



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία

ΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

υπό

Χοροζίδη Αναστάσιο

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των

απαιτήσεων για την απόκτηση του

Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

2006



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 4835/1
Ημερ. Εισ.: 03-11-2006
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜΒ
2006
ΧΟΡ

© 2006 Χοροζίδης Αναστάσιος

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Πετρόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Παπαδημητρίου, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κκ. Σπύρο Καραμάνο και Γιώργο Πετρόπουλο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ευχαριστώ πολύ το συνεργάτη μου υποψήφιο διδάκτορα Ευάγγελο Ντότσιο για την υπομονή και την προθυμία για βοήθεια που έδειξε σε όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας, καθώς και το διδάκτορα Κωνσταντίνο Χριστοδούλου για τη συνδρομή του στην κατανόηση των προγραμμάτων και διατάξεων του εργαστηρίου. Ευχαριστώ τους φίλους μου Παπαπροκοπίου Δημήτρη, Σοΐλεμεζίδη Κωνσταντίνο, Χρυσάφη Νίκο και Ψωμαδάκη Παναγιώτη για την ηθική υποστήριξή τους. Επίσης, ευχαριστώ την Αγγελική για την κατανόησή της, ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών της προσπάθειάς μου. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Γεώργιο και Αναστασία Χοροζίδου για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στη μνήμη του αγαπημένου μου παππού Ανέστη Χοροζίδη.

**ΜΟΡΦΙΚΗ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ
ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ**

ΧΟΡΟΖΙΔΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2006

Επιβλέπων: Δρ. Παπαδημητρίου Κωνσταντίνος , Καθηγητής Δυναμικής των
Κατασκευών

Περίληψη

Η αναγνώριση των ταλαντωτικών χαρακτηριστικών μιας κατασκευής αφορά τον προσδιορισμό ποσοτήτων όπως οι ιδιοσυχνότητες, οι ιδιομορφές και οι συντελεστές απόσβεσης. Η γνώση των ταλαντωτικών χαρακτηριστικών μιας κατασκευής είναι σημαντική για τον προσδιορισμό της δυναμικής συμπεριφοράς της, την αναθεώρηση και τη δημιουργία αξιόπιστων μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων όπως επίσης και τη διάγνωση βλαβών της κατασκευής.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, λαμβάνει χώρα η αναγνώριση μορφικών χαρακτηριστικών διάφορων δομικών καταστάσεων των μεταλλικών κατασκευών του Εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας. Συγκεκριμένα, το εργαστήριο διαθέτει δύο κατασκευές, μία τριώροφη μεταλλική κατασκευή η δομή της οποίας θα μπορούσε να παρομοιαστεί με μία κτιριακή κατασκευή, και μία μεταλλική κατασκευή που αποτελείται από μία επιμήκη ορθογωνική χαλύβδινη πλάκα που στηρίζεται σε δύο βάσεις από μπετόν, η δομή της οποίας μπορεί να παραλληλιστεί με μία γέφυρα, στην περίπτωση δε που μεταξύ των

άκρων της και των βάσεων παρεμβληθούν ελαστικά εφέδρανα η κατασκευή αποτελεί ένα απλοποιημένο μοντέλο ενός ακίνητου οχήματος που στηρίζεται επάνω στις αναρτήσεις του. Τα αποτελέσματα της μορφικής αναγνώρισης των κατασκευών αυτών χρησιμοποιούνται για την αναθεώρηση μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων, που έχουν κατασκευαστεί κατά τρόπο τέτοιο ώστε να προσομοιώνουν τις εν λόγω κατασκευές. Για τη διεκπεραίωση των παραπάνω διαδικασιών, χρησιμοποιήθηκε η θεωρία στην οποία στηρίζονται οι μέθοδοι μορφικής αναγνώρισης για την περίπτωση ταλάντωσης λόγω κρουστικής διέγερσης, δημιουργήθηκαν τα μοντέλα των πεπερασμένων στοιχείων των κατασκευών και εφαρμόστηκαν μέθοδοι αναθεώρησης μοντέλων που αποσκοπούσαν στην εκλογή του βέλτιστου μοντέλου που προβλέπει με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα τα μετρούμενα μορφικά χαρακτηριστικά.

Η εργασία αποτελείται από πέντε ενότητες, που συνιστούν τρία γενικότερα τμήματα, το θεωρητικό, τις εφαρμογές και την αναθεώρηση μοντέλων πεπερασμένων στοιχείων των κατασκευών. Στο πρώτο τμήμα, το θεωρητικό, που εκτείνεται στις δύο πρώτες ενότητες αναπτύσσεται η θεωρία της μορφικής αναγνώρισης, ορίζεται η συνάρτηση σφάλματος και παρουσιάζονται οι μέθοδοι ελαχιστοποίησης της. Το δεύτερο τμήμα, που αφορά την τρίτη ενότητα της εργασίας, αναφέρεται στον πειραματικό προσδιορισμό των μορφικών χαρακτηριστικών των κατασκευών και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της μορφικής ανάλυσης για διάφορες δομικές καταστάσεις των κατασκευών. Για το σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε κώδικας Matlab που ελέγχει τη διαδικασία των πειραματικών μετρήσεων με σκοπό να λαμβάνονται τα αποτελέσματα απευθείας από το εν λόγω πρόγραμμα και να αυτοματοποιείται έτσι η διαδικασία μορφικής αναγνώρισης. Τέλος στο τρίτο τμήμα, παρουσιάζονται το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής και πραγματοποιείται αναθεώρηση της. Στην πέμπτη ενότητα, συνοψίζονται συμπεράσματα και προτάσεις για επιπλέον μελέτη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 Ιδιομορφικά Μοντέλα Απόκρισης Κατασκευών	- 9 -
1.1 Εισαγωγή	- 9 -
1.2 Πρώτο Μαθηματικό Μοντέλο-Ανάλυση Δυναμικών Συστημάτων με Κλασσικό Μητρώο Απόσβεσης.....	- 9 -
1.3 Δεύτερο Μαθηματικό Μοντέλο-Ανάλυση Δυναμικών Συστημάτων Με Γενικό Μητρώο Απόσβεσης.....	- 14 -
1.4 Ειδική Περίπτωση: Μητρώο Κλασσικής Απόσβεσης.....	- 23 -
1.5 Απόκριση στο Πεδίο των Συχνοτήτων-Μετασχηματισμός Fourier	- 25 -
Κεφάλαιο 2 Μέθοδος Υπολογισμού Μορφικών Παραμέτρων PolyMAX.....	- 27 -
2.1 Εισαγωγή	- 27 -
2.2 Right matrix-function μοντέλο	- 27 -
2.3 Σχηματισμός Συνάρτησης Σφάλματος	- 29 -
2.4 Reduced Normal Equations	- 31 -
2.5 Πρακτική Υλοποίηση	- 33 -
2.6 Σχηματισμός και Ελαχιστοποίηση Συνάρτησης Σφάλματος.....	- 35 -
Κεφάλαιο 3 Εφαρμογές	- 41 -
3.1 Εισαγωγή	- 41 -
3.2 Περιγραφή Μεταλλικών Κατασκευών Εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων ...-	41 -
3.2.1 Περιγραφή Τριώροφης Μεταλλικής Κατασκευής.....	- 41 -
3.2.2 Περιγραφή Κατασκευής Μεταλλικής Γέφυρας.....	- 47 -
3.3 Πειραματικές Διατάξεις και Διαδικασία Μετρήσεων	- 52 -
3.4 Διαδικασία Μορφικής αναγνώρισης	- 55 -
3.5 Περιγραφή Αισθητηρίων Οργάνων των Κατασκευών	- 56 -
3.6 Σφάλματα.....	- 57 -
3.7 Περιγραφή σημείων μέτρησης	- 57 -
3.7.1 Τριώροφη Μεταλλική Κατασκευή	- 57 -
3.7.2 Κατασκευή Μεταλλικής Γέφυρας	- 58 -
3.8 Αποτελέσματα Μορφικής Αναγνώρισης.....	- 59 -
3.8.1 Αποτελέσματα Πειραμάτων για την Τριώροφη Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Ορισμένες Διατάξεις	- 60 -

3.8.2 Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Κάθε Όροφο-Σύγκριση Κλασσικής και Μη-Κλασσικής Απόσβεσης.....	- 67 -
3.8.3 Αποτελέσματα Πειραμάτων για την Κατασκευή της Γέφυρας.....	- 78 -
3.8.4 Κατασκευή με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες, χωρίς τη χρήση εφεδράνων	- 85 -
Κεφάλαιο 4 Αναθεώρηση Μοντέλων Πεπερασμένων Στοιχείων	- 93 -
4.1 Εισαγωγή	- 93 -
4.2 Περιγραφή Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων	- 93 -
4.3 Παραμετροποίηση των Μοντέλων	- 96 -
4.4 Αναθεώρηση Με Χρήση του Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων.....	- 97 -
Κεφάλαιο 5 Συμπεράσματα και Προτάσεις.....	- 100 -
Παράρτημα 1: Κώδικας Matlab-Data Acquisition Session	- 102 -
Παράρτημα 2: Φωτογραφίες Πειραματικής Διάταξης	- 106 -
Βιβλιογραφία	- 108 -

Κεφάλαιο 1 Ιδιομορφικά Μοντέλα Απόκρισης Κατασκευών

1.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται και αναλύονται δύο μαθηματικά μορφικά μοντέλα τα οποία περιγράφουν, το καθένα με διαφορετική προσέγγιση, την ταλάντωση γραμμικών κατασκευών σε δυναμικά φορτία. Η παρουσίαση και των δύο μοντέλων συνίσταται στη θεώρηση που κάνουμε, κατά την ανάλυση της οιασδήποτε κατασκευής, για τη μορφή του μητρώου απόσβεσης που την χαρακτηρίζει.

Αναλυτικότερα, εάν έχουμε καταλήξει ότι η μορφική ανάλυση της κατασκευής που εξετάζουμε προσεγγίζεται ικανοποιητικά με θεώρηση κλασσικής απόσβεσης, τότε το πρώτο μαθηματικό μοντέλο που παρουσιάζεται μπορεί να μας οδηγήσει σε ένα πολύ καλό σύστημα προς επίλυση χωρίς να απαιτεί ιδιαίτερη μαθηματική ανάλυση.

Ωστόσο, επειδή η κλασσική απόσβεση μόνο σε απλοποιημένα μοντέλα ανταποκρίνεται ικανοποιητικά, εάν έχουμε μια κατασκευή η ανάλυση της οποίας απαιτεί τη θεώρηση μη κλασσικής απόσβεσης, τότε το πρώτο μαθηματικό μοντέλο αδυνατεί να περιγράψει ικανοποιητικά τις ταλαντώσεις της κατασκευής. Σε τέτοιες περιπτώσεις λοιπόν, όπου θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μη κλασσική απόσβεση ή έστω να έχουμε τη δυνατότητα να επιλέξουμε το είδος της απόσβεσης έχοντας ως δεδομένη την ποιότητα των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιούμε το δεύτερο μαθηματικό μοντέλο.

Το μοντέλο αυτό, που αναλύεται στη συνέχεια, μας δίνει τη δυνατότητα να αντιμετωπίζουμε το εκάστοτε πρόβλημα με το είδος της απόσβεσης που θέλουμε και να καταλήγουμε σε ένα σύστημα που περιγράφει ικανοποιητικά τις ταλαντώσεις της υπό εξέταση κατασκευής.

1.2 Πρώτο Μαθηματικό Μοντέλο-Ανάλυση Δυναμικών Συστημάτων με Κλασσικό Μητρώο Απόσβεσης

Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η ανάλυση του μαθηματικού μορφικού μοντέλου που περιγράφει την κίνηση γραμμικών κατασκευών σε δυναμικά φορτία.

Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την ταλάντωση κατασκευών με κλασσικό μητρώο απόσβεσης, μέσω των οποίων και με κατάλληλη επεξεργασία προσδιορίζονται όλες εκείνες οι παράμετροι του μορφικού μοντέλου, που απαιτούνται για την πλήρη περιγραφή της απόκρισης των εξεταζόμενων κατασκευών.

1.2.1 Εξίσωση Κίνησης Ταλαντωτικού Συστήματος

Η μητρωική μορφή της εξίσωσης κίνησης ενός ταλαντωτικού συστήματος με πολλούς βαθμούς ελευθερίας, δίδεται από την σχέση:

$$M\ddot{\underline{q}} + C_0\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{u}(t) \quad (1.1)$$

όπου M το μητρώο μάζας, C_0 το μητρώο απόσβεσης, K το μητρώο ακαμψίας, \underline{q} το διάνυσμα αποκρίσεων και \underline{u} το διάνυσμα διέγερσης του συστήματος. Στην ειδική περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης η εξωτερική διέγερση του συστήματος είναι μηδέν και επομένως η εξίσωση κίνησης παίρνει την μορφή:

$$M\ddot{\underline{q}} + C_0\dot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{0} \quad (1.2)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων είναι συζευγμένο. Για την επίλυση του παραπάνω συστήματος χρησιμοποιείται η μέθοδος της μορφικής ανάλυσης, η οποία βασίζεται στη επίλυση του παρακάτω ιδιοπροβλήματος για τον προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών.

1.2.2 Ιδιοπρόβλημα

Στην ανάλυση εισάγονται οι ιδιομορφές $\underline{\phi}_r$ και οι ιδιοσυχνότητες $\underline{\omega}_r$, οι οποίες προσδιορίζονται από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος:

$$(K - \omega_r^2 M) \underline{\phi}_r = \underline{0} \quad (1.3)$$

Τα N ιδιοδιανύσματα $\underline{\phi}_r$ μπορούν να γραφούν σε ένα πίνακα μορφής:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

ο οποίος ονομάζεται πίνακας ιδιομορφών. Οι N ιδιοσυχνότητες μπορούν επίσης να γραφούν σε ένα πίνακα με τη μορφή:

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

Έτσι το ιδιοπρόβλημα μπορεί να γραφεί στη μητρική μορφή:

$$K\Phi = M\Phi\Omega^2 \quad (1.4)$$

Για συμμετρικά και ημιθετικά ορισμένα μητρώα ακαμψίας και μάζας K και M αντίστοιχα, αποδεικνύονται οι συνθήκες ορθογωνικότητας:

$$\underline{\phi}_n^T K \underline{\phi}_r = 0 \quad \text{για} \quad n \neq r \quad (1.5)$$

και

$$\underline{\phi}_n^T K \underline{\phi}_n = \hat{m} \quad \text{για} \quad n = r \quad (1.6)$$

Η μητρική μορφή των συνθηκών ορθογωνικότητας είναι:

$$\hat{K} = \Phi^T K \Phi \quad (1.7)$$

και

$$\hat{M} = \Phi^T M \Phi \quad (1.8)$$

όπου \hat{K} και \hat{M} είναι τα διαγώνια μορφικά μητρώα ακαμψίας και μάζας με διαγώνια στοιχεία:

$$\hat{k}_n = \underline{\varphi}_n^T K \underline{\varphi}_n \quad (1.9)$$

και

$$\hat{m}_n = \underline{\varphi}_n^T M \underline{\varphi}_n \quad (1.10)$$

Για θετικά ορισμένα μητρώα M και K, τα διαγώνια στοιχεία των \hat{k} και \hat{m} είναι θετικά. Χρησιμοποιώντας την (1.3) στην (1.9) αποδεικνύεται ότι (Νατσιάβας 1999) τα διαγώνια στοιχεία \hat{k} και \hat{m} συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$\hat{k}_n = \omega_n^2 \hat{m}_n \quad (1.11)$$

1.2.3 Μορφική Ανάλυση

Σύμφωνα με την μέθοδο της μορφικής ανάλυσης, προκειμένου να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων (1.1), θεωρούμε ότι η λύση έχει την μορφή:

$$\underline{q}(t) = \sum_{r=1}^N \underline{\varphi}_r \xi_r(t) = \Phi \underline{\xi}(t) \quad (1.12)$$

όπου $\xi_r(t)$ είναι οι κύριες (μορφικές) συντεταγμένες του συστήματος και $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$. Με την χρήση αυτού του μετασχηματισμού επιτυγχάνεται η αποσύζευξη του ταλαντωτικού συστήματος.

Λύνοντας το ιδιοπρόβλημα, το μόνο που χρειάζεται να γίνει είναι να υπολογιστεί η χρονική απόκριση του συστήματος, δηλαδή το $\underline{\xi}(t)$. Έτσι οι άγνωστες μεταβλητές είναι πλέον τα $\xi_r(t)$. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό (1.12) στην εξίσωση κίνησης του ταλαντωτικού συστήματος ταλάντωσης με απόσβεση, όπου ϕ_r οι ιδιομορφές του συστήματος, προκύπτει:

$$M\Phi\ddot{\underline{\xi}} + C\Phi\dot{\underline{\xi}} + K\Phi\underline{\xi} = \underline{u}(t) \quad (1.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με Φ^T προκύπτει:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\underline{\xi}} + \Phi^T C \Phi \dot{\underline{\xi}} + \Phi^T K \Phi \underline{\xi} = \Phi^T \underline{u}(t) \quad (1.14)$$

Η παραπάνω εξίσωση με χρήση των συνθηκών ορθογωνικότητας των κανονικοποιημένων ιδιομορφών, γράφεται:

$$\hat{m}\ddot{\underline{\xi}} + c^*\dot{\underline{\xi}} + \hat{k}\underline{\xi} = \Phi^T \underline{u}(t) \quad (1.15)$$

όπου με c^* συμβολίζεται ο μη διαγώνιος πίνακας:

$$c^* = \Phi^T C \Phi$$

που περιέχει τα στοιχεία c_{nr} και τα \hat{m}, \hat{k} είναι τα αντίστοιχα μορφικά μητρώα μάζας και απόσβεσης.

Το νέο σύστημα που προκύπτει είναι και πάλι συζευγμένο, διαμέσου του πίνακα απόσβεσης c^* , ο οποίος δεν είναι διαγώνιος και έτσι η εξίσωση (1.15) είναι συζευγμένη διαμέσου των μορφικών ταχυτήτων $\underline{\xi}(t)$.

1.2.4 Μοντέλο Ταλάντωσης Με Κλασσική Απόσβεση

Η περίπτωση της κλασσικής απόσβεσης χρησιμοποιείται ευρέως για την αποσύζευξη των εξισώσεων του ταλαντωτικού συστήματος. Στην περίπτωση της κλασσικής απόσβεσης, ο πίνακας μορφικής απόσβεσης θεωρείται διαγώνιος, δηλ. $c_{nr}^* = 0$ για $n \neq r$. Η μορφή του πίνακα απόσβεσης στην περίπτωση αυτή είναι:

$$c^* = \frac{\Phi^T C \Phi}{\Phi^T M \Phi} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\zeta_m\omega_m \end{bmatrix}$$

όπου με $\zeta_r = \frac{c_r^*}{2m_r\omega_r}$ ορίζεται το ποσοστό απόσβεσης της r ιδιομορφής, και

$\omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}$ είναι η ιδιοσυχνότητα της r ιδιομορφής.

Με την υπόθεση αυτή, το σύστημα εξισώσεων (1.15), είναι αποσυσζευγμένο και η κάθε εξίσωση μπορεί να λυθεί ανεξάρτητα. Για την r εξίσωση του συστήματος ισχύει:

$$\ddot{\xi}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{\xi}_r + \omega_r^2\xi_r = \frac{\varphi_r}{\hat{m}_r}\underline{u}(t) \quad (1.16)$$

Παρατηρείται ότι για τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης σε N_{out} βαθμούς ελευθερίας, με την συνεισφορά m ιδιομορφών, απαιτείται η γνώση των παραμέτρων των ιδιοσυχνοτήτων ω_r , των συντελεστών απόσβεσης ζ_r και των τιμών των ιδιομορφών φ_r στα σημεία προσδιορισμού της απόκρισης. Συγκεντρώνοντας τις παραμέτρους αυτές σε ένα διάνυσμα $\underline{\theta}$ της μορφής:

$$\underline{\theta} = \left\{ \omega_r, \zeta_r, \varphi_{jr}, r = 1 \cdots m, j = 1 \cdots N_{out} \right\} \quad (1.17)$$

Για τον προσδιορισμό δηλαδή της επιτάχυνσης σε N_{out} σημεία απόκρισης, με την χρήση m ιδιομορφών, προκύπτουν συνολικά $(3 + N_{out})m$ παράμετρος του μοντέλου.

1.3 Δεύτερο Μαθηματικό Μοντέλο-Ανάλυση Δυναμικών Συστημάτων Με Γενικό Μητρώο Απόσβεσης

Θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$M\ddot{\underline{q}} + C_0\dot{\underline{q}} + k\underline{q} = L\underline{u}(t) \quad (1.18)$$

για το οποίο το μητρώο απόσβεσης C_0 δεν διαγωνοποιείται. Στην περίπτωση αυτή η ανάλυση του συστήματος με βάση ένα σετ κύριων συντεταγμένων είναι εφικτή εάν το

σύστημα μετατραπεί σε μορφή κατάστασης χώρου πρώτης τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας την συμπληρωματική εξίσωση:

$$M\dot{\underline{q}} = M\ddot{\underline{q}} \quad (1.19)$$

και εισάγοντας το διάνυσμα:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{\dot{q}} \end{bmatrix}$$

και τα μητρώα:

$$P = \begin{bmatrix} C_0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$$

οι εξισώσεις (1.18) και (1.19) γράφονται στη μητρική μορφή:

$$P\dot{\underline{q}} + Q\underline{q} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}(t) \quad (1.20)$$

Το αντίστοιχο ιδιοπρόβλημα είναι της μορφής:

$$(P\lambda + Q)\underline{\psi} = \underline{0} \quad (1.21)$$

Οι ιδιοτιμές λ_r και οι ιδιομορφές $\underline{\psi}_r$ είναι μιγαδικές. Επίσης αποδεικνύεται ότι εάν τα λ_r και $\underline{\psi}_r$ είναι ιδιοτιμές και ιδιομορφές του ιδιοπροβλήματος τότε τα λ_r^* και $\underline{\psi}_r^*$ αποτελούν επίσης ιδιοτιμές και ιδιομορφές.

Εισάγοντας το μητρώο Ιδιοτιμών είναι εύκολο να αποδειχθεί (Νατσιάβας 1999) ότι το μητρώο ιδιομορφών του ιδιοπροβλήματος (1.20) έχει τη μορφή

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \quad (1.22)$$

αφού Θ και λ ικανοποιούν το ιδιοπρόβλημα δεύτερης τάξης

$$M\Theta\lambda^2 + C\Theta\lambda + K\Theta = 0 \quad (1.23)$$

Οι ιδιοτιμές λ_i , κατ' αναλογία με την περίπτωση της κλασσικής απόσβεσης, μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\lambda_i = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (1.24)$$

Το μητρώο των ιδιοτιμών για το σύστημα (1.19) πρώτης τάξεως δίνεται στη μορφή:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} = \text{diagonal} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \quad (1.25)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

1.3.1 Συνθήκες Ορθογωνικότητας Ιδιομορφών

Οι μιγαδικές ιδιομορφές Ψ ικανοποιούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας:

$$\Psi^T P \Psi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \text{διαγώνιο μητρώο}$$

Από την οποία προκύπτει επίσης ότι:

$$P = \Psi^{-T} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & a_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \Psi^{-1} \quad (1.26)$$

Επίσης οι ιδιομορφές $\underline{\psi}$ ικανοποιούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας

$$\Psi^T Q \Psi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \beta_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \text{διαγώνιο μητρώο}$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$Q = \Psi^{-T} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \beta_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \Psi^{-1} \quad (1.27)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (1.21) με $\underline{\psi}^T$ από αριστερά έχουμε:

$$\underline{\psi}^T P \underline{\psi} \lambda + \underline{\psi}^T Q \underline{\psi} = 0$$

από την οποία προκύπτει:

$$\lambda = -\frac{\underline{\psi}^T Q \underline{\psi}}{\underline{\psi}^T P \underline{\psi}}$$

Για την i -ιδιοσυνότητα και ιδιομορφή, η παραπάνω σχέση γράφεται στη μορφή:

$$\lambda_i = -\frac{\underline{\psi}_i^T Q \underline{\psi}_i}{\underline{\psi}_i^T P \underline{\psi}_i}$$

Θέτοντας

$$\begin{aligned} \beta_i &= \underline{\psi}_i^T Q \underline{\psi}_i \\ \alpha_i &= \underline{\psi}_i^T P \underline{\psi}_i \end{aligned} \quad (1.28)$$

η ιδιοτιμή δίνεται τελικά από τη σχέση:

$$\lambda_i = -\beta_i / \alpha_i \quad (1.29)$$

ενώ το μητρώο των ιδιοτιμών παίρνει τη διαγώνια μορφή:

$$\Lambda_C = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1/\alpha_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_i & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

1.3.2 Μοντέλο Κατάστασης Χώρου στο Συνεχές Χρόνο

Η κανονικοποιημένη μορφή της εξίσωσης κατάστασης χώρου προκύπτει από την (1.27) πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με P^{-1} . Παρατηρούμε ότι το P^{-1} έχει τη μορφή:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}C_0M^{-1} \end{bmatrix}$$

προκύπτει η κανονικοποιημένη εξίσωση κατάστασης:

$$\dot{\underline{x}} = A_c \underline{x} + B_c \underline{u}(t) \quad (1.31)$$

όπου:

$$A_c = -P^{-1}Q = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}C_0M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C_0 \end{bmatrix} \quad (1.31\alpha)$$

$$B_c = -P^{-1} \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}C_0M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}L \end{bmatrix} \quad (1.31\beta)$$

Με βάση το ιδιοπρόβλημα (1.21) προκύπτει μετά από πολλαπλασιασμό της εξίσωσης με P^{-1} από αριστερά ότι:

$$(P\lambda + Q)\underline{\psi} = \underline{0}$$

$$(-P^{-1}Q - \lambda I)\underline{\psi} = \underline{0}$$

$$(A_c - \lambda I)\underline{\psi} = \underline{0}$$

Για την i -ιδιοτιμή και ιδιομορφή η παραπάνω εξίσωση γράφεται στη μορφή:

$$A_c \Psi_i = \lambda_i \Psi_i, \quad i = 1, \dots, 2n$$

Το σύστημα των δύο εξισώσεων γράφεται τελικά στη μητρική μορφή

$$A_c \Psi = \Psi \Lambda_c$$

από την οποία προκύπτει

$$A_c = \Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \quad (1.32)$$

Η (1.32) δηλώνει ότι τα Λ_c και Ψ περιέχουν τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου κατάστασης A_c .

1.3.3 Μέθοδος Ανάλυσης Μορφών (Modal Analysis)

Για την υλοποίηση της μεθόδου ανάλυσης μορφών εισάγεται ο μετασχηματισμός:

$$\underline{x}(t) = \Psi \underline{\xi}(t) \quad (1.33)$$

όπου $\underline{\xi}$ είναι το διάνυσμα των κύριων συντεταγμένων. Αντικαθιστώντας την (1.33) στη (1.31) και πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη από αριστερά με Ψ^{-1} προκύπτει διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\Psi \dot{\underline{\xi}} &= A_c \Psi \underline{\xi} + B_c \underline{u}(t) \\ \dot{\underline{\xi}} &= \Psi^{-1} A_c \Psi \underline{\xi} + \Psi^{-1} B_c \underline{u}(t) \\ \dot{\underline{\xi}} &= \Lambda_c \underline{\xi} + L_c \underline{u}(t)\end{aligned}\quad (1.34)$$

όπου

$$L_c = \Psi^{-1} B_c \quad (1.35)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί την μορφική εξίσωση κατάστασης χώρου. Η L_c απλοποιείται χρησιμοποιώντας την (1.26) και λύνοντας ως προς Ψ^{-1} προκύπτει ότι:

$$\Psi^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1/\alpha_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \Psi^T P$$

Αντικαθιστώντας στην (1.35) προκύπτει:

$$\begin{aligned}L_c = \Psi^{-1} B_c &= \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1/\alpha_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \Psi^T P \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} L \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1/\alpha_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \Lambda & \Theta^* \Lambda^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C_0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} L \end{bmatrix}\end{aligned}$$

το οποίο τελικά δίνει:

$$L_c = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1/\alpha_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T \\ \Theta^{*T} \end{bmatrix} L \quad (1.36)$$

Ο πίνακας L_c ονομάζεται πίνακας συντελεστών συνεισφοράς, κατ' αναλογία με το σύστημα με κλασσική απόσβεση.

Σε μορφή συνιστωσών οι εξισώσεις (1.34) παίρνουν τη μορφή:

$$\dot{\xi}_i(t) = \lambda_i \xi_i(t) + \frac{1}{\alpha_i} \underline{\theta}_i^T \underline{L} \underline{u}(t) \quad , i=1, \dots, n \quad (1.37)$$

$$\dot{\xi}_{n+i}(t) = \lambda_i^* \xi_{n+i}(t) + \frac{1}{\alpha_{n+i}} \underline{\theta}_{n+i}^{*T} \underline{L} \underline{u}(t) \quad (1.38)$$

όπου ισχύει ότι

$$\xi_{n+i} = \xi_i^* \quad \text{και} \quad \alpha_{n+i} = \alpha_i^* \quad (1.39)$$

1.3.4 Εξισώσεις Παρατήρησης (Observation Equations)

Έστω $\underline{y}(t)$ το διάνυσμα των αποκρίσεων που μας ενδιαφέρει. Οι αποκρίσεις αυτές, στη γενική τους μορφή, είναι γραμμικός συνδυασμός των επιταχύνσεων, ταχυτήτων και μετατοπίσεων του συστήματος. Η γενική διανυσματική εξίσωση παρατήρησης γράφεται στη μορφή:

$$\underline{y}(t) = C_a \underline{\ddot{q}}(t) + C_v \underline{\dot{q}}(t) + C_d \underline{q}(t) \quad (1.40)$$

Εκφράζοντας το $\underline{\ddot{q}}(t)$ συναρτήσει των $\underline{\dot{q}}(t)$ και $\underline{q}(t)$ μέσω της (1.18), και αντικαθιστώντας στην (1.40) έχουμε:

$$\underline{y}(t) = C_c \underline{x} + D_c \underline{u}(t) \quad (1.41)$$

$$\text{όπου} \quad C_c = [C_d - C_a M^{-1} K \quad ; \quad C_v - C_a M^{-1} C_0] \quad (1.41\alpha)$$

$$D_c = C_a M^{-1} L \quad (1.41\beta)$$

Η απόκριση $\underline{y}(t)$ εκφράζεται ως προς τις μορφικές (κύριες) συντεταγμένες αντικαθιστώντας σε αυτήν τον μετασχηματισμό (1.33):

$$\underline{y}(t) = C_c \Psi \underline{\xi}(t) + D_c \underline{u}(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\underline{y}(t) = V_c \underline{\xi}(t) + D_c \underline{u}(t) \quad (1.42)$$

όπου

$$V_c = C_c \Psi \quad (1.43)$$

Το μητρώο V_c καλείται μορφικό μητρώο απόκρισης (εξόδου- παρατήρησης) και απλοποιείται μέσω των εξισώσεων (1.41) και (1.22) στη μορφή:

$$V_c = [C_d - C_\alpha M^{-1}K \mid C_v - C_\alpha M^{-1}C_0] \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Εξετάζουμε τώρα τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

α) Έστω ότι η απόκριση $\underline{y}(t)$ αποτελείται μόνο από μετατοπίσεις, δηλαδή $C_a = C_v = 0, C_d \neq 0$. Τότε το μητρώο V_c παίρνει την τελική μορφή:

$$V_c = [C_d \mid 0] \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{bmatrix} = C_d [\Theta \mid \Theta^*] \quad (1.44\alpha)$$

β) Έστω ότι η απόκριση $\underline{y}(t)$ αποτελείται μόνο από ταχύτητες, δηλαδή $C_a = C_d = 0, C_v \neq 0$. Τότε το μητρώο V_c παίρνει την τελική μορφή:

$$V_c = C_v [\Theta\Lambda \mid \Theta^*\Lambda^*] \quad (1.44\beta)$$

γ) Έστω ότι η απόκριση $\underline{y}(t)$ αποτελείται μόνο από επιταχύνσεις, δηλαδή $C_d = C_v = 0, C_\alpha \neq 0$. Τότε το μητρώο V_c παίρνει την τελική μορφή:

$$\begin{aligned} V_c &= -C_\alpha [M^{-1}K \mid M^{-1}C_0] \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{bmatrix} = \\ &= -C_\alpha [M^{-1}K\Theta + M^{-1}C_0\Theta\Lambda \mid M^{-1}K\Theta^* + M^{-1}C_0\Theta^*\Lambda^*] \end{aligned}$$

η οποία απλοποιείται περαιτέρω χρησιμοποιώντας την (1.23) στη μητρική της μορφή:

$$M^{-1}K\Theta + M^{-1}C_0\Theta\Lambda = -\Theta\Lambda^2$$

ή ισοδύναμα:

$$M^{-1}K\Theta^* + M^{-1}C_0\Theta^*\Lambda^* = -\Theta^*\Lambda^{*2}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις, η V_c παίρνει τη μορφή:

$$V_c = C_\alpha [\Theta \Lambda^2 \quad \Theta^* \Lambda^{*2}] \quad (1.44\gamma)$$

1.3.5 Σύνοψη Μορφικού Μοντέλου για την Περίπτωση μη- Κλασσικής (Γενικής) Απόσβεσης

Συνοψίζοντας, για την περίπτωση της γενικής απόσβεσης, το μορφικό μοντέλο (Modal model) αποτελείται από τις μορφικές εξισώσεις κατάστασης χώρου (1.34), και τις μορφικές εξισώσεις παρατήρησης (1.42):

$$\dot{\underline{\xi}} = \Lambda_c \underline{\xi} + L_c \underline{u}(t) \quad (1.45)$$

$$\underline{y}(t) = V_c \underline{\xi}(t) + D_c \underline{u}(t) \quad (1.46)$$

όπου:

$$\underline{\xi}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_n(t) \quad \xi_1^*(t), \dots, \xi_n^*(t)] \in R^{2n}$$

είναι το διάνυσμα των κύριων συντεταγμένων

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

είναι το μητρώο που περιέχει τις μιγαδικές ιδιοτιμές λ_r του συστήματος

$$L_c = \Psi^{-1} B_c = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1/a_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^T \\ \Theta^{*T} \end{bmatrix} L \in C^{2n \times N_m} \quad (1.48)$$

είναι το μητρώο των συντελεστών συνεισφοράς

$$\underline{u}(t) \in R^{N_m}$$

είναι το διάνυσμα των ανεξάρτητων διεγέρσεων

$$D_c = C_\alpha M^{-1} L \in C^{N_{out} \times N_m} \quad (1.49)$$

μητρώο που μηδενίζεται για μετατοπίσεις και ταχύτητες

$$V_c = C_d [\Theta \quad \Theta^*] \quad \text{για μετατοπίσεις} \quad (1.50\alpha)$$

$$V_c = C_v [\Theta \Lambda \quad \Theta^* \Lambda^*] \quad \text{για ταχύτητες} \quad (1.50\beta)$$

$$V_c = C_a \begin{bmatrix} \Theta \Lambda^2 & \Theta^* \Lambda^{*2} \end{bmatrix} \text{ για επιταχύνσεις} \quad (1.50\gamma)$$

Διευκρινίζεται ότι:

$$C_d \Theta = U \quad (1.51\alpha)$$

είναι το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων στους επιθυμητούς βαθμούς ελευθερίας που περιέχονται στο \underline{y} για μετατοπίσεις.

Ομοίως και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο Λ είναι διαγώνιος προκύπτει:

$$C_v \Theta \Lambda = U \quad (1.51\beta)$$

είναι το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων στους επιθυμητούς βαθμούς ελευθερίας που περιέχονται στο \underline{y} για ταχύτητες

$$C_a \Theta \Lambda^2 = U \quad (1.51\gamma)$$

είναι το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων στους επιθυμητούς βαθμούς ελευθερίας που περιέχονται στο \underline{y} για επιταχύνσεις.

Με βάση τα παραπάνω η απόκριση $\underline{y}(t) \in R^{N_{out}}$ στους N_{out} βαθμούς ελευθερίας του γραμμικού μοντέλου δίνεται από τη σχέση:

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} U & U^* \end{bmatrix} \underline{\xi} + D_c \underline{u}(t) \quad (1.52)$$

όπου

$$U = \begin{bmatrix} \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n & \underline{u}_1^*, \dots, \underline{u}_n^* \end{bmatrix} \in R^{N_{out} \times 2n}$$

είναι το μητρώο των ιδιομορφών στους επιθυμητούς βαθμούς ελευθερίας.

Συνεπώς η απόκριση καθορίζεται πλήρως εφόσον γνωρίζουμε τις τιμές των συντελεστών των μητρώων Λ_c, L_c, U, D_c .

1.4 Ειδική Περίπτωση: Μητρώο Κλασσικής Απόσβεσης

Στη συνέχεια θα απλοποιηθούν οι παραπάνω εξισώσεις για την ειδική περίπτωση του μητρώου κλασσικής απόσβεσης.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε με βάση τις εξισώσεις

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \underline{\mathbf{q}} \\ \dot{\underline{\mathbf{q}}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\boldsymbol{\theta}} \\ \lambda \underline{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix} e^{\lambda t}$$

και

$$\underline{\mathbf{q}} = \underline{\boldsymbol{\Phi}} e^{\lambda t}$$

ότι $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda}^* \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{L}_c = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 2\omega_i j \sqrt{1 - \zeta_i^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2\omega_i j \sqrt{1 - \zeta_i^2} \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} & \boldsymbol{\Phi}^T \\ & \boldsymbol{\Phi}^T \end{bmatrix} \mathbf{L}$$

Συνεπώς οι μορφικές (κύριες) συνιστώσες $\xi_r(t)$ και $\xi_r^*(t)$ παίρνουν τη μορφή:

$$\dot{\xi}_r(t) = \lambda_r \xi_r + \frac{1}{2\omega_r j \sqrt{1 - \zeta_r^2}} \boldsymbol{\Phi}_r^T \mathbf{L} \underline{\mathbf{u}}(t) \quad (1.53\alpha)$$

$$\dot{\xi}_r^*(t) = \lambda_r^* \xi_r^* + \frac{1}{-2\omega_r j \sqrt{1 - \zeta_r^2}} \boldsymbol{\Phi}_r^T \mathbf{L} \underline{\mathbf{u}}(t) \quad (1.53\beta)$$

Τέλος, το διάνυσμα $\underline{\mathbf{y}}(t)$ παίρνει τη μορφή:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{V}_c \underline{\xi}(t) + \mathbf{D}_c \underline{u}(t) \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου: } \mathbf{V}_c &= \mathbf{C}_c \begin{bmatrix} \Phi & \Phi \\ \Phi\Lambda & \Phi\Lambda^* \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_c &= [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad | \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_0] \\ \mathbf{D}_c &= \mathbf{C}_\alpha \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \end{aligned}$$

1.5 Απόκριση στο Πεδίο των Συχνοτήτων-Μετασχηματισμός Fourier

Για τα συστήματα που έχουν προκύψει από τις παραπάνω αναλύσεις θα προβούμε τώρα σε μετασχηματισμό Fourier. Μέσω του μετασχηματισμού αυτού θέλουμε να περάσουμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων, κατορθώνοντας παράλληλα να μετατρέψουμε τις διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές. Γενικά μια τυχαία συνάρτηση $f(t)$ αναλύεται σε συνιστώσες Fourier ως:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

όπου $\hat{f}(\omega)$ είναι ο συντελεστής Fourier που δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Fourier η εξίσωση (1.18) στο πεδίο των συχνοτήτων μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\underline{\hat{x}}(\omega) = \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{L} \underline{\hat{u}}(\omega)$$

όπου

$$\mathbf{H}(j\omega) = [\mathbf{M}(j\omega)^2 + \mathbf{C}(j\omega) + \mathbf{K}]^{-1}$$

Το μητρώο $\mathbf{H}(j\omega)$ ονομάζεται Μητρώο Συναρτήσεων Μετάδοσης.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω καταλήγουμε από ένα διαφορικό σύστημα εξισώσεων σε ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων.

Οι μορφικές εξισώσεις (1.53) και (1.54) γράφονται επίσης στη μορφή:

$$\underline{y}(t) = \sum_{r=1}^n (\underline{u}_r \underline{\xi}_r(t) + \underline{u}_r^* \underline{\xi}_r^*(t)) + \sum_{k=1}^{N_{in}} \underline{d}_k u_k(t)$$

όπου:

$$\dot{\underline{\xi}}_r(t) = \lambda_r \underline{\xi}_r(t) + \underline{l}_r^T \underline{u}(t)$$

$$\dot{\underline{\xi}}_r^*(t) = \lambda_r^* \underline{\xi}_r^*(t) + \underline{l}_r^{*T} \underline{u}(t)$$

$$\lambda_r = -\zeta_r \omega_r \pm j \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$$

εκφρασμένες στο πεδίο του χρόνου.

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier στο πεδίο των συχνοτήτων έχουμε ότι τελικά η σχέση μεταξύ της απόκρισης $\underline{\hat{y}}(\omega)$ και της διέγερσης $\underline{\hat{u}}(\omega)$ δίνεται στη μορφή:

$$\underline{\hat{y}}(\omega) = H(j\omega) \underline{\hat{u}}(\omega)$$

όπου

$$H(j\omega) = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\underline{u}_r \underline{l}_r^T}{(j\omega) - \lambda_r} + \frac{\underline{u}_r \underline{l}_r^{*T}}{(j\omega) - \lambda_r^*} \right]$$

Το Μητρώο Συναρτήσεων Μετάδοσης $H(j\omega)$ είναι εκφρασμένο συναρτήσει των ιδιομορφών \underline{u}_r , των συντελεστών συνεισφοράς \underline{l}_r και των ιδιοσυχνοτήτων λ_r .

Κεφάλαιο 2 Μέθοδος Υπολογισμού Μορφικών Παραμέτρων PolyMAX

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η μέθοδος PolyMAX, η οποία είναι μία μέθοδος υπολογισμού μορφικών παραμέτρων από πειραματικά δεδομένα. Συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί ως δεδομένα εισόδου τα δεδομένα που έχουν προκύψει από κάποιο πείραμα σε μια κατασκευή. Στη συνέχεια παράγει ένα διάγραμμα σταθεροποίησης από το οποίο ο χρήστης έχει τη δυνατότητα να επιλέξει τις περιοχές στις οποίες επιθυμεί να αναζητηθούν οι κρίσιμες ιδιοσυχνότητες. Έπειτα και αφού υπολογιστούν οι κρίσιμες ιδιοσυχνότητες και οι αντίστοιχοι συντελεστές απόσβεσης, η μέθοδος πηγαίνει και υπολογίζει τις αντίστοιχες ιδιομορφές. Όπως θα αναλυθεί και παρακάτω, ο υπολογισμός των μορφικών παραμέτρων γίνεται ελαχιστοποιώντας μια συνάρτηση σφάλματος, η οποία ουσιαστικά αποτελεί ένα μέτρο της διαφοράς μεταξύ των προβλέψεων της συνάρτησης μετάδοσης που προκύπτει από το μοντέλο και της συνάρτησης μετάδοσης που υπολογίζεται από τα πειραματικά δεδομένα.

Τα κύρια πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι αφενός δεν περιέχει επαναληπτική διαδικασία και επομένως απαιτεί σχετικά μικρή υπολογιστική «προσπάθεια», αφετέρου μπορεί να προσδιορίσει τις μορφικές παραμέτρους με μεγάλη ακρίβεια. Στη συνέχεια λοιπόν αναπτύσσεται το μαθηματικό αυτό μοντέλο, και εξάγονται οι τελικές εξισώσεις προς επίλυση.

2.2 Right matrix-function μοντέλο

Η μέθοδος polyreference LSCF (least squares-complex-frequency domain) χρειάζεται ως πρωτογενές δεδομένο συναρτήσεις μετάδοσης στο πεδίο των συχνοτήτων (Frequency Response Functions, FRF), έτσι ώστε να υπολογίσει ένα right matrix-function μοντέλο:

$$[H(\omega)] = [B(\omega)][A(\omega)]^{-1} \quad (2.1)$$

όπου $H(\omega) \in C^{l \times m}$ είναι το μητρώο των συναρτήσεων μετάδοσης, ο πίνακας δηλαδή που περιέχει όλες τις συναρτήσεις στο πεδίο των συχνοτήτων που παρεμβάλλονται μεταξύ όλων των m εισόδων και όλων των l εξόδων, $B(\omega) \in C^{l \times m}$ είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας στη θέση του αριθμητή, $A(\omega) \in C^{m \times m}$ είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας στη θέση του παρονομαστή.

Κάθε γραμμή του right matrix-function μοντέλου μπορεί να γραφεί ως:

$$\forall O = 1, 2, \dots, l: \langle H_o(\omega) \rangle = \langle B_o(\omega) \rangle [A(\omega)]^{-1} \quad (2.2)$$

όπου:

$$\langle B(\omega) \rangle = \sum_{r=0}^P \Omega_r(\omega) \langle \beta_{or} \rangle$$

και

$$[A(\omega)] = \sum_{r=0}^P \Omega_r(\omega) [\alpha_r] \quad (2.3)$$

όπου $\Omega_r(\omega)$ είναι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βάσης και p είναι η τάξη του πολυωνύμου. Στη μέθοδο LSCF συγκεκριμένα, οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βάσης έχουν τη μορφή:

$$\Omega_r(\omega) = e^{j\omega D t_r} \quad (2.4)$$

όπου Δt είναι ο χρόνος δειγματοληψίας.

Όσον αφορά τους πολυωνυμικούς συντελεστές $\beta_{or} \in R^{l \times m}$ και $\alpha_r \in R^{m \times m}$, αυτοί περιγράφονται από τους ακόλουθους πίνακες:

$$\beta_o = \begin{pmatrix} \beta_{o0} \\ \beta_{o1} \\ \dots \\ \beta_{op} \end{pmatrix} \in R^{(p+1) \times m} \quad (\forall O=1,2,\dots,l)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in R^{m(p+1) \times m} \quad (2.5)$$

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_l \\ \alpha \end{pmatrix} \in R^{(l+m)(p+1) \times m}$$

Όποτε το FRF μοντέλο $H(\omega_k, \theta)$ της εξίσωσης (2.1) έχει γραφεί τώρα ως μία συνάρτηση των συντελεστών $\underline{\theta}$.

2.3 Σχηματισμός Συνάρτησης Σφάλματος

Αυτό που θέλουμε τώρα είναι να υπολογίσουμε όλα τα άγνωστα μοντέλα συντελεστών που προκύπτουν από μετρήσεις (ή καλύτερα από μη παραμετροποιημένους υπολογισμούς) της FRF $\hat{H}_o(\omega_k)$, όπου το σύμβολο (^) δηλώνει μετρούμενη ποσότητα και $\omega_k (k=1,2,\dots,N_f)$ είναι οι διακριτοποιημένες συχνότητες στις οποίες είναι διαθέσιμες οι FRF μετρήσεις. Οι συντελεστές $\underline{\theta}$ μπορούν να υπολογιστούν ελαχιστοποιώντας την ακόλουθη μη γραμμική εξίσωση σφάλματος ελαχίστων τετραγώνων $\varepsilon_o^{NLS}(\omega_k, \theta) \in C^{l \times m}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_o^{NLS}(\omega_k, \theta) &= w_o(\omega_k) \left(H_o(\omega_k, \theta) - \hat{H}_o(\omega_k) \right) = \\ &= w_o(\omega_k) \left(B_o(\omega_k, \beta_o) A^{-1}(\omega_k, a) - \hat{H}_o(\omega_k) \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

όπου εισάγεται η συνάρτηση βαρύτητας $w_o(\omega_k)$. Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από τη συχνότητα και τα δεδομένα εξόδου, και επιτρέπει έτσι να λαμβάνουμε υπόψη μας ποιοτικές διαφορές που πιθανόν να υπάρχουν μεταξύ διαφορετικών δεδομένων εισόδου. Οι εξισώσεις σφάλματος για όλα τα δεδομένα εξόδου και όλες τις γραμμές συχνότητας μπορούν να συνδυαστούν στην ακόλουθη συνάρτηση κόστους:

$$I^{NLS}(\theta) = \sum_{o=1}^l \sum_{k=1}^{N_f} tr \left\{ \left(\varepsilon_o^{NLS}(\omega_k, \theta) \right)^H \varepsilon_o^{NLS}(\omega_k, \theta) \right\} \quad (2.7)$$

όπου \bullet^H είναι η μιγαδική συζυγής μετατροπή (Ερμιτιανή) ενός πίνακα και $tr\{\bullet\}$ είναι το ίχνος ενός πίνακα (άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου).

Η συνάρτηση σφάλματος ελαχιστοποιείται θέτοντας τις παραγώγους της εξίσωσης (2.7) ως προς τις άγνωστες παραμέτρους ίσες με το μηδέν. Είναι φανερό ότι αυτό οδηγεί σε σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, όταν η εξίσωση (2.6) χρησιμοποιείται στη μορφή που είναι. Ωστόσο, εάν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (2.6) από δεξιά με τον πολυωνυμικό πίνακα-αριθμητή A οδηγούμαστε στις γραμμικές ως προς τις παραμέτρους εξισώσεις σφάλματος $\varepsilon_o^{LS}(\omega_k, \theta) \in C^{l \times m}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_o^{LS}(\omega_k, \theta) &= w_o(\omega_k) \left(B_o(\omega_k, \beta_o) - \hat{H}_o(\omega_k) A(\omega_k, a) \right) = \\ &= w_o(\omega_k) \sum_{r=0}^p \left(\Omega_r(\omega_k) \beta_{or} - \Omega_r(\omega_k) \hat{H}_o(\omega_k) \alpha_r \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Οι εξισώσεις σφάλματος σε όλες τις γραμμές συχνότητας μπορούν να γραφούν σε ένα πίνακα $E_o^{LS}(\theta) \in C^{N_f \times m}$, της μορφής:

$$E_o^{LS}(\theta) = \begin{pmatrix} \varepsilon_o^{LS}(\omega_1, \theta) \\ \varepsilon_o^{LS}(\omega_2, \theta) \\ \dots \\ \varepsilon_o^{LS}(\omega_{N_f}, \theta) \end{pmatrix} = (X_o \quad Y_o) \begin{pmatrix} \beta_o \\ a \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

όπου:

$$X_o = \begin{pmatrix} w_o(\omega_1) (\Omega_o(\omega_1) \dots \Omega_p(\omega_1)) \\ \dots \\ w_o(\omega_{N_f}) (\Omega_o(\omega_{N_f}) \dots \Omega_p(\omega_{N_f})) \end{pmatrix} \in C^{N_f \times (p+1)} \quad (2.10)$$

$$Y_o = \begin{pmatrix} -w_o(\omega_1)(\Omega_o(\omega_1)\cdots\Omega_p(\omega_1))\otimes\hat{H}_o(\omega_1) \\ \dots \\ -w_o(\omega_{N_f})(\Omega_o(\omega_{N_f})\cdots\Omega_p(\omega_{N_f}))\otimes\hat{H}_o(\omega_{N_f}) \end{pmatrix} \in C^{N_f \times m(p+1)} \quad (2.11)$$

όπου το σύμβολο \otimes δηλώνει την παράγωγο Kronecker.

2.4 Reduced Normal Equations

Παρόμοια με την εξίσωση (2.7) η ακόλουθη συνάρτηση κόστους μπορεί να γραφεί βάσει των γραμμικοποιημένων εξισώσεων σφάλματος:

$$I^{LS}(\underline{\theta}) = \sum_{o=1}^l \sum_{k=1}^{N_f} \text{tr} \left\{ \left(\varepsilon_o^{LS}(\omega_k, \underline{\theta}) \right)^H \left(\varepsilon_o^{LS}(\omega_k, \underline{\theta}) \right) \right\} \quad (2.12)$$

Η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους οδηγεί σε ένα σταθμικό γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. Βάσει των εξισώσεων (2.9), (2.10), (2.11) η συνάρτηση κόστους μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} I^{LS}(\underline{\theta}) &= \sum_{o=1}^l \text{tr} \left\{ \left(E_o^{LS}(\underline{\theta}) \right)^H \left(E_o^{LS}(\underline{\theta}) \right) \right\} = \sum_{o=2}^l \text{tr} \left\{ \left(\beta_o^T \quad \alpha^T \begin{pmatrix} X_o^H \\ Y_o^H \end{pmatrix} \right) (X_o \quad Y_o) \begin{pmatrix} \beta_o \\ \alpha \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \text{tr} \left\{ \underline{\theta}^T \quad J^H \quad J \underline{\theta} \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου $J \in C^{lN_f \times (l+m)(p+1)}$ είναι ο επονομαζόμενος Τζακομπιανός πίνακας που δίνεται από τη σχέση:

$$J = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 & Y_1 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 & Y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_l & Y_l \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Στην περίπτωση που οι συντελεστές $\underline{\theta}$ είναι πραγματικοί, αποδεικνύεται ότι η έκφραση $J^H J$ μπορεί να αντικατασταθεί από το πραγματικό της μέρος. Τότε η συνάρτηση κόστους (2.13) γίνεται:

$$l^{LS}(\underline{\theta}) = \text{tr} \left\{ \underline{\theta}^T \text{Re}(\mathbf{J}^H \mathbf{J}) \underline{\theta} \right\} \quad (2.15)$$

όπου:

$$\text{Re}(\mathbf{J}^H \mathbf{J}) = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 & S_1 \\ 0 & R & \cdots & 0 & S_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_l & S_l \\ S_1^T & S_2^T & \cdots & S_l^T & \sum_{\sigma=1}^l T_\sigma \end{pmatrix} \in R^{(l+m)(p+l) \times (l+m)(p+l)} \quad (2.16)$$

ενώ:

$$\begin{aligned} R_o &= \text{Re}(X_o^H X_o) \in R^{(p+l) \times (p+l)} \\ S_o &= \text{Re}(X_o^H Y_o) \in R^{(p+l) \times m(p+l)} \\ T_o &= \text{Re}(Y_o^H Y_o) \in R^{m(p+l) \times m(p+l)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Η συνάρτηση κόστους (2.15) ελαχιστοποιείται θέτοντας τις παραγώγους της ως προς τους άγνωστους πολυωνυμικούς συντελεστές $\underline{\theta}$ ίσες με το μηδέν:

$$\frac{\partial l^{LS}(\underline{\theta})}{\partial \beta_o} = 2(R_o \beta_o + S_o \alpha) = 0 \quad \forall o = 1, \dots, l \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial l^{LS}(\underline{\theta})}{\partial \alpha} = 2 \sum_{o=1}^l (S_o^T \beta_o + T_o \alpha) = 0$$

Αυτές είναι οι επονομαζόμενες κανονικοποιημένες εξισώσεις οι οποίες μέσω των εξισώσεων (2.16) και (2.5) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$2 \text{Re}(\mathbf{J}^H \mathbf{J}) \underline{\theta} = 0 \quad (2.19)$$

Αρχικά εστιάζουμε στον πολυωνυμικό παρονομαστή $\underline{\alpha}$ από τον οποίο μπορούν να υπολογιστούν οι πόλοι και οι μορφικοί συντελεστές συνεισφοράς. Αυτές οι πληροφορίες είναι αρκετές για την κατασκευή ενός διαγράμματος σταθεροποίησης.

Κατά συνέπεια το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να απλοποιηθεί αντικαθιστώντας τους συντελεστές β_o από την εξίσωση (2.18):

$$\beta_o = -R_o^{-1}S_o\alpha \quad (2.20)$$

η οποία τελικά οδηγεί στο σύστημα των απλοποιημένων εξισώσεων:

$$\left\{ 2 \sum_{o=1}^l (T_o - S_o^T R_o^{-1} S_o) \right\} \underline{\alpha} = 0 \quad (2.21)$$

$$M \underline{\alpha} = 0$$

όπου το $M \in R^{m(p+l) \times m(p+l)}$ ορίζεται στην παραπάνω εξίσωση και μπορεί να υπολογιστεί από τα FRF δεδομένα της μέτρησης. Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί ως προς τον πολυωνυμικό παρονομαστή $\underline{\alpha}$ σε μορφή ελαχίστων τετραγώνων. Για να αποφύγουμε την τετριμμένη λύση $\underline{\alpha} = 0$, επιβάλλουμε έναν περιορισμό στις παραμέτρους. Ένας τέτοιος περιορισμός απομακρύνει επίσης την αφθονία παραμέτρων που υπάρχει στο right matrix-fraction μοντέλο (πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο πίνακα παίρνουμε διαφορετικά πολυώνυμα σε αριθμητή και παρονομαστή, αλλά την ίδια συνάρτηση μεταφοράς).

2.5 Πρακτική Υλοποίηση

Θεωρητικά, ένα right matrix-fraction μοντέλο μπορεί να προκύψει υπολογίζοντας τους συντελεστές β_o του παρονομαστή από την εξίσωση (2.20). Μια εναλλακτική προσέγγιση για την εύρεση ενός πλήρους μοντέλου περιγράφεται παρακάτω. Αυτή η προσέγγιση είναι παρόμοια με την κλασσική υλοποίηση της μεθόδου least-squares complex exponential (LCSE).

Στις εφαρμογές μορφικής ανάλυσης, δεν μας ενδιαφέρει μόνο να έχουμε ένα καλό μοντέλο, αλλά πολύ περισσότερο μας ενδιαφέρει η ακρίβεια των εκτιμώμενων μορφικών παραμέτρων. Κατά τον υπολογισμό των μορφικών παραμέτρων από πραγματικά δεδομένα, είναι γενικά μια καλή ιδέα να ορίσουμε ένα μοντέλο σημαντικά υψηλότερης τάξης από αυτή των πραγματικών δεδομένων, δηλαδή να

επιχειρήσουμε να «εναρμονίσουμε» μοντέλα υψηλής τάξης που περιέχουν πολύ περισσότερα modes από αυτά που περιέχονται στα πραγματικά δεδομένα. Έπειτα, τα αληθινά φυσικά modes διαχωρίζονται από τα «νόθα» αριθμητικά, ερμηνεύοντας ένα διάγραμμα σταθεροποίησης. Οι πόλοι που αντιστοιχούν σε ένα μοντέλο ορισμένης τάξης συγκρίνονται με τους πόλους ενός μοντέλου μίας τάξης μικρότερης. Εάν οι διαφορές τους βρίσκονται μεταξύ των προκαθορισμένων ορίων, τότε ο πόλος χαρακτηρίζεται ως σταθερός. Οι «νόθοι» αριθμητικοί πόλοι δεν θα σταθεροποιηθούν καθόλου κατά τη διάρκεια της διαδικασίας και μπορούν εύκολα να απομακρυνθούν από τα δεδομένα μορφικών παραμέτρων. Η χρήση ενός διαγράμματος σταθεροποίησης λύνει ένα πρόβλημα τυπικού συστήματος αναγνώρισης, δηλαδή καθορίζει την τάξη του μοντέλου.

Οι πόλοι και οι μορφικοί συντελεστές συνεισφοράς βρίσκονται από την πολυωνυμική εξίσωση (2.21) του παρονομαστή, υπολογίζοντας την ανάλυση ιδιοσυχνοτήτων από τον από τον συζυγή της πίνακα. Ένα right matrix-fraction μοντέλο p -οστής τάξης, αποδίδει pm πόλους. Μία αποτελεσματική κατασκευή του PolyMAX διαγράμματος σταθεροποίησης, είναι εφικτή με τη διατύπωση του προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων της εξίσωσης (2.21) ως προς το μοντέλο υψηλότερης τάξης p_{max} . Έπειτα θεωρώντας υποπίνακες κατάλληλων διαστάσεων μπορούμε να λύσουμε προβλήματα χαμηλότερης τάξης.

Η ερμηνεία του διαγράμματος σταθεροποίησης αποδίδει ένα σετ πόλων και αντίστοιχων συντελεστών συνεισφοράς. Οι ιδιομορφές μπορούν έπειτα να υπολογιστούν θεωρώντας το επονομαζόμενο pole-residue μοντέλο (αυτό το μοντέλο είναι η μερική κλασματική περιγραφή της Λαπλασιανής έκδοσης της εξίσωσης (2.1)):

$$[H(\omega)] = \sum_{i=1}^n \frac{\underline{u}_i \underline{l}_i^T}{j\omega - \lambda_i} + \frac{\underline{u}_i^* \underline{l}_i^H}{j\omega - \lambda_i^*} - \frac{LR}{\omega^2} + UR \quad (2.22)$$

όπου n είναι ο αριθμός των modes, \bullet^* είναι ο μιγαδικός συζυγής ενός πίνακα, $\underline{u}_i \in C^1$ είναι οι ιδιομορφές, $\underline{l}_i^T \in C^m$ είναι οι μορφικοί συντελεστές συνεισφοράς και λ_i είναι οι πόλοι που εμφανίζονται σε ζεύγη μιγαδικών συζυγών και σχετίζονται με τις ιδιοσυχνότητες ω_i και τους συντελεστές απόσβεσης ζ_i μέσω της σχέσης:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j\sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i \quad (2.23)$$

LR, UR $\in \mathbb{R}^{l \times m}$ έχουν εισαχθεί στην εξίσωση (2.22) και είναι τα χαμηλότερα και υψηλότερα υπόλοιπα αντίστοιχα, που μοντελοποιούν την επίδραση των εκτός περιοχής συχνοτήτων modes στη εξεταζόμενη περιοχή συχνοτήτων. Οι αριθμητές στη εξίσωση (2.22) είναι τα επονομαζόμενα υπόλοιπα $\underline{u}_i \underline{l}_i^T$ και είναι πρωτοβάθμιοι πίνακες εξ' ορισμού.

Καθώς οι συντελεστές συνεισφοράς \underline{l}_i^T και οι πόλοι λ_i υπολογίζονται μέσω των πολυωνυμικών $\underline{\alpha}$ και του διαγράμματος σταθεροποίησης, οι μόνοι άγνωστοι στην εξίσωση (2.22) είναι οι ιδιομορφές \underline{u}_i και τα χαμηλότερα και υψηλότερα υπόλοιπα. Αυτά εύκολα υπολογίζονται λύνοντας την εξίσωση (2.22) ως γραμμική ελαχίστων τετραγώνων. Αυτό το δεύτερο βήμα καλείται least-squares frequency-domain (LSFD) μέθοδος.

2.6 Σχηματισμός και Ελαχιστοποίηση Συνάρτησης Σφάλματος

2.6.1 Μοντέλο Με Γενικό Πίνακα Απόσβεσης

Έχουμε ορίσει παραπάνω τη συνάρτηση μεταφοράς ως εξής:

$$[H(\omega)] = \sum_{i=1}^n \frac{\underline{u}_i \underline{l}_i^T}{j\omega - \lambda_i} + \frac{\underline{u}_i^* \underline{l}_i^H}{j\omega - \lambda_i^*} - \frac{LR}{\omega^2} + UR \quad (2.22)$$

Γράφουμε τώρα την (2.22) στη μορφή:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^m \left(\underline{u}_r \frac{\eta(\omega)}{j\omega - \lambda_r} + \underline{u}_r^* \frac{\eta(\omega)}{j\omega - \lambda_r^*} \right) - \frac{\eta(\omega)}{\omega^2} \underline{\alpha} + \underline{\beta} \eta(\omega) \quad (2.23)$$

όπου το διάνυσμα των ιδιομορφών έχει ως εξής:

$$\underline{u}_r = \underline{\varphi}_r + \dot{\underline{\psi}}_r$$

και

$$\underline{u}_r^* = \underline{\varphi}_r - \dot{\underline{\psi}}_r$$
(2.24)

Ορίζουμε τώρα την παράμετρο $\underline{\theta}$ να είναι το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων $\underline{\varphi}_r, \underline{\psi}_r, \underline{\alpha}, \underline{\beta}$. Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση σφάλματος $J(\underline{\theta})$:

$$J(\underline{\theta}) = \sum_{k=1}^N \left[\underline{H}(\omega_k; \underline{\theta}) - \hat{\underline{H}}(\omega_k) \right]^* \left[\underline{H}(\omega_k; \underline{\theta}) - \hat{\underline{H}}(\omega_k) \right]$$
(2.25)

Αυτό που επιδιώκουμε τώρα είναι να προσδιορίσουμε την παράμετρο $\underline{\theta}$ που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση σφάλματος $J(\underline{\theta})$. Για το σκοπό αυτό θέτουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης σφάλματος ως προς τις άγνωστες παραμέτρους $\underline{\Phi}_r, \underline{\Psi}_r, \underline{\alpha}, \underline{\beta}$ ίσες με το μηδέν. Αναλυτικά:

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{li}} = 0$$
(2.26α)

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \Psi_{li}} = 0$$
(2.26β)

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \alpha_1} = 0$$
(2.26γ)

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \beta_1} = 0$$
(2.26δ)

όπου $l = 1, \dots, N_{\text{out}}$ και $N_{\text{out}} \equiv \#$ των βαθμών ελευθερίας εξόδου.

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων καταλήγουμε σε τέσσερις εξισώσεις που έχουν ωστόσο κοινό τον πίνακα συντελεστών των αγνώστων, οπότε μπορούν να γραφούν στην ακόλουθη συμπαγή μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{x} & \underline{y} \\ \underline{x}^T & H_{11} & H_{12} \\ \underline{y}^T & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Phi}^T \\ \underline{\Psi}^T \\ \underline{\alpha}^T \\ \underline{\beta}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{\gamma}^T \\ \underline{\delta}^T \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

όπου

$$\underline{M} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \underline{\mu} \underline{\mu}^{*T} \right\} \quad (2.28)$$

$$\underline{x} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\eta(\omega_k)}{\omega_k^2} \underline{\mu} \right\} \quad (2.29)$$

$$\underline{y} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \eta(\omega_k) \underline{\mu} \right\} \quad (2.30)$$

$$H_{11} = \sum_{k=1}^N \frac{\eta^2(\omega_k)}{\omega_k^4} = N, H_{12} = -\sum_{k=1}^N \frac{\eta^2(\omega_k)}{\omega_k^2} = -\sum_{k=1}^N \omega_k^2 = H_{21}^T, H_{22} = N\eta^2(\omega) \quad (2.31)$$

$$\underline{B} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \underline{\mu} \hat{\underline{H}}^{*T}(\omega_k) \right\} \quad (2.32)$$

$$\underline{\gamma}^T = -\sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \text{Re} \left\{ \hat{\underline{H}}^{*T}(\omega_k) \right\} \quad (2.33)$$

$$\underline{\delta}^T = \sum_{k=1}^N \text{Re} \left\{ \hat{\underline{H}}^{*T}(\omega_k) \right\} \quad (2.34)$$

$$\underline{\mu} = \underline{\mu}(\omega_k) = \begin{Bmatrix} \mu_1^+(\omega_k) \\ \vdots \\ \mu_m^+(\omega_k) \\ \mu_1^-(\omega_k) \\ \vdots \\ \mu_m^-(\omega_k) \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mu_r^+(\omega_k) = \frac{\eta(\omega)}{j\omega_k - \lambda_r} + \frac{\eta(\omega)}{j\omega_k - \lambda_r^*} \quad (2.36)$$

$$\mu_r^-(\omega_k) = \left\{ \frac{\eta(\omega)}{j\omega_k - \lambda_r} + \frac{\eta(\omega)}{j\omega_k - \lambda_r^*} \right\} j \quad (2.37)$$

2.6.2. Μοντέλο Με Κλασσική Απόσβεση

Στην περίπτωση που θεωρούμε κλασσική απόσβεση στο σύστημά μας, οι ιδιομορφές μπορούν να απλοποιηθούν και ως αποτέλεσμα η συνάρτηση μεταφοράς να γραφεί στη μορφή:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^m \left(\underline{\varphi}_r \frac{e^{j\varphi_r}}{j\omega - \lambda_r} + \underline{\varphi}_r \frac{e^{-j\varphi_r}}{j\omega - \lambda_r^*} \right) - \frac{1}{\omega^2} \underline{\alpha} + \underline{\beta} \quad (2.38)$$

όπου οι παράμετροι που θα πρέπει να προσδιορισθούν είναι οι $\underline{\Phi}_1, \dots, \underline{\Phi}_m$ και οι $\underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_m, \underline{\alpha}$ και $\underline{\beta}$. Οι ιδιοτιμές έχουν προκύψει από την επίλυση του πρώτου προβλήματος. Εισάγουμε τώρα:

$$\mu_r(\varphi_r) = \frac{e^{j\varphi_r}}{j\omega - \lambda_r} + \frac{e^{-j\varphi_r}}{j\omega - \lambda_r^*} \quad (2.39)$$

οπότε η εξίσωση (2.38) παίρνει τη μορφή:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^m \left(\varphi_r \mu_r(\varphi_r) \right) - \frac{1}{\omega^2} \underline{\alpha} + \underline{\beta} \quad (2.40)$$

Ορίζουμε τώρα τις παραμέτρους $\underline{\theta}, \underline{\varphi}$ ως εξής:

$$\underline{\theta} = \{ \varphi_r, r = 1, \dots, m, \underline{\alpha}, \underline{\beta} \} \quad (2.41)$$

$$\underline{\varphi} = \{ \varphi_1, \dots, \varphi_m \}$$

Επομένως θα έχουμε για συνάρτηση σφάλματος ότι $J(\underline{\theta}_1) = J(\underline{\theta}, \underline{\varphi})$. Δηλαδή η συνάρτηση σφάλματος $J(\underline{\theta}_1)$ είναι τετραγωνική ως προς το $\underline{\theta}$. Συνεπώς μπορούμε να πάρουμε μια λύση για την $\underline{\theta}(\underline{\varphi})$ λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων ως προς το $\underline{\theta}$, το οποίο όμως θα είναι εκφρασμένο συναρτήσει του $\underline{\varphi}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η ελαχιστοποίηση της $J(\underline{\theta}_1)$ μπορεί να προκύψει από την ελαχιστοποίηση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$J(\underline{\theta}_1) = J(\underline{\theta}(\underline{\varphi}), \underline{\varphi}) = J^*(\underline{\varphi}) \quad (2.42)$$

όπου

$$A(\underline{\varphi}) \underline{\theta}(\underline{\varphi}) = \underline{b}(\underline{\varphi}) \quad (2.43)$$

Και πάλι λοιπόν, θέλοντας να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση σφάλματος, θέτουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης σφάλματος ως προς τις άγνωστες παραμέτρους $\underline{\Phi}_r, \underline{\alpha}, \underline{\beta}$ ίσες με το μηδέν. Αναλυτικά:

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \Phi_{ri}} = 0 \quad (2.44\alpha)$$

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \alpha_1} = 0 \quad (2.44\beta)$$

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \beta_1} = 0 \quad (2.44\gamma)$$

Με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς την παράμετρο $\underline{\theta}$:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}(\underline{\varphi}) & \underline{x}(\underline{\varphi}) & \underline{y}(\underline{\varphi}) \\ \underline{x}^T(\underline{\varphi}) & H_{11} & H_{12} \\ \underline{y}^T(\underline{\varphi}) & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Phi}^T \\ \underline{\alpha}^T \\ \underline{\beta}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{\gamma}^T \\ \underline{\delta}^T \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

όπου:

$$\underline{M}(\underline{\varphi}) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \underline{\mu}(\varphi) \underline{\mu}^{*T}(\varphi) \right\} \quad (2.46)$$

$$\underline{x}(\underline{\varphi}) = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \text{Re} \{ \underline{\mu}(\varphi) \} \quad (2.47)$$

$$\underline{y}(\underline{\varphi}) = \sum_{k=1}^N \text{Re} \{ \underline{\mu}(\varphi) \} \quad (2.48)$$

$$H_{11} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^4}, H_{12} = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} = H_{21}^T, H_{22} = N \quad (2.49)$$

$$\underline{B}(\underline{\varphi}) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^N \underline{\mu}(\varphi) \hat{\underline{H}}^{*T}(\omega_k) \right\} \quad (2.50)$$

$$\underline{\gamma}^T = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\omega_k^2} \text{Re} \{ \hat{\underline{H}}^{*T}(\omega_k) \} \quad (2.51)$$

$$\underline{\delta}^T = \sum_{k=1}^N \text{Re} \{ \hat{\underline{H}}^{*T}(\omega_k) \} \quad (2.52)$$

$$\underline{\mu}(\underline{\varphi}) = \begin{bmatrix} \mu_1(\varphi) \\ \vdots \\ \mu_m(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Κεφάλαιο 3 Εφαρμογές

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των πειραματικών κατασκευών και των διατάξεων συλλογής μετρήσεων (επιταχύνσεων), που βρίσκονται στο Εργαστήριο Δυναμικής Συστημάτων του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, και παρουσιάζεται η επεξεργασία των μετρήσεων, για δεδομένα διέγερσης λόγω κρουστικής ταλάντωσης, με τη μέθοδο μορφικής αναγνώρισης PolyMAX που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σκοπός είναι η εκτίμηση των ιδιοσυχνοτήτων, των συντελεστών απόσβεσης και των ιδιομορφών των κατασκευών, δηλαδή των μορφικών χαρακτηριστικών τους, αποτελέσματα των οποίων παρουσιάζονται στο τέλος του κεφαλαίου για διάφορες πειραματικές διατάξεις.

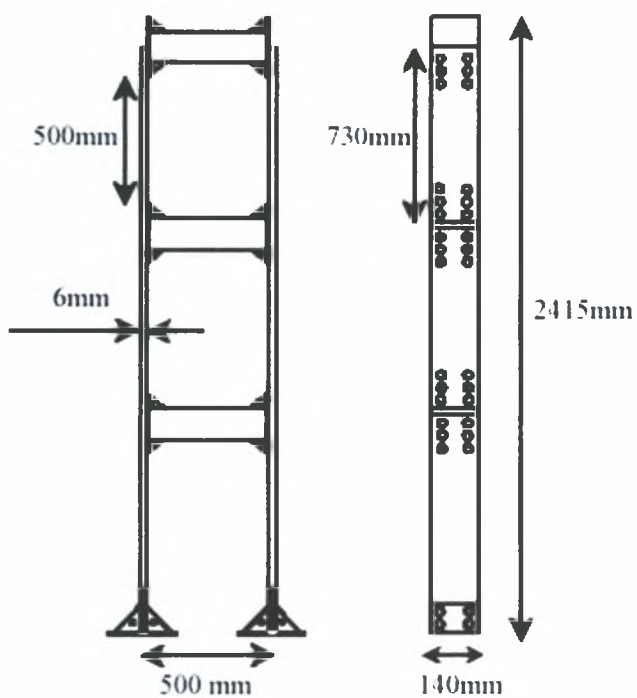
3.2 Περιγραφή Μεταλλικών Κατασκευών Εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων

3.2.1 Περιγραφή Τριώροφης Μεταλλικής Κατασκευής

Η κατασκευή που περιγράφεται στη συνέχεια αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης και εφαρμογής της μεθόδου αναγνώρισης ελεύθερης ταλάντωσης PolyMAX με κλασσική και μη-κλασσική απόσβεση, και είναι η τριώροφη μεταλλική κατασκευή του εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων. Η κατασκευή αποτελείται από τρία όμοια τμήματα-όροφους και είναι κατασκευασμένη από χάλυβα. Κάθε όροφος αποτελείται από δύο κατακόρυφες πλάκες και μία δοκό που συνδέονται σταθερά μεταξύ τους με κοχλίες. Συνολικά η κατασκευή αποτελείται από 6 πλάκες και 3 δοκούς. Η κατασκευή είναι πακτωμένη με το έδαφος και εμποδίζεται έτσι η μετακίνηση της βάσης της, προς κάθε διεύθυνση. Στην εικόνα 3.2.1.1, φαίνεται η μεταλλική κατασκευή και στο σκαρίφημα της εικόνας 3.2.1.2, φαίνονται οι βασικές διαστάσεις της.

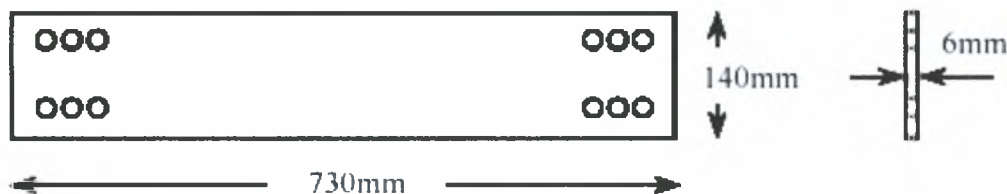


Εικόνα 3.2.1.1. Άποψη της κατασκευής



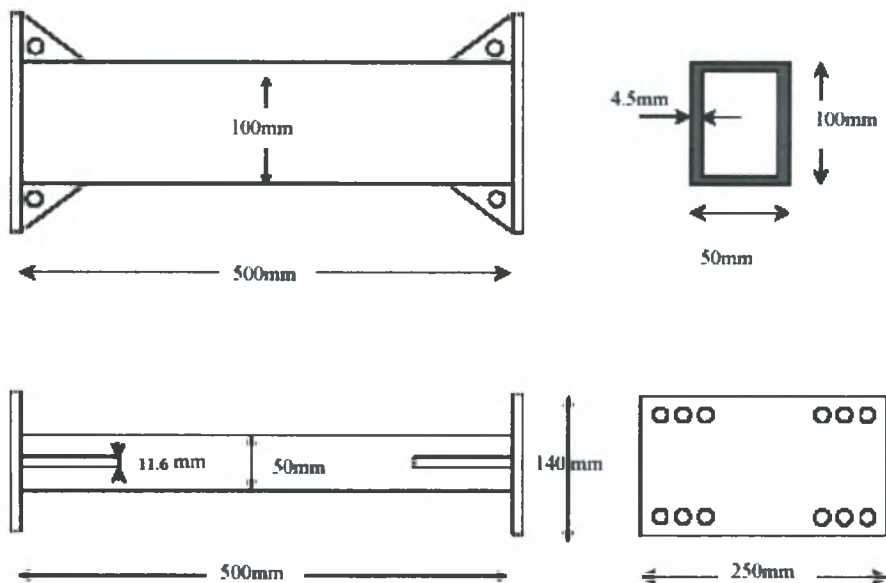
Εικόνα 3.2.1.2. Οι βασικές διαστάσεις της κατασκευής.

Κάθε πλάκα έχει μήκος 730 mm, πλάτος 140 mm, πάχος 6.06 mm και ζυγίζει 4.8 Kg (Εικόνα 3.2.1.3). Σε ότι αφορά στο πάχος της κάθε πλάκας, τα 6 mm είναι το καθαρό πάχος, ενώ τα 0.06 mm είναι το πάχος που οφείλεται στο κίτρινο χρώμα που επικαλύπτει την επιφάνειά της. Το πάχος του χρώματος θεωρείται το ίδιο σε όλη την κατασκευή. Σε κάθε ένα από τα άκρα της κάθε πλάκας υπάρχουν 6 οπές, που χρησιμεύουν για τη σύνδεση των πλακών με τις δοκούς της κατασκευής, σύνδεση που γίνεται με κοχλίες.



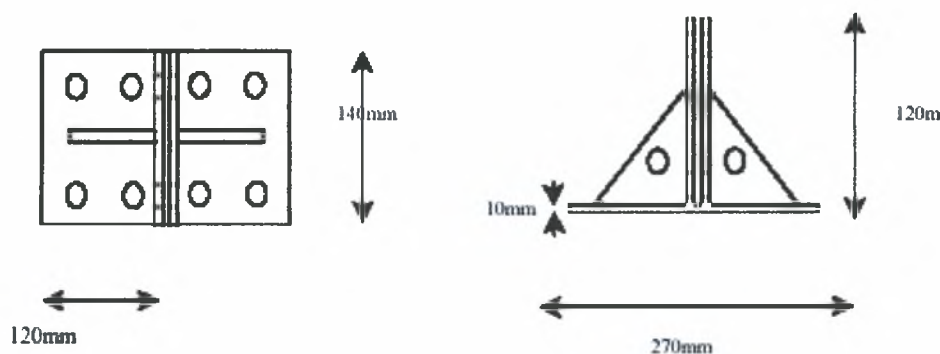
Εικόνα 3.2.1.3. Σκαρίφημα της πλάκας

Η διατομή κάθε δοκού είναι 50x100 mm, ενώ το πάχος των τοιχωμάτων της είναι 4.5 mm (Εικόνα 3.2.1.4). Το μήκος της είναι 500 mm. Στα άκρα της κάθε δοκού έχουν κολληθεί με ηλεκτροκόλληση λαμαρίνες διαστάσεων 250x140 mm και πάχους 10 mm. Οι λαμαρίνες αυτές, προστέθηκαν για να δημιουργηθούν οι οπές, έτσι ώστε να γίνει η κοχλιοσύνδεση της δοκού με τις πλάκες. Πάνω σε κάθε δοκό έχουν κολληθεί και τέσσερα τριγωνικά στελέχη, με μία οπή στη μέση, για να είναι δυνατή η σύνδεση των διαγώνιων στοιχείων μεταξύ των ορόφων. Το καθαρό βάρος του τμήματος της δοκού, που δεν περιλαμβάνει τις παράπλευρες λαμαρίνες και τα τριγωνικά στελέχη, υπολογιζόμενο με βάση την πυκνότητα του χάλυβα και των διαστάσεων του, είναι 4,96 Kg. Το συνολικό βάρος της δοκού, μαζί με τις παράπλευρες επιφάνειες και τα τριγωνικά στελέχη, είναι 11,8 Kg και προέκυψε με ζύγιση της δοκού.



Εικόνα 3.2.1.4. Κάτοψη, πλάγια όψη και διατομή της δοκού.

Ο συνολικός αριθμός των κοχλιών που απαιτούνται για τη συναρμολόγηση της κατασκευής, όπως αυτή φαίνεται στην εικόνα 3.2.1.1, είναι 68. Κάθε κοχλίας ζυγίζει 50 gr. Για να εξασφαλισθεί η ακινησία της κατασκευής στη βάση δημιουργήθηκε πάκτωση. Η συνδεσμολογία της βάσης φαίνεται στο σχήμα 3.2.1.5. Οι πλάκες του πρώτου ορόφου, τοποθετούνται στο κενό μεταξύ των δύο στηριγμάτων και στερεώνονται με κοχλίες.



Εικόνα 3.2.1.5. Κάτοψη και τομή βάσης κατασκευής.

Για την αύξηση της ακαμψίας της κατασκευής, υπάρχει η δυνατότητα να τοποθετούνται στοιχεία μεταλλικής λάμας σε αυτή (εικόνα 3.2.1.7). Τα στοιχεία αυτά είναι φτιαγμένα από χάλυβα, έχουν μήκος 785 mm και το βάρος τους είναι 1,240 Kg . Το καθαρό πάχος τους είναι 5 mm, ενώ επικαλύπτονται από μπλε χρώμα πάχους 0,02 mm. Τα στοιχεία στερεώνονται με κοχλίες πάνω στα τριγωνικά στελέχη των δοκών, σε διαγώνια θέση μεταξύ των ορόφων και είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν σε

διάφορους συνδυασμούς, ανάλογα με το αποτέλεσμα της ακαμψίας που θέλουμε να πετύχουμε. Στην εικόνα 3.2.1.6 φαίνονται όλες οι διαστάσεις της μεταλλικής λάμας :



Εικόνα 3.2.1.6. Διαστάσεις μεταλλικών στοιχείων

Υπάρχει επίσης η δυνατότητα να χρησιμοποιήθουν συρματόσκοινα, αντί για μεταλλικά στοιχεία, διαμέτρου 3 mm. Τα συρματόσκοινα τοποθετούνται και πάλι σε διαγώνια θέση και στερεώνονται με γάντζους στις οπές των τριγωνικών στελεχών των δοκών, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.2.1.8.

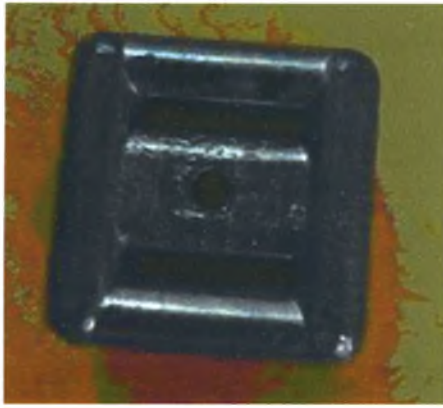


Εικόνα 3.2.1.7. Μεταλλικό στοιχείο στην κατασκευή.

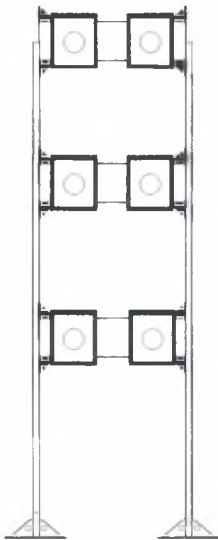


Εικόνα 3.2.1.8. Συρματόσκοινο.

Στα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν και περιγράφονται στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε έναν τρίτο τρόπο για τη μεταβολή της ακαμψίας της κατασκευής, ο οποίος αντικαθιστά τα διαγώνια στοιχεία με έξι ειδικές μάζες, βάρους 3760 gr και οι οποίες τοποθετούνται ανά δύο στα άκρα της κάθε δοκού, όπως φαίνεται στις εικόνες 3.2.1.9 και 3.2.1.10:



Εικόνα 3.2.1.9. Μεταλλική Μάζα.



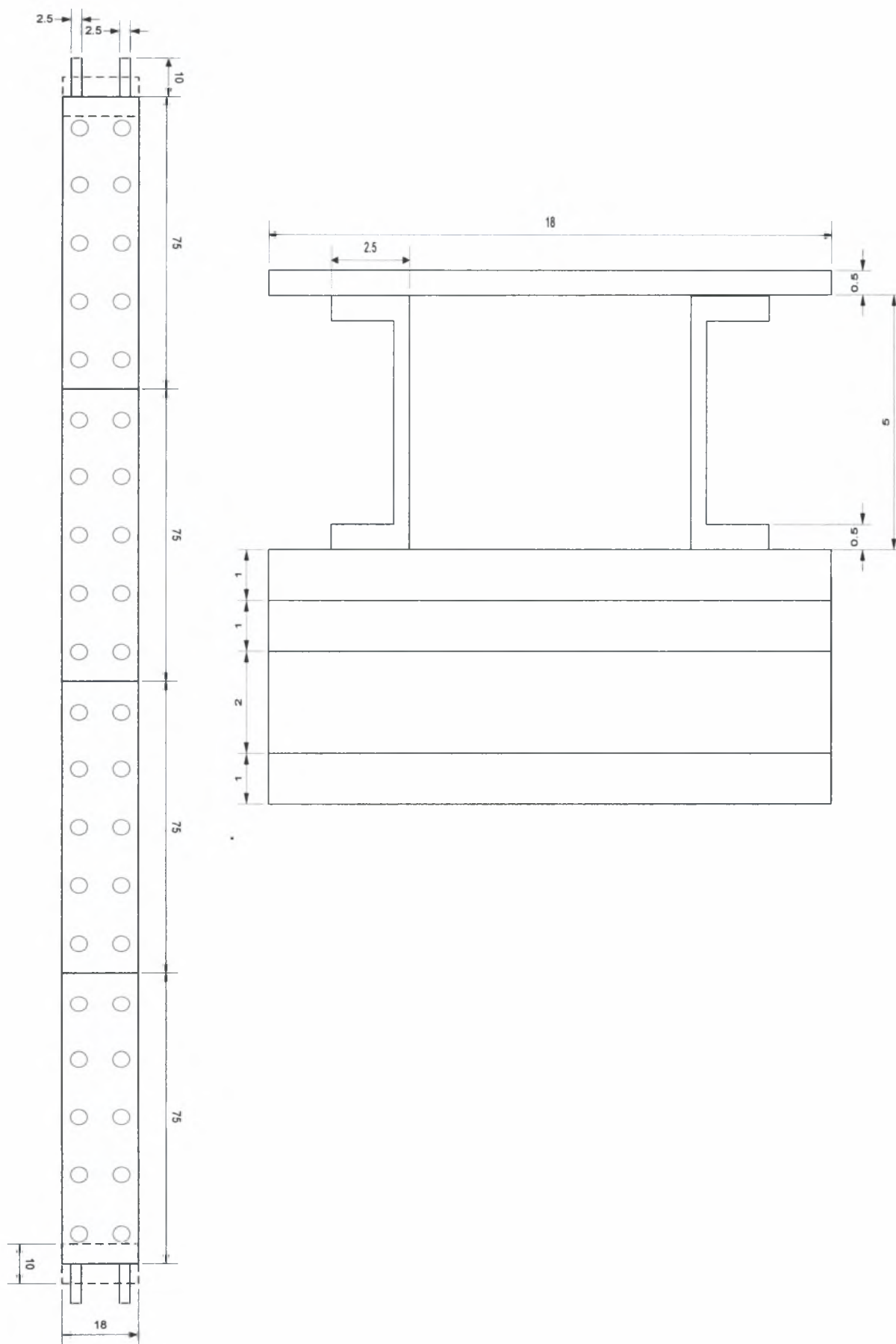
Εικόνα3.2.1.10.
Διάταξη μαζών στην κατασκευή

3.2.2 Περιγραφή Κατασκευής Μεταλλικής Γέφυρας

Η κατασκευή που περιγράφεται στη συνέχεια είναι η κατασκευή της μεταλλικής γέφυρας του εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων και αποτέλεσε επίσης αντικείμενο μελέτης και εφαρμογής της μεθόδου αναγνώρισης ελεύθερης ταλάντωσης PolyMAX με κλασσική και μη-κλασσική απόσβεση, όπως και η τριώροφη μεταλλική κατασκευή που περιγράφηκε παραπάνω. Η κατασκευή αποτελείται από τέσσερις όμοιες χαλύβδινες πλάκες οι οποίες στηρίζονται επάνω σε δύο όμοιες παράλληλες δοκούς, επίσης από χάλυβα, οι οποίες με τη σειρά τους είναι αρθρωμένες σε κάθε τους άκρο σε μία ορθογωνική στήριξη από μπετόν. Στην εικόνα 3.2.2.1, φαίνεται η μεταλλική κατασκευή και στο σκαρίφημα της εικόνας 3.2.2.2, φαίνονται οι βασικές διαστάσεις της.

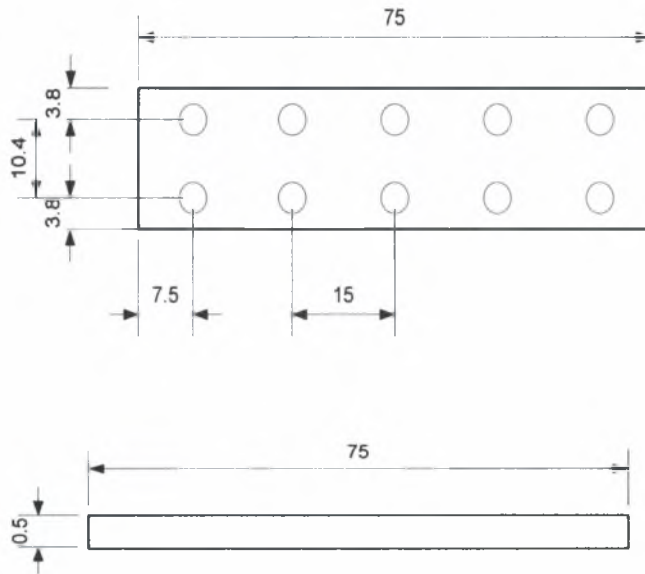


Εικόνα 3.2.2.1. Άποψη της κατασκευής



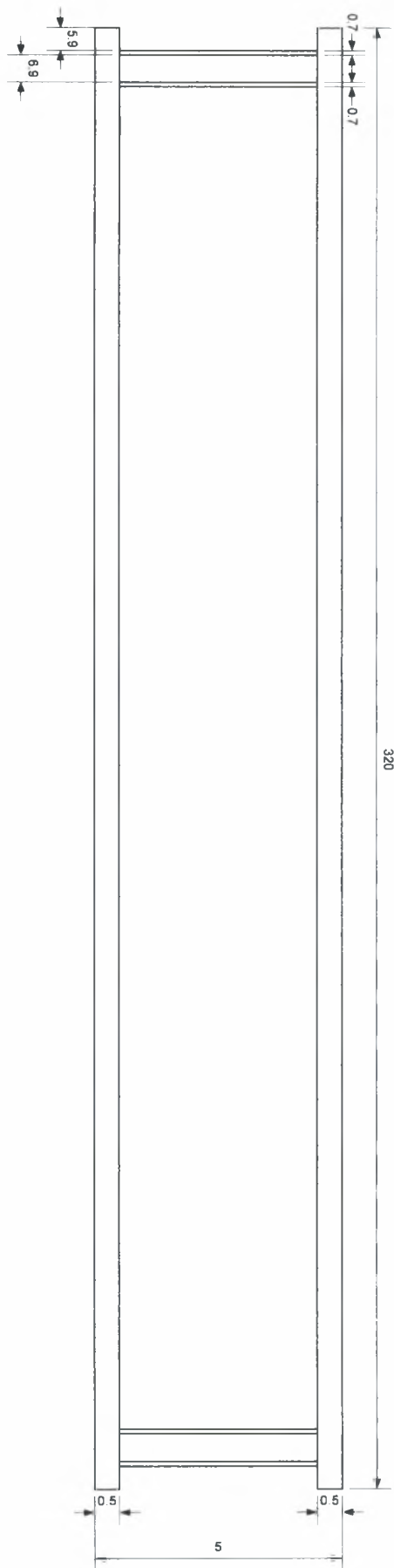
Εικόνα 3.2.2.2 Κάτοψη και Κύρια Όψη της κατασκευής

Οι διαστάσεις της κάθε πλάκας είναι 75 cm μήκος, 18 cm πλάτος και 0.5cm πάχος (Εικόνα 3.2.2.3). Στην επιφάνεια καθεμίας πλάκας είναι κατανεμημένες δέκα σπές οι οποίες χρησιμεύουν για τη σύνδεση των πλακών με τις δοκούς στήριξης, σύνδεση που γίνεται με κοχλίες.

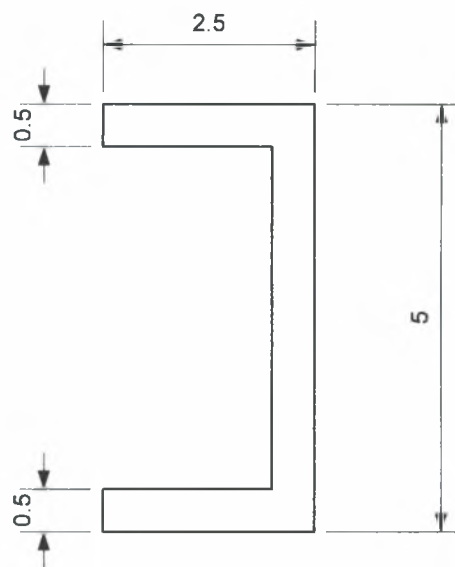


Εικόνα 3.2.2.3. Κάτοψη και πλάγια όψη της πλάκας.

Όσον αφορά τις δοκούς στήριξης, έχουν μήκος 320 cm πλάτος 2,5 cm και ύψος 5 cm. Στην εικόνα 3.2.2.4 απεικονίζονται οι διαστάσεις των δοκών και των διατομών τους.

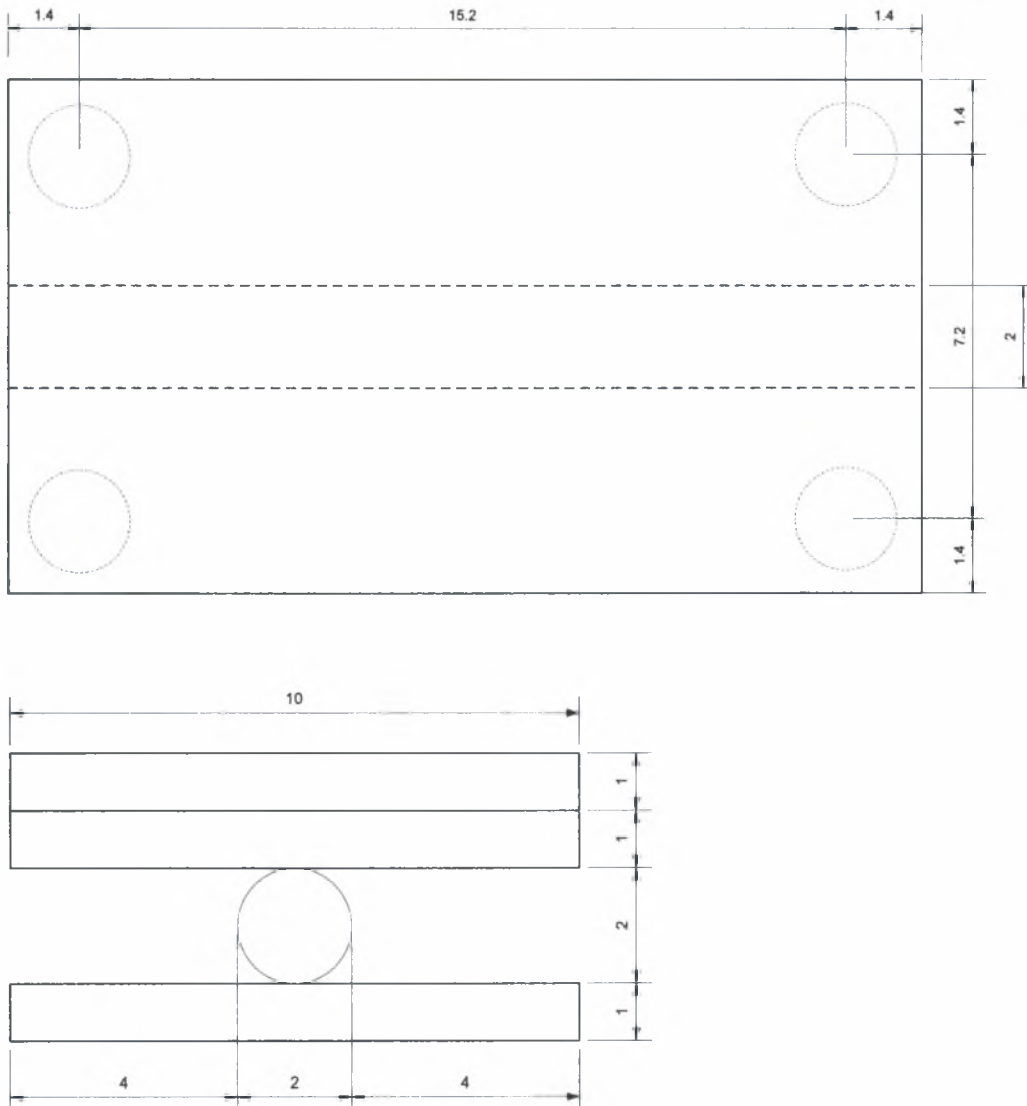


Εικόνα 3.2.2.4.α Κύρια όψη της δοκού.



Εικόνα 3.2.2.4.β Τομή της δοκού

Σχετικά με τις βάσεις, οι κύριες διαστάσεις τους απεικονίζονται στο σχήμα 3.2.2.5. Το κάτω μέρος της κάθε βάσης συνδέεται με την τσιμεντένια στήριξη μέσω τεσσάρων κοχλιών στα άκρα του.



Εικόνα 3.2.2.5. Κάτοψη και πλάγια όψη βάσης κατασκευής.

Το συνολικό βάρος της κατασκευής, που περιλαμβάνει τις τέσσερις πλάκες, τις δύο δοκούς και τις κοχλιοσυνδέσεις, φτάνει τα 46,274 kg.

Επειδή η κατασκευή στη μορφή που περιγράφεται παραπάνω αποτελείται σχεδόν εκατό τοις εκατό από χάλυβα, το μέτρο ελαστικότητας του οποίου είναι 200 GPa, έχουμε ως αποτέλεσμα η κατασκευή να αποδεικνύεται ιδιαίτερα δύσκαμπτη. Για το λόγο αυτό και όπως θα φανεί στα πειράματα που ακολουθούν, μας δίνεται η δυνατότητα να αντικαταστήσουμε όποιες και όσες από τις χαλύβδινες πλάκες θέλουμε με αντίστοιχες πλάκες ίδιων διαστάσεων ή όλες με μία ισοδύναμου συνολικού μήκους, αλλά από διαφορετικό υλικό. Στα πειράματα λοιπόν που έχουν διενεργηθεί το υλικό αυτό είναι το πλεξιγκλάς, με μέτρο ελαστικότητας 4 GPa, και βάρος 0,803 kg

Επίσης, έχουμε τη δυνατότητα να τοποθετήσουμε μεταξύ της κατασκευής και των στηρίξεων ορθογωνικά εφέδρανα από καουτσούκ διαστάσεων 8,5x3.5x0,5 cm με σκοπό να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρεται η κατασκευή. Για κάθε πείραμα λοιπόν στο οποίο έχουμε προβεί, έχει γίνει και το αντίστοιχο υπό την παρουσία εφεδράνων, ενώ για τη διάταξη με την ενιαία πλάκα από πλεξιγκλάς έγινε ένα επιπλέον πείραμα με τη χρήση λεπτότερων εφεδράνων, διαστάσεων 8,5x3.5x0,25 cm.

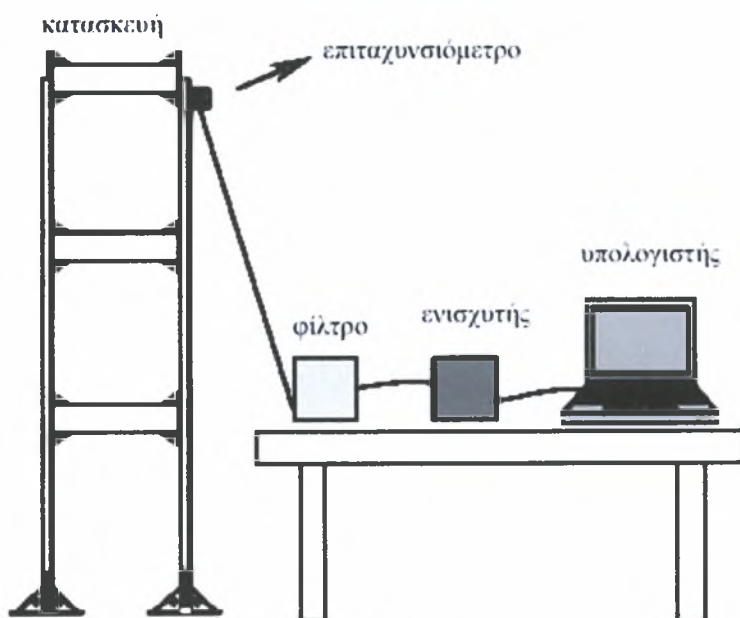
3.3 Πειραματικές Διατάξεις και Διαδικασία Μετρήσεων

Το εργαστήριο Δυναμικής Συστημάτων διαθέτει σύστημα ανάλυσης και επεξεργασίας ταλαντωτικών μετρήσεων, το οποίο προσαρμόζεται κατάλληλα κάθε φορά στην εξεταζόμενη κατασκευή ούτως ώστε να επιτύχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια κατά τη συλλογή των πειραματικών δεδομένων. Συγκεκριμένα, το σύστημα πειραματικού προσδιορισμού, αποτελείται από έναν αριθμό επιταχυνσιόμετρων, το φίλτρο, τον ενισχυτή, την κάρτα δειγματοληψίας και τον ηλεκτρονικό υπολογιστή που ελέγχει την όλη διαδικασία. Τα επιταχυνσιόμετρα τοποθετούνται πάνω στην κατασκευή για να καταγράψουν τις χρονικές μεταβολές των επιταχύνσεων της κατασκευής στα σημεία μέτρησης. Πριν από την έναρξη του πειράματος, όλες οι συσκευές και τα αισθητήρια όργανα τροφοδοτούνται με ρεύμα. Ανάλογα με την ακαμψία της κατασκευής, κάποια επιταχυνσιόμετρα απαιτούν μεγαλύτερη ενίσχυση από άλλα και επομένως οι συσκευές φίλτρου και ενίσχυσης πρέπει να ρυθμιστούν κατάλληλα, για κάθε όργανο ξεχωριστά.

Για τη συλλογή του σήματος επιτάχυνσης, η κατασκευή διεγείρεται με χτύπημα από κρουστικό σφυρί σε κάποιο σημείο της και πραγματοποιεί ταλάντωση, το εύρος της οποίας ποικίλει ανάλογα με την ακαμψία της κατασκευής. Η δειγματοληψία έχει ξεκινήσει από τον υπολογιστή, λίγο πριν από το χτύπημα της κατασκευής. Το σήμα που δίνουν τα επιταχυνσιόμετρα και το δυναμόμετρο του κρουστικού σφυριού οδηγείται στον υπολογιστή, όπου με τη βοήθεια της κάρτας δειγματοληψίας (data acquisition card) μετατρέπεται από αναλογικό σε ψηφιακό.

Ο υπολογιστής ενημερώνεται για όλες τις ρυθμίσεις των συσκευών, μέσω του λογισμικού Measurement and Automation, που είναι συνοδευτικό των συσκευών συλλογής και επεξεργασίας των μετρήσεων και διανέμεται από την National Instruments. Το σήμα φιλτράρεται από τη συσκευή φίλτρου SCXI-1305 της National Instruments και ενισχύεται από τον ενισχυτή SCXI-1140 της ίδιας εταιρίας.

Τελικά τα αποτελέσματα των μετρήσεων αποθηκεύονται ως χρονικές ιστορίες επιταχύνσεων και δύναμης στη θέση κρουστικής διέγερσης και αποτελούν δεδομένα προς επεξεργασία από το πρόγραμμα αναγνώρισης ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών. Το πρόγραμμα αναγνώρισης, είναι γραμμένο σε κώδικα Matlab και χρησιμοποιεί τη θεωρία του κεφαλαίου 2 για να μας δώσει τις ιδιοσυχνότητες, τους συντελεστές απόσβεσης και τις ιδιομορφές της κατασκευής, σε μορφή διανυσμάτων. Μια απλοποιημένη περιγραφή της πειραματικής διάταξης φαίνεται στην εικόνα 3.3.1.



Εικόνα 3.3.1. Η πειραματική διάταξη.

Προτού ωστόσο καταλήξουμε στο πρόγραμμα αναγνώρισης, μεσολαβεί η διαδικασία συλλογής δεδομένων από το πείραμα, και συγκεκριμένα η συλλογή των χρονικών ιστοριών των επιταχύνσεων από τα επιταχυνσιόμετρα της κατασκευής και της χρονικής ιστορίας της δύναμης διέγερσης από το δυναμόμετρο του κρουστικού σφυριού. Η διαδικασία αυτή μπορεί να διεκπεραιωθεί με δύο τρόπους, είτε μέσω του προγράμματος LabVIEW, είτε απευθείας από το πρόγραμμα Matlab.

Όσον αφορά την πρώτη περίπτωση, έχει αναπτυχθεί από τον Κώστα Χριστοδούλου (2001) κώδικας ελέγχου της πειραματικής διάταξης, σε περιβάλλον LabVIEW. Συγκεκριμένα, ο κώδικας αυτός συνίσταται στη δημιουργία ενός διαγράμματος ροής που προσομοιώνει την πειραματική διάταξη και τα στοιχεία από τα οποία αυτή αποτελείται. Ενδεικτικά λοιπόν δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να επιλέξει τις παραμέτρους της δειγματοληψίας (συχνότητα, διάρκεια δειγματοληψίας) και να ορίσει την έναρξή της, καθώς και να εισάγει για κάθε επιταχυνσιόμετρο στο διάγραμμα ροής ένα φίλτρο το οποίο να απομακρύνει τις ανεπιθύμητες συχνότητες από το σήμα που συλλέγεται. Μετά το τέλος της δειγματοληψίας το πρόγραμμα παρουσιάζει τα επιταχυνσιογραφήματα για κάθε αισθητήριο ξεχωριστά καθώς και το αντίστοιχο διάγραμμα φασματικής πυκνότητας μέσω της ανάλυσης Fast Fourier Transform (fft). Το πλεονέκτημα του κώδικα σε περιβάλλον LabVIEW είναι ότι παρουσιάζει τα αποτελέσματα και γενικότερα την όλη διαδικασία συλλογής δεδομένων σε ένα περιβάλλον ιδιαίτερα φιλικό προς τον χρήστη. Μειονέκτημα αποτελεί το γεγονός ότι, δεδομένης της χρήσης του προγράμματος Matlab για τη διαδικασία της μορφικής αναγνώρισης, θα πρέπει να μεταφερθούν οι χρονικές ιστορίες των επιταχυνσιομέτρων από το ένα πρόγραμμα στο άλλο, διαδικασία που απαιτεί τη χρήση ενός τρίτου προγράμματος (Microsoft Excel). Η μεταφορά αυτή μπορεί να μην είναι τόσο χρονοβόρα, ωστόσο επιβάλλει τη συμμετοχή του χρήστη και καθιστά έτσι τη διαδικασία μη-αυτοματοποιημένη.

Θα ήταν λοιπόν επιθυμητό να μπορούμε να χειριστούμε όλη τη διαδικασία απευθείας μέσω του προγράμματος Matlab, ούτως ώστε να έχουμε τη δυνατότητα αυτοματοποίησης της διαδικασίας συλλογής δεδομένων και μορφική αναγνώριση. Πράγματι το Matlab παρέχει αυτή τη δυνατότητα μέσω του Data Acquisition Toolbox. Αναλυτικότερα, μέσα σε αυτό περιέχονται όλες οι απαιτούμενες εντολές για τη σύνταξη ενός προγράμματος το οποίο να μπορεί: α) να αναγνωρίζει την κάρτα δειγματοληψίας, β) να ορίζει τα κανάλια της συσκευής της National Instruments από τα οποία επιθυμούμε να συλλέξουμε πληροφορίες, γ) να επιτρέπει στο χρήστη να προσδιορίζει παραμέτρους

όπως η συχνότητα δειγματοληψίας και ο αριθμός των συλλεγμένων δειγμάτων και δ) να ξεκινά τη δειγματοληψία κατά βούληση, ε) να παρουσιάζει τα επιταχυνσιογραφήματα και τα διάγραμμα φασματικής πυκνότητας (fft) όλων των αισθητηρίων, αλλά το σημαντικότερο, στ) να αποθηκεύει τις χρονικές ιστορίες σε μορφή κατάλληλη ώστε να μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε απευθείας στο πρόγραμμα μορφικής αναγνώρισης. Αναλυτικός κώδικας των παραπάνω διαδικασιών παρατίθεται στο τέλος της εργασίας, στο παράρτημα 1.

Τα μειονεκτήματα αυτού του προγράμματος έναντι του αντίστοιχου σε περιβάλλον LabVIEW είναι ότι αφενός δεν είναι τόσο φιλικό προς το χρήστη (π.χ. για το φιλτράρισμα των σημάτων θα πρέπει να εισάγουμε το κάθε σήμα στο SPTool), αφετέρου και κρισιμότερου, επιτρέπει τη συλλογή δεδομένων από μία μόνο υποδοχή της συσκευής της National Instruments, που μεταφράζεται σε περιορισμό των διαθέσιμων καναλιών σε οχτώ (όσα δηλαδή παρέχει η μία υποδοχή της συσκευής). Αντιθέτως μέσω LabVIEW έχουμε τη δυνατότητα πολλαπλής συλλογής δεδομένων (multiplex mode), που για την πειραματική διάταξη του εργαστηρίου σημαίνει την ταυτόχρονη χρήση δύο υποδοχών συλλογής δεδομένων, δηλαδή δεκαέξι καναλιών.

Για το λόγο αυτό και επειδή στα πειράματα που διενεργήθηκαν απαιτούνταν η χρήση περισσότερων από οχτώ επιταχυνσιομέτρων για την εξαγωγή της πλήρους πληροφορίας από την εκάστοτε πειραματική διάταξη, η συλλογή δεδομένων έγινε μέσα από το περιβάλλον του LabVIEW, και ακολούθως η μορφική αναγνώριση με τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω. Παρόλα αυτά, ο κώδικας που παρατίθεται στο τέλος της εργασίας λειτουργεί κανονικά για πειράματα που απαιτούν τη χρήση μέχρι και οχτώ επιταχυνσιομέτρων, και θα λειτουργεί κανονικά και για περισσότερα εφόσον μία μελλοντική έκδοση του Matlab θα περιλαμβάνει τη δυνατότητα επιλογής πολλαπλής συλλογής δεδομένων.

3.4 Διαδικασία Μορφικής αναγνώρισης

Κατά τη διαδικασία της μορφικής αναγνώρισης υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες, οι συντελεστές απόσβεσης και οι ιδιομορφές της κατασκευής που εξετάζεται. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται μέσω ενός προγράμματος σε κώδικα Matlab, τη δημιουργία του οποίου έχει επιμεληθεί ο Βαγγέλης Ντότσιος, υποψήφιος διδάκτωρ στο Εργαστήριο

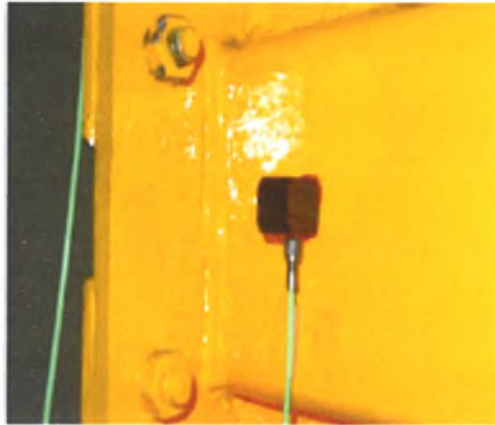
Δυναμικής Συστημάτων πρόγραμμα το οποίο πραγματώνει τη μέθοδο που αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο και που χρησιμοποιεί ως δεδομένο εισόδου τα πειραματικά δεδομένα που προκύπτουν από την υπό εξέταση κατασκευή. Εν ολίγοις και σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το μέτρο της διαφοράς μεταξύ των συναρτήσεων μετάδοσης (Frequency Response Functions) που προέρχονται από το μαθηματικό μοντέλο και των συναρτήσεων μετάδοσης που υπολογίζονται από το πειραματικά δεδομένα συνιστά μια αντικειμενική συνάρτηση σφάλματος, η βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) της οποίας παράγει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

3.5 Περιγραφή Αισθητηρίων Οργάνων των Κατασκευών

Για τη συλλογή των μετρήσεων χρησιμοποιούνται δυο τύποι επιταχυνσιομέτρων, τα Piezobeam και τα K-Beam. Η αρχή λειτουργίας στην οποία στηρίζονται και οι δύο τύποι επιταχυνσιομέτρων, είναι η μεταβολή διαφοράς δυναμικού που δημιουργούν, ανάλογα με την επιτάχυνση που δέχονται. Αφενός στα K-Beam η μεταβολή διαφοράς δυναμικού επιτυγχάνεται με την μεταβολή της χωρητικότητας ενός πυκνωτή, που υπάρχει στο εσωτερικό τους. Ανάλογα με την επιτάχυνση που δέχεται το όργανο, μεταβάλλεται η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλάκες του πυκνωτή (η μία είναι σταθερή, ενώ η άλλη μετακινείται ανάλογα με την επιτάχυνση) και επομένως μεταβάλλεται και η διαφορά δυναμικού που δημιουργείται. Αφετέρου, τα Piezobeam περιέχουν ένα πιεζοκρύσταλλο και ανάλογα με τις επιταχύνσεις που δέχεται, παράγει ηλεκτρόνια, μεταβάλλοντας έτσι τη διαφορά δυναμικού. Τα Piezobeam είναι πιο μικρά σε μέγεθος και περισσότερο ευαίσθητα από τα K-Beam. Συγκεκριμένα τα Piezobeam έχουν 2,5 φορές μεγαλύτερη ευαισθησία από τα K-Beam. Τα Piezobeam παίρνουν ρεύμα μέσω της τροφοδοσίας, ενώ τα K-Beam μέσω μπαταρίας. Η επικόλληση τους πάνω στην κατασκευή γίνεται με κερί. Η στήριξή τους πάνω στην κατασκευή πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξασφαλίζεται η ακινησία τους κατά τις μετατοπίσεις της κατασκευής, γιατί αλλιώς οι μετρήσεις που δίνουν είναι λανθασμένες. Στις εικόνες 3.5.1 και 3.5.2 παρακάτω, φαίνονται τα επιταχυνσιόμετρα, καθώς και η σύνδεσής τους στην κατασκευή :



Εικόνα 3.5.1. Σύνδεση K-Beam



Εικόνα 3.5.2. Σύνδεση Piezobeam

3.6 Σφάλματα

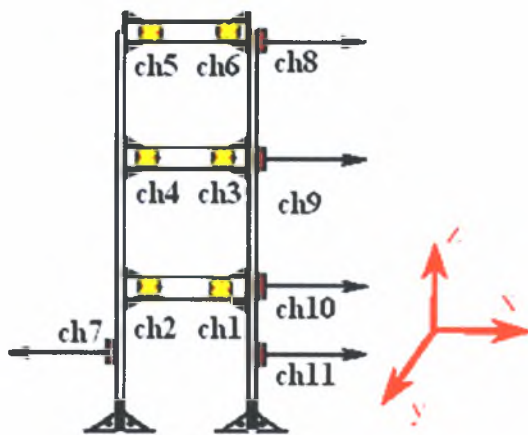
Η ύπαρξη θορύβου στη μορφή του σήματος, αποτελεί σημαντικό σφάλμα κατά τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν. Ο θόρυβος προέρχεται από διάφορες αιτίες όπως για παράδειγμα βήματα ή διερχόμενα αυτοκίνητα, το μέγεθός του όμως είναι άγνωστο και η παρουσία του παρεμβάλλει στις μετρήσεις συχνότητες που είναι άσχετες με αυτές της κατασκευής. Η μείωση του θορύβου, επιτυγχάνεται με μόνωση του χώρου.

3.7 Περιγραφή σημείων μέτρησης

Η επιλογή της θέσης των επιταχυνσιομέτρων στην κατασκευή, είναι σημαντική για τη διεξαγωγή συμπερασμάτων, σχετικά με τα ταλαντωτικά χαρακτηριστικά της. Τα σημεία τοποθέτησης των αισθητήρων, που είναι τα σημεία μέτρησης, επιλέγονται έτσι ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο ενδεικτικά της κίνησης της κατασκευής. Το ζητούμενο είναι να προκύπτει τελικά μία ολοκληρωμένη εικόνα, για κάθε ιδιομορφή της κατασκευής, από την επεξεργασία του σήματος και την εφαρμογή της μεθόδου αναγνώρισης.

3.7.1 Τριώροφη Μεταλλική Κατασκευή

Για την περίπτωση λοιπόν της τριώροφης κατασκευής και για να αποκτηθεί η μέγιστη δυνατή πληροφορία κατά την κίνηση της, χρησιμοποιήθηκαν συνολικά έντεκα αισθητήρες, έξι τύπου Piezobeam και πέντε τύπου K-Beam, η κατανομή των οποίων στην κατασκευή έγινε όπως φαίνεται στην εικόνα.3.7.1:

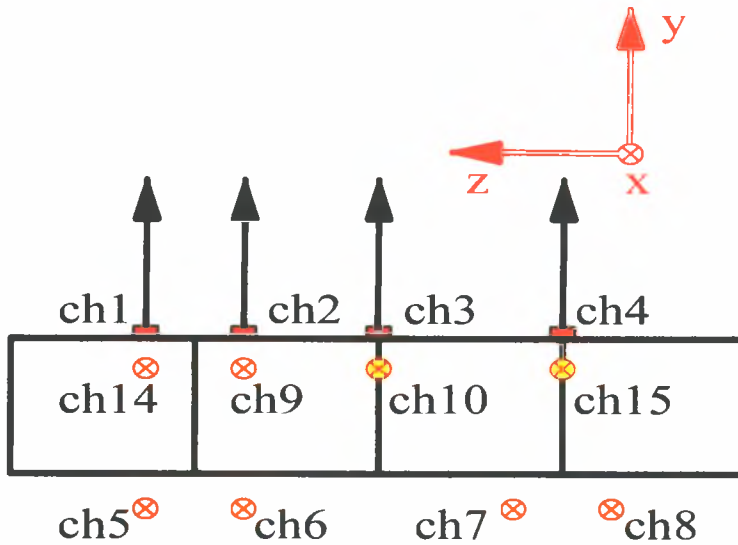


Εικόνα 3.7.1. Σημεία μέτρησης στην κατασκευή

Τα ch1, ch2, ch3, ch4, ch5, ch6 που είναι επιταχυνσιόμετρα Piezobeam, μετρούν επιταχύνσεις κατά την y-διεύθυνση και συνεπώς μας δίνουν πληροφορίες για την κίνηση της κατασκευής προς αυτή τη διεύθυνση, ενώ τα ch7, ch8, ch9, ch10, ch11 είναι K-Beam, μετρούν επιταχύνσεις κατά την x- διεύθυνση και παρέχουν πληροφορίες για τις ιδιομορφές της κατασκευής στη διεύθυνση αυτή. Η τοποθέτηση των αισθητήρων στην y-διεύθυνση έγινε επίσης με σκοπό την αναγνώριση των καμπτικών ιδιομορφών στην y-διεύθυνση όπως επίσης και των στρεπτικών ιδιομορφών της κατασκευής. Η τοποθέτηση των αισθητηρίων ch7 και ch11 στα σημεία της κατασκευής που δείχνει η εικόνα 3.7.1 αποσκοπεί στον προσδιορισμό των τοπικών ιδιομορφών στις συγκεκριμένες πλάκες.

3.7.2 Κατασκευή Μεταλλικής Γέφυρας

Αντίστοιχα, για να αποκτηθεί η μέγιστη πληροφορία κατά την κίνηση της μεταλλικής γέφυρας, χρησιμοποιήθηκαν δώδεκα αισθητήρες, έξι τύπου Piezobeam και έξι τύπου K-Beam, η κατανομή των οποίων στην κατασκευή έγινε όπως φαίνεται στην εικόνα.3.7.2:



Εικόνα 3.7.2. Σημεία μέτρησης στην κατασκευή

Τα ch1, ch2, ch3 και ch4 είναι επιταχυνσιόμετρα Piezobeam και μετρούν επιταχύνσεις κατά την y-διεύθυνση, τα ch5, ch6, ch7, ch8, ch9 και ch10 είναι K-Beam και μαζί με τα ch14 και ch15 που είναι τύπου Piezobeam μετρούν επιταχύνσεις κατά την x- διεύθυνση.

3.8 Αποτελέσματα Μορφικής Αναγνώρισης

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν και τα αποτελέσματα των αναγνωρισμένων ιδιομορφών που προέκυψαν. Η μορφική αναγνώριση μέσω της μεθόδου PolyMAX στην οποία έχουμε προβεί, μας δίνει τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε τα πειραματικά δεδομένα και να προσδιορίσουμε τα μορφικά χαρακτηριστικά της εκάστοτε κατασκευής τόσο για κλασσική όσο και για μη-κλασσική απόσβεση. Για το λόγο αυτό και για να μπορέσουμε να παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζει η κάθε μέθοδος τα πειραματικά δεδομένα, παρουσιάζουμε όλα τα αποτελέσματα που ακολουθούν και για τις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις.

Επίσης, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και των συντελεστών απόσβεσης που προκύπτουν από τα πειραματικά δεδομένα παραμένουν ίδιες ανεξαρτήτως από το είδος της απόσβεσης που έχουμε χρησιμοποιήσει. Η υπόθεση

για το είδος της απόσβεσης της ανάλυσης μας, θα επηρεάσει μόνο τις τιμές των εξεταζόμενων ιδιομορφών.

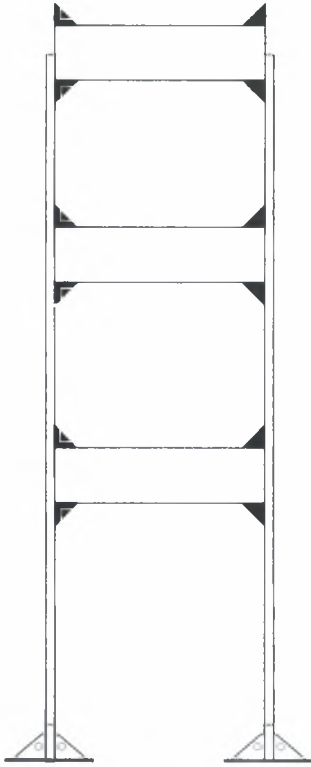
Σημειώνεται ότι για κάθε ιδιομορφή που θέλουμε να προσδιορίσουμε και στη συνέχεια να αναλύσουμε, επιλέγουμε ως πηγή δεδομένων το πείραμα εκείνο που αναδεικνύει καλύτερα την εν λόγω ιδιομορφή. Δηλαδή, εάν εξετάζουμε μια ιδιομορφή στη διεύθυνση x , είναι καλύτερο και ακριβέστερο να λάβουμε τα απαραίτητα δεδομένα από πείραμα με δύναμη που διεγείρει την κατασκευή (άρα και τις ιδιομορφές) προς την ίδια διεύθυνση.

Για το λόγο αυτό, σε κάθε πείραμα που έχει γίνει έχουμε φροντίσει ώστε να διεγείρουμε την κατασκευή με χτυπήματα τόσο στη διεύθυνση y όσο και στη διεύθυνση x , έτσι ώστε τα δεδομένα που θα λάβουμε να περιέχουν όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για μια αναλυτικότερη και ακριβέστερη ανάλυση.

Στα αποτελέσματα αυτά επίσης, διατηρείται η σύμβαση ότι οι καρτεσιανοί άξονες που χρησιμοποιούνται για την μορφική ανάλυση της κατασκευής, παραμένουν οι ίδιοι σε όλα τα πειράματα. Ο άξονας x είναι πάντα κάθετος στο επίπεδο των πλακών της κατασκευής, ο άξονας y είναι κάθετος στον άξονα x και κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν τα στοιχεία δοκών και τέλος ο άξονας z είναι κάθετος στο x - y επίπεδο που ορίστηκε παραπάνω, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.8.2.1. Κατ' αντιστοιχία, η θεώρηση του καρτεσιανού συστήματος αξόνων για τη μεταλλική γέφυρα παρουσιάζεται στην εικόνα 3.8.4.1.

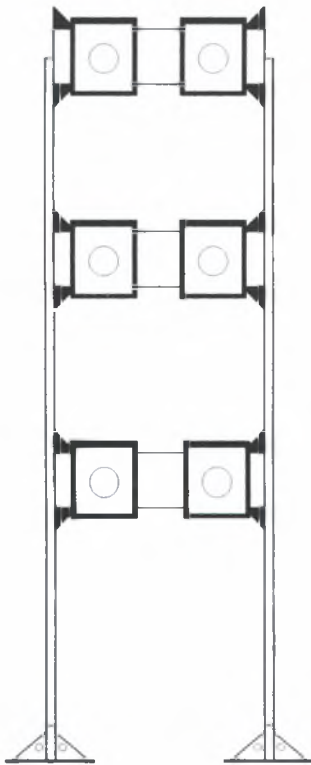
3.8.1 Αποτελέσματα Πειραμάτων για την Τριώροφη Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Ορισμένες Διατάξεις

Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα πειράματα που έγιναν για διάφορες διατάξεις της τριώροφης μεταλλικής κατασκευής. Ειδικότερα, παρατίθενται σκαριφήματα των πειραματικών διατάξεων που εξετάσαμε και οι οποίες αναλυτικά είναι:



Εικόνα 3.8.1.1

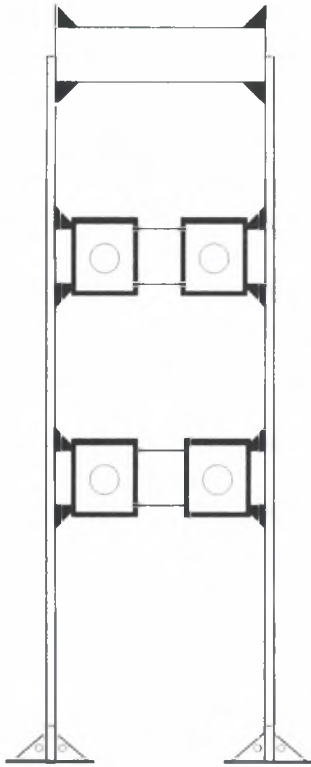
Κατασκευή χωρίς μάζες



Εικόνα 3.8.1.2

Κατασκευή με μάζες

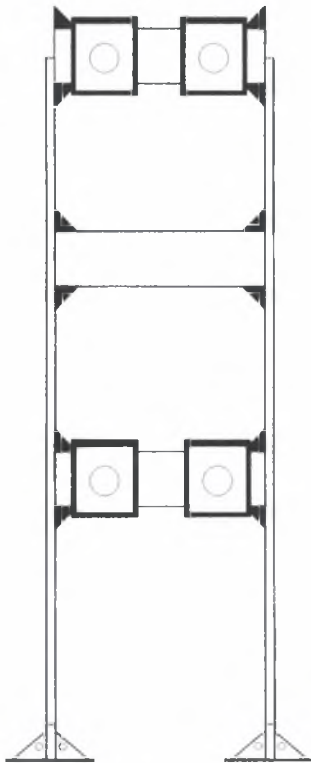
σε κάθε όροφο



Εικόνα 3.8.1.3

Κατασκευή με μάζες

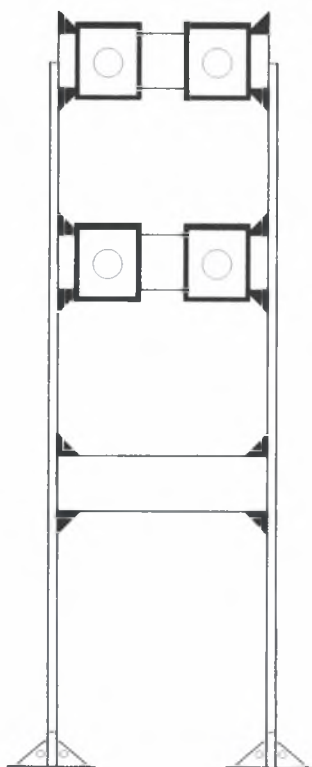
σε 1^ο και 2^ο όροφο



Εικόνα 3.8.1.4

Κατασκευή με μάζες

σε 1^ο και 3^ο όροφο



Εικόνα 3.8.1.5

Κατασκευή με μάζες

σε 2^ο και 3^ο όροφο

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο πίνακες που περιέχουν τις κρίσιμες ιδιοσυχνότητες και τους συντελεστές απόσβεσης που προκύπτουν από κάθε πείραμα αντίστοιχα.

Πίνακας 3.8.1.1. Ιδιοσυχνότητες για κάθε πειραματική διάταξη

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ω (Hz)						
		ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΧΩΡΙΣ ΜΑΖΕΣ	ΜΑΖΕΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΟΡΟΦΟ	ΜΑΖΕΣ ΣΕ 1ο,2ο	ΜΑΖΕΣ ΣΕ 1ο,3ο	ΜΑΖΕΣ ΣΕ 2ο,3ο
	Τύπος Ιδιομορφής					
1)	1η καμπτική x	4,6461	3,913	4,2597	4,1298	3,9809
2)	1η καμπτική y	8,2346	6,8768	7,7003	7,1534	6,9346
3)	2η καμπτική x	13,806	11,589	12,473	11,715	12,489
4)	3η καμπτική x	19,483	16,333	17,039	17,995	17,543
5)	Στρεπτική	22,786	21,016	22,002	21,483	21,098
6)	2η καμπτική y	61,85	52,179	56,042	53,81	55,766
7)	καμπτική y-στρέψη	93,366	85,541	89,351	85,965	88,782
8)	τοπική καμπτική x	114,34	114	114,11	113,93	114,04
9)	τοπική καμπτική x	117,5	116,74	116,85	116,78	117,16

Πίνακας 3.8.1.2. Συντελεστές Απόσβεσης για κάθε πειραματική διάταξη

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ζ						
		ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΧΩΡΙΣ ΜΑΖΕΣ	ΜΑΖΕΣ ΣΕ ΚΑΘΕ ΟΡΟΦΟ	ΜΑΖΕΣ ΣΕ 1ο,2ο	ΜΑΖΕΣ ΣΕ 1ο,3ο	ΜΑΖΕΣ ΣΕ 2ο,3ο
	Τύπος Ιδιομορφής					
1)	1η καμπτική x	0,0019341	0,013426	0,00985	0,006037	0,015973
2)	1η καμπτική y	0,0079373	0,0039766	0,00301	0,003192	0,004531
3)	2η καμπτική x	0,0037258	0,0020746	0,00141	0,001586	0,00148
4)	3η καμπτική x	0,0021038	0,0021701	0,00143	0,001617	0,002102
5)	3η καμπτική y- στρέψη	0,0049387	0,0041527	0,00372	0,00357	0,004024
6)	2η καμπτική y	0,0076321	0,0058743	0,01115	0,014989	0,011051
7)	καμπτική y-στρέψη	0,0019063	0,0054137	0,01086	0,013874	0,008279
8)	τοπική καμπτική x	0,022067	0,018394	0,019	0,017027	0,024692
9)	τοπική καμπτική x	0,019328	0,032161	0,0415	0,027401	0,028354

Παρατηρώντας προσεκτικά τον πίνακα των ιδιοσυχνοτήτων μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της κατασκευής ανάλογα με το πείραμα στο οποίο υποβάλλεται. Συγκεκριμένα, είναι φανερό ότι οι τοπικές καμπτικές και η στρεπτική ιδιομορφή δεν επηρεάζονται ιδιαίτερα και μεταβάλλονται ανεπαίσθητα καθώς αλλάζουμε την πειραματική διάταξη, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο με τις υπόλοιπες καμπτικές ιδιομορφές οι οποίες μεταβάλλονται από πείραμα σε πείραμα. Η σχετική σταθερότητα στις τιμές των στρεπτικών ιδιομορφών σημαίνει ότι η τοποθέτηση των μαζών δεν επηρεάζει την ακαμψία της κατασκευής σε στρέψη, ενώ οι τοπικές καμπτικές περιμέναμε ούτως ή άλλως να μην μεταβάλλονται σημαντικά.

Για τους συντελεστές απόσβεσης παρατηρούμε ότι οι τιμές τους μεταβάλλονται από μηδέν έως ένα τοις εκατό.

Ακολουθεί ένας πίνακας για κάθε πείραμα που έχει γίνει και στον οποίο περιέχονται λεπτομερώς τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την μορφική ανάλυση του κάθε πειράματος και τα αποτελέσματα αυτής, αντίστοιχα.

Πίνακας 3.8.1.3. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή χωρίς Προσθήκη Μαζών

Όνομα Αρχείου	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
d111_set1	0.21-8.5	30	1 καμπτική x 1 καμπτική y	4,6461 8,2346	0,0019341 0,0079373
d111_set1	10.0-30	40	2 καμπτική x 3 καμπτική x Στρεπτική	13,806 19,483 22,786	0,0037258 0,0021038 0,0049387
d111_set3	40-100	60	2 καμπτική y 3 καμπτική y - στρέψη	61,85 93,366	0,0076321 0,0019063
d111_set1	105-125	40	τοπική καμπτική x τοπική καμπτική x	114,34 117,5	0,022067 0,019328

Πίνακας 3.8.1.4. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε κάθε Όροφο

Όνομα Αρχείου	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
D000M_set1	0.21-30	40	1η καμπτική x	3,913	0,013426
D000M_set3	0.21-10	20	1η καμπτική y	6,8768	0,0039766
D000M_set1	0.21-30	40	2η καμπτική x 3η καμπτική x 3η καμπτική y- στρέψη	11,589 16,333 21,016	0,0020746 0,0021701 0,0041527
D000M_set3	25-65	40	2η καμπτική y	52,179	0,0058743
D000M_set3	60-90	20	καμπτική y-στρέψη	85,541	0,0054137
D000M_set1	102-115	40	τοπική καμπτική x	114	0,018394
D000M_set1	108-120	40	τοπική καμπτική x	116,74	0,032161

Πίνακας 3.8.1.5. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Πρώτο και Δεύτερο Όροφο

Όνομα Αρχείου	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
D001M_set1	0.21-30	40	1η καμπτική x	4,2597	0,009846
D001M_set3	0.21-10	20	1η καμπτική y	7,7003	0,0030083
D001M_set1	0.21-30	40	2η καμπτική x 3η καμπτική x 3η καμπτική y-στρέψη	12,473 17,039 22,002	0,0014136 0,0014301 0,003715
D001M_set3	44-60	40	2η καμπτική y	56,042	0,011152
D001M_set3	79-99	40	καμπτική y-στρέψη	89,351	0,010864
D001M_set1	102-115	40	τοπική καμπτική x	114,11	0,019004
D001M_set1	115-118	30	τοπική καμπτική x	116,85	0,041495

Πίνακας 3.8.1.6. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Πρώτο και Τρίτο Όροφο

Όνομα Αρχείου	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
D010M_set1	0.21-30	40	1η καμπτική x	4,1298	0,0060374
D010M_set3	0.21-10	20	1η καμπτική y	7,1534	0,0031917
D010M_set1	0.21-30	40	2η καμπτική x 3η καμπτική x 3η καμπτική y-στρέψη	11,715 17,995 21,483	0,0015864 0,0016171 0,0035704
D010M_set3	44-68	40	2η καμπτική y	53,81	0,014989
D010M_set3	77-99	40	καμπτική y-στρέψη	85,965	0,013874
D010M_set1	102-115	30	τοπική καμπτική x	113,93	0,017027
D010M_set1	108-120	40	τοπική καμπτική x	116,78	0,027401

Πίνακας 3.8.1.7. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Δεύτερο και Τρίτο Όροφο

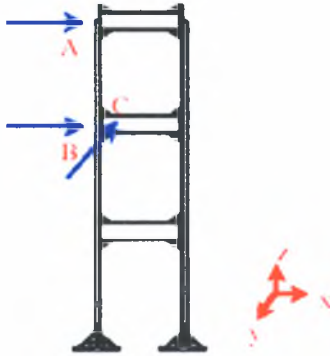
Όνομα Αρχείου	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
D100M_set1	0.21-30	40	1η καμπτική x	3,9809	0,015973
D100M_set3	0.21-10	20	1η καμπτική y	6,9346	0,0045312
D100M_set1	0.21-30	40	2η καμπτική x 3η καμπτική x 3η καμπτική y- στρέψη	12,489 17,543 21,098	0,0014801 0,0021021 0,0040242
D100M_set3	44-60	40	2η καμπτική y	55,766	0,011051
D100M_set3	70-95	20	καμπτική y- στρέψη	88,782	0,0082786
D100M_set1	105-115	40	τοπική καμπτική x	114,04	0,024692
D100M_set1	108-120	40	τοπική καμπτική x	117,16	0,028354

Οι παραπάνω πίνακες λοιπόν μας δίνουν μια συνοπτική εικόνα των ιδιοσυχνοτήτων και των συντελεστών απόσβεσης της εκάστοτε πειραματικής διάταξης. Όσον αφορά τις προκύπτουσες ιδιομορφές που αναφέρονται παραπάνω καθώς και τον τρόπο που ανταποκρίνεται η μέθοδος για θεώρηση κλασσικής και μη κλασσικής απόσβεσης, θα εξετάσουμε ενδεικτικά στη συνέχεια τα αποτελέσματα για την πειραματική διάταξη με προσθήκη μαζών σε κάθε όροφο.

3.8.2 Κατασκευή με Προσθήκη Μαζών σε Κάθε Όροφο-Σύγκριση Κλασσικής και Μη-Κλασσικής Απόσβεσης

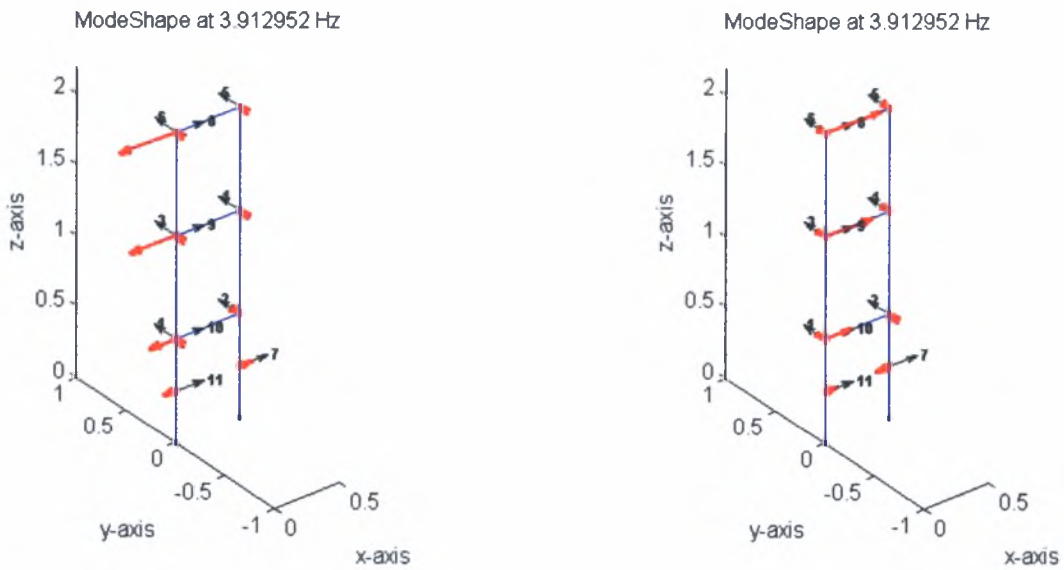
Για τη περίπτωση της κατασκευής με προσθήκη μαζών στις δοκούς όλων των ορόφων, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις, για εγκάρσιες και κάθετες διεγέρσεις στα σημεία A, B και C της κατασκευής όπως φαίνονται στην εικόνα 3.8.2.1. Τα χτύπηματα στα σημεία A και B διεγείρουν τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής στη x- διεύθυνση ενώ το χτύπημα στο σημείο C στην y-διεύθυνση και τις στρεπτικές ιδιομορφές. Επιλέγοντας

και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τα πειραματικά αποτελέσματα με τρόπο τέτοιο ώστε να αναδεικνύεται όσο το δυνατόν καλύτερα η κάθε ιδιομορφή, προβαίνουμε σε μορφική ανάλυση της κατασκευής.

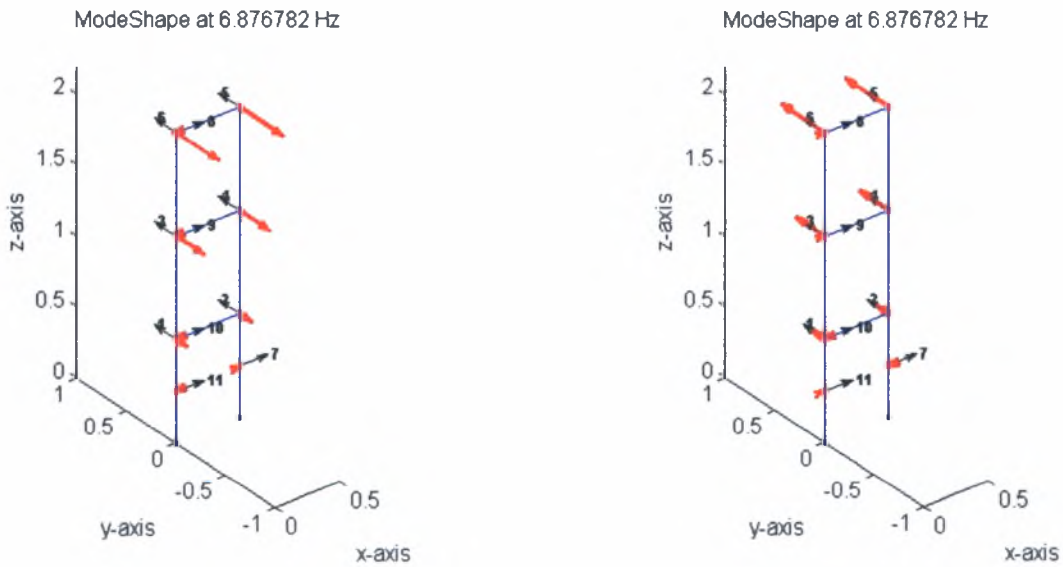


Εικόνα 3.8.2.1 Περίπτωση που εξετάζεται, σημεία κρούσης

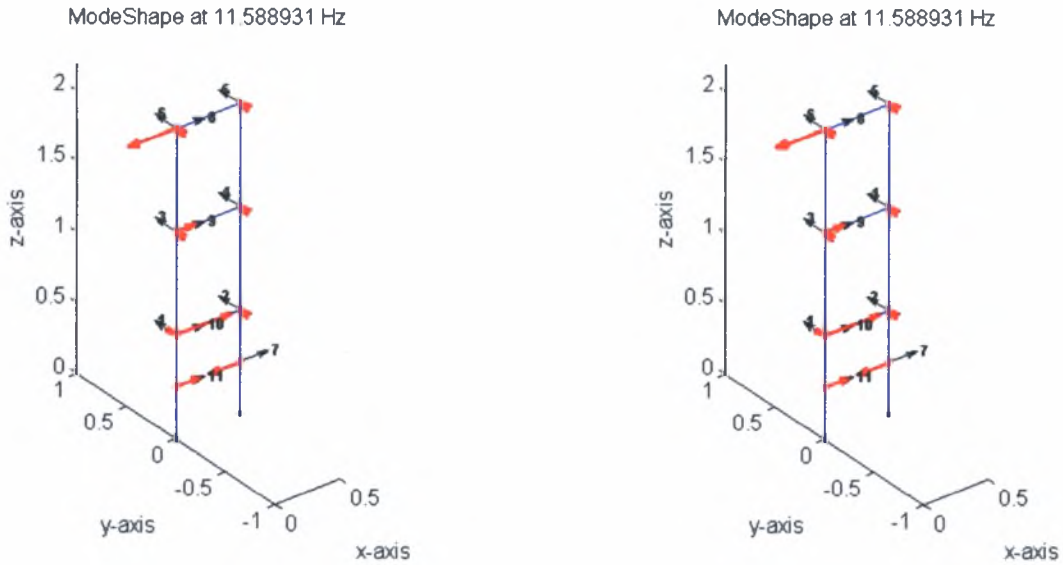
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μορφική ανάλυση της κατασκευής αυτής παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Στη συνέχεια παρατίθενται οι ιδιομορφές της κατασκευής αυτής καθώς και συμπεριφορά της μεθόδου μορφικής αναγνώρισης κατά την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων, τόσο για κλασική όσο και για μη κλασική απόσβεση:



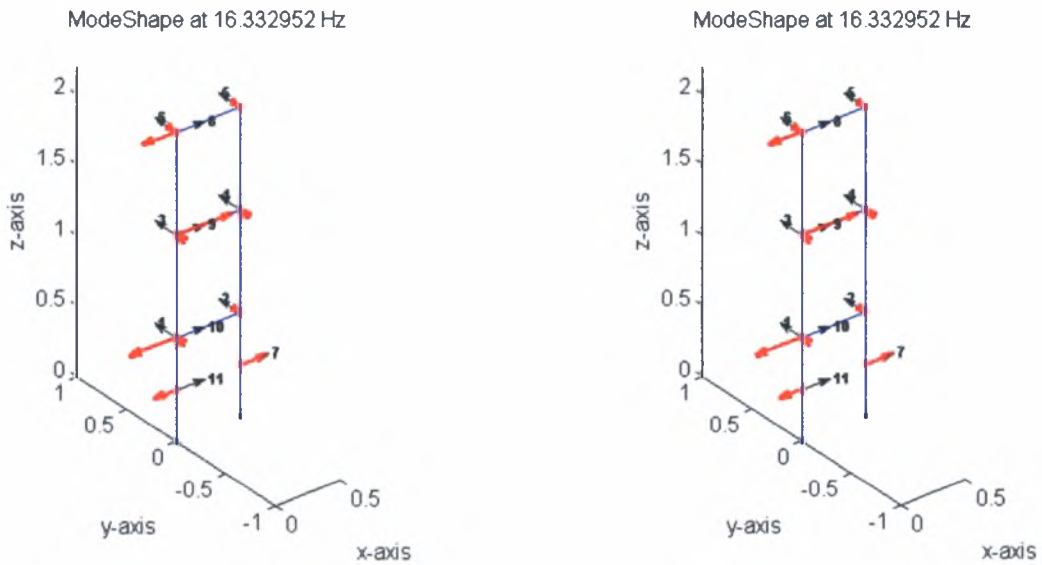
Σχήμα 3.8.2.1.1. 1η καμπτική x ιδιομορφή στα 3,913 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



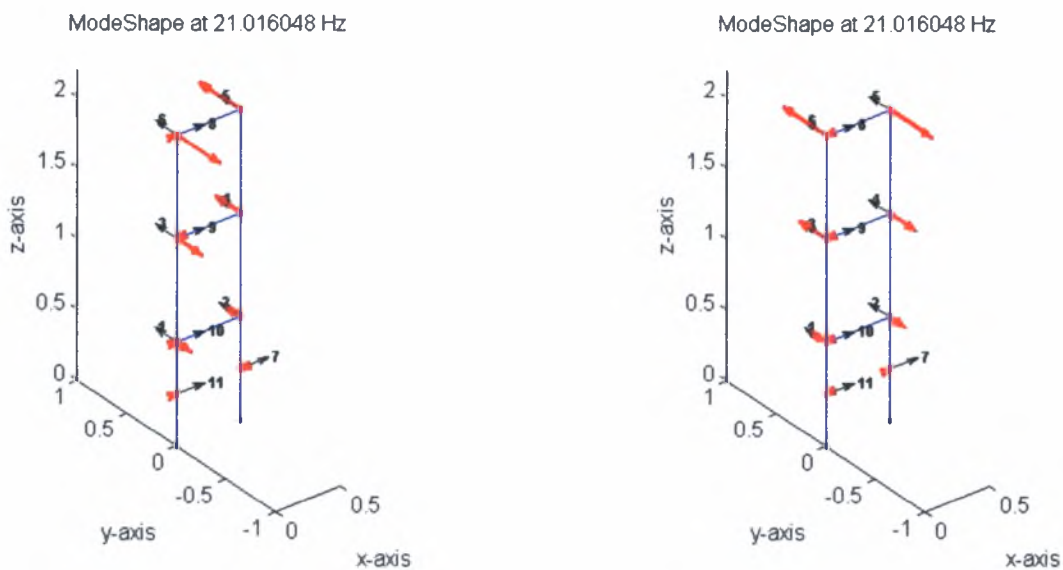
Σχήμα 3.8.2.1.2. 1η καμπτική y ιδιομορφή στα 6,8768 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



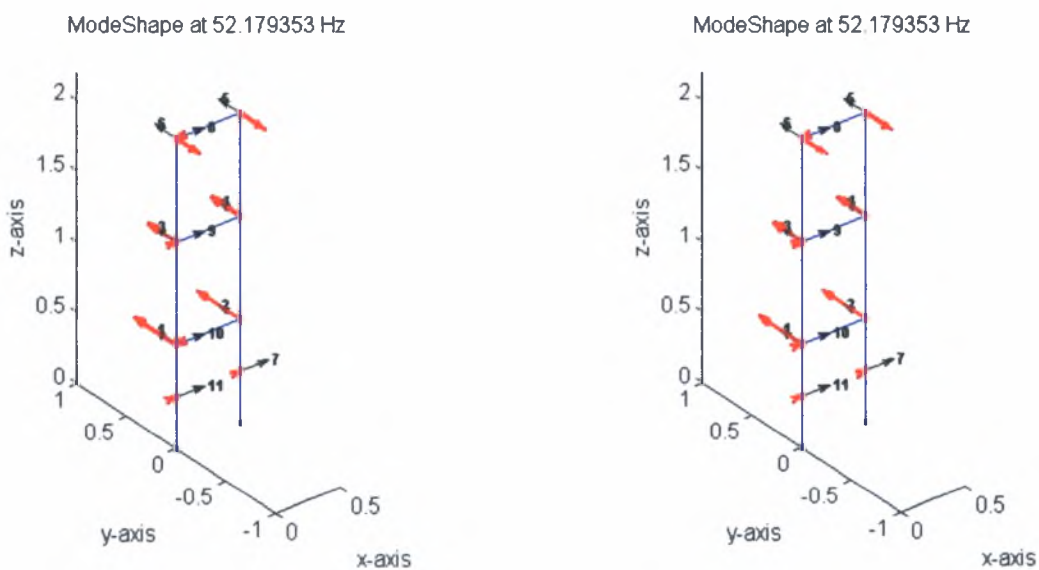
Σχήμα 3.8.2.1.3. 2η καμπτική x ιδιομορφή στα 11,589 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



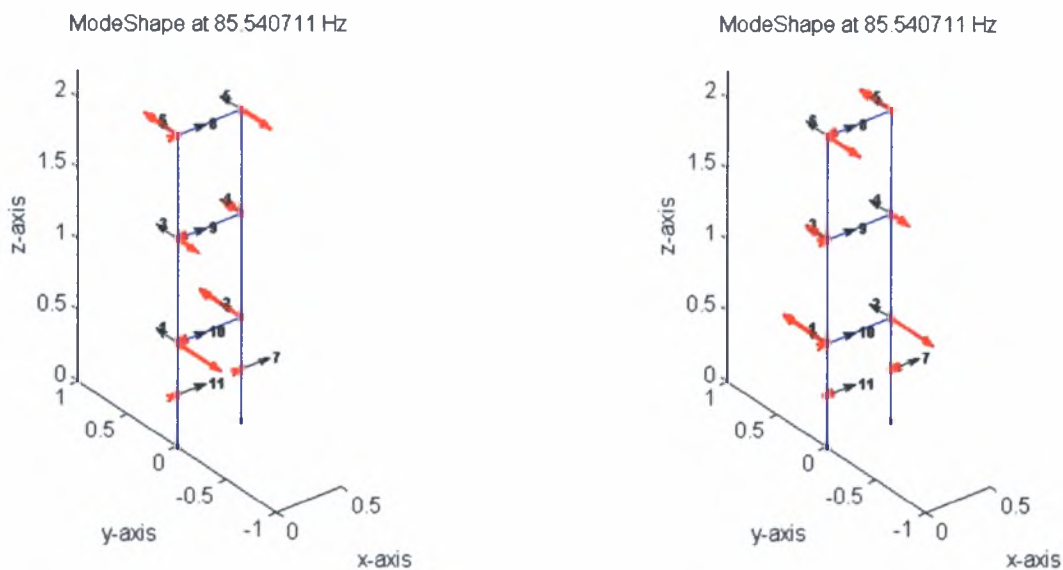
Σχήμα 3.8.2.1.4. 3η καμπτική x ιδιομορφή στα 16,333 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



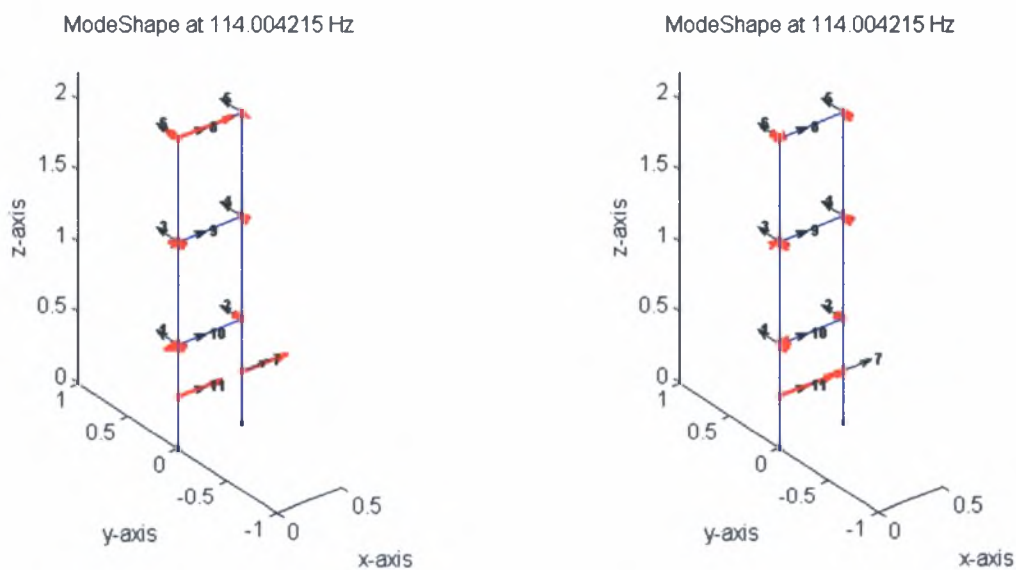
Σχήμα 3.8.2.1.5. 3η καμπτική y -στρέψη ιδιομορφή στα 21,016 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



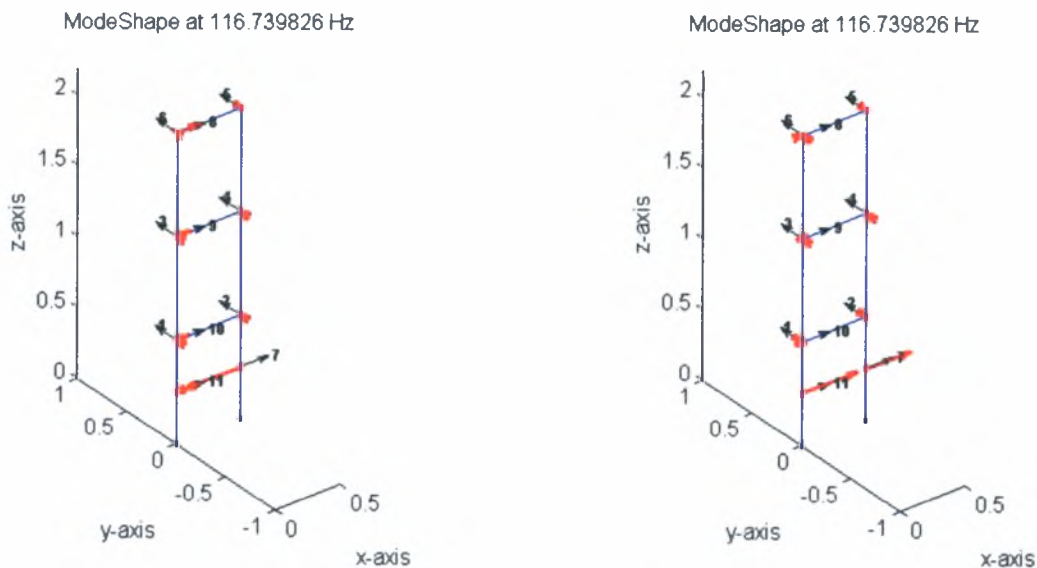
Σχήμα 3.8.2.1.6. 2η καμπτική y ιδιομορφή στα 52,179 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



Σχήμα 3.8.2.1.7. καμπτική y-στρέψη ιδιομορφή στα 85,541 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



Σχήμα 3.8.2.1.8. Τοπική καμπτική x ιδιομορφή στα 114 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα



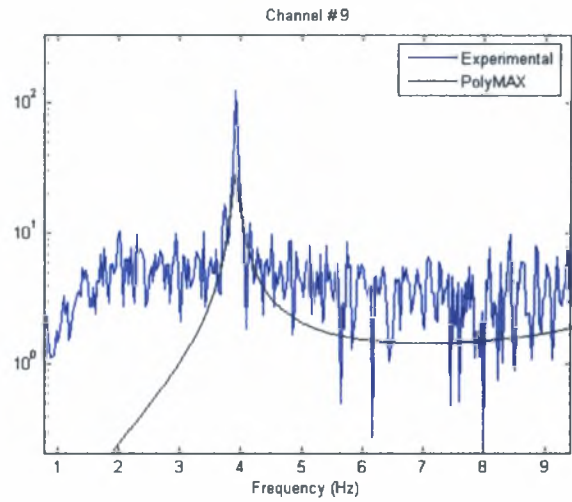
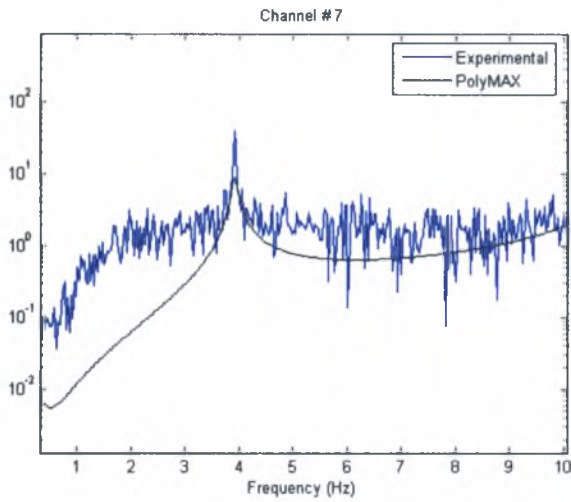
Σχήμα 3.8.2.1.9. Τοπική καμπτική χ ιδιομορφή στα 116,74 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα

Με μια προσεκτική ματιά στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι η παραδοχή για κλασσική απόσβεση στην κατασκευή της τριώροφης μεταλλικής κατασκευής δίνει πολύ καλά αποτελέσματα για όλες σχεδόν τις ιδιομορφές, αφού οδηγεί σε όμοια αποτελέσματα με αυτά που προκύπτουν από τη χρήση του γενικού μητρώου απόσβεσης, το οποίο είναι γενικότερο και ακριβέστερο. Οι μόνες περιπτώσεις όπου η υπόθεση για κλασσική απόσβεση δεν λειτουργεί σωστά είναι αυτές των τοπικών καμπτικών, όπου ωστόσο ούτε η υπόθεση της μη κλασσικής απόσβεσης ανταποκρίνεται ικανοποιητικά.

Τα παραπάνω συμπεράσματα εξάλλου μπορούν να προκύψουν και από τη μελέτη των διαγραμμάτων σύγκρισης της συνάρτησης μετάδοσης που προκύπτει από το βέλτιστο ιδιομορφικό μοντέλο με τη συνάρτηση μετάδοσης που υπολογίζεται από τα πειραματικά δεδομένα. Τα διαγράμματα αυτά παρουσιάζονται στη συνέχεια για κάθε κρίσιμη ιδιοσυχνότητα και, όπως θα φανεί, επιβεβαιώνουν πράγματι τα συμπεράσματα αυτά.

Μη-Κλασσική Απόσβεση

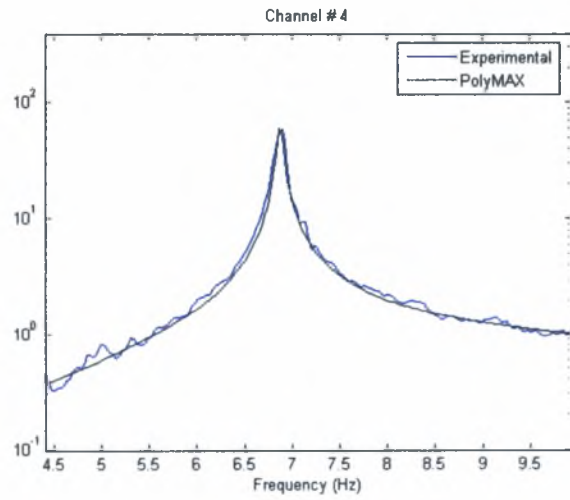
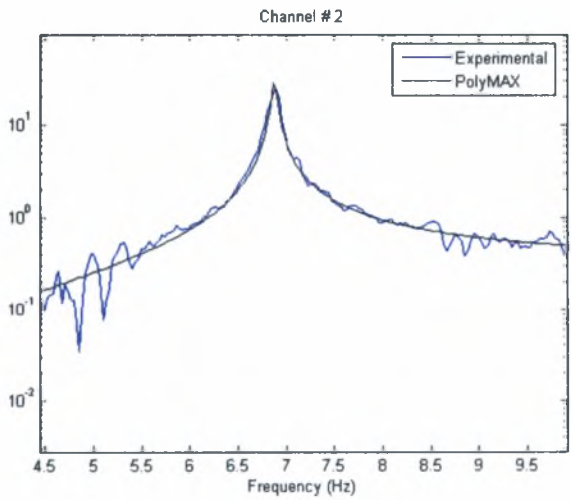
Κλασσική Απόσβεση



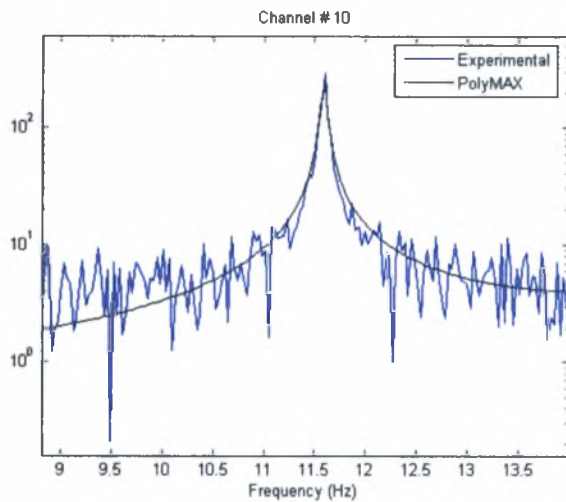
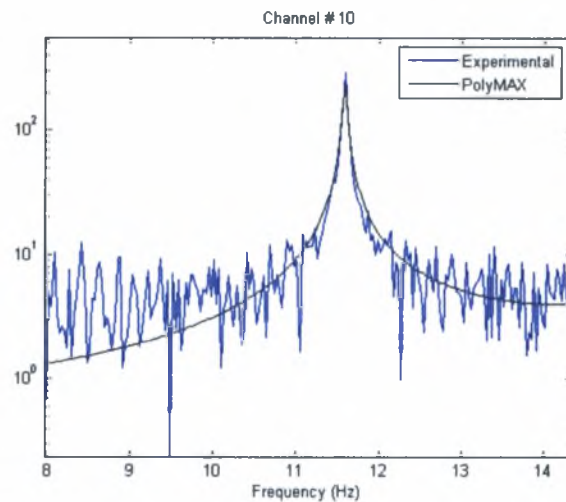
Σχήμα 3.8.2.2 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=3,913$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

Μη-Κλασσική Απόσβεση

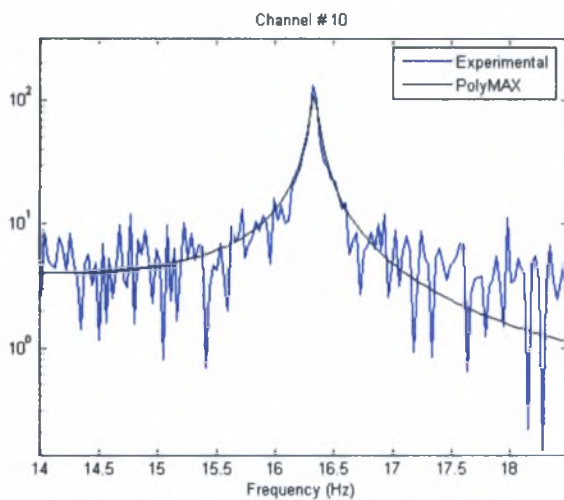
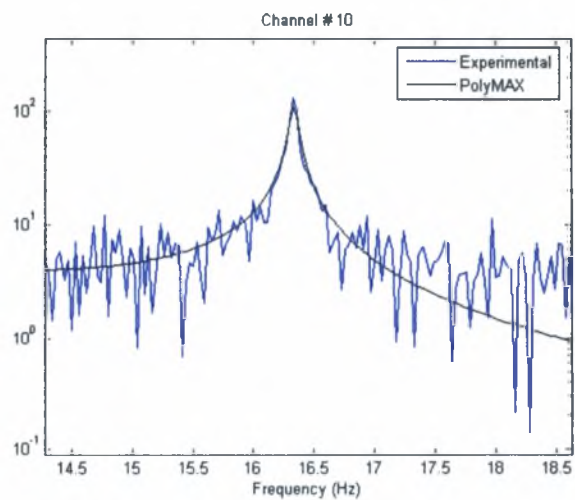
Κλασσική Απόσβεση



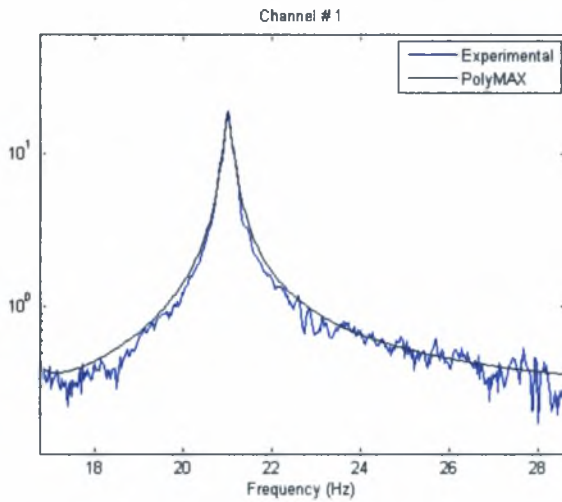
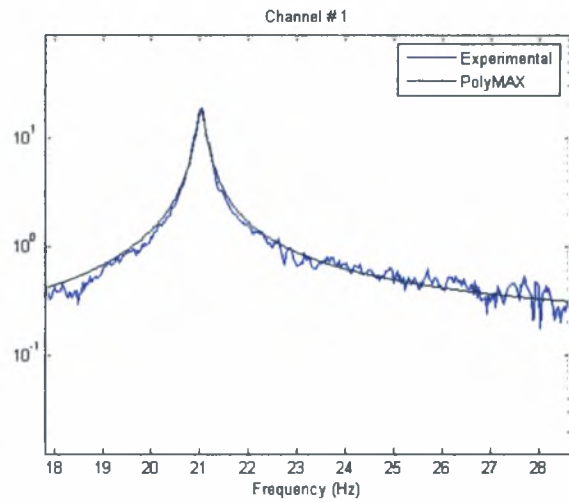
Σχήμα 3.8.2.3 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=6,8768$ από αισθητήρα στη διεύθυνση y

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

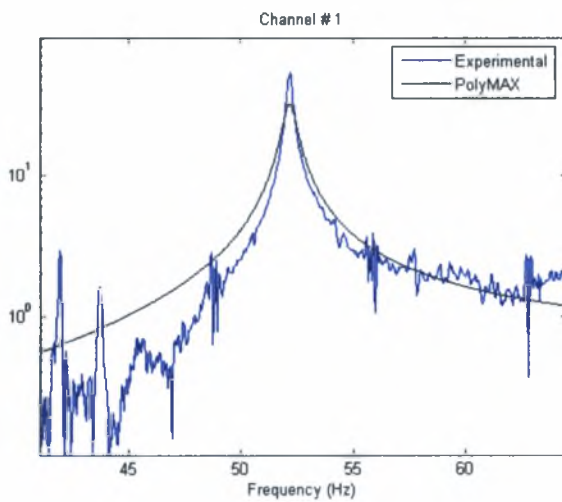
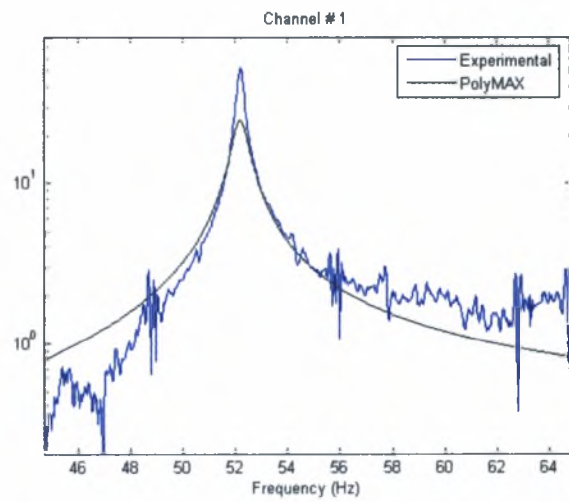
Σχήμα 3.8.2.4 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=11,589$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

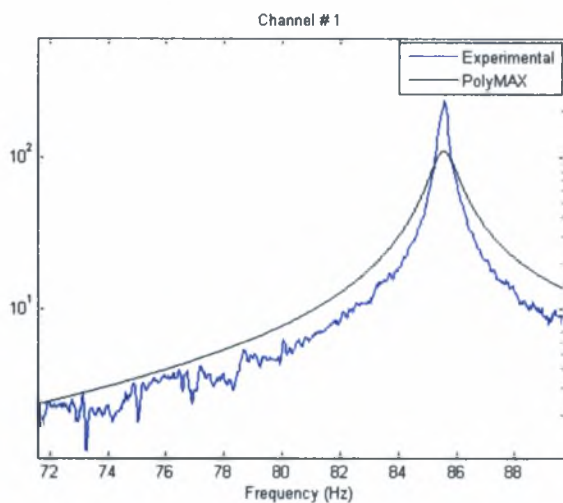
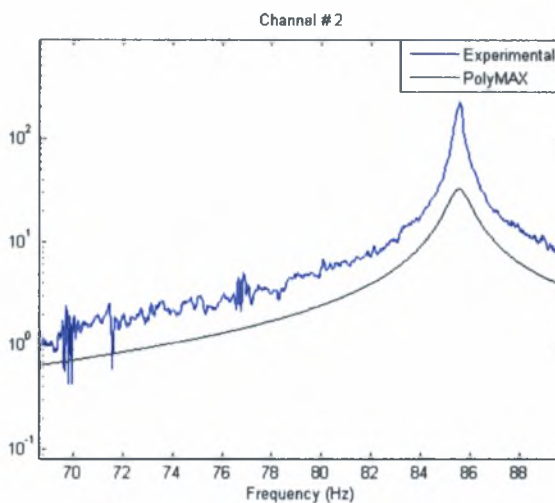
Σχήμα 3.8.2.5 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=16,333$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

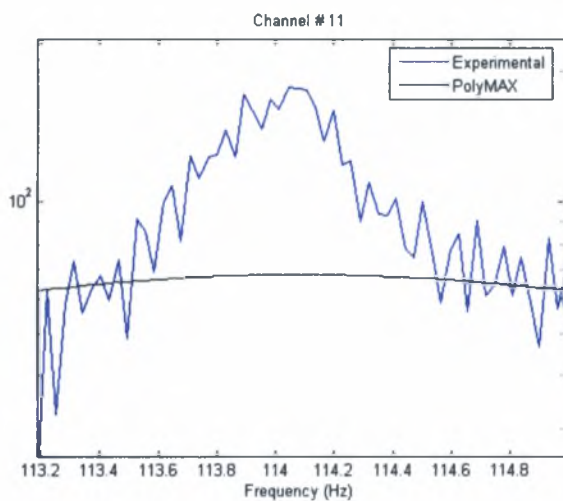
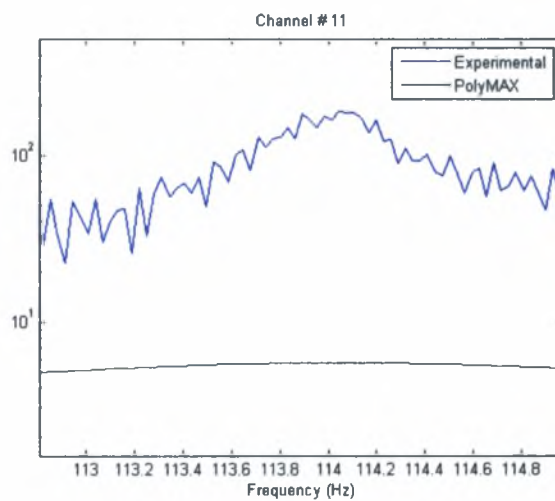
Σχήμα 3.8.2.6 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=21,016$ από αισθητήρα στη διεύθυνση y

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

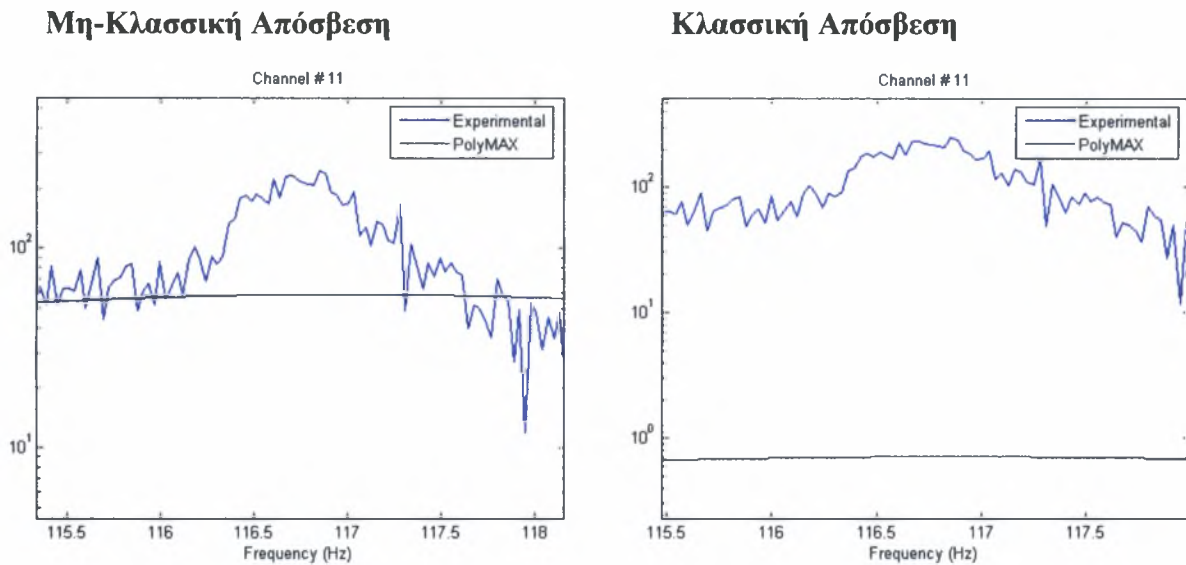
Σχήμα 3.8.2.7 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=52,179$ από αισθητήρα στη διεύθυνση y

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

Σχήμα 3.8.2.8 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=85,541$ από αισθητήρα στη διεύθυνση y

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

Σχήμα 3.8.2.9 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=114$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

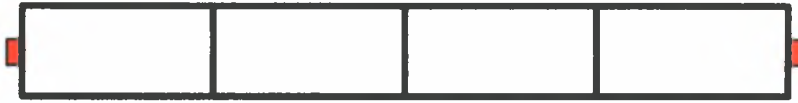


Σχήμα 3.8.2.10 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=116,74$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

Καταλήγουμε λοιπόν από τη μελέτη των παραπάνω διαγραμμάτων, που όπως είπαμε παρουσιάζουν τη σύγκριση της συνάρτησης μετάδοσης του βέλτιστου ιδιομορφικού μοντέλου και της συνάρτησης μετάδοσης των πειραματικών δεδομένων, ότι, εκτός από τις τοπικές καμπτικές, σε όλες τις υπόλοιπες ιδιομορφές η παραδοχή για μητρώο κλασσικής απόσβεσης είναι από αρκετά έως πολύ καλή.

3.8.3 Αποτελέσματα Πειραμάτων για την Κατασκευή της Γέφυρας

Στο υποκεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται, κατ' αναλογία με την παράγραφο 3.8.1, τα συνοπτικά αποτελέσματα που προέκυψαν από τα πειράματα που έγιναν για διάφορες διατάξεις στην κατασκευή της μεταλλικής γέφυρας. Ειδικότερα, παρατίθενται σκαριφήματα των πειραματικών διατάξεων στις οποίες έλαβαν χώρα οι πειραματικές μετρήσεις, οι οποίες όπως έχουμε αναφέρει διενεργήθηκαν τόσο με εφέδρανα όσο και χωρίς. Για το λόγο αυτό στα σκαριφήματα που ακολουθούν έχουν τοποθετηθεί στα άκρα της εκάστοτε κατασκευής ορθογωνικές ενδείξεις που υποδηλώνουν που τοποθετούνται τα εφέδρανα όταν χρησιμοποιούνται. Επίσης, στα παρακάτω σκαρίφημα το σκούρο χρώμα δηλώνει πλάκα από πλέξιγκλας και το λευκό πλάκα από χάλυβα. Αναλυτικά έχουμε:



Εικόνα 3.8.3.1. Κατασκευή με τέσσερις πλάκες χάλυβα



Εικόνα 3.8.3.2. Κατασκευή με τρεις πλάκες χάλυβα και μία από πλέξιγκλας



Εικόνα 3.8.3.3. Κατασκευή με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας



Εικόνα 3.8.3.4. Κατασκευή με τέσσερις πλάκες από πλέξιγκλας

Στη συνέχεια παρατίθενται δύο πίνακες που περιέχουν τις κρίσιμες ιδιοσυχνότητες και τους συντελεστές απόσβεσης που προκύπτουν από κάθε πείραμα αντίστοιχα.

Πίνακας 3.8.3.1. Ιδιοσυχνότητες για κάθε πειραματική διάταξη

ΚΡΙΣΙΜΕΣ ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ω (Hz)							
	4 πλάκες χάλυβα χωρίς εφέδρανα	3 πλάκες χάλυβα 1 πλέξιγκλας χωρίς εφέδρανα	3 πλάκες χάλυβα 1 πλέξιγκλας με εφέδρανα	1 μεγάλη πλάκα χωρίς εφέδρανα	1 μεγάλη πλάκα πλέξιγκλας με εφέδρανα	1 μεγάλη πλάκα πλέξιγκλας με λεπτά εφέδρανα	4 πλάκες πλέξιγκλας με εφέδρανα
1)	15,883	14,42	15,301	15,974	12,207	12,363	15,972
2)	29,024	25,153	27,041	22,536	14,569	14,793	22,159
3)	47,44	46,005	47,138	41,798	20,875	20,006	42,515
4)	60,174	91,864	57,778	59,908	26,903	29,06	59,834
5)	76,346		67,252	89,931	86,278	42,129	85,997
6)	130,12		120,69	98,41		86,688	94,889

Πίνακας 3.8.3.2. Συντελεστές Απόσβεσης για κάθε πειραματική διάταξη

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗΣ ζ							
	4 πλάκες χάλυβα χωρίς εφέδρανα	3 πλάκες χάλυβα 1 πλέξιγκλας χωρίς εφέδρανα	3 πλάκες χάλυβα 1 πλέξιγκλας με εφέδρανα	1 μεγάλη πλάκα χωρίς εφέδρανα	1 μεγάλη πλάκα πλέξιγκλας με εφέδρανα	1 μεγάλη πλάκα πλέξιγκλας με λεπτά εφέδρανα	4 πλάκες πλέξιγκλας με εφέδρανα
1)	0,019543	0,030798	0,021262	0,032822	7,011E-15	0,010973	0,050506
2)	0,014126	0,018759	0,023706	0,035165	0,051327	0,020368	0,037807
3)	0,017654	0,50741	0,030032	0,0197	0,090808	0,013738	0,012906
4)	0,0729	0,013125	0,10819	0,055061	0,0014467	0,039036	0,075179
5)	0,021786		0,026341	0,0058349	0,014189	0,0048133	0,0035945
6)	0,004042		0,010419	0,019174		0,015508	0,0039379

Παρατηρώντας τον πίνακα των ιδιοσυχνοτήτων, μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της κατασκευής καθώς αλλάζουν οι δομικές της καταστάσεις. Παρατηρούμε, για παράδειγμα, ότι η δομική κατάσταση της κατασκευής με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με την κατασκευή που αποτελείται από τέσσερις μικρότερες πλάκες πλέξιγκλας, κυρίως στις πρώτες ιδιοσυχνότητες. Η ομοιότητα αυτή συνεχίζει να υπάρχει και μετά την τοποθέτηση των εφεδράνων. Αυτό σημαίνει ότι το «σπάσιμο» της μεγάλης πλάκας σε τέσσερις μικρότερες δεν αλλάζει σημαντικά τη συμπεριφορά της κατασκευής.

Επίσης η κατασκευή με τέσσερις πλάκες χάλυβα διατηρεί τις πρώτες τουλάχιστον ιδιοσυχνότητες σχεδόν σταθερές, όταν αντικατασταθεί η μία πλάκα χάλυβα με μία πλάκα από πλέξιγκλας. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των δομικών αυτών καταστάσεων (τέσσερις πλάκες χάλυβα και τρεις πλάκες χάλυβα και μία πλέξιγκλας) υπό την παρουσία των εφεδράνων, διότι τότε οι ιδιοσυχνότητες της δεύτερης περίπτωσης μειώνονται αρκετά. Τέλος, μεγάλη αντιστοιχία υπάρχει και μεταξύ των αποτελεσμάτων της κατασκευής με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας με χρήση εφεδράνων, με την αντίστοιχη περίπτωση με χρήση λεπτότερων εφεδράνων.

Όσον αφορά τον πίνακα των συντελεστών απόσβεσης, παρατηρούμε ότι παίρνουν τιμές από μηδέν έως και εννέα τοις εκατό, εμφανίζουν δηλαδή σημαντική αύξηση σε σχέση με τους αντίστοιχους της τριώροφης μεταλλικής κατασκευής, όπως άλλωστε αναμενόταν.

Ακολουθεί ένας πίνακας για κάθε πείραμα που έχει γίνει και στον οποίο περιέχονται λεπτομερώς τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την μορφική ανάλυση του κάθε πειράματος και τα αποτελέσματα αυτής, αντίστοιχα.

Πίνακας 3.8.3.3. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες, χωρίς τη χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Full_steel_no_ef_set1.mat	6.0-55	80	1 ^η καμπτική x	15,883	0,019543
2)	Full_steel_no_ef_set2.mat			1 ^η καμπτική y	29,024	0,014126
3)				Στρεπτική	47,44	0,017654
4)	Full_steel_no_ef_set1.mat	50-135	80	2 ^η στρεπτική	60,174	0,0729
5)	Full_steel_no_ef_set2.mat			2 ^η καμπτική y	76,346	0,021786
6)				3 ^η καμπτική y	130,12	0,0040418

Πίνακας 3.8.3.4. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες, με χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Full_steel_ef_set1.mat	8.0-32	54	1 ^η καμπτική x	14,42	0,030798
2)	Full_steel_ef_set2.mat			Εγκάρσια	25,153	0,018759
3)	Full_steel_ef_set1.mat	40-99	80	1 ^η καμπτική y	46,005	0,50741
4)	Full_steel_ef_set2.mat			στρεπτική	91,864	0,013125

Πίνακας 3.8.3.5. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με τρεις χαλύβδινες πλάκες και μία από πλέξιγκλας, χωρίς τη χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	plex_no_ef_set1.mat	5.0-55	60	1 ^η καμπτική x	15,301	0,021262
2)	plex_no_ef_set2.mat			1 ^η καμπτική y	27,041	0,023706
3)				2 ^η καμπτική x	47,138	0,030032
4)	plex_no_ef_set1.mat	48-140	160	1 ^η στρεπτική	57,778	0,10819
5)	plex_no_ef_set2.mat			2 ^η στρεπτική	67,252	0,026341
6)				3 ^η καμπτική y	120,69	0,010419

Πίνακας 3.8.3.6. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με τρεις χαλύβδινες πλάκες και μία από πλέξιγκλας, με χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	plex_ef_set1.mat	10.0-30	60	1 ^η καμπτική x	13,91	0,05539
2)	plex_ef_set2.mat					
3)	plex_ef_set1.mat plex_ef_set2.mat	30-60	60	1 ^η καμπτική y	22,226	0,02246
4)	plex_ef_set1.mat plex_ef_set2.mat	70-95	80	2 ^η καμπτική x 1 ^η στρεπτική	44,881 89,787	0,019645 0,014647

Πίνακας 3.8.3.7. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας, χωρίς τη χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Fullplex_no_ef_set1.mat	10.0-50	84	1 ^η καμπτική x	15,974	0,032822
2)	Fullplex_no_ef_set2.mat			1 ^η καμπτική y	22,536	0,035165
3)				1 ^η στρεπτική	41,798	0,0197
4)	Fullplex_no_ef_set1.mat	50-105	80	2 ^η καμπτική x	59,908	0,055061
5)	Fullplex_no_ef_set2.mat			2 ^η στρεπτική	89,931	0,0058349
6)				3 ^η καμπτική y	98,41	0,019174

Πίνακας 3.8.3.8. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας, με χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Fullplex_ef_set1.mat Fullplex_ef_set2.mat	11.0-13	20	εγκάρσια	12,207	7,01E-15
2)	Fullplex_ef_set1.mat Fullplex_ef_set2.mat	11.0-18	40	1 ^η καμπτική x	14,569	0,051327
3)	Fullplex_ef_set1.mat Fullplex_ef_set2.mat	10.0-25	48	1 ^η στρεπτική	20,875	0,090808
4)	Fullplex_ef_set1.mat Fullplex_ef_set2.mat	22-30	40	2 ^η στρεπτική	26,903	0,0014467
5)	Fullplex_ef_set1.mat Fullplex_ef_set2.mat	60-110	80	1 ^η καμπτική y	86,278	0,014189

Πίνακας 3.8.3.9. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας, με χρήση λεπτών εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Fullplex_thin_ef_set1.mat Fullplex_thin_ef_set2.mat	0.21-14	60	εγκάρσια	12,363	0,010973
2)	Fullplex_thin_ef_set1.mat	5.0-25	60	1 ^η καμπτική x	14,793	0,020368
3)	Fullplex_thin_ef_set2.mat			1 ^η στρεπτική	20,006	0,013738
4)	Fullplex_thin_ef_set1.mat Fullplex_thin_ef_set2.mat	26-30	20	2 ^η στρεπτική	29,06	0,039036
5)	Fullplex_thin_ef_set1.mat Fullplex_thin_ef_set2.mat	35-47	70	στρεπτική	42,129	0,0048133
6)	Fullplex_thin_ef_set1.mat Fullplex_thin_ef_set2.mat	70-99	60	1 ^η καμπτική y	86,688	0,015508

Πίνακας 3.8.3.10. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με τέσσερις πλάκες από πλέξιγκλας, χωρίς τη χρήση εφεδράνων

	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Four_plex_no_ef_set1.mat	12.0-45	80	1 ^η καμπτική x	15,972	0,050506
2)	Four_plex_no_ef_set2.mat			1 ^η καμπτική y	22,159	0,037807
3)				1 ^η στρεπτική	42,515	0,012906
4)	Four_plex_no_ef_set1.mat	52-110	160	2 ^η καμπτική x	59,834	0,075179
5)	Four_plex_no_ef_set2.mat			2 ^η στρεπτική	85,997	0,0035945
6)				3 ^η καμπτική y	94,889	0,0039379

Πίνακας 3.8.3.11. Δεδομένα-Αποτελέσματα για την Κατασκευή με τέσσερις πλάκες από πλέξιγκλας, με χρήση εφεδράνων

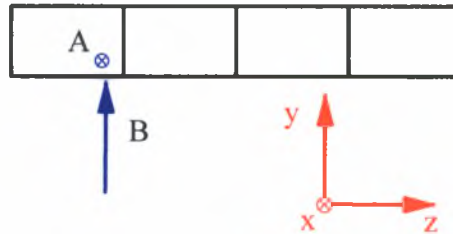
	Όνοματα Αρχείων	Frequency Band(Hz)	Τάξη Πολυωνόμου	Τύπος Μορφής	Κρίσιμες Ιδιοσυχνότητες ω (Hz)	Συντελεστές απόσβεσης ζ
1)	Four_plex_ef_set1.mat Four_plex_ef_set2.mat	11.0-13	20	εγκάρσια	12,207	6,05E-15
2)	Four_plex_ef_set1.mat Four_plex_ef_set2.mat	11.0-18	40	1 ^η καμπτική x	14,796	0,091399
3)	Four_plex_ef_set1.mat Four_plex_ef_set2.mat	10.0-25	48	1 ^η στρεπτική	20,928	0,025268
4)	Four_plex_ef_set1.mat Four_plex_ef_set2.mat	22-30	50	2 ^η στρεπτική	27,583	0,0073737
5)	Four_plex_ef_set1.mat Four_plex_ef_set2.mat	35-50	50	στρεπτική	42,839	0,016786
6)	Four_plex_ef_set1.mat Four_plex_ef_set2.mat	60-110	80	1 ^η καμπτική y	88,245	0,014839

Οι παραπάνω πίνακες λοιπόν μας δίνουν μια συνοπτική εικόνα των ιδιοσυχνοτήτων και των συντελεστών απόσβεσης της εκάστοτε πειραματικής διάταξης. Όσον αφορά τις προκύπτουσες ιδιομορφές που αναφέρονται παραπάνω καθώς και τον τρόπο που ανταποκρίνεται η μέθοδος για θεώρηση κλασσικής και μη κλασσικής απόσβεσης, θα εξετάσουμε ενδεικτικά στη συνέχεια τα αποτελέσματα για την πειραματική διάταξη με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες, χωρίς τη χρήση εφεδράνων.

3.8.4 Κατασκευή με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες, χωρίς τη χρήση εφεδράνων

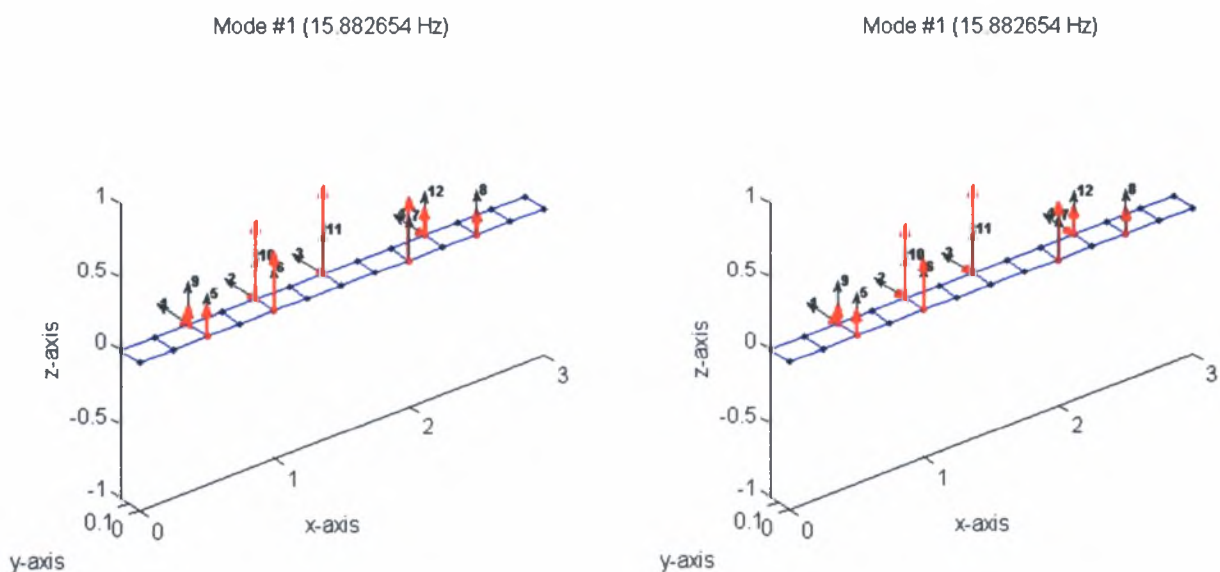
Για τη περίπτωση της κατασκευής με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες, χωρίς τη χρήση εφεδράνων, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις, για εγκάρσιες και κάθετες διεγέρσεις στα σημεία A και B της κατασκευής όπως φαίνονται στην εικόνα 3.8.4.1. Το χτύπημα στο σημείο διεγείρει τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής στη x- διεύθυνση ενώ το χτύπημα στο σημείο B στην y-διεύθυνση και τις στρεπτικές ιδιομορφές. Επιλέγοντας και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια τα πειραματικά αποτελέσματα με τρόπο τέτοιο ώστε να

αναδεικνύεται όσο το δυνατόν καλύτερα η κάθε ιδιομορφή, προβαίνουμε σε μορφική ανάλυση της κατασκευής.



Εικόνα 3.8.4.1 Περίπτωση που εξετάζεται, σημεία κρούσης

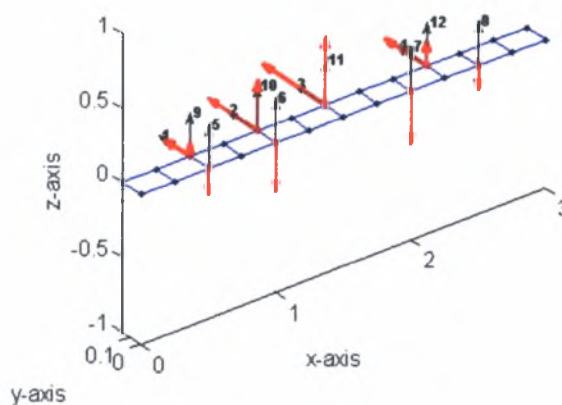
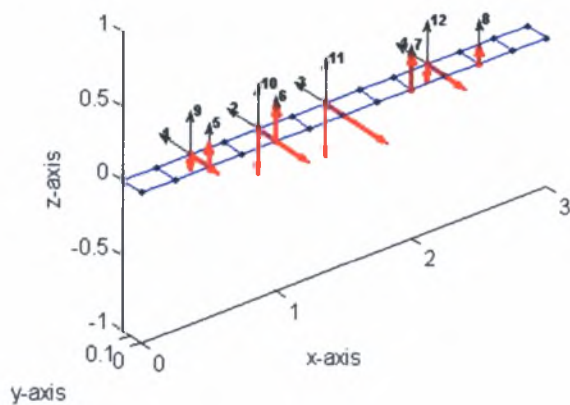
Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μορφική ανάλυση της κατασκευής αυτής παρουσιάστηκαν προηγουμένως. Στη συνέχεια παρατίθενται οι ιδιομορφές της κατασκευής αυτής καθώς και συμπεριφορά της μεθόδου μορφικής αναγνώρισης κατά την προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων, τόσο για κλασική όσο και για μη κλασική απόσβεση:



Σχήμα 3.8.4.1.1. 1^η καμπτική χ ιδιομορφή στα 15,883 Hz με κλασική και μη κλασική απόσβεση αντίστοιχα

Mode #2 (29.023620 Hz)

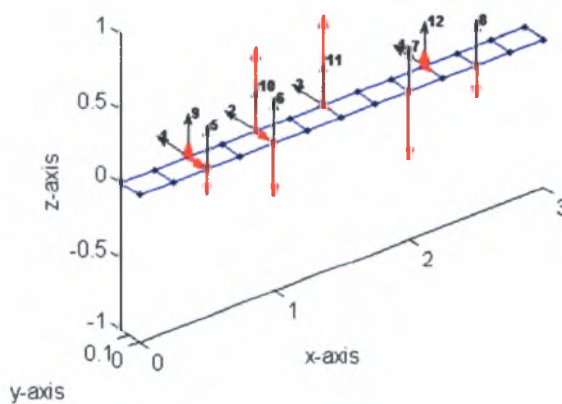
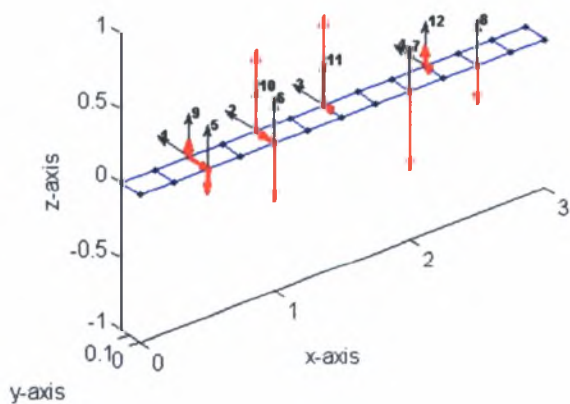
Mode #2 (29.023620 Hz)



Σχήμα 3.8.4.1.2. 1^η καμπτική y ιδιομορφή στα 29,024 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα

Mode #3 (47.439622 Hz)

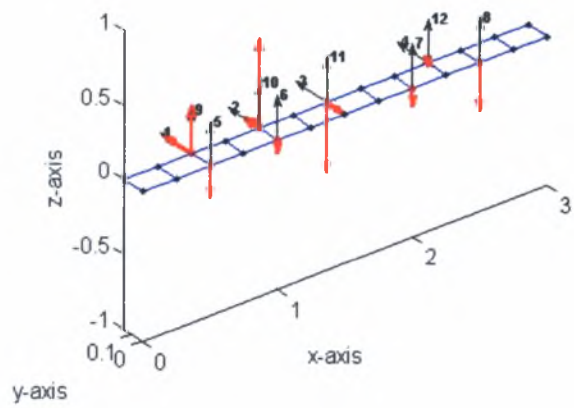
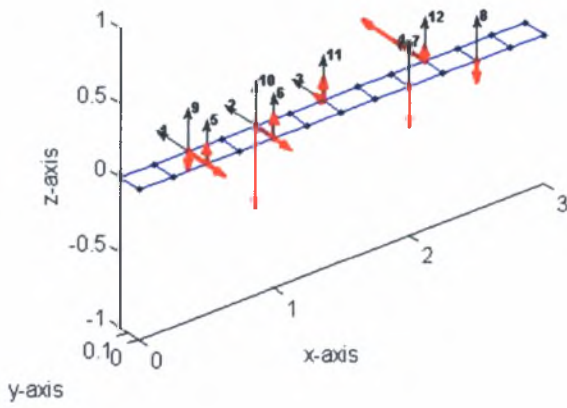
Mode #3 (47.439622 Hz)



Σχήμα 3.8.4.1.3. Στρεπτική ιδιομορφή στα 47,44 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα

Mode #4 (60.173841 Hz)

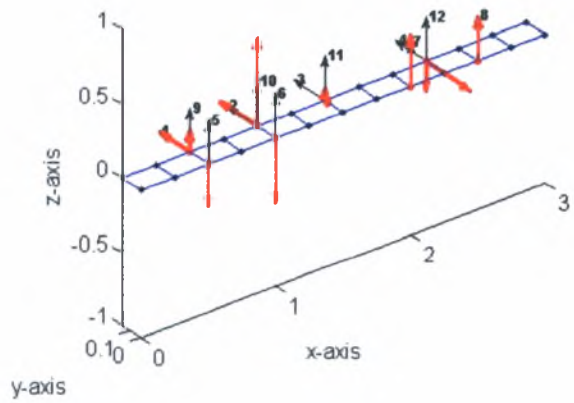
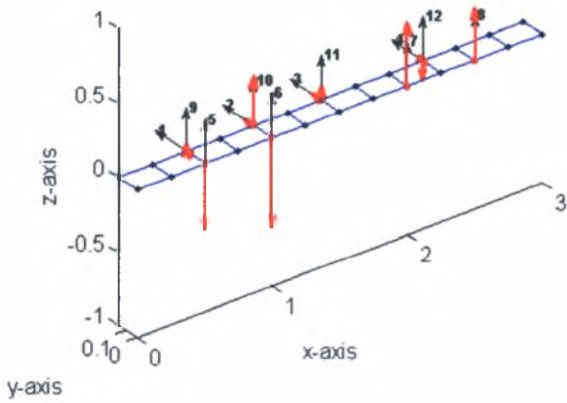
Mode #4 (60.173841 Hz)



Σχήμα 3.8.4.1.4. 2^η στρεπτική ιδιομορφή στα 60,174 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα

Mode #5 (76.346157 Hz)

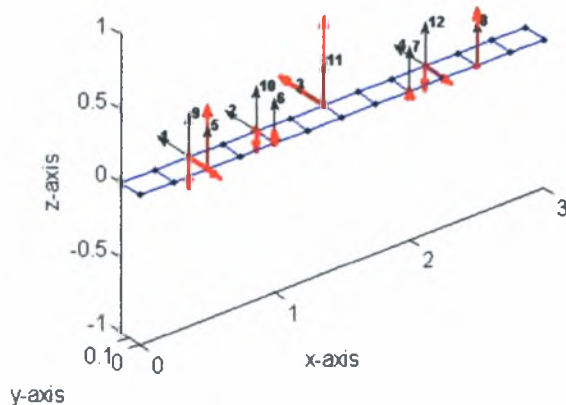
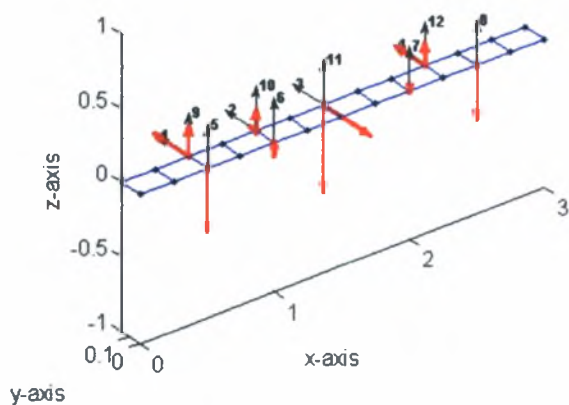
Mode #5 (76.346157 Hz)



Σχήμα 3.8.4.1.5. 2^η καμπτική y ιδιομορφή στα 76,346 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα

Mode #6 (130.120754 Hz)

Mode #6 (130.120754 Hz)

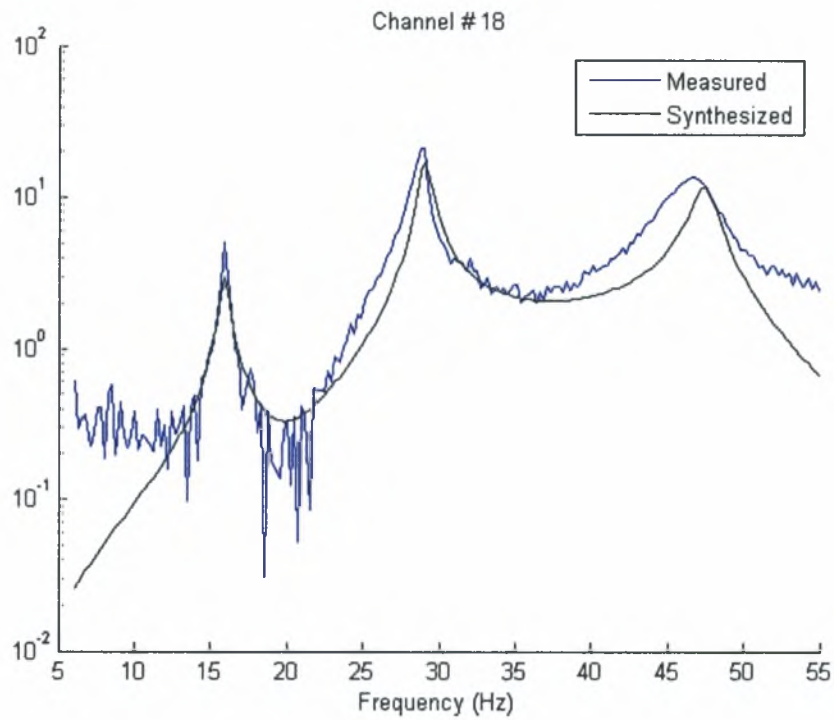


Σχήμα 3.8.4.1.6. 3^η καμπτική y ιδιομορφή στα 130,12 Hz με κλασσική και μη κλασσική απόσβεση αντίστοιχα

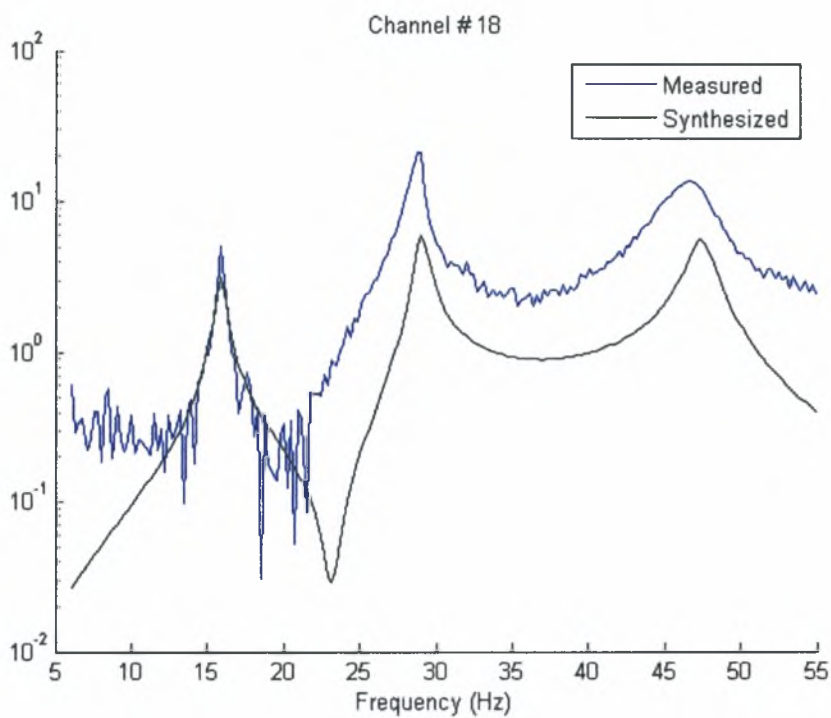
Με μια προσεκτική ματιά στα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι η παραδοχή για κλασσική απόσβεση στην κατασκευή της μεταλλικής γέφυρας δεν παρουσιάζει ικανοποιητικά αποτελέσματα, πλην ελαχίστων εξαιρέσεων. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό και αναμενόμενο, διότι η κατασκευή αυτή παρουσιάζει ισχυρά μη γραμμική συμπεριφορά η οποία είναι αδύνατον να προσεγγισθεί από ένα μοντέλο με μητρώο κλασσικής απόσβεσης. Οι μη γραμμικότητες της κατασκευής, ιδιαίτερα στα άκρα της, επηρεάζουν την ποιότητα των αποτελεσμάτων ακόμη και στην περίπτωση που θεωρούμε γενικό μητρώο απόσβεσης, ωστόσο τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν πολύ καλύτερα απ' ό τι τα αντίστοιχα της κλασσικής απόσβεσης.

Τα παραπάνω συμπεράσματα εξάλλου μπορούν να προκύψουν και από τη μελέτη των διαγραμμάτων σύγκρισης της συνάρτησης μετάδοσης που προκύπτει από το βέλτιστο ιδιομορφικό μοντέλο με τη συνάρτηση μετάδοσης που υπολογίζεται από τα πειραματικά δεδομένα. Τα διαγράμματα αυτά παρουσιάζονται στη συνέχεια, ένα για κάθε τρεις κρίσιμες ιδιοσυχνότητες, και όπως θα φανεί, επιβεβαιώνουν πράγματι τα συμπεράσματα αυτά.

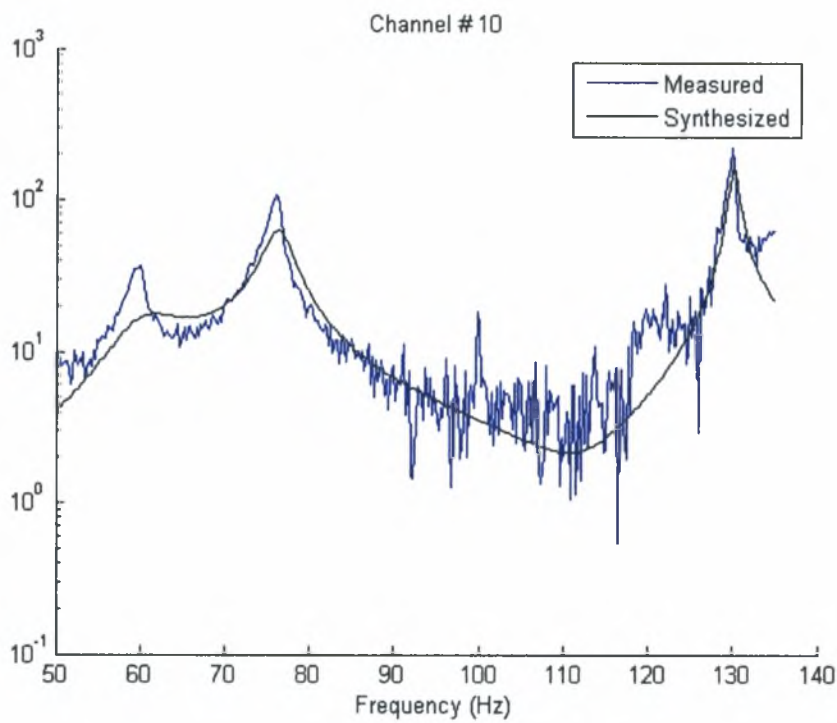
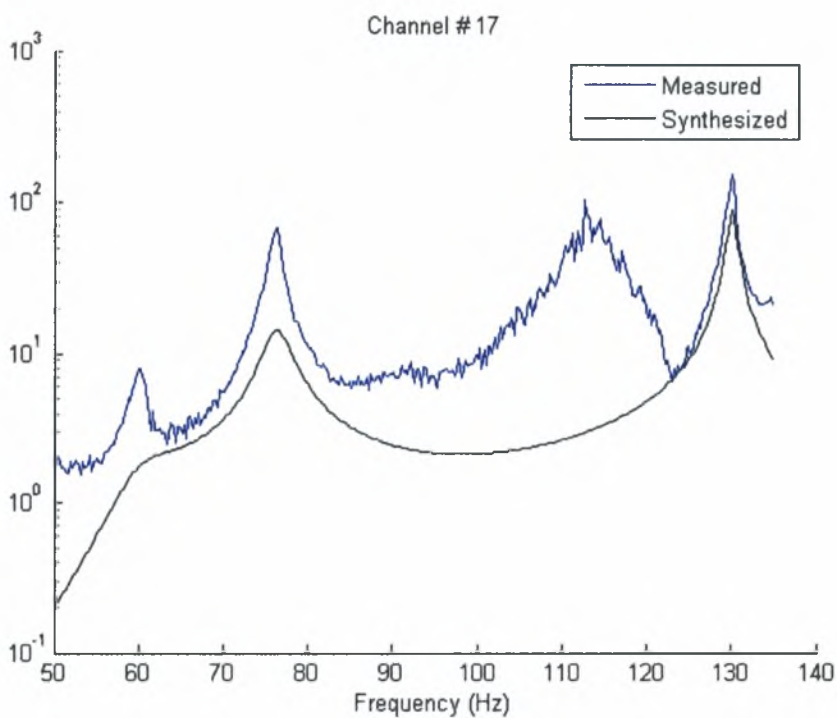
Μη-Κλασσική Απόσβεση



Κλασσική Απόσβεση



Σχήμα 3.8.4.2 Διάγραμμα για τις ιδιοσυχνότητες $\omega=15,883/29,024/47,44$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

Μη-Κλασσική Απόσβεση**Κλασσική Απόσβεση**

Σχήμα 3.8.4.3 Διάγραμμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega=60,174/76,346/130,12$ από αισθητήρα στη διεύθυνση x

Καταλήγουμε λοιπόν από τη μελέτη των παραπάνω διαγραμμάτων, που όπως είπαμε παρουσιάζουν τη σύγκριση της συνάρτησης μετάδοσης του βέλτιστου ιδιομορφικού μοντέλου και της συνάρτησης μετάδοσης των πειραματικών δεδομένων, ότι η παραδοχή για μητρώο κλασσικής απόσβεσης δεν ανταποκρίνεται για τη συγκεκριμένη κατασκευή. Η διαφορά στα αποτελέσματα μεταξύ κλασσικής και μη κλασσικής απόσβεσης είναι φανερή στα δύο παραπάνω σχήματα, αφού η καμπύλη της συνάρτησης μετάδοσης που προκύπτει με θεώρηση κλασσικής απόσβεσης δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά την συνάρτηση μετάδοσης των πειραματικών δεδομένων, παρά μόνο σε ορισμένα σημεία, ενώ η καμπύλη της συνάρτησης μετάδοσης που προκύπτει με θεώρηση μη κλασσικής απόσβεσης προσεγγίζει τη συνάρτηση μετάδοσης των πειραματικών δεδομένων αρκετά καλά σε όλη την έκτασή της.

Κεφάλαιο 4 Αναθεώρηση Μοντέλων Πεπερασμένων Στοιχείων

4.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα προβούμε σε αναθεώρηση του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων για την περίπτωση της κατασκευής της μεταλλικής γέφυρας. Αρχικά λοιπόν περιγράφεται το μοντέλο της κατασκευής αυτής το οποίο δημιουργήθηκε για την προσομοίωση της δυναμικής της συμπεριφοράς .

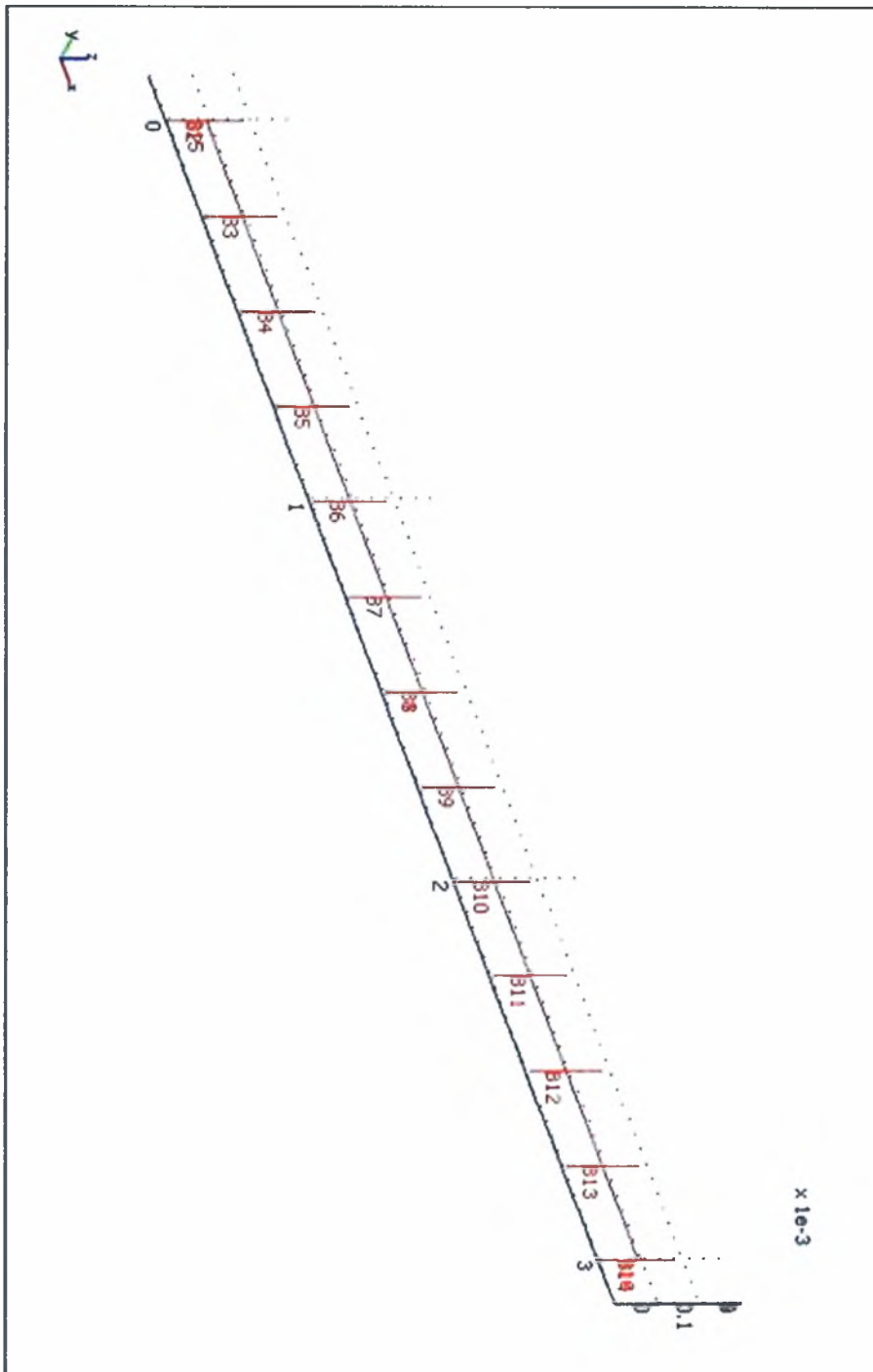
Στη συνέχεια της ενότητας παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αναθεώρησης του μοντέλου αυτού που προέκυψαν με χρήση των μορφικών ιδιοτήτων που έχουν προσδιοριστεί για διάφορες δομικές καταστάσεις της κατασκευής, μέσω των αποτελεσμάτων των πειραματικών μετρήσεων που περιγράφηκαν στο κεφάλαιο 3.

Η αναθεώρηση του μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, στηρίζεται στη θεωρία και τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στην μεταπτυχιακή εργασία (2001) και στη διδακτορική διατριβή (2006) του Χριστοδούλου.

4.2 Περιγραφή Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων (Σχήμα 4.1) που κατασκευάστηκε στα πλαίσια της παρούσας μελέτης με σκοπό να προσεγγισθεί η ταλαντωτική συμπεριφορά της υπό εξέταση κατασκευής, η επιφάνεια της οποίας αποτελείται από τέσσερις πλάκες χάλυβα . Το μοντέλο έχει κατασκευαστεί με τη βοήθεια του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων COMSOL το οποίο συνεργάζεται άμεσα με το Matlab και μας δίνει έτσι τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε εύκολα το μοντέλο μας στη διαδικασία της αναθεώρησης, η οποία είναι γραμμένη σε κώδικα Matlab.

Για την προσομοίωση της κατασκευής λοιπόν, θεωρήσαμε μία ακτίνα (beam model), η οποία αντιπροσωπεύει τον κορμό της κατασκευής, ενώ πάνω στην ακτίνα έχουν προσαρμοσθεί κατάλληλα και συμμετρικά άκαμπτα στοιχεία (rigid bodies) τα οποία αντιπροσωπεύουν την επιφάνεια της κατασκευής. Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν τα παραπάνω στοιχεία έχουν ορισθεί κατ' αναλογία με τα μέρη της κατασκευής που προσομοιάζουν.



Σχήμα 4.1 Μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων της Κατασκευής

Αναλυτικότερα, για την ακτίνα που προσομοιάζει τον χαλύβδινο κορμό έχουμε θέσει τα ακόλουθα:

- Young's Modulus: $E = 2 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$
- Poisson Ratio: $\nu = 0.33$

- Density: $\rho = 8204.6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- A: $A = 1880 \cdot 10^{-6} \text{m}^2$
- I_{yy} : $I_{yy} = 4350166.7 \cdot 10^{-12} \text{m}^4$
- I_{zz} : $I_{zz} = 694595.5 \cdot 10^{-12} \text{m}^4$
- J: $J = 5044762.2 \cdot 10^{-12} \text{m}^4$

Όσον αφορά τα άκαμπτα στοιχεία, επειδή επιθυμούμε από αυτά να προσομοιάζουν τη συμπεριφορά της επιφάνειας της κατασκευής, θεωρούμε ότι η πυκνότητά τους ισούται με το μηδέν, ενώ έπειτα από μια σειρά δοκιμών καταλήξαμε και σε μια προσέγγιση των ροπών αδρανείας, με το ίδιο πάντα κριτήριο. Αναλυτικά:

- Young's Modulus: $E = 2 \cdot 10^{14} \text{Pa}$
- Poisson Ratio: $\nu = 0.33$
- Density: $\rho = 0 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- A: $A = 0.001 \text{m}^2$
- I_{yy} : $I_{yy} = 1 \cdot 10^{-8} \text{m}^4$
- I_{zz} : $I_{zz} = 1 \cdot 10^{-8} \text{m}^4$
- J: $J = 1 \cdot 10^{-8} \text{m}^4$

Σχετικά τώρα με τις στηρίξεις της κατασκευής, έχουμε ότι από τη μία πλευρά η κατασκευή στηρίζεται σε άρθρωση και από την άλλη σε κύλιση. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι στον πρώτο κόμβο της ακτίνας που προσομοιάζει τον κορμό της κατασκευής (άρθρωση), ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες:

- $R_y = 0$
- $R_z = 0$
- $R_{thx} = 0$

ενώ στον τελευταίο κόμβο της ακτίνας (κύλιση) θα ισχύουν:

- $R_x = 0$
- $R_y = 0$

- $R_z = 0$
- $R_{thx} = 0$

Σημειώνεται ότι σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους του μοντέλου δεν έχουμε περιορισμούς.

Το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής αποτελείται από 39 κόμβους, 38 στοιχεία, ενώ οι βαθμοί ελευθερίας του είναι συνολικά 234.

Για την κατασκευή τώρα των μοντέλων με εφέδρανα χρησιμοποιούμε το παραπάνω μοντέλο μόνο που σε κάθε βάση τοποθετούμε ένα επιπλέον στοιχείο με τα χαρακτηριστικά των εφεδράνων, χαρακτηριστικά τα οποία ορίζουμε αναλογικά με αυτά των άλλων στοιχείων και κατά τρόπο τέτοιο ώστε να προσομοιάζουν τη συμπεριφορά της κατασκευής στα εν λόγω σημεία.

4.3 Παραμετροποίηση των Μοντέλων

Για κάθε πείραμα που έχει γίνει και παρουσιάζεται στην ενότητα 3.8.3 έχει δημιουργηθεί το αντίστοιχο μοντέλο, σύμφωνα πάντα με τις παραδοχές που έχουν γίνει στη προηγούμενη παράγραφο. Αυτό που απομένει τώρα για να προβούμε στην αναθεώρηση των μοντέλων, είναι η παραμετροποίησή τους, δηλαδή να ορίσουμε εκείνη την παράμετρο την οποία θα επαναπροσδιορίσουμε ,έτσι ώστε τα αποτελέσματα των μοντέλων να προσεγγίσουν περισσότερο τα πραγματικά.

Για κάθε μοντέλο κατασκευής χωρίς εφέδρανα που έχει χρησιμοποιηθεί έχει γίνει παραμετροποίηση με μία παράμετρο, αυτή του μέτρου ελαστικότητας E της ακτίνας που προσομοιάζει τον κορμό της κατασκευής. Συνεπώς μετά το πέρας της κάθε αναθεώρησης θα προκύψει ένας συντελεστής θ , με τον οποίο θα πολλαπλασιάσουμε τη παράμετρο του μοντέλου μας ώστε να βελτιώσουμε τα αποτελέσματά του.

Αντίστοιχα έχουμε πράξει και για τα μοντέλα κατασκευών με εφέδρανα, μόνο που σε αυτά παραμετροποιούμε με δύο παραμέτρους, μία για το μέτρο ελαστικότητας του κορμού της κατασκευής, και μία για το μέτρο ελαστικότητας των εφεδράνων.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναθεωρήσεων για ορισμένες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, οι περιπτώσεις που θα εξετάσουμε είναι αυτή της κατασκευής με τέσσερις πλάκες χάλυβα, με εφέδρανα και χωρίς, και αυτή της κατασκευής με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας επίσης με και χωρίς εφέδρανα.

4.4 Αναθεώρηση Με Χρήση του Μοντέλου Πεπερασμένων Στοιχείων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της αναθεώρησης για τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω. Συγκεκριμένα υπολογίζεται η παράμετρος θ για κάθε περίπτωση, έπειτα υπολογίζονται οι αναθεωρημένες κρίσιμες ιδιοσυχνότητες και συγκρίνονται με τις πειραματικές για την εξαγωγή του ποσοστού σφάλματος μεταξύ μοντέλου και πειράματος. Σημειώνεται ότι η αναθεώρηση γίνεται για ορισμένες ιδιοσυχνότητες, και συγκεκριμένα για αυτές που αναγνωρίζονται ακριβέστερα από το μοντέλο π.χ. το μοντέλο δεν μπορεί να προβλέψει τις στρεπτικές ιδιομορφές συνεπώς δεν μπορούμε να προβούμε σε αναθεώρηση αυτών.

Για την περίπτωση λοιπόν της κατασκευής με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες χωρίς εφέδρανα η παράμετρος θ προκύπτει $\theta=0.9109$ ενώ ο πίνακας των αποτελεσμάτων, πειραματικών και αναθεωρημένων, παρουσιάζεται στη συνέχεια:

ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΑΚΕΣ ΧΑΛΥΒΑ ΧΩΡΙΣ ΕΦΕΔΡΑΝΑ			
ΤΥΠΟΣ ΜΟΡΦΗΣ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΣΦΑΛΜΑ(%)
1 ^η καμπτική x	15,883	15,08769	5,01

Πίνακας 4.1 Σύγκριση Πειραματικών και Αναθεωρημένων Ιδιοσυχνοτήτων για την κατασκευή με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες χωρίς εφέδρανα

Για την ίδια κατασκευή με χρήση εφεδράνων, προκύπτει η παράμετρος για το μέτρο ελαστικότητας του κορμού της κατασκευής $\theta_1=1,0007$ και η αντίστοιχη για το μέτρο ελαστικότητας των εφεδράνων $\theta_2=1,4998$, καθώς και τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα:

ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΛΑΚΕΣ ΧΑΛΥΒΑ ΜΕ ΕΦΕΔΡΑΝΑ			
ΤΥΠΟΣ ΜΟΡΦΗΣ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΣΦΑΛΜΑ(%)
1 ^η καμπτική x	14,42	16,569299	14,90
1 ^η καμπτική y	25,153	24,740449	1,64

Πίνακας 4.2 Σύγκριση Πειραματικών και Αναθεωρημένων Ιδιοσυχνοτήτων για την κατασκευή με τέσσερις χαλύβδινες πλάκες και εφέδρανα

Για την περίπτωση τώρα της κατασκευής με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας χωρίς εφέδρανα η παράμετρος θ προκύπτει $\theta = 1.1740$ ενώ ο πίνακας των αποτελεσμάτων, πειραματικών και αναθεωρημένων, παρουσιάζεται στη συνέχεια:

ΜΙΑ ΠΛΑΚΑ ΠΛΕΞΙΓΚΛΑΣ ΧΩΡΙΣ ΕΦΕΔΡΑΝΑ			
ΤΥΠΟΣ ΜΟΡΦΗΣ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΣΦΑΛΜΑ(%)
1 ^η καμπτική x	15,974	14,653472	8,27

Πίνακας 4.3 Σύγκριση Πειραματικών και Αναθεωρημένων Ιδιοσυχνοτήτων για την κατασκευή με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας χωρίς εφέδρανα

Ομοίως, για την παραπάνω περίπτωση με χρήση εφεδράνων οι παράμετρος θ_1 και θ_2 προκύπτουν $\theta_1 = 0.2901$ και $\theta_2 = 0.5324$ αντίστοιχα, ενώ ο πίνακας των αποτελεσμάτων, πειραματικών και αναθεωρημένων, παρουσιάζεται στη συνέχεια:

ΜΙΑ ΠΛΑΚΑ ΠΛΕΞΙΓΚΛΑΣ ΜΕ ΕΦΕΔΡΑΝΑ			
ΤΥΠΟΣ ΜΟΡΦΗΣ	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	ΣΦΑΛΜΑ(%)
1 ^η καμπτική x	14,569	10,43228	28,39
1 ^η καμπτική y	12,207	14,740422	20,75

Πίνακας 4.4 Σύγκριση Πειραματικών και Αναθεωρημένων Ιδιοσυχνοτήτων για την κατασκευή με μία μεγάλη πλάκα από πλέξιγκλας και εφέδρανα

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφέρουμε ότι τα μεγάλα ποσοστά σφάλματος μεταξύ πειραματικών και αναθεωρημένων αποτελεσμάτων στην ενότητα αυτή οφείλονται στην ισχυρή μη γραμμική συμπεριφορά που εμφανίζει η κατασκευή της μεταλλικής γέφυρας του εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων, ιδιαίτερα στις στηρίξεις της. Γι' αυτό το λόγο, ακόμα και όταν αντικαθιστούμε το χάλυβα με πλέξιγκλας με σκοπό να καταστήσουμε την κατασκευή περισσότερο ελαστική (γραμμική συμπεριφορά), οι στηρίξεις και ο κορμός της κατασκευής που αποτελούνται από χάλυβα την επηρεάζουν σε βαθμό τέτοιο που να μην εξομαλύνεται η μη γραμμική συμπεριφορά της και τα αποτελέσματα να μην είναι δυνατόν να προσεγγισθούν από ένα απλοποιημένο μοντέλο. Η προσθήκη δε των εφεδράνων αυξάνει ακόμα περισσότερο τη μη γραμμική

συμπεριφορά της κατασκευής, με αποτέλεσμα να δυσχεραίνει περαιτέρω η μοντελοποίηση της κατασκευής.

Κεφάλαιο 5 Συμπεράσματα και Προτάσεις

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, παρουσιάστηκε η μεθοδολογία αναγνώρισης ιδιομορφικών χαρακτηριστικών κατασκευών και εφαρμόστηκε για την αναγνώριση των μορφικών χαρακτηριστικών των δύο μεταλλικών κατασκευών του εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων. Συγκεκριμένα αναγνωρίστηκαν οι πρώτες κρίσιμες ιδιομορφές μιας τριώροφης μεταλλικής κατασκευής και μιας μεταλλικής κατασκευής γέφυρας, για διαφορετικές δομικές καταστάσεις τους. Οι δομικές αυτές καταστάσεις προέρχονται από την αντικατάσταση μελών της κατασκευής με μελή διαφορετικού υλικού ή από την προσάρτηση στις κατασκευές συγκεντρωμένων μαζών.

Τα δεδομένα της αναγνώρισης προήρθαν από πειραματικές μετρήσεις των επιταχύνσεων σε συγκεκριμένα σημεία των κατασκευών με χρήση κατάλληλου πειραματικού συστήματος. Το πειραματικό σύστημα συνιστούν τα επιταχυνσιόμετρα που χρησιμοποιήθηκαν στις κατασκευές, το φίλτρο, η ενίσχυση και η κάρτα δειγματοληψίας που ελέγχεται μέσω προγραμμάτων του υπολογιστή. Η αναγνώριση των ιδιομορφών πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια λογισμικού σε κώδικα Matlab που στηρίζεται στη μέθοδο μορφικής αναγνώρισης PolyMAX.

Επίσης, αναπτύχθηκε κώδικας Matlab που ελέγχει τη διαδικασία των πειραματικών μετρήσεων με σκοπό να λαμβάνονται τα αποτελέσματα απευθείας από το εν λόγω πρόγραμμα και να αυτοματοποιείται έτσι η διαδικασία μορφικής αναγνώρισης.

Ακόμη, με σκοπό την προσομοίωση της δυναμικής συμπεριφοράς της κατασκευής της μεταλλικής γέφυρας δημιουργήθηκαν παραμετροποιημένα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων, ανάλογα με τις δομικές της καταστάσεις. Στη συνέχεια ακολούθησε η αναθεώρηση των μοντέλων αυτών η οποία συνίσταται στην εύρεση των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων των μοντέλων έτσι ώστε οι προβλέψεις από τα μοντέλα πεπερασμένων στοιχείων να είναι κοντά στις ιδιοσυχνότητες και στις ιδιομορφές που προέκυψαν από την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων με τη μέθοδο PolyMAX.

Σχετικά με την μέθοδο μορφικής αναγνώρισης PolyMAX, μπορούμε να πούμε ότι καθιστά το επίπεδο της μορφικής αναγνώρισης ιδιαίτερα υψηλό, αφού χρησιμοποιεί επίλυση του προβλήματος και όχι βελτιστοποίησή του, με αποτέλεσμα να απαιτεί μικρούς χρόνους και χαμηλό υπολογιστικό φόρτο, χωρίς παράλληλα να στερείται σε

ποιότητα αποτελεσμάτων. Απόδειξη των παραπάνω αποτελούν τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν καθώς και η ταχύτητα με την οποία ανακτήθηκαν.

Όσον αφορά τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα πειράματα που διενεργήθηκαν, μπορούν να χαρακτηριστούν σημαντικά τόσο για την τριώροφη μεταλλική κατασκευή όσο και για την μεταλλική κατασκευή της γέφυρας. Συγκεκριμένα για την τριώροφη μεταλλική κατασκευή προκύπτει ότι η υπόθεση κλασσικής απόσβεσης ανταποκρίνεται πολύ καλά για οποιαδήποτε δομική της κατάσταση, ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο για την μεταλλική κατασκευή της γέφυρας, στην οποία τα αποτελέσματα με θεώρηση γενικού μητρώου απόσβεσης αποδεικνύονται σημαντικά καλύτερα. Επίσης, για την ίδια κατασκευή συμπεραίνουμε, από τα πειράματα που έγιναν με τη χρήση εφεδράνων, ότι τα εφεδράνα αυξάνουν τη μη γραμμική συμπεριφορά της κατασκευής, η οποία ούτως ή άλλως παρουσιάζεται αυξημένη.

Σχετικά τώρα με την αναθεώρηση της μεταλλικής κατασκευής της γέφυρας, η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων με τα πειραματικά αποτελέσματα αναδεικνύει και πάλι την ισχυρά μη γραμμική συμπεριφορά της κατασκευής που δεν επιτρέπει σε ένα απλοποιημένο μοντέλο να προσεγγίσει τη συμπεριφορά της.

Το θέμα της εργασίας αυτής προσφέρεται για επιπλέον μελέτη. Προτείνεται αναγνώριση περισσότερων ιδιομορφών των κατασκευών για καταστάσεις που δεν έχουν μελετηθεί, ενώ παράλληλα οι πειραματικές διαδικασίες θα μπορούσαν να είναι πολύ πιο ακριβείς εάν ήταν δυνατόν να γνωρίζουμε τη διέγερση της κατασκευής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση ηλεκτρομαγνητικού διεγέρτη που παρέχει τη δυνατότητα διέγερσης της κατασκευής σε κάθε πείραμα με γνώση του μεγέθους διέγερσης και ελέγχου του συχνотικού περιεχομένου της διέγερσης.

Τέλος η ακριβέστερη ρύθμιση των οργάνων μέτρησης είναι ένα ακόμη θέμα που είναι καλό να μελετηθεί για τη βελτίωση της διαδικασίας αναγνώρισης ιδιομορφών της μεταλλικής κατασκευής.

Παράρτημα 1: Κώδικας Matlab-Data Acquisition Session

%Program auto_measure:

%Given the values which are asked by the user, this program executes the data acquisition session and provides several plots and a saved file suitable for modal identification, according to the requirements of the corresponding program
%(Vaggelis Ntotsios)

```
n=input('type the number n of data acquisition procedures');
c=input('type the number c of active channels between 2 and 7');
d=input('type the duration d of data acquisition procedure');
S=input('type the Samplerate S of data acquisition procedure');
initialize_measurements
measure_now(AI,chan,Fs,blocksize,n,c);
```

'!!!End of data acquisition procedure!!!'

'!!!Last saved files are ready for modal identification!!!'

%Program initialize_measurements:

%This program is called by the program auto_measure and specifies the parameters of the data acquisition session according to the values given by the user.

```
AI = analoginput('nidaq','1');
chan = addchannel(AI,0:c);
duration = d;
set(AI,'SampleRate',S)
ActualRate = get(AI,'SampleRate');
set(AI,'SamplesPerTrigger',duration*ActualRate)
set(AI,'TriggerType','Manual')
blocksize = get(AI,'SamplesPerTrigger');
Fs = ActualRate;
```

%Function measure_now:

%This function gives the option to decide whether to start or not the data acquisition procedure. Also the user can decide whether to save or skip a procedure.

```
function [gdata,mag]=measure_now(AI,chan,Fs,blocksize,n,c)
```

```
for i=1:n
    k=input('type 1 to trigger or 2 to cancel triggering');
    if k==1
        start(AI)
        trigger(AI)
    elseif k==2
        continue
    else
        'invalid typing,try again'
    end
[data,time,abstime,events]=getdata(AI);
switch(c)
%This switch case divides each acceleration meter's data by a specific number that
%transforms voltage to acceleration
    case 0
        gdata(:,1)=data(:,1)/480;
    case 1
        gdata(:,1)=data(:,1)/480;
        gdata(:,2)=data(:,2)/492;
    case 2
        gdata(:,1)=data(:,1)/480;
        gdata(:,2)=data(:,2)/492;
        gdata(:,3)=data(:,3)/492;
    case 3
        gdata(:,1)=data(:,1)/480;
        gdata(:,2)=data(:,2)/492;
        gdata(:,3)=data(:,3)/492;
        gdata(:,4)=data(:,4)/497;
    case 4
        gdata(:,1)=data(:,1)/480;
        gdata(:,2)=data(:,2)/492;
        gdata(:,3)=data(:,3)/492;
        gdata(:,4)=data(:,4)/497;
        gdata(:,5)=data(:,5)/200;
```



```
case 5
    gdata(:,1)=data(:,1)/480;
    gdata(:,2)=data(:,2)/492;
    gdata(:,3)=data(:,3)/492;
    gdata(:,4)=data(:,4)/497;
    gdata(:,5)=data(:,5)/200;
    gdata(:,6)=data(:,6)/200;
case 6
    gdata(:,1)=data(:,1)/480;
    gdata(:,2)=data(:,2)/492;
    gdata(:,3)=data(:,3)/492;
    gdata(:,4)=data(:,4)/497;
    gdata(:,5)=data(:,5)/200;
    gdata(:,6)=data(:,6)/200;
    gdata(:,7)=data(:,7)/192;
case 7
    gdata(:,1)=data(:,1)/480;
    gdata(:,2)=data(:,2)/492;
    gdata(:,3)=data(:,3)/492;
    gdata(:,4)=data(:,4)/497;
    gdata(:,5)=data(:,5)/200;
    gdata(:,6)=data(:,6)/200;
    gdata(:,7)=data(:,7)/192;
    gdata(:,8)=data(:,8)/194;
otherwise
    error('This is impossible')
end
for i=1:c+1    %Loop that estimates the fft of the data
[f(:,i),mag(:,i)] = daqdocfft(gdata(:,i),Fs,blocksize);
end
l=input('type 1 to save or 2 to cancel saving');
if l==1
    'data will be saved'
elseif l==2
```

```

    continue
else
    'invalid typing,try again'
end
%loop that gives one figure for each channel that includes two plots, one for time
%history and one for the corresponding fft
for j=1:c+1
figure
subplot(2,1,1);plot(time,gdata(:,j))
grid on
ylabel('Acceleration (g)')
xlabel('Time(s)')
title('Time Histories')
subplot(2,1,2);plot(f,mag(:,j))
grid on
ylabel('Acceleration (g)')
xlabel('Frequency')
title('FFT vs Frequency')
end
% "sdl_only_structure" is a file that includes the required information for the modal
%identification
load sdl_only_structure FEelt FEnode channeltext ndim sensors
accel=gdata(:,[2 4:c+1]);
Ft=gdata(:,3);
dt=input('type the dt of your measurement');
p=input('give filename for saving, between quotation marks');
save(p,'accel','Ft','dt','FEelt','FEnode','channeltext','ndim','sensors')

'!!!The saved file is suitable for modal identification!!!'
end

```

Παράρτημα 2: Φωτογραφίες Πειραματικής Διάταξης



Φωτογραφία 1. Φωτογραφία Τριώροφης Μεταλλικής Κατασκευής



Φωτογραφία 2. Φωτογραφία Μεταλλικής Κατασκευής Γέφυρας



Φωτογραφία 3. Ενίσχυση, φίλτρο, μέρη της πειραματικής διάταξης

Βιβλιογραφία

1. Νατσιάβας, Σ., ‘Εφαρμοσμένη Δυναμική’, 1999
2. Νατσιάβας, Σ., ‘Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων’, 2001
3. Γλάνια, Μ., ‘Αναγνώριση Δυναμικών Μοντέλων Κατασκευών Βάσει Ταλαντωτικών Μετρήσεων’ Διπλωματική εργασία, 2004
4. Χριστοδούλου, Κ., ‘Αναθεώρηση Μοντέλων Πεπερασμένων Στοιχείων Βάση Δυναμικών Μετρήσεων, με εφαρμογή στη διάγνωση βλαβών’, μεταπτυχιακή εργασία, 2001
5. Χριστοδούλου, Κ., ‘Ανάπτυξη Μεθόδου Αναγνώρισης και Διάγνωσης Βλαβών σε Κατασκευές’, διδακτορική διατριβή, 2006
6. Papadimitriou, C., Beck, J.L., and Au, S.K., 2000, “Entropy-Based Optimal Sensor Location for Structural Model Updating”, *Journal of Vibration and control*, 6, pp.781-800
7. Peeters, B., Van der Auweraer, H., Guillaume, P., Leuridan, J., 2004, “The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation?”, *Journal of Shock and Vibration*, 11, pp.395-404
8. Peeters, B., “System Identification and Damage Detection in Civil Engineering”, phd, University of Leuven, 2000



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000089091