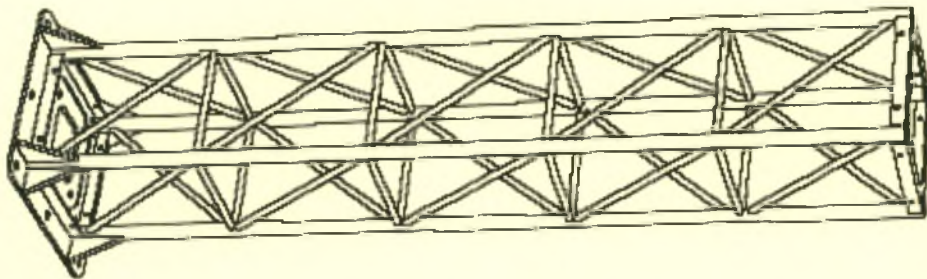




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ
ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ



υπό

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΙΩΑΝΝΗ

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 4834/1

Ημερ. Εισ.: 08-11-2006

Δωρεά: Συγγραφέα

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜΒ

2006

ΝΙΚ

© 2006 Νικολάου Ιωάννης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Πετρόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Παπαδημητρίου, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Σπύρο Καραμάνο και Γεώργιο Πετρόπουλο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Τέλος, οφείλω ευχαριστίες σε όλους τους φοιτητές του Εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων (ΕΔΣ) για την πολύτιμη βοήθειά τους καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

Ιωάννης Νικολάου

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΩΝ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΙΩΑΝΝΗΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2006

Επιβλέπων: Δρ. Παπαδημητρίου Κωνσταντίνος, Καθηγητής Δυναμικής των
Κατασκευών

Περίληψη

Στην σύγχρονη βιομηχανία ο παράγοντας κόστος αποτελεί τον βασικό άξονα στην παραγωγική διαδικασία. Με τη μέθοδο του βέλτιστου σχεδιασμού, γίνεται βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών μιας κατασκευής έχοντας σαν κίνητρο την ελαχιστοποίηση του κόστους μέσα πάντα σε επιτρεπτά επίπεδα ασφάλειας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ο βέλτιστος σχεδιασμός εφαρμόστηκε σε δικτύωματα με στόχο τη βέλτιστη επιλογή συγκεκριμένων γεωμετρικών χαρακτηριστικών, με ταυτόχρονη διατήρηση της ασφάλειας του δικτύωματος. Τα χαρακτηριστικά τα οποία επιλέχθηκαν να βελτιστοποιηθούν είναι οι τιμές των διατομών των μελών που αποτελούν το δίκτυωμα και η τοπολογία των κόμβων. Το κόστος το οποίο αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος της βελτιστοποίησης, αναφέρεται στο βάρος της κατασκευής και εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά που βελτιστοποιούνται. Γενικότερα το κόστος μιας κατασκευής εξαρτάται από διάφορους παράγοντες οικονομικής φύσεως. Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία επιλέχθηκε το βάρος της κατασκευής, ως ο κυριότερος παράγοντας κόστους. Για ότι αφορά την ασφάλεια των δικτυωμάτων, αυτή εξαρτάται

από τις αξονικές τάσεις και τις θλιπτικές αξονικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στα μέλη. Τα μεγέθη αυτά δεν επιτρέπεται να ξεπερνούν το όριο διαρροής του υλικού και τα κρίσιμα φορτία λυγισμού αντίστοιχα.

Η διπλωματική εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια τα οποία ανήκουν σε τρεις γενικότερες ενότητες. Στην πρώτη ενότητα (Κεφάλαια 1 και 2) παρουσιάζεται το γενικότερο πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού και αναπτύσσεται η θεωρία βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται. Στην δεύτερη ενότητα (Κεφάλαια 3, 4 και 5) συγκεκριμενοποιείται η περίπτωση η οποία εξετάζεται, διατυπώνεται το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού δικτυωμάτων και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη εφαρμογή της μεθόδου του βέλτιστου σχεδιασμού σε διάφορες περιπτώσεις δικτυωμάτων. Τέλος στην τρίτη ενότητα (Κεφάλαιο 6) παρατίθενται τα συμπεράσματα που προέκυψαν και οι προτάσεις για μελλοντική μελέτη.

Πίνακας Περιεχομένων

1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Η αρχή του βέλτιστου σχεδιασμού.....	1
1.2 Διατύπωση του υπό μελέτη προβλήματος.....	3
1.3 Οργάνωση διπλωματικής εργασίας.....	4
2. Θεωρία Βελτιστοποίησης.....	5
2.1 Εισαγωγή.....	5
2.2 Τοπικά και ολικά βέλτιστα.....	7
2.3 Εξελκτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Strategies – ES).....	8
2.4 Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης βασισμένες σε παραγώγους.....	10
3. Βελτιστοποίηση Κατασκευών.....	15
3.1 Εισαγωγή.....	15
3.2 Διατύπωση προβλήματος βελτιστοποίησης.....	16
3.3 Ορισμός κατασκευής και μεταβλητών.....	18
3.4 Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος.....	20
4. Βέλτιστος Σχεδιασμός 1 ^{ου} Μοντέλου.....	23
4.1 Εισαγωγή.....	23
4.2 Βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων.....	27
4.3 Αύξηση του φορτίου F για βέλτιστο δικτύωμα.....	44
4.4 Βελτιστοποίηση τοπολογίας των κόμβων και των τιμών των διατομών.....	47
4.5 Αύξηση του φορτίου F για βέλτιστο δικτύωμα.....	67
4.6 Σύγκριση μεθόδων βελτιστοποίησης για το 1 ^ο Μοντέλο.....	71
4.7 Σχόλια – Συμπεράσματα.....	73
5. Βέλτιστος Σχεδιασμός 2 ^{ου} Μοντέλου.....	74
5.1 Εισαγωγή.....	74

5.2	Βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων	75
5.3	Βελτιστοποίηση τοπολογίας των κόμβων και των τιμών των διατομών	93
5.4	Σύγκριση μεθόδων βελτιστοποίησης για το 2 ^ο Μοντέλο	115
5.5	Σύγκριση Μοντέλων 1 και 2 για την 1 ^η μέθοδο βελτιστοποίησης.....	117
5.6	Σύγκριση Μοντέλων 1 και 2 για την 2 ^η μέθοδο βελτιστοποίησης.....	118
5.7	Σχόλια – Συμπεράσματα.....	119
6.	Σύνοψη Διπλωματικής Εργασίας	120
	Βιβλιογραφία	123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Η αρχή του βέλτιστου σχεδιασμού

Από τα πρώτα βήματα της μηχανικής, ο στόχος ήταν η βελτίωση της σχεδίασης ενός προϊόντος, όπως για παράδειγμα μια κατασκευή, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές απαιτήσεις μέσα στα πλαίσια των οικονομικών δυνατοτήτων.

Η διαδικασία του σχεδιασμού μπορεί να περιγραφεί με πολλούς τρόπους, όμως αμέσως μπορούμε να διακρίνουμε ότι υπάρχουν κάποια προκαθορισμένα στοιχεία τα οποία θα πρέπει να περιέχει μια περιγραφή όπως αναγνώριση των αναγκών, επιλογή εναλλακτικών λύσεων κ.τ.λ.. Σε μια παραδοσιακή περιγραφή των φάσεων του σχεδιασμού, η αναγνώριση των αναγκών ακολουθείται από μια τεχνική θεώρηση του προβλήματος (προσδιορισμός του προβλήματος), τη δημιουργία ενός ή περισσοτέρων φυσικών τμημάτων (σύνθεση του προβλήματος), τη μελέτη της απόδοσης αυτών των τμημάτων χρησιμοποιώντας την επιστήμη της μηχανικής (ανάλυση του προβλήματος), και τέλος την επιλογή των «καλύτερων» εναλλακτικών (βελτιστοποίηση του προβλήματος). Η διαδικασία περιλαμβάνει επίσης τη δοκιμή του πρωτοτύπου στις αρχικές ανάγκες.

Έτσι αν θέλαμε να δώσουμε ένα πρώτο ορισμό για το τι είναι *βελτιστοποίηση μιας κατασκευής* θα λέγαμε ότι είναι ο «καλύτερη» κατασκευή μέσα στα πλαίσια διαφόρων περιορισμών. Ένας αυστηρός ορισμός θα μπορούσε να δοθεί αν απαντούσαμε τα παρακάτω ερωτήματα:

1. Πώς περιγράφουμε διαφορετικές κατασκευές
2. Ποια είναι τα κριτήρια για τον βέλτιστο σχεδιασμό

Το πρώτο ερώτημα απαντάται αν ορίσουμε ένα σύστημα με *μεταβλητές, παραμέτρους, και σταθερές* της κατασκευής. *Μεταβλητές* μπορούμε να πούμε ότι είναι ποσότητες οι οποίες ορίζουν διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος, υποθέτοντας

διαφορετικές τιμές των μεταβλητών. Για παράδειγμα, μια μεταβλητή θα μπορούσε να είναι η διατομή μιας ράβδου η οποία επιλέγεται κατάλληλα κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. *Παράμετροι* μπορούμε να πούμε ότι είναι ποσότητες στις οποίες δίνονται συγκεκριμένες τιμές, π.χ. οι θέσεις των κόμβων ενός δικτύματος. Οι τιμές των παραμέτρων δεν αλλάζουν κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης. Όμως αρκετές φορές είναι επιθυμητό να μελετηθεί η εξάρτηση των βέλτιστων τιμών των μεταβλητών που βελτιστοποιούνται από τις τιμές των παραμέτρων του προβλήματος. *Σταθερές* είναι ποσότητες οι οποίες έχουν την ίδια τιμή για οποιοδήποτε σύστημα, π.χ. το μέτρο ελαστικότητας (E) ή το όριο διαρροής (σ_y) μιας κατασκευής.

Κατά τη διαδικασία της βελτιστοποίησης, αναζητείτε η «καλύτερη» κατασκευή, η οποία βελτιστοποιεί ένα ή περισσότερα κριτήρια απόδοσης μέσα στο πλαίσιο των περιορισμών του προβλήματος. Η καλύτερη κατασκευή καλείται βέλτιστη, ενώ τα κριτήρια ως προς τα οποία επιλέγεται η βέλτιστη κατασκευή καλούνται αντικειμενικές συναρτήσεις. Η αντικειμενική συνάρτηση του μοντέλου συνήθως είναι μια συνάρτηση «κόστους» αφού το ελάχιστο κόστος χαρακτηρίζει σε αρκετές εφαρμογές και την καλύτερη κατασκευή. Το κίνητρο για τη χρήση μοντέλων βελτιστοποίησης είναι η επιλογή μιας κατασκευής η οποία θα αντιπροσωπεύει τον συμβιβασμό ανάμεσα σε διαφορετικές απαιτήσεις. Πολλές εναλλακτικές μπορούν να δημιουργηθούν με την επιδέξια διαχείριση των παραμέτρων, ενώ το κριτήριο το οποίο θα επιλεγεί θα βοηθήσει στην επιλογή των καλύτερων εναλλακτικών.

Τελικά μια αυστηρή διατύπωση της βελτιστοποίησης μιας κατασκευής είναι η παρακάτω:

1. Η επιλογή μιας ομάδας *μεταβλητών* η οποία θα περιγράφει τις *εναλλακτικές* κατασκευές.
2. Η επιλογή μιας *αντικειμενικής συνάρτησης* (κριτήριο), εκφρασμένη σε όρους μεταβλητών της κατασκευής, η οποία *ελαχιστοποιείται* ή *μεγιστοποιείται*.
3. Ο καθορισμός μιας ομάδας *περιορισμών*, εκφρασμένων σε όρους μεταβλητών της κατασκευής, οι οποίοι θα πρέπει να *ικανοποιούνται* από κάθε *αποδεκτή* κατασκευή.
4. Ο καθορισμός των τιμών μιας ομάδας *μεταβλητών* της κατασκευής, οι οποίες *ελαχιστοποιούν* (ή *μεγιστοποιούν*) την *αντικειμενική*, *ικανοποιώντας ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς*.

1.2 Διατύπωση του υπό μελέτη προβλήματος

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία η μέθοδος του βέλτιστου σχεδιασμού εφαρμόστηκε σε δικτυώματα. Γίνεται επιλογή των χαρακτηριστικών των δικτυωμάτων που εξετάζονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος και να διατηρείται η ασφάλεια. Το κόστος αναλύεται σε κόστος του υλικού και σε κόστος κατασκευής, το οποίο ποσοτικοποιείται σε χρόνο εργασίας.

Έχοντας σαν κίνητρο την ελαχιστοποίηση του κόστους (μέσα πάντα σε επιτρεπτά επίπεδα ασφάλειας) γίνεται βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών των δικτυωμάτων που εξετάζονται, με αντικειμενική συνάρτηση την συνάρτηση κόστους. Λέγοντας χαρακτηριστικά αναφερόμαστε στη τιμή της διατομής κάθε ράβδου καθώς και στην τοπολογία των κόμβων με τους οποίους συνδέονται μεταξύ τους οι ράβδοι. Η ασφάλεια της κατασκευής ορίζεται από τον περιορισμό οι τάσεις (εφελκυστικές ή θλιπτικές) που αναπτύσσονται σε κάθε ράβδο να μην ξεπερνούν το όριο διαρροής του υλικού καθώς και τα θλιπτικά φορτία να μην ξεπερνούν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης είναι δύσκολη και κυρίως χρονοβόρα όταν τα χαρακτηριστικά που βελτιστοποιούνται είναι πολλά και και η κατασκευή είναι σύνθετη.

Πριν την ευρεία διάδοση των υπολογιστών η μέθοδος του βέλτιστου σχεδιασμού στηριζόταν στην πρακτική της επανάληψης της επίλυσης του προβλήματος, μέχρι την εύρεση μιας ικανοποιητικής λύσης. Σήμερα πλέον χρησιμοποιούνται οι συμβατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης οδηγούμενες από την μερική παράγωγο και για προβλήματα με πολλαπλά τοπικά/ολικά βέλτιστα χρησιμοποιούνται Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Strategies) οι οποίοι εξασφαλίζουν την εύρεση μιας περιοχής πολύ κοντά στην «ολικά βέλτιστη» (global optimum) λύση.

Στην παρούσα εργασία, οι υπολογισμοί γίνονται πολύ πιο εύκολα και γρήγορα με την χρήση του λογισμικού πακέτου *MatLab* με το οποίο γίνεται η διαδικασία της βελτιστοποίησης και πιο συγκεκριμένα με τη χρήση της *function fmincon*, ενώ ο ορισμός της γεωμετρίας της κατασκευής γίνεται με το πακέτο πεπερασμένων στοιχείων *ComSol Multiphysics (FemLab)*.

1.3 Οργάνωση διπλωματικής εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 καταρχάς παρατίθεται μια γενική *θεωρία βελτιστοποίησης*, όπου διατυπώνεται το γενικό πρόβλημα ελαχιστοποίησης (ή μεγιστοποίησης) μιας αντικειμενικής συνάρτησης υπό περιορισμούς, πάνω στο οποίο στηρίζεται το κυριότερο μέρος της μεθόδου του *βέλτιστου σχεδιασμού*. Επίσης, παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία των *Εξελικτικών Αλγόριθμων*, οι οποίοι προσφέρουν σημαντική βοήθεια στη μέθοδο της βελτιστοποίησης εξασφαλίζοντας την εύρεση μιας περιοχής πολύ κοντά στην βέλτιστη λύση του εκάστοτε προβλήματος. Τέλος, παρατίθενται οι αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης τις οποίες χρησιμοποιεί το λογισμικό πακέτο MatLab για την ταχεία εύρεση (σύγκλιση) της βέλτιστης λύσης.

Στο Κεφάλαιο 3 ουσιαστικά συγκεκριμενοποιείται η περίπτωση η οποία εξετάζεται στη παρούσα διπλωματική εργασία. Διατυπώνεται το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού δικτυωμάτων, ορίζεται το είδος των δικτυωμάτων τα οποία εξετάζονται καθώς και διάφορα χαρακτηριστικά, όπως το υλικό κατασκευής και το είδος των διατομών των ράβδων. Επίσης, διευκρινίζεται το είδος της παραμετροποίησης η οποία γίνεται για κάθε κατασκευή, καθώς και ποιες παράμετροι βελτιστοποιούνται (π.χ. διατομές ράβδων, τοπολογία κόμβων). Τέλος παρουσιάζεται η μοντελοποίηση της κάθε κατασκευής, η οποία γίνεται με το πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ComSol MultiPhysics (FemLab), και συνοπτικά ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης.

Στα Κεφάλαια 4 και 5 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα. Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τη βελτιστοποίηση του πρώτου μοντέλου. Στο πρώτο μέρος γίνεται βελτιστοποίηση με μεταβλητές τις τιμές των διατομών των ράβδων, ενώ στο δεύτερο μέρος γίνεται βελτιστοποίηση με μεταβλητές συγχρόνως τις τιμές των διατομών των ράβδων και την τοπολογία των κόμβων. Για κάθε μέθοδο βελτιστοποίησης επιλέγεται το βέλτιστο δικτύωμα (ανάμεσα σε μια ομάδα δικτυωμάτων με διαφορετικό αριθμό ράβδων) και του επιβάλεται αυξανόμενη φόρτιση. Στο Κεφάλαιο 5 γίνονται οι ίδιες διαδικασίες με εφαρμογή όμως στο δεύτερο μοντέλο.

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν και οι προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΙΑ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή

Η δομή ενός τυπικού μαθηματικού προβλήματος βελτιστοποίησης (ελαχιστοποίησης) υπό περιορισμούς περιγράφεται παρακάτω (Panos Y. Papalambros and Douglas J. Wilde, 2000)

$$\text{minimize } J(\underline{\theta}) \quad \underline{\theta} \in R^n \quad (2.1)$$

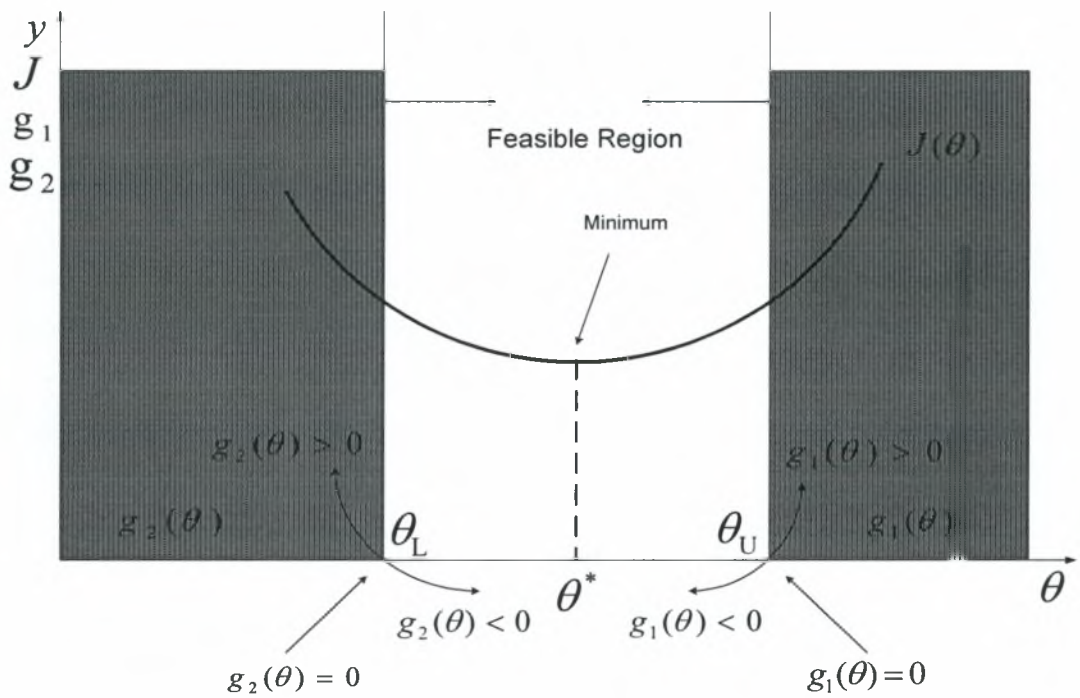
$$\text{subject to } g_i(\underline{\theta}) = 0 \quad i = 1, \dots, m_e \quad (2.2)$$

$$g_i(\underline{\theta}) \leq 0 \quad i = m_e + 1, \dots, m$$

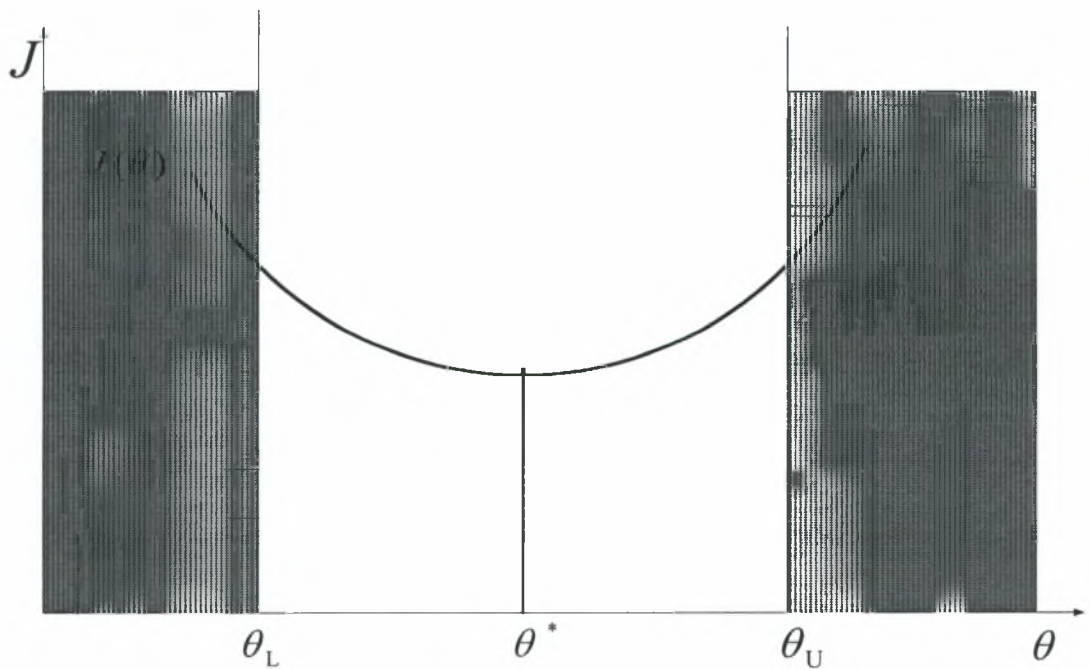
$$\underline{\theta}_{-L} \leq \underline{\theta} \leq \underline{\theta}_{-U}$$

όπου $J(\underline{\theta})$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση, με περιορισμούς τις συναρτήσεις $g_i(\underline{\theta})$, όπου $g_i(\underline{\theta})$ $i = 1, \dots, m_e$ το σετ των περιορισμών ισότητας και $g_i(\underline{\theta})$ $i = m_e + 1, \dots, m$ το σετ των περιορισμών ανισότητας. Οι παράμετροι $\underline{\theta}$ ορίζονται μέσα σε ανώτατα ($\underline{\theta}_{-L}$) και κατώτατα ($\underline{\theta}_{-U}$) όρια. Αν ένα οποιοδήποτε σημείο $\underline{\theta}^*$ ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς της εξίσωσης (2.2), τότε το σημείο αυτό χαρακτηρίζεται *εφικτό* και το σετ τέτοιων σημείων αποτελεί μια *εφικτή περιοχή* R (Feasible Region). Από όλα αυτά τα σημεία, επιλέγεται ένα το οποίο ελαχιστοποιεί την $J(\underline{\theta})$ (Σχήμα 2.1), το οποίο αν βρίσκεται μέσα στα όρια ($\underline{\theta}_{-L} \leq \underline{\theta}^* \leq \underline{\theta}_{-U}$), καλείται *εσωτερικό ελάχιστο* (Σχήμα 2.2). Είναι βέβαια πιθανό οι βέλτιστες τιμές $\underline{\theta}^*$ να έχουν ίδιες τιμές με τις τιμές των *ορίων* (Σχήμα 2.3) και τότε το βέλτιστο σημείο καλείται *βέλτιστο σημείο ορίων* (boundary optimum).

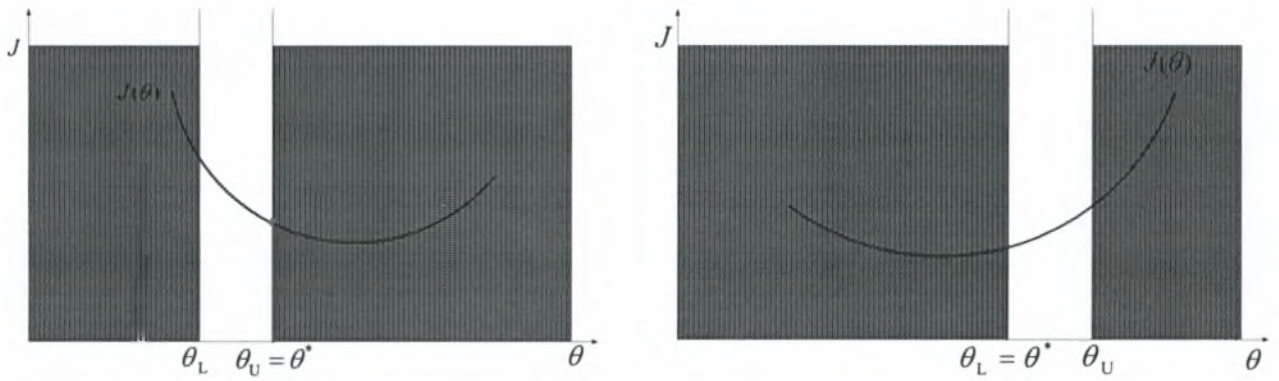
Παρακάτω παρουσιάζονται σχηματικά περιπτώσεις ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης $J(\theta)$.



Σχήμα 2.1 : Σχηματική παρουσίαση



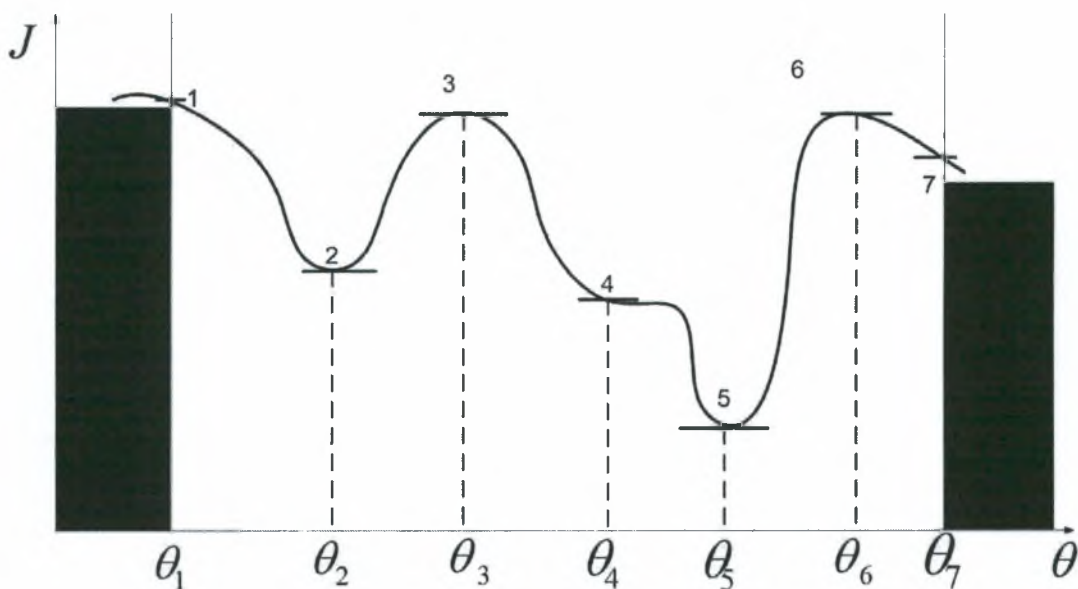
Σχήμα 2.2: Εσωτερικό ελάχιστο



Σχήμα 2.3: Πιθανά ελάχιστα ορίων

2.2 Τοπικά και ολικά βέλτιστα

Για μια συγκεκριμένη συνάρτηση $J(\theta)$ μιας μεταβλητής χωρίς περιορισμούς, μπορεί να έχουμε περισσότερα από ένα βέλτιστα σημεία, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.4. Ξεκάθαρα φαίνεται ότι τα σημεία 2 και 5 είναι ελάχιστα και τα 3 και 6 μέγιστα και τα καλούμε *τοπικά βέλτιστα*. Πρέπει να σημειώσουμε ότι και το σημείο 1 είναι *τοπικό μέγιστο*, εξαιτίας του ορίου, και αντίστοιχα το σημείο 7 *τοπικό ελάχιστο*. Από όλα τα τοπικά ελάχιστα, ένα αντιστοιχεί στη μικρότερη τιμή της αντικειμενικής, το οποίο καλείται *ολικό ελάχιστο*. Στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το σημείο θ_5 .



Σχήμα 2.4: Ολικά και Τοπικά Βέλτιστα

Επίσης αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων ενός μοντέλου μπορεί να οδηγήσει σε αλλαγή ενός ολικού βέλτιστου σε τοπικό. Διαισθητικά, η βέλτιστη κατασκευή για μια εφαρμογή, δεν είναι κατ' ανάγκη η βέλτιστη για οποιαδήποτε άλλη (εκφρασμένη με ένα άλλο σετ τιμών των παραμέτρων).

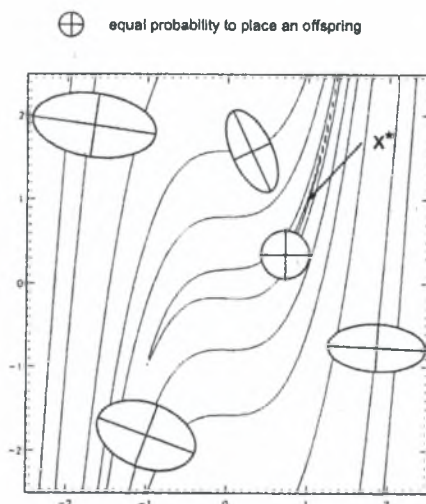
2.3 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Strategies - ES)

Το πρόβλημα εύρεσης της περιοχής του ολικού βέλτιστου ενός προβλήματος βελτιστοποίησης λύνεται με τη χρησιμοποίηση εξελικτικών αλγόριθμων (Thomas Back and Michael Emmerich, 2002).

Οι ES στην παρούσα εργασία δίνουν μια βέλτιστη «αρχική εκτίμηση» των τιμών των μεταβλητών, η οποία θα χρησιμοποιηθεί από μεθόδους βελτιστοποίησης οδηγούμενες από την μερική παράγωγο για να επιταχύνουν τη σύγκλιση της αρχικής εκτίμησης στο ολικό βέλτιστο του προβλήματος.

Οι διάφορες παραλλαγές των αλγορίθμων ES δουλεύουν με μια ομάδα (πληθυσμός) από άτομα (υποψήφιος λύσεις + παράμετροι), τα οποία τροποποιούνται από μια διαδοχική διαδικασία διαφοροποίησης (μετάλλαξη και ανασυνδιασμός) και επιλογής τελεστών (operators) με στόχο την εύρεση καλών λύσεων μέσα σε ένα διάστημα αναζήτησης.

Σε έναν εξελικτικό αλγόριθμο για ένα συνεχές πρόβλημα βελτιστοποίησης, ένα άτομο $(\theta_1, \dots, \theta_n, \sigma_1, \dots, \sigma_{ns})$ είναι ένα ζευγάρι από συνεχείς μεταβλητές εκφράζοντας την υποψήφια λύση και συναφείς μεταβλητές με τους ES αλγόριθμους. Ένας πληθυσμός από τέτοια άτομα απεικονίζεται στο Σχήμα 2.5, ενώ το γενικό πλάνο από ένα (μ, κ, λ) – ES παρουσιάζεται ως ψευδοκώδικας στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.5: Παρουσίαση ενός ES πληθυσμού

Κάθε άτομο αποτελείται όχι μόνο από μεταβλητές οι οποίες προσδιορίζουν τη θέση του στο διάστημα αναζήτησης, αλλά και από παραμέτρους που καθορίζουν το σχήμα της τυχαίας διανομής που χρησιμοποιείται στη μετάλλαξη, κάτι που υποδεικνύεται στο Σχήμα 2.5 με ελλείψεις ενώ το κέντρο τους δηλώνει τα σημεία.

Algorithm: (μ, κ, λ) - Evolutionary Strategy

$t := 0$

initialize Population $P(t) \in I^n$

evaluate the μ individuals by applying fitness function f

while Termination criteria not fulfilled **do**

 recombine λ offspring individuals out of μ parents

 set age of the λ offspring individuals to zero

mutate the λ offspring individuals

evaluate the λ offspring individuals

select the μ best individuals for $P(t+1)$ from λ offspring individuals and μ parents with age lower than the maximal lifespan κ

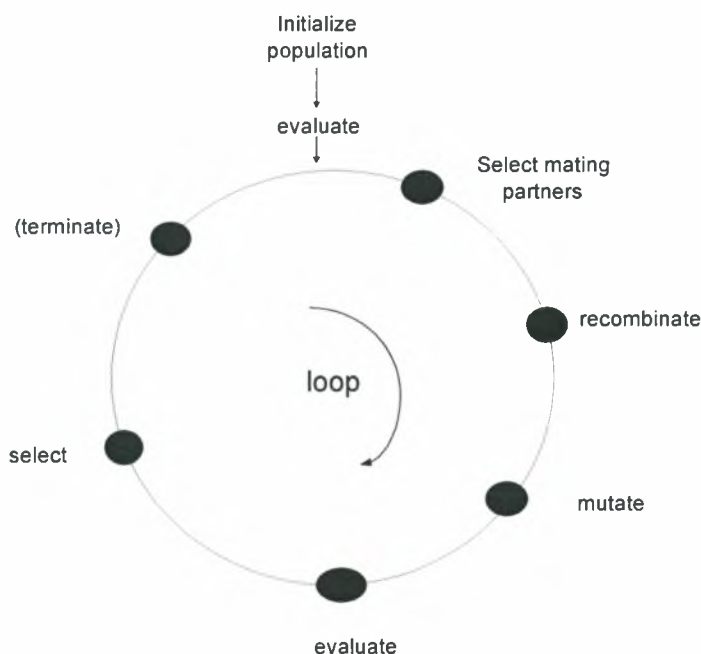
 increase the age of all individuals in $P(t+1)$ by one

$t := t + 1$

end while

Σχήμα 2.6: Ψευδοκώδικας ES

Μετά από μια τυχαία τοποθέτηση αρχικών τιμών και τον υπολογισμό των πρώτων μ ατόμων, λ απόγονοι παράγονται με ένα τελεστή ανασυνδιασμού και ένα μετάλλαξης. Ο τελεστής επιλέγει τα μ καλύτερα άτομα από τους λ απογόνους και τα μ άτομα, τα οποία δεν υπερέβησαν το όριο ζωής (ηλικία) και ορίζονται ως κ . Εφόσον το κριτήριο (συνήθως ένας μέγιστος αριθμός γεννήσεων) δεν ικανοποιείται, τα επιλεγμένα μ άτομα διαμορφώνουν την γονική γενιά για την επόμενη επανάληψη. Πρέπει να σημειωθεί ότι για κ άπειρο ο αλγόριθμος γίνεται $(\mu + \lambda)$ – ES και για $\kappa = 1$ γίνεται (μ, λ) – ES.



Σχήμα 2.7: Σχηματική απεικόνιση μιας επανάληψης ενός απλού ES αλγόριθμου

2.4 Αριθμητικές μέθοδοι βελτιστοποίησης βασισμένες σε παραγώγους

Η MatLab παρέχει ένα πλήθος μεθόδων ελαχιστοποίησης οι οποίες συγκλίνουν ταχύτατα σε τοπικό ελάχιστο. Στο παρόν πρόβλημα χρησιμοποιείται η μέθοδος του Διαδοχικού Τετραγωνικού Προγραμματισμού στην οποία λύνεται ένα υποπρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού σε κάθε επανάληψη. Ως αρχική

εκτίμηση των μεταβλητών που βελτιστοποιούνται, δίνεται η τελική εκτίμηση που προέκυψε από τη χρήση των *ES*. Έτσι λοιπόν εξασφαλίζεται με τη μέγιστη δυνατή αξιοπιστία ότι η αριθμητική μέθοδος βελτιστοποίησης θα συγκλίνει στην ολικά βέλτιστη λύση (Chapra SC, Canale RP, 1998).

Διαδοχικός Τετραγωνικός Προγραμματισμός [Sequential Quadratic Programming (SQP)]

Οι μέθοδοι SQP αντιπροσωπεύουν την κατάσταση προόδου στις μη γραμμικές μεθόδους προγραμματισμού. Για παράδειγμα, έχει εφαρμοστεί και έχει εξεταστεί μια έκδοση που εκτελεί έξω από κάθε άλλη δοκιμασμένη μέθοδο, από άποψη αποδοτικότητας, την ακρίβεια και το ποσοστό των αποδεκτών λύσεων. Σύμφωνα με τη μέθοδο, σε κάθε επανάληψη γίνεται μια προσέγγιση της Εσσιανής (Hessian) της Lagrangian συνάρτησης χρησιμοποιώντας μια quasi-Newton μέθοδο ενημέρωσης. Με βάση την εξίσωση (2.3) η κεντρική ιδέα είναι η διαμόρφωση ενός QP υποπροβλήματος βασιζόμενο σε μια τετραγωνική προσέγγιση της Lagrangian συνάρτησης

$$L(\underline{\theta}, \underline{\lambda}) = J(\underline{\theta}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(\underline{\theta}) \tag{2.3}$$

Το πρόβλημα απλοποιείται με την προϋπόθεση ότι οι περιορισμοί έχουν εκφραστεί ως περιορισμοί ανισότητας. Η επίλυση του προβλήματος πραγματοποιείται με τη γραμμικοποίηση των μη γραμμικών περιορισμών όπως περιγράφει η παρακάτω διαδικασία

$$\begin{aligned} \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & \frac{1}{2} d^T H_k d + \nabla J(\underline{\theta}_{-k}) d \\ \nabla g_i(\underline{\theta}_{-k})^T + g_i(\underline{\theta}_{-k}) &= 0 & i = 1, \dots, m_e \\ \nabla g_i(\underline{\theta}_{-k})^T + g_i(\underline{\theta}_{-k}) &\leq 0 & i = m_e + 1, \dots, m \end{aligned} \tag{2.4}$$

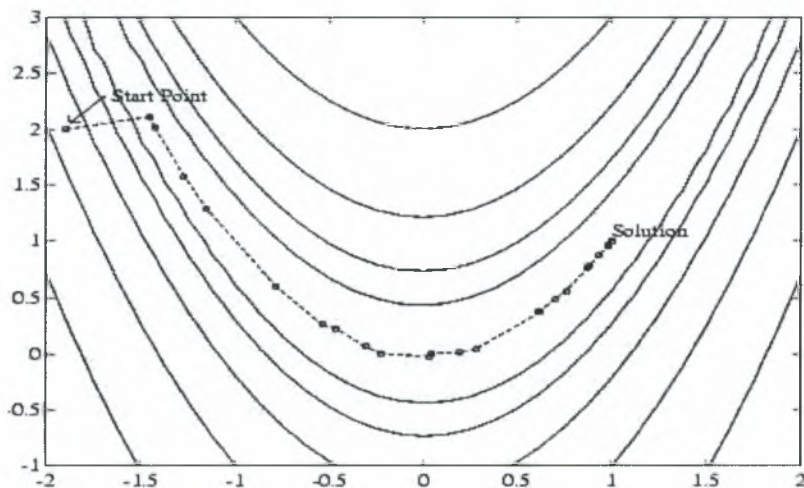
Θεωρώντας ως παράδειγμα την εξίσωση

$$J(\underline{\theta}) = 100 \cdot (\theta_2 - \theta_1^2)^2 + (1 - \theta_1)^2 \quad \text{Rosenbrock's function}$$

έτσι ώστε

$$g(\underline{\theta}) = \theta_1^2 + \theta_2^2 - 1.5 \leq 0$$

παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8 η διαδρομή την οποία ακολουθούν οι επαναληπτικές τιμές $\underline{\theta}$ από το αρχικό σημείο $\underline{\theta} = [-1.9, 2.0]$ στο τελικό σημείο $\underline{\theta} = [0.9072, 0.8228]$.



Σχήμα 2.8: SQP Method on Nonlinear Linearly Constrained Rosenbrock's Function

Quasi – Newton Methods

Από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν τις πληροφορίες κλίσης, περισσότερο εύχρηστες είναι οι μέθοδοι Newton. Αυτές οι μέθοδοι ενισχύουν τις πληροφορίες κυρτότητας σε κάθε επανάληψη για να διατυπώσουν ένα τετραγωνικό πρότυπο πρόβλημα της παρακάτω μορφής:

$$\min_x \frac{1}{2} \underline{\theta}^T \cdot \underline{H} \cdot \underline{\theta} + \underline{c}^T \cdot \underline{\theta} + b \quad (2.5)$$

όπου H , η Εσσιανή (Hessian) μήτρα, η οποία είναι μια θετικά ορισμένη συμμετρική μήτρα, c είναι ένα σταθερό διάνυσμα και b είναι μια σταθερά. Η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα αυτό λαμβάνει χώρα όταν οι μερικοί παράγωγοι του θ τείνουν στο μηδέν. Συγκεκριμένα όταν

$$\nabla J(\underline{\theta}^*) = H \cdot \underline{\theta}^* + c = 0 \Rightarrow \underline{\theta}^* = -H^{-1} \cdot c \quad (2.6)$$

Οι μέθοδοι τύπου Newton (σε αντιδιαστολή με την Quasi – Newton) υπολογίζουν τη μήτρα H άμεσα και προχωρούν σε μια κατεύθυνση καθόδου, έτσι ώστε να εντοπίσουν το ελάχιστο μετά από ένα αριθμό επαναλήψεων. Ο υπολογισμός της H αριθμητικά περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό υπολογισμών. Η μέθοδος Quasi – Newton αποφεύγει κάτι τέτοιο παρατηρώντας τη «συμπεριφορά» της $J(\underline{\theta})$ και του $\nabla J(\underline{\theta})$ έτσι ώστε να αναπτύσσει πληροφορίες κυρτότητας για να προσεγγίσει τη μήτρα H , χρησιμοποιώντας κατάλληλη τεχνική ενημέρωσης.

Ένας μεγάλος αριθμός από τεχνικές ενημέρωσης της Εσσιανής έχουν αναπτυχθεί, ωστόσο ο τύπος που δίνεται από τους BFGS θεωρείται ο καταλληλότερος και είναι ο παρακάτω :

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k \cdot q_k^T}{q_k^T \cdot s_k} - \frac{H_k^T \cdot s_k^T \cdot s_k \cdot H_k}{s_k^T \cdot H_k \cdot s_k} \quad (2.7)$$

όπου

$$s_k = \begin{matrix} \theta & -\theta \\ -_{k+1} & -_k \end{matrix} \quad (2.8)$$

$$q_k = \nabla J(\theta_{-_{k+1}}) - \nabla J(\theta_{-_k}) \quad (2.9)$$

Ως αρχικό σημείο, H_0 μπορεί να τεθεί οποιαδήποτε συμμετρική θετικά ορισμένη μήτρα, π.χ. η μήτρα I . Για την αποφυγή της αντιστροφής της Εσσιανής H , παράγεται μια μέθοδος ενημέρωσης. Πρόκειται για τη χρησιμοποίηση ενός τύπου που προσεγγίζει την αντίστροφη της Εσσιανής H^{-1} σε κάθε αναπροσαρμογή. Η πληροφορία κλίσης παρέχεται είτε μέσω αναλυτικών υπολογισμένων κλίσεων είτε

εξάγεται μερικές παραγώγους χρησιμοποιώντας μια αριθμητική μέθοδο διαφοροποίησης, μέσω πεπερασμένων διαφορών.

Σε κάθε επανάληψη k εκτελείται μια αναζήτηση γραμμών σε αυτή την κατεύθυνση

$$d = H_k^{-1} \cdot \nabla J(\theta_{-k}) \quad (2.10)$$

Υλοποίηση SQP

Η υλοποίηση του SQP_αποτελείται από τρία κύρια στάδια:

- Ενημέρωση της Εσσιανής (Hessian) της Lagrangian συνάρτησης
- Λύση προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού
- Διαδικασία αναζήτησης γραμμών

Η ενημέρωση της Εσσιανής (Hessian) της Lagrangian συνάρτησης καθώς και η λύση προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού έχουν περιγραφεί παραπάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνεται το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού δικτυωμάτων. Ο βέλτιστος σχεδιασμός περιλαμβάνει ουσιαστικά την ελαχιστοποίηση του κόστους της κατασκευής κάτι που μπορεί να αναλυθεί είτε σε ελαχιστοποίηση του χρόνου κατασκευής, είτε σε ελαχιστοποίηση του βάρους του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί κάτω βέβαια από επιτρεπτά επίπεδα ασφάλειας. Για τους παραπάνω λόγους οι διατομές των ράβδων που αποτελούν το δικτύωμα ομαδοποιούνται έτσι ώστε να είναι ευκολότερη η σύνδεσή (ή η κόλλησή) τους. Δηλαδή, όλες οι οριζόντιες, διαγώνιες και κάθετες ράβδοι έχουν ίδιες τιμές διατομών αντίστοιχα, κάτι που βοηθάει στην γρηγορότερη κατασκευή του δικτύωματος. Έτσι, σαν αντικειμενική συνάρτηση επιλέγεται ουσιαστικά το συνολικό βάρος της κατασκευής, με μεταβλητές τις τιμές των διατομών των ράβδων και τις συντεταγμένες των κόμβων. Οι περιορισμοί είναι οι μέγιστες (σε απόλυτη τιμή) αξονικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε κάθε ράβδο να μην ξεπερνούν το όριο διαρροής και τα μέγιστα θλιπτικά φορτία να μην ξεπερνούν το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Το υλικό κατασκευής που επιλέχθηκε είναι Δομικός Χάλυβας (Structural Steel) και το είδος των διατομών κυκλικό (συμπαγές). Οι ιδιότητες του Δομικού Χάλυβα είναι οι εξής:

$$E = 200 \text{ GPa} \quad \text{Μέτρο Ελαστικότητας}$$

$$\sigma_{\text{yield}} = 400 \text{ MPa} \quad \text{Όριο Διαρροής}$$

$$\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{Πυκνότητα}$$

3.2 Διατύπωση προβλήματος βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα βέλτιστου σχεδιασμού μοντελοποιείται ως εξής. Θεωρείται $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ ως το σύνολο των μεταβλητών σχεδιασμού, οι οποίες επιλέγονται να μεταβάλλονται κατά την διάρκεια της διαδικασίας εύρεσης του βέλτιστου δικτύωματος. Οι μεταβλητές αυτές αντιστοιχούν σε γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατασκευής όπως στις διατομές των ράβδων καθώς και στις συντεταγμένες των κόμβων του δικτύωματος. Στόχος είναι η επιλογή των τιμών των παραμέτρων $\underline{\theta}$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος της κατασκευής, με περιορισμό την διατήρηση της ασφάλειας της κατασκευής σε επιθυμητά επίπεδα. Η αντικειμενική συνάρτηση (συνάρτηση κόστους) αντιπροσωπεύει το συνολικό κόστος, το οποίο προκύπτει από το συνολικό βάρος πολλαπλασιασμένο με το κόστος υλικού ανά μονάδα βάρους και δίνεται από τη σχέση

$$J(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^N \rho \cdot A_i(\underline{\theta}) \cdot L_i(\underline{\theta}) \quad (3.1)$$

όπου ρ η πυκνότητα του υλικού, A_i το εμβαδόν της διατομής του μέλους i του δικτύωματος και L_i το μήκος του μέλους i του δικτύωματος.

Το μήκος L_i δίνεται από τη σχέση:

$$L_i = \sqrt{\left(x_{ii}(\underline{\theta}) - x_{ai}(\underline{\theta})\right)^2 + \left(y_{ii}(\underline{\theta}) - y_{ai}(\underline{\theta})\right)^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

ο δείκτης i αναφέρεται στην τελική συντεταγμένη (x, y) , ενώ ο δείκτης a αναφέρεται στην αρχική συντεταγμένη (x, y) της ράβδου i .

Η εξάρτηση των $A_i(\underline{\theta})$ και $[x_i(\underline{\theta}), y_i(\underline{\theta})]$ με τις μεταβλητές θ_i θα δοθεί πιο αναλυτικά στις περιπτώσεις που θα εξετασθούν παρακάτω.

Τέλος λαμβάνονται υπόψη και οι περιορισμοί που αναφέρονται στην ασφάλεια του δικτύωματος. Η ασφάλεια διατηρείται όταν οι αξονικές τάσεις (εφελκυστικές και θλιπτικές) κάθε ράβδου δεν ξεπερνούν τις επιτρεπόμενες τάσεις

και οι μέγιστες θλιπτικές αξονικές δυνάμεις δεν ξεπερνούν τα κρίσιμα φορτία λυγισμού (Stople, M. Svanberg, K, 2001 and Cheng, G. Guo X, Yamazaki, K, 2001). Οι επιτρεπόμενες τάσεις για κάθε ράβδο είναι το όριο διαρροής του υλικού (σ_y) ενώ τα κρίσιμα φορτία λυγισμού (p_{ki}) εξαρτώνται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της κατασκευής, το μήκος κάθε ράβδου, το μέτρο ελαστικότητας και τη ροπή αδράνειας I_{zi} της διατομής.

Συγκεκριμένα ο πρώτος περιορισμός ο οποίος αναφέρεται σε ασφάλεια της κατασκευής λόγω διαρροής δίνεται στη μορφή

$$\left| \sigma_i(\theta) \right| \leq \sigma_{\max} = \sigma_{yield}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

για κάθε ράβδο i .

Ο δεύτερος περιορισμός ο οποίος αναφέρεται στην ασφάλεια της κατασκευής λόγω του λυγισμού των ράβδων δίνεται στη μορφή:

$$-p_i(\theta) \leq p_{ki}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.4)$$

για κάθε ράβδο i .

Θεωρώντας κυκλικές διατομές για τις ράβδους και λαμβάνοντας υπόψη ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, με μήκος L_i και ροπή αδράνειας I_{zi} είναι

$$p_{ki} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{zi}}{L_i^2} \quad (3.5)$$

η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή:

$$-\sigma_i(\theta) \cdot A_i(\theta) \leq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{zi}}{L_i^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

όπου:

$$I_{zi} = \frac{\pi \cdot r_i^4}{4} = \frac{A_i^2}{4\pi}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

Συνοπτικά έχουμε το έχουμε το εξής πρόβλημα βελτιστοποίησης :

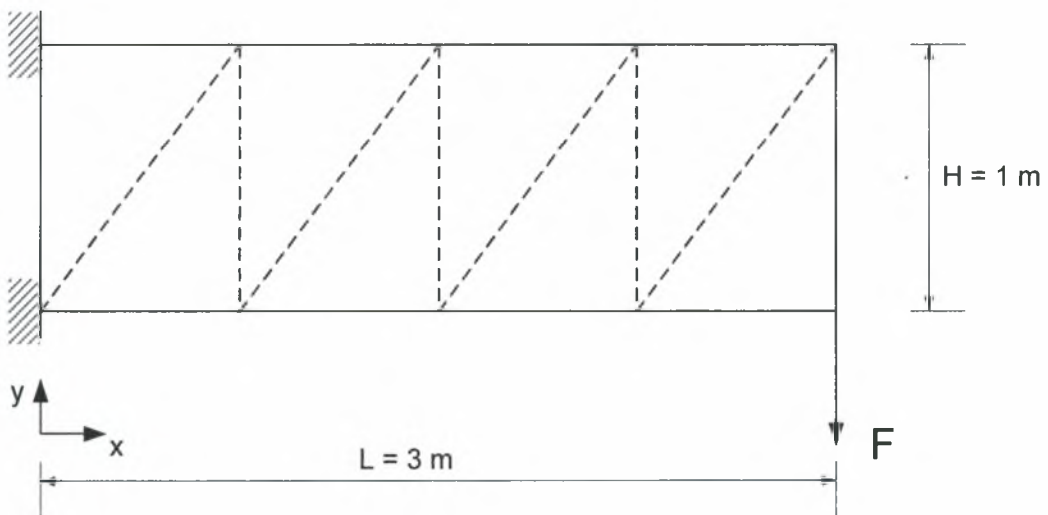
$$\min_{\theta} J(\theta) = \min_{\theta} \sum_{i=1}^N \rho \cdot A_i(\theta) \cdot L_i(\theta), \quad (3.8)$$

με περιορισμούς ανισότητας

$$\begin{aligned} g_i(\theta) &= \sigma_i(\theta) - \sigma_{yield} \leq 0, & i &= 1, \dots, N \\ g_{N+i}(\theta) &= -\sigma_i(\theta) - \sigma_{yield} \leq 0, & i &= 1, \dots, N \\ g_{2N+i}(\theta) &= -\sigma_i(\theta) \cdot A_i(\theta) - \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{zi}}{L_i^2} \leq 0, & i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.9)$$

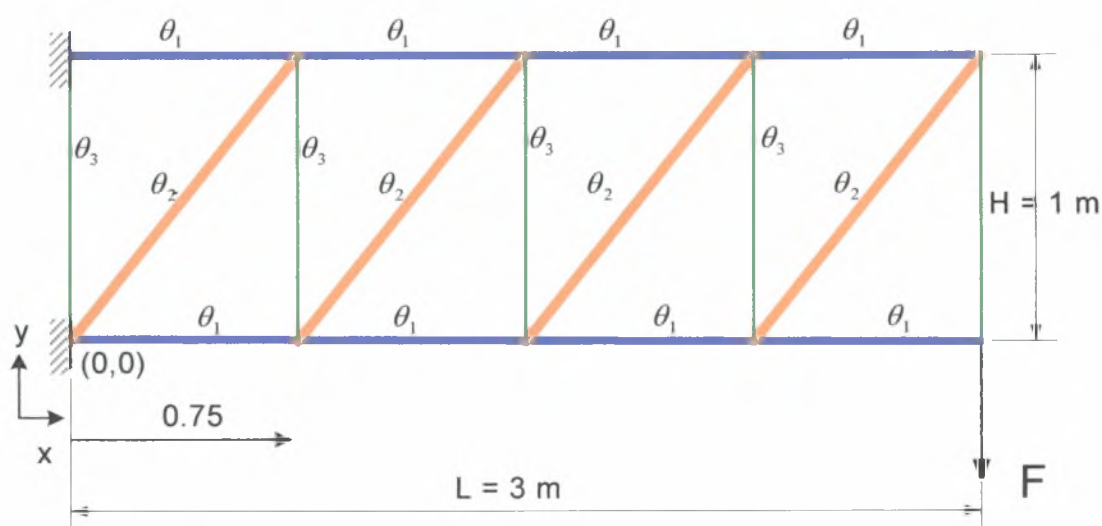
3.3 Ορισμός κατασκευής και μεταβλητών

Η περίπτωση η οποία εξετάζεται είναι η μεταφορά μιας δύναμης F σε απόσταση $L = 3m$ από σταθερό σημείο (π.χ. τοίχος). Η μεταφορά επιτυγχάνεται με την κατασκευή δικτυώματος μήκους $L = 3m$ και ύψους $H = 1m$ το οποίο είναι πακτωμένο στο σταθερό σημείο. Πιο συγκεκριμένα το είδος του δικτυώματος είναι ένα ορθογώνιο πλαίσιο στο οποίο προστίθενται εσωτερικές κάθετες ράβδοι οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με διαγώνιες ράβδους (Σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1 : Είδος δικτυώματος (π.χ. $N=17$)

Εισάγονται 3 ομάδες ράβδων. Στην πρώτη ομάδα ανήκουν όλες οι οριζόντιες ράβδοι οι οποίες θεωρείται ότι έχουν την ίδια διατομή άγνωστης τιμής. Στη δεύτερη ομάδα ανήκουν όλες οι διαγώνιες ράβδοι που και αυτές θεωρείται ότι έχουν την ίδια διατομή άγνωστης τιμής και στην τρίτη ομάδα ανήκουν όλες οι κάθετες ράβδοι με την ίδια διατομή άγνωστης τιμής. Έτσι, οι μεταβλητές θ_i για $i = 1,2,3$ αναφέρονται στις διατομές του δικτύματος ανά ομαδοποίηση (σχήμα 3.2). Δηλαδή για $i = 1$ η παράμετρος θ_1 αναφέρεται σ' όλες τις οριζόντιες ράβδους, η θ_2 σ' όλες τις διαγώνιες και η θ_3 σ' όλες τις κάθετες. Η παραμετροποίηση αυτή δείχνεται στο Σχήμα 3.2.



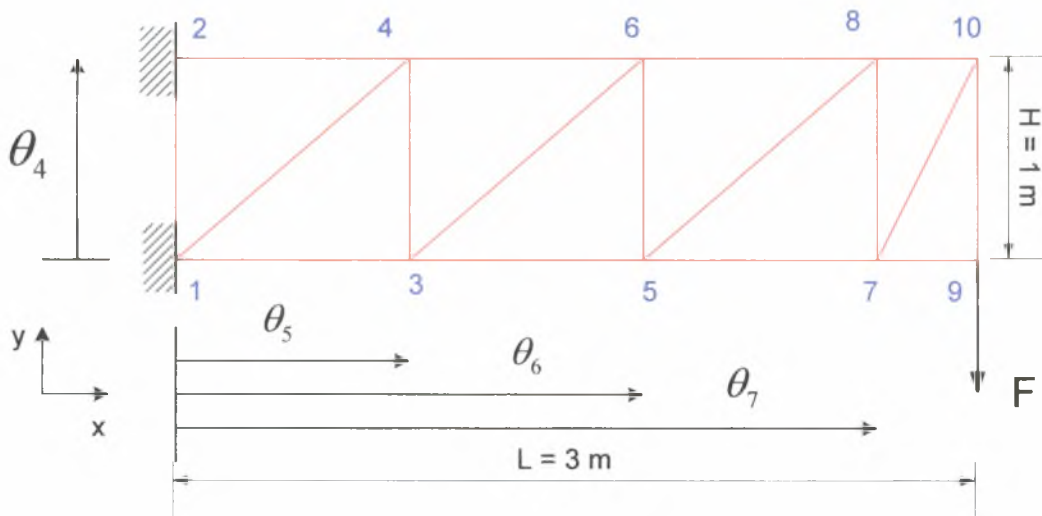
Σχήμα 3.2 : Παραμετροποίηση Δικτύματος ως προς τις Διατομές

Για υπολογιστική διευκόλυνση στη σύγκλιση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης εισάγεται η παρακάτω παραμετροποίηση

$$\begin{aligned}
 A_{i,οριζ} &= A_o \cdot \theta_1, & \text{για όλα τα } i \text{ που αναφέρονται στις οριζόντιες ράβδους} \\
 A_{i,διαγ} &= A_o \cdot \theta_2, & \text{για όλα τα } i \text{ που αναφέρονται στις διαγώνιες ράβδους} \\
 A_{i,καθ} &= A_o \cdot \theta_3, & \text{για όλα τα } i \text{ που αναφέρονται στις κάθετες ράβδους}
 \end{aligned}$$

όπου A_o είναι το εμβαδόν αναφοράς. Το εμβαδόν αναφοράς επιλέγεται από το χρήστη και μπορεί να είναι μια πρώτη προσέγγιση με βάση την εμπειρία.

Εισάγεται επίσης μια τέταρτη μεταβλητή θ_4 η οποία αναφέρεται στη y - συντεταγμένη όλων των «πάνω» κόμβων. Τέλος, εισάγονται μεταβλητές θ_i , $i = 5, \dots, 4 + N_{in}$ (όπου N_{in} ο αριθμός των εσωτερικών ράβδων) οι οποίες αναφέρονται στις x - συντεταγμένες των εσωτερικών κατακόρυφων κόμβων του δικτύωματος όπως δείχνεται στο Σχήμα 3.3 για 3 ζεύγη εσωτερικών κόμβων.



Σχήμα 3.3 : Βελτιστοποιημένο Δικτύωμα ως προς τις Συντεταγμένες των Κόμβων

Στόχος της εργασίας είναι η βέλτιστη επιλογή των μεταβλητών θ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το βάρος του δικτύωματος και να διατηρείται η ασφάλεια της κατασκευής, όπως διατυπώθηκε μαθηματικά μέσω των εξισώσεων (3.9) και (3.10).

3.4 Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος

Για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται καταρχάς οι Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (Evolutionary Strategies) οι οποίοι εξασφαλίζουν στο πρόβλημα αρχικές τιμές των μεταβλητών θ πολύ κοντά στις «ολικά» βέλτιστες λύσεις θ^* .

Τα στοιχεία που ορίζονται είναι τα εξής:

N_{gen} : αριθμός των «γενεών» που υπολογίζονται μέχρι την εύρεση της καλύτερης λύσης

$Lambda$: αριθμός των λύσεων (απογόνων λ) για κάθε γενιά (N_{gen})

N_{prime} : αριθμός των καλύτερων λύσεων (μ) από τις λ ($Lambda$)

Mu : αριθμός «μετάλλαξης»

θ_{-L} : κατώτατα όρια των μεταβλητών θ

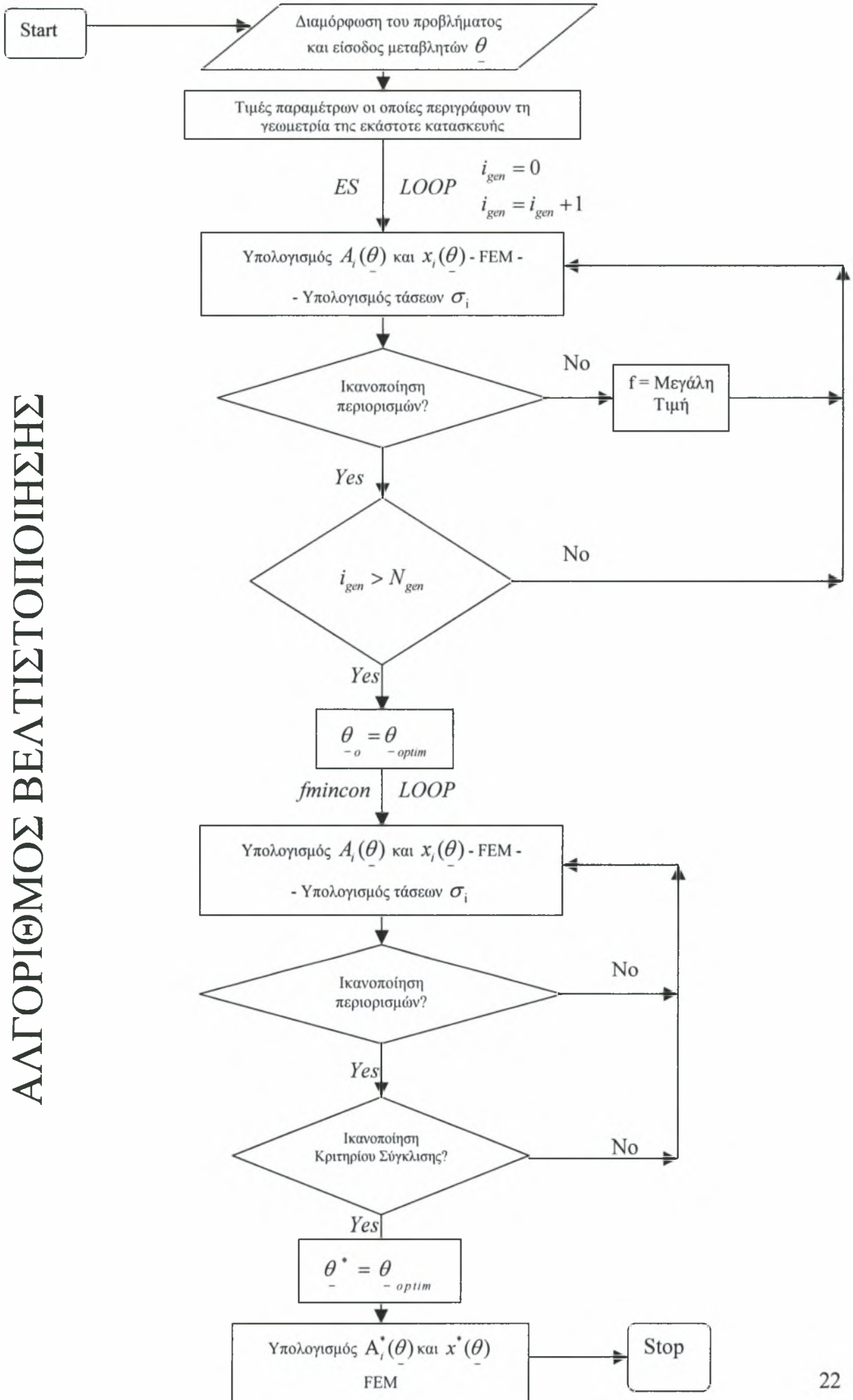
θ_{-U} : ανώτατα όρια των μεταβλητών θ

Πρέπει να σημειωθεί ότι για κάθε επανάληψη των ES ξαναδημιουργείται η γεωμετρία της κατασκευής έτσι ώστε για κάθε αλλαγή των τιμών των διατομών ή της τοπολογίας των κόμβων να παίρνουμε νέες τιμές αξονικών τάσεων σ_i και κατά συνέπεια να έχουμε διαφορετικούς περιορισμούς ασφάλειας της κατασκευής (Y. Ezawa, 2002). Κάτι τέτοιο είναι πολύ χρονοβόρο, το οποίο δημιουργεί προβλήματα στην γενικότερη εποπτεία του προβλήματος.

Η λύση που παίρνουμε από τους ES είναι ένα διάνυσμα θ_{-0} που περιέχει τις αρχικές εκτιμήσεις των μεταβλητών θ . Το διάνυσμα αυτό χρησιμοποιείτε σαν αρχική εκτίμηση στην function του MatLab *fmincon*. Η function αυτή δουλεύει ως εξής : ορίζουμε δύο καινούριες functions από τις οποίες η πρώτη είναι ουσιαστικά η αντικειμενική συνάρτηση (*objective function*) του προβλήματος (J) και η δεύτερη είναι οι περιορισμοί της κατασκευής (*constraint function*). Και σε αυτή τη μέθοδο για κάθε επανάληψη η γεωμετρία της κατασκευής ξαναδημιουργείται έτσι ώστε να έχουμε κάθε φορά καινούριες λύσεις και περιορισμούς. Έτσι είναι ευνόητο ότι ο χρόνος επίλυσης του προβλήματος αυξάνει κάτι που συνεπάγεται μεγαλύτερη δυσκολία. Και εδώ αυτά που πρέπει να οριστούν πέρα από τις δύο functions είναι τα κατώτατα και ανώτατα όρια των μεταβλητών θ τα οποία όμως είναι ίδια με αυτά που χρησιμοποιούνται στους Εξελικτικούς Αλγόριθμους.

Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι η γεωμετρία της κατασκευής και η διακριτοποίησή της (K. J. Bathe, 1996) γίνεται με το πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ComSol MultiPhysics (FemLab) σε περιβάλλον MatLab.

Παρακάτω παρουσιάζεται σχηματικά ο αλγόριθμος της βελτιστοποίησης.



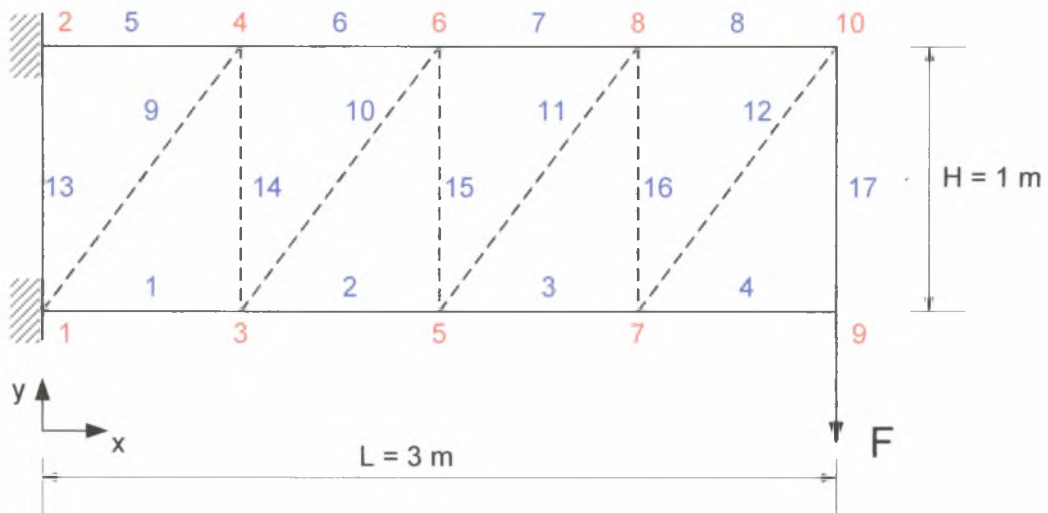
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ 1ΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ο βέλτιστος σχεδιασμός δικτυωμάτων με διάφορες ομάδες μεταβλητών. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται ο βέλτιστος σχεδιασμός δικτυωμάτων, με μεταβλητές μόνο τις τιμές των διατομών A_i των ράβδων ($\theta_i, i=1,2,3$), ενώ στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται η βελτιστοποίηση συγχρόνως των τιμών των διατομών και της τοπολογίας των κόμβων του δικτύωματος. Ειδικότερα εξετάζονται περιπτώσεις δικτυωμάτων για διάφορους αριθμούς (N) ράβδων - για συγκεκριμένη φόρτιση - με συνολικό μήκος $L = 3m$ και συνολικό πλάτος (ύψος) $H = 1m$, των οποίων οι κάθετες εσωτερικές ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους με διαγώνιες ράβδους με τον τρόπο που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1 (Σχήμα 4.1, $N = 17$ - Μοντέλο 1). Με τον όρο *Μοντέλο 1* αναφερόμαστε στον τύπο του δικτύωματος που εξετάζεται και όχι συγκεκριμένα στο δικτύωμα του Σχήματος 4.1. Για κάθε περίπτωση (π.χ. $N = 17$) γίνεται βελτιστοποίηση του εκάστοτε δικτύωματος ως προς τις επιθυμητές μεταβλητές και παρουσιάζονται οι αντίστοιχες βέλτιστες τιμές καθώς και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους (J). Επίσης δίνονται σε πίνακα οι τιμές των *αξονικών τάσεων* σ_i , των *αξονικών φορτίων* p_i και των *κρίσιμων φορτίων λυγισμού* p_k για κάθε ράβδο καθώς και η *ποσοστιαία διαφορά* ανάμεσα σε *αξονικές τάσεις* και *όριο διαρροής* σ_v και η *ποσοστιαία διαφορά* ανάμεσα σε *αξονικά φορτία* και *κρίσιμα φορτία λυγισμού*.

Τελικά με την παραπάνω διαδικασία επιλέγεται το βέλτιστο δικτύωμα (ανάμεσα σε μια ομάδα δικτυωμάτων με διαφορετικό αριθμό ράβδων). Στο δικτύωμα αυτό, εφαρμόζεται φορτίο η τιμή του οποίου αυξάνεται και γίνεται για κάθε τιμή του φορτίου βελτιστοποίηση ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές.



Σχήμα 4.1: Τύπος δικτυώματος – Μοντέλο 1

Η αρίθμηση των κόμβων και των ράβδων κάθε δικτυώματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1 καθώς και στο διάγραμμα του εκάστοτε δικτυώματος για κάθε περίπτωση, το οποίο παρουσιάζει τη μετατόπιση στους άξονες x και y . Η φόρτιση η οποία εφαρμόζεται είναι της τάξεως των 10000 N ($F = 10000\text{ N}$) και εφαρμόζεται στον y - άξονα (αρνητικά), ενώ η τιμή του ορίου διαρροής για δομικό χάλυβα είναι $\sigma_y = 4.0 \times 10^8\text{ Pa}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τιμές της ποσοστιαίας διαφοράς, ανάμεσα σε αξονικά φορτία και κρίσιμα φορτία λυγισμού, οι οποίες είναι μεγαλύτερες από 100% δεν λαμβάνονται υπόψη. Τέτοιες τιμές σημαίνουν ότι το αξονικό φορτίο για κάποια ράβδο έχει θετική τιμή και οπότε δεν έχει νόημα η συγκεκριμένη διαφορά.

Τέλος για όλους τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν Εξελικτικοί Αλγόριθμοι με τα εξής χαρακτηριστικά :

$N_{gen} = 100$ [αριθμός των «γενεών» που υπολογίζονται μέχρι την εύρεση της καλύτερης λύσης]

$Lambda = 100$ [αριθμός των λύσεων (απογόνων λ) για κάθε γενιά (N_{gen})]

$N_{prime} = 40$ [αριθμός των καλύτερων λύσεων μ από τις λ ($Lambda$)]

$Mu = 15$ [αριθμός «μετάλλαξης»]

Η βελτιστοποίηση για κάθε δικτύωμα έγινε πολλαπλές φορές με τα ίδια χαρακτηριστικά Εξελικτικών Αλγορίθμων, έτσι ώστε να εξασφαλιστεί η εύρεση

βέλτιστων αρχικών τιμών και κατά συνέπεια η εύρεση ολικού βέλτιστου της συνάρτησης κόστους.

Στο πρώτο μέρος, για κάθε περίπτωση παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των διατομών, των οποίων η ομαδοποίηση δίνεται παρακάτω:

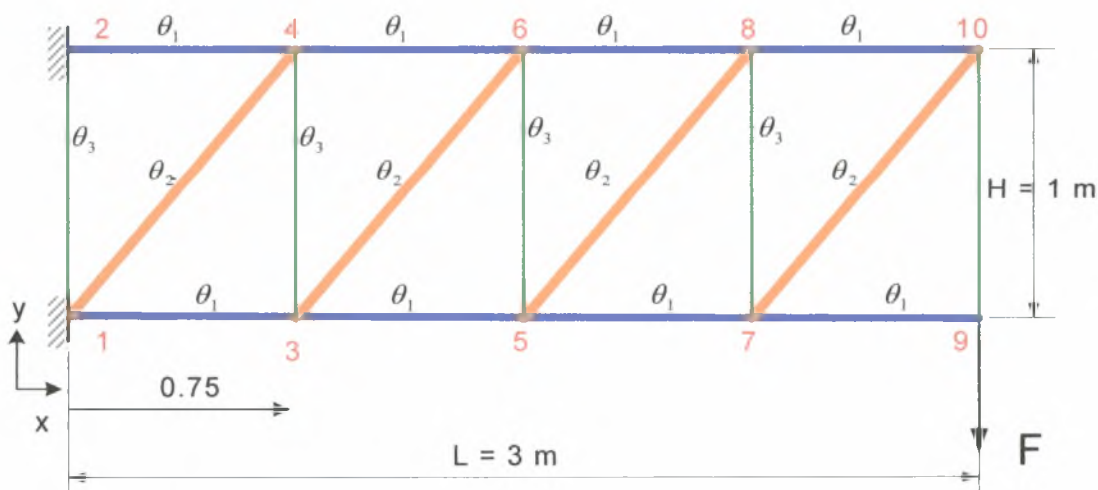
$$A_{i,οριζ} = A_o \cdot \theta_1, \quad \text{για όλα τα } i \text{ που αναφέρονται στις οριζόντιες ράβδους}$$

$$A_{i,διαγ} = A_o \cdot \theta_2, \quad \text{για όλα τα } i \text{ που αναφέρονται στις διαγώνιες ράβδους}$$

$$A_{i,καθ} = A_o \cdot \theta_3, \quad \text{για όλα τα } i \text{ που αναφέρονται στις κάθετες ράβδους}$$

όπου A_o είναι το εμβαδόν αναφοράς. Για την περίπτωσή μας, η τιμή του εμβαδού αναφοράς είναι $A_o = \pi \cdot r^2 = 706.5 \text{ mm}^2$ και αντιστοιχεί σε τιμή ακτίνας αναφοράς $r = 0.015 \text{ m}$ (ή $r = 15 \text{ mm}$). Το εμβαδόν αναφοράς επιλέγεται από το χρήστη και μπορεί να είναι μια πρώτη προσέγγιση με βάση την εμπειρία.

Οι συντεταγμένες των κάθετων εσωτερικών ράβδων για το $x - \acute{\alpha}\xi\omega\text{να}$ ισοκατανέμονται. Δηλαδή αν θέλαμε ένα δικτύωμα του τύπου του Σχήματος 4.2 με 17 ράβδους, η $x - \text{συντεταγμένη}$ της πρώτης, της δεύτερης κ.ο.κ ράβδου θα υπολογιζόταν ως εξής : $x_3 = \frac{3}{4} \text{ m} = 0.75 \text{ m}$, $x_5 = 2 \cdot \frac{3}{4} \text{ m} = 1.5 \text{ m}$ κ.ο.κ. (οι δείκτες αναφέρονται στους «κάτω» κόμβους των ράβδων).



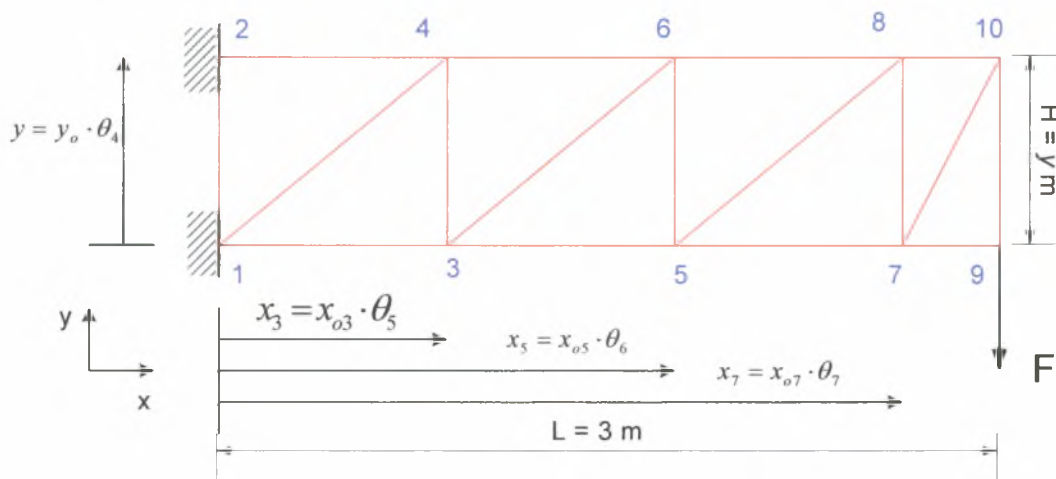
Σχήμα 4.2 : Ισοκατανομή των $x - \text{συντεταγμένων}$ και ομαδοποίηση

Στο δεύτερο μέρος, για κάθε περίπτωση παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των διατομών των ράβδων καθώς και των θέσεων των κόμβων. Με βάση το Σχήμα 4.3, οι τιμές των θέσεων των κόμβων προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό των αρχικών τιμών των θέσεων των κόμβων με τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές των παραμέτρων θ_i για $i=4, \dots, 4+N_m$, όπου N_m ο αριθμός των εσωτερικών ράβδων (Σχέση 4.1 και 4.2).

$$y = y_o \cdot \theta_4 \quad (4.1)$$

$$x_j = x_{oj} \cdot \theta_i, \quad \text{όπου } i = 5, \dots, 4 + N_m \text{ και } j = 3, 5, \dots, \frac{N-3}{2} \quad (4.2)$$

Οι αρχικές συντεταγμένες των κάθετων εσωτερικών ράβδων για το x – άξονα όπως αναφέρθηκε ισοκατανέμονται.



Σχήμα 4.3: Βέλτιστες τιμές κόμβων – Μοντέλο 1 ($N_m = 3$)

4.2 Βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης των δικτυωμάτων για διαφορετικό αριθμό N . Η βελτιστοποίηση γίνεται ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων με βάση την ομαδοποίηση που παρουσιάστηκε στην εισαγωγή (Σχήμα 4.2).

1. Δικτύωμα 5 ράβδων ($N = 5$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1, ενώ στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

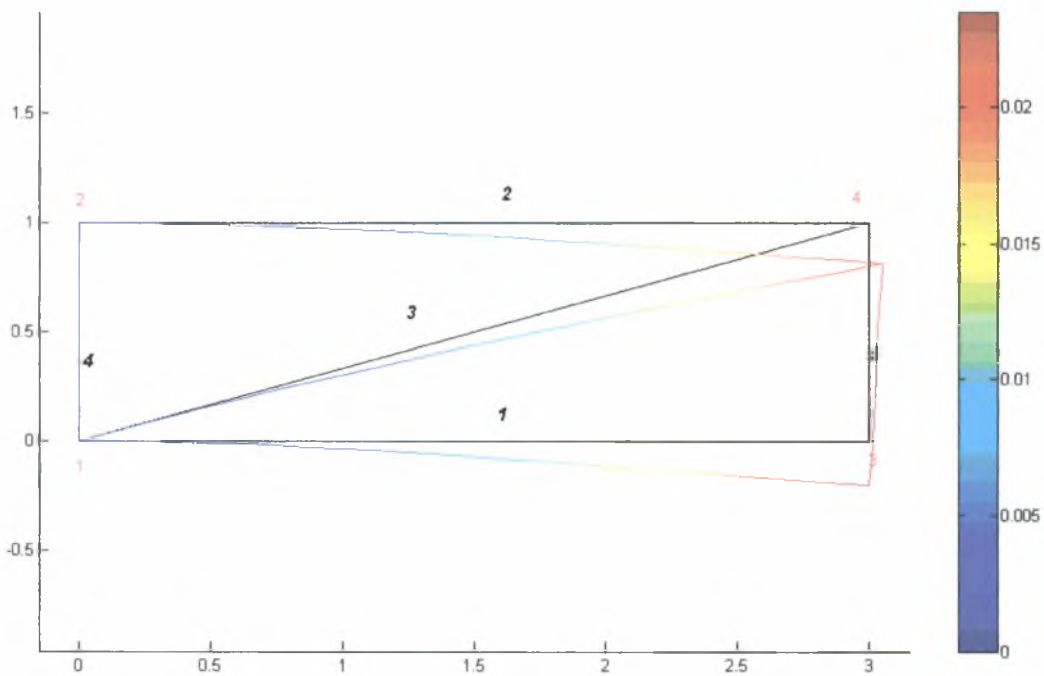
Πίνακας 4.1: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1053	0.0744
2	0.6367	0.4500
3	0.0354	0.0250
$J(kg)$	15.0698	

Πίνακας 4.2: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 5$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά	Ποσοστιαία Διαφορά
				$\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	$\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$

1	-0.0007	-0.0005	0.0954	100.016	99.50
2	4.0000	2.9772	0.0954	0.000	3219.90
3	-0.6977	-3.1400	3.1400	117.44	0.000
4	0	0	0.0968	100.00	100.00
5	4.0000	0.9997	0.0968	0.000	1132.40



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα μετατόπισης βέλτιστου δικτύωματος $N = 5$

Παρατηρούμε ότι η 3^η (διαγώνια) ράβδος έχει τη μεγαλύτερη τιμή διατομής, ενώ από τον Πίνακα 4.2 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 2^η και 5^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_v). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

2. Δικτύωμα 9 ράβδων ($N = 9$)

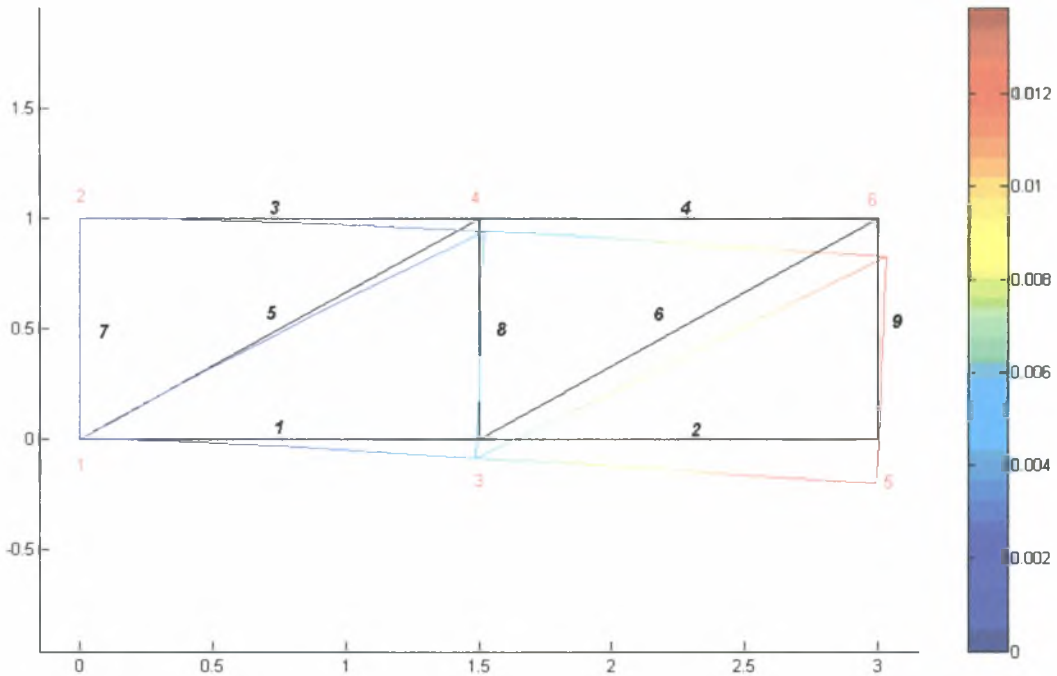
Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3, ενώ στον Πίνακα 4.4 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

Πίνακας 4.3: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.2087	0.1475
2	0.2749	0.1943
3	0.0354	0.02502
$J(kg)$	13.0361	

Πίνακας 4.4: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 9$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-1.0165	-1.4996	1.4996	125.41	0.000
2	-0.0002	-0.0002	1.4996	100.00	100.00
3	2.0292	2.9936	1.4996	49.27	299.60
4	1.0163	1.4994	1.4996	74.59	200.00
5	-0.9243	-1.7958	1.8007	123.10	0.300
6	-0.9268	-1.8007	1.8007	123.17	0.000
7	0	0	0.0968	100.00	100.00
8	3.9825	0.9951	0.0968	0.4379	1128.0
9	4.0000	0.9995	0.0968	0.000	1132.5



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 9$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.4 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η και 6^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_c), ενώ στην 5^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.3 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 9^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) και στην 8^η πολύ κοντά σ' αυτό. Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

3. Δικτύωμα 13 ράβδων ($N = 13$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5, ενώ στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

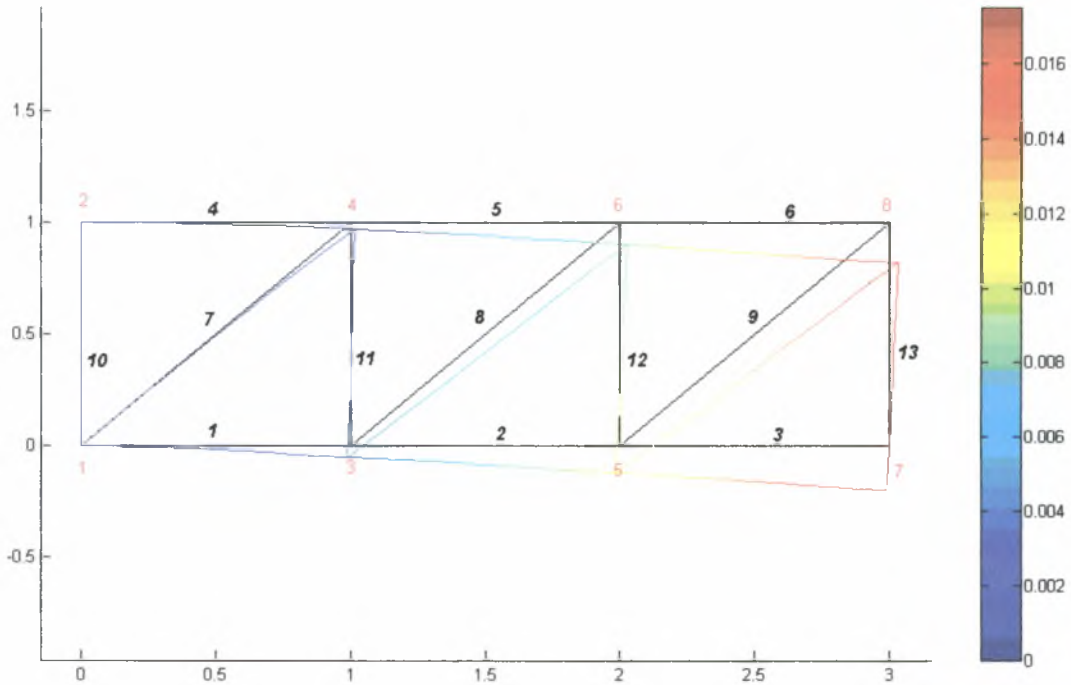
Πίνακας 4.5: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1607	0.1136
2	0.1909	0.1349
3	0.0353	0.02495
$J(kg)$	10.6267	

Πίνακας 4.6: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 13$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-1.7607	-1.9996	1.9996	144.01	0.000
2	-0.8800	-0.9994	1.9996	121.99	50.00
3	-0.0003	-0.0003	1.9996	100.00	100.00
4	2.6371	2.9950	1.9996	34.07	249.80
5	1.7604	1.9993	1.9996	55.99	200.00
6	0.8797	0.9991	1.9996	78.00	150.00
7	-1.0431	-1.4073	1.4110	126.07	0.300
8	-1.0458	-1.4110	1.4110	126.14	0.000
9	-1.0454	-1.4105	1.4110	126.13	0.000
10	0	0	0.0967	100.00	100.00
11	3.9753	0.9928	0.0967	0.616	1126.7

12	3.9847	0.9952	0.0967	0.381	1129.2
13	4.0000	0.9990	0.0967	0.000	1133.1



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 13$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.6 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η την 8^η και την 9^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k), ενώ στην 7^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.3 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 13^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 11^η και 12^η πολύ κοντά σ' αυτό. Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

4. Δικτύωμα 17 ράβδων ($N = 17$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.7, ενώ στον Πίνακα 4.8 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

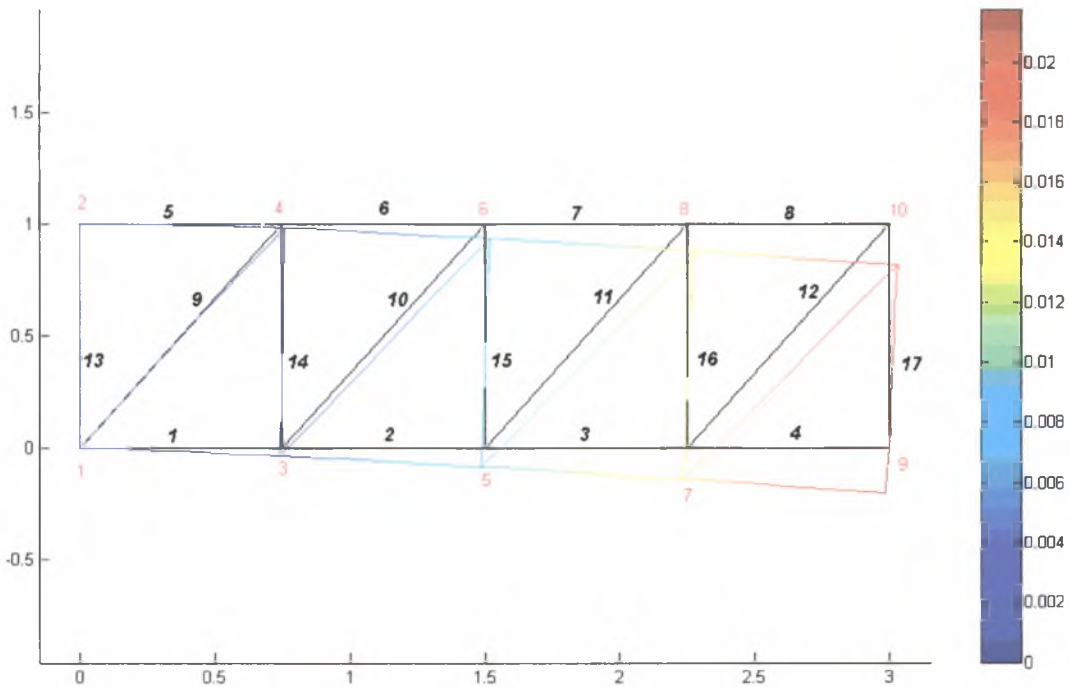
Πίνακας 4.7: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1278	0.0903
2	0.1585	0.1120
3	0.0353	0.02495
$J(kg)$	9.6318	

Πίνακας 4.8: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 17$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-2.4900	-2.2496	2.2496	162.2502	0.000
2	-1.6597	-1.4995	2.2496	141.4935	33.30
3	-0.8299	-0.7498	2.2496	120.7475	66.70
4	-0.0004	-0.0004	2.2496	100.0099	100.0
5	3.3157	2.9956	2.2496	17.1066	233.2
6	2.4896	2.2493	2.2496	37.7589	200.0
7	1.6594	1.4992	2.2496	58.5154	166.6
8	0.8295	0.7494	2.2496	79.2617	133.3
9	-1.1090	-1.2423	1.2449	127.7252	0.200
10	-1.1111	-1.2446	1.2449	127.7784	0.000
11	-1.1109	-1.2444	1.2449	127.7734	0.000

12	-1.1114	-1.2449	1.2449	127.7853	0.000
13	0	0	0.0966	100.0000	100.0
14	3.9643	0.9897	0.0966	0.8930	1124.2
15	3.9830	0.9944	0.0966	0.4259	1129.1
16	3.9751	0.9924	0.0966	0.6223	1127.0
17	4.0000	0.9986	0.0966	0.0000	1133.5



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 17$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.8 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η, την 10^η, την 11^η και την 12^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k), ενώ στην 9^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.2 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 17^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 14^η την 15^η και την 16^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.4 - 0.9$ %). Επομένως και για αυτή τη περίπτωση, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

5. Δικτύωμα 21 ράβδων ($N = 21$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.9, ενώ στον Πίνακα 4.10 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

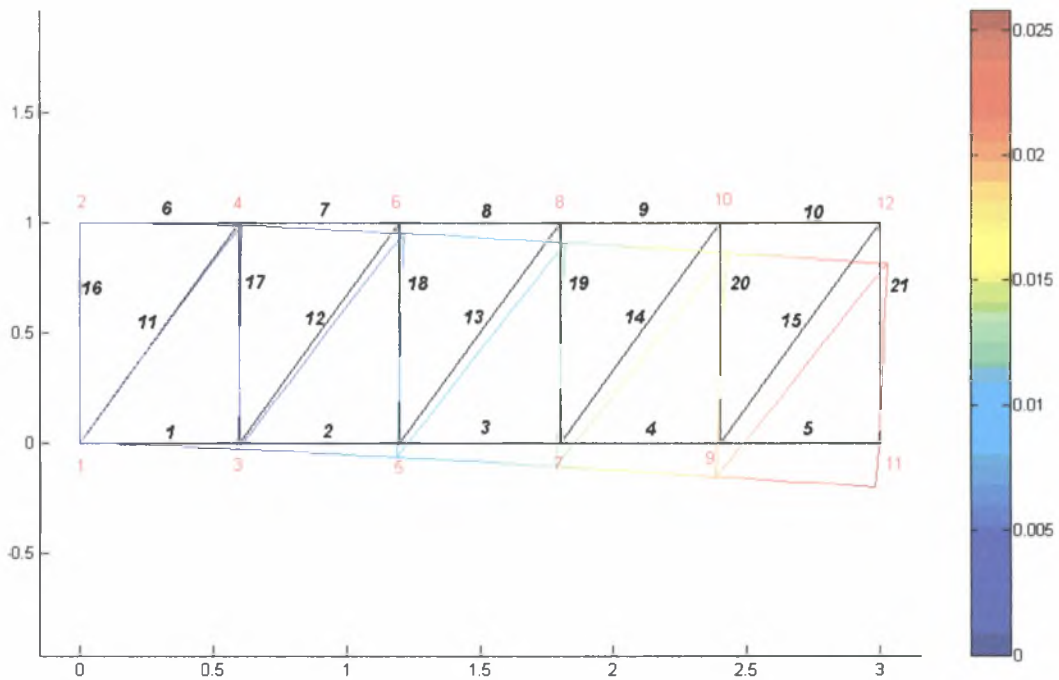
Πίνακας 4.9: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1060	0.0749
2	0.1427	0.1009
3	0.0353	0.02495
$J(kg)$	9.3187	

Πίνακας 4.10: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 21$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.2040	-2.3997	2.4157	180.10	0.700
2	-2.4026	-1.7995	2.4157	160.06	25.50
3	-1.6020	-1.1999	2.4157	140.05	50.30
4	-0.8009	-0.5999	2.4157	120.02	75.20
5	-0.0006	-0.0004	2.4157	100.01	100.00
6	4.0000	2.9959	2.4157	0.000	224.00
7	3.2035	2.3993	2.4157	19.91	199.30
8	2.4021	1.7991	2.4157	39.95	174.50
9	1.6015	1.1995	2.4157	59.96	149.70
10	0.8004	0.5995	2.4157	79.99	124.80
11	-1.1473	-1.1569	1.1592	128.68	0.200

12	-1.1489	-1.1585	1.1592	128.72	0.100
13	-1.1486	-1.1582	1.1592	128.71	0.100
14	-1.1490	-1.1586	1.1592	128.72	0.000
15	-1.1495	-1.1592	1.1592	128.74	0.000
16	0	0	0.0965	100.00	100.00
17	3.9532	0.9865	0.0965	1.170	1121.9
18	3.9759	0.9921	0.0965	0.600	1127.7
19	3.9736	0.9915	0.0965	0.661	1127.1
20	3.9670	0.9899	0.0965	0.824	1125.4
21	4.0000	0.9981	0.0965	0.000	1134.0



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 21$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.10 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 14^η και την 15^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k), ενώ στην 11^η, 12^η και 13^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.1 – 0.2 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 6^η και 21^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 17^η, 18^η, 19^η και στην 20^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.6 - 1.1$ %). Επομένως, όπως

παρατηρήσαμε για την περίπτωση του δικτυώματος με $N = 5$, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

6. Δικτύωμα 25 ράβδων ($N = 25$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.11, ενώ στον Πίνακα 4.12 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτυώματος.

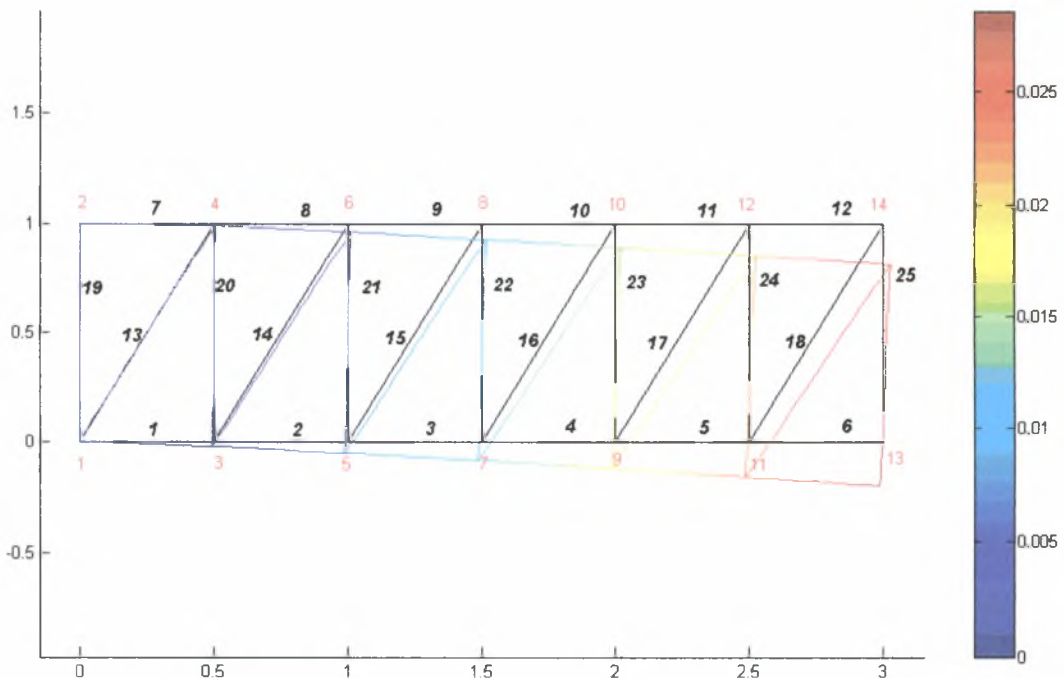
Πίνακας 4.11: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτυώματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1059	0.0749
2	0.1337	0.1009
3	0.0353	0.02495
$J (kg)$	9.8732	

Πίνακας 4.12: Καταπόνηση βέλτιστου δικτυώματος ($N = 25$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.3386	-2.4997	3.4765	183.4638	28.10
2	-2.6705	-1.9995	3.4765	166.7616	42.50
3	-2.0031	-1.4998	3.4765	150.0770	56.90
4	-1.3355	-1.0000	3.4765	133.3882	71.20
5	-0.6677	-0.4999	3.4765	116.6919	85.60
6	-0.0007	-0.0005	3.4765	100.0170	100.00

7	4.0000	2.9950	3.4765	0.0000	186.10
8	3.3379	2.4993	3.4765	16.5517	171.90
9	2.6698	1.9990	3.4765	33.2541	157.50
10	2.0024	1.4993	3.4765	49.9389	143.10
11	1.3349	0.9995	3.4765	66.6275	128.70
12	0.6670	0.4994	3.4765	83.3241	114.40
13	-1.1686	-1.1044	1.1077	129.2148	0.300
14	-1.1708	-1.1065	1.1077	129.2710	0.100
15	-1.1709	-1.1066	1.1077	129.2729	0.100
16	-1.1710	-1.1067	1.1077	129.2761	0.100
17	-1.1712	-1.1069	1.1077	129.2811	0.100
18	-1.1721	-1.1077	1.1077	129.3022	0.000
19	0	0	0.0964	100.0000	100.00
20	3.9265	0.9790	0.0964	1.8372	1115.8
21	3.9672	0.9891	0.0964	0.8204	1126.3
22	3.9604	0.9874	0.0964	0.9907	1124.6
23	3.9633	0.9882	0.0964	0.9186	1125.3
24	3.9516	0.9853	0.0964	1.2111	1122.3
25	4.0000	0.9973	0.0964	0.0000	1134.8



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 25$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.12 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 18^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k), ενώ στην 13^η, 14^η, 15^η, 16^η και 17^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.1 – 0.2 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 7^η και 25^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y), ενώ στην 20^η, 21^η, 22^η, 23^η, και στην 24^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.8 - 1.9$ %). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

7. Δικτύωμα 29 ράβδων ($N = 29$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.12, ενώ στον Πίνακα 4.13 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

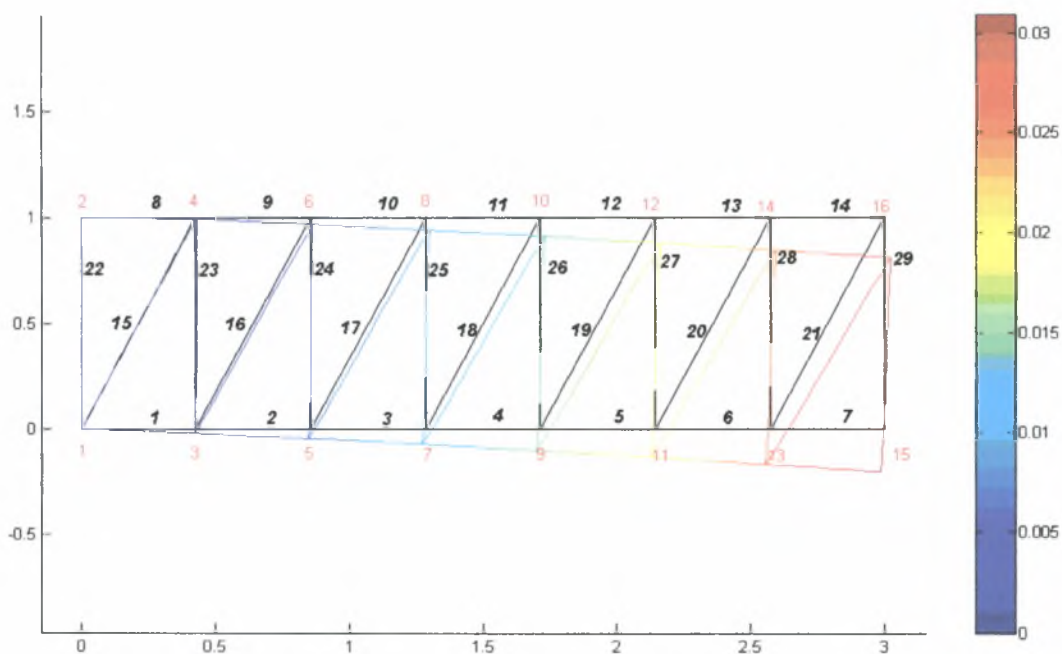
Πίνακας 4.13: Βέλטיστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1059	0.0749
2	0.1281	0.0905
3	0.0352	0.02488
$J(kg)$	10.5019	

Πίνακας 4.14: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 29$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
--------	-----------------------------------------------	-------------------------------------------	-----------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------

			(N×10 ⁴)		
1	-3.4353	-2.5712	4.7285	185.88	45.60
2	-2.8623	-2.1424	4.7285	171.56	54.70
3	-2.2902	-1.7141	4.7285	157.25	63.70
4	-1.7176	-1.2856	4.7285	142.94	72.80
5	-1.1453	-0.8572	4.7285	128.63	81.90
6	-0.5725	-0.4285	4.7285	114.31	90.90
7	-0.0008	-0.0006	4.7285	100.02	100.00
8	4.0000	2.9939	4.7285	0.000	163.30
9	3.4345	2.5706	4.7285	14.14	154.40
10	2.8616	2.1418	4.7285	28.46	145.30
11	2.2894	1.7135	4.7285	42.77	136.20
12	1.7169	1.2850	4.7285	57.08	127.20
13	1.1446	0.8567	4.7285	71.38	118.10
14	0.5718	0.4280	4.7285	85.70	109.10
15	-1.1803	-1.0686	1.0735	129.50	0.500
16	-1.1839	-1.0718	1.0735	129.59	0.200
17	-1.1843	-1.0721	1.0735	129.60	0.100
18	-1.1847	-1.0725	1.0735	129.61	0.100
19	-1.1843	-1.0722	1.0735	129.60	0.100
20	-1.1848	-1.0726	1.0735	129.62	0.100
21	-1.1858	-1.0735	1.0735	129.64	0.000
22	0	0	0.0962	100.00	100.00
23	3.8920	0.9694	0.0962	2.70	1107.9
24	3.9576	0.9858	0.0962	1.06	1124.9
25	3.9465	0.9830	0.0962	1.33	1122.0
26	3.9479	0.9834	0.0962	1.30	1122.4
27	3.9505	0.9840	0.0962	1.23	1123.0
28	3.9335	0.9798	0.0962	1.66	1118.6
29	4.0000	0.9963	0.0962	0.000	1135.9



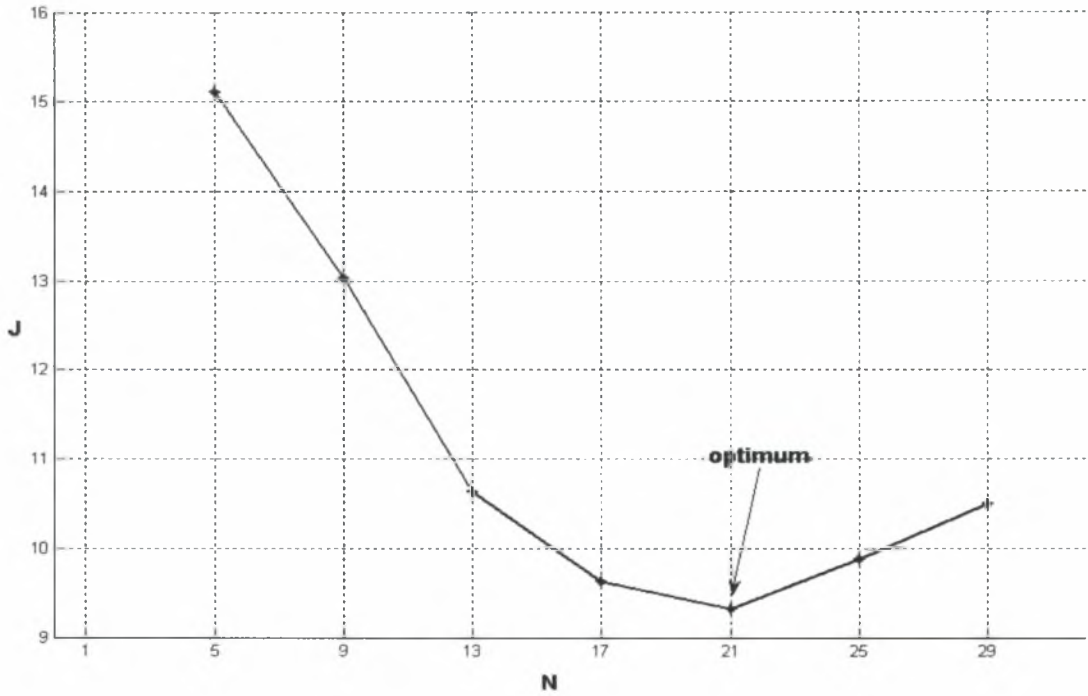
Σχήμα 4.10: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 29$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.14 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 21^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k), ενώ στην 15^η, 16^η, 17^η, 18^η, 19^η, και 20^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.1 – 0.5 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 8^η και 29^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 23^η, 24^η, 25^η, 26^η, 27^η και στην 28^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 1.2 - 2.7$ %). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Βέλτιστος αριθμός ράβδων (N)

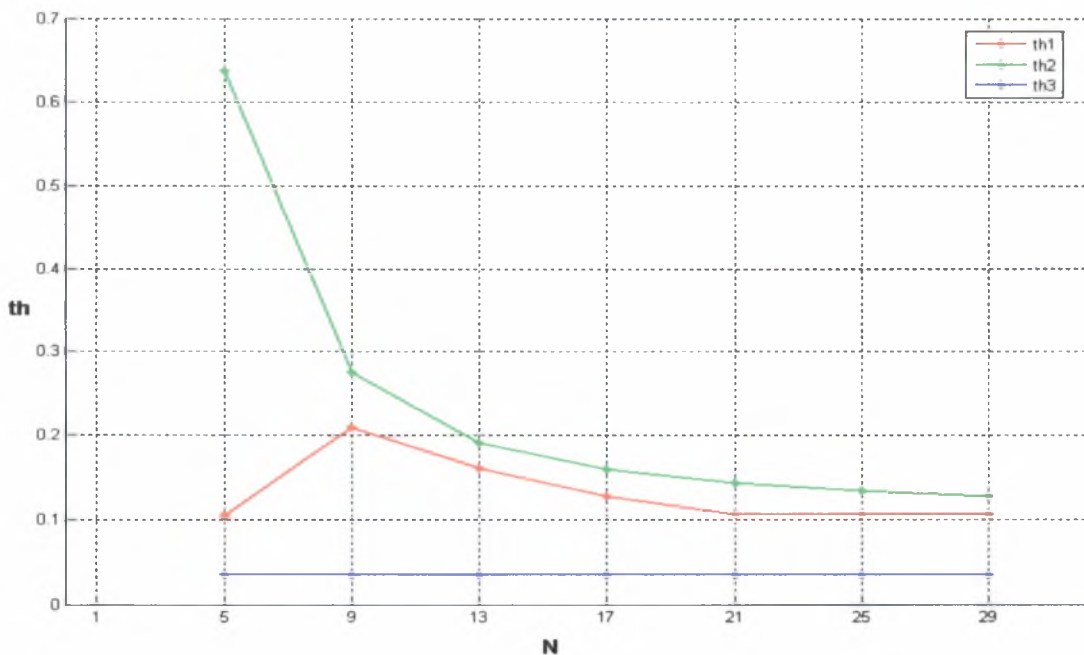
Με την παραπάνω διαδικασία ουσιαστικά παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας βέλτιστος αριθμός ράβδων N για το οποίο η συνάρτηση κόστους λαμβάνει τη χαμηλότερη τιμή. Αυτό διακρίνεται καλύτερα και διαπιστώνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $J(\hat{\theta})$ με τον αριθμό των ράβδων N (Σχήμα 4.11). Από

το Σχήμα 4.11 διακρίνουμε ότι για $N = 21$ η συνάρτηση $J(\hat{\theta})$ παίρνει ελάχιστη τιμή αφού για μεγαλύτερα N η τιμή της J μεγαλώνει.



Σχήμα 4.11: Συνάρτηση κόστους (J) συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Επίσης στο Σχήμα 4.12 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών $\theta_i, i=1,2,3$ συναρτήσει του N .



Σχήμα 4.12: Βέλτιστες τιμές θ_i συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Παρατηρούμε μείωση της μεταβλητής θ_2 καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ράβδων, ενώ η μεταβλητή θ_3 παραμένει σταθερή (με τιμή ≈ 0.0353) για όλα τα N . Η μεταβλητή θ_1 λαμβάνει την τιμή 0.1053 για $N=5$, αυξάνει για $N=9$ με τιμή 0.2087, ενώ για περαιτέρω αύξηση του αριθμού των ράβδων βλέπουμε να μειώνεται λαμβάνοντας μια σταθερή τιμή για $N \geq 21$. Γενικότερα, για κάθε N παρατηρείτε ότι η μεταβλητή θ_2 παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές, ακολουθώντας οι μεταβλητές θ_1 και θ_3 ($\theta_2 > \theta_1 > \theta_3$).

Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι στη συγκεκριμένη μελέτη που γίνεται, δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος των συνδέσεων ανά ράβδο κάτι που αν εισαγόταν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν κριτήριο, θα μείωνε τον αριθμό των ράβδων για κάθε βελτιστοποιημένο δικτύωμα.

Η συμπεριφορά των μεταβλητών μπορεί να εξηγηθεί αν παρατηρήσουμε τη σχέση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού (Σχέση 4.3)

$$p_k = \frac{\pi \cdot E}{4} \cdot \left(\frac{A_o \cdot \theta_i}{L_i} \right)^2 \quad (4.3)$$

Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το μήκος L_i της κάθε ράβδου το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται. Οπότε, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ράβδων κάθε δικτύωματος το μήκος των ράβδων μειώνεται και άρα το p_k αυξάνεται.

Λόγω φόρτισης οι τάσεις που αναπτύσσονται στις διαγώνιες ράβδους είναι θλιπτικές, κάτι που φαίνεται στους πίνακες. Οπότε, για να είναι το δίκτυωμα ασφαλές, η τιμή της διατομής των διαγώνιων ράβδων θα πρέπει να αυξηθεί τόσο ώστε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού να είναι λίγο μεγαλύτερο από τη μεγαλύτερη τιμή θλιπτικού φορτίου που αναπτύσσεται σε κάποια από τις διαγώνιες ράβδους.

Η μείωση της τιμής της διατομής των διαγώνιων ράβδων εξηγείται ως εξής. Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού αυξάνεται καθώς αυξάνει ο αριθμός των ράβδων N , λόγω της μείωσης του μήκους L_i κάθε ράβδου. Έτσι, καθώς το N αυξάνει δεν χρειάζεται περαιτέρω αύξηση της A_2 , έτσι ώστε να αυξηθεί περισσότερο το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και οπότε η τιμή της διατομής των διαγώνιων ράβδων μειώνεται.

Το ίδιο συμβαίνει και για τη τιμή της διατομής των οριζόντιων ράβδων για τα δίκτυωματα με αριθμό ράβδων μεταξύ των τιμών $9 \leq N \leq 17$, όπου παρατηρούμε ότι η βέλτιστη επιλογή της A_1 βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του

κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Η μικρή τιμή για $N = 5$ οφείλεται στη πολύ μικρή θλιπτική τάση που αναπτύσσεται στην 1^η ράβδο του δικτύματος. Για δικτύματα με αριθμό ράβδων $N \geq 21$ παρατηρούμε ότι η τιμή της διατομής των οριζόντιων ράβδων έχει μια σταθερή τιμή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η βέλτιστη τιμή της A_1 καθορίζεται από την μεγαλύτερη τάση που ασκείται σε μία από τις ράβδους, αφού η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Όσον αναφορά τις κάθετες ράβδους, αυτές παραλαμβάνουν εφελκυστικά φορτία και έτσι δεν έχουν φόβο για λυγισμό. Οπότε, και για αυτές η τιμή της διατομής καθορίζεται από την μεγαλύτερη τάση που ασκείται σε μία από αυτές και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο έχει σταθερή τιμή για όλα τα N . Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι στη ράβδο η οποία είναι πακτωμένη και στα δύο άκρα της, για κάθε περίπτωση δικτύματος αναπτύσσονται μηδενικές τάσεις και οπότε δεν είναι απαραίτητη για την κατασκευή του εκάστοτε δικτύματος.

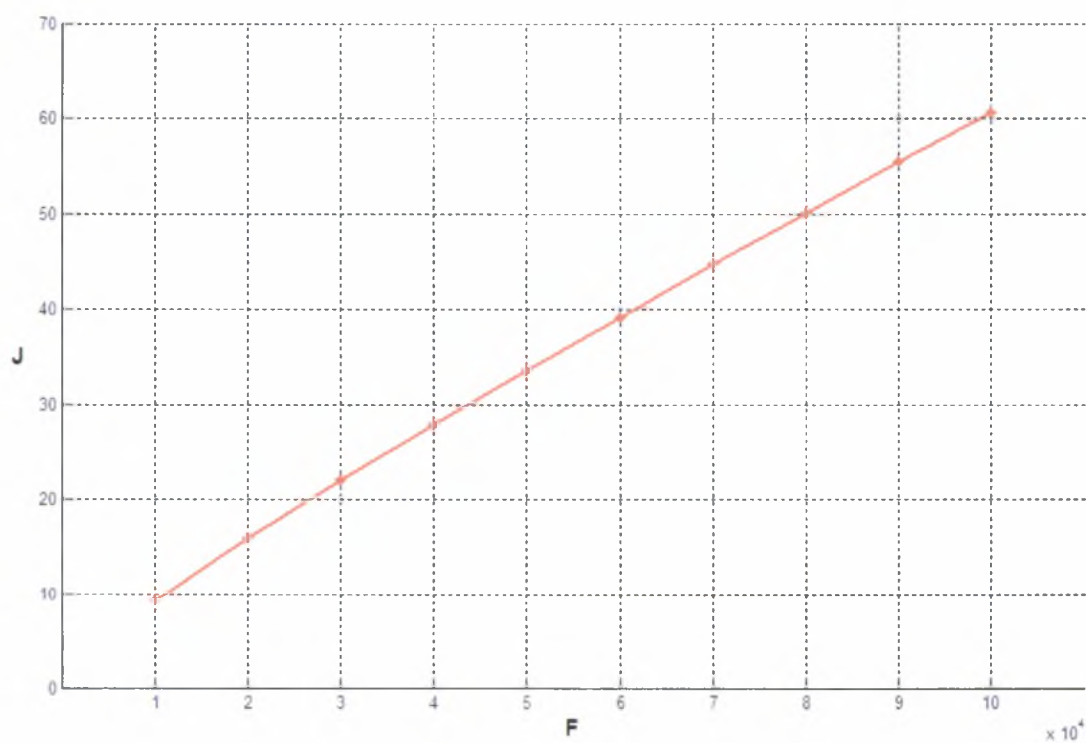
4.3 Αύξηση του φορτίου F για βέλτιστο δίκτυωμα

Στην συγκεκριμένη ενότητα το φορτίο F αυξάνει, ξεκινώντας με την τιμή των $10000N$ ($10kN$) και με βήμα $10000N$ φτάνει στην τιμή των $100000N$ ($100kN$). Η αύξηση αυτή εφαρμόζεται στο βέλτιστο δίκτυωμα. Δηλαδή, επιλέγεται το δίκτυωμα των 21 ράβδων ($N = 21$), και βελτιστοποιείται για κάθε φορτίο F ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε μορφή πίνακα και σε διαγράμματα.

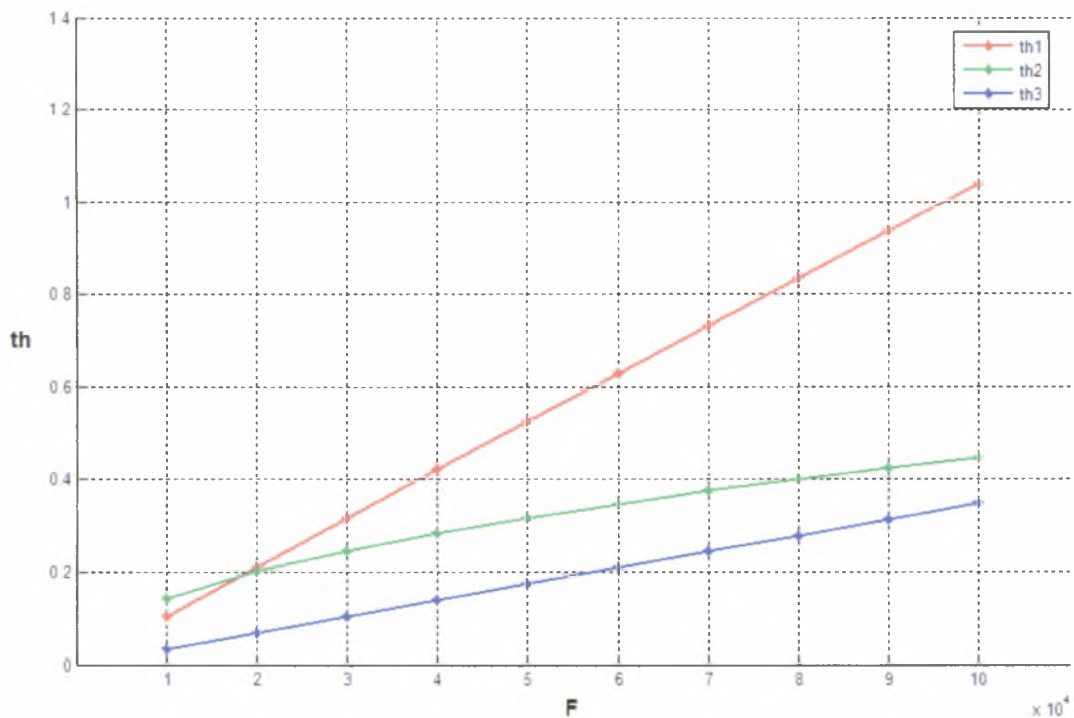
Πίνακας 4.15: Χαρακτηριστικά βέλτιστου δικτύματος για κάθε τιμή του φορτίου

Φορτίο (kN)	θ_1	θ_2	θ_3	A_1 ($m^2 \times 10^{-3}$)	A_2 ($m^2 \times 10^{-3}$)	A_3 ($m^2 \times 10^{-3}$)
10	0.1060	0.1427	0.0353	0.0749	0.1009	0.0250
20	0.2116	0.2014	0.0705	0.1496	0.1424	0.0498

30	0.3168	0.2465	0.1056	0.2240	0.1742	0.0747
40	0.4217	0.2844	0.1406	0.2981	0.2010	0.0994
50	0.5260	0.3178	0.1755	0.3718	0.2246	0.1241
60	0.6300	0.3479	0.2104	0.4453	0.2459	0.1487
70	0.7334	0.3756	0.2451	0.5184	0.2655	0.1732
80	0.8364	0.4012	0.2796	0.5912	0.2836	0.1977
90	0.9389	0.4253	0.3141	0.6637	0.3006	0.2220
100	1.0409	0.4480	0.3485	0.7358	0.3167	0.2463



Σχήμα 4.13: Συνάρτηση κόστους J συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F



Σχήμα 4.14: Βέλτιστες τιμές θ_i συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F

Για το βέλτιστο δικτύωμα το οποίο προέκυψε με τη μέθοδο βελτιστοποίησης ως προς τις τιμές των διατομών παρατηρείτε αύξηση της συνάρτησης κόστους J καθώς το φορτίο F αυξάνει σχεδόν γραμμικά. Επίσης παρατηρείτε αύξηση των τιμών των μεταβλητών θ_i και κατά συνέπεια των τιμών των διατομών A_i . Η αύξηση αυτή που παρατηρείτε οφείλεται στην διατήρηση της ασφάλειας του δικτύωματος. Δηλαδή, για να είναι το δίκτυωμα ασφαλές καθώς η φόρτιση αυξάνεται θα πρέπει και οι τιμές των διατομών των ράβδων να αυξάνεται και κατά συνέπεια και το βάρος της κατασκευής.

4.4 Βελτιστοποίηση τοπολογίας των κόμβων και των τιμών των διατομών

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης των δικτυωμάτων για διαφορετικό αριθμό N . Η βελτιστοποίηση γίνεται συγχρόνως ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων και την τοπολογία των κόμβων όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή (Σχήμα 4.2 και 4.3).

1. Δικτύωμα 5 ράβδων ($N = 5$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.16, ενώ στον Πίνακα 4.17 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτυώματος.

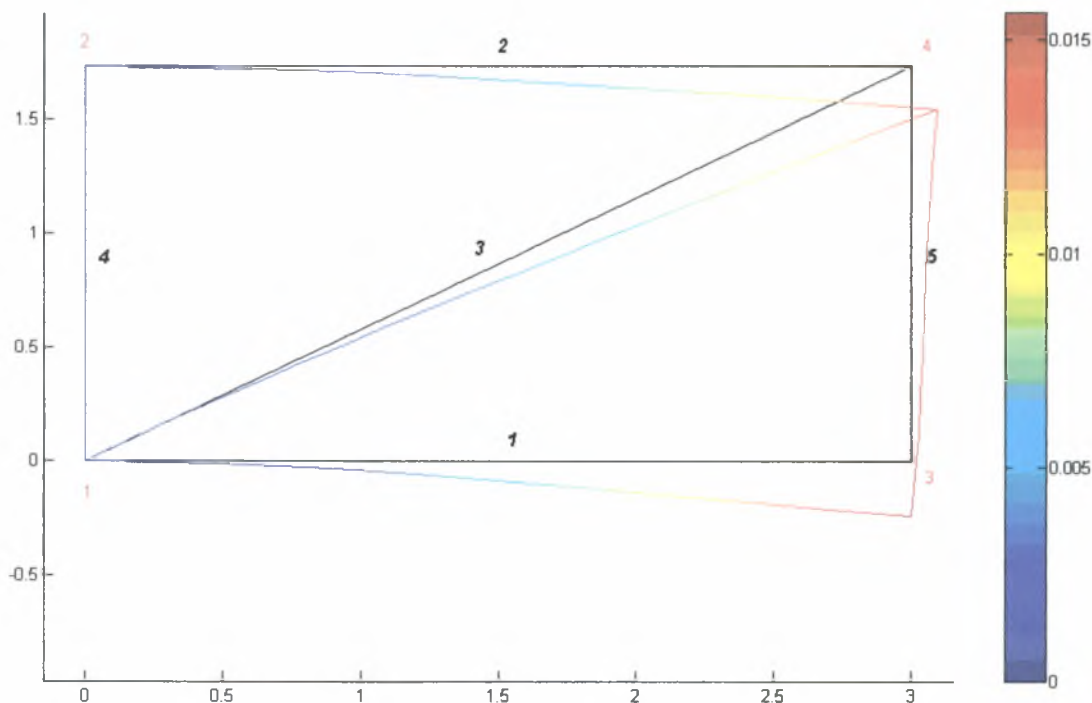
Πίνακας 4.16: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτυώματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.0612	0.0965
2	0.5561	0.3931
3	0.0354	0.02502
4	1.7298	$y = 1.7298 m$
$J(kg)$	13.4009	

Πίνακας 4.17: Καταπόνηση βέλτιστου δικτυώματος ($N = 5$)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ</i> (Pa $\times 10^8$)	<i>Αξονικό Φορτίο p</i> (N $\times 10^4$)	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k</i> (N $\times 10^4$)	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
---------------	----------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------

1	-0.0002	-0.0001	0.0322	100.00	99.70
2	4.0000	1.7293	0.0322	0.000	5471.2
3	-0.5082	-1.9975	1.9975	112.70	0.000
4	0	0	0.0324	100.00	100.00
5	4.0000	0.9999	0.0324	0.000	3188.6



Σχήμα 4.15: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 5$

Παρατηρούμε ότι η 3^η (διαγώνια) ράβδος έχει τη μεγαλύτερη τιμή διατομής, ενώ από τον Πίνακα 4.16 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 2^η και 5^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής. Επίσης, το βέλτιστο ύψος του δικτύωματος (y - συντεταγμένη) είναι 1.73m σε αντίθεση με το αντίστοιχο δίκτυωμα της 1^{ης} μεθόδου βελτιστοποίησης του οποίου το ύψος είναι 1m.

2. Δικτύωμα 9 ράβδων ($N = 9$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.18, ενώ στον Πίνακα 4.19 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

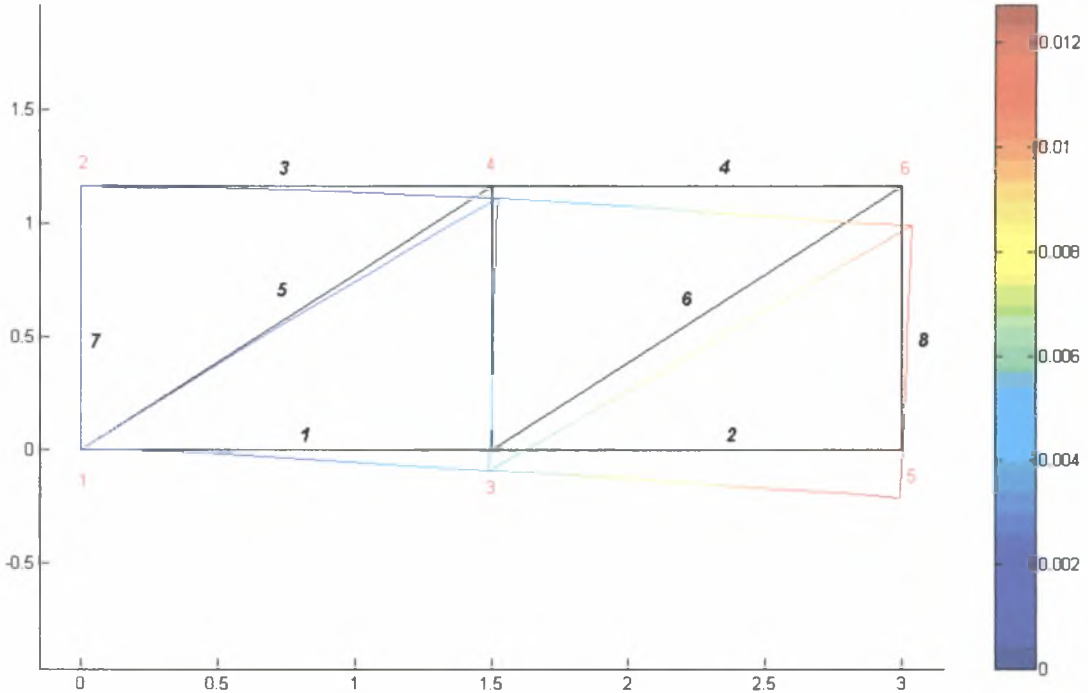
Πίνακας 4.18: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1937	0.0919
2	0.2752	0.1945
3	0.0354	0.02502
4	1.7298	$y = 1.1620 m$
5	1.0005	$x_3 = 1.5008 m$
$J(kg)$	12.9264	

Πίνακας 4.19: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 9$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-0.9423	-1.2900	1.2900	123.55	0.000
2	-0.0001	-0.0002	1.2925	100.00	100.00
3	1.8828	2.5775	1.2900	52.93	299.8
4	0.9422	1.2898	1.2925	76.44	199.8
5	-0.8371	-1.6284	1.6284	120.93	0.000
6	-0.8382	-1.6304	1.6304	120.95	0.000
7	0	0	0.0717	100.00	100.00

8	3.9825	0.9954	0.0717	0.412	1488.5
9	4.0000	0.9995	0.0717	0.000	1494.2



Σχήμα 4.16: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 9$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.18 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η, την 5^η και 6^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_x). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 9^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) και στην 8^η πολύ κοντά σ' αυτό. Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Το βέλτιστο ύψος του δικτυώματος είναι 1.16m μεγαλύτερο από αυτό του αντίστοιχου δικτυώματος της πρώτης μεθόδου, ενώ οι βέλτιστες θέσεις των κόμβων 3 και 4 είναι στο μισό του συνολικού μήκους του δικτυώματος.

3. Δικτύωμα 13 ράβδων ($N = 13$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.20, ενώ στον Πίνακα 4.21 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

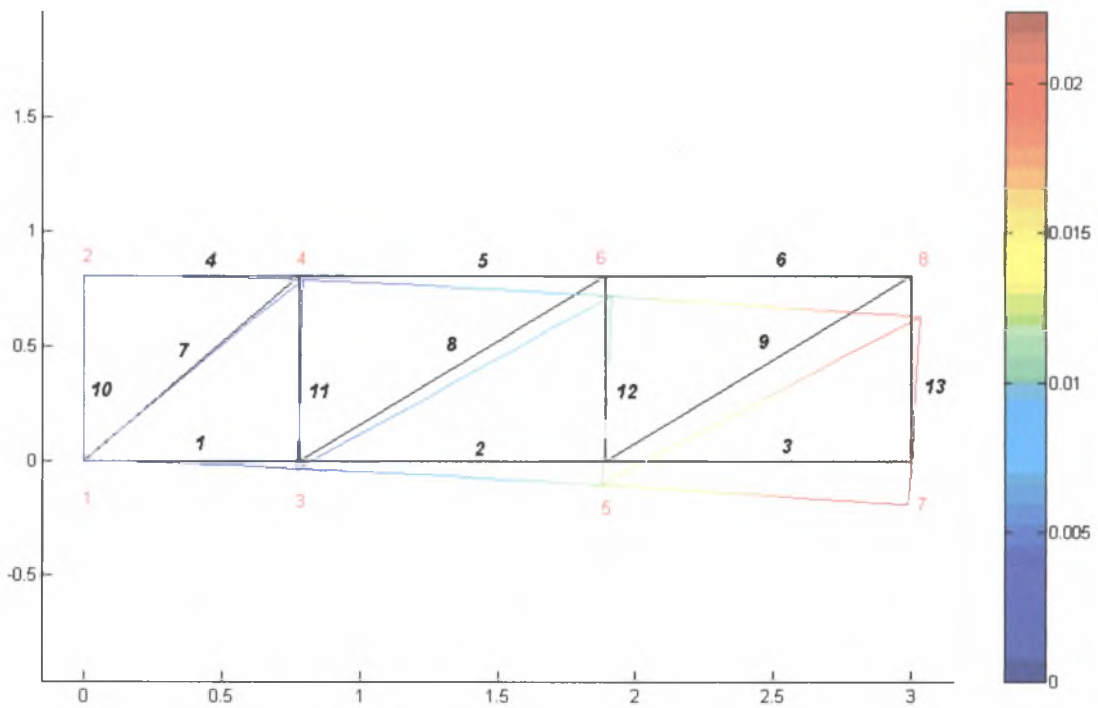
Πίνακας 4.20: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1474	0.1042
2	0.2029	0.1434
3	0.0353	0.02495
4	0.8078	$y = 0.8078 m$
5	0.7834	$x_3 = 0.7834 m$
6	0.9457	$x_5 = 1.8914 m$
$J(kg)$	9.8959	

Πίνακας 4.21: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος ($N = 13$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-2.6323	-2.7429	2.7429	165.80	0.000
2	-1.3157	-1.3710	1.3710	132.89	0.000
3	-0.0004	-0.0004	1.3698	100.01	99.97
4	3.5564	3.7058	2.7429	11.09	235.11
5	2.6319	2.7425	1.3710	34.20	300.04
6	1.3154	1.3706	1.3698	67.11	200.06
7	-0.9645	-1.3831	2.5176	124.11	45.06
8	-1.1823	-1.6954	1.6954	129.55	0.000

9	-1.1816	-1.6944	1.6944	129.54	0.000
10	0	0	0.1482	100.00	100.00
11	3.9712	0.9920	0.1482	0.718	769.23
12	3.9909	0.9969	0.1482	0.227	772.54
13	4.0000	0.9991	0.1482	0.000	774.08



Σχήμα 4.17: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 13$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.20 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η την 2^η την 8^η και την 9^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 13^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 11^η και 12^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.2 - 0.7$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Επίσης παρατηρούμε ότι το βέλτιστο ύψος είναι μικρότερο από αυτό του αντίστοιχου δικτύματος της 1^{ης} μεθόδου βελτιστοποίησης και ότι οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων δεν ισοκατανέμονται.

4. Δικτύωμα 17 ράβδων ($N = 17$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.22, ενώ στον Πίνακα 4.23 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύματος.

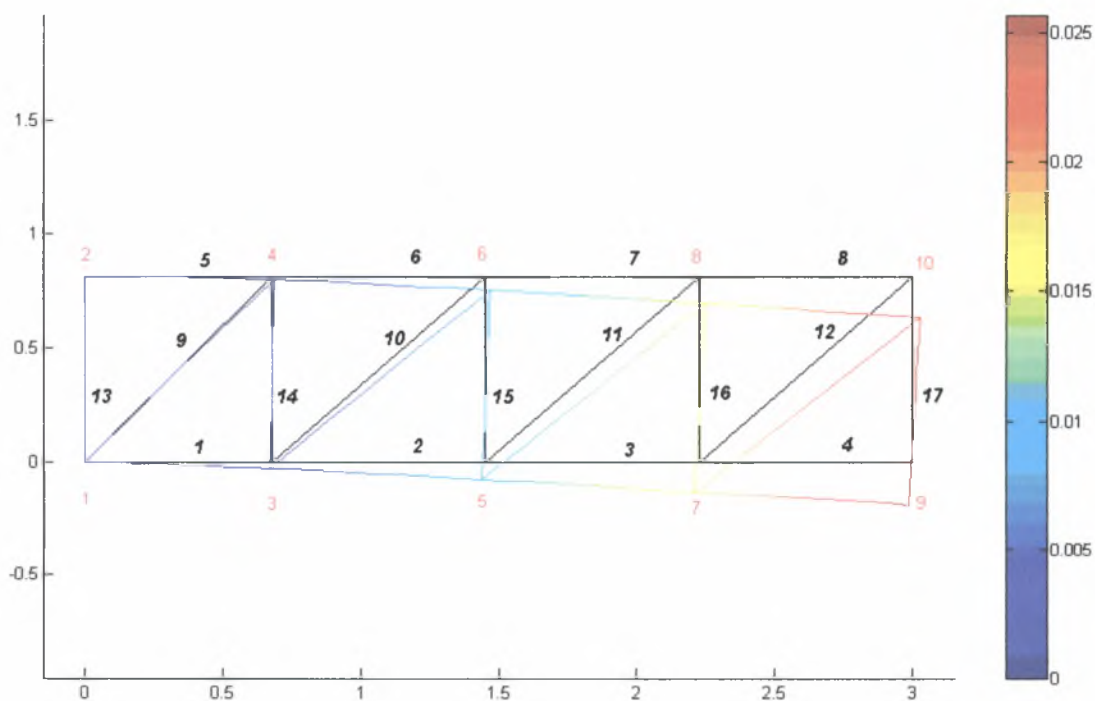
Πίνακας 4.22: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1300	0.1369
2	0.1497	0.1058
3	0.0353	0.02495
4	0.8146	$y = 0.8146 m$
5	0.9037	$x_3 = 0.6778 m$
6	0.9678	$x_5 = 1.4517 m$
7	0.9893	$x_7 = 2.2259 m$
$J(kg)$	8.8078	

Πίνακας 4.23: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύματος ($N = 17$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.1013	-2.8500	2.8500	177.53	0.000
2	-2.0671	-1.8996	2.1862	151.67	13.11
3	-1.0336	-0.9499	2.1841	125.84	56.51

4	-0.0005	-0.0005	2.1849	100.01	99.98
5	4.0000	3.6759	2.8500	0.000	228.98
6	3.1008	2.8495	2.1862	22.48	230.34
7	2.0666	1.8992	2.1841	48.33	186.95
8	1.0331	0.9494	2.1849	74.17	143.45
9	-1.2194	-1.2905	1.5463	130.48	16.54
10	-1.2997	-1.3755	1.3755	132.49	0.000
11	-1.2990	-1.3748	1.3748	132.47	0.000
12	-1.2993	-1.3750	1.3750	132.48	0.000
13	0	0	0.1456	100.00	100.00
14	3.9620	0.9892	0.1456	0.951	779.19
15	3.9874	0.9956	0.1456	0.314	783.56
16	3.9800	0.9937	0.1456	0.500	782.28
17	4.0000	0.9987	0.1456	0.000	785.71



Σχήμα 4.18: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 17$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.22 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται

στην 1^η, την 10^η, την 11^η και την 12^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 17^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 14^η, την 15^η και την 16^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.3-0.95\%$). Επομένως, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Επίσης, βλέπουμε ότι το βέλτιστο ύψος του δικτύματος έχει τιμή περίπου 0.8m και οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων σχεδόν ισοκατανέμονται.

5. Δικτύωμα 21 ράβδων ($N = 21$)

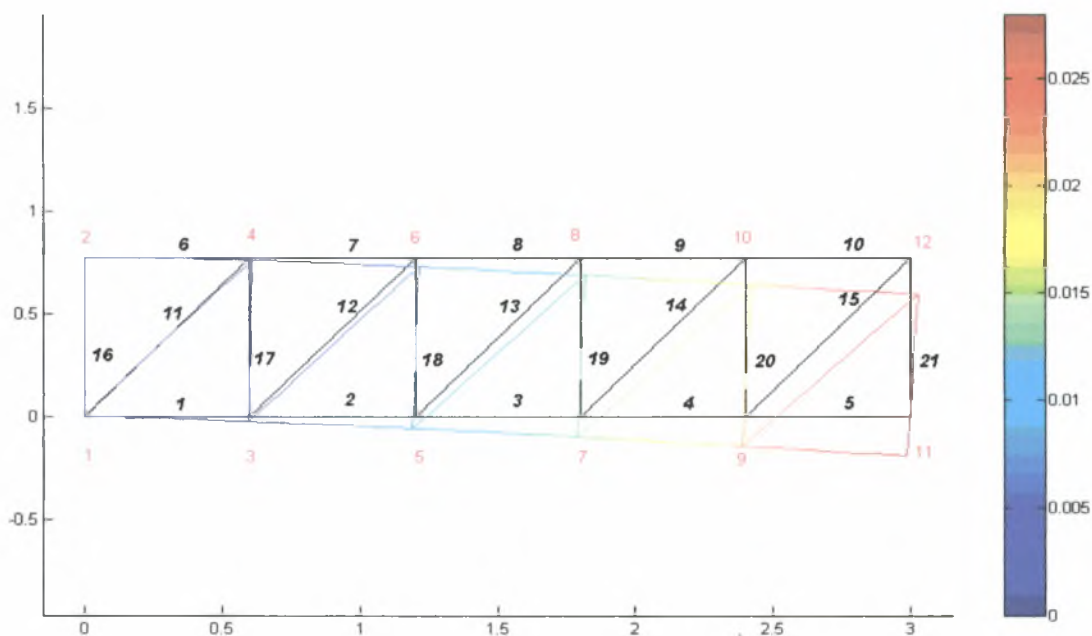
Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.24, ενώ στον Πίνακα 4.25 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύματος.

Πίνακας 4.24: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτύματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1365	0.09648
2	0.1248	0.0882
3	0.0353	0.02495
4	0.8146	$y = 0.7754 m$
5	1.0037	$x_3 = 0.6022 m$
6	1.0012	$x_5 = 1.2014 m$
7	1.0006	$x_7 = 1.8011 m$
8	1.0002	$x_9 = 2.4005 m$
$J (kg)$	8.8529	

Πίνακας 4.25: Καταπόνηση βέλτιστου δικτυώματος ($N = 21$)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ</i> ($\text{Pa} \times 10^8$)	<i>Αξονικό Φορτίο p</i> ($N \times 10^4$)	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k</i> ($N \times 10^4$)	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
<i>1</i>	-3.2031	-3.0914	3.9816	180.07	22.35
<i>2</i>	-2.4020	-2.3182	4.0216	160.05	42.35
<i>3</i>	-1.6015	-1.5457	4.0160	140.03	61.51
<i>4</i>	-0.8007	-0.7728	4.0199	120.0186	80.77
<i>5</i>	-0.0007	-0.0007	4.0183	100.01	99.98
<i>6</i>	4.0000	3.8606	3.9816	0.000	196.96
<i>7</i>	3.2024	3.0907	4.0216	19.94	176.85
<i>8</i>	2.4013	2.3176	4.0160	39.96	157.71
<i>9</i>	1.6008	1.5450	4.0199	59.98	138.43
<i>10</i>	0.8001	0.7722	4.0183	79.99	119.21
<i>11</i>	-1.4194	-1.2526	1.2526	135.48	0.000
<i>12</i>	-1.4247	-1.2573	1.2573	135.61	0.000
<i>13</i>	-1.4240	-1.2566	1.2566	135.60	0.000
<i>14</i>	-1.4245	-1.2571	1.2571	135.61	0.000
<i>15</i>	-1.4243	-1.2569	1.2569	135.60	0.000
<i>16</i>	0	0	0.1605	100.00	100.00
<i>17</i>	3.9450	0.9842	0.1605	1.37	713.17
<i>18</i>	3.9813	0.9933	0.1605	0.46	718.82
<i>19</i>	3.9762	0.9920	0.1605	0.59	718.023
<i>20</i>	3.9691	0.9903	0.1605	0.77	716.92
<i>21</i>	4.0000	0.9980	0.1605	0.000	721.72



Σχήμα 4.19: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 21$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.24 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 11^η, 12^η, 13^η, 14^η και την 15^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_x). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 6^η και 21^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y) ενώ στην 17^η, 18^η, 19^η και στην 20^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.4 - 1.4 \%$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το βέλτιστο ύψος του δικτύωματος έχει τιμή περίπου $0.78m$, ενώ οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων ισοκατανέμονται.

6. Δικτύωμα 25 ράβδων ($N = 25$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.26, ενώ στον Πίνακα 4.27 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

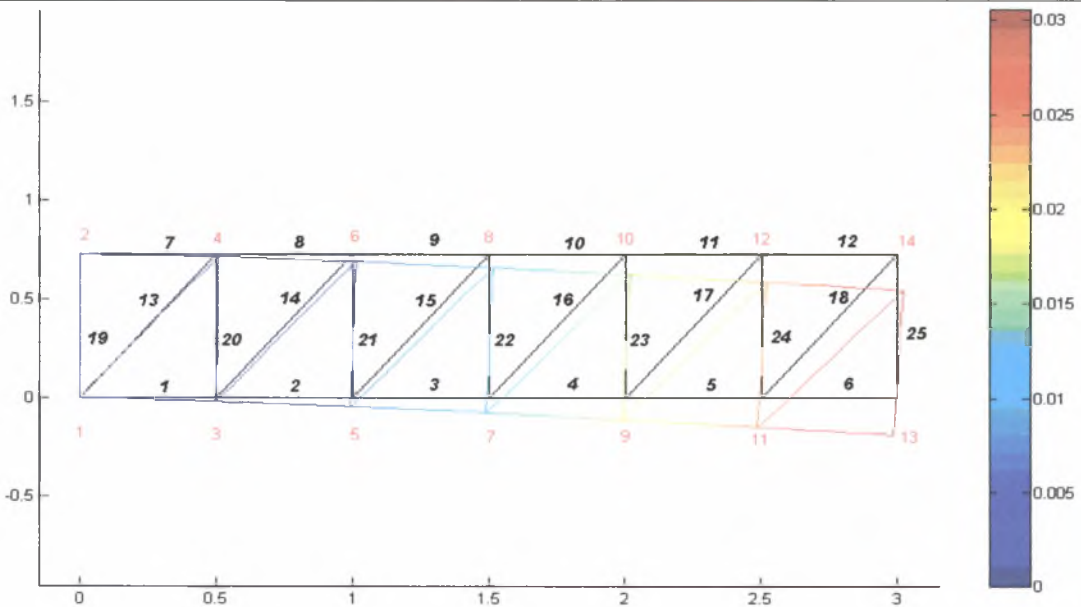
Πίνακας 4.26: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτυώματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1460	0.1032
2	0.1097	0.0775
3	0.0353	0.02495
4	0.7246	$y = 0.7246 m$
5	1.0084	$x_3 = 0.5042 m$
6	1.0031	$x_5 = 1.0031 m$
7	1.0016	$x_7 = 1.5024 m$
8	1.0008	$x_9 = 2.0016 m$
9	1.0003	$x_{11} = 2.5008 m$
$J(kg)$	9.0695	

Πίνακας 4.27: Καταπόνηση βέλτιστου δικτυώματος ($N = 25$)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ ($Pa \times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p ($N \times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίο Λυγισμού P_k ($N \times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{p - P_k}{P_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.3364	-3.3364	6.4954	183.41	46.99
2	-2.6688	-2.6688	6.6328	166.72	58.47
3	-2.0018	-2.0018	6.6219	150.04	68.80
4	-1.3347	-1.3347	6.6264	133.36	79.21
5	-0.6675	-0.6675	6.6288	116.68	89.60
6	-0.0009	-0.0009	6.6235	100.02	99.99
7	4.0000	4.0000	6.4954	0.000	163.55
8	3.3356	3.3356	6.6328	16.61	151.90
9	2.6679	2.6679	6.6219	33.30	141.58
10	2.0009	2.0009	6.6264	49.97	131.16
11	1.3338	1.3338	6.6288	66.65	120.76

12	0.6666	0.6666	6.6235	83.33	110.38
13	-1.5433	-1.1970	1.1970	138.58	0.000
14	-1.5538	-1.2052	1.2052	138.84	0.000
15	-1.5529	-1.2045	1.2045	138.82	0.000
16	-1.5533	-1.2048	1.2048	138.83	0.000
17	-1.5535	-1.2049	1.2049	138.83	0.000
18	-1.5531	-1.2046	1.2046	138.82	0.000
19	0	0	0.1835	100.00	100.00
20	3.9111	0.9750	0.1835	2.223	631.27
21	3.9805	0.9923	0.1835	0.487	640.70
22	3.9663	0.9888	0.1835	0.843	638.77
23	3.9714	0.9900	0.1835	0.714	639.47
24	3.9583	0.9868	0.1835	1.043	637.69
25	4.0000	0.9972	0.1835	0.000	643.35



Σχήμα 4.20: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 25$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.27 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 13^η, 14^η, 15^η, 16^η, 17^η, και στην 18^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 7^η και 25^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_v) ενώ στην 20^η, 21^η, 22^η, 23^η, και στην 24^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.8 - 1.9 \%$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων

ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Επιπλέον, όπως και παραπάνω παρατηρούμε ότι η βέλτιστη τιμή του ύψους του δικτύματος είναι μικρότερη από τη τιμή του ύψους του αντίστοιχου δικτύματος της 1^{ης} μεθόδου και επίσης παρατηρούμε ότι οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων ισοκατανέμονται.

7. Δικτύωμα 29 ράβδων ($N = 29$)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.28, ενώ στον Πίνακα 4.29 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύματος.

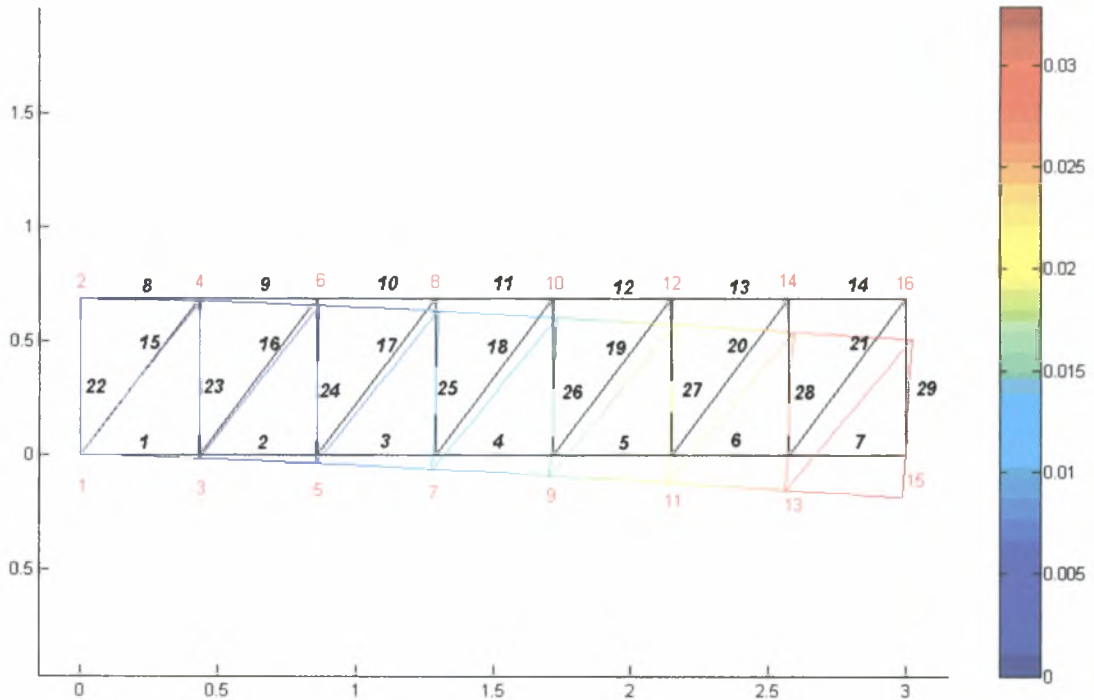
Πίνακας 4.28: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτύματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1543	0.1091
2	0.0991	0.0700
3	0.0352	0.02488
4	0.6848	$y = 0.6848 m$
5	1.0164	$x_3 = 0.4356 m$
6	1.0066	$x_5 = 0.8628 m$
7	1.0036	$x_7 = 1.2903 m$
8	1.0020	$x_9 = 1.7177 m$
9	1.0011	$x_{11} = 2.1452 m$
10	1.0004	$x_{13} = 2.5725 m$
$J(kg)$	9.3179	

Πίνακας 4.29: Καταπόνηση βέλτιστου δικτυώματος ($N = 29$)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ</i> ($\text{Pa} \times 10^8$)	<i>Αξονικό Φορτίο p</i> ($N \times 10^4$)	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k</i> ($N \times 10^4$)	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
<i>1</i>	-3.4309	-3.7431	0.9724	185.77	61.50
<i>2</i>	-2.8588	-3.1189	1.0113	171.47	69.16
<i>3</i>	-2.2872	-2.4953	1.0092	157.18	75.27
<i>4</i>	-1.7156	-1.8717	1.0107	142.89	81.48
<i>5</i>	-1.1440	-1.2481	1.0098	128.60	87.64
<i>6</i>	-0.5723	-0.6244	1.0111	114.3073	93.82
<i>7</i>	-0.0010	-0.0011	1.0090	100.02	99.99
<i>8</i>	4.0000	4.3640	0.9724	0.000	144.88
<i>9</i>	3.4299	3.7420	1.0113	14.25	137.00
<i>10</i>	2.8577	3.1178	1.0092	28.55	130.89
<i>11</i>	2.2862	2.4942	1.0107	42.84	124.68
<i>12</i>	1.7145	1.8706	1.0098	57.13	118.52
<i>13</i>	1.1429	1.2469	1.0111	71.42	112.33
<i>14</i>	0.5712	0.6232	1.0090	85.71	106.17
<i>15</i>	-1.6482	-1.1541	0.1154	141.20	0.000
<i>16</i>	-1.6666	-1.1670	0.1167	141.66	0.000
<i>17</i>	-1.6656	-1.1663	0.1166	141.64	0.000
<i>18</i>	-1.6664	-1.1668	0.1167	141.66	0.000
<i>19</i>	-1.6659	-1.1665	0.1167	141.64	0.000
<i>20</i>	-1.6665	-1.1669	0.1167	141.66	0.000
<i>21</i>	-1.6656	-1.1663	0.1166	141.64	0.000
<i>22</i>	0	0	0.0205	100.00	100.00
<i>23</i>	3.8666	0.9631	0.0205	3.335	569.52
<i>24</i>	3.9817	0.9917	0.0205	0.456	583.50
<i>25</i>	3.9580	0.9858	0.0205	1.050	580.61
<i>26</i>	3.9622	0.9869	0.0205	0.946	581.12

27	3.9647	0.9875	0.0205	0.883	581.43
28	3.9478	0.9833	0.0205	1.304	579.38
29	4.0000	0.9963	0.0205	0.000	585.72



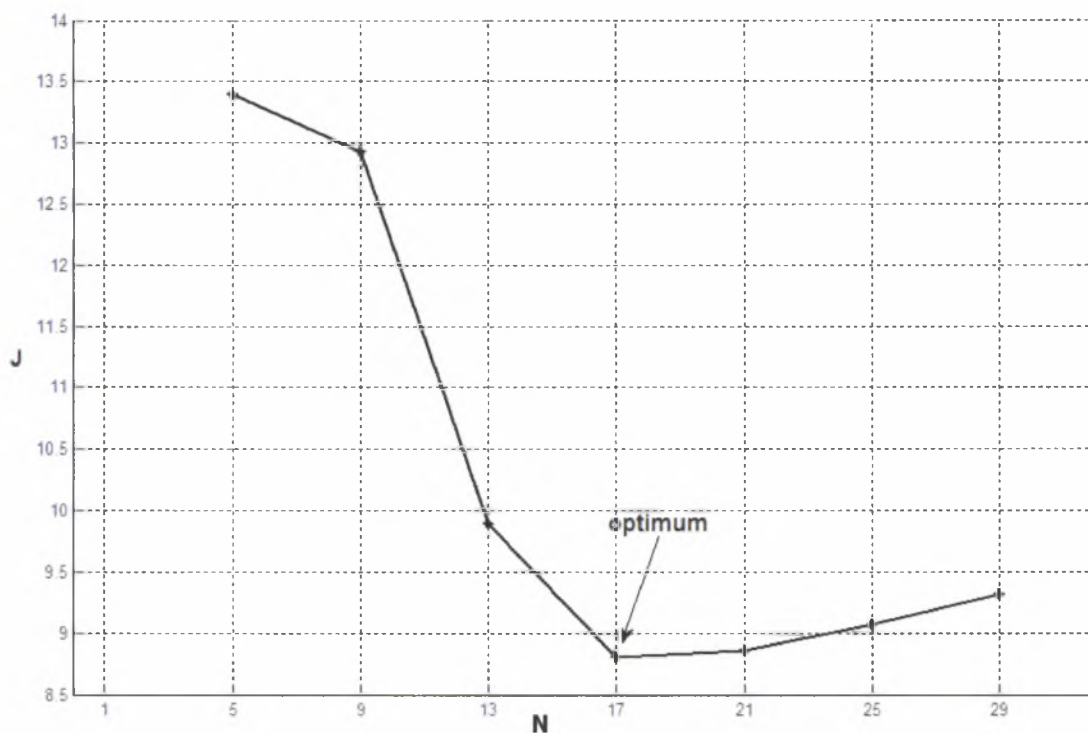
Σχήμα 4.21: Διάγραμμα μετατόπισης $N = 29$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 4.29 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 15^η, 16^η, 17^η, 18^η, 19^η, 20^η και στην 21^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_c). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 8^η και 29^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_v) ενώ στην 24^η, 25^η, 26^η, 27^η και στην 28^η πολύ κοντά σ' αυτό ($\approx 0.45 - 1.3 \%$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Τέλος, η συμπεριφορά της βέλτιστης τιμής του ύψους και των βέλτιστων θέσεων των ενδιάμεσων κόμβων, είναι η ίδια με τις αντίστοιχες τιμές που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

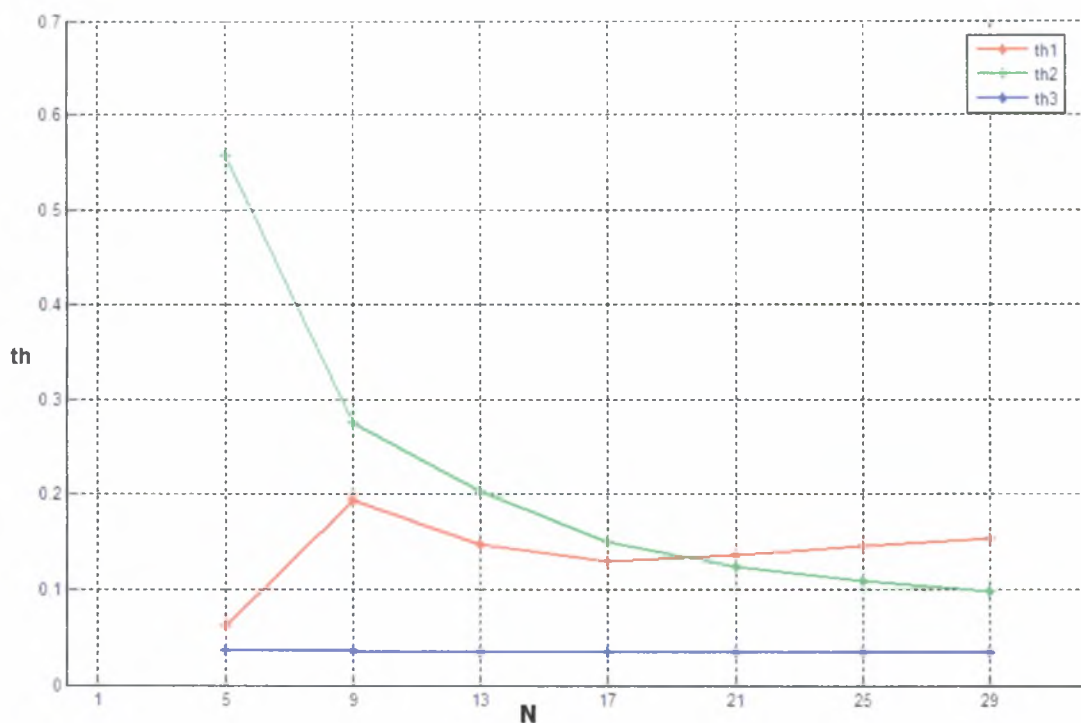
Βέλτιστος αριθμός ράβδων (N)

Εδώ, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, διακρίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $J\left(\hat{\theta}\right)$ με τον αριθμό των ράβδων N (Σχήμα 4.22), ότι σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το Μοντέλο 1, ο βέλτιστος αριθμός ράβδων είναι $N=17$ αφού εκεί η συνάρτηση $J\left(\hat{\theta}\right)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή, καθώς για μεγαλύτερα N η τιμή της $J\left(\hat{\theta}\right)$ μεγαλώνει.

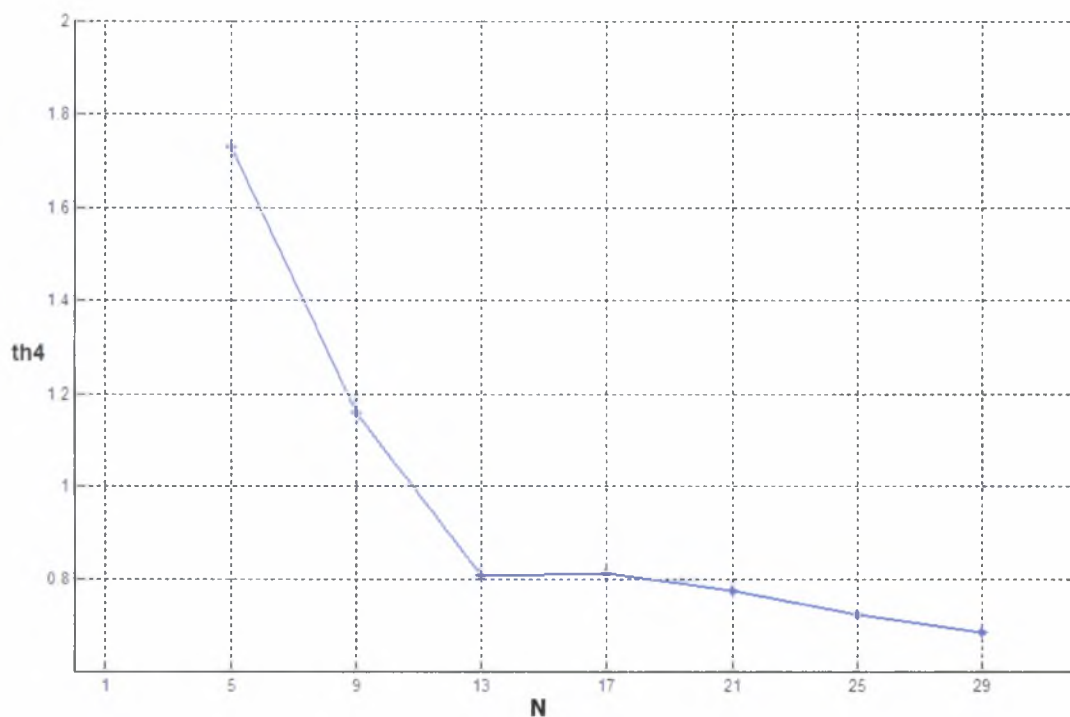


Σχήμα 4.22: Συνάρτηση κόστους (J) συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Επίσης στο Σχήμα 4.23 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων $\theta_i, i=1,2,3$ συναρτήσει του N , ενώ στο Σχήμα 4.24 η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής θ_4 η οποία αντιστοιχεί στο βέλτιστο ύψος του εκάστοτε δικτυώματος.



Σχήμα 4.23: Βέλτιστες τιμές θ_i συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)



Σχήμα 4.24: Βελτιστοποιημένη τιμή θ_4 συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Παρατηρούμε μείωση της μεταβλητής θ_2 καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ράβδων, ενώ η μεταβλητή θ_3 παραμένει σταθερή (με τιμή ≈ 0.0353) για όλα τα N ,

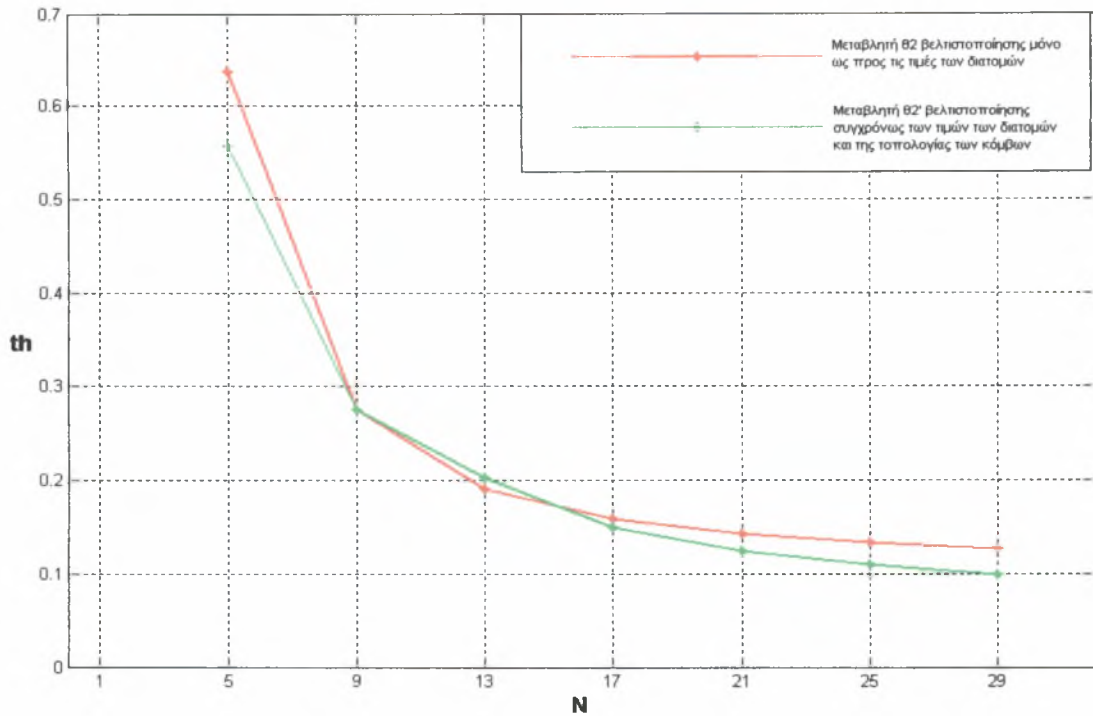
κάτι που αιτιολογήσαμε γιατί συμβαίνει στην ενότητα 4.2. Η μεταβλητή θ_1 λαμβάνει την τιμή 0.0612 για $N = 5$, αυξάνει για $N = 9$ με τιμή 0.1937, ενώ βλέπουμε να μειώνεται μέχρι την τιμή των 17 ράβδων. Για περαιτέρω αύξηση του αριθμού των ράβδων παρατηρούμε αύξηση της μεταβλητής θ_1 . Γενικότερα, για κάθε $N \leq 17$ παρατηρείτε ότι η μεταβλητή θ_2 παίρνει τις μεγαλύτερες τιμές ακολουθώντας οι μεταβλητές θ_1 και θ_3 ($\theta_2 > \theta_1 > \theta_3$) ενώ για $N \geq 21$ ισχύει $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$.

Με τη μέθοδο βελτιστοποίησης συγχρόνως των τιμών των διατομών και της τοπολογίας των κόμβων παρατηρούμε ότι οι κοινές μεταβλητές ($\theta_i, i = 1, 2, 3$) με την προηγούμενη μέθοδο ακολουθούν ποιοτικά σχεδόν την ίδια πορεία. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η μεταβολή της μεταβλητής θ_2 σε σχέση με τον αριθμό των ράβδων N για τη συγκεκριμένη μέθοδο βελτιστοποίησης, είναι σχεδόν ίδια (τόσο ποιοτικά όσο και ποσοτικά) με τη μεταβολή της μεταβλητής θ_2 για την προηγούμενη μέθοδο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.25, ενώ η μεταβλητή θ_3 λαμβάνει την ίδια ακριβώς τιμή για όλα τα N .

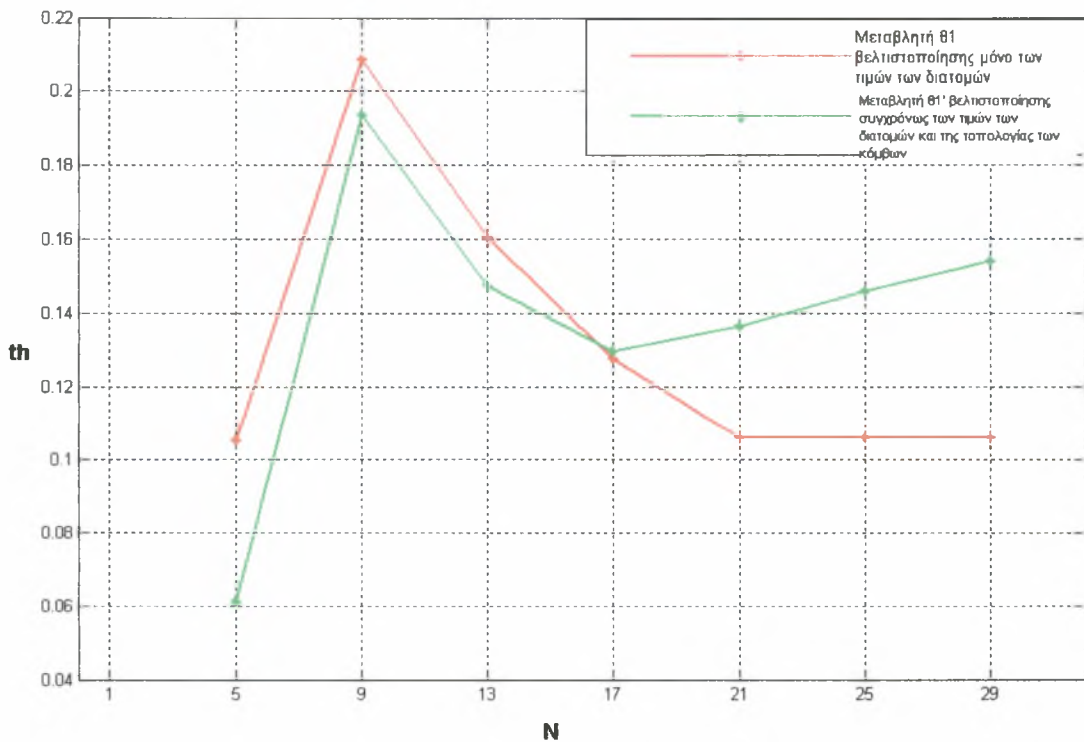
Επιπλέον, παρατηρούμε (όπως και στην ενότητα 4.2) ότι στη ράβδο η οποία είναι πακτωμένη και στα δύο άκρα της, για κάθε περίπτωση δικτύωματος αναπτύσσονται μηδενικές τάσεις και οπότε δεν είναι απαραίτητη για την κατασκευή του εκάστοτε δικτύωματος.

Η μεταβλητή θ_1 ακολουθεί κι αυτή την ίδια πορεία (ποιοτικά) σε σχέση με την αντίστοιχη μεταβλητή της προηγούμενης μεθόδου βελτιστοποίησης μέχρι $N = 17$. Για $N \geq 21$ παρατηρείτε αύξηση, ενώ στην προηγούμενη μέθοδο η μεταβλητή αυτή έπαιρνε μια σταθερή τιμή (Σχήμα 4.26).

Όσον αφορά την τοπολογία των κόμβων που προκύπτει μετά την βελτιστοποίηση κάθε περίπτωσης δικτύωματος, παρατηρούμε ότι για δικτύωματα του τύπου που εξετάζεται σε αυτό το κεφάλαιο (Μοντέλο 1), για λίγες ράβδους επιλέγεται η αύξηση του πλάτους (ύψους H) σε σχέση με την αρχική εκτίμηση, ενώ για περαιτέρω αύξηση του αριθμού των ράβδων παρατηρείτε μείωση του ύψους (Σχήμα 4.24). Τέλος, παρατηρούμε ότι οι βέλτιστες τιμές των x -συντεταγμένων των ενδιάμεσων κόμβων δεν διαφέρουν πολύ από τις αντίστοιχες βέλτιστες τιμές των δικτυωμάτων της 1^{ης} μεθόδου, ειδικά για δικτύωματα με πολλές ράβδους.



Σχήμα 4.25: Σύγκριση τιμών της μεταβλητής θ_2 για τις δύο μεθόδους



Σχήμα 4.26: Σύγκριση τιμών της μεταβλητής θ_1 για τις δύο μεθόδους

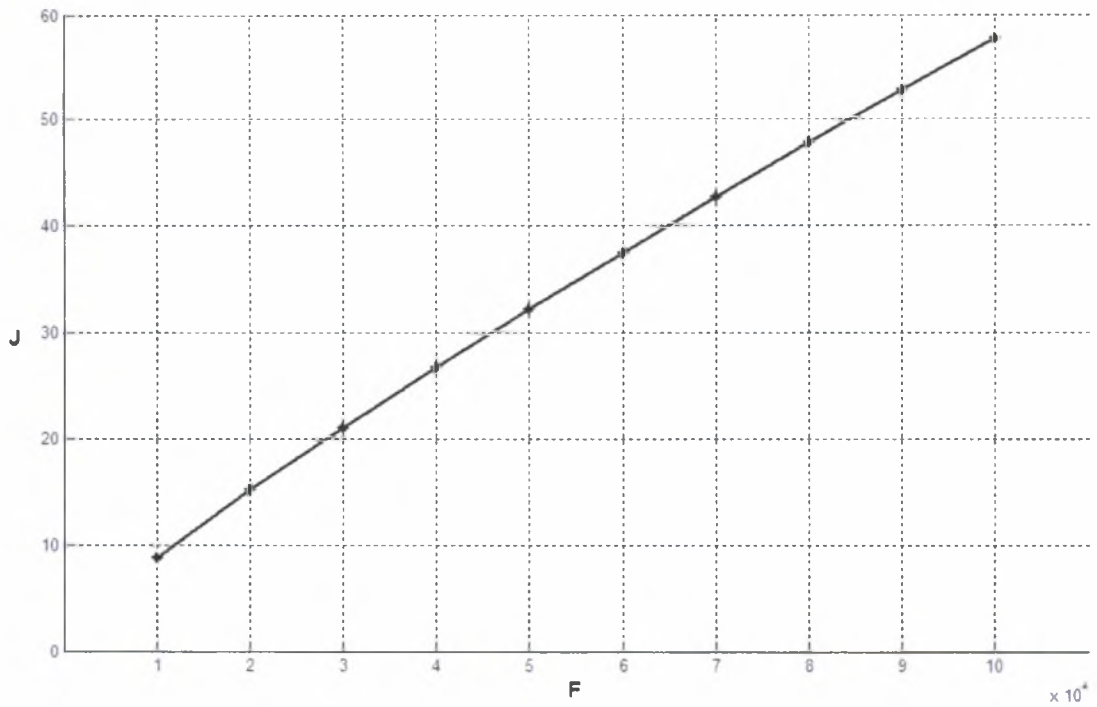
4.5 Αύξηση του φορτίου F για βέλτιστο δικτύωμα

Στην συγκεκριμένη ενότητα γίνεται η διαδικασία που εφαρμόστηκε και στην ενότητα 4.3. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται στο βέλτιστο δικτύωμα το οποίο υπολογίστηκε παραπάνω. Δηλαδή, επιλέγεται το δικτύωμα των 17 ράβδων ($N = 17$), και βελτιστοποιείται για κάθε φορτίο F ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές.

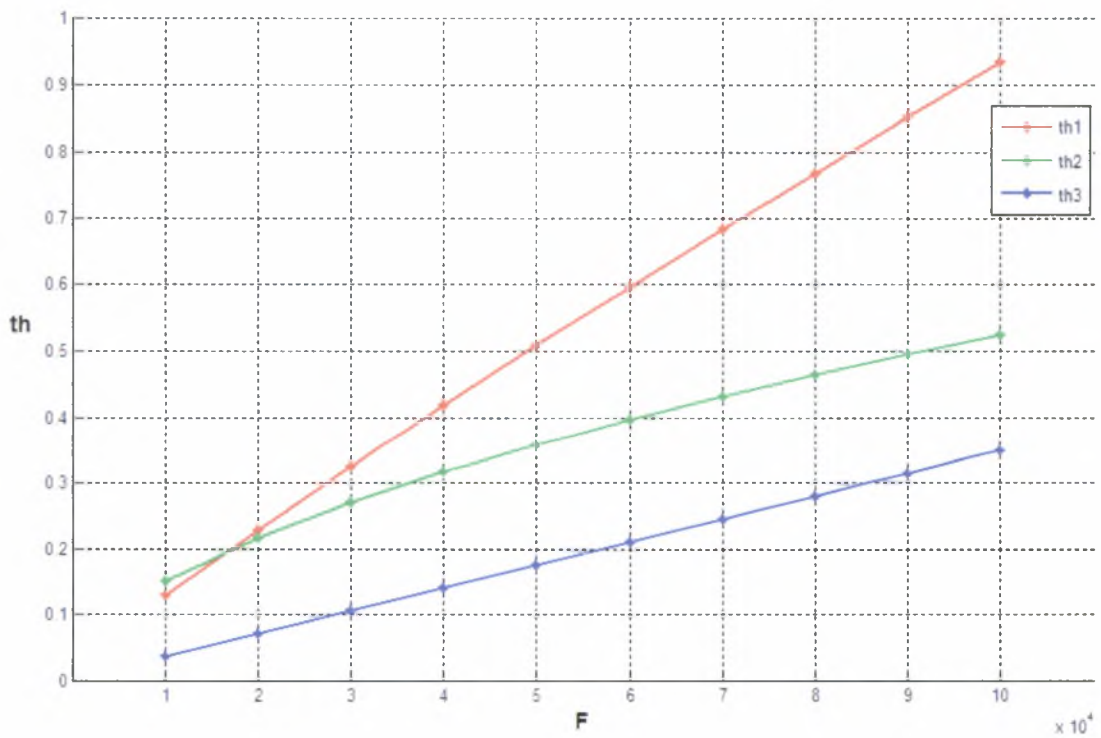
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε μορφή πινάκων και σε διαγράμματα. Στον Πίνακα 4.30 παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές διατομών για κάθε τιμή του φορτίου.

Πίνακας 4.30: Βέλτιστες τιμές διατομών για κάθε τιμή του φορτίου

Φορτίο (kN)	θ_1	θ_2	θ_3	A_1 ($m^2 \times 10^{-3}$)	A_2 ($m^2 \times 10^{-3}$)	A_3 ($m^2 \times 10^{-3}$)
10	0.1060	0.1427	0.0353	0.0749	0.1009	0.0250
20	0.2116	0.2014	0.0705	0.1496	0.1424	0.0498
30	0.3168	0.2465	0.1056	0.2240	0.1742	0.0747
40	0.4217	0.2844	0.1406	0.2981	0.2010	0.0994
50	0.5260	0.3178	0.1755	0.3718	0.2246	0.1241
60	0.6300	0.3479	0.2104	0.4453	0.2459	0.1487
70	0.7334	0.3756	0.2451	0.5184	0.2655	0.1732
80	0.8364	0.4012	0.2796	0.5912	0.2836	0.1977
90	0.9389	0.4253	0.3141	0.6637	0.3006	0.2220
100	1.0409	0.4480	0.3485	0.7358	0.3167	0.2463



Σχήμα 4.27: Συνάρτηση κόστους J συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F



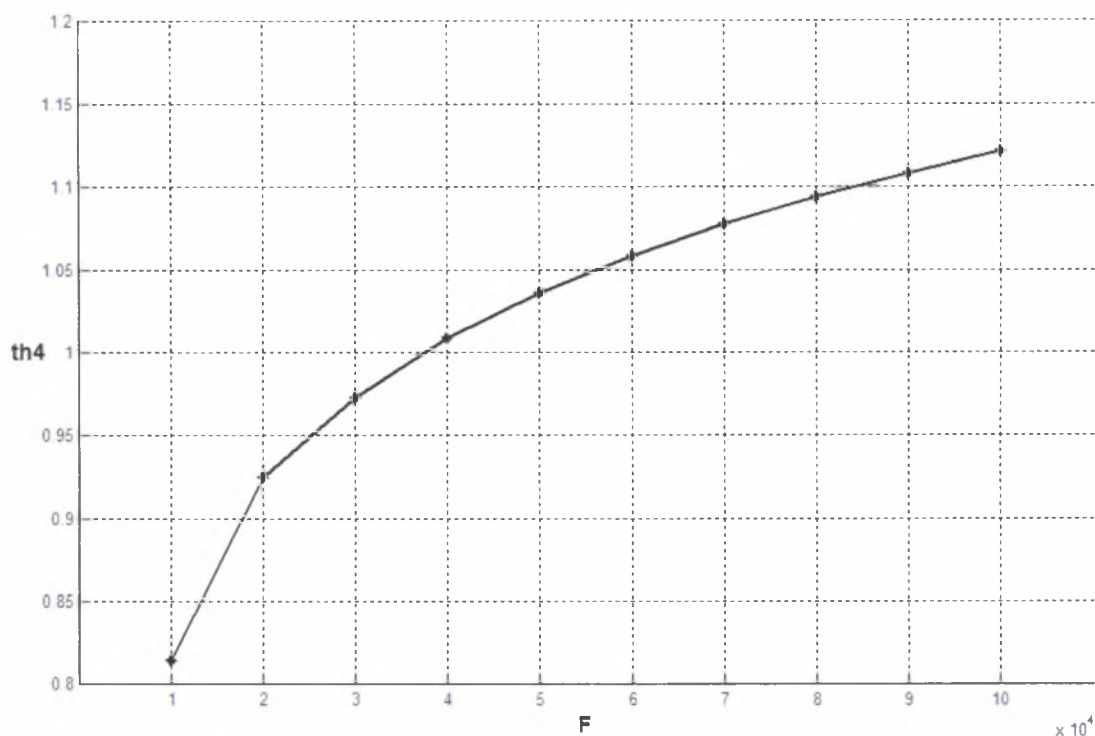
Σχήμα 4.28: Βέλτιστες τιμές θ , συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F

Για το δικτύωμα με τον βέλτιστο αριθμό ράβδων το οποίο προέκυψε με τη μέθοδο βελτιστοποίησης συγχρόνως των τιμών των διατομών και των θέσεων των κόμβων, παρατηρείτε αύξηση της συνάρτησης κόστους J καθώς το φορτίο F αυξάνει, σχεδόν γραμμικά. Επίσης παρατηρείτε αύξηση των τιμών των παραμέτρων θ_i και κατά συνέπεια των τιμών των διατομών A_i . Στη συνέχεια στον Πίνακα 4.31 παρουσιάζονται οι βέλτιστες θέσεις κόμβων για κάθε τιμή του φορτίου.

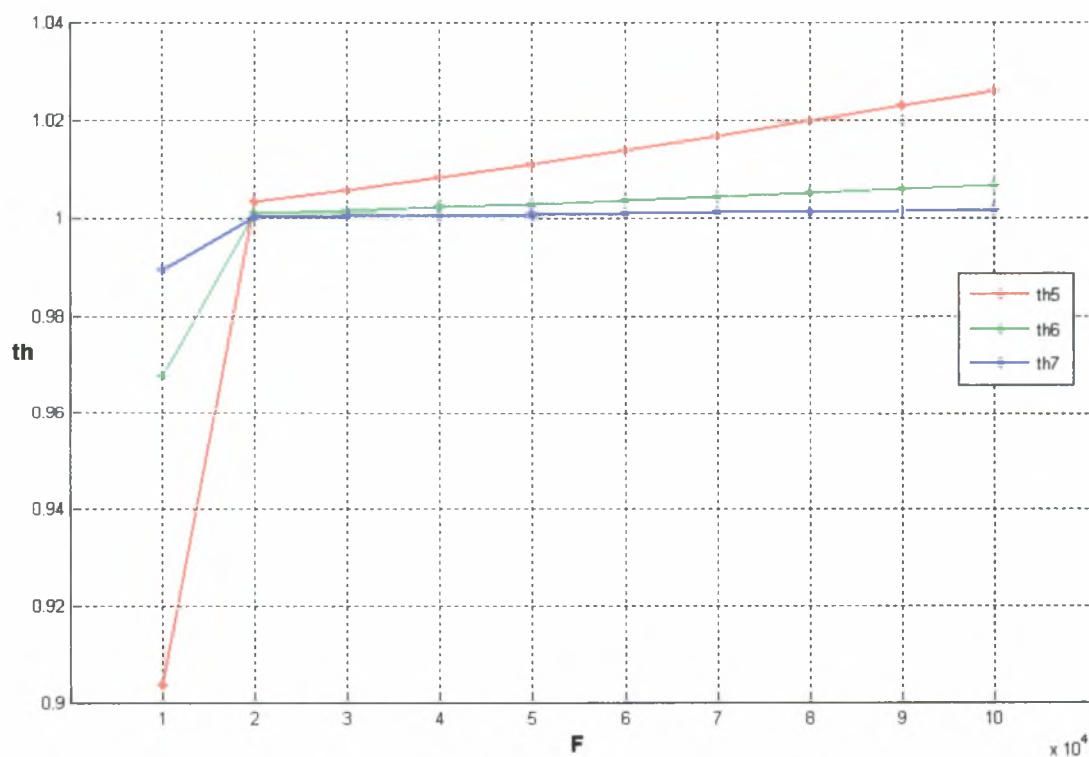
Πίνακας 4.31: Βέλτιστες θέσεις κόμβων για κάθε τιμή του φορτίου

Φορτίο (kN)	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
10	0.8146	0.9037	0.9678	0.9893
20	0.9243	1.0035	1.0010	1.0003
30	0.9732	1.0058	1.0016	1.0005
40	1.0085	1.0084	1.0023	1.0006
50	1.0361	1.0112	1.0030	1.0008
60	1.0586	1.0140	1.0038	1.0010
70	1.0776	1.0170	1.0045	1.0012
80	1.0939	1.0200	1.0053	1.0013
90	1.1082	1.0231	1.0061	1.0015
100	1.1208	1.0262	1.0069	1.0017

Τέλος, παρακάτω παρατίθενται τα διαγράμματα των μεταβλητών $\theta_i, i = 4, 5, 6, 7$ συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F . Σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρείτε ότι οι θέσεις των κόμβων μετά τη βελτιστοποίηση για κάθε φορτίο παραμένουν σταθερές.



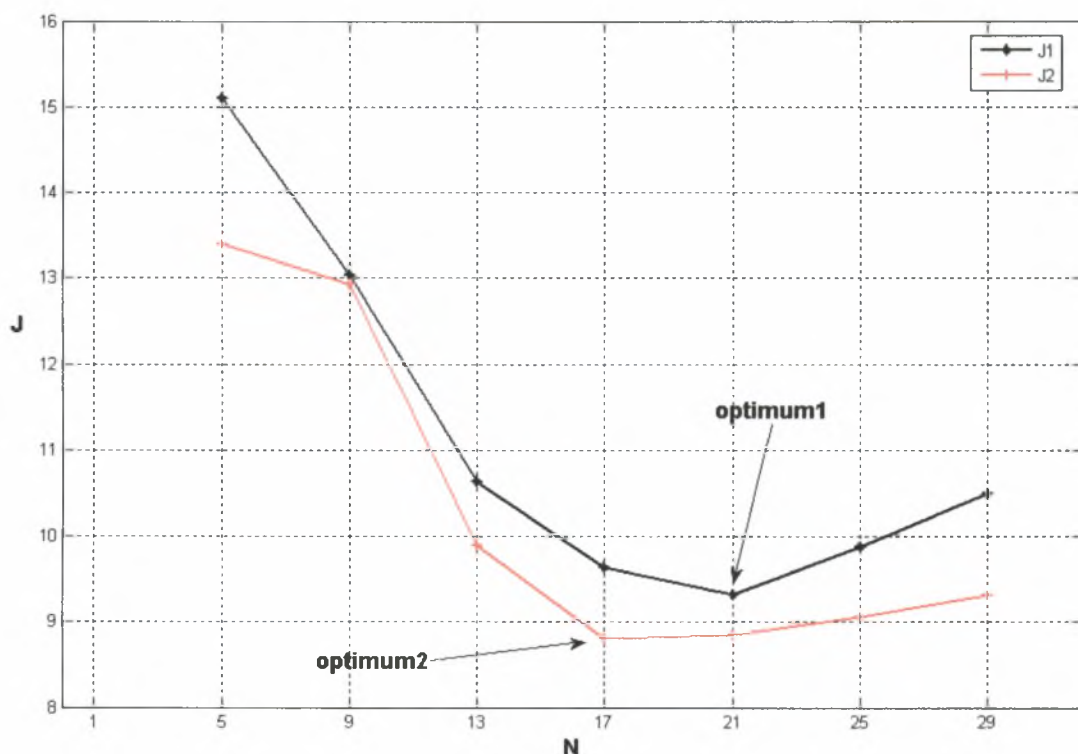
Σχήμα 4.29: Βέλτιστες τιμές θ_4 συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F



Σχήμα 4.30: Βέλτιστες τιμές θ_{5-7} συναρτήσει της αύξησης του φορτίου F

4.6 Σύγκριση μεθόδων βελτιστοποίησης για το 1^ο μοντέλο

Στην ενότητα αυτή συγκρίνονται οι δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ουσιαστικά συγκρίνονται οι συναρτήσεις κόστους για κάθε περίπτωση δικτύωματος. Έτσι η καλύτερη μέθοδος είναι αυτή από την οποία προκύπτει το δίκτυωμα με τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους για συγκεκριμένο αριθμό ράβδων ή καλύτερα το δίκτυωμα με το ελάχιστο βάρος.



Σχήμα 4.31: Σύγκριση συναρτήσεων κόστους

Από το Σχήμα 4.31 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κόστους J η οποία προκύπτει από τη μέθοδο βελτιστοποίησης συγχρόνως των τιμών των διατομών και της τοπολογίας των κόμβων είναι για κάθε N μικρότερη της συνάρτησης κόστους η οποία προκύπτει από την άλλη μέθοδο. Επίσης παρατηρείτε πως όταν γίνεται βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών, ο βέλτιστος αριθμός ράβδων είναι $N = 21$, ενώ για βελτιστοποίηση συγχρόνως των τιμών των διατομών και της τοπολογίας των κόμβων παρατηρείτε ότι ο βέλτιστος αριθμός είναι $N = 17$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι τα βέλτιστα εμβαδά των διαγώνιων και κάθετων ράβδων έχουν σχεδόν ίδιες τιμές και για τις δύο μεθόδους, ενώ τα βέλτιστα εμβαδά των οριζόντιων ράβδων για τη πρώτη μέθοδο είναι μικρότερα από αυτά της δεύτερης. Δηλαδή παρατηρούμε ότι παρόλο που η τιμή της διατομής των οριζόντιων ράβδων που προκύπτει από την δεύτερη μέθοδο βελτιστοποίησης είναι μεγαλύτερη αυτής που προκύπτει από την πρώτη μέθοδο, το βέλτιστο δικτύωμα της δεύτερης μεθόδου είναι ελαφρύτερο από το βέλτιστο δικτύωμα της πρώτης μεθόδου. Ειδικότερα παρατηρούμε ότι με τη δεύτερη μέθοδο επιλέγεται η ενίσχυση των διατομών των οριζόντιων ράβδων με μειωμένο όμως το ύψος του δικτύωματος. Επίσης παρατηρούμε ότι οι x -συντεταγμένες των κάθετων εσωτερικών ράβδων δεν διαφέρουν σημαντικά από τις αρχικές εκτιμήσεις. Συνοπτικά τα παραπάνω παρατίθενται στον Πίνακα 4.32.

Πίνακας 4.32: Σύγκριση βέλτιστων χαρακτηριστικών με αρχικές εκτιμήσεις

Μεταβλητές	$N = 21$ Πρώτη μέθοδος Βέλτιστο δικτύωμα	$N = 21$ Πρώτη μέθοδος Αρχικό δικτύωμα	$N = 17$ Δεύτερη μέθοδος Βέλτιστο δικτύωμα	$N = 17$ Δεύτερη μέθοδος Αρχικό δικτύωμα
A_1	$0.0749 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o	$0.1369 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o
A_2	$0.1009 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o	$0.1058 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o
A_3	$0.02495 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o	$0.02495 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o
y			0.8146 m	1 m
x_3			0.6778 m	0.75 m
x_5			1.4517 m	1.5 m
x_7			2.2259 m	2.25 m

4.7 Σχόλια – Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάστηκαν δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης για ένα συγκεκριμένο τύπο δικτύωματος (Μοντέλο 1) κάτω από συγκεκριμένη φόρτιση. Το γενικότερο συμπέρασμα το οποίο μπορεί να εξαχθεί, είναι ότι η μέθοδος του βέλτιστου σχεδιασμού με μεταβλητές τα εμβαδά των διατομών και την τοπολογία των κόμβων είναι σαφώς καλύτερη από τη μέθοδο με μεταβλητές μόνο τα εμβαδά των διατομών. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχήμα 4.31 στο οποίο παρατηρούμε ότι όταν βελτιστοποιούμε συγχρόνως ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων και την τοπολογία των κόμβων, παίρνουμε μικρότερες τιμές της συνάρτησης κόστους. Το συμπέρασμα αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο αφού με τη συγκεκριμένη μέθοδο δίνουμε στο σύστημα περισσότερους βαθμούς ελευθερίας κάτι που του δίνει μεγαλύτερη ελευθερία έτσι ώστε να βρει μια καλύτερη και οικονομικότερη λύση.

Επιπλέον, στην μέθοδο του βέλτιστου σχεδιασμού με μεταβλητές τα εμβαδά των διατομών και την τοπολογία των κόμβων παρατηρήσαμε ότι για περιπτώσεις δικτυωμάτων με πολλές ράβδους, η μορφολογία του εκάστοτε δικτύωματος ως προς τις x -συντεταγμένες δεν άλλαζε αισθητά. Αντίθετα, για την y -συντεταγμένη η βέλτιστη λύση ήταν αισθητά διαφορετική.

Παρατηρήσαμε επίσης, ότι οι βέλτιστες τιμές των διατομών των κάθετων και διαγώνιων ράβδων ανάμεσα στις δύο μεθόδους δεν είχαν μεγάλες διαφορές, για όλες τις περιπτώσεις των δικτυωμάτων (μάλιστα για τις κάθετες ράβδους τα αποτελέσματα ήταν ακριβώς τα ίδια). Αντίθετα, τα βέλτιστα εμβαδά των οριζόντιων ράβδων για μικρό αριθμό ράβδων ($N \leq 17$) είχαν μικρές διαφορές, ενώ για περισσότερες ράβδους η απόκλιση αυξανόταν σημαντικά.

Για τον συγκεκριμένο τύπο δικτύωματος (Μοντέλο 1) που εξετάστηκε σε αυτό το κεφάλαιο είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι μεταξύ των δύο μεθόδων βελτιστοποίησης, το καλύτερο δίκτυμα από άποψη κόστους είναι αυτό με το μικρότερο δυνατό αριθμό ράβδων.

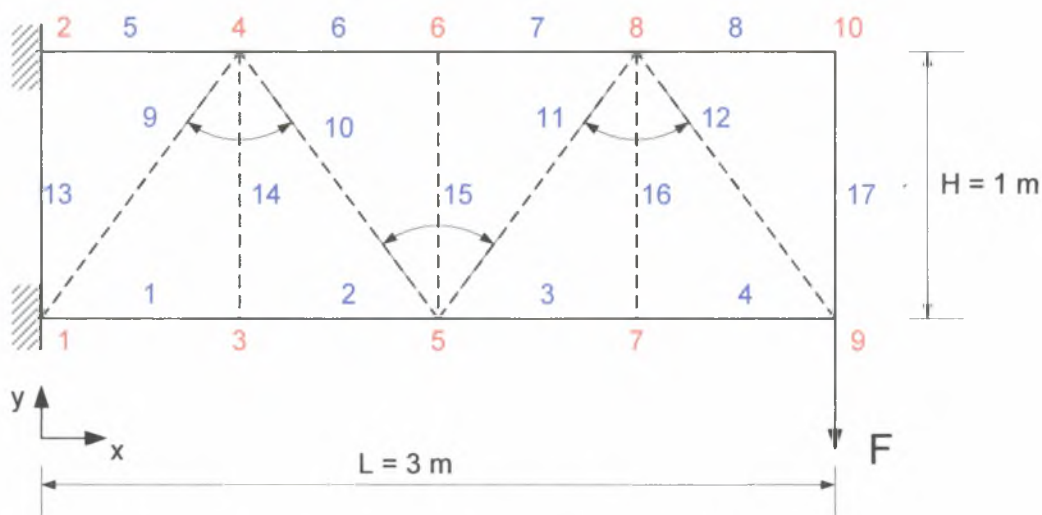
Τέλος, σημαντικό είναι να υπενθυμιστεί ότι στη συγκεκριμένη μελέτη που γίνεται, δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος των συνδέσεων ανά ράβδο κάτι που αν εισαγόταν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν κριτήριο, θα μείωνε τον αριθμό των ράβδων για κάθε βελτιστοποιημένο δίκτυμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ 2ΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνονται οι ίδιες διαδικασίες με αυτές του Κεφαλαίου 4 με τη μόνη διαφορά ότι το είδος του δικτύματος που εξετάζεται είναι της μορφής που φαίνεται στο Σχήμα 5.1 και αναφέρεται ως *Μοντέλο 2*.



Σχήμα 5.1: Είδος δικτύματος – Μοντέλο 2 ($N = 17$)

Δηλαδή, το δίκτυωμα είναι και πάλι ένα ορθογώνιο πλαίσιο στο οποίο προστίθενται εσωτερικά κάθετες ράβδοι με τη διαφορά ότι η σύνδεση των διαγώνιων ράβδων είναι διαφορετική. Ξεκινώντας πάντα από τον κόμβο στον οποίο εφαρμόζεται το φορτίο F τοποθετούμε μία ράβδο διαγώνια. Οι υπόλοιπες ράβδοι τοποθετούνται έτσι ώστε πάντοτε να δημιουργείται μεταξύ δύο διαγώνιων ράβδων μια περιεχόμενη γωνία.

5.2 Βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης των δικτυωμάτων για διαφορετικό αριθμό N . Η βελτιστοποίηση γίνεται ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων με βάση την ομαδοποίηση που παρουσιάστηκε στην εισαγωγή (Σχήμα 4.2).

1. Δικτύωμα 5 ράβδων (N=5)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1, ενώ στον Πίνακα 5.2 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

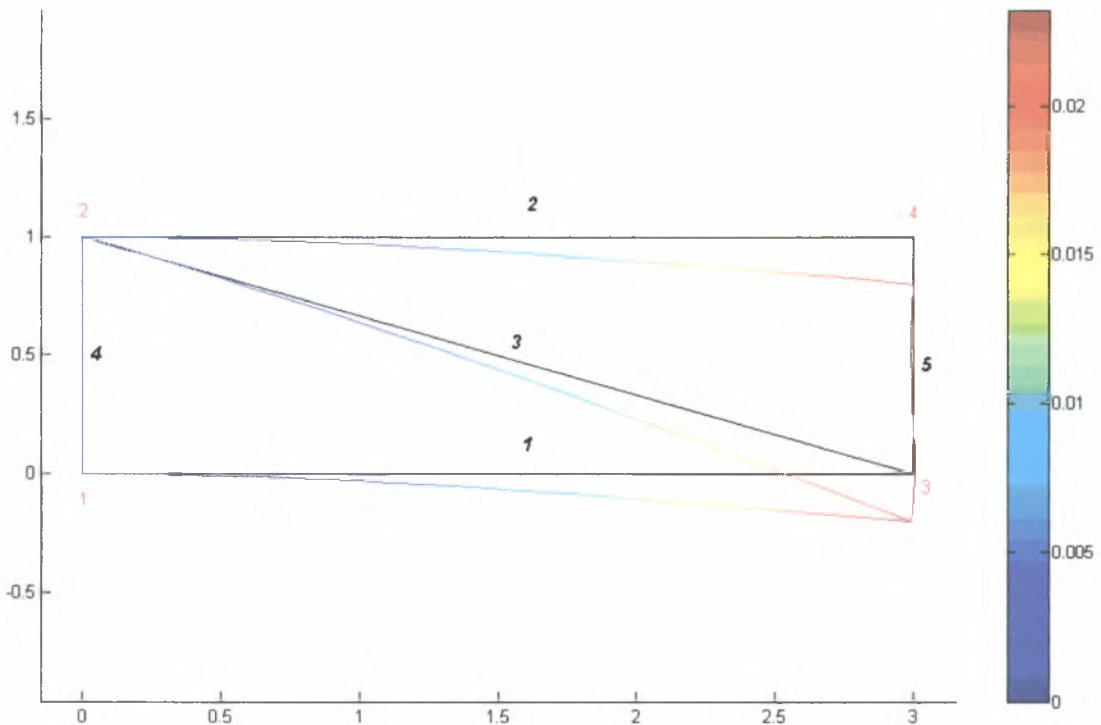
Πίνακας 5.1: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.5862	0.4144
2	0.1103	0.0779
3	0.0014	0.0010
$J(kg)$	21.4685	

Πίνακας 5.2: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος (N=5)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-0.7138	-2.9579	2.9579	117.84	0.000
2	0.0000	0.0000	2.9579	100.00	100.00

3	4.0000	3.1180	0.0942	0.000	3410.0
4	0	0	0.0002	100.00	100.00
5	0.6739	0.0069	0.0002	83.15	4373.0



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα μετατόπισης $N=5$

Παρατηρούμε ότι οι οριζόντιες ράβδοι έχουν τη μεγαλύτερη τιμή διατομής, ενώ από τον Πίνακα 5.2 βλέπουμε ότι το αξονικό (θλιπτικό) φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 3^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y). Τέλος, παρατηρούμε ότι στη 2^η ράβδο ασκείται πολύ μικρή τάση (49.1251Pa). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η τιμή της διατομής των κάθετων ράβδων που επιλέχθηκε για το συγκεκριμένο δικτύωμα δεν είναι η βέλτιστη, κάτι που συμπεραίνουμε από τον Πίνακα 5.2 όπου βλέπουμε ότι η τάση που ασκείται 5η ράβδο είναι πολύ μικρή, ενώ θα έπρεπε να είναι πολύ κοντά στο όριο διαρροής. Αυτό

σημαίνει ότι η μέθοδος δεν σύγκλινε κάτι που οφείλεται στο γεγονός ότι η τιμή της μεταβλητής $\hat{\theta}_3$ έχει μεγάλη διαφορά από τις τιμές των άλλων δύο μεταβλητών.

Αυτό το φαινόμενο παρατηρείτε και στις επόμενες περιπτώσεις δικτυωμάτων, είναι κάτι όμως που δεν επηρεάζει σημαντικά την βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους αφού βλέπουμε, όπως θα παρουσιαστεί παρακάτω, ότι η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής $\hat{\theta}_3$ προσεγγίζει κατά πολύ το μηδέν.

2. Δικτύωμα 9 ράβδων (N=9)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.3, ενώ στον Πίνακα 5.4 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

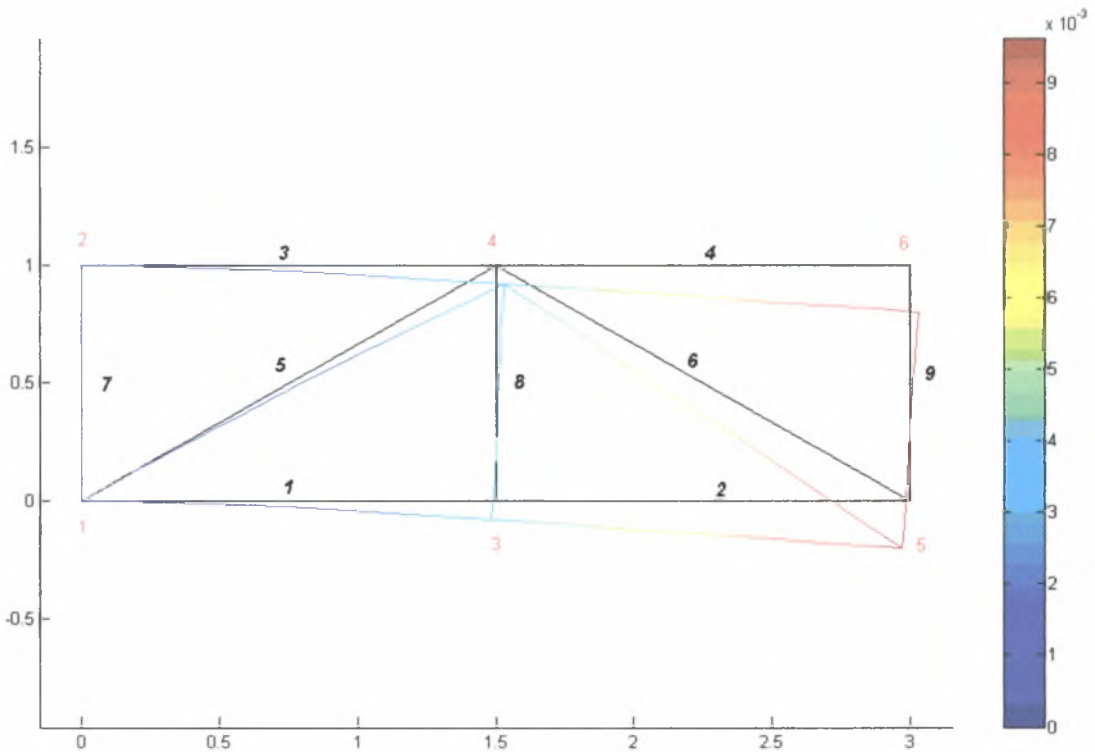
Πίνακας 5.3: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.2202	0.1557
2	0.2746	0.1941
3	0.0073	0.0051
$J(kg)$	12.9462	

Πίνακας 5.4: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=9)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-0.9634	-1.4996	1.6695	124.08	10.17
2	-0.9634	-1.4996	1.6695	124.08	10.17
3	1.9237	2.9944	1.6695	51.90	279.36

4	0.0000	0.0000	1.6695	99.99	100.00
5	-0.9259	-1.7971	1.7971	123.15	0.000
6	0.9285	1.8022	1.7971	76.78	200.28
7	0	0	0.0041	100.00	100.00
8	-0.0166	-0.000852	0.0041	100.41	79.23
9	0.0037	0.000192	0.0041	99.90	104.70



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα μετατόπισης $N=9$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.4 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 5^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι το θλιπτικό φορτίο στην 1^η και 2^η ράβδο έχουν τιμές πολύ κοντά στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Και σε αυτή τη περίπτωση παρατηρούμε ότι η μέθοδος δεν σύγκλινε.

3. Δικτύωμα 13 ράβδων (N=13)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.5, ενώ στον Πίνακα 5.6 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

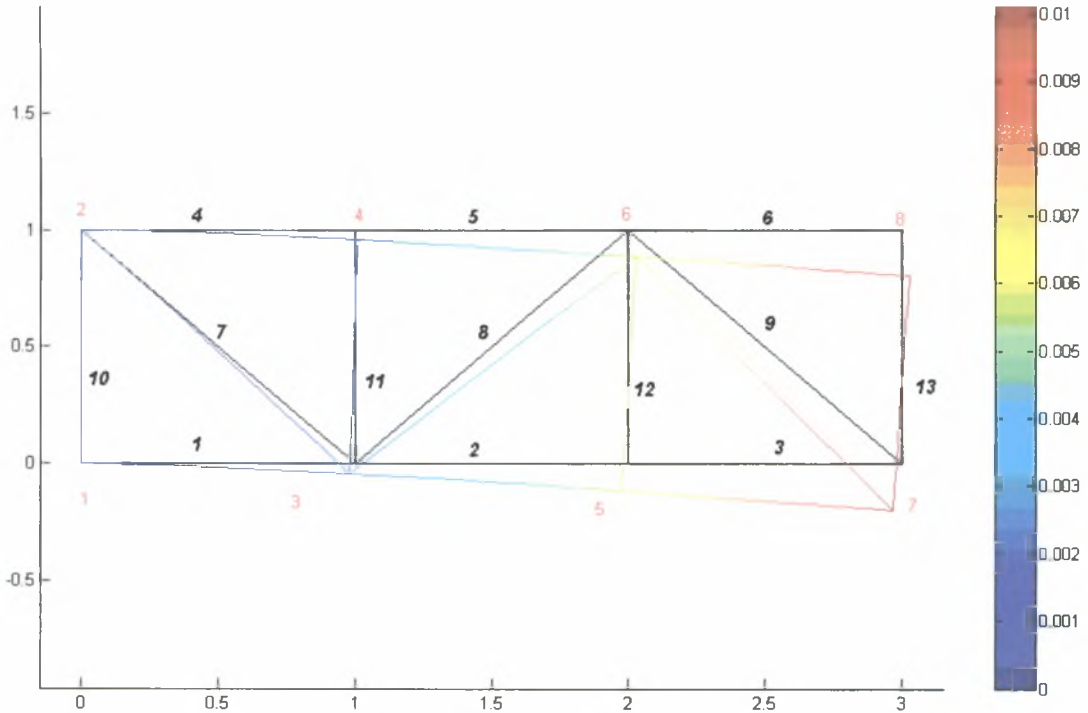
Πίνακας 5.5: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1967	0.1390
2	0.1912	0.1351
3	0.0006	0.0004
$J(kg)$	11.0623	

Πίνακας 5.6: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=13)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-2.1550	-2.9955	2.9955	153.87	0.000
2	-0.7189	-0.9994	2.9955	117.97	66.60
3	-0.7189	-0.9994	2.9955	117.97	66.60
4	1.4384	1.9994	2.9955	64.04	166.70
5	1.4384	1.9994	2.9955	64.04	166.70
6	0.0000	0.0000	2.9955	100.00	100.00
7	1.0425	1.4089	1.4158	73.93	199.50
8	-1.0461	-1.4138	1.4158	126.15	0.100
9	1.0456	1.4131	1.4158	73.86	199.80
10	0	0	0.0000	100.00	100.00
11	0.1837	0.000823	0.0000	95.40	2742.1

12	0.0700	0.000314	0.0000	98.25	1107.4
13	0.1063	0.000477	0.0000	97.34	1629.2



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα μετατόπισης $N=13$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.6 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_c), ενώ στην 8^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.1 %). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Και σε αυτή τη περίπτωση παρατηρούμε ότι η μέθοδος δεν σύγκλινε.

4. Δικτύωμα 17 ράβδων (N=17)

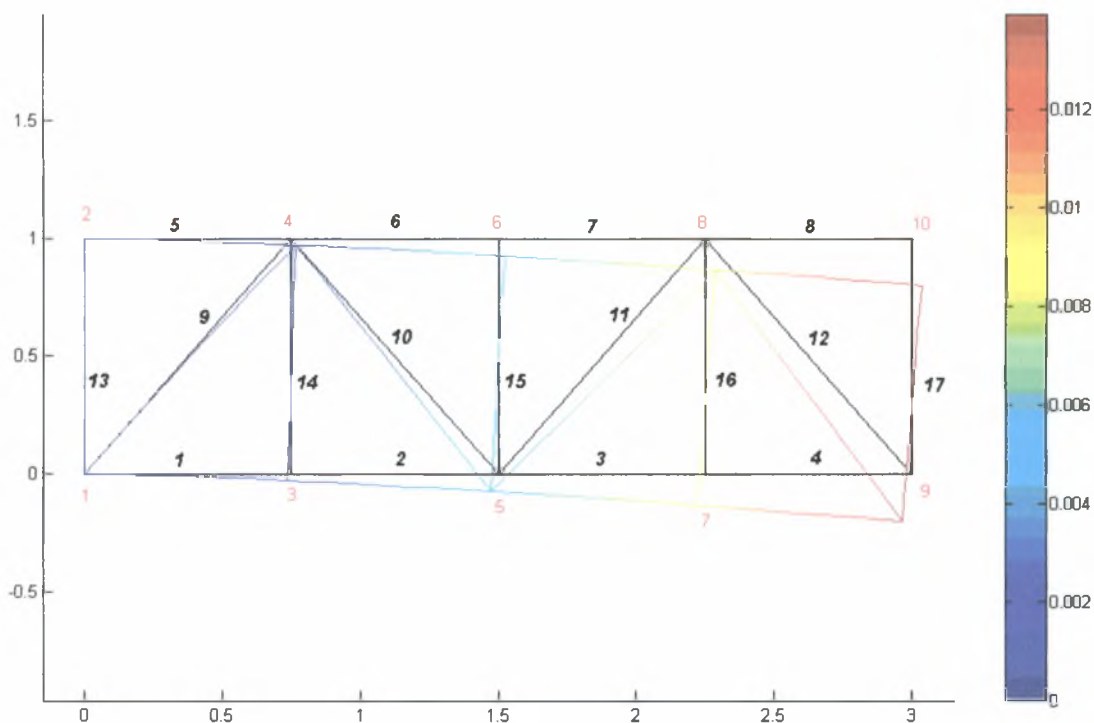
Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.7, ενώ στον Πίνακα 5.8 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτυώματος.

Πίνακας 5.7: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1279	0.0904
2	0.1587	0.1122
3	0.0035	0.0025
<i>J</i>(kg)	8.7587	

Πίνακας 5.8: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=17)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ</i> (Pa×10 ⁸)	<i>Αξονικό Φορτίο p</i> (N×10 ⁴)	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k</i> (N×10 ⁴)	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-2.4883	-2.2495	2.2526	162.20	0.136
2	-2.4883	-2.2495	2.2526	162.20	0.136
3	-0.8293	-0.7497	2.2526	120.73	66.71
4	-0.8293	-0.7497	2.2526	120.73	66.71
5	3.3151	2.9970	2.2526	17.12	233.04
6	1.6584	1.4993	2.2526	58.54	166.55
7	1.6584	1.4993	2.2526	58.54	166.55
8	0.0000	0.0000	2.2526	100.00	100.00
9	-1.1105	-1.2459	1.2489	127.76	0.241
10	1.1139	1.2497	1.2489	72.15	200.06
11	-1.1132	-1.2489	1.2489	127.83	0.000
12	1.1134	1.2491	1.2489	72.16	200.01
13	0	0	0.0009	100.00	100.00
14	-0.0344	-0.000852	0.0009	100.86	10.20
15	-0.0142	-0.00035	0.0966	100.35	63.01
16	-0.0025	-0.000062	0.0966	100.06	93.39
17	0.0184	0.000455	0.0966	99.54	148.04



Σχήμα 5.5: Διάγραμμα μετατόπισης $N=17$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.8 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 11^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k) ενώ στην 1^η, την 2^η και την 9^η ράβδο είναι πολύ κοντά σε αυτό. (p_k). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Επίσης παρατηρούμε ότι οι αξονικές τάσεις που ασκούνται στις κάθετες ράβδους έχουν πολύ μικρές τιμές όποτε συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος δεν σύγκλινε.

5. Δικτύωμα 21 ράβδων (N=21)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.9 ενώ στον Πίνακα 5.10 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

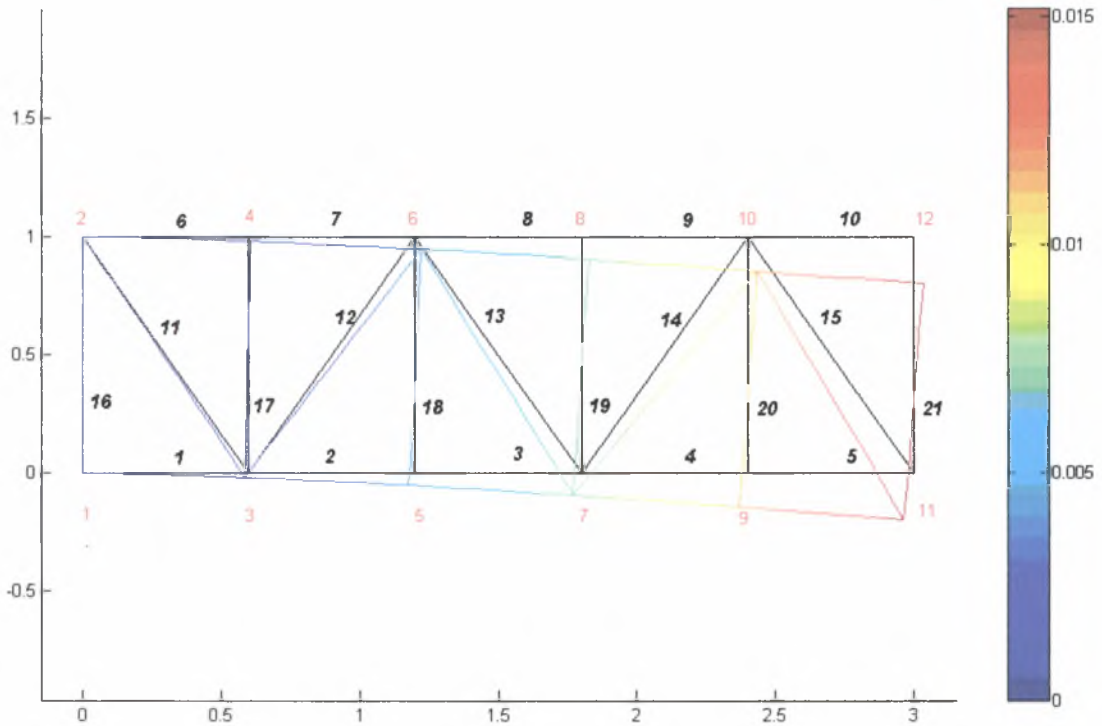
Πίνακας 5.9: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1183	0.0836
2	0.1430	0.1011
3	0.0005	0.0003
J(kg)	8.5809	

Πίνακας 5.10: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=21)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.5851	-2.9971	3.0098	189.62	0.400
2	-2.1523	-1.7993	3.0098	153.80	40.20
3	-2.1523	-1.7993	3.0098	153.80	40.20
4	-0.7175	-0.5998	3.0098	117.93	80.10
5	-0.7175	-0.5998	3.0098	117.93	80.10
6	2.8702	2.3995	3.0098	28.25	179.70
7	2.8702	2.3995	3.0098	28.25	179.70
8	1.4349	1.1995	3.0098	64.12	139.90
9	1.4349	1.1995	3.0098	64.12	139.90
10	0.0000	0.0000	3.0098	100.00	100.00
11	1.1486	1.1613	1.1653	71.28	199.70
12	-1.1525	-1.1653	1.1653	128.81	0.000
13	1.1522	1.1650	1.1653	71.19	200.00
14	-1.1521	-1.1649	1.1653	128.80	0.000
15	1.1523	1.1651	1.1653	71.19	200.00
16	0	0	0.0000	100.00	100.00
17	0.1521	0.000497	0.0000	96.19	3101.8

18	0.0722	0.000235	0.0000	98.19	1524.1
19	-0.0049	-0.000015	0.0000	100.12	4.100
20	-0.0039	-0.000012	0.0000	100.09	23.40
21	0.1719	0.000519	0.0000	95.70	3491.0



Σχήμα 5.6: Διάγραμμα μετατόπισης $N=21$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.10 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 12^η και την 14^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_x), ενώ στην 1^η είναι πολύ κοντά (0.4 %). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η τιμή της A_3 είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με τα εμβαδά των υπόλοιπων ράβδων κάτι που δείχνει ότι και για αυτή την περίπτωση, όπως και παραπάνω η μέθοδος δεν συγκλίνει.

6. Δικτύωμα 25 ράβδων (N=25)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.11, ενώ στον Πίνακα 5.12 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

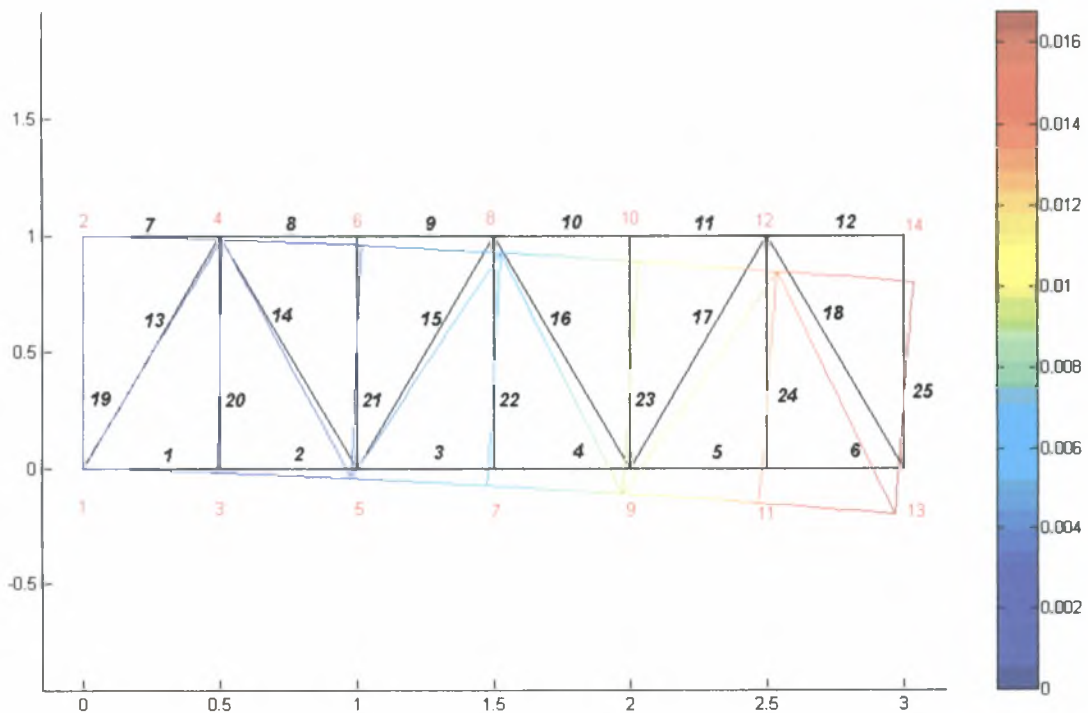
Πίνακας 5.11: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1065	0.0753
2	0.1342	0.0948
3	0.0045	0.00315
$J(kg)$	8.7164	

Πίνακας 5.12: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=25)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ</i> (Pa $\times 10^8$)	<i>Αξονικό Φορτίο p</i> (N $\times 10^4$)	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k</i> (N $\times 10^4$)	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.3191	-2.4997	3.5174	182.97	28.93
2	-3.3191	-2.4997	3.5174	182.97	28.93
3	-1.9911	-1.4995	3.5174	149.77	57.36
4	-1.9911	-1.4995	3.5174	149.77	57.36
5	-0.6637	-0.4998	3.5174	116.59	85.79
6	-0.6637	-0.4998	3.5174	116.59	85.79
7	3.9795	2.9971	3.5174	0.512	185.20
8	2.6546	1.9993	3.5174	33.63	156.84
9	2.6546	1.9993	3.5174	33.63	156.84
10	1.3274	0.9997	3.5174	66.81	128.42
11	1.3274	0.9997	3.5174	66.81	128.42

12	0.0000	0.0000	3.5174	99.99	100.00
13	-1.1715	-1.1115	1.1164	129.28	0.438
14	1.1776	1.1173	1.1164	70.55	200.08
15	-1.1765	-1.1162	1.1164	129.41	0.017
16	1.1768	1.1165	1.1164	70.58	200.00
17	-1.1767	-1.1164	1.1164	129.41	0.000
18	1.1767	1.1164	1.1164	70.58	200.00
19	0	0	0.0015	100.00	100.00
20	-0.0406	-0.00128	0.0015	101.01	16.83
21	-0.0198	-0.000623	0.0015	100.50	59.46
22	-0.0030	-0.000095	0.0015	100.07	93.84
23	-0.0010	-0.000031	0.0015	100.02	97.95
24	-0.0001	-0.000004	0.0015	100.00	99.73
25	0.0266	0.000839	0.0015	99.33	154.54



Σχήμα 5.7: Διάγραμμα μετατόπισης $N=25$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.12 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται

στην 17^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k), ενώ στην 13^η και 15^η ράβδο είναι πολύ κοντά (0.01 – 0.4 %). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση που ασκείται στην 7^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής. Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής. Και εδώ η μέθοδος δεν σύγκλινε κάτι όμως που όπως είπαμε δεν επηρεάζει σημαντικά την βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους, λόγω των πολύ μικρών τιμών των διατομών των κάθετων ράβδων.

7. Δικτύωμα 29 ράβδων (N=29)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.13, ενώ στον Πίνακα 5.14 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

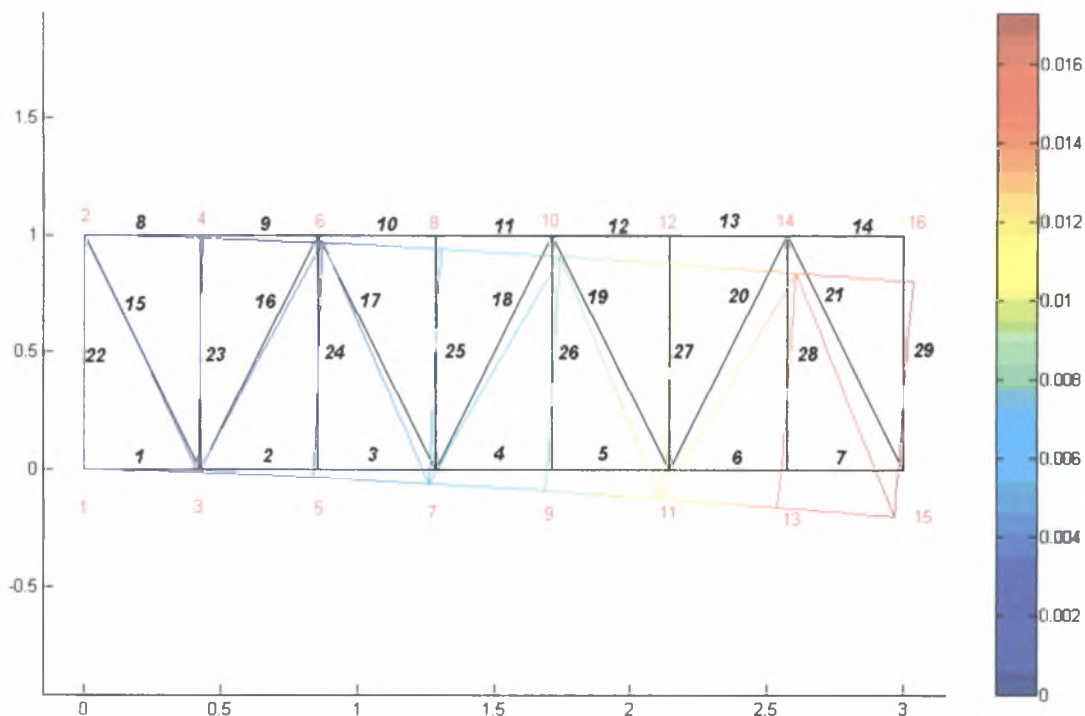
Πίνακας 5.13: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1060	0.0749
2	0.1288	0.0910
3	0.0009	0.00061
<i>J</i> (kg)	9.0115	

Πίνακας 5.14: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=29)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ</i> (Pa × 10 ⁸)	<i>Αξονικό Φορτίο p</i> (N × 10 ⁴)	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k</i> (N × 10 ⁴)	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	<i>Ποσοστιαία Διαφορά</i> $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
I	-4.0000	-2.9968	4.7377	200.00	36.70

2	-2.8593	-2.1422	4.7377	171.48	54.80
3	-2.8593	-2.1422	4.7377	171.48	54.80
4	-1.7156	-1.2853	4.7377	142.89	72.90
5	-1.7156	-1.2853	4.7377	142.89	72.90
6	-0.5719	-0.4285	4.7377	114.30	91.00
7	-0.5719	-0.4285	4.7377	114.30	91.00
8	3.4318	2.5711	4.7377	14.20	154.30
9	3.4318	2.5711	4.7377	14.20	154.30
10	2.2874	1.7137	4.7377	42.81	136.20
11	2.2874	1.7137	4.7377	42.81	136.20
12	1.1437	0.8569	4.7377	71.40	118.10
13	1.1437	0.8569	4.7377	71.40	118.10
14	0.0000	0.0000	4.7377	100.00	100.00
15	1.1854	1.0795	1.0862	70.36	199.40
16	-1.1927	-1.0862	1.0862	129.81	0.000
17	1.1923	1.0858	1.0862	70.19	200.00
18	-1.1922	-1.0857	1.0862	129.80	0.000
19	1.1922	1.0857	1.0862	70.19	200.00
20	-1.1922	-1.0856	1.0862	129.80	0.000
21	1.1925	1.0859	1.0862	70.18	200.00
22	0	0	0.0001	100.00	100.00
23	0.1347	0.000827	0.0001	96.63	1515.5
24	0.0721	0.000442	0.0001	98.19	857.10
25	0.0012	0.000007	0.0001	99.97	112.40
26	-0.0049	-0.000030	0.0001	100.12	48.20
27	-0.0095	-0.000058	0.0001	100.23	0.000
28	-0.0008	-0.000005	0.0001	100.02	91.20
29	0.1638	0.001006	0.0001	95.90	1821.3



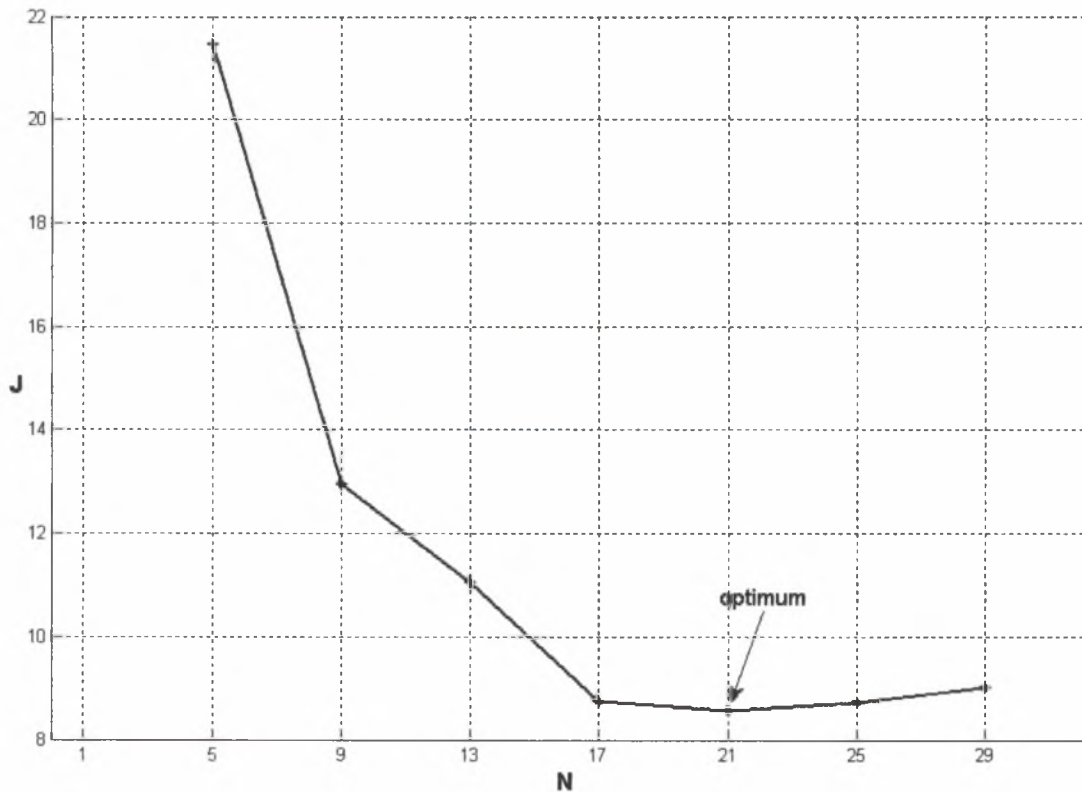
Σχήμα 5.8: Διάγραμμα μετατόπισης $N=29$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.14 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στις ράβδους 16, 18, 20 και 27 είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση που ασκείται στην 1^η ράβδο είναι ίση με την αρνητική τιμή του ορίου διαρροής ($-\sigma_y$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Βέλτιστος αριθμός ράβδων (N)

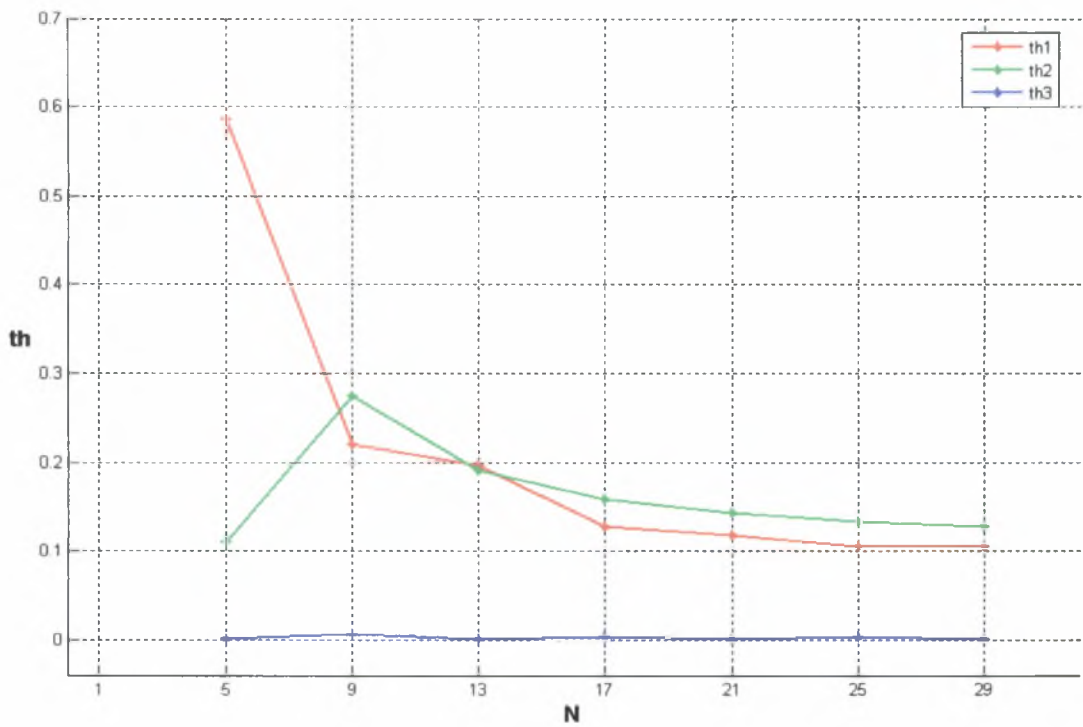
Με την παραπάνω διαδικασία (όπως και στην ενότητα 4.2) ουσιαστικά παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας βέλτιστος αριθμός ράβδων N για το οποίο η συνάρτηση κόστους λαμβάνει τη χαμηλότερη τιμή. Αυτό διακρίνεται καλύτερα και διαπιστώνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $J(\hat{\theta})$ με τον αριθμό των

ράβδων N (Σχήμα 5.9). Από το Σχήμα 5.9 διακρίνουμε ότι για $N = 21$ η συνάρτηση $J(\hat{\theta})$ παίρνει ελάχιστη τιμή αφού για μεγαλύτερα N η τιμή της J μεγαλώνει.

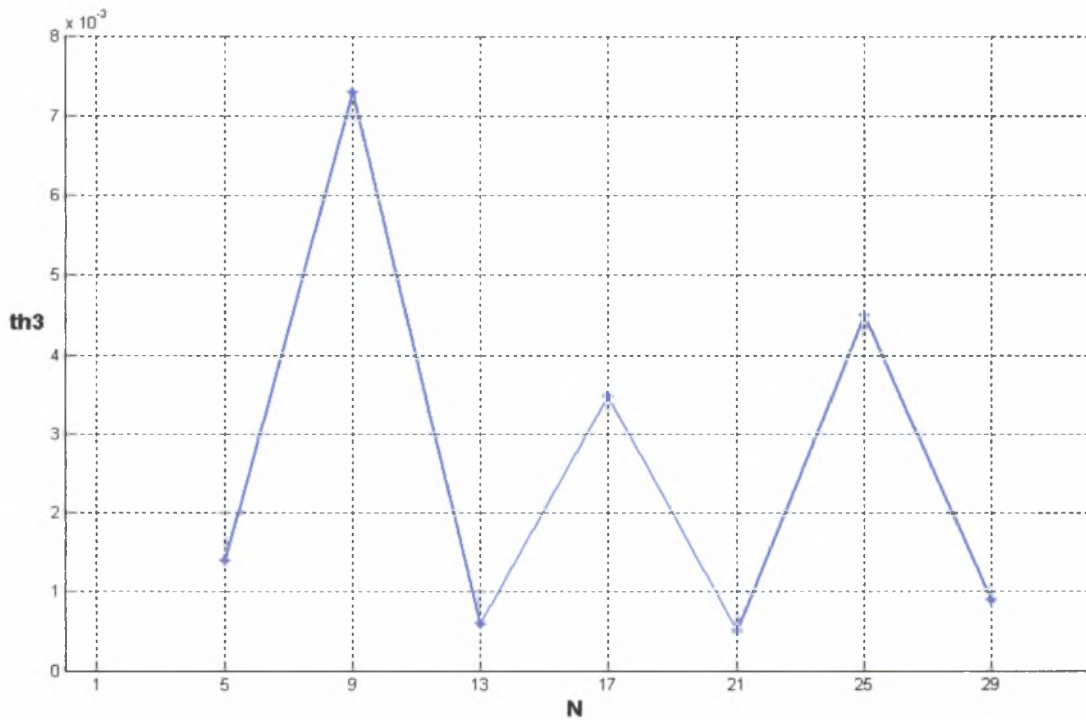


Σχήμα 5.9: Συνάρτηση κόστους (J) συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Επίσης παρακάτω παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων $\theta_i, i=1,2,3$ συναρτήσει του N (Σχήμα 5.10) και στο Σχήμα 5.11 η λεπτομέρεια για την παράμετρο θ_3 . Παρατηρούμε μείωση της μεταβλητής θ_1 καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ράβδων. Η μεταβλητή θ_2 λαμβάνει την τιμή 0.1103 για $N = 5$, αυξάνει για $N = 9$ με τιμή 0.2746, ενώ για περαιτέρω αύξηση του αριθμού των ράβδων βλέπουμε να μειώνεται λαμβάνοντας μια σταθερή τιμή για $N \geq 25$. Τέλος από το Σχήμα 5.11 διαπιστώνουμε ότι η μεταβλητή θ_3 αυξομειώνεται καθώς το N αυξάνεται σε τιμές όμως πολύ μικρότερες σε σχέση με τις υπόλοιπες 2 μεταβλητές θ_1 και θ_2 .



Σχήμα 5.10: Βέλτιστες τιμές θ_i συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)



Σχήμα 5.11 : Βελτιστοποιημένη τιμή θ_3 συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Καταρχάς πρέπει να παρατηρήσουμε ότι σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του βέλτιστου σχεδιασμού με την πρώτη μέθοδο του Μοντέλου 1, η τιμή της μεταβλητής θ_3 δεν έχει την ίδια τιμή για κάθε N . Αυτό συμβαίνει για το λόγο που αναφέραμε στην αρχή. Η μέθοδος δεν συγκλίνει οπότε δεν παίρνουμε μια σταθερή τιμή (μάλλον μηδενική) της μεταβλητής θ_3 για όλα τα N . Το φαινόμενο αυτό όμως δεν επηρεάζει σημαντικά τη βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω.

Επιπλέον για το Μοντέλο 2 παρατηρούμε ότι για $N \geq 9$ η τιμή της διατομής των διαγώνιων ράβδων είναι μεγαλύτερη (ή περίπου ίση) από αυτή των οριζόντιων προφανώς για τους ίδιους λόγους με αυτούς που αναφέραμε στην ενότητα 4.2.

Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι στη συγκεκριμένη μελέτη που γίνεται, δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος των συνδέσεων ανά ράβδο κάτι που αν εισαγόταν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν κριτήριο, θα μείωνε τον αριθμό των ράβδων για κάθε βελτιστοποιημένο δικτύωμα.

Τέλος, παρατηρούμε (όπως και στην ενότητα 4.2) ότι στη ράβδο η οποία είναι πακτωμένη και στα δύο άκρα της, για κάθε περίπτωση δικτύωματος αναπτύσσονται μηδενικές τάσεις και οπότε δεν είναι απαραίτητη για την κατασκευή του εκάστοτε δικτύωματος.

5.3 Βελτιστοποίηση τοπολογίας των κόμβων και των τιμών των διατομών των ράβδων

1. Δικτύωμα 5 ράβδων (N=5)

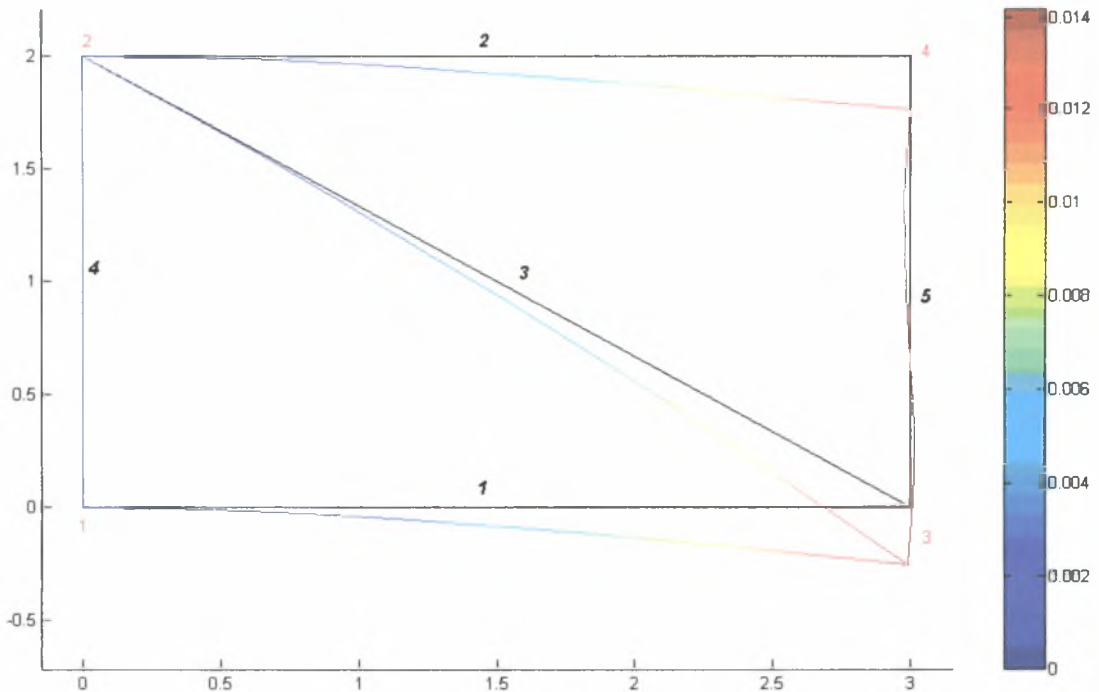
Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.15, ενώ στον Πίνακα 5.16 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

Πίνακας 5.15: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.4166	0.2945
2	0.0635	0.0449
3	0.0005	0.0004
4	2.0000	$y = 2.0000 m$
$J(kg)$	15.1514	

Πίνακας 5.16: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=5)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-0.5072	-1.4937	1.4937	112.68	0.000
2	0.0000	0.0000	1.4937	100.00	100.00
3	4.0000	1.7952	0.0240	0.000	7574.0
4	0	0	0.0000	100.00	100.00
5	0.5473	0.00206	0.0000	86.31	37662.0



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα μετατόπισης $N=5$

Παρατηρούμε ότι οι οριζόντιες ράβδοι έχουν τη μεγαλύτερη τιμή διατομής, ενώ από τον Πίνακα 5.16 βλέπουμε ότι το αξονικό (θλιπτικό) φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_x). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 3^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y). Τέλος, παρατηρούμε ότι στη 2^η ράβδο ασκείται πολύ μικρή τάση (1.4777Pa). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων ράβδων (ομάδα 2) βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η βέλτιστη τιμή της y - συντεταγμένης είναι το ανώτατο όριο το οποίο ορίσαμε.

Και εδώ, παρατηρείτε πρόβλημα σύγκλισης του αλγόριθμου βελτιστοποίησης για τους λόγους που αναφέραμε παραπάνω.

2. Δικτύωμα 9 ράβδων (N=9)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.17, ενώ στον Πίνακα 5.18 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

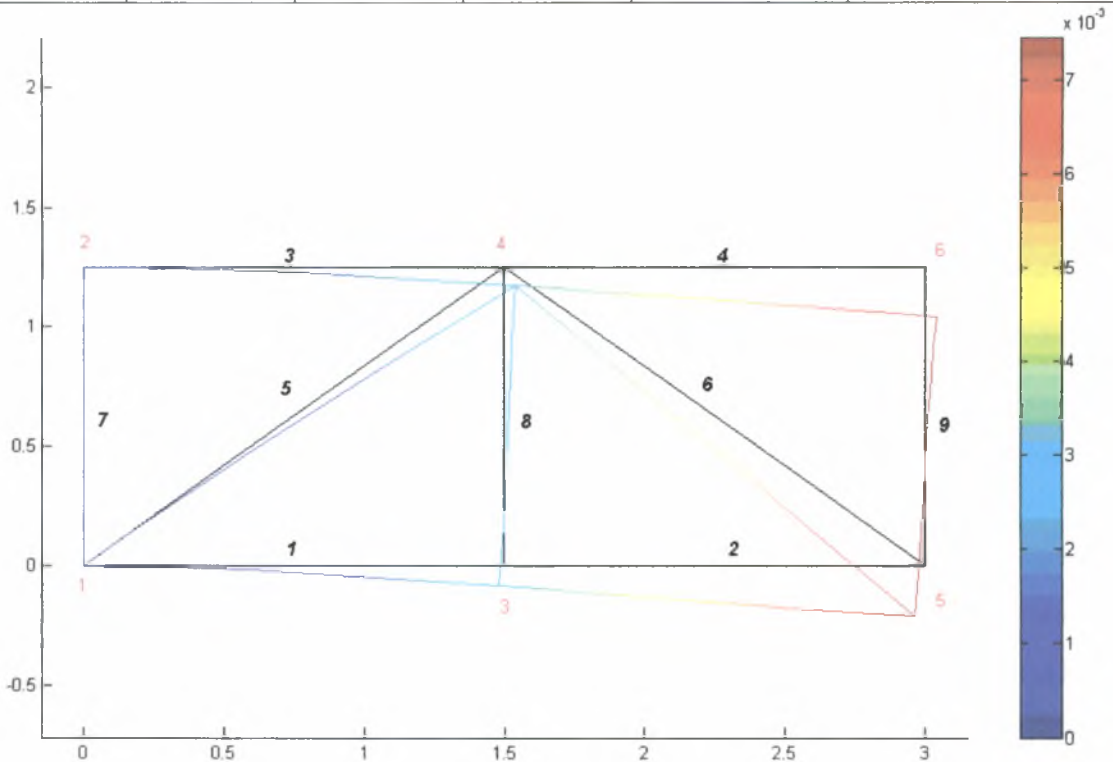
Πίνακας 5.17: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1866	0.1319
2	0.2771	0.1958
3	0.0133	0.0094
4	1.2514	$y = 1.2514 m$
5	1.0000	$x_3 = 1.5000 m$
$J(kg)$	12.9264	

Πίνακας 5.18: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=9)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-0.9087	-1.1984	1.1985	122.71	0.0010
2	-0.9087	-1.1984	1.1984	122.71	0.000
3	1.8157	2.3946	1.1985	54.60	299.80
4	0.0000	0.0000	1.1984	99.99	100.00
5	-0.7956	-1.5581	1.5581	119.89	0.000
6	0.7969	1.5606	1.5581	80.07	200.16
7	0	0	0.0088	100.00	100.00

8	-0.0047	-0.000441	0.0088	100.11	94.99
9	0.0015	0.000141	0.0088	99.96	101.60



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα μετατόπισης $N=9$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.18 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η, 2^η και την 5^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Το βέλτιστο ύψος του δικτύματος είναι 1.2514m μεγαλύτερο από αυτό του αντίστοιχου δικτύματος της πρώτης μεθόδου, ενώ οι βέλτιστες θέσεις των κόμβων 3 και 4 είναι στο μισό του συνολικού μήκους του δικτύματος, όπως και για το 1^ο Μοντέλο. Επίσης, παρατηρούμε ότι όπως και για το προηγούμενο δίκτυμα ότι η μέθοδος δεν συγκλίνει.

3. Δικτύωμα 13 ράβδων (N=13)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.19, ενώ στον Πίνακα 5.20 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

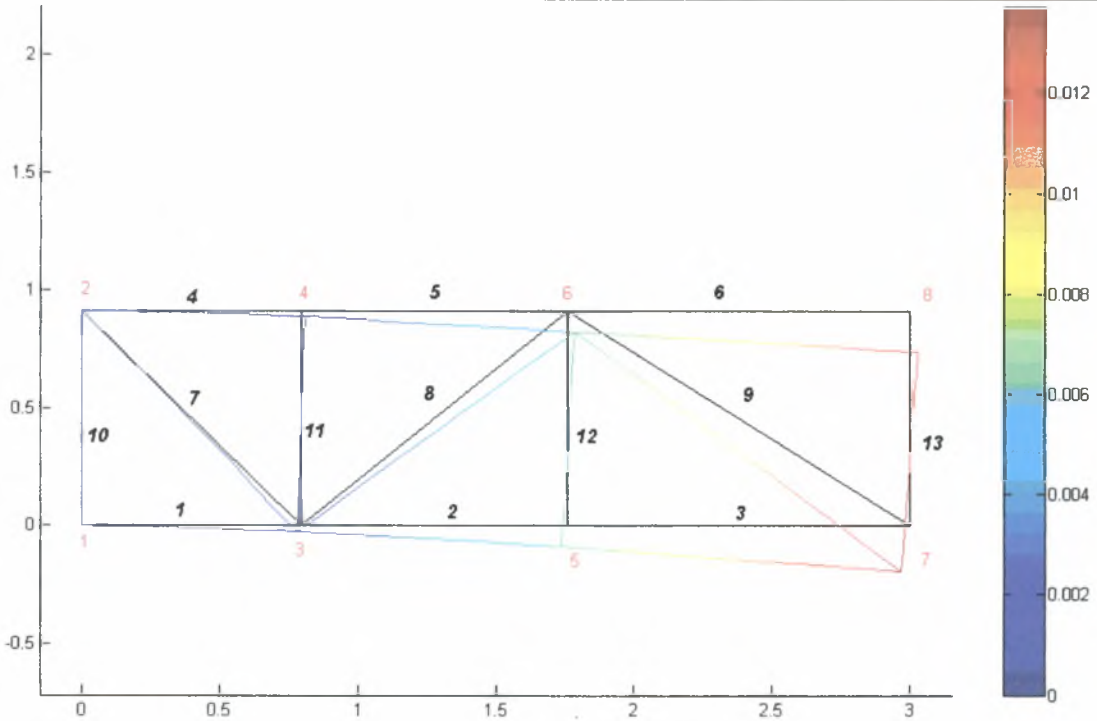
Πίνακας 5.19: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1642	0.1161
2	0.1816	0.1284
3	5.9862 $\times 10^{-8}$	0.4231 $\times 10^{-7}$
4	0.9118	$y = 0.9118 m$
5	0.7975	$x_3 = 0.7975 m$
6	0.8800	$x_5 = 1.7600 m$
J(kg)	9.5754	

Πίνακας 5.20: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=13)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-2.8303	-3.2860	3.2860	170.75	0.0037
2	-1.1707	-1.3592	2.2553	129.26	38.55
3	-1.1707	-1.3592	1.3592	129.26	0.0213
4	2.0795	2.4143	3.2860	48.01	173.58
5	2.0795	2.4143	2.2553	48.01	209.60
6	0.0000	0.0000	1.3592	100.00	100.00
7	1.0317	1.3242	1.7407	74.20	174.85
8	-1.1319	-1.4529	1.4529	128.29	0.0745

9	1.3146	1.6873	1.0782	67.13	254.13
10	0	0	0.0000	100.00	100.00
11	0.3663	0.0000	0.0000	90.84	171810
12	0.2644	0.0000	0.0000	93.38	102790
13	3.4343	0.0000	0.0000	14.14	699530



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα μετατόπισης $N=13$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.20 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η, την 3^η και την 8^η ράβδο είναι σχεδόν ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ βλέπουμε ότι η μέθοδος δεν συγκλίνει.

Τέλος, παρατηρούμε ότι το βέλτιστο ύψος είναι μικρότερο από αυτό του αντίστοιχου δικτύωματος της 1^{ης} μεθόδου βελτιστοποίησης και ότι οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων δεν ισοκατανέμονται, κάτι που παρατηρήσαμε και στο 1^ο μοντέλο για την αντίστοιχη περίπτωση δικτύωματος.

4. Δικτύωμα 17 ράβδων (N=17)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.21, ενώ στον Πίνακα 5.22 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

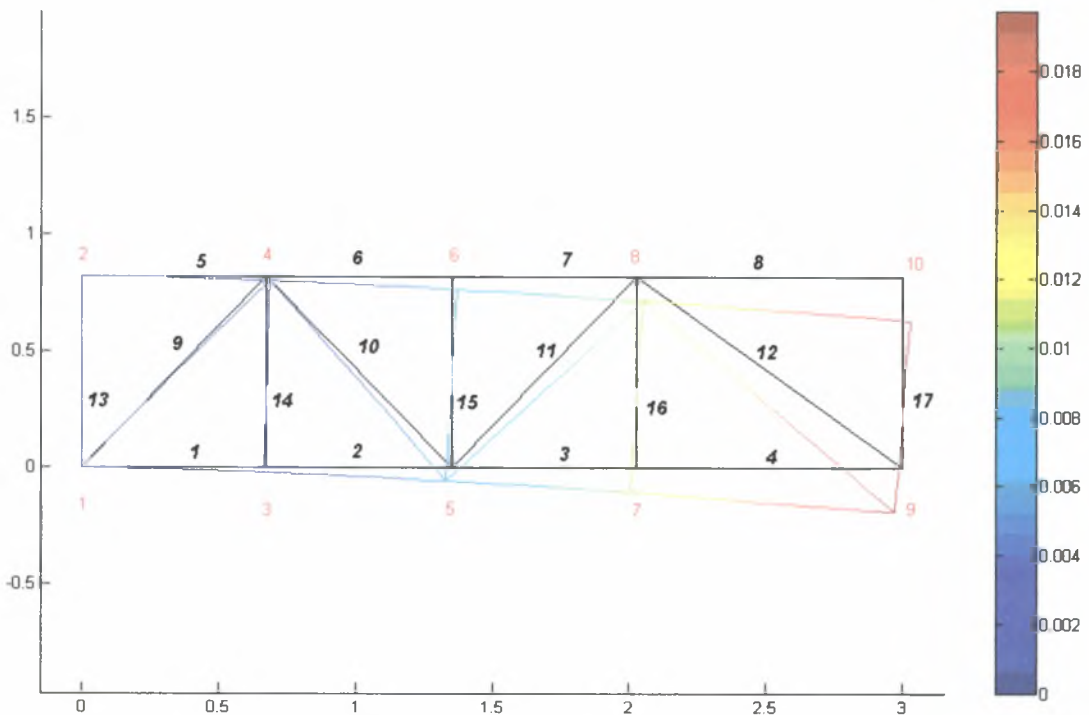
Πίνακας 5.21: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1293	0.0913
2	0.1371	0.0969
3	0.0033	0.00236
4	0.8198	$y = 0.8198 m$
5	0.9010	$x_3 = 0.6758 m$
6	0.9010	$x_5 = 1.3515 m$
7	0.9000	$x_7 = 2.0250 m$
$J(kg)$	7.7718	

Πίνακας 5.22: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=17)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-3.1021	-2.8343	2.8343	177.55	0.000
2	-3.1021	-2.8343	2.8343	177.55	0.000
3	-1.3006	-1.1883	2.8531	132.51	58.35
4	-1.3006	-1.1883	1.3614	132.51	12.71
5	4.0000	3.6547	2.8343	0.000	228.94
6	2.1996	2.0097	2.8343	45.00	170.90
7	2.1996	2.0097	2.8531	45.00	170.44

8	0.0000	0.0000	1.3614	99.99	100.00
9	-1.3311	-1.2899	1.2899	133.27	0.000
10	1.3370	1.2956	1.2899	66.57	200.44
11	-1.3346	-1.2933	1.2933	133.36	0.000
12	1.6021	1.5525	0.8972	59.94	273.03
13	0	0	0.0013	100.00	100.00
14	-0.0545	-0.001288	0.0013	101.36	0.000
15	-0.0107	-0.000252	0.0013	100.26	80.39
16	-0.0026	-0.00006	0.0013	100.06	95.28
17	0.0206	0.000486	0.0013	99.48	137.71



Σχήμα 5.15: Διάγραμμα μετατόπισης $N=17$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των διαγώνιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.22 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η, την 2^η, την 9^η, την 11^η και την 14^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 5^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου

φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Επίσης, βλέπουμε ότι το βέλτιστο ύψος του δικτύωματος έχει τιμή περίπου 0.8m και ότι οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων έχουν μετακινηθεί αντίθετα του άξονα - x σε σχέση με το αντίστοιχο δίκτυμα της 1^{ης} μεθόδου.

Τέλος, παρατηρούμε ότι για την συγκεκριμένη περίπτωση γίνεται βέλτιστη επιλογή της διατομής των κάθετων ράβδων, οπότε μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης συγκλίνει.

5. Δίκτυωμα 21 ράβδων (N=21)

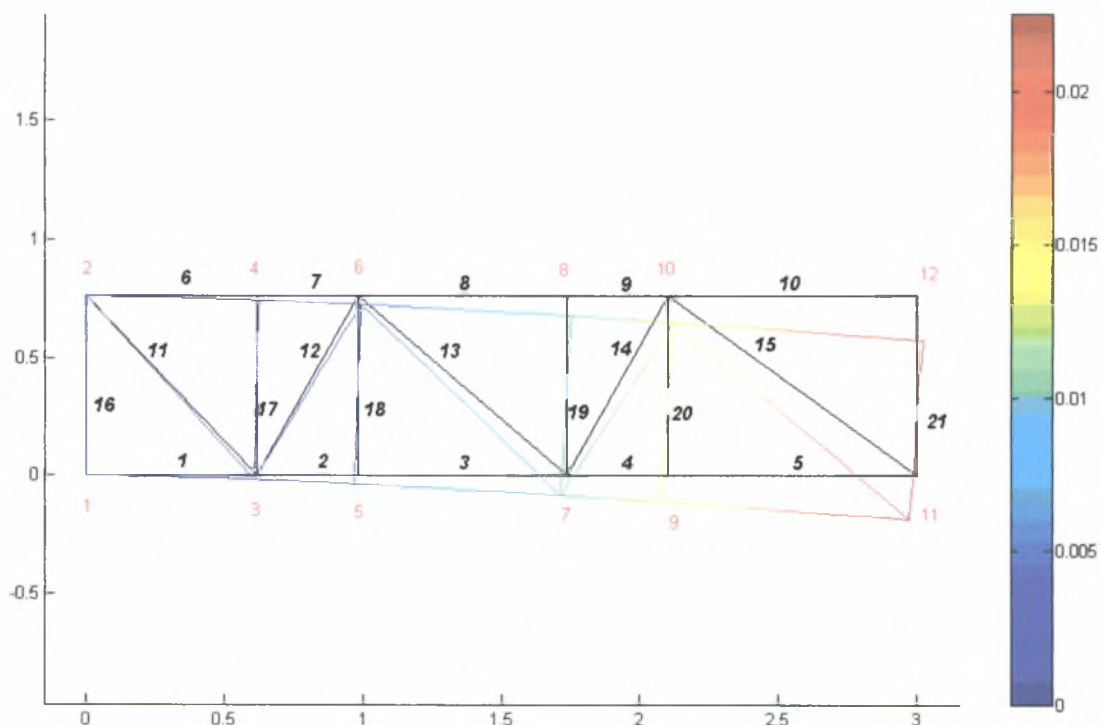
Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.23, ενώ στον Πίνακα 5.24 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

Πίνακας 5.23: Βέλτιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1393	0.09850
2	0.1008	0.07126
3	0.0019	0.00132
4	0.7601	$y = 0.7601 m$
5	1.0298	$x_3 = 0.6179 m$
6	0.8185	$x_5 = 0.9822 m$
7	0.9640	$x_7 = 1.7352 m$
8	0.8750	$x_9 = 2.1000 m$
$J (kg)$	7.4349	

Πίνακας 5.24: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=21)

<i>Ράβδοι</i>	<i>Αξονική Τάση σ (Pa×10⁸)</i>	<i>Αξονικό Φορτίο p (N×10⁴)</i>	<i>Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N×10⁴)</i>	<i>Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$</i>	<i>Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$</i>
1	-4.0000	-3.9400	3.940	200.00	0.000
2	-2.6932	-2.6528	11.334	167.33	76.59
3	-2.6932	-2.6528	2.653	167.33	0.000
4	-1.2008	-1.1828	11.300	130.02	89.53
5	-1.2008	-1.1828	1.857	130.02	36.30
6	3.1812	3.1335	3.940	20.47	179.53
7	3.1812	3.1335	11.334	20.47	127.64
8	1.6888	1.6635	2.653	57.78	162.70
9	1.6888	1.6635	11.300	57.78	114.72
10	0.0000	0.0000	1.857	100.00	100.00
11	1.7942	1.2785	0.821	55.14	255.82
12	-1.5551	-1.1082	1.108	138.87	0.000
13	1.9721	1.4054	0.688	50.69	304.34
14	-1.5542	-1.1076	1.108	138.85	0.000
15	2.1723	1.5480	0.567	45.69	372.86
16	0	0	0.00046	100.00	100.00
17	0.1394	0.001833	0.00046	96.51	495.10
18	0.0534	0.000702	0.00046	98.66	251.29
19	-0.0137	-0.000179	0.00046	100.34	61.29
20	-0.0353	-0.000464	0.00046	100.88	0.000
21	0.0529	0.000695	0.00046	98.67	249.77



Σχήμα 5.16: Διάγραμμα μετατόπισης N=21

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.24 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 1^η, 3^η, 12^η, 14^η και την 20^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k) και οπότε μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος συγκλίνει. Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση που ασκείται στην 1^η ράβδο είναι ίση με την αρνητική τιμή του ορίου διαρροής ($-\sigma_y$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή της διατομής των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου και του ορίου διαρροής.

Επίσης παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με το Μοντέλο 1, οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων διαφέρουν πολύ από τις αντίστοιχες θέσεις των κόμβων του δικτύματος των 21 ράβδων της πρώτης μεθόδου.

6. Δικτύωμα 25 ράβδων (N=25)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.25, ενώ στον Πίνακα 5.26 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

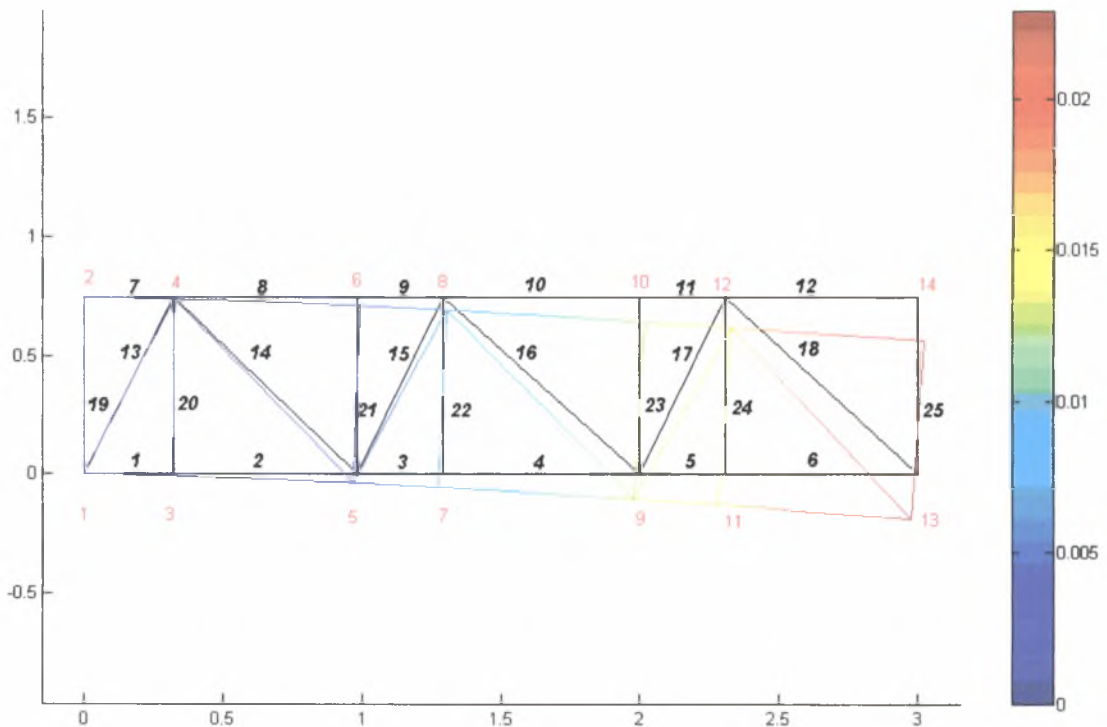
Πίνακας 5.25: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1418	0.1002
2	0.0951	0.0672
3	0.0087	0.0062
4	0.7461	$y = 0.7461 m$
5	0.6461	$x_3 = 0.3231 m$
6	0.9820	$x_5 = 0.9820 m$
7	0.8600	$x_7 = 1.2900 m$
8	0.9999	$x_9 = 1.9998 m$
9	0.9228	$x_{11} = 2.3070 m$
$J(kg)$	7.8599	

Πίνακας 5.26: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=25)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right) \cdot 10^3$
1	-3.5789	-3.5872	14.925	189.47	75.96
2	-3.5789	-3.5871	3.587	189.47	0.000
3	-2.2852	-2.2905	16.413	157.13	86.04
4	-2.2852	-2.2905	3.092	157.13	25.91
5	-0.9262	-0.9283	16.498	123.15	94.37

6	-0.9261	-0.9283	03.243	123.15	71.37
7	4.0000	4.0092	14.925	0.000	126.86
8	2.6962	2.7024	3.587	32.59	175.33
9	2.6962	2.7024	16.413	32.59	116.46
10	1.3366	1.3397	3.092	66.58	143.33
11	1.3366	1.3397	16.498	66.58	108.12
12	0.0000	0.0000	3.243	99.99	100.00
13	-1.5764	-1.0597	1.060	139.41	0.000
14	1.9868	1.3355	0.707	50.32	288.91
15	-1.5993	-1.0751	1.075	139.98	0.000
16	2.0515	1.3790	0.661	48.71	308.76
17	-1.6005	-1.0759	1.076	140.01	0.000
18	2.0284	1.3634	0.676	49.29	301.83
19	0	0	0.011	100.00	100.00
20	-0.1714	-0.010549	0.011	104.28	0.000
21	-0.0684	-0.004210	0.011	101.71	60.08
22	-0.0461	-0.002840	0.011	101.15	73.07
23	-0.0376	-0.002316	0.011	100.94	78.03
24	-0.0383	-0.002357	0.011	100.95	77.64
25	0.0111	0.000685	0.011	99.72	106.50



Σχήμα 5.17: Διάγραμμα μετατόπισης $N=25$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.26 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 2^η, 13^η, 15^η, 17^η και στην 20^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση στην 7^η ράβδο είναι ίση με το όριο διαρροής (σ_y). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή της διατομής των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Επίσης, βλέπουμε ότι γίνεται βέλτιστη επιλογή της διατομής των κάθετων ράβδων, οπότε μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης συγκλίνει.

Τέλος, παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με το Μοντέλο 1, οι βέλτιστες θέσεις των ενδιάμεσων κόμβων διαφέρουν πολύ από τις αντίστοιχες θέσεις των κόμβων του δικτύματος των 21 ράβδων της πρώτης μεθόδου.

7. Δικτύωμα 29 ράβδων (N=29)

Οι βέλτιστες τιμές των διατομών και η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης κόστους παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.27, ενώ στον Πίνακα 5.28 παρουσιάζεται η καταπόνηση του βέλτιστου δικτύωματος.

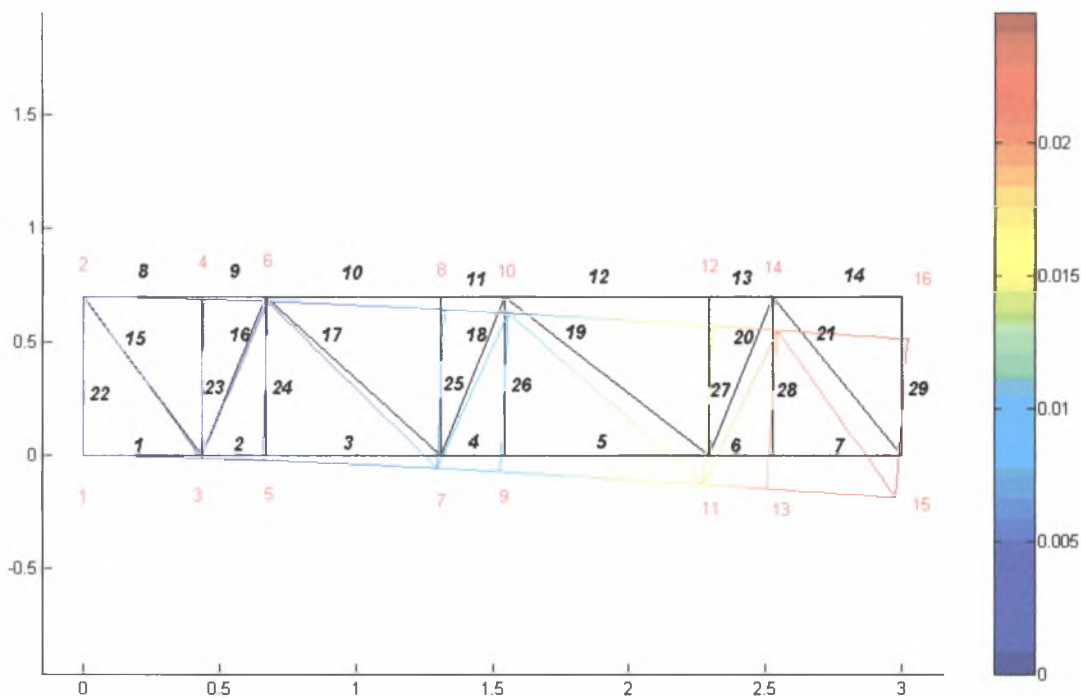
Πίνακας 5.27: Βέλιστα χαρακτηριστικά δικτύωματος

Ομάδα	$\hat{\theta}_i$	$\hat{A}_i = A_o \cdot \hat{\theta}_i (\times 10^{-3} m^2)$
1	0.1513	0.1070
2	0.0854	0.0604
3	0.0061	0.0043
4	0.6992	$y = 0.6992 m$
5	1.0234	$x_3 = 0.4386 m$
6	0.7800	$x_5 = 0.6686 m$
7	1.0197	$x_7 = 1.3110 m$
8	0.9000	$x_9 = 1.5429 m$
9	1.0700	$x_{11} = 2.2929 m$
10	0.9820	$x_{13} = 2.5251 m$
$J(kg)$	8.0039	

Πίνακας 5.28: Καταπόνηση βέλτιστου δικτύωματος(N=29)

Ράβδοι	Αξονική Τάση σ (Pa $\times 10^8$)	Αξονικό Φορτίο p (N $\times 10^4$)	Κρίσιμο Φορτίου Λυγισμού p_k (N $\times 10^4$)	Ποσοστιαία Διαφορά $\left \frac{\sigma - \sigma_y}{\sigma_y} \right \times 100\%$	Ποσοστιαία Διαφορά $\left(\left \frac{-p - p_k}{p_k} \right \times 100\% \right)$
1	-4.0000	-4.2789	9.221	200.00	53.59
2	-3.1155	-3.3327	33.536	177.88	90.06
3	-3.1155	-3.3327	4.298	177.88	22.46
4	-1.9469	-2.0826	33.018	148.67	93.69

5	-1.9469	-2.0826	3.154	148.67	33.96
6	-0.6354	-0.6797	32.886	115.88	97.93
7	-0.6354	-0.6797	7.867	115.88	91.35
8	3.4227	3.6614	9.221	14.43	139.70
9	3.4227	3.6614	33.536	14.43	110.91
10	2.2555	2.4128	4.298	43.61	156.13
11	2.2555	2.4127	33.018	43.61	107.30
12	0.9445	1.0103	3.154	76.38	132.03
13	0.9444	1.0103	32.886	76.38	103.07
14	0.0000	0.0000	7.867	99.99	100.00
15	1.9228	1.1611	0.830	51.93	239.93
16	-1.7278	-1.0433	1.043	143.19	0.000
17	2.2504	1.3589	0.627	43.74	316.7
18	-1.7251	-1.0417	1.042	143.12	0.000
19	2.4271	1.4656	0.538	39.32	372.60
20	-1.7244	-1.0413	1.041	143.11	0.000
21	2.0008	1.2081	0.791	49.98	252.69
22	0	0	0.006	100.00	100.00
23	0.0111	0.000481	0.006	99.72	108.10
24	-0.0834	-0.003609	0.006	102.08	39.28
25	-0.1373	-0.005944	0.006	103.43	0.000
26	-0.1327	-0.005746	0.006	103.31	3.337
27	-0.1373	-0.005944	0.006	103.43	0.000
28	-0.1267	-0.005484	0.006	103.16	7.743
29	0.0121	0.000525	0.006	99.69	108.83



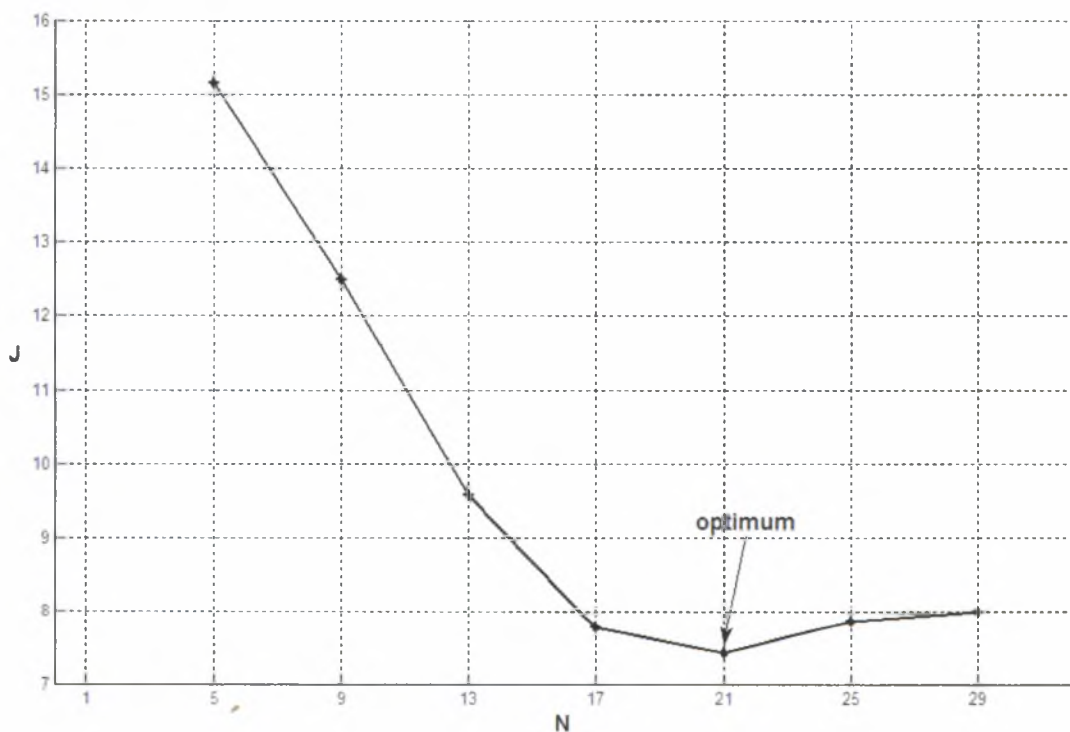
Σχήμα 5.18: Διάγραμμα μετατόπισης $N=29$

Παρατηρούμε ότι η μεγαλύτερη τιμή διατομής είναι αυτή των οριζόντιων ράβδων, ενώ από τον Πίνακα 5.28 βλέπουμε ότι το αξονικό φορτίο το οποίο ασκείται στην 16^η, 18^η, 20^η, 25^η και στην 27^η ράβδο είναι ίσο με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού (p_k). Επίσης παρατηρούμε ότι η αξονική τάση που ασκείται στην 1^η ράβδο είναι ίση με την αρνητική τιμή του ορίου διαρροής ($-\sigma_y$). Επομένως, η βέλτιστη επιλογή της διατομής των διαγώνιων και κάθετων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού, ενώ η βέλτιστη επιλογή των οριζόντιων ράβδων βασίζεται στην ασφάλεια λόγω υπέρβασης του ορίου διαρροής.

Επιπλέον παρατηρούμε ότι η μορφολογία του συγκεκριμένου δικτύωματος μοιάζει πολύ με τη μορφολογία του προηγούμενου. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και για αυτή την περίπτωση γίνεται βέλτιστη επιλογή της διατομής των κάθετων ράβδων, οπότε μπορούμε να πούμε ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης συγκλίνει.

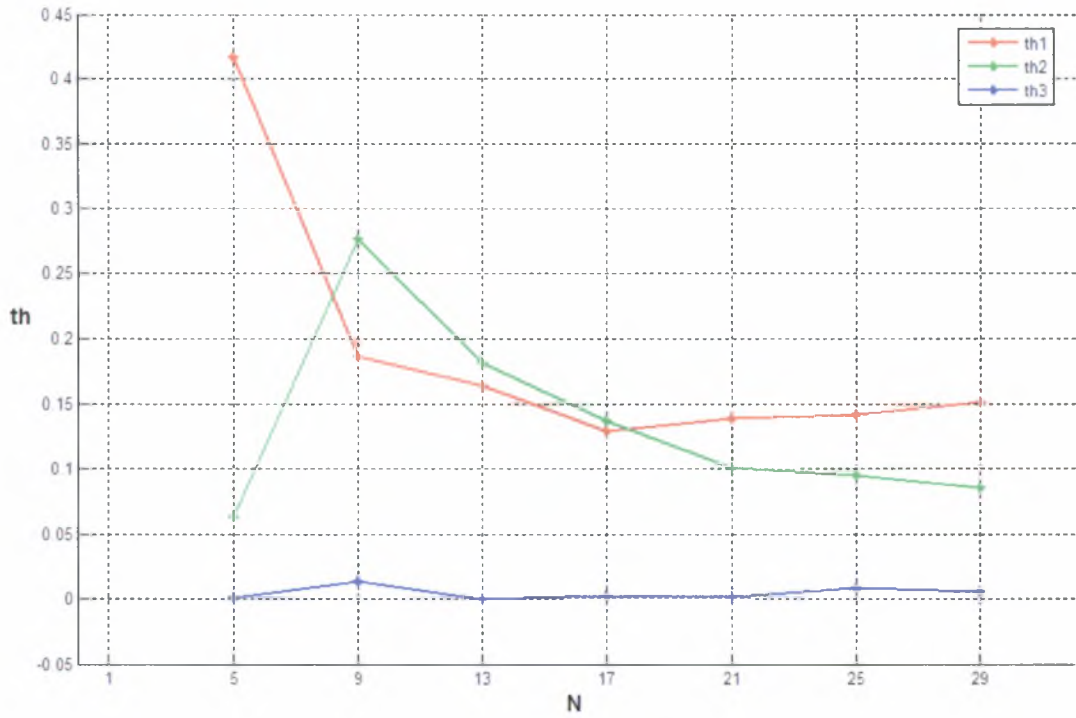
Βέλτιστος αριθμός ράβδων (N)

Εδώ, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, διακρίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $J\left(\hat{\theta}\right)$ με τον αριθμό των ράβδων N (Σχήμα 5.19), ότι σε αντίθεση με τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το Μοντέλο 1, ο βέλτιστος αριθμός ράβδων είναι $N = 21$ αφού εκεί η συνάρτηση $J\left(\hat{\theta}\right)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή, καθώς για μεγαλύτερα N η τιμή της $J\left(\hat{\theta}\right)$ μεγαλώνει. Επίσης παρακάτω παρουσιάζονται οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων $\theta_i, i = 1,2,3,4$ συναρτήσει του N (Σχήμα 5.20 – 5.21 –5.22).

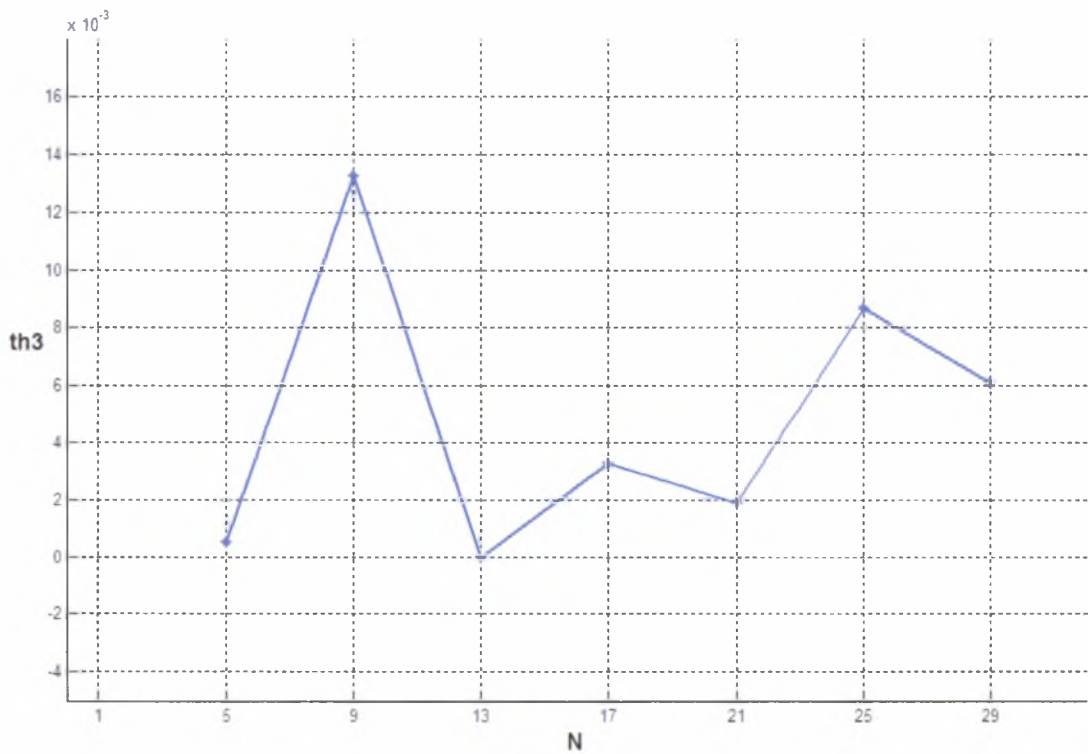


Σχήμα 5.19: Συνάρτηση κόστους (J) συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

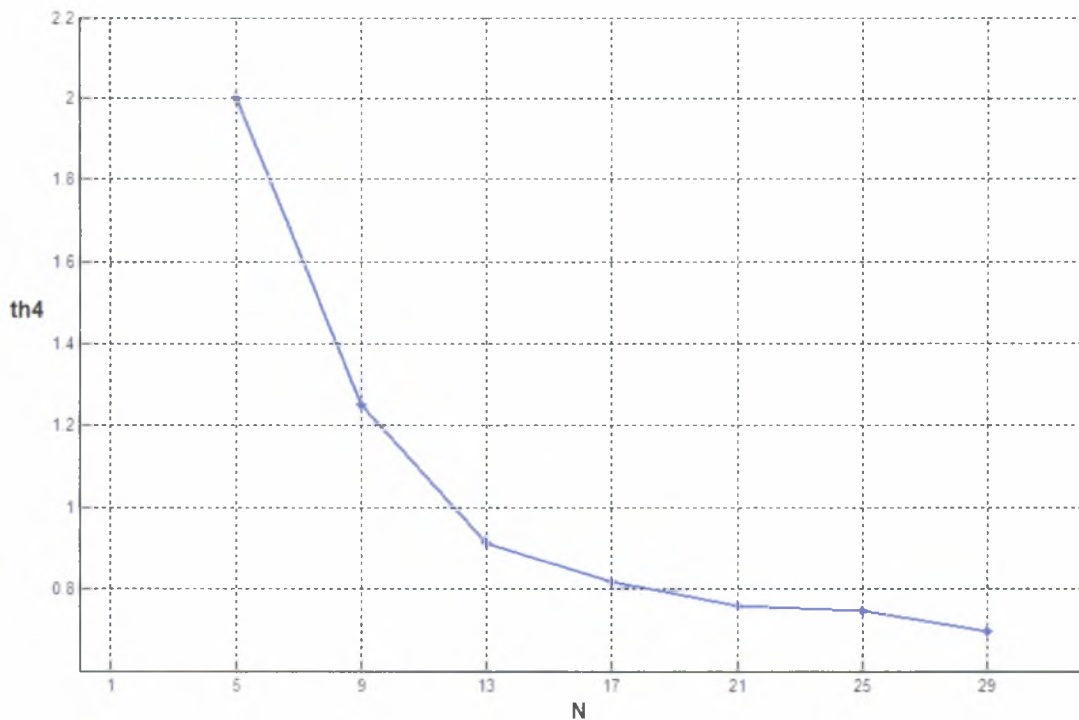
Σημαντικό είναι να σημειωθεί ότι στη συγκεκριμένη μελέτη που γίνεται, δεν λαμβάνεται υπόψη το κόστος των συνδέσεων ανά ράβδο κάτι που αν εισαγόταν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν κριτήριο, θα μείωνε τον αριθμό των ράβδων για κάθε βελτιστοποιημένο δίκτυο.



Σχήμα 5.20: Βέλτιστες τιμές θ_i συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)



Σχήμα 5.21: Βελτιστοποιημένη τιμή θ_3 συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)



Σχήμα 5.22: Βελτιστοποιημένη τιμή θ_4 συναρτήσει των αριθμών ράβδων (N)

Παρατηρούμε μείωση της μεταβλητής θ_1 μέχρι $N=17$, ενώ για $N > 17$ παρατηρούμε αύξηση. Η μεταβλητή θ_2 λαμβάνει μικρή τιμή για $N=5$, αυξάνει για $N=9$, ενώ για περαιτέρω αύξηση του αριθμού των ράβδων βλέπουμε να μειώνεται. Τέλος από το Σχήμα 5.21 διαπιστώνουμε ότι η μεταβλητή θ_3 αυξομειώνεται καθώς το N αυξάνεται σε τιμές όμως πολύ μικρότερες σε σχέση με τις υπόλοιπες 2 μεταβλητές θ_1 και θ_2 κάτι που όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα οφείλεται στο ότι .

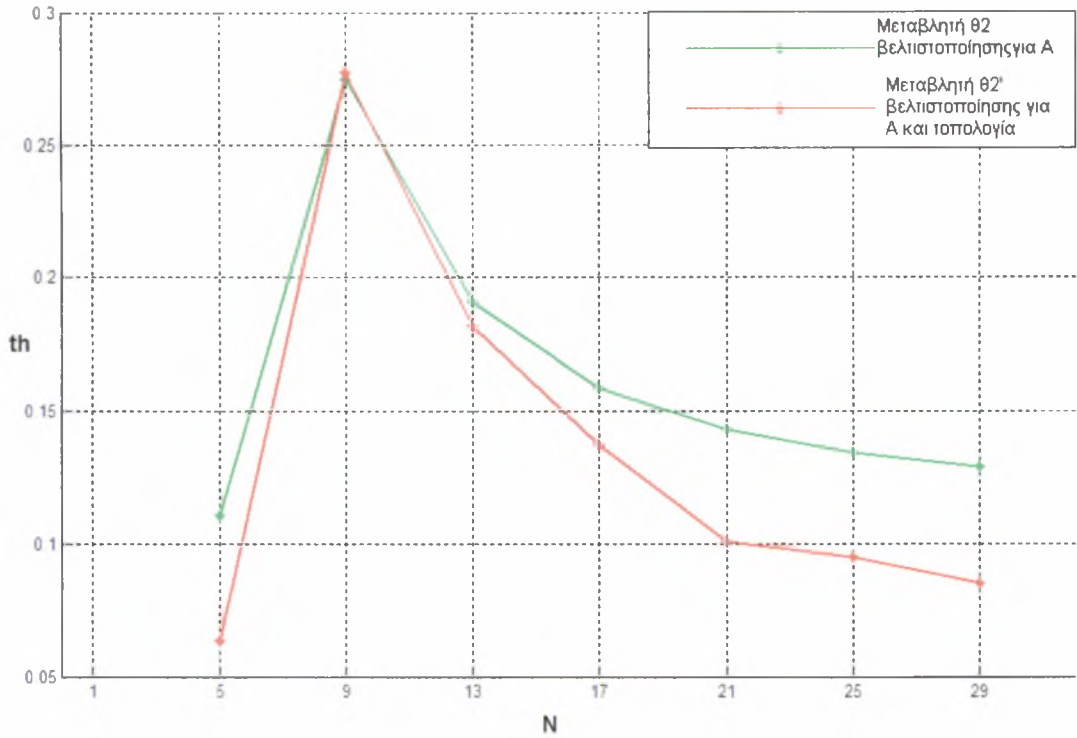
Επιπλέον, παρατηρούμε (όπως και στην ενότητα 5.2) ότι στη ράβδο η οποία είναι πακτωμένη και στα δύο άκρα της, για κάθε περίπτωση δικτύωματος αναπτύσσονται μηδενικές τάσεις και οπότε δεν είναι απαραίτητη για την κατασκευή του εκάστοτε δικτύωματος.

Επίσης από το Σχήμα 5.22 βλέπουμε ότι η συμπεριφορά της συντεταγμένης y των πάνω οριζόντιων ράβδων του τύπου του δικτύωματος που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο (Μοντέλο2), είναι η ίδια με αυτή του 1^{ου} Μοντέλου. Πρέπει να σημειωθεί ότι για την περίπτωση του δικτύωματος των 5 ράβδων ($N=5$), έχουμε ορίσει το

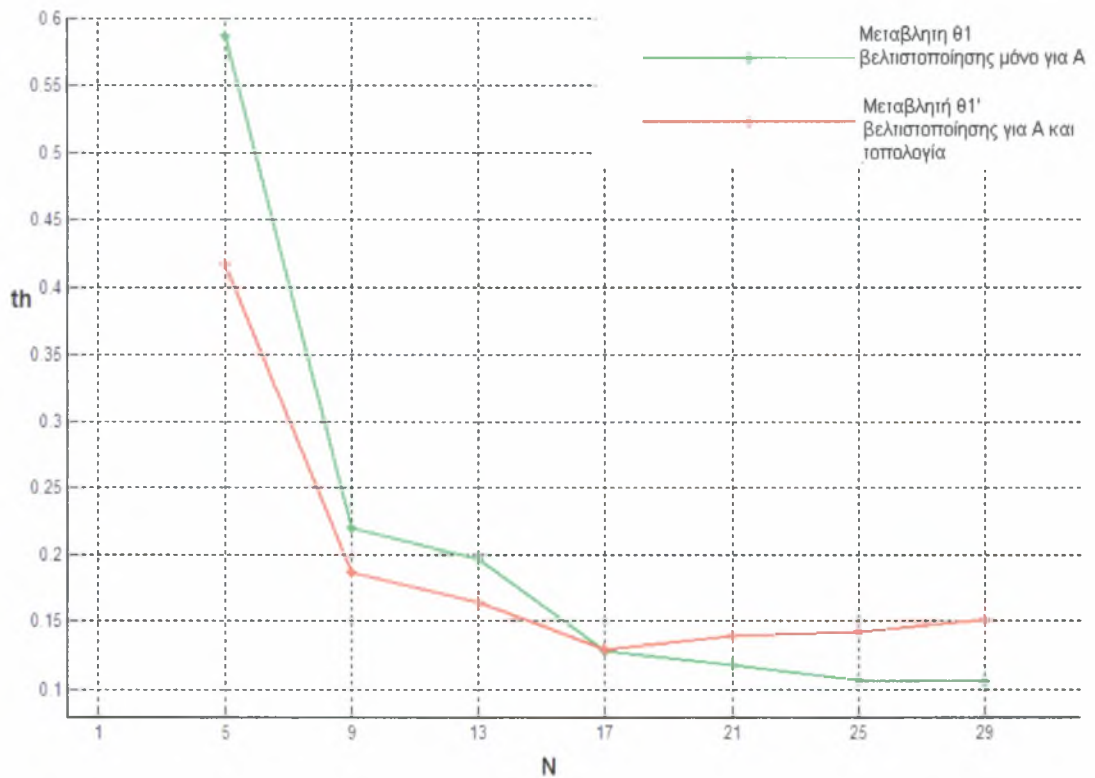
ανώτατο όριο της y -συντεταγμένης να είναι τα $2m$. Οπότε, όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 5.22 η βέλτιστη τιμή της y -συντεταγμένης είναι το ανώτατο όριο. Δηλαδή, εδώ βλέπουμε την περίπτωση του βέλτιστου σημείου «ορίων» (boundary optima) που παρουσιάσαμε στην ενότητα 2.1.

Η συμπεριφορά των μεταβλητών $\theta_i, i=1,2,3$ για τη μέθοδο βελτιστοποίησης συγχρόνως ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων και τη τοπολογία των κόμβων, είναι ποιοτικά σχεδόν η ίδια με αυτή των αντίστοιχων μεταβλητών της πρώτης μεθόδου βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε από το Σχήμα 5.20 ότι με τη δεύτερη μέθοδο βελτιστοποίησης οι βέλτιστες τιμές της μεταβλητής θ_2 που προκύπτουν, είναι μικρότερες από τις τιμές που προκύπτουν με την πρώτη μέθοδο. Δηλαδή τα εμβαδά των διαγώνιων ράβδων με τη δεύτερη μέθοδο έχουν μικρότερες τιμές σε σχέση με αυτά που προκύπτουν από την πρώτη. Επίσης, διαφορά παρατηρείτε στη μεταβλητή θ_1 (ή καλύτερα στην τιμή της διατομής των οριζόντιων ράβδων), η τιμή της οποίας για $N > 17$ αυξάνει, σε αντίθεση με την πρώτη μέθοδο στην οποία μειωνόταν καθώς ο αριθμός των ράβδων αυξανόταν (Σχήμα 5.20).

Όσον αναφορά την τοπολογία των κόμβων που προκύπτει μετά την βελτιστοποίηση κάθε περίπτωσης δικτύωματος, παρατηρούμε ότι για δικτύωματα του τύπου που εξετάζεται σε αυτό το κεφάλαιο (Μοντέλο 2), το ύψος H (y -συντεταγμένη) βελτιστοποιείται ανάλογα με το πλάτος του 1^{ου} Μοντέλου που είδαμε στο Κεφάλαιο 4. Τέλος, παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με το Μοντέλο 1 καθώς ο αριθμός των ράβδων αυξάνεται, οι βέλτιστες τιμές των x -συντεταγμένων των κάθετων εσωτερικών ράβδων διαφέρουν κατά πολύ από τις αρχικές εκτιμήσεις. Ειδικότερα βλέπουμε ότι ουσιαστικά επιλέγεται η μείωση του μήκους των διαγώνιων ράβδων οι οποίες παραλαμβάνουν θλιπτικά φορτία. Με αυτό τον τρόπο αυξάνεται η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού και έτσι δίνεται δυνατότητα μείωσης της τιμής της διατομής των διαγώνιων ράβδων και επομένως μείωσης του βάρους της κατασκευής..



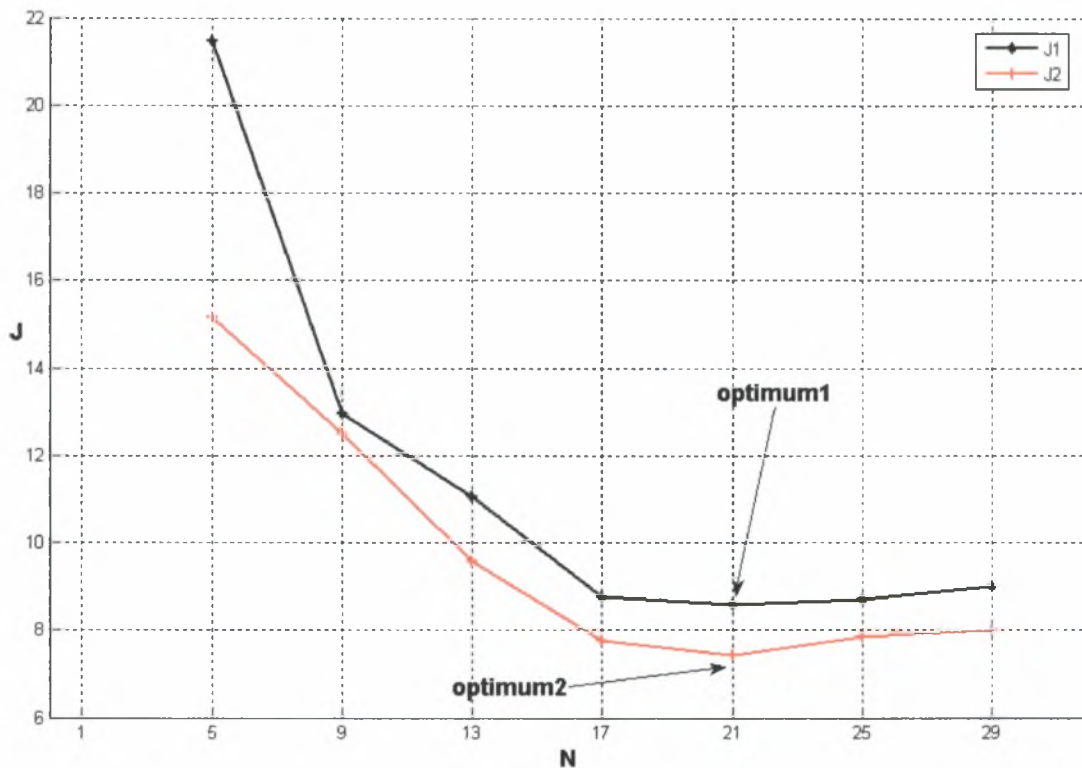
Σχήμα 5.23: Σύγκριση των τιμών της μεταβλητής θ_2 για τις δύο μεθόδους



Σχήμα 5.24: Σύγκριση των τιμών της μεταβλητής θ_1 για τις δύο μεθόδους

5.4 Σύγκριση μεθόδων βελτιστοποίησης για το 2^ο μοντέλο

Στην ενότητα αυτή συγκρίνονται οι δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν παραπάνω με τον ίδιο τρόπο που παρουσιάστηκε στην ενότητα 4.6.



Σχήμα 5.25: Σύγκριση συναρτήσεων κόστους

Από το Σχήμα 5.25 παρατηρούμε ότι η συνάρτηση κόστους J η οποία προκύπτει από τη μέθοδο βελτιστοποίησης συγχρόνως των τιμών των διατομών και της τοπολογίας των κόμβων είναι για κάθε N μικρότερη της συνάρτησης κόστους η οποία προκύπτει από την άλλη μέθοδο. Σε αντίθεση με το Μοντέλο 1, εδώ βλέπουμε ότι ο βέλτιστος αριθμός ράβδων για βελτιστοποίηση συγχρόνως των τιμών των διατομών και της τοπολογίας των κόμβων είναι $N = 21$.

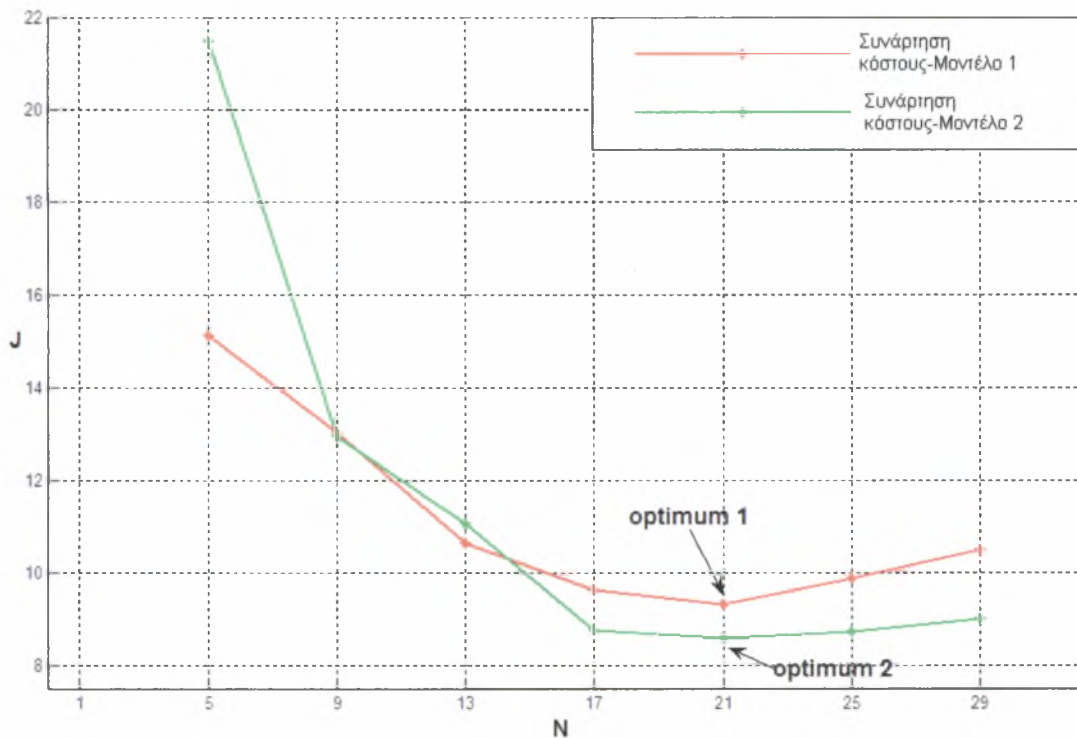
Επίσης παρατηρούμε ότι οι x -συντεταγμένες των κάθετων εσωτερικών ράβδων του μοντέλου που εξετάζεται στο συγκεκριμένο κεφάλαιο διαφέρουν σημαντικά από τις αρχικές εκτιμήσεις, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες συντεταγμένες για το 1^ο Μοντέλο. Συνοπτικά τα παραπάνω παρατίθενται στον Πίνακα 5.29.

Πίνακας 5.29: Σύγκριση βέλτιστων χαρακτηριστικών με αρχικές εκτιμήσεις

Μεταβλητές	<i>N = 21</i> Πρώτη μέθοδος Βέλτιστο δικτύωμα	<i>N = 21</i> Πρώτη μέθοδος Αρχικό δικτύωμα	<i>N = 21</i> Δεύτερη μέθοδος Βέλτιστο δικτύωμα	<i>N = 21</i> Δεύτερη μέθοδος Αρχικό δικτύωμα
A_1	$0.0836 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o	$0.09850 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o
A_2	$0.1011 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o	$0.07126 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o
A_3	$0.0003 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o	$0.00132 \times 10^{-3} \text{ m}^2$	A_o
y			0.7601 m	1 m
x_3			0.6179 m	0.6 m
x_5			0.9822 m	1.2 m
x_7			1.7352 m	1.8 m
x_9			2.1000 m	2.4 m

5.5 Σύγκριση Μοντέλων 1 και 2 για την 1^η μέθοδο βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή συγκρίνονται τα δύο μοντέλα τα οποία βελτιστοποιήθηκαν με την πρώτη μέθοδο βελτιστοποίησης. Ουσιαστικά συγκρίνονται οι συναρτήσεις κόστους για κάθε περίπτωση δικτύωματος. Έτσι το καλύτερο μοντέλο είναι αυτό που δίνει τη μικρότερη τιμή της συνάρτησης κόστους για συγκεκριμένο αριθμό ράβδων ή καλύτερα το ελάχιστο βάρος.

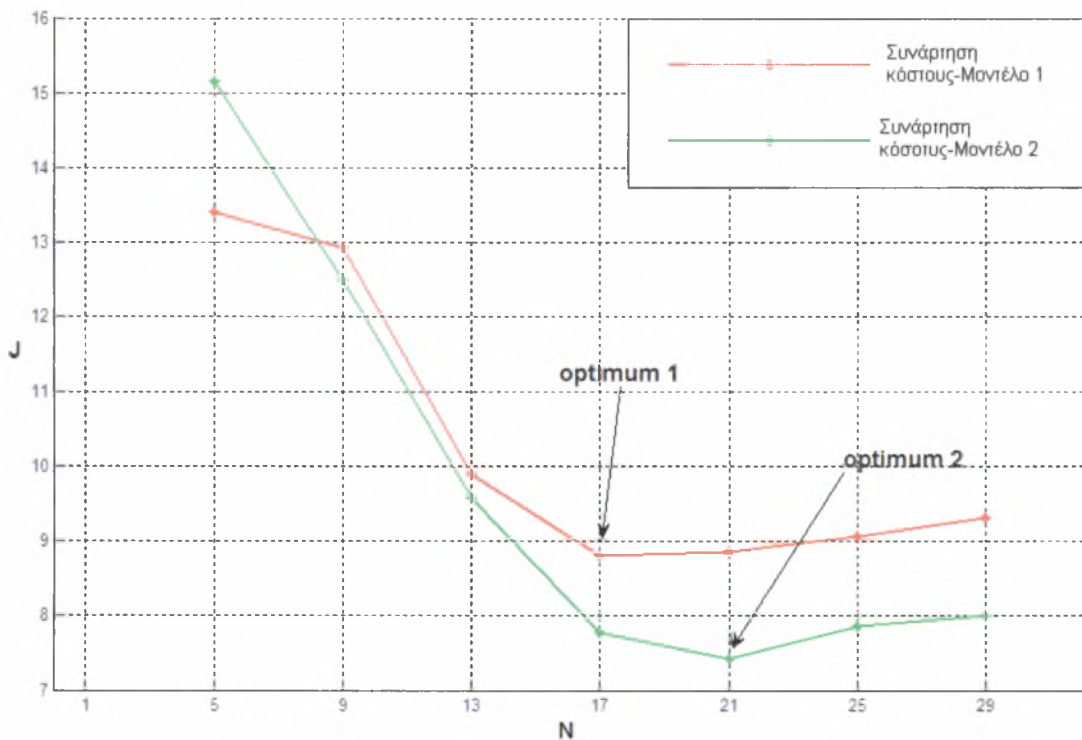


Σχήμα 5.26: Σύγκριση συναρτήσεων κόστους Μοντέλων 1 και 2

Από το Σχήμα 5.26 παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους του 2^{ου} Μοντέλου μετά τη βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών για διαφορετικό αριθμό ράβδων κάθε φορά, είναι μικρότερη από την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους του 1^{ου} Μοντέλου. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση κόστους του 2^{ου} Μοντέλου δεν είναι για όλα τα N μικρότερη από αυτή του 1^{ου} Μοντέλου. Ειδικότερα για $N < 17$ το οικονομικότερο μοντέλο είναι το 1^ο ενώ για $N > 17$ το 2^ο. Επίσης πρέπει να παρατηρηθεί πως η βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών και των δύο μοντέλων, δίνει ως βέλτιστο αριθμό ράβδων τον ίδιο αριθμό ράβδων.

5.6 Σύγκριση μοντέλων 1 και 2 για την 2^η μέθοδο βελτιστοποίησης

Στην ενότητα αυτή συγκρίνονται τα δύο μοντέλα τα οποία βελτιστοποιήθηκαν με την δεύτερη μέθοδο βελτιστοποίησης όπως παρουσιάστηκε και στην προηγούμενη ενότητα.



Σχήμα 5.27: Σύγκριση συναρτήσεων κόστους Μοντέλων 1 και 2

Από το Σχήμα 5.27 παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους του 2^{ου} Μοντέλου μετά τη βελτιστοποίηση ως προς τις τιμές των διατομών για διαφορετικό αριθμό ράβδων κάθε φορά, είναι μικρότερη από την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης κόστους του 1^{ου} Μοντέλου. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση κόστους του 1^{ου} Μοντέλου για $N = 5$ είναι μικρότερη από αυτή του 2^{ου} Μοντέλου.

5.7 Σχόλια – Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό όπως και στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκαν δύο μέθοδοι βελτιστοποίησης για ένα συγκεκριμένο τύπο δικτύωματος (Μοντέλο2) κάτω από συγκεκριμένη φόρτιση. Και εδώ, είδαμε ότι η δεύτερη μέθοδος βελτιστοποίησης δίνει οικονομικότερες λύσεις με γενικότερο συμπέρασμα ότι η βελτιστοποίηση με περισσότερες μεταβλητές δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Επίσης παρατηρήσαμε ότι λόγω της μεγάλης διαφοράς των βέλτιστων τιμών της μεταβλητής θ_3 από τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών θ_1 και θ_2 , ο αλγόριθμος της βελτιστοποίησης παρουσίασε προβλήματα σύγκλισης κάτι όμως που δεν επηρέασε σημαντικά τις βέλτιστες τιμές της συνάρτησης κόστους, αφού οι βέλτιστες τιμές των διατομών των κάθετων ράβδων ήταν πολύ κοντά στο μηδέν.

Επιπλέον παρατηρήσαμε ότι για τη συγκεκριμένη φόρτιση που εξετάζουμε και λόγω της μορφολογίας του 2^{ου} Μοντέλου, τα φορτία τα οποία ασκούνται διαφέρουν από ράβδο σε ράβδο. Αντίθετα, στο 1^ο Μοντέλο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι π.χ. όλες οι διαγώνιες ράβδοι παραλαμβάνουν θλιπτικά φορτία, ενώ όλες οι κάθετες ράβδοι εφελκυστικά. Ουσιαστικά η μορφολογία του 2^{ου} Μοντέλου δίνει στο σύστημα επιπλέον ελευθερία έτσι ώστε να βρει οικονομικότερες λύσεις.

Αυτό μάλιστα φάνηκε ξεκάθαρα στη δεύτερη μέθοδο, όπου είδαμε ότι για το δίκτυωμα με το μικρότερο βάρος ($N = 21$), οι βέλτιστες τιμές των χαρακτηριστικών της κατασκευής διαφέρουν κατά πολύ από τις αρχικές εκτιμήσεις. Γενικότερα, είδαμε ότι το 2^ο Μοντέλο είναι καλύτερο του 1^{ου} από άποψη κόστους και για τις δύο μεθόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΝΟΨΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάστηκε μια μέθοδος βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών και εφαρμόστηκε σε δικτυώματα. Η μέθοδος βασίζεται στην επιλογή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατασκευής με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους της, έχοντας σαν περιορισμό την διατήρηση της ασφάλειας της κατασκευής.

Στην περίπτωση που εξετάστηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, στόχος ήταν ουσιαστικά η ελαχιστοποίηση του βάρους κάθε δικτυώματος. Το βάρος επιλέχθηκε ως ο κυριότερος παράγοντας κόστους, ενώ τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία επιλέχθηκαν να βελτιστοποιηθούν ήταν οι τιμές των διατομών των ράβδων και η τοπολογία των κόμβων. Ως περιορισμοί ασφάλειας ορίστηκαν οι μέγιστες εφελκυστικές ή θλιπτικές τάσεις που αναπτύσσονται σε κάθε ράβδο να μην ξεπερνούν το όριο διαρροής του υλικού και τα μέγιστα θλιπτικά φορτία να μην ξεπερνούν τα κρίσιμα φορτία λυγισμού.

Κατά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης παρουσιάστηκαν προβλήματα που αφορούν την εμφάνιση πολλαπλών τοπικών / ολικών ελαχίστων. Η αποτελεσματικότερη επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης και η εύρεση του ολικού ελαχίστου επιτεύχθηκε με τη χρήση Εξελικτικών Αλγορίθμων (Evolutionary Strategies –ES). Οι αλγόριθμοι αυτοί ψάχνουν τυχαία σε όλο το χώρο των παραμέτρων για να βρουν το ολικό ελάχιστο, αποφεύγοντας την σύγκλιση σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Ένα μειονέκτημα τους είναι ότι συγκλίνουν αργά, καθώς δε κάνουν χρήση της πληροφορίας της παραγωγού

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, χρησιμοποιήθηκε υβριδικός αλγόριθμος που αξιοποιεί τα πλεονεκτήματα τόσο των Εξελικτικών Αλγορίθμων όσο και των αλγορίθμων που κάνουν χρήση της πληροφορίας της παραγωγού. Ειδικότερα, αρχικά χρησιμοποιήθηκε ένας Εξελικτικός Αλγόριθμος που διερευνά τον χώρο των παραμέτρων και ψάχνει να βρει μια περιοχή πολύ κοντά στο ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος που κάνει χρήση της πληροφορίας της

παραγώγου, με αρχική εκτίμηση την καλύτερη εκτίμηση που λαμβάνεται από τους εξελικτικούς αλγορίθμους και χρησιμοποιώντας την πληροφορία της παραγώγου επιταχύνεται η σύγκλιση στο ολικό βέλτιστο.

Τα συμπεράσματα τα οποία προέκυψαν είναι καταρχάς ότι όταν εισάγουμε στο σύστημα πολλές μεταβλητές οι οποίες βελτιστοποιούνται, τότε παίρνουμε οικονομικότερες κατασκευές αφού δίνουμε στο σύστημα περισσότερους βαθμούς ελευθερίας κάτι που του δίνει μεγαλύτερη ελευθερία έτσι ώστε να βρει μια καλύτερη και οικονομικότερη λύση. Βέβαια η αύξηση των μεταβλητών οδηγεί σε μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Συγκεκριμένα για την περίπτωση των δικτυωμάτων, είδαμε ότι με τη μέθοδο βελτιστοποίησης συγχρόνως ως προς τις τιμές των διατομών των ράβδων και τη τοπολογία των κόμβων, προκύπτουν οικονομικότερα δικτύωματα και για τα 2 μοντέλα που μελετήθηκαν .

Επίσης παρατηρήσαμε ότι η μορφολογία της αρχικής κατασκευής επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα, κάτι που φάνηκε από τη σύγκριση των δύο μοντέλων που μελετήθηκαν. Είδαμε δηλαδή ότι επιλέγοντας την κατασκευή δικτύωματος του τύπου του 2^{ου} Μοντέλου, για τη περίπτωση της μεταφοράς φορτίου σε απόσταση $3m$ από σταθερό σημείο (Σχήμα 3.1), το βέλτιστο δίκτυωμα το οποίο προκύπτει μετά τη βελτιστοποίηση των χαρακτηριστικών του (με τη μία ή την άλλη μέθοδο), έχει μικρότερο βάρος από το αντίστοιχο βέλτιστο δίκτυωμα του τύπου του 1^{ου} Μοντέλου. Ειδικότερα, είδαμε ότι για τη συγκεκριμένη φόρτιση που εξετάσαμε και λόγω της μορφολογίας του 2^{ου} Μοντέλου, τα φορτία τα οποία ασκούνται σε αυτό διαφέρουν από ράβδο σε ράβδο. Αντίθετα, στο 1^ο Μοντέλο παρατηρήσαμε ότι π.χ. όλες οι διαγώνιες ράβδοι παραλαμβάνουν θλιπτικά φορτία, ενώ όλες οι κάθετες ράβδοι εφελκυστικά. Ουσιαστικά η μορφολογία του 2^{ου} Μοντέλου δίνει στο σύστημα επιπλέον ελευθερία έτσι ώστε να βρει οικονομικότερες λύσεις.

Επίσης από τα αποτελέσματα τα οποία πήραμε συμπεραίνουμε ότι το βέλτιστο δίκτυωμα το οποίο πρέπει να χρησιμοποιηθεί δεν είναι κατ' ανάγκη και αυτό με τον μικρότερο αριθμό ράβδων, αλλά αυτό του οποίου τα χαρακτηριστικά έχουν επιλεγεί κατά τρόπο τέτοιο ώστε να προκύπτει η ελαφρύτερη και κατά συνέπεια η οικονομικότερη κατασκευή. Βέβαια, στη συγκεκριμένη μελέτη που έγινε, δεν υπολογίστηκε το κόστος των συνδέσεων ανά ράβδο κάτι που αν εισαγόταν στο πρόβλημα βελτιστοποίησης σαν κριτήριο, θα μείωνε τον αριθμό των ράβδων για κάθε βελτιστοποιημένο δίκτυωμα.

Τέλος, οι προτάσεις για μελλοντική μελέτη είναι καταρχάς η εύρεση τρόπου έτσι ώστε να μειωθεί ο χρόνος επίλυσης του συστήματος, κάτι που θα βοηθήσει στην καλύτερη εποπτεία της μεθόδου. Επίσης στο μέλλον θα μπορούσε η μέθοδος του βέλτιστου σχεδιασμού δικτυωμάτων να επεκταθεί σε τριδιάστατα μοντέλα όπως χωροδικτύωματα, γέφυρες και μεταλλικά κτίρια. Τέλος κάτι που θα μπορούσε να γίνει είναι η συγκεκριμένη μελέτη να επεκταθεί για μοντέλα τα οποία υποβάλλονται σε σύνθετες φορτίσεις (δυναμικά ή στοχαστικά φορτία) και επιπλέον να εξετασθεί η αξιοπιστία της βελτιστοποιημένης κατασκευής εξετάζοντας την πιθανότητα να αστοχήσει.

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Κερμανίδης, “Αντοχή Υλικών”, Singular Publications
- [2] Σ. Νατσιάβας, “Εφαρμοσμένη Δυναμική”, Εκδόσεις Ζήτη 2001
- [3] Σ. Νατσιάβας, “Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων”, Εκδόσεις Ζήτη 2001
- [4] Chapra SC, Canale RP. “Numerical Methods for Engineers”. 3rd edition, McGraw Hill, 1998
- [5] Cheng, G. Guo X, Yamazaki, K. 2001: A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress local buckling constraints. Struct. Multidisc. Optim. 22
- [6] K. J. Bathe, “Finite Element Procedures”, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996
- [7] Panos Y. Papalambros and Douglas J. Wilde, “Principles of Optimal Design, Modeling and Computation”. Second Edition, Cambridge University Press 2000
- [8] Stople, M. Svanberg, K. 2001 : A new approach for stress – constrained truss topology optimization. Struct. Multidisc. Optim
- [9] Thomas Back and Michael Emmerich, “Evolution Strategies for Optimization in Engineering Applications”, Fifth World Congress on Computational Mechanics, July 7-12, 2002, Vienna, Austria
- [10] Y. Ezawa, “An Improvement on the Evolutionary Structural Optimization Method and its Application to Beam and Solid Structures”, Fifth World Congress on Computational Mechanics, July 7-12, 2002, Vienna, Austria



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000089097

