορεσμού χωρίς όμως να υπάρχει αυστηρή περιοδική εμφάνιση των κορυφών αυτών. Μπροστά από τις κορυφές παρατηρείται περιοδική εμφάνιση ήπιας ανακυκλοφορίας. Η παραπάνω συμπεριφορά συμφωνεί μερικώς με τις παρατηρήσεις των Ozgen et al. (2002) οι οποίοι πραγματοποίησαν πειράματα χρησιμοποιώντας διάφορα de-icing ρευστά. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει συμφωνία με τους παραπάνω ερευνητές ως προς τη σχέση μεταξύ φασικής ταχύτητας και ταχύτητας διεπιφάνειας, χωρίς όμως να υπάρχει η περιοδικότητα των κυμάτων. Οι παραπάνω ερευνητές αναφέρουν περιοδική εμφάνιση των κυμάτων για μικρά όμως πλάτη των αρχικών διαταραχών.
- Η αδράνεια του υγρού, όταν είναι σημαντική, καθυστερεί την εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων και μειώνει το μήκος κύματος τους στην γραμμική

περιοχή. Η επίδραση όμως είναι πιο σημαντική στην μη-γραμμική περιοχή όπου το κυματοπακέτο πάλι εμφανίζει κύματα μεγάλου μήκους κοντά στο αριστερό του άκρο λόγω συντονισμού. Τελικά, λόγω της αναβαθμισμένης επίδρασης της αδράνειας σε σχέση με αυτήν του ιξώδους, σχηματίζεται μια κυρίαρχη κορυφή με συνεχώς αυξανόμενο ύψος ενώ πίσω από την κορυφή δημιουργείται μια κοιλότητα με αρκετά μικρό πάχος. Η συμπεριφορά αυτή είναι σε συμφωνία με τις πειραματικές παρατηρήσεις του Craik (1966) ο οποίος κατέγραψε για το σύστημα αέρα-νερού μέσα σε κανάλι μη περιοδικά 'αργά' κύματα που σχηματίζουν απότομες κορυφές το ύψος των οποίων είναι αρκετά μεγαλύτερο από το μέσο πάχος του υμένα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο σχηματισμός έντονης περιοχής ανακυκλοφορίας μπροστά από την κορυφή μέγιστου ύψους καθώς και οι μεγάλες και απότομες μεταβολές τόσο στην πίεση του συνοριακού στρώματος όσο και στην διάτμηση που δέχεται η στερεή επιφάνεια. Αξίζει να διερευνηθεί το κατά πόσο η παραπάνω συμπεριφορά μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή της δομής του συνοριακού στρώματος.

- Για τις ροές που δεν επηρεάζονται από την αδράνεια του υγρού βρέθηκε ότι τα μήκη κύματος κοντά στο αριστερό άκρο του πιο ασταθούς κυματοπακέτου είναι, σε μεγάλους χρόνους, ευσταθή σε πλευρικές διαταραχές. Το γεγονός αυτό ενισχύει την πιθανότητα οι κορυφές μεγάλου μήκους κύματος που καταγράφονται να είναι το αποτέλεσμα συντονισμού (resonance) ενός μικρού μήκους κύματος του κυματοπακέτου με ένα μεγαλύτερο κύμα, όπως έχει παρατηρηθεί και κατά την ανάλυση κυμάτων βαρύτητας (Djordjevic & Redekopp, 1976). Οι προσομοιώσεις δείχνουν την προϊούσα αποσύνθεση του πακέτου χωρίς την δημιουργία μετώπων, λόγω της εμφάνισης κορυφών που αντιστοιχούν σε solitons οι οποίες δεν μεγαλώνουν πέρα από ένα μέγιστο ύψος αλλά μεταφέρονται με σταθερή ταχύτητα ομάδας. Οι δε κορυφές αυτές πρωτοεμφανίζονται στην αριστερή πλευρά του κυματοπακέτου σε συμφωνία με την πρόβλεψη της ασθενώς μη γραμμικής θεωρίας.

Στις περιπτώσεις όπου η αδράνεια είναι σημαντική, παρατηρείται ανάλογη αποσύνθεση του ασταθούς κυματοπακέτου με την δημιουργία κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος αλλά κυρίως την εμφάνιση μόνο μίας μεγάλης κορυφής. Ο μηχανισμός παραγωγής των πρώτων είναι κατά πάσα πιθανότητα ο ίδιος με αυτόν που περιγράφηκε παραπάνω, με την διαφορά ότι η αδράνεια

εξουδετερώνει τις ιξώδεις δυνάμεις και επιταχύνει την περαιτέρω ανάπτυξη της πρώτης κορυφής σε βάρος των γειτονικών περιοχών του φιλμ. Η εξέλιξη αυτή οδηγεί τελικά στην εμφάνιση μιας κυρίαρχης ριπής (ή αλλιώς ιδιαιζον σημείο πεπερασμένου χρόνου). Υπάρχει δηλαδή περιοχή του πακέτου που λειτουργεί τοπικά σαν καταβόθρα μάζας ρευστού ενώ ταυτόχρονα δημιουργεί περιοχές ξήρανσης του φιλμ (dry spots). Τα τελευταία δε στάδια της ανάπτυξης αυτής της ιδιομορφίας (singularity) καθορίζονται από το ισοζύγιο τριχοειδών και αδρανειακών δυνάμεων. Στην περίπτωση αυτή δεν κατέστη δυνατή η παραγωγή της εξίσωσης Schrödinger, αλλά οι δυναμικές προσομοιώσεις σε συνδυασμό με την ανάλυση που έγινε για την περίπτωση αμελητέας αδράνειας συνηγορούν σε αυτόν τον μηχανισμό.

- Εξετάζοντας την επίδραση που έχει στην μη γραμμική εξέλιξη της ροής η επιφανειακή τάση του υγρού διαπιστώθηκε ότι ο ρόλος της είναι σταθεροποιητικός. Πράγματι, η αύξηση της επιφανειακής τάσης έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του χρονικού διαστήματος στο οποίο εμφανίζονται οι απότομες κορυφές και με τον τρόπο αυτό καθυστερεί την εμφάνιση της κυρίαρχης κορυφής. Έτσι, όταν η αδράνεια είναι σημαντική, αύξηση της επιφανειακής τάσης μπορεί να σταθεροποιήσει την ροή και ενδεχομένως να προφυλάξει το συνοριακό στρώμα από την πρόωρη αποκόλληση.
- Δεν υπάρχει ουσιαστική αλληλεπίδραση ή συντονισμός μεταξύ των Tollmien-Schlichting (TS) και των διεπιφανειακών κυμάτων για τα συστήματα αέρα νερού και αέρα de-icing ρευστών που εξετάστηκαν. Μάλιστα όσο μικρότερος είναι ο λόγος των ιξωδών μεταξύ αέρας και υγρής φάσης τόσο πιο αργή είναι η χρονική κλίμακα ανάπτυξης των διεπιφανειακών κυμάτων. Συνεπώς, η εισαγωγή διαφορετικών χρονικών κλιμάκων για την μελέτη τους είναι δικαιολογημένη και συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι σε συμφωνία με πειραματικές παρατηρήσεις του Craik (1966) και των Ozgen et al. (2002) οι οποίοι κατέγραψαν χωριστά τα διεπιφανειακά κύματα σε διαφορετικά πειράματα.

Η εμφάνιση ασταθών διεπιφανειακών κυματώσεων μικρότερου μήκους κύματος από τα κύματα Tollmien-Schlichting οδηγεί στην εμφάνιση ασταθών κυματώσεων TS μικρού μήκους κύματος. Αυτά κινούνται πολύ γρήγορα και ενδέχεται να ευθύνονται για την πρόωρη μετάβαση σε τύρβη μέσω μικρών

μηκών κύματος όταν ένα αέριο ρεύμα ρέει πάνω από πολύ ιξώδη και λεπτά φιλμ.

8.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Στην παρούσα διατριβή μελετήθηκαν οι αστάθειες που παρουσιάζονται κατά τη ροή ρεύματος αέρα με υψηλό αριθμό Reynolds πάνω από λεπτό υμένα υγρού. Το κύριο συμπέρασμα της παρούσας ερευνητικής προσπάθειας αφορά στην ασταθή ανάπτυξη των διεπιφανειακών κυματοπακέτων και στην εμφάνιση solitons μέσω συντονισμού κυμάτων μικρού μήκους κύματος και κυμάτων μεγάλου μήκους κύματος. Τα τελευταία εμφανίζονται λόγω της μη γραμμικής εξέλιξης κυμάτων μικρού μήκους κύματος. Στην περίπτωση υμένα με ισχυρή αδράνεια τελικά κυριαρχεί ένα μεγάλο κύμα το ύψος του οποίου διαρκώς αυξάνεται μέχρι να καταστρέψει την δομή του συνοριακού στρώματος. Σε σχετικά πειράματα έχει παρατηρηθεί η αρνητική επίδραση του υγρού υμένα στα αεροδυναμικά χαρακτηριστικά πτέρυγας αλλά και η εμφάνιση τρισδιάστατων διεπιφανειακών κυματώσεων. Επομένως, το βασικότερο ερώτημα που είναι σημαντικό να απαντηθεί είναι το κατά πόσο οι δισδιάστατες δομές που ευρέθησαν στο πλαίσιο της παρούσης διατριβής θα επιβιώσουν υπό την παρουσία τρισδιάστατων διαταραχών. Έτσι θα πιστοποιηθεί τελικά η επίδραση που έχουν στην απώλεια άνωσης και στην αύξηση της οπισθέλκουσας που παρατηρείται σε πτερύγια αεροσκαφών λόγω βροχόπτωσης και στην επακόλουθη πρόκληση ατυχημάτων. Παράλληλα, θα καταστεί δυνατή η χάραξη στρατηγικών αντιμετώπισης τέτοιων προβλημάτων, ενδεχομένως με την έγχυση τασιενεργών ουσιών.

Το παραπάνω ερώτημα μπορεί να απαντηθεί με αριθμητική επίλυση των τρισδιάστατων εξισώσεων τριπλής στιβάδας. Φυσικά για να πραγματοποιηθεί επίλυση σε τρεις διαστάσεις θα πρέπει να βελτιωθεί περαιτέρω η αριθμητική διαδικασία εισάγοντας παράλληλο προγραμματισμό.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διεξαγωγή μιας αντίστοιχης πειραματικής μελέτης η οποία θα μπορούσε ενδεχομένως να απαντήσει στο ερώτημα αν αυτό που τελικά θα επικρατήσει στη ροή είναι ο σχηματισμός των δισδιάστατων κορυφών ή αν τα διεπιφανειακά κύματα θα προλάβουν να σχηματίσουν τρισδιάστατες κυματώσεις που τελικά θα κυριαρχήσουν στη ροή. Επίσης, χρησιμοποιώντας λεπτούς υμένες ρευστών με διαφορετικά ιξώδη μπορούν να αποτυπωθούν οι δυο διαφορετικές συμπεριφορές στη μη γραμμική περιοχή: α) για ρευστά μεγάλου ιξώδους, ο

σηματισμός κορυφών μέχρι ένα μέγιστο ύψος κορεσμού, και β) για λιγότερο ιξώδη ρευστά, η ανάπτυξη μιας μόνο κορυφής με συνεχόμενα αυξανόμενο ύψος και η εμφάνιση σημείων της πλάκας με ολοένα μικρότερο πάχος φιλμ. Για παράδειγμα, μπορεί να πραγματοποιηθεί ένα πείραμα κατά το οποίο ρεύμα αέρα ρέει μέσα σε αεροσήραγγα με ταχύτητα 10m/s πάνω από πλάκα 1m. Αν επικεντρωθούμε στην περιοχή γύρω στα 50 cm και θεωρήσουμε τη διάτμηση του στρωτού συνοριακού στρώματος θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια παροχή υγρού $Q \approx 0.00045 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ώστε στην επιφάνεια της πλάκας να σχηματιστεί ένας λεπτός υμένας υγρού πάχους περίπου 0.5 mm. Η ταχύτητα της διεπιφάνειας που αντιστοιχεί στην παραπάνω παροχή και για το δεδομένο πάχος υγρού είναι της τάξης των 2 m/sec. Σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις αν χρησιμοποιήσουμε το de-icing υγρό M75 ($\mu_w = 0.015 \text{ Pas}$, $\rho_w = 1030 \text{ kg/m}^3$) τότε θα πρέπει να καταγράφει ένα κυματοπακέτο, το οποίο καθώς εξελίσσεται αναπτύσσει κορυφές μέχρι ένα μέγιστο ύψος κορεσμού. Αντίθετα, αν το παραπάνω ρεύμα αέρα ρέει πάνω από νερό τότε αναμένεται να παρατηρηθεί η δεύτερη συμπεριφορά κατά την οποία αναπτύσσεται μια μόνο κορυφή με συνεχώς αυξανόμενο ύψος. Τέλος, με την επιλογή καταλλήλων παραμέτρων είναι δυνατό να παρατηρηθούν ταυτόχρονα σε ένα πείραμα τα διεπιφανειακά κύματα και τα κύματα Tollmien-Schlichting και να διαπιστωθεί, σε περιοχές που και τα δυο είδη κυματώσεων είναι ασταθή, αν η ροή επηρεαστεί από τη μη γραμμική συμπεριφορά των διεπιφανειακών κυμάτων ή αν τα κύματα Tollmien-Schlichting οδηγούν σε τύρβη πριν συμβεί κάτι τέτοιο.

Σε μεταγενέστερο στάδιο η προσομοίωση της αλληλεπίδρασης αερίου συνοριακού στρώματος με λεπτό υμένα υγρού μπορεί να γίνει εισάγοντας στο πρόβλημα τις εξισώσεις Navier-Stokes ώστε να γίνει μια σύγκριση με τα αποτελέσματα της θεωρίας τριπλής στιβάδας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η εισαγωγή της καμπυλότητας στο πρόβλημα ώστε να προσδιοριστεί ο τρόπος με τον οποίο επιδρά στην εξέλιξη των διεπιφανειακών κυμάτων.

Τέλος, θα μπορούσε η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε να χρησιμοποιηθεί για τη δυναμική επίλυση ροής πάνω από ελαστική μεμβράνη, με βάση τον φορμαλισμό της θεωρίας τριπλής στοιβάδας ή τις πλήρεις εξισώσεις Navier-Stokes. Με τον τρόπο αυτό μπορούν να αποτυπωθούν φαινόμενα όπως η μετατόπιση της μεμβράνης κάτω από το μη ελαστικό τοίχωμα (sucking phenomenon) που παρατηρείται για μικρές τιμές της ελαστικότητας της (Luo and Pendley, 1996), ο λυγισμός της μεμβράνης

(Heil & Pedley, 1996) και ο σχηματισμός δινών σε συνδυασμό με τις συχνότητες που κυριαρχούν στη ροή (Huang, 2001).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Bender & Orszag (1978), 'Advanced mathematical methods for scientists and engineers', Mc. Graw-Hill.
2. Benjamin, T. B. (1959), 'Shearing flow over a wavy boundary', J. Fluid Mech., **6**, 161-205.
3. Benjamin, T. B. (1961), 'The development of three dimensional disturbances in an unstable film of liquid flowing down in an inclined plane', J. Fluid Mech., **10**, 401-419.
4. Bezos, G. M., Dunham, R. E., Geniry, G. L. & Melson, W. E. (1992), 'Wind tunnel aerodynamic characteristics of a transport-type airfoil in a simulated heavy rain environment', NASA, TP-3184.
5. Brevdo, L., Laure, P., Dias, F. & Bridges, T. J. (1999), 'Linear pulse structure and signalling in a film flow on an inclined plane', J. Fluid Mech., **396**, 37-71.
6. Campell, B.A. & Bezos, M. (1989), 'Steady state and transitional aerodynamic characteristics of a wing in simulated heavy rain', NASA, TP-2932.
7. Caponi, E. A., Fornberg, B., Knight, D. D., McLean, J. W., Saffman, P. G. & Yuen, H. C. (1982), 'Calculations of laminar viscous flow over a moving wavy surface', J. Fluid Mech., **124**, 347-362.
8. Clamond, D. & Germain, J. P. (1999), 'Interaction between a Stokes wave packet and a solitary wave', Eur. J. Mech. B/Fluids, **18** (1), 67-91.
9. Cohen, L.S. & Hanratty, T. J. (1965), 'Generation of waves in the concurrent flow of air and a liquid', A.I.Ch.E.J. , **11**, 138.
10. Couairion, A. & Chomaz, J. (1997), 'Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in non-linear systems', Physica D, **108**, 236-276.
11. Craik, A. D. D. (1966), 'Wind generated waves in thin liquid films', J. Fluid Mech., **26** (2), 369-392.
12. Craik, A. D. D. (1985), 'Wave interactions and fluid flows', Cambridge University Press.
13. Davey, A. & Stewartson, K. (1974), 'On three dimensional packets of surface waves, Proc, Roy. Soc., **A 388**, 101.
14. Djordjevic, V. D. & Redecopp, L.G (1976), 'On two dimensional packets of capillary-gravity waves', J. Fluid Mech., **160**, 465-498.

-
15. Drazin, P. G. (2002), 'Introduction to hydrodynamic stability', Cambridge University Press.
 16. Duck, P. W. (1985), 'Laminar flow over unsteady humps: the formation of waves', *J. Fluid Mech.*, **79**, 703-714.
 17. Elman, H., Silvester, D. & Wathen, A. (2005), 'Finite Elements and Fast Iterative Solvers', Oxford Science Publications, Oxford.
 18. Feo, A. (1997), 'Effect of heavy rainfall on aircraft performance', AGARD-FDP-VKI, Lecture Series at VKI, Rhode-Saint-Genese, Belgium.
 19. Gaster, M. (1965), 'On the generation of spatially growing waves in a boundary layer', *J. Fluid Mech.*, **22**, 433-441.
 20. Hanratty, T.J. & Engen, J. M. (1957), 'Interaction between a turbulent air stream and a moving water surface', *A.I.Ch.E.J.* , **3**, 299.
 21. Hansman, Jr. & Barsotti, M. F. (1985), 'The aerodynamic effect of surface wetting characteristics on a laminar flow airfoil in a simulated heavy rain', AIAA, 85-0260.
 22. Hendrickson, G.S & Hill, E.G. (1987), 'Effects of de/anti-icing fluids on airfoil characteristics', Boeing Report, 1987.
 23. Heil, M. & Pedley, T. J. (1996), 'Large post-buckling deformations of cylindrical shells conveying viscous flow', *Journal of Fluids and Structures*, **10**, 565-599.
 24. Hill, E.G. & Zierten, T. A. (1993), 'Aerodynamic effects of aircraft ground deicing/anti-icing fluids', *Journal of Aircrafts*, **30**, 24-34.
 25. Hooper, A. P. & Boyd, W.G. (1983), 'Shear flow instability at the interface between two viscous fluids', *J. Fluid Mech.*, **128**, 507-528.
 26. Hooper, A. P. & Boyd, W.G. (1987), 'Shear-flow instability due to a wall and a viscosity discontinuity at the interface', *J. Fluid Mech.*, **179**, 201-225.
 27. Huang, L. (2001), 'Viscous flutter of a finite elastic membrane in Poiseuille flow', *Journal of Fluids and Structures*, **15**, 1061-1088.
 28. Huerre, P. & Monkewitz, P. A. (1990), 'Local and global instabilities in spatially developing flows', *J. Fluid Mech.*, **22**, 473-537.
 29. Lin, S.P. (1974), 'Finite amplitude side-band stability of a viscous film', *J. Fluid Mech.*, **63** (3), 417-429.
 30. Ludwig, H & Hornung, H. (1989), 'The instability of a liquid film on a wall exposed to an air flow', *J. Fluid Mech.*, **200**, 217-233.

-
31. Luo, X.Y. & Pedley, T.J. (1996), 'A numerical simulation of unsteady flow in a two-dimensional collapsible channel', *J. Fluid Mech.*, **314**, 191-225.
 32. Malamataris, N. A., Vlachogiannis, M. & Bontozoglou, V. (2002), 'Solitary waves on inclined films: Flow structure and binary interactions', *Physics of fluids*, **14** (3), 1082-1094.
 33. Messiter, A. F. (1975), 'Laminar separation-A local asymptotic flow description for constant pressure downstream', *Flow Separation*, AGARD-CP-168.
 34. Miles, J. W. (1960), 'The hydrodynamic stability of a thin film of liquid in uniform shearing motion', *J. Fluid Mech.*, **8**, 593.
 35. Miles, J. W. (1962), 'On the generation of surface waves by shear flows. Part 4', *J. Fluid Mech.*, **13**, 433-448.
 36. Ozgen, S., Carbonaro, M. & Sarma, G. S. R. (2002), 'Experimental study of wave characteristics on a thin layer of de/anti-icing fluid', *Physics of Fluids*, **14**, 3391-3402.
 37. Ozgen, S., Degrez, G. & Sarma, G. S. R. (1998), 'Two-fluid boundary layer stability', *Physics of Fluids*, **10** (11), 2746-2757.
 38. Pelekasis, N. A. (1991), 'A study on Drop and Bubble Dynamics via a Hybrid Boundary Element - Finite Element Methodology', PhD Thesis, Chemical Engineering Department of SUNY Buffalo.
 39. Pelekasis, N. A., Tsamopoulos, J. A. & Manolis, G. D. (1992), 'A hybrid finite- boundary element method for inviscid flows with free surface', *J. Comp. Phys.*, **101**(2), 231-251.
 40. Pelekasis, N. A. & Tsamopoulos, J. A. (2001), 'Linear stability analysis of a gas boundary layer flowing past a thin liquid film over a flat plate', *J. Fluid Mech.*, **436**, 321-352.
 41. Prender, P. M. (1989), 'Splines and Variational Methods', John Wiley & Sons.
 42. Rothmayer, A. P., Matheis, B. D. & Timoshin, S. N. (2002), 'Thin liquid films flowing over external aerodynamic surfaces', *Journal of Engineering Mathematics*, **42**, 341-357.
 43. Saad, Y. & Schultz, M.H (1986), 'GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems', *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, 856-869.
 44. Saad, Y. (1996), 'Iterative Methods for Sparse Linear Systems', PWS.

-
45. Saarloos, W. & Hohenberg, P. C. (1992), 'Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations', *Physica D*, **56**, 303-367.
 46. Schlichting, H. (1979), 'Boundary-Layer Theory', 7th ed., McGraw-Hill.
 47. Segur, H., Henderson, D., Carter, J., Li, C.M., Pheiff, D. & Socha, K. (2005), 'Stabilizing the Benjamin-Feir instability', *J. Fluid Mech.*, **539**, 229-271.
 48. Smith, F.T. (1979a), 'On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer', *Proc. R. Soc. Lond., A* **366**, 91-109.
 49. Smith, F.T. (1979b), 'Nonlinear stability of boundary layers for disturbances of various sizes', *Proc. R. Soc. Lond., A* **368**, 573-589.
 50. Smith, F.T., Brighton, P. W. M., Jackson, P. S. & Hunt, J. C. R. (1981), 'On boundary-layer flow past two-dimensional obstacles', *J. Fluid Mech.*, **113**, 123-152.
 51. Smith, F.T. (1984), 'Theoretical aspects of steady and unsteady laminar separation', A.I.A.A. paper 84-1582.
 52. Smyrniotis, D. N. (2002), 'Interfacial phenomena and hydrodynamic instabilities in boundary layer flows', PhD, University of Patra.
 53. Smyrniotis, D. N., Pelekasis, N. A. & Tsamopoulos, I. A. (2000), 'Boundary layer flow of air past solid surfaces in the presence of rainfall', *J. Fluid Mech.*, **425**, 79-110.
 54. Smyrniotis, D., Pelekasis, N & Tsamopoulos, I. (2002), 'Two phase boundary layer flow in laminar film condensation over a horizontal tube', *Phys. Fluids*, **14** (6): 1945-1957.
 55. Stewartson, K. & Stuart, J. T. (1971), 'A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow', *J. Fluid Mech.*, **48** (3), 529-545.
 56. Stewartson, K. (1974), 'Multi-structured boundary layers on flat plates and related bodies', *Advances in Applied Mechanics*, **14**, 145-239.
 57. Thompson J.F., Warsi, Z.U.A., Mastin, C.W. (1995), 'Numerical Grid Generation. Foundations and Applications', North Holland.
 58. Timoshin, S. N. (1997), 'Instabilities in a high-Reynolds number boundary layer on a film-coated surface', *J. Fluid Mech.*, **353**, 163-195.
 59. Tsao, J. C., Rothmayer, A. P. & Ruban, A. I. (1997), 'Stability of air flow past thin liquid films on airfoils', *Computers & Fluids*, **26** (5), 427-452.
 60. Van Rossum, J. J. (1959), 'Experimental investigations of horizontal liquid films', *Chem. Engng. Sci.*, **II**, 35-52.

-
61. Vlachogiannis, M. & Bontozoglou, V. (2001), 'Observations of solitary wave dynamics of film flows', *J. Fluid Mech.*, **435**, 191-215.
 62. Yiantsios, S. G. & Higgins, B. G. (1988), 'Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids', *Physics of Fluids*, **31**, 3225-3238.
 63. Yih, C. S. (1967), 'Instability due to viscosity stratification', *J. Fluid Mech.*, **27**, 337-352.
 64. Yih, C. S. (1990), 'Wave formation on a liquid layer for de-icing airplane wings', *J. Fluid Mech.*, **212**, 41-53.
 65. Yip, L. P. (1985), 'Wind-tunnel investigation of a full scale canard-configured general aviation airplane', NASA, TP-2382.
 66. Βλαχομήτρον, Μ. (2006), 'Ανάπτυξη κώδικα πεπερασμένων στοιχείων για τη ροή συνοριακού στρώματος πάνω από στερεές επιφάνειες ή υγρό φιλμ', Μεταπτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.
 67. Ιστοσελίδα Youcef Saad: www.cs.umn.edu/~saad
 68. Παπαϊωάννου, Α. Θ. (2002), 'Μηχανική των Ρευστών', τόμος II, 2^η έκδοση, εκδόσεις Κοραλι, Αθήνα.
 69. Πολυζόπουλος, Γ. (2007), 'Ανάπτυξη κώδικα πεπερασμένων στοιχείων με μεταβλητό και ανομοιόμορφο πλέγμα με συναρτήσεις βάσης b-cubic splines', Μεταπτυχιακή Εργασία, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000091608

