



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

***ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΚΑΤΕΡΓΑΣΙΩΝ***

*Εργαστήριο  
Δυναμικής Συστημάτων*

**Ντότσιος Ευάγγελος**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ  
ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΩΝ**

**ΒΟΛΟΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2005**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 2420/1  
Ημερ. Εισ.: 03-03-2005  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ  
2005  
ΝΤΟ

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Σπύρος Καραμάνος  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Πετρόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Κατ' αρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Παπαδημητρίου για τη συνεργασία κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά για την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθειά, υποστήριξη και εμπιστοσύνη του, σε όλη τη διάρκεια της μελέτης μου. Ακόμη ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Κώστα Χριστοδούλου για την άριστη συνεργασία στο χώρο του εργαστηρίου Δυναμικής Συστημάτων. Πολλά ευχαριστώ στην παρέα μου στο Πολυτεχνείο, για τις αξέχαστες στιγμές που περάσαμε μαζί.

Την παρούσα εργασία την αφιερώνω στους γονείς μου Γιώργο και Παρασκευή, για την ατελείωτη υπομονή και υποστήριξη καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

# ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΗΡΡΟΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΩΝ

Ντότσιος Ευάγγελος

*Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2005*

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Κωνσταντίνος Παπαδημητρίου

*Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας*

## Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μια μεθοδολογία βέλτιστου σχεδιασμού κατασκευών υπό την επιρροή αβεβαιοτήτων και εφαρμόζεται στον σχεδιασμό παθητικών συστημάτων ελέγχου ταλαντώσεων κατασκευών.

Σύμφωνα με τον προτεινόμενο βέλτιστο σχεδιασμό επιχειρείται ταυτόχρονα η βελτιστοποίηση της μέσης τιμής (mean) της απόδοσης και η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης (variation) αυτής της απόδοσης ως προς τις αβέβαιες παραμέτρους του συστήματος. Επομένως το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού υπό την επιρροή αβεβαιοτήτων διατυπώνεται ως ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Στο σχεδιασμό λαμβάνονται υπόψη οι αβεβαιότητες στα δυναμικά φορτία. Οι αβεβαιότητες αυτές ποσοτικοποιούνται με στοχαστικές διαδικασίες. Επίσης στον σχεδιασμό λαμβάνονται υπόψη οι αβεβαιότητες στις παραμέτρους του μηχανικού συστήματος (κατασκευής). Εδώ οι αβεβαιότητες ποσοτικοποιούνται με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Ως μέτρο της απόδοσης του συστήματος και βασικό κριτήριο για την επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού είναι η ελαχιστοποίηση του μέγιστου των συναρτήσεων μεταφοράς ή της πιθανότητας αστοχίας του συστήματος. Η μέση τιμή και η διακύμανση της απόδοσης ορίζονται ως πολυδιάστατα ολοκληρώματα στο χώρο των αβέβαιων παραμέτρων και προτείνονται αριθμητικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των τιμών των ολοκληρωμάτων αυτών.

Ο εξελικτικός Pareto αλγόριθμος (Strength Pareto Evolutionary Algorithm) χρησιμοποιείται για να επιλύσει το πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης και να αναγνωρίσει έναν αριθμό Pareto λύσεων που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι κατά μήκος του μετώπου του Pareto (Pareto Front). Προσεγγιστικές θεωρίες χρησιμοποιούνται για να υπολογιστεί η αξιοπιστία, ή, ισοδύναμα η πιθανότητα αστοχίας, λόγω της στοχαστικής φύσης της διεγερσης. Μέθοδοι βασισμένες σε

ασυμπτωτικές προσεγγίσεις και σε μεθόδους Monte Carlo προσφέρουν υπολογιστικά αποδοτικές εκτιμήσεις της μέσης τιμής της απόδοσης και της διακύμανσής της ως προς τις αβέβαιες παραμέτρους.

Η μεθοδολογία εφαρμόζεται στο σχεδιασμό παθητικών συστημάτων ελέγχου ταλαντώσεων κατασκευών. Στην παρούσα εργασία μελετάται η δυνατότητα ελέγχου των ταλαντώσεων πρωτεύοντων μηχανικών συστημάτων χρησιμοποιώντας δευτερεύοντα συστήματα ταλαντωτών μάζας – ελατηρίου – αποσβεστήρα (Tuned Mass Dampers (TMD)), τα οποία προσαρτώνται κατάλληλα στο μηχανικό σύστημα. Η μάζα του δευτερεύοντος συστήματος παθητικού ελέγχου είναι σχετικά μικρή σε σχέση με τη συνολική μάζα του πρωτεύοντος μηχανικού συστήματος. Το πρωτεύον μηχανικό σύστημα το οποίο μελετάται, αποτελείται από έναν απλό ταλαντωτή ενός βαθμού ελευθερίας ο οποίος διεγείρεται στη βάση του. Για τον έλεγχο των ταλαντώσεων χρησιμοποιούνται ένα ή δύο δευτερεύοντα συστήματα (TMD). Τα κύρια χαρακτηριστικά των συζευγμένων πρωτεύοντων – δευτερεύοντων συστημάτων δύο και τριών βαθμών ελευθερίας που προκύπτουν είναι οι ιδιοσυχνότητες και τα μέτρα απόσβεσης του πρωτεύοντος και των δευτερεύοντων συστημάτων, καθώς επίσης και ο λόγος μαζών των συστημάτων. Αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες περιγράφουν την απόκριση του συζευγμένου συστήματος συναρτήσει των ιδιοσυχνοτήτων, των μέτρων απόσβεσης και του λόγου των μαζών των συστημάτων.

Για την επιλογή των βέλτιστων παραμέτρων του δευτερεύοντος συστήματος για τις οποίες επιτυγχάνεται ο καλύτερος δυνατός έλεγχος των ταλαντώσεων του πρωτεύοντος, γίνεται αρχικά μία παραμετρική ανάλυση για τη μελέτη της επιρροής των τιμών των παραμέτρων του δευτερεύοντος συστήματος στην απόδοση του πρωτεύοντος συστήματος

Συμπεραίνεται ότι για την περίπτωση που δεν υπάρχουν αβεβαιότητες στις παράμετρος της κατασκευής, ο πιο αποτελεσματικός έλεγχος του πρωτεύοντος συστήματος επιτυγχάνεται επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος να είναι κοντά σε μια από τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος συστήματος. Επίσης, αυξάνοντας το λόγο μαζών και το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση των ταλαντώσεων του πρωτεύοντος συστήματος. Τέλος εφαρμόζεται η μεθοδολογία βέλτιστου σχεδιασμού στην περίπτωση που οι παράμετρος του συστήματος είναι αβέβαιες. Μελετώντας την επίδραση των αβεβαιοτήτων προκύπτει ότι οι αβεβαιότητες στις παράμετρος επηρεάζουν σημαντικά τις προβλέψεις της απόκρισης και της αξιοπιστίας. Επίσης

επιρεάζουν σημαντικά και την επιλογή των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού και επομένως θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στο σχεδιασμό των συστημάτων ελέγχου TMD.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται μια σύντομη περιγραφή των παθητικών και ενεργών συστημάτων ελέγχου. Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφεται το συζευγμένο πρωτεύων-δευτερεύων μηχανικό σύστημα παθητικού ελέγχου (TMD) δύο και τριών βαθμών ελευθερίας, αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης και περιγράφονται εν συντομία οι μέθοδοι ανάλυσης για τον προσδιορισμό των συναρτήσεων μεταφοράς του συστήματος. Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται διαγράμματα από την ανάλυση του συστήματος 2 βαθμών ελευθερίας. Από αυτά τα διαγράμματα προκύπτουν χρήσιμα συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του πρωτεύοντος μηχανικού συστήματος, ενώ αναλύεται ο ρόλος του δευτερεύοντος συστήματος και η επίδρασή του στην απόκριση και στην πιθανότητα αστοχίας του πρωτεύοντος συστήματος. Στο Κεφάλαιο 4 χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους μελετάται ο βέλτιστος σχεδιασμός παθητικών συστημάτων ελέγχου (TMD) υπό την επιρροή αβεβαιοτήτων. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται διαγράμματα από την ανάλυση του συστήματος των δύο και των τριών βαθμών ελευθερίας. Από αυτά τα διαγράμματα θα προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα για την απόδοση του συστήματος και το βέλτιστο σχεδιασμό. Τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται συνοπτικά στο Κεφάλαιο 6

# Πίνακας Περιεχομένων

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.....</b>	<b>9</b>
<b>Εισαγωγή στα Συστήματα Ελέγχου των Κατασκευών</b>	
1.1 Γενική Περιγραφή Συστημάτων Ελέγχου.....	9
1.2 Τύποι Συστημάτων Ελέγχου.....	10
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....</b>	<b>13</b>
<b>Ανάλυση Δυναμικού Μοντέλου Δύο και Τριών Βαθμών Ελευθερίας</b>	
2.1 Περιγραφή του Μηχανικού Συστήματος.....	13
2.2 Εξισώσεις Κίνησης του Συστήματος.....	15
2.3 Μέθοδος Επίλυσης.....	17
2.4 Εισαγωγή Νέων Παραμέτρων στις Εξισώσεις.....	20
2.4.1 Παραμετρική Ανάλυση Δυναμικού Μοντέλου Δύο Βαθμών Ελευθερίας.....	21
2.4.2 Παραμετρική Ανάλυση Δυναμικού Μοντέλου Τριών Βαθμών Ελευθερίας.....	23
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....</b>	<b>26</b>
<b>Παραμετρική Ανάλυση</b>	
3.1 Εισαγωγή.....	26
3.2 Συναρτήσεις Μεταφοράς.....	27
3.2.1 Επιλογή πρώτης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\zeta_s$ .....	27
3.2.2 Επιλογή δεύτερης ομάδας παραμέτρων – μεταβολή $\mu$ .....	32
<b>3.3</b> Πιθανότητα Αστοχίας Γραμμικών Μοντέλων Κατασκευών.....	35
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....</b>	<b>40</b>
<b>Βέλτιστος Σχεδιασμός υπό την Επιρροή Αβεβαιοτήτων</b>	
4.1 Εισαγωγή.....	40
4.2 Διατύπωση του Προβλήματος Βέλτιστου Σχεδιασμού.....	40
4.3 Επιρροή των Αβεβαιοτήτων.....	41
4.4 Εφαρμογή στον Βέλτιστο Σχεδιασμό Συστήματος Ελέγχου TMD.....	43



4.5	Διατύπωση του Προβλήματος Βέλτιστου Σχεδιασμού υπό την Επιρροή Αβεβαιοτήτων.....	45
4.6	Βέλτιστες Λύσεις Pareto και Υπολογισμοί Χρησιμοποιώντας Εξελικτικούς Αλγορίθμους.....	47
4.7	Αριθμητικές Μέθοδοι Υπολογισμού των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης.....	50
4.7.1	Ασυμπτωτική Προσέγγιση.....	50
4.7.2	Μέθοδος Ολοκλήρωσης Βασισμένη στην Προσομοίωση Monte Carlo.....	53

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....56**

### **Αριθμητική Μελέτη – Εφαρμογές**

5.1	Γενική Περιγραφή.....	56
5.2	Αριθμητική Μέθοδος Υπολογισμού των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης .....	57
5.3	Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo για τον Υπολογισμό των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης .....	58
5.4	Βέλτιστος Σχεδιασμός TMD υπό την Επιρροή Αβεβαιοτήτων.....	58
5.5	Επίδραση του Επιπέδου των Αβεβαιοτήτων στο Βέλτιστο Σχεδιασμό TMD.....	60
5.6	Επίδραση της Ακρίβειας Υπολογισμού των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης στον Βέλτιστο Σχεδιασμό.....	62

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.....74**

### **Γενικά Συμπεράσματα**

## **Παράρτημα Α.....76**

Αναλυτική έκφραση για την κλίση και την Hessian μήτρα κατά την Ασυμπτωτική Προσέγγιση.....	76
---	----

## **Βιβλιογραφία.....77**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

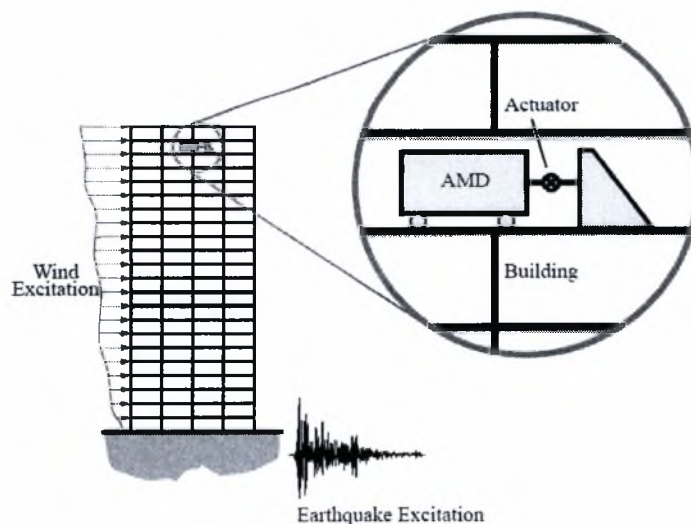
## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

### 1.1 Γενική Περιγραφή Συστημάτων Ελέγχου

Η ασφάλεια των μηχανικών κατασκευών είναι χωρίς αμφιβολία μια από τις πρώτες προτεραιότητες των μηχανικών σε ολόκληρο τον κόσμο. Κτίρια, γέφυρες και οδικά δίκτυα είναι μερικά μόνο από τα έργα όπου η ασφάλεια παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς τέτοιου είδους κατασκευές χρησιμοποιούνται καθημερινά από μεγάλο μέρος του πληθυσμού. Η ασφάλεια των παραπάνω κατασκευών υπονομεύεται από πολλούς φυσικούς κινδύνους, όπως είναι οι σεισμοί, οι δυνατοί άνεμοι, τα παλιρροιακά κύματα καθώς και τεχνητές μη ηθελημένες καταπονήσεις όπως η υψηλή κυκλοφορία στα οδικά δίκτυα, συνωστισμός στα κτίρια κτλ.

Σε κάθε περίπτωση, σκοπός είναι να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής, έχοντας σχεδιάσει την κατασκευή έτσι ώστε να αντέχει σε όλες τις πιθανές διεγέρσεις που θα δεχτεί. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η μείωση της πιθανότητας αστοχίας πραγματοποιείται με μείωση της απόκρισης της κατασκευής, με δεδομένη διέγερση. Παρακάτω περιγράφονται συνοπτικά διάφορες μέθοδοι μείωσης της απόκρισης ενός συστήματος, όταν αυτό δέχεται γνωστή διέγερση.

Το Σχήμα 1.1 δείχνει σχηματικά με ποιο τρόπο εφαρμόζεται σε ένα κτίριο ένα σύστημα ελέγχου (Tuned Mass Damper ή TMD) με το οποίο επιδιώκεται την μείωση της απόκρισης της συνολικής κατασκευής.



Σχήμα 1.1: Κτίριο με Σύστημα Ελέγχου

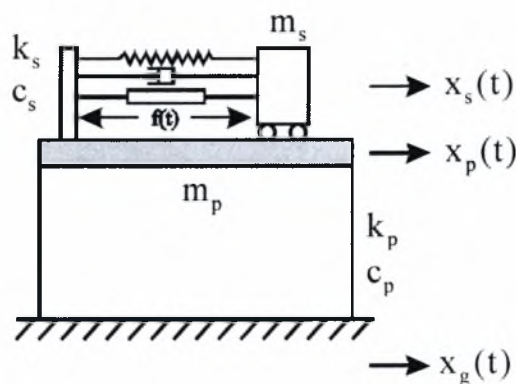
Σε έναν από τους τελευταίους ορόφους του κτιρίου, τοποθετείται ένα δευτερεύων σύστημα (secondary system) που αποτελείται από μια μάζα και έναν μηχανισμό κίνησης (actuator), ενώ το έδαφος δέχεται διέγερση από σεισμό. Ανάλογα με τον τύπο της διέγερσης και τον τύπο του δευτερεύοντος συστήματος, προκύπτει και διαφορετική συμπεριφορά του τελευταίου, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η απόκριση όλης της κατασκευής.

## 1.2 Τύποι Συστημάτων Ελέγχου

### 1.2.1 ΕΝΕΡΓΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (ACTIVE CONTROL SYSTEM)

Το συγκεκριμένο σύστημα αποτελείται από μια μάζα και έναν μηχανισμό κίνησης, ο οποίος μηχανισμός ανάλογα με τη διέγερση που εφαρμόζεται στην κατασκευή, εφαρμόζει με τη σειρά του κατάλληλη δύναμη στη μικρή μάζα, ώστε να καθορίσει τη συμπεριφορά όλης της κατασκευής. Η δύναμη στη μάζα εφαρμόζεται με πολλούς τρόπους, όπως υδραυλικά, πνευματικά, ηλεκτρομαγνητικά ή με ηλεκτροκινητήρα. Το μεγάλο μειονέκτημα του συγκεκριμένου τύπου είναι ότι απαιτείται μεγάλη ενέργεια για τη λειτουργία του δευτερεύοντος συστήματος. Κάτι τέτοιο είναι επισφαλές σε περιπτώσεις σεισμού, όπου είναι πιθανή μια διακοπή ρεύματος.

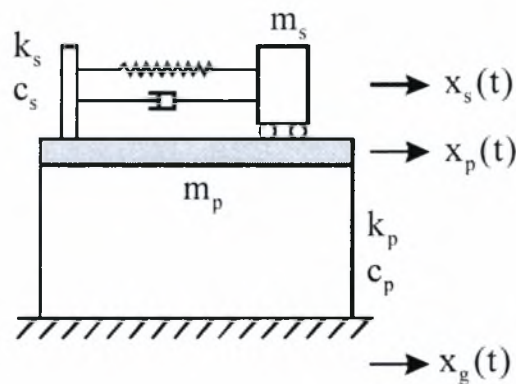
Στο Σχήμα 1.2 παριστάνεται ένα σύστημα τέτοιου είδους



Σχήμα 1.2: Κατασκευή με ενεργό σύστημα ελέγχου

### 1.2.2 ΠΑΘΗΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (PASSIVE CONTROL SYSTEM)

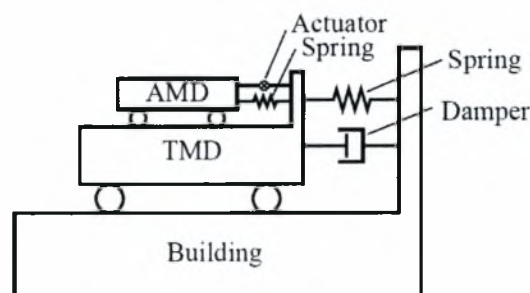
Η βασική διαφορά ενός παθητικού συστήματος από ένα ενεργό, είναι η απουσία εξωτερικής πηγής ενέργειας, καθώς δεν υπάρχει ο μηχανισμός κίνησης ο οποίος μετακινεί τη δευτερεύουσα μάζα. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, διότι ακόμα και σε περίπτωση διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος κατά τη διάρκεια του σεισμού, δεν επηρεάζεται η λειτουργία του. Η κίνηση του δευτερεύοντος συστήματος πραγματοποιείται ανάλογα με τη διέγερση που δέχεται η κατασκευή (κτίριο, γέφυρα κτλ). Η διαφορά του με το ενεργό σύστημα είναι η απουσία του μηχανισμού κίνησης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.



Σχήμα 1.3: Κατασκευή με παθητικό Σύστημα Ελέγχου

### 1.2.3 ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (HYBRID CONTROL SYSTEM)

Τα υβριδικά συστήματα ελέγχου αποτελούν μια συνδυασμένη χρήση ενεργών και παθητικών συστημάτων. Το πλεονέκτημά τους είναι ότι μπορούν να μετριάσουν τους περιορισμούς που υπάρχουν τόσο στα ενεργά όσο και στα παθητικά συστήματα, προσφέροντας μια πιο βέλτιστη συνολικά λύση. Τα υβριδικά συστήματα συνεχίζουν να αποδίδουν ακόμα και σε περίπτωση διακοπής της ενέργειας που τα τροφοδοτεί, καθώς είναι έτσι σχεδιασμένα ώστε να μπορούν να λειτουργούν ακόμα και με μπαταρίες. Στο Σχήμα 1.4 παρουσιάζεται ένα υβριδικό σύστημα ελέγχου.



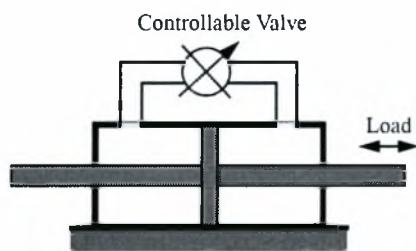
Σχήμα 1.4: Κατασκευή με υβριδικό Σύστημα Ελέγχου

#### 1.2.4 ΗΜΙ ΕΝΕΡΓΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ (SEMI ACTIVE CONTROL SYSTEM)

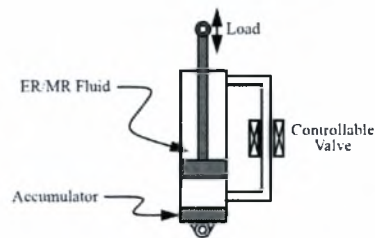
Είναι μια υποκατηγορία ενεργών συστημάτων ελέγχου τα οποία αποδίδουν εξίσου με τα ενεργά συστήματα, χωρίς την απαίτηση μεγάλης ποσότητας ενέργειας. Στα ημι ενεργά συστήματα χρησιμοποιούνται ειδικοί μηχανισμοί κίνησης (actuator) οι οποίοι από κατασκευής απαιτούν ενέργεια ικανή να τροφοδοτηθεί και από μπαταρίες. Διάφοροι τύποι μηχανισμών κίνησης είναι οι εξής

- Αποσβεστήρας με μεταβαλλόμενη ακαμψία (variable-stiffness device)
- Αποσβεστήρας με ελεγχόμενη τριβή (controllable friction device)
- Αποσβεστήρας μεταβαλλόμενου στομίου με υγρό (variable-orifice fluid damper)
- Ελεγχόμενος αποσβεστήρας με υγρό (controllable fluid damper)

Οι δύο τελευταίοι τύποι μηχανισμών κίνησης παρουσιάζονται στα Σχήματα 1.5 και 1.6.



Σχήμα 1.5: Variable-orifice fluid damper



Σχήμα 1.6: Controllable fluid damper

Τα προηγούμενα σχήματα είναι ενδεικτικά και αντιπροσωπεύουν ένα μεγάλο μέρος από τέτοιου είδους μηχανισμούς. Ωστόσο, σήμερα γίνεται μεγάλη έρευνα σε τέτοιου είδους συσκευές, με συνέπεια τη συνεχή τεχνολογική εξέλιξη στον τομέα αυτό.

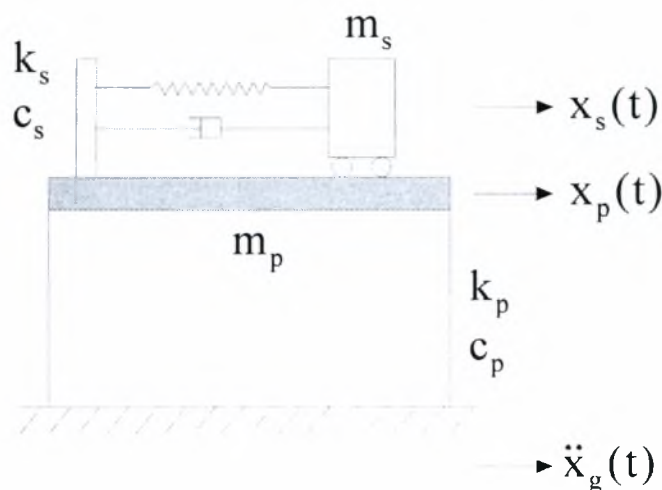
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΙΩΝ ΒΑΘΜΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

#### 2.1 Περιγραφή του Μηχανικού Συστήματος

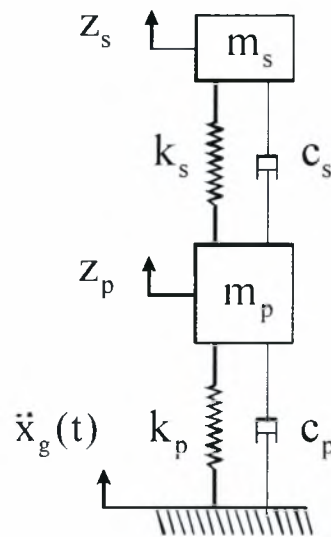
Η παρούσα εργασία θα ασχοληθεί με συστήματα παθητικού ελέγχου τα οποία έχουν τα χαρακτηριστικά που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 1.2.2. Στο Σχήμα 2.1 παριστάνεται η μορφή του δυναμικού μοντέλου. Το μοντέλο έχει δύο βαθμούς ελευθερίας και αποτελείται από δύο συστήματα. Το πρωτεύων σύστημα περιλαμβάνει τη μάζα  $m_p$  στερεωμένη στο έδαφος με ελατήριο σταθεράς  $k_p$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_p$ .

Το δευτερεύων σύστημα αποτελείται από τη μάζα  $m_s$ , η οποία συνδέεται με τη μάζα  $m_p$  με ελατήριο σταθεράς  $k_s$  και αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_s$ . Η μάζα του δευτερεύοντος συστήματος είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα του κύριου συστήματος και είναι αυτή που θα παίζει παθητικό ρόλο στον έλεγχο της απόκρισης της κύριας μάζας. Το έδαφος δέχεται διέγερση  $\ddot{x}_g$ .



Σχήμα 2.1: Δυναμικό μοντέλο με παθητικό σύστημα ελέγχου

Το παραπάνω μοντέλο εξετάζεται στην εξής απλοποιημένη μορφή



Σχήμα 2.2

Η απόκριση του συστήματος περιγράφεται από τις απόλυτες μετατοπίσεις  $z_p$  και  $z_s$ . Εισάγοντας τις σχετικές μετατοπίσεις των δύο μαζών ως προς το έδαφος

$$\begin{aligned} x_p &= z_p - x_g \\ x_s &= z_s - x_g \end{aligned} \quad (2.1)$$

Παίρνοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο των σχετικών μετατοπίσεων, προκύπτουν οι σχετικές ταχύτητες και οι σχετικές επιταχύνσεις των δύο μαζών

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \dot{z}_p - \dot{x}_g \\ \dot{x}_s &= \dot{z}_s - \dot{x}_g \end{aligned} \quad (2.2)$$

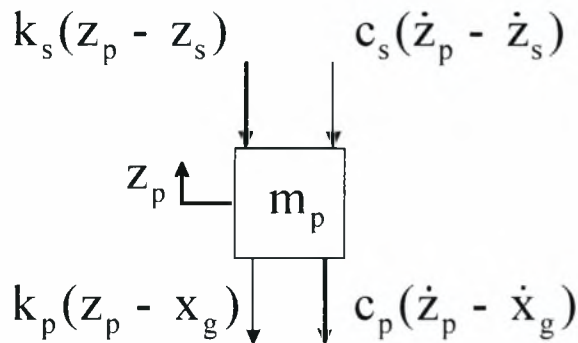
$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \ddot{z}_p - \ddot{x}_g \\ \ddot{x}_s &= \ddot{z}_s - \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (2.3)$$

Άρα όλες οι αποκρίσεις θα εκφράζονται όπως αυτές φαίνονται από έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στο έδαφος. Θεωρείται ότι το έδαφος δέχεται διέγερση  $\ddot{x}_g$ .

## 2.2 Εξισώσεις Κίνησης του Συστήματος

Για να δημιουργηθούν οι εξισώσεις κίνησης, σχεδιάζονται τα Διαγράμματα Ελεύθερου Σώματος για την καθεμία από τις δυο μάζες.

Για τη μάζα  $m_p$  το Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_p$

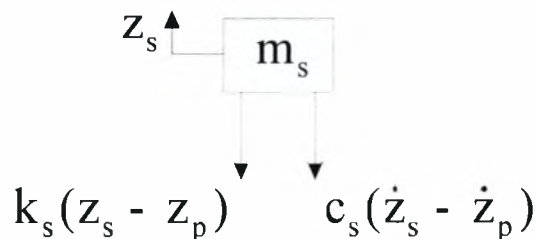
Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα, προκύπτει η εξίσωση κίνησης του σώματος  $m_p$

$$m_p \cdot \ddot{z}_p = 0 - k_s \cdot (z_p - z_s) - c_s \cdot (\dot{z}_p - \dot{z}_s) - k_p \cdot (z_p - x_g) - c_p \cdot (\dot{z}_p - \dot{x}_g) \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση τις σχετικές μετατοπίσεις, σχετικές ταχύτητες και σχετικές επιταχύνσεις ως προς το έδαφος, η τελική εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_p$  παίρνει τη μορφή

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + (c_p + c_s) \cdot \dot{x}_p + (k_p + k_s) \cdot x_p - c_s \cdot \dot{x}_s - k_s \cdot x_s = -m_p \cdot \ddot{x}_g \quad (2.5)$$

Για τη μάζα  $m_s$ , το Διάγραμμα Ελεύθερου Σώματος φαίνεται στο Σχήμα 2.4



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα ελεύθερου σώματος της μάζας  $m_s$



Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα (Νατσιάβας Σ., 1994), η εξίσωση κίνησης της μάζας  $m_s$  είναι η εξής

$$m_s \cdot \ddot{z}_s = -k_s \cdot (z_s - z_p) - c_s (\dot{z}_s - \dot{z}_p) \quad (2.6)$$

Εισάγοντας σχετικές μετατοπίσεις, σχετικές ταχύτητες και σχετικές επιταχύνσεις ως προς το έδαφος, η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$m_s \cdot \ddot{x}_s + c_s \cdot \dot{x}_s + k_s \cdot x_s - c_s \cdot \dot{x}_p - k_s \cdot x_p = -m_s \cdot \ddot{x}_g \quad (2.7)$$

Άρα οι δύο εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν τις σχετικές αποκρίσεις του μοντέλου ως προς την κίνηση του εδάφους είναι

$$\begin{aligned} m_p \cdot \ddot{x}_p + (c_p + c_s) \cdot \dot{x}_p + (k_p + k_s) \cdot x_p - c_s \cdot \dot{x}_s - k_s \cdot x_s &= -m_p \cdot \ddot{x}_g \\ m_s \cdot \ddot{x}_s + c_s \cdot \dot{x}_s + k_s \cdot x_s - c_s \cdot \dot{x}_p - k_s \cdot x_p &= -m_s \cdot \ddot{x}_g \end{aligned}$$

Οι εξισώσεις του συστήματος σε μητρική μορφή είναι (Νατσιάβας Σ., 2001)

$$\begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_p + c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_p + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} m_p \\ m_s \end{pmatrix} \cdot \ddot{x}_g \quad (2.8)$$

εισάγοντας τα διανύσματα της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

τα μητρώα Μάζας, Απόσβεσης και Ακαμψίας είναι

$$M = \begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_p + c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_p + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

και το διάνυσμα

$$\underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

η μητρική μορφή του συστήματος, συνοψίζεται στην παρακάτω εξίσωση

$$M \cdot \ddot{\underline{x}} + C \cdot \dot{\underline{x}} + K \cdot \underline{x} = -M \cdot \underline{\Gamma} \cdot \ddot{x}_g \quad (2.12)$$

Το σύστημα (2.12) αποτελεί ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης το οποίο επιλύεται χρησιμοποιώντας διαθέσιμες μεθόδους σε MATLAB.

### 2.3 Μέθοδος Επίλυσης

Η επίλυση του συστήματος για τον προσδιορισμό των αποκρίσεων, όπως μετατοπίσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις των μαζών ή εσωτερικές δυνάμεις στα ελατήρια, γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας διαθέσιμες μεθόδους. Στην παρούσα εργασία ενδιαφέρει ο υπολογισμός των συναρτήσεων μεταφοράς, οι οποίες προσδιορίζουν το πλάτος της απόκρισης της μόνιμης κατάστασης του συστήματος σε αρμονική διέγερση, ως προς το πλάτος της αρμονικής διέγερσης, συναρτήσει της συχνότητας της αρμονικής διέγερσης. Επίσης ενδιαφέρει ο υπολογισμός της πιθανότητας αστοχίας στοιχείων της κατασκευής σε δεδομένα στοχαστικά φορτία λευκού θορύβου.

Οι συναρτήσεις μεταφοράς και η πιθανότητα αστοχίας υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το λογισμικό MATLAB. Για να επιτευχθεί η επίλυση, χρησιμοποιείται η μέθοδος του Χώρου των Καταστάσεων (State Space Method) και είναι κατάλληλη τόσο για συστήματα SISO (single input-single output) όσο και για συστήματα MIMO (multiple input-multiple output). Το γενικό σύστημα (2.12) των εξισώσεων 2<sup>ης</sup> τάξης του συστήματος μετατρέπεται σε σύστημα εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης, στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\underline{y}} &= A \cdot \underline{y} + B \cdot \underline{u} \\ \underline{z} &= C \cdot \underline{y} + D \cdot \underline{u} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης (state space vector)

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \end{pmatrix}$$

το οποίο περιλαμβάνει τις ελάχιστες δυνατές μεταβλητές που πρέπει να είναι γνωστές κάθε χρονική στιγμή, ώστε να μπορεί να περιγραφεί η απόκριση του συστήματος για δεδομένη διέγερση τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Το διάνυσμα  $\underline{z}$  είναι το επιθυμητό διάνυσμα εξόδου και περιλαμβάνει τις μεταβλητές που ενδιαφέρει να υπολογιστούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Το διάνυσμα εξόδου επιλέγεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα να είναι

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{x}} \end{pmatrix}$$

ώστε να δίνει το διάνυσμα των μετατοπίσεων, των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων των δύο μαζών. Τέλος,  $\underline{u}$  είναι το διάνυσμα διέγερσης, ενώ τα μητρώα A, B, C και D είναι μητρώα που εξαρτώνται από το αρχικό σύστημα δεύτερης τάξης και το διάνυσμα εξόδου  $\underline{z}$ .

Τα μητρώα A, B, C και D υπολογίζονται ως ακολούθως. Με βάση την γενική εξίσωση κίνησης

$$M \cdot \ddot{\underline{x}} + C \cdot \dot{\underline{x}} + K \cdot \underline{x} = -M \cdot \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.12)$$

προκύπτει

$$\ddot{\underline{x}} = -M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\underline{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} - \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.14)$$

Παραγωγίζοντας το διάνυσμα κατάστασης  $\underline{y}$  προκύπτει

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\underline{x}} \\ -M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\underline{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} - \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

το οποίο γράφεται στη μορφή

$$\dot{\underline{y}} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix} \cdot \underline{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{\Gamma} \end{pmatrix} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.16)$$

Στη συνέχεια, παίρνοντας το διάνυσμα εξόδου  $\underline{z} = (\underline{x} \quad \dot{\underline{x}} \quad \ddot{\underline{x}})^T$

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ -M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\underline{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} - \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ -\underline{\Gamma} \end{pmatrix} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.17)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.15), (2.16) και (2.17) με τις (2.13), εύκολα προκύπτει ότι οι πίνακες A, B, C, D ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{\Gamma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

ενώ το διάνυσμα διέγερσης παίρνει τη μορφή  $\underline{u} = \ddot{\underline{x}}_g$ .

Στην παραπάνω ανάλυση, στο διάνυσμα εξόδου  $\underline{z} = (\underline{x} \quad \dot{\underline{x}} \quad \ddot{\underline{x}})^T$  έχουν εισαχθεί οι σχετικές μετατοπίσεις, οι σχετικές ταχύτητες και οι σχετικές επιταχύνσεις ως προς τα αντίστοιχα μεγέθη του εδάφους, το οποίο δέχεται διέγερση. Σε πολλά προβλήματα, είναι απαραίτητο να είναι γνωστές οι απόλυτες επιταχύνσεις των μαζών, και όχι οι σχετικές επιταχύνσεις ως προς το έδαφος.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η ανάλυση η οποία δίνει απόλυτες επιταχύνσεις στο διάνυσμα εξόδου. Το διάνυσμα  $\underline{\ddot{z}}_A = (\ddot{z}_p \quad \ddot{z}_s)^T$  των απόλυτων επιταχύνσεων των δύο μαζών προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\underline{\ddot{z}}_A = \underline{\ddot{x}} + \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.19)$$

Με βάση την εξίσωση κίνησης (2.12), έχουμε ότι

$$M \cdot [\ddot{\underline{x}} + \underline{\Gamma} \cdot \ddot{\underline{x}}_g] + C \cdot \dot{\underline{x}} + K \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad (2.20)$$

ή

$$M \cdot \ddot{\underline{z}}_A + C \cdot \dot{\underline{x}} + K \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad (2.21)$$

Οπότε το διάνυσμα εξόδου θα έχει τη μορφή

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ \ddot{\underline{z}}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \dot{\underline{x}} \\ -M^{-1} \cdot C \cdot \dot{\underline{x}} - M^{-1} \cdot K \cdot \underline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix} \cdot \underline{y} + \underline{0} \cdot \ddot{\underline{x}}_g \quad (2.22)$$

Επομένως, στην περίπτωση αυτή οι πίνακες C και D θα είναι πλέον στη μορφή

$$C = \begin{pmatrix} I & \underline{0} \\ \underline{0} & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{pmatrix}, \quad D = 0 \quad (2.23)$$

Συνεπώς, αρκεί να τεθεί ο πίνακας D ίσος με το μηδέν, ώστε το διάνυσμα εξόδου  $\underline{z}$  να δώσει τις απόλυτες επιταχύνσεις των μαζών.

## 2.4 Εισαγωγή Νέων Παραμέτρων στις Εξισώσεις

Χαρακτηριστικό της ανάλυσης που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.2, είναι ότι περιορίζει στην επιλογή των ιδιοτήτων του συστήματος. Οι παράμετροι του συστήματος είναι οι σταθερές ελατηρίων  $k_p$  και  $k_s$ , οι αποσβέσεις  $c_p$  και  $c_s$  και οι μάζες  $m_p$  και  $m_s$  του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, θα εισαχθούν νέες παράμετροι στις εξισώσεις, ώστε να προκύψει ένα ισοδύναμο μαθηματικά, μοντέλο. Οι νέες παράμετροι είναι πιο χρήσιμες στην περιγραφή της απόκρισης του συστήματος. Μεταβάλλοντας αυτές τις

νέες παραμέτρους, δίδεται η δυνατότητα να ελεγχθεί καλύτερα η απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος και τελικά να μειωθεί το πλάτος της απόκρισης.

### 2.4.1 Παραμετρική Ανάλυση Δυναμικού Μοντέλου Δύο Βαθμών Ελευθερίας

Θεωρείται ως πρωτεύων σύστημα (primary system) το σύστημα που αποτελείται από τη μάζα  $m_p$ , το ελατήριο με σταθερά  $k_p$ , και τον αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_p$ . Το

πρωτεύων σύστημα, θα έχει ιδιοσυχνότητα ίση με  $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ . Επίσης, θεωρείται ως

δευτερεύων σύστημα (secondary system) το σύστημα που αποτελείται από τη μάζα  $m_s$  και είναι στερεωμένο στο έδαφος μέσω ελατηρίου σταθεράς  $k_s$  και με αποσβεστήρα με απόσβεση  $c_s$ . Το δευτερεύων σύστημα θα έχει ιδιοσυχνότητα

$\omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}}$ . Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι οι παραπάνω ιδιοσυχνότητες είναι

διαφορετικές από αυτές που έχει το συνολικό σύστημα στο οποίο συνυπάρχουν και αλληλεπιδρούν και οι δύο μάζες.

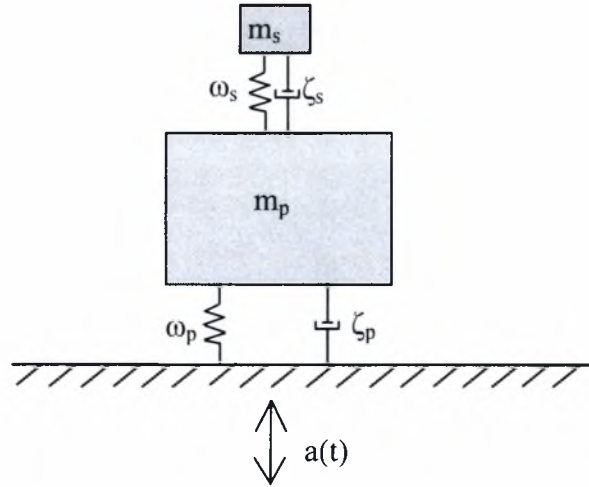
Προκειμένου να περιγραφεί το μοντέλο με τη νέα του μορφή, εισάγονται οι εξής παράμετροι

$$\zeta_p = \frac{c_p}{2 \cdot m_p \cdot \omega_p}, \zeta_s = \frac{c_s}{2 \cdot m_s \cdot \omega_s}, \mu = \frac{m_s}{m_p} \quad (2.24)$$

όπου  $\zeta_p$  το μέτρο απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος,  $\zeta_s$  το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος, και  $\mu$  ο λόγος των δύο μαζών. Επίσης οι ποσότητες

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}, \omega_s = \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \quad (2.25)$$

εκφράζουν τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος και δευτερεύοντος συστήματος αντίστοιχα, αν αυτές οι μάζες αποτελούσαν από μόνες τους δύο ανεξάρτητα συστήματα, όπως και περιγράφηκε προηγουμένως.



Σχήμα 2.5

Οι εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_p$  και  $\omega_s$ , των μέτρων απόσβεσης  $\zeta_p$  και  $\zeta_s$  και του λόγου των μαζών γίνονται

$$\ddot{x}_p + (2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p + 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu) \cdot \dot{x}_p - (2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu) \cdot \dot{x}_s + (\omega_p^2 + \mu \cdot \omega_s^2) \cdot x_p - (\mu \cdot \omega_s^2) \cdot x_s = -\ddot{x}_g$$

$$\ddot{x}_s + (2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s) \cdot \dot{x}_s - (2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s) \cdot \dot{x}_p + (\omega_s^2) \cdot x_s - (\omega_s^2) \cdot x_p = -\ddot{x}_g$$

Προκειμένου να μετατρέψουμε το παραπάνω σύστημα σε μητρική μορφή, εισάγουμε τα εξής διανύσματα της σχέσης (2.9)

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix}, \quad \ddot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix}$$

οπότε οι δύο εξισώσεις παρουσιάζονται στην παρακάτω μητρική μορφή

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p + 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu & -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu \\ -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s & 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_p^2 + \mu \cdot \omega_s^2 & -\mu \cdot \omega_s^2 \\ -\omega_s^2 & \omega_s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_p \\ x_s \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \ddot{x}_g \quad (2.26)$$

Όπου

Το μητρώο μάζας είναι 
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Το μητρώο απόσβεσης 
$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p + 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu & -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \cdot \mu \\ -2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s & 2 \cdot \zeta_s \cdot \omega_s \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Το μητρώο ακαμψίας  $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_p^2 + \mu \cdot \omega_s^2 & -\mu \cdot \omega_s^2 \\ -\omega_s^2 & \omega_s^2 \end{pmatrix}$  (2.29)

ενώ το διάνυσμα  $\underline{\mathbf{L}}$  γίνεται

$$\underline{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η εξίσωση (2.26) συνοψίζεται πλέον στη γνωστή εξίσωση (2.12)

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\underline{\mathbf{x}}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\underline{\mathbf{x}}} + \mathbf{K} \cdot \underline{\mathbf{x}} = -\mathbf{M} \cdot \underline{\mathbf{\Gamma}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}_g$$

## 2.4.2 Παραμετρική Ανάλυση Δυναμικού Μοντέλου Τριών Βαθμών Ελευθερίας

Ακριβώς όπως παρουσιάστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια μπορεί να γίνει και η παραμετρική ανάλυση ενός δυναμικού συστήματος με τρεις βαθμούς ελευθερίας. Το μοντέλο αυτό αποτελείται από τρία συστήματα, το πρωτεύων με χαρακτηριστικά  $m_p$ ,  $k_p$  και  $c_p$ , και δύο δευτερεύοντα συστήματα με  $m_{s1}$ ,  $k_{s1}$ ,  $c_{s1}$  και  $m_{s2}$ ,  $k_{s2}$ ,  $c_{s2}$ .

Το πρωτεύων σύστημα, θα έχει ιδιοσυχνότητα ίση με  $\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}$ .

Τα δευτερεύοντα συστήματα θα έχουν ιδιοσυχνότητες  $\omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_{s1}}{m_{s1}}}$  και  $\omega_{s2} = \sqrt{\frac{k_{s2}}{m_{s2}}}$ .

Προκειμένου να περιγραφεί το μοντέλο με τη νέα του μορφή, εισάγονται οι εξής παράμετροι

$$\zeta_p = \frac{c_p}{2 \cdot m_p \cdot \omega_p}, \zeta_{s1} = \frac{c_{s1}}{2 \cdot m_{s1} \cdot \omega_{s1}}, \zeta_{s2} = \frac{c_{s2}}{2 \cdot m_{s2} \cdot \omega_{s2}} \quad (2.30)$$

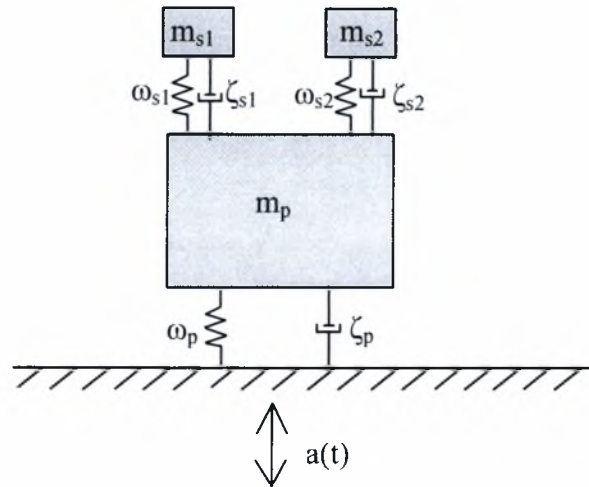
όπου  $\zeta_p$  το μέτρο απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος,  $\zeta_{s1}, \zeta_{s2}$  τα μέτρα απόσβεσης των δευτερεύοντων συστημάτων. Επίσης οι ποσότητες

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k_p}{m_p}}, \omega_{s1} = \sqrt{\frac{k_{s1}}{m_{s1}}}, \omega_{s2} = \sqrt{\frac{k_{s2}}{m_{s2}}} \quad (2.31)$$



εκφράζουν τις ιδιοσυχνότητες του πρωτεύοντος και των δευτερευόντων συστημάτων αντίστοιχα, αν αυτές οι μάζες αποτελούσαν από μόνες τους τρία ανεξάρτητα συστήματα.

Το σύστημα των τριών βαθμών ελευθερίας μπορεί να εξεταστεί στην απλοποιημένη μορφή του σχήματος 2.6.



Σχήμα 2.6

Οι τρεις εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_p$ ,  $\omega_{s1}$ ,  $\omega_{s2}$  και των μέτρων απόσβεσης  $\zeta_p$ ,  $\zeta_{s1}$ ,  $\zeta_{s2}$  γίνονται

$$\begin{aligned} n_p \cdot \ddot{x}_p + (2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p \cdot m_p + 2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1} + 2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2}) \cdot \dot{x}_p - (2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1}) \cdot \dot{x}_{s1} \\ - (2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2}) \cdot \dot{x}_{s2} + (m_p \cdot \omega_p^2 + m_{s1} \cdot \omega_{s1}^2 + m_{s2} \cdot \omega_{s2}^2) \cdot x_p \\ - (m_{s1} \cdot \omega_{s1}^2) \cdot x_{s1} - (m_{s2} \cdot \omega_{s2}^2) \cdot x_{s2} = -\ddot{x}_g \end{aligned}$$

$$n_{s1} \cdot \ddot{x}_{s1} + (2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1}) \cdot \dot{x}_{s1} - (2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1}) \cdot \dot{x}_p + (m_{s1} \cdot \omega_{s1}^2) \cdot x_{s1} - (m_{s1} \cdot \omega_{s1}^2) \cdot x_p = -\ddot{x}_g$$

$$n_{s2} \cdot \ddot{x}_{s2} + (2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2}) \cdot \dot{x}_{s2} - (2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2}) \cdot \dot{x}_p + (m_{s2} \cdot \omega_{s2}^2) \cdot x_{s2} - (m_{s2} \cdot \omega_{s2}^2) \cdot x_p = -\ddot{x}_g$$

Προκειμένου να μετατραπεί το παραπάνω σύστημα σε μητρική μορφή, εισάγονται τα εξής διανύσματα της σχέσης

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_p \\ x_{s1} \\ x_{s2} \end{pmatrix}, \quad \underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{x}_{s1} \\ \dot{x}_{s2} \end{pmatrix}, \quad \underline{\ddot{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_{s1} \\ \ddot{x}_{s2} \end{pmatrix}$$

οπότε οι δύο εξισώσεις παρουσιάζονται στην παρακάτω μητρική μορφή όπου

Το μητρώο μάζας είναι 
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το μητρώο απόσβεσης

$$C = \begin{pmatrix} 2 \cdot \zeta_p \cdot \omega_p \cdot m_p + 2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1} + 2 \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2} & -2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1} & -2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2} \\ -2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1} & 2 \cdot \zeta_{s1} \cdot \omega_{s1} \cdot m_{s1} & 0 \\ -2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2} & 0 & 2 \cdot \zeta_{s2} \cdot \omega_{s2} \cdot m_{s2} \end{pmatrix}$$

Το μητρώο ακαμψίας

$$K = \begin{pmatrix} \omega_p^2 \cdot m_p + \omega_{s1}^2 \cdot m_{s1} + \omega_{s2}^2 \cdot m_{s2} & -\omega_{s1}^2 \cdot m_{s1} & -\omega_{s2}^2 \cdot m_{s2} \\ -\omega_{s1}^2 \cdot m_{s1} & \omega_{s1}^2 \cdot m_{s1} & 0 \\ \omega_{s2}^2 \cdot m_{s2} & 0 & \omega_{s2}^2 \cdot m_{s2} \end{pmatrix}$$

ενώ το διάνυσμα  $\underline{L}$  γίνεται

$$\underline{L} = M \cdot \underline{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα συνοψίζεται πλέον στη γνωστή εξίσωση (2.12)

$$M \cdot \underline{\ddot{x}} + C \cdot \underline{\dot{x}} + K \cdot \underline{x} = -M \cdot \underline{\Gamma} \cdot \ddot{x}_g$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

#### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η επιρροή των παραμέτρων  $\omega_s$ ,  $\zeta_s$  και  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος ελέγχου TMD, στην απόκριση του κύριου (πρωτεύοντος) συστήματος. Η ανάλυση εστιάζει σε δύο χαρακτηριστικά της κατασκευής, πρώτα στις συναρτήσεις μεταφοράς για την μετατόπιση, την ταχύτητα και την απόλυτη επιτάχυνση του πρωτεύοντος συστήματος και στη συνέχεια στην αξιοπιστία του συστήματος η οποία προσδιορίζεται με την πιθανότητα αστοχίας.

Η μετατόπιση είναι πολύ σημαντική παράμετρος μιας κατασκευής, καθώς ανάλογα τις τιμές που θα παίρνει αυτή σε δεδομένη διέγερση, μπορούμε να εξάγουμε ασφαλή συμπεράσματα για την ασφάλεια της κατασκευής. Η επιτάχυνση είναι επίσης σημαντική παράμετρος του πρωτεύοντος συστήματος. Στους τελευταίους ορόφους υψηλών κατασκευών, όπως οι ουρανοξύστες, μια τέτοια επιτάχυνση είναι ιδιαίτερα ενοχλητική για τους ανθρώπους που βρίσκονται μέσα. Επίσης ενοχλητική είναι και η επιτάχυνση που μεταφέρεται στους ανθρώπους μέσα σε αυτοκίνητα και προκαλείται από τη διέγερση του οχήματος λόγω του ανώμαλου προφίλ του οδοστρώματος. Τα παθητικά συστήματα ελέγχου χρησιμοποιούνται για να αποσβέσουν αυτές τις επιταχύνσεις οι οποίες δημιουργούνται από φορτία ανέμου και ανωμαλίες του οδοστρώματος σε οχήματα.

Η αβέβαιη φύση της χρονικής ιστορίας της φόρτισης που χρησιμοποιείται κατά τη δυναμική ανάλυση μιας κατασκευής που υπόκειται σε περιβαλλοντικά φορτία, όπως ο άνεμος, οι σεισμοί και το προφίλ του οδοστρώματος, είναι μια συνάρτηση αβέβαιης τιμής, και γι αυτό μοντελοποιείται καλύτερα από μια στοχαστική διαδικασία. Αν οι παράμετροι της κατασκευής είναι με ακρίβεια γνωστές, τότε οι αποκρίσεις και η αξιοπιστία μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας γνωστές τεχνικές, συνήθως προσεγγιστικές, από τη θεωρία τυχαίων ταλαντώσεων (Lutes and Sarkani, 1997).

Σκοπός μας στο Κεφάλαιο αυτό είναι να επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους  $\omega_s$ ,  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος έτσι ώστε να πετύχουμε τη μέγιστη δυνατή μείωση στις ταλαντώσεις του πρωτεύοντος συστήματος. Για το σκοπό αυτό αγνοούνται οι παραμετρικές αβεβαιότητες και γίνεται μία παραμετρική ανάλυση στην σχεδιάζονται οι καμπύλες για τις συναρτήσεις μεταφοράς των αποκρίσεων, καθώς και της πιθανότητας αστοχίας συναρτήσει παραμέτρων του TMD και του λόγου των μαζών  $\mu$ .

## 3.2 Συναρτήσεις Μεταφοράς

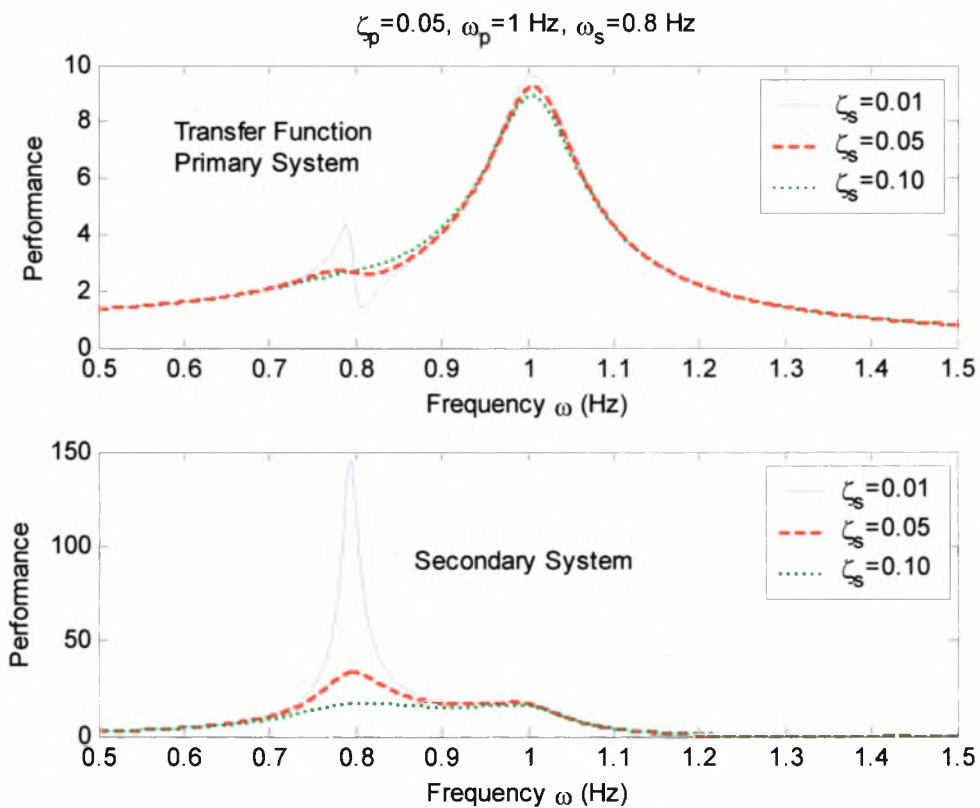
Όπως εξηγήθηκε και στην προηγούμενα, οι συναρτήσεις μεταφοράς προσδιορίζουν το πλάτος της απόκρισης του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση ως προς το πλάτος της αρμονικής διέγερσης, συναρτήσει ενός εύρους τιμών για τη συχνότητα διέγερσης. Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς μπορεί εύκολα να καθοριστεί η συμπεριφορά του κύριου συστήματος, αφού μπορούν να επιλεγθούν οι κατάλληλες τιμές των παραμέτρων, ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή απόκριση.

### 3.2.1 Επιλογή πρώτης ομάδας Παραμέτρων – Μεταβολή $\zeta_s$

Στα διαγράμματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, έχουν επιλεγθεί οι εξής τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος

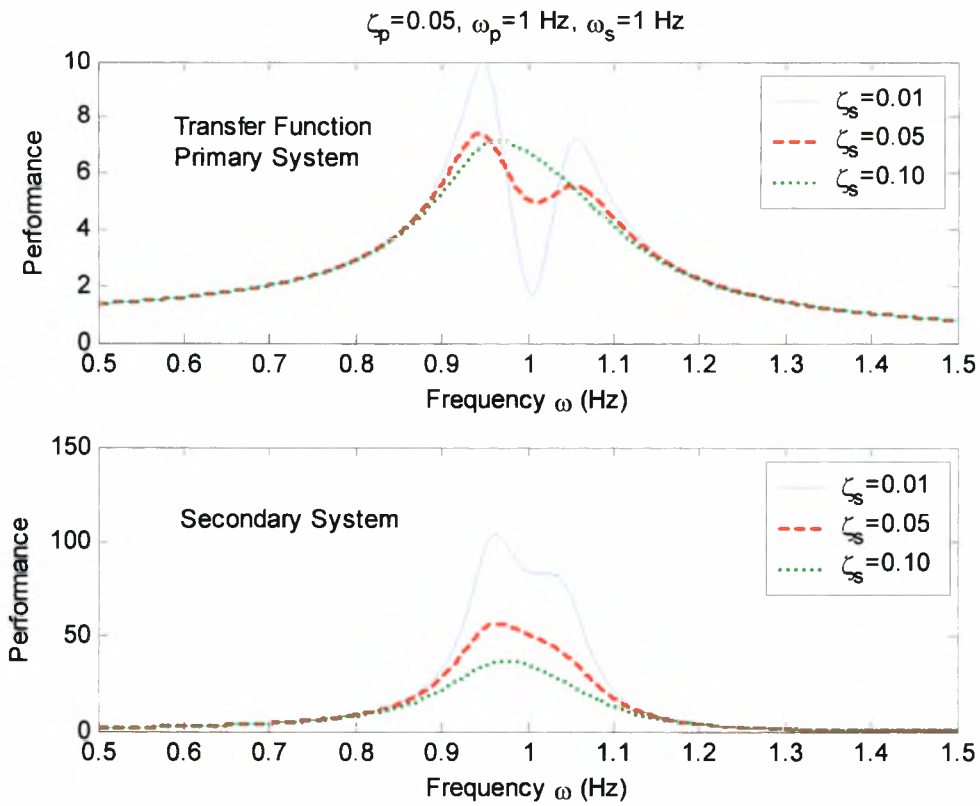
- Λόγος μαζών:  $\mu = \frac{m_s}{m_p} = 0.01$ , δηλαδή η μάζα  $m_s$  του δευτερεύοντος συστήματος είναι το 1% της μάζας  $m_p$  του πρωτεύοντος συστήματος
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_p$ :  $\zeta_p = 0.05$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_s$ :  $\zeta_s = 0.01, 0.05, 0.1$
- Ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος  $\omega_p = 1\text{Hz}$  ή  $2\pi$  rad/second
- Περιοχή συχνοτήτων της αρμονικής διέγερσης  $0.5 \leq \omega \leq 1.5$  Hz

Για το σύστημα των δύο βαθμών ελευθερίας και για  $\omega_s=0.8\text{Hz}$  και  $\omega_p=1\text{Hz}$ , παρουσιάζονται στα σχήματα 3.1, 3.2 και 3.3 αντίστοιχα οι συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων των μαζών  $m_p$  και  $m_s$ , για συχνότητα διέγερσης  $0.5 \leq \omega \leq 1.5 \text{ Hz}$ .



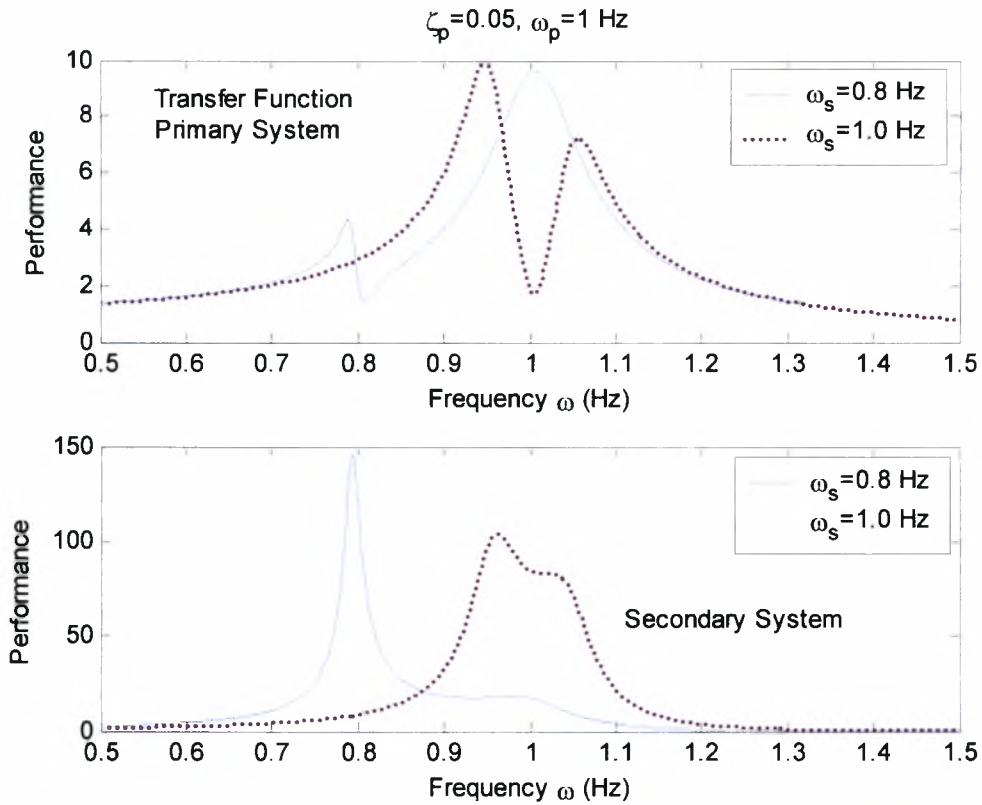
**Σχήμα 3.1:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=0.8\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$ )

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκριση παρουσιάζεται όταν η συχνότητα της διέγερσης  $\omega$  πλησιάσει τις τιμές  $\omega_1 = \omega_p$  και  $\omega_2 = \omega_s$ . Για το πρωτεύων σύστημα, η μέγιστη απόκριση παρουσιάζεται όταν η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος. Όσον αφορά το δευτερεύων σύστημα, η μέγιστη απόκρισή του παρουσιάζεται αντίστοιχα όταν η συχνότητα διέγερσης  $\omega$  πλησιάσει την τιμή της ιδιοσυχνότητας αυτού του συστήματος. Επίσης, όσο αυξάνεται το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$ , έχουμε μείωση του μέγιστου του εύρους της απόκρισης στο φάσμα της μετατόπισης του πρωτεύοντος συστήματος.



**Σχήμα 3.2:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύον και το δευτερεύον σύστημα για διάφορες τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1\text{Hz}$ ,  $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$ )

Για την περίπτωση όπου το  $\omega_p$  ισούται με το  $\omega_s$ , παρουσιάζονται δύο μέγιστα στις ιδιοτιμές  $\omega_1$  και  $\omega_2$  του συνολικού συστήματος οι οποίες είναι μακριά από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_s = \omega_p$ . Το σημαντικό στο σημείο αυτό, είναι ότι παρατηρείται μια πολύ μεγάλη μείωση στο εύρος του φάσματος για την πρωτεύουσα μάζα  $m_p$  (Σχήμα 3.3), η οποία μείωση είναι μεγαλύτερη από τη μείωση που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1 όπου  $\omega_p = 1\text{Hz}$  και  $\omega_s = 0.8\text{Hz}$ . Το μέγιστο εύρος της απόκρισης για τιμές του  $\omega$  κοντά στο  $\omega_p$  εξαρτώνται από το μέτρο απόσβεσης  $\zeta_s$ . Όσο αυξάνεται το  $\zeta_s$ , έχουμε μείωση του μεγίστου του εύρους απόκρισης στο φάσμα της μετατόπισης του πρωτεύοντος συστήματος. Επομένως, στην περιοχή συχνοτήτων διέγερσης  $\omega$  κοντά στο  $\omega_s$  και  $\omega_p$ , πιο αποτελεσματικός έλεγχος των ταλαντώσεων του πρωτεύοντος συστήματος επιτυγχάνεται για μεγάλο  $\zeta_s$ .



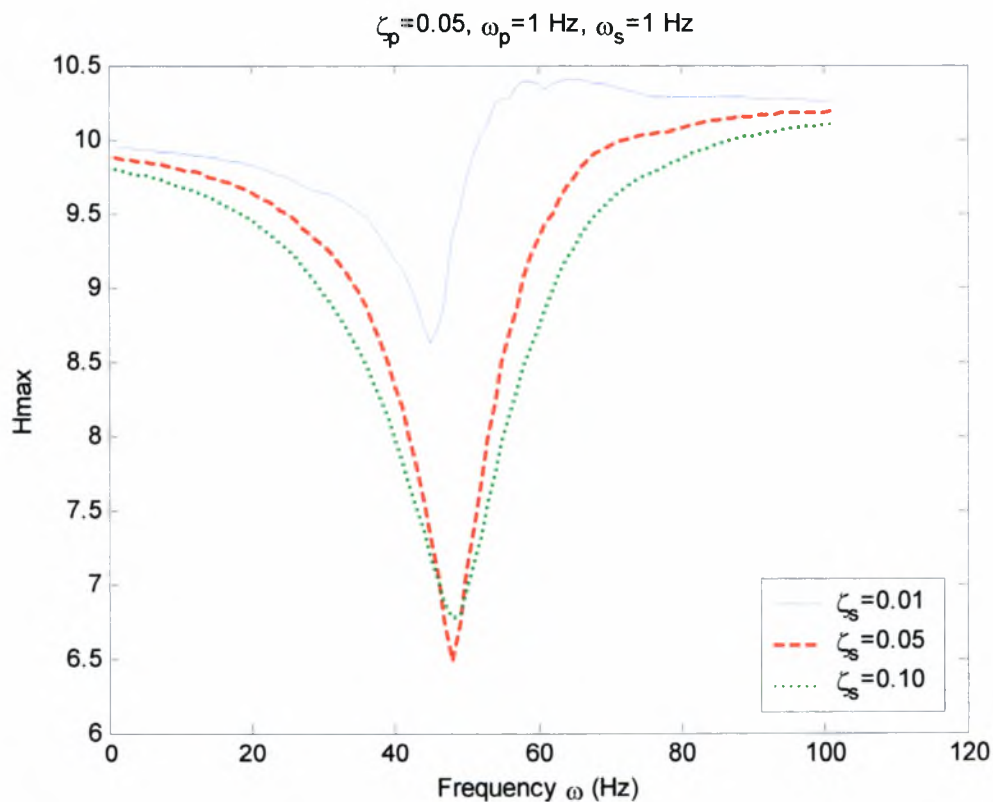
**Σχήμα 3.3:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διαφορετικές τιμές του  $\omega_s$ . ( $\omega_s = 1 \text{ Hz}$  και  $\omega_s = 0.8 \text{ Hz}$ ,  $\zeta_p = 0.05$ )

Με βάση τα παραπάνω, αναμένεται ότι το μέγιστο εύρος της απόκρισης εξαρτάται από την τιμή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, ενώ υπάρχει κάποια τιμή της  $\omega_s$  κοντά στην  $\omega_p$ , για την οποία το μέγιστο εύρος της απόκρισης της πρωτεύουσας μάζας  $m_p$  είναι η ελάχιστη δυνατή.

Στη συνέχεια, καλείται  $H_{\max}$  το μέγιστο εύρος της συνάρτησης  $|H(\omega)|$ . Είναι φανερό ότι και το μέγιστο εύρος  $H_{\max}$  εξαρτάται από την ιδιοσυχνότητα  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος. Η εξάρτηση αυτή δηλώνεται θεωρώντας ότι το  $H_{\max}(\omega_s)$  είναι συνάρτηση της  $\omega_s$ .

Η μορφή της συνάρτησης  $H_{\max}(\omega_s)$  για το σύστημα των δύο βαθμών ελευθερίας συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος

παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4, για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta_s$  για το δευτερεύον σύστημα. Εδώ φαίνεται καθαρά πως η τιμή της παραμέτρου  $\omega_s$  επηρεάζει σημαντικά το εύρος ταλάντωσης  $H_{\max}(\omega_s)$ . Στο κεφάλαιο 4, η παράμετρος  $\omega_s$  θα συμπεριληφθεί στις παραμέτρους σχεδιασμού TMD. Ακόμη σημαντικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι το ότι ο συντελεστής απόσβεσης  $\zeta_s$  επηρεάζει σημαντικά αυτό καθεαυτό το μέγιστο  $H_{\max}(\omega_s)$  χωρίς να αλλάζει σοβαρά την τιμή της παραμέτρου σχεδιασμού. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4 η μεγαλύτερη μείωση των ταλαντώσεων επιτυγχάνεται για μεγάλα  $\zeta_s$ .



Σχήμα 3.4: Συναρτήσεις  $H_{\max}(\omega_s)$  για το πρωτεύον σύστημα για διαφορετικές τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s=1 \text{ Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$  και  $\mu=0.01$ )



### 3.2.2 Επιλογή δεύτερης ομάδας Παραμέτρων – Μεταβολή $\mu$

Εκτός από την ιδιοσυχνότητα και τα μέτρα απόσβεσης του κύριου και του δευτερεύοντος συστήματος, μια ακόμα βασική παράμετρος του μοντέλου είναι ο

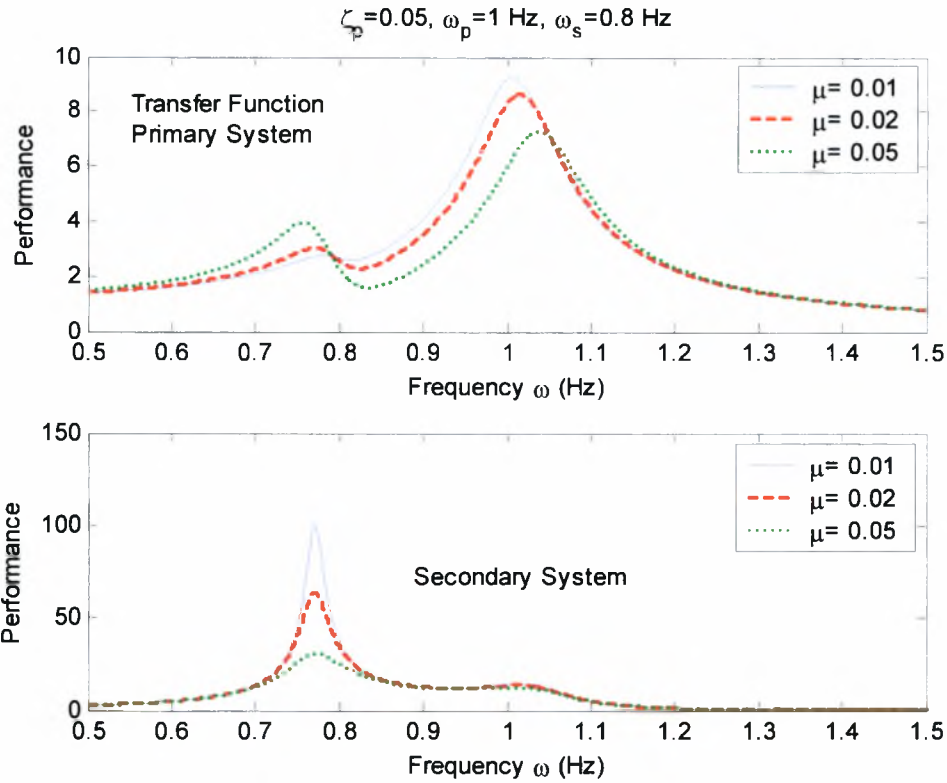
λόγος μαζών  $\mu = \frac{m_s}{m_p}$ . Σε αυτό το κεφάλαιο διατηρούνται σταθερές οι τιμές των

μέτρων απόσβεσης του κύριου και του δευτερεύοντος συστήματος και μελετάται η επιρροή που έχει ο λόγος μαζών στο εύρος της απόκρισης.

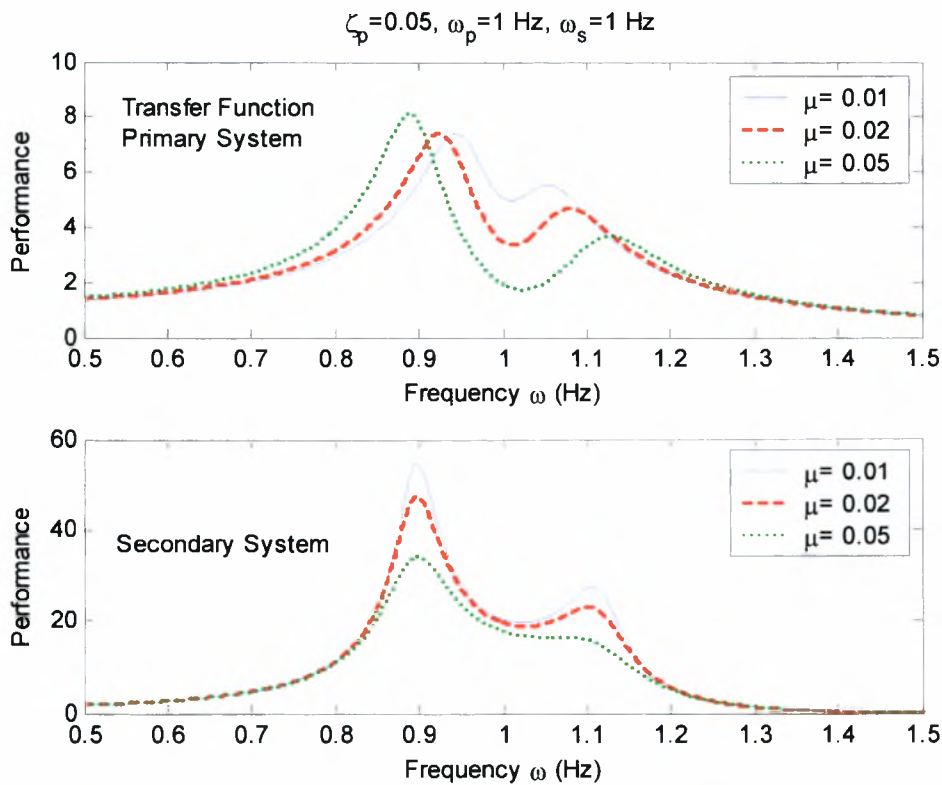
Οι τιμές των παραμέτρων που επιλέγονται για να εξαχθούν τα διαγράμματα των συναρτήσεων μεταφοράς, είναι οι εξής

- Λόγος μαζών:  $\mu = \frac{m_s}{m_p} = 0.01, 0.02, 0.05$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_p$ :  $\zeta_p = 0.05$
- Μέτρο απόσβεσης της μάζας  $m_s$ :  $\zeta_s = 0.05$
- Ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος  $\omega_p = 1 \text{ Hz}$  ή  $2\pi \text{ rad/second}$
- Περιοχή συχνοτήτων της αρμονικής διέγερσης  $0.5 \leq \omega \leq 1.5 \text{ Hz}$

Επιλέγοντας ως ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος  $\omega_s = 0.8 \text{ Hz}$ , μια τιμή αρκετά μακριά από την ιδιοσυχνότητα του κύριου συστήματος (μάζα  $m_p$ ), προκύπτει το διάγραμμα του σχήματος 3.5, ενώ επιλέγοντας ως ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος  $\omega_s = 1 \text{ Hz}$  ίση με την ιδιοσυχνότητα του κύριου συστήματος (μάζα  $m_p$ ), προκύπτει το διάγραμμα του σχήματος 3.6



**Σχήμα 3.5:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\mu$ . ( $\omega_s = 0.8 \text{ Hz}$ ,  $\omega_p = 1 \text{ Hz}$ ,  $\zeta_p = 0.05$ )

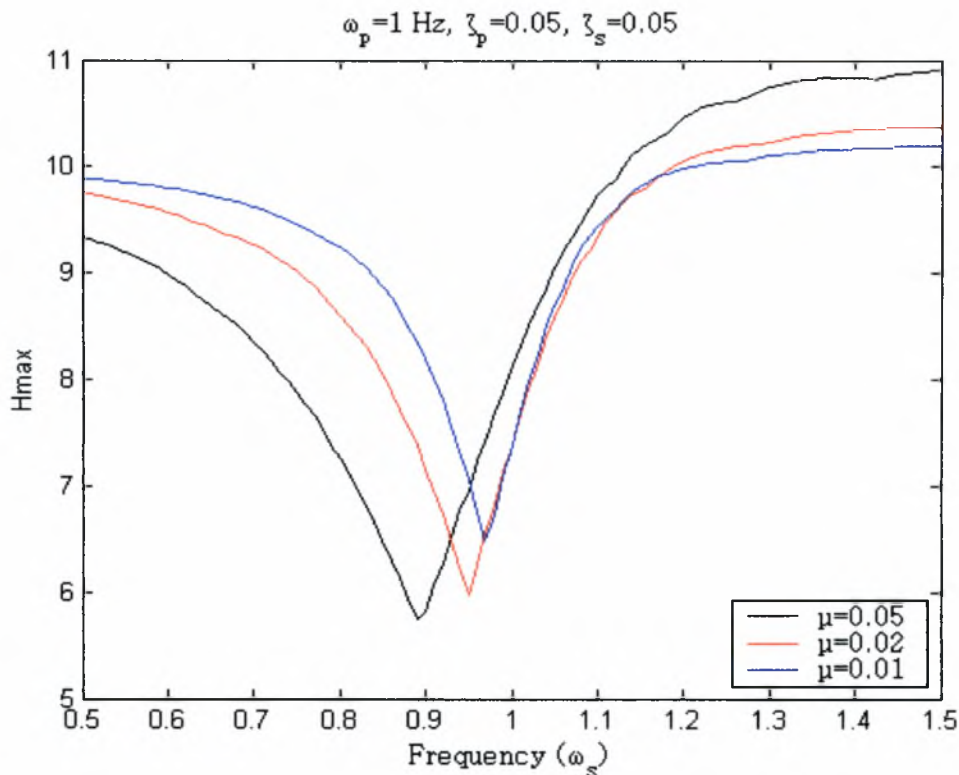


**Σχήμα 3.6:** Συναρτήσεις μεταφοράς των μετατοπίσεων για το πρωτεύων και το δευτερεύων σύστημα για διάφορες τιμές του  $\mu$ . ( $\omega_s = 1 \text{ Hz}$ ,  $\omega_p = 1 \text{ Hz}$ ,  $\zeta_p = 0.01$ )

Ένα πρώτο συμπέρασμα που βγαίνει από τα Σχήμα 3.5 και 3.6, είναι ότι όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών, δηλαδή όσο μεγαλώνει η μάζα  $m_s$  σε σχέση με την  $m_p$ , η απόκριση της κύριας μάζας μειώνεται. Επίσης, παρατηρούμε ότι ο λόγος των μαζών επηρεάζει σημαντικά τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , δηλαδή επηρεάζει την περιοχή συντονισμού. Όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών τόσο μετακινείται προς υψηλότερες συχνότητες η συχνότητα της αρμονικής διέγερσης για την οποία παρατηρείται η μέγιστη τιμή της συνάρτησης μεταφοράς.

Η μορφή της συνάρτησης  $H_{\max}(\omega_s)$  για το σύστημα των δύο βαθμών ελευθερίας συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος  $\omega_s$  παρουσιάζεται στα σχήματα 3.7, για διαφορετικές τιμές του λόγου μαζών  $\mu$ . Στο σχήμα 3.7 φαίνεται η επιρροή της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του δευτερεύοντος συστήματος, και του λόγου  $\mu$  των μαζών στο εύρος της ταλάντωσης. Όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών, η απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος μειώνεται. Ωστόσο σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος για μέγιστη αποτελεσματικότητα στον έλεγχο ταλαντώσεων, αποκλίνει από την τιμή της ιδιοσυχνότητας του πρωτεύοντος συστήματος.

Το γενικότερο συμπέρασμα στις προηγούμενες παρατηρήσεις είναι ότι το εύρος της απόκρισης του πρωτεύοντος συστήματος στην περιοχή  $\omega_s = \omega_p$  είναι ευαίσθητο της τιμής του  $\omega_s$ , του  $\mu$  και του  $\zeta_s$ , οπότε οι αβεβαιότητες στις παράμετρος αυτές  $\omega_s$ ,  $\mu$  και  $\zeta_s$  επηρεάζουν σημαντικά τις προβλέψεις της απόκρισης και θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στο σχεδιασμό των συστημάτων ελέγχου TMD.



Σχήμα 3.7: Συναρτήσεις  $H_{\max}(\omega_s)$  για το πρωτεύων σύστημα για διαφορετικές τιμές του  $\mu$ . ( $\omega_p=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.05$  και  $\zeta_s=0.05$ )

### 3.3 Πιθανότητα Αστοχίας Γραμμικών Μοντέλων Κατασκευών

Στις περιπτώσεις που υπάρχουν αβεβαιότητες στα φορτία και / ή στα χαρακτηριστικά της κατασκευής, άρα οποιαδήποτε ποσότητα απόκρισης  $r(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  (μπορεί να είναι μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση, τάση κ.α.), που είναι γραμμικά εξαρτημένη με τα στοιχεία του διανύσματος κατάστασης που περιγράφει την απόκριση των γραμμικών αυτών συστημάτων, είναι μια Γκαουσιανή διαδικασία από τη στιγμή που η είσοδος είναι Γκαουσιανή. Σημαντική παράμετρος της απόδοσης μιας κατασκευής θεωρείται η αξιοπιστία της, ή ισοδύναμα η πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής. Να σημειωθεί ότι στην ποσότητα απόκρισης  $r(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  τα  $\mathbf{x}$  είναι οι παράμετροι σχεδιασμού ενώ τα  $\boldsymbol{\theta}$  είναι οι αβέβαιες παράμετροι όπως αυτά που ορίζονται στο Κεφάλαιο 4. Η μελέτη που ακολουθεί αφορά τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας της κατασκευής για γραμμικά δυναμικά συστήματα. Τα συστήματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 έχουν είδη αναλυθεί ως γραμμικά συστήματα.

Η κίνηση του συνολικού συστήματος που αποτελείται από τη κατασκευή (πρωτεύων σύστημα) και το σύστημα έλεγχου TMD (δευτερεύον σύστημα) περιγράφεται από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης. Η χρονική ιστορία της φόρτισης που χρησιμοποιείται κατά τη δυναμική ανάλυση μιας κατασκευής που υπόκειται σε περιβαλλοντικά φορτία, όπως ο άνεμος και οι σεισμοί, είναι μια συνάρτηση αβέβαιης τιμής, και γι αυτό μοντελοποιείται καλύτερα από μια στοχαστική διαδικασία. Χωρίς να χαθεί η γενικότητα, επίσης θεωρούμε πως η κατασκευή υπόκειται σε φορτία με μεγάλο εύρος συχνοτήτων τα οποία μοντελοποιούνται ως στάσιμος Γκαουσιανός λευκός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Επομένως, τα γραμμικά συστήματα των Σχημάτων 2.5 και 2.6 που αναλύθηκαν και προηγούμενα θεωρούνται ότι υπόκεινται σε σταθερή Γκαουσιανή λευκού-θορύβου διέγερση  $a(t)$  φασματικής πυκνότητας  $S$  στη βάση τους.

Η Γκαουσιανή αυτή διαδικασία περιγράφεται πλήρως από τις ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης. Χρησιμοποιώντας διαθέσιμα αποτελέσματα από τη θεωρία τυχαίων ταλαντώσεων, η αξιοπιστία του συστήματος ή ισοδύναμα η πιθανότητα αστοχίας εκφράζεται συναρτήσει των ροπών δεύτερης τάξης της στοχαστικής απόκρισης και των χαρακτηριστικών του συστήματος. Για να γίνει αυτό το γραμμικό σύστημα εξισώσεων κίνησης (2.12) του συνολικού συστήματος πρώτα θα μετατραπεί στη μορφή πρώτης τάξης (2.13) όπως παρουσιάστηκε στην Παράγραφο 2.3, και στη συνέχεια θα καταστρωθεί η εξίσωση Lyapunov για τον πίνακα ροπών δεύτερης τάξης  $X = E[XX^T] \in R^{2n \times 2n}$  (state covariance matrix), όπου  $E[ ]$  δηλώνει τη μαθηματική προσδοκία και είναι διάστασης  $2n \times 2n$ , όπου  $2n$  η διάσταση του  $X$ . Θεωρώντας ότι η διέγερση είναι μορφής σταθερού λευκού θορύβου (Lin 1967, Soong and Grigoriou 1993), ο πίνακας  $X$  δίνεται από της εξίσωση Lyapunov

$$AX + XA^T + B = 0 \quad (3.1)$$

όπου  $A$  και  $B$  ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 2 (Σχέση (2.18))

Η λύση της εξίσωσης Lyapunov θα δώσει τον πίνακα κατάστασης της απόκρισης. Συνήθως απαιτείται αριθμητική μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης Lyapunov για τον προσδιορισμό των ροπών απόκρισης  $X$ . Οι ποσότητες της

απόκρισης που μας ενδιαφέρουν συνήθως εκφράζονται ως γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών του διανύσματος κατάστασης, οπότε και οι ροπές των αποκρίσεων αυτών μπορούν εύκολα να δοθούν ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του πίνακα ροπών  $X$ .

Η αστοχία θεωρείται ότι συμβαίνει όταν η ποσότητα απόκρισης  $r(t, \mathbf{x}, \theta)$  φτάσει ένα κρίσιμο επίπεδο  $b$  για πρώτη φορά. Η πιθανότητα ότι στο σταθερό χρονικό τμήμα διάρκειας  $T$  η ποσότητα  $r(t, \mathbf{x}, \theta)$  δεν έχει περάσει ποτέ την οριακή τιμή  $b$ , μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας διαθέσιμα αποτελέσματα από τη θεωρία τυχαίων ταλαντώσεων. Τα αποτελέσματα αυτά βασίζονται στον προσδοκώμενο ρυθμό με τον οποίο υπερβαίνονται τα όρια  $b$  και  $-b$  αντίστοιχα.

Για υψηλά οριακά επίπεδα  $b$ , μπορεί να θεωρηθεί ότι τα ενδεχόμενα της υπέρβασης είναι ανεξάρτητα. Στην περίπτωση αυτή η υπό όρους πιθανότητα αστοχίας προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την εξής αναλυτική σχέση (Lutes and Sarkani, 1997)

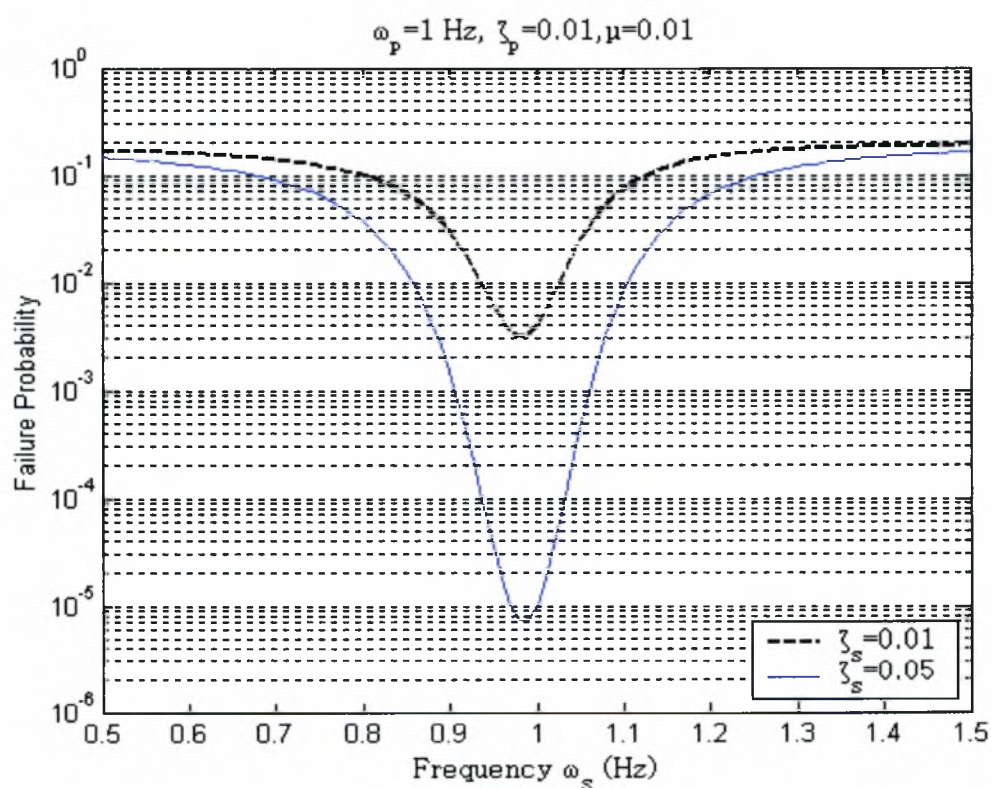
$$f(\mathbf{x}, \theta) = \Pr(F | \mathbf{x}, \theta) = 1 - \exp[-2\nu(\mathbf{x}, \theta)T] \quad (3.2)$$

όπου

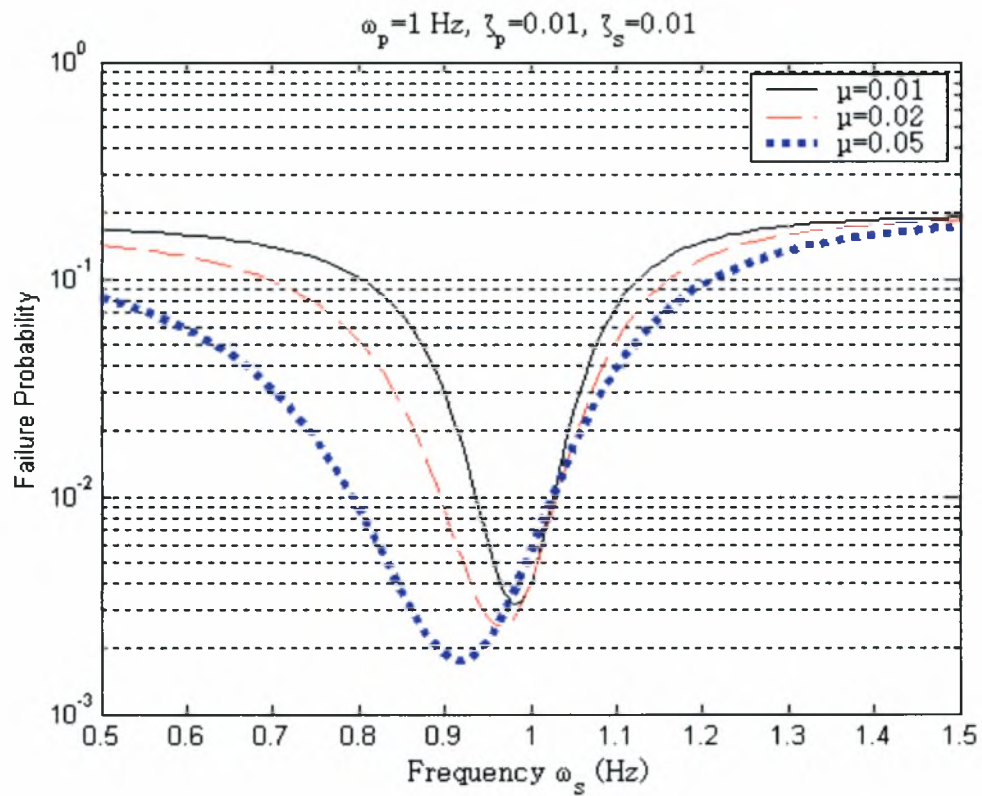
$$\nu(\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_y(\mathbf{x}, \theta)}{\sigma_y(\mathbf{x}, \theta)} \exp\left[-\frac{b^2}{2\sigma_y^2(\mathbf{x}, \theta)}\right] \quad (3.3)$$

είναι ο ρυθμός υπέρβασης του ορίου  $b$ . Οι ποσότητες  $\sigma_y(\mathbf{x}, \theta)$  και  $\sigma_{\dot{y}}(\mathbf{x}, \theta)$  που εμφανίζονται στη Σχέση (3.3) είναι οι ροπές δεύτερης τάξης της απόκρισης  $r(t, \mathbf{x}, \theta)$  και της χρονικής παραγώγου αυτής για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $\mathbf{x}$  και  $\theta$ . Οι ποσότητες  $\sigma_y(\mathbf{x}, \theta)$  και  $\sigma_{\dot{y}}(\mathbf{x}, \theta)$  μπορούν εύκολα να υπολογισθούν από τον πίνακα κατάστασης της απόκρισης  $X$ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι και οι δύο Σχέσεις (3.2) και (3.3) βασίζονται στην υπόθεση ότι η απόκριση είναι μόνιμη σε ολόκληρη τη διάρκεια του χρόνου  $T$ .

Η μορφή της συνάρτησης πιθανότητας αστοχίας για το σύστημα των δύο βαθμών ελευθερίας συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος  $\omega_s$  παρουσιάζεται στα Σχήματα 3.9 και 3.10, για διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης  $\zeta_s$  του δευτερεύοντος συστήματος και για διαφορετικές τιμές του λόγου μαζών  $\mu$ . Το εύρος της πιθανότητας αστοχίας του πρωτεύοντος συστήματος στην περιοχή  $\omega_s = \omega_p$  είναι ευαίσθητο της τιμής του  $\omega_s$ , του  $\mu$  και του  $\zeta_s$ , οπότε οι αβεβαιότητες στις παράμετρος αυτές  $\omega_s$ ,  $\mu$  και  $\zeta_s$  επηρεάζουν σημαντικά τις προβλέψεις της απόκρισης και θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στο σχεδιασμό των συστημάτων ελέγχου TMD.



Σχήμα 3.9: Συναρτήσεις πιθανότητας αστοχίας για το πρωτεύον σύστημα για διαφορετικές τιμές του  $\zeta_s$ . ( $\omega_s = 1 \text{ Hz}$ ,  $\zeta_p = 0.01$  και  $\mu = 0.01$ )



**Σχήμα 3.10:** Συναρτήσεις πιθανότητας αστοχίας για το πρωτεύων σύστημα για διαφορετικές τιμές του λόγου μαζών  $\mu$ . ( $\omega_p=1\text{Hz}$  και  $\omega_s=1\text{Hz}$ ,  $\zeta_p=0.01$ )



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΡΡΟΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΩΝ

### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνεται το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού ως ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα τροποποιείται αρχικά για να λάβει υπόψη τις αβεβαιότητες στα δυναμικά φορτία. Οι αβεβαιότητες αυτές ποσοτικοποιούνται με στοχαστικές διαδικασίες. Στη συνέχεια το πρόβλημα τροποποιείται ξανά για να λάβει υπόψη τις αβεβαιότητες στις παραμέτρους. Εδώ οι αβεβαιότητες ποσοτικοποιούνται με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Ορίζονται τα κριτήρια απόδοσης ως πολυδιάστατα ολοκληρώματα στο χώρο των αβέβαιων παραμέτρων και προτείνονται μέθοδοι (προσεγγίσεις) για τον υπολογισμό των τιμών των ολοκληρωμάτων αυτών. Οι εφαρμογές αναφέρονται σε βέλτιστο σχεδιασμό tuned mass dampers (TMD) δηλαδή παθητικών συστημάτων ελέγχου που αποτελούνται από απλούς ταλαντωτές που προσαρμόζονται πάνω στην κύρια κατασκευή.

### 4.2 Διατύπωση του Προβλήματος Βέλτιστου Σχεδιασμού

Το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού διατυπώνεται ως εξής. Θεωρείται  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_m)$  ως το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού, δηλαδή οι παράμετροι αυτοί της κατασκευής που επιλέγονται να μεταβάλλονται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εύρεσης του βέλτιστου σχεδιασμού. Για παράδειγμα, το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού σε δυναμικές εφαρμογές στις κατασκευές μπορεί να περιλαμβάνει γεωμετρικά χαρακτηριστικά και ιδιότητες των υλικών της κατασκευής άμεσα σχετιζόμενες με τη στιβαρότητα και τη μάζα. Ορίζεται ως  $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \dots, \theta_n)$  το σύνολο των αβέβαιων παραμέτρων. Θεωρείται ακόμη  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})=[f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \dots, f_M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$  να είναι οι παράμετροι απόδοσης (performance) που ποσοτικοποιούν την απόδοση μιας κατασκευής. Οι παράμετροι απόδοσης είναι συναρτήσεις των παραμέτρων σχεδιασμού  $\mathbf{x}$  και των αβέβαιων παραμέτρων  $\boldsymbol{\theta}$  του συστήματος. Οι παράμετρος απόδοσης μπορούν να περιλαμβάνουν παράμετρος των κατασκευών όπως αποκρίσεις,

τάσεις και παραμορφώσεις, μεγέθη που αναφέρονται στην αξιοπιστία των κατασκευών καθώς και το κόστος στο συνολικό χρόνο ζωής του σχεδιασμού (κατασκευαστικό κόστος και κόστος συντήρησης). Συγκεκριμένα, τα μεγέθη της απόδοσης που βασίζονται στην αξιοπιστία εισάγονται στην περίπτωση των στοχαστικών φορτίων για να προσδιορίσουν την ασφάλεια του συστήματος λόγω της μεταβλητότητας της στοχαστικής αυτής φόρτισης. Διαθέσιμα εργαλεία ανάλυσης (Pradlwarter and Schueller, 1999; Au and Beck, 2001) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό της αξιοπιστίας ή, ισοδύναμα, την πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής

Το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $\theta$  διατυπώνεται, ως ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης, ως εξής. Ζητούνται οι τιμές των παραμέτρων  $x$  που ταυτόχρονα ελαχιστοποιούν τα κριτήρια απόδοσης

$$f(x, \theta) = [f_1(x, \theta), \dots, f_M(x, \theta)] \quad (4.1)$$

Αυτή η προσέγγιση δεν λαμβάνει υπόψη τις διακυμάνσεις στις τιμές των αβέβαιων παραμέτρων  $\theta$  και ως αποτέλεσμα η λύση του βέλτιστου σχεδιασμού να είναι ευαίσθητη σε αυτές τις διακυμάνσεις. Συγκεκριμένα, ο βέλτιστος σχεδιασμός που εκφράζει την ασφάλεια μέσω μεγεθών της απόδοσης βασισμένα στην αξιοπιστία μπορεί να είναι είτε υπερβολικά συντηρητικός είτε υποεκτιμά την ασφάλεια των κατασκευών για τιμές των παραμέτρων  $\theta$  διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην επιλογή των βέλτιστων παραμέτρων  $x$ . Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται με το ζήτημα της ευρωστίας του βέλτιστου σχεδιασμού λόγω των αβεβαιοτήτων στις παραμέτρους.



### 4.3 Επιρροή των Αβεβαιοτήτων

Στις περισσότερες μελέτες που αφορούν τον έλεγχο ταλαντώσεων κατασκευών χρησιμοποιώντας παθητικά συστήματα TMD, θεωρείται πως οι ιδιότητες-παραμέτροι των κατασκευών αλλά και των παθητικών συστημάτων είναι γνωστές. Παρόλα αυτά, στην πράξη οι ιδιότητες των κατασκευών δεν είναι πλήρως

γνωστές, λόγω διαφόρων τύπων αβεβαιοτήτων που εμφανίζονται κατά τη μοντελοποίηση. Παραδείγματα περιλαμβάνουν αβεβαιότητες στη στιβαρότητα, στη μάζα και στην απόσβεση των μοντέλων κατασκευών, τα οποία προκύπτουν από ποικίλους λόγους, όπως ανεπαρκή μοντελοποίηση των συνοριακών συνθηκών, επίδραση μη κατασκευαστικών παραγόντων, υποβιβασμός κάποιων ιδιοτήτων λόγω γήρανσης, διακύμανση στη μάζα της κατασκευής (π.χ. λίγη ή πολύ κίνηση σε μία γέφυρα), καθώς και αβεβαιότητες σε όρια διαρροής κ.τ.λ. Η αποτελεσματικότητα του συστήματος ελέγχου TMD μπορεί να μειωθεί δραστικά αν το TMD δεν συντονιστεί στη συχνότητα που έχει σχεδιαστεί να καλύψει. Για να αποφευχθούν τέτοιες μη αναμενόμενες μειώσεις της απόδοσης, οι αβεβαιότητες της μοντελοποίησης θα πρέπει να ληφθούν υπόψη, και το TMD θα πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να αποδώσει βέλτιστα για όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρουν οι παράμετροι του συστήματος.

Μια πιθανολογική προσέγγιση προσφέρει μία λογική βάση για να ληφθούν υπόψη και οι αβεβαιότητες στη φόρτιση αλλά και οι αβεβαιότητες των μοντέλων της κατασκευής κατά το σχεδιασμό. Ειδικότερα, τα υψηλής αβεβαιότητας χρονικά μεταβαλλόμενα περιβαλλοντολογικά φορτία είναι καλύτερο να μοντελοποιηθούν με στοχαστικές διαδικασίες όπως περιγράφηκαν στην παράγραφο 3.3. Οι χρονικά ανεξάρτητες αβεβαιότητες στις παράμετρους  $\theta$  των κατασκευών και των φορτίσεων θα μοντελοποιηθούν με μεταβλητές δεδομένης κατανομής πιθανότητας. Αυτή η κατανομή πιθανότητας  $p(\theta)$  είναι πάντα εξαρτώμενη από τις πληροφορίες που χρησιμοποιούνται. Μπορεί να επιλεγθεί είτε από μηχανολογική εμπειρία, είτε να υπολογιστεί με άλλους ισχυρισμούς, όπως πιθανολογικές μεθόδους αναγνώρισης συστημάτων (Papadimitriou, 2000) στην περίπτωση που μετρήσεις είναι διαθέσιμες. Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για μία αβέβαιη μεταβλητή ορίζει το εύρος των τιμών της μεταβλητής και το ενδεχόμενο εμφάνισης μίας τιμής σε σχέση με τις άλλες. Η συγκεκριμένη μελέτη για το βέλτιστο σχεδιασμό θα γίνει βασισόμενη στην ελαχιστοποίηση της προσδοκώμενης μέσης τιμής (mean) του τετραγώνου της απόδοσης καθώς και της τυπικής της απόκλισης (standard deviation) στην περιοχή όλων των πιθανών τιμών των αβέβαιων παραμέτρων του συστήματος.

Λόγω της αβέβαιης φύσης των ιδιοτήτων της κατασκευής και των περιβαλλοντολογικών φορτίσεων, πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη κατά το

σχεδιασμό μιας κατασκευής η ασφάλεια και αξιοπιστία της ως προς την αστοχία. Ειδικότερα η κατασκευαστική αστοχία θα ορισθεί ως η κατάσταση κατά την οποία η απόκριση της κατασκευής, δεχόμενη συγκεκριμένες εντάσεις ή λειτουργώντας για συγκεκριμένες περιπτώσεις ξεπερνά κάποιο οριακό επίπεδο. Τα συμβατικά σχεδιασμένα TMD βασισμένα στην ελαχιστοποίηση της μέσης τιμής του τετραγώνου της απόκρισης, ή στην περίπτωση των αβεβαιοτήτων, στην ελαχιστοποίηση της προσδοκώμενης μέσης τιμής του τετραγώνου της απόκρισης και της τυπικής απόκλισης πάνω σε όλες τις πιθανές παραμέτρους του συστήματος, δεν ανταποκρίνονται απαραίτητως στο βέλτιστο σχεδιασμό για τους όρους της ασφάλειας και της αξιοπιστίας. Για να επιτευχθεί ένας τέτοιος βέλτιστος σχεδιασμός, θα πρέπει να ακολουθηθεί μια πιθανολογική προσέγγιση βασιζόμενη στην ελαχιστοποίηση της πιθανότητας αστοχίας, υπολογιζόμενη λαμβάνοντας υπόψη της αβεβαιότητες στη φόρτιση και στις ιδιότητες της κατασκευής.

#### 4.4 Εφαρμογή στον Βέλτιστο Σχεδιασμό Συστημάτων Ελέγχου TMD

Ένα σύστημα ελέγχου ταλαντώσεων TMD χαρακτηρίζεται από ένα σύνολο παραμέτρων  $x$  (παραμέτροι σχεδιασμού). Ο στόχος στο σχεδιασμό ενός τέτοιου συστήματος ελέγχου ταλαντώσεων είναι να επιλεγθούν οι παράμετροι  $x$  του TMD, με το βέλτιστο τρόπο που να μεγιστοποιεί την απόδοση της κατασκευής στην οποία είναι προσαρμοσμένο. Το διάνυσμα απόδοσης  $J(x)$  θα περιέχει τις αντικειμενικές συναρτήσεις που θα μετρούν την απόδοση για κάθε παράμετρο σχεδιασμού  $x$ . Η βέλτιστη επιλογή  $x_{opt}$  του TMD θα προκύψει βελτιστοποιώντας τον πίνακα των αντικειμενικών συναρτήσεων  $J(x)$  ως προς  $x$ . Η επιλογή του διανύσματος της απόδοσης εξαρτάται από τα αντικειμενικά κριτήρια σχεδιασμού.

Στο συμβατικό σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου TMD που βασίζεται σε διεγέρσεις που μοντελοποιούνται ως στοχαστικές διαδικασίες, το μοντέλο της κατασκευής θεωρείται πλήρως γνωστό (χωρίς αβεβαιότητες). Το διάνυσμα απόδοσης στην περίπτωση αυτή επιλέγεται να είναι η μέση τιμή του τετραγώνου της μόνιμης απόκρισης  $r(t, x, \theta)$  που ενδιαφέρει και αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο κατασκευαστικό μοντέλο με θεωρούμενες γνωστές παράμετρους  $\hat{\theta}$ .

Δηλαδή 
$$J(x) = \sigma^2(x, \hat{\theta}) = E[r^2(t, x, \hat{\theta})]$$

Η προσδοκώμενη τιμή  $E$  που χρησιμοποιείται στην προσέγγιση αυτή λαμβάνει υπόψη μόνο τα αβέβαια στοχαστικά φορτία και παραβλέπει τις αβεβαιότητες στη μοντελοποίηση της κατασκευής. Σημαντικό σε τέτοιους σχεδιασμούς TMD, είναι ότι λόγω των αβεβαιοτήτων που καθορίζουν τα  $\hat{\theta}$  και παραβλέφθηκαν, η πραγματική απόδοση του TMD στην κατασκευή θα είναι σημαντικά κατώτερη από αυτή που θεωρητικά υπολογίζεται γιατί οι παράμετροι  $\hat{\theta}$  δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματική κατασκευή στο μαθηματικό μοντέλο.

Για να αποφευχθεί αυτός ο υποβιβασμός της απόδοσης, το διάνυσμα  $J(x)$  της απόδοσης θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να λάβει υπόψη τις συνδυαστικές επιρροές και των αβέβαιων φορτίσεων, αλλά και του αβέβαιου κατασκευαστικού μοντέλου.

Με την εισαγωγή των κατασκευαστικών αβεβαιοτήτων, μια φανερή προσέγγιση για την επιλογή του διανύσματος απόδοσης κατά τον σχεδιασμό των TMD, είναι το διάνυσμα απόδοσης να είναι η προσδοκώμενη τιμή της μέσης τιμής του τετραγώνου της απόκρισης  $\sigma^2(x, \theta)$  ως προς τις αβέβαιες παράμετρος  $\theta$ . Έτσι ο πίνακας  $J(x)$  επιλέγεται ως

$$J^{MSR}(x) = E_{\theta}[\sigma^2(x, \theta)] = \int_{\Theta} \sigma^2(x, \theta) p(\theta) d\theta \quad (4.2)$$

όπου ο δείκτης MSR δηλώνει ότι το διάνυσμα απόδοσης βασίζεται στην έννοια της μέσης τιμής του τετραγώνου της απόκρισης.

Για κατασκευές που υπόκεινται σε αβέβαιες δυναμικές συνθήκες περιβάλλοντος, μια σημαντική μελέτη κατά το σχεδιασμό είναι να βελτιωθεί η ασφάλεια και η αξιοπιστία έναντι της αστοχίας. Έχει αποδειχθεί ότι το απλοποιημένο μέγεθος της απόκρισης της κατασκευής, όταν υπάρχουν κατασκευαστικές αβεβαιότητες δεν δίνει καλές εκτιμήσεις της κατασκευαστικής αξιοπιστίας (Katafygiotis and Papadimitriou 1995). Αυτό σημαίνει ότι ο σχεδιασμός αν βασιστεί σε αυτά τα απλά μεγέθη δεν είναι σίγουρο αν θα αντιστοιχεί στο μέγιστο της κατασκευαστικής αξιοπιστίας.

Για τους λόγους αυτούς χρησιμοποιείται διαφορετική μεθοδολογία για το σχεδιασμό TMD έτσι ώστε να βελτιστοποιηθεί η απόδοση-αξιοπιστία. Ο στόχος είναι πάντα να μεγιστοποιηθεί η αξιοπιστία της κατασκευής για όλες τις πιθανές διεγέρσεις και για όλα τα πιθανά κατασκευαστικά μοντέλα, λαμβάνοντας υπόψη τα σχετικά ενδεχόμενα όλων αυτών των πιθανοτήτων.

Έστω  $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  δηλώνει την υπό συνθήκη πιθανότητα αστοχίας δεδομένων των τιμών των παραμέτρων του συστήματος  $\boldsymbol{\theta}$ . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα total probability theorem η συνολική πιθανότητα αστοχίας  $F_u(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x})$  λαμβάνοντας υπόψη τις αβεβαιότητες στις τιμές των παραμέτρων  $\boldsymbol{\theta}$  υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$J^{FP}(\mathbf{x}) = F_u(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (4.3)$$

όπου ο δείκτης FP δηλώνει ότι ο πίνακας απόδοσης βασίζεται στην έννοια της πιθανότητας αστοχίας.

Εδώ το διάνυσμα απόδοσης  $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  περιέχει ένα μέγεθος της κατασκευαστικής απόδοσης λαμβάνοντας υπόψη τις αβεβαιότητες μόνο στις φορτίσεις. Το διάνυσμα απόδοσης  $J(\mathbf{x})$  όμως μπορεί να θεωρηθεί ως το διάνυσμα απόδοσης που λαμβάνει υπόψη τις αβεβαιότητες και των φορτίσεων και του κατασκευαστικού μοντέλου.

#### **4.5 Διατύπωση του Προβλήματος Βέλτιστου Σχεδιασμού υπό την Επιρροή αβεβαιοτήτων**

Εδώ χρησιμοποιούνται κατανομές πιθανοτήτων για να ποσοτικοποιήσουν την αβεβαιότητα στις παράμετρος  $\boldsymbol{\theta}$ . Ο βέλτιστος σχεδιασμός λαμβάνει υπόψη την αβεβαιότητα στις παράμετρος  $\boldsymbol{\theta}$  βελτιστοποιώντας τη μέση τιμή της απόδοσης και ελαχιστοποιώντας την διακύμανση στην τιμή της απόδοσης. Με αυτό τον τρόπο υπολογίζονται βέλτιστοι σχεδιασμοί που είναι λιγότερο ευαίσθητοι στις αβεβαιότητες των παραμέτρων  $\boldsymbol{\theta}$ . Το πρόβλημα του βέλτιστου σχεδιασμού διατυπώνεται ως ένα

πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης ως εξής. Ζητούνται οι τιμές των παραμέτρων  $\mathbf{x}$  που ταυτόχρονα ελαχιστοποιούν το σύνολο  $n=2N$  κριτηρίων

$$\mathbf{y} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = (J_1(\mathbf{x}), J_2(\mathbf{x}), \dots, J_n(\mathbf{x})) = (\boldsymbol{\mu}_f(\mathbf{x}), \boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{x})) \quad (4.4)$$

όπου, χρησιμοποιώντας πολυκριτηριακή ορολογία,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in X$  είναι το διάνυσμα των παραμέτρων,  $X$  είναι ο παραμετρικός χώρος,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in Y$  είναι το αντικειμενικό διάνυσμα,  $Y$  είναι ο αντικειμενικός χώρος,

$$\boldsymbol{\mu}_f(\mathbf{x}) = E_{\theta}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] \equiv \int \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (4.5)$$

είναι η μέση τιμή των αποδόσεων και

$$\boldsymbol{\sigma}_f(\mathbf{x}) = [E_{\theta}[\mathbf{f}^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] - \boldsymbol{\mu}_f^2(\mathbf{x})]^{1/2} \quad (4.6)$$

είναι η τυπική απόκλιση των αποδόσεων λόγω των αβεβαιοτήτων των παραμέτρων όπου

$$E_{\theta}[\mathbf{f}^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] = \int \mathbf{f}^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (4.7)$$

Η βελτιστοποίηση μπορεί να είναι εξαναγκασμένη λόγω περιορισμών που επιβάλλονται στις παραμέτρους ή περιορισμών που εμπλέκονται στη διατύπωση του προβλήματος. Ο εφικτός χώρος των παραμέτρων περιορίζεται σε έναν υπερκύβο καθοριζόμενος από το χαμηλότερο και το υψηλότερο όριο της κάθε παραμέτρου. Αυτά τα όρια εξαρτώνται από φυσικούς περιορισμούς και πληροφορίες και από τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Επιπλέον ο χώρος ο οποίος ερευνείται για λύσεις μπορεί να περιορίζεται σε περιοχές μέσα στον αντικειμενικό χώρο στις οποίες οι τιμές των αποδόσεων δεν ξεπερνούν συγκεκριμένα όρια. Για παράδειγμα μπορεί να ζητείται ότι οι αποδεκτές λύσεις σχεδιασμού πρέπει να ικανοποιούν το κριτήριο, η πιθανότητα αστοχίας που χρησιμοποιείται ως παράμετρος απόδοσης, να παραμένει κάτω από μία οριακή τιμή.

## 4.6 Βέλτιστες Λύσεις Pareto και Υπολογισμοί Χρησιμοποιώντας Εξελικτικούς Αλγορίθμους

Για αντικρουόμενες αντικειμενικές συναρτήσεις (conflicted objectives)  $J_1(x), \dots, J_n(x)$  δεν υπάρχει μοναδική βέλτιστη λύση, αλλά μια ομάδα εναλλακτικών λύσεων που είναι βέλτιστες, με την έννοια ότι δεν υπάρχουν άλλες λύσεις που να είναι καλύτερες από αυτές, μέσα στο χώρο που ερευνείται για λύσεις, όταν όλα τα αντικειμενικά κριτήρια ληφθούν υπόψη. Τέτοιες εναλλακτικές λύσεις, που πραγματεύονται με τη μέση τιμή και τη μεταβλητότητα των αποδόσεων και ποσοτικοποιούνται με διαφορετικά αντικειμενικά κριτήρια, είναι γνωστές στην πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση ως βέλτιστες λύσεις Pareto.

Στη συνέχεια εισάγονται ορισμοί που σχετίζονται με τα κυρίαρχα και τα μη-κυρίαρχα διανύσματα και τις λύσεις Pareto και εμφανίζονται στην πολυκριτηριακή ορολογία (Fonseca and Fleming, 1995; Zitzler and Thiele, 1999). Συγκεκριμένα ένα διάνυσμα απόφασης  $\mathbf{a} \in X$  λέγεται πως κυριαρχεί ενός διανύσματος  $\mathbf{b} \in X$  (συμβολίζεται  $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ ) αν και μόνο αν

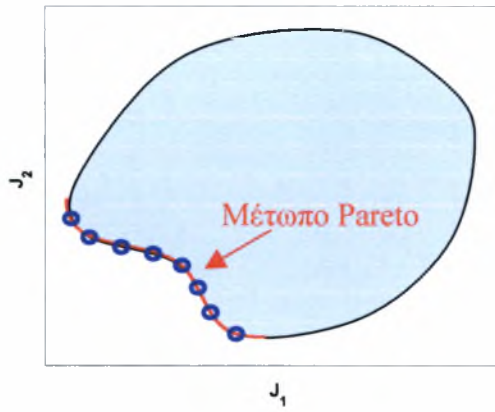
$$J_i(\mathbf{a}) \leq J_i(\mathbf{b}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ and } \exists j \in \{1, \dots, n\} : J_j(\mathbf{a}) < J_j(\mathbf{b})$$

Επιπλέον λέμε ότι το  $\mathbf{a}$  καλύπτει το  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ ) αν και μόνο αν  $\mathbf{b} (\mathbf{a} \prec \mathbf{b})$  ή  $\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \mathbf{J}(\mathbf{b})$ . Βασιζόμενες στον παραπάνω ορισμό μπορούν να οριστούν οι μη-κυρίαρχες λύσεις και οι βέλτιστες Pareto λύσεις ως εξής. Ένα διάνυσμα απόφασης  $\mathbf{a} \in X$  λέγεται να είναι μη-κυρίαρχο στο  $X$  αν και μόνο αν δεν υπάρχει διάνυσμα στο  $X$  που να κυριαρχεί του  $\mathbf{a}$ , δηλαδή, δεν υπάρχει  $\mathbf{a}' \in X$  ώστε  $\mathbf{a}' \prec \mathbf{a}$ . Όλα τα μη κυρίαρχα διανύσματα αποτελούν επιτρεπόμενες βέλτιστες λύσεις, γνωστές στην πολυκριτηριακή ορολογία ως βέλτιστες λύσεις Pareto. Το σύνολο των αντικειμενικών διανυσμάτων  $\mathbf{y} = \mathbf{J}(\mathbf{a})$  που αντιστοιχούν στο σύνολο των βέλτιστων λύσεων Pareto  $\mathbf{a}$  καλείται βέλτιστο μέτωπο Pareto (Pareto Front). Το χαρακτηριστικό των λύσεων Pareto είναι ότι δεν γίνεται να βελτιώσουν κάποιο αντικειμενικό κριτήριο χωρίς ταυτόχρονα να προκαλέσουν υποβιβασμό σε τουλάχιστο ένα από τα άλλα αντικειμενικά κριτήρια.

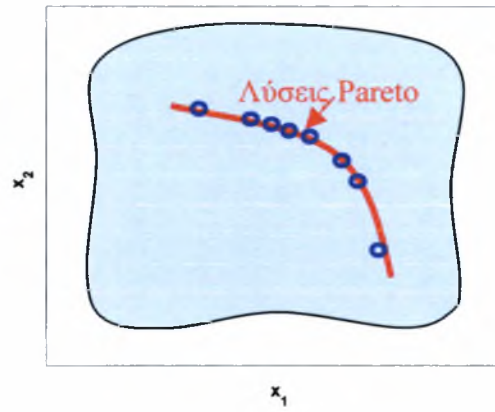


Ο συμβατικός τρόπος επίλυσης του προβλήματος της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης είναι να κατασκευαστεί ένα μοναδικό κριτήριο από τα πολλαπλά χρησιμοποιώντας κατάλληλους συντελεστές βαρύτητας. Η δημιουργία του μετώπου Pareto μπορεί υπολογιστικά να μην είναι πολύ αποδοτική λόγω του μεγάλου αριθμού των τιμών των συντελεστών βαρύτητας που απαιτούνται. Επιπλέον δεν υπάρχει εγγύηση στο αν τα σημεία στο μέτωπο Pareto θα απλωθούν ομοιόμορφα και στο αν ολόκληρο το μέτωπο Pareto θα μπορέσει να υπολογισθεί. Το σύνολο των βέλτιστων λύσεων Pareto μπορεί να εξασφαλισθεί με μεγαλύτερη απόδοση χρησιμοποιώντας εξελικτικούς αλγόριθμους εφαρμόζοντάς τους κατάλληλα, ώστε να λύνουν το πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Ένας τέτοιος αλγόριθμος είναι ο strength Pareto αλγόριθμος (Zitzler and Thiele, 1999) που βασίζεται στη θεωρία των στρατηγικών εξέλιξης (evolution strategies) (π.χ. Beyer 2001). Το κύριο γνώρισμα του αλγόριθμου αυτού είναι ότι διατηρεί την ποικιλία στον πληθυσμό των σημείων έτσι ώστε να επιτευχθεί ένα καλά κατανομημένο και ευρέως απλωμένο μέτωπο, αποτρέποντας πρόωπη σύγκλιση σε κάποιο τμήμα του μετώπου Pareto. Επίσης εκτελεί ομαδοποίηση (clustering) για να μειώσει τον αριθμό των μη κυρίαρχων λύσεων κρατώντας αυτές που οι είναι πιο αντιπροσωπευτικές σε ολόκληρο το μέτωπο του Pareto.

Παράδειγμα γραφικής απεικόνισης του μετώπου Pareto και των Pareto λύσεων στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων και στο χώρο των παραμέτρων παρουσιάζεται στα Σχήματα 4.1 και 4.2. Το παράδειγμα αφορά πρόβλημα με δυο αντικειμενικές συναρτήσεις και δύο παραμέτρους. Στο σχήμα 4.2 φαίνεται η επίδραση περιορισμών στις λύσεις.



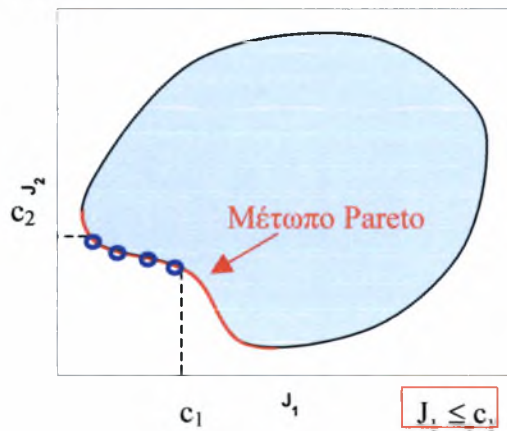
Χώρος Αντικειμενικών  
Συναρτήσεων



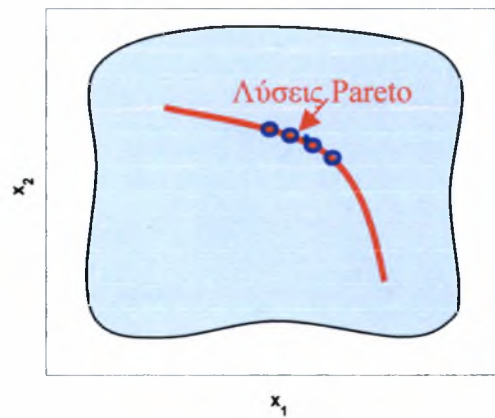
Χώρος Παραμέτρων

Σχήμα 4.1 Γραφική απεικόνιση του μετώπου Pareto και των Pareto λύσεων

$$J_2 \leq c_2$$



Χώρος Αντικειμενικών  
Συναρτήσεων



Χώρος Παραμέτρων

Σχήμα 4.2 Γραφική απεικόνιση του μετώπου Pareto και των Pareto λύσεων με περιορισμούς

$$J_1 \leq c_1 \text{ και } J_2 \leq c_2$$

## 4.7 Αριθμητικές Μέθοδοι Υπολογισμού των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης

Οι βέλτιστες παράμετροι σχεδιασμού ενός συστήματος ελέγχου ταλαντώσεων (TMD) στην περίπτωση των αβεβαιοτήτων στις παραμέτρους, αντιστοιχούν στις τιμές  $\mathbf{x}_{opt}$  που ελαχιστοποιούν τον πίνακα απόδοσης  $J(\mathbf{x})$ . Η εύρεση των τιμών αυτών  $\mathbf{x}_{opt}$  αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που καλείτε να λυθεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας διαθέσιμες τεχνικές βελτιστοποίησης. Σε οποιονδήποτε αλγόριθμο βελτιστοποίησης πρέπει να εκτελεστεί επαναληπτικός υπολογισμός των πολυδιάστατων ολοκληρωμάτων (4.5) και (4.7) (η διάσταση στο χώρο είναι ίση με τον αριθμό των αβέβαιων παραμέτρων του μοντέλου). Δυστυχώς, ακριβής αναλυτική έκφραση των ολοκληρωμάτων (4.5) και (4.7) δεν είναι διαθέσιμη. Από την άλλη, η αριθμητική ολοκλήρωση είναι πολύ δαπανηρή όσον αφορά τον υπολογιστικό χρόνο, και πολλές φορές για το λόγο αυτό θεωρείται ανέφικτη για παραπάνω από λίγες αβέβαιες παραμέτρους. Για να μπορέσει να γίνει ο βέλτιστος σχεδιασμός εφικτός, πρέπει να χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικές, αλλά υπολογιστικά οικονομικές, μέθοδοι υπολογισμού των τιμών των ολοκληρωμάτων (4.5) και (4.7) για κάθε τιμή των  $\mathbf{x}$  κατά τη διάρκεια των αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Η προσέγγιση της τιμής των ολοκληρωμάτων (4.5) και (4.7) στην παρούσα εργασία θα γίνει χρησιμοποιώντας ασυμτωτικά αναπτύγματα (Papadimitriou, Beck and Katafygiotis 1997), καθώς και μεθόδους ολοκλήρωσης βασισμένους σε προσομοιώσεις Monte Carlo (Au and Beck, 2001; Fisherman G.S., 1996).

### 4.7.1 Ασυμπτωτική Προσέγγιση

Το ολοκληρώματα (4.5) και (4.7) μπορούν να γραφούν στη γενική μορφή:

$$I = \int_{\Theta} h(\theta) p(\theta) d\theta \quad (4.8)$$

όπου  $h(\theta)$  και  $p(\theta)$  είναι ομαλές συναρτήσεις του  $\theta \in \Theta$ , και  $p(\theta)$  είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η ασυμπτωτική προσέγγιση βασίζεται στο λογαριθμικό ανάπτυγμα της ολοκληρωτέας ποσότητας γύρω από το σημείο που αντιστοιχεί το μέγιστό της. Έστω ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει ένα μόνο τοπικό μέγιστο  $\theta^*$  στο χώρο των παραμέτρων  $\Theta$  πού είναι και το ολικό μέγιστο. Η ιδέα είναι να γραφεί το ολοκλήρωμα στη μορφή:

$$I = \int_{\Theta} \exp[l(\theta)] d\theta \quad (4.9)$$

όπου

$$l(\theta) = \ln h(\theta) + \ln p(\theta) \quad (4.10)$$

και να αναπτυχθεί το  $l(\theta)$  γύρω από το σημείο  $\theta^*$  που μεγιστοποιεί την συνάρτηση  $l(\theta)$ . Οι ακόλουθες εξισώσεις ικανοποιούνται στο  $\theta^*$ :

$$p \frac{\partial h}{\partial \theta_i} + h \frac{\partial p}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (4.11)$$

Αντί να λυθούν οι εξισώσεις (4.7), η τιμή του  $\theta^*$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας αλγόριθμο ελαχιστοποίησης για το  $-l(\theta)$ .

Αν το  $l(\theta)$  αναπτυχθεί γύρω από το  $\theta^*$  προκύπτει:

$$I = \int_{\Theta} \exp \left[ l(\theta^*) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij}(\theta^*) (\theta_i - \theta_i^*) (\theta_j - \theta_j^*) + E(\theta) \right] d\theta \quad (4.12)$$

όπου  $L_{ij}(\theta)$ , είναι το  $(i, j)$  στοιχείο της Hessian μήτρας  $\mathbf{L}(\theta)$  του  $-l(\theta)$  και δίνονται ως:

$$L_{ij}(\theta) = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (4.13)$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να απλοποιηθεί στη μορφή:

$$I = h(\boldsymbol{\theta}^*) p(\boldsymbol{\theta}^*) \int_{\Theta} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij}(\boldsymbol{\theta}^*) (\theta_i - \theta_i^*) (\theta_j - \theta_j^*) \right] \cdot \exp[E(\boldsymbol{\theta})] d\boldsymbol{\theta} \quad (4.14)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Laplace στο ολοκλήρωμα (Bleistein and Handelsman 1986), προκύπτει η ακόλουθη ασυμπτωτική προσέγγιση για το ολοκλήρωμα:

$$I \sim I(\boldsymbol{\theta}^*) = (2\pi)^{n/2} h(\boldsymbol{\theta}^*) p(\boldsymbol{\theta}^*) \frac{1}{\sqrt{\det[\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}^*)]}} \quad (4.15)$$

η οποία είναι ανεξάρτητη από το σφάλμα  $E(\boldsymbol{\theta})$  κατά την ανάπτυξη γιατί  $E(\boldsymbol{\theta}^*) = 0$ . Αυτή η προσέγγιση ισχύει για  $\lambda > 0$ , όπου  $\lambda = \min_i \{\lambda_i[\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}^*)]\}$  και  $\lambda_i[\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}^*)]$  είναι η  $i$  ιδιοτιμή της Hessian μήτρας  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})$  υπολογισμένη στο  $\boldsymbol{\theta}^*$ . Επιπλέον, η προσέγγιση γίνεται ακριβής καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$ . Ειδικότερα, όσο μεγαλύτερη η τιμή του  $\lambda$ , τόσο πιο απότομη γίνεται η κορυφή στο μέγιστο  $\boldsymbol{\theta}^*$  της ολοκληρωτέας ποσότητας και γι αυτό τόσο πιο ακριβής αναμένεται να είναι η τιμή της ασυμπτωτικής προσέγγισης.

Στην περίπτωση που υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός τοπικών μέγιστων στο  $\Theta$ , έστω  $\boldsymbol{\theta}_j^*$ ,  $j=1, \dots, r$ , η προτεινόμενη διαδικασία μορφοποιείται απλώς αθροίζοντας τις ασυμπτωτικές συνεισφορές (4.11) που υπολογίζονται για κάθε μέγιστο σημείο  $\boldsymbol{\theta}_j^*$  έτσι ώστε

$$I = \sum_{j=1}^r I(\boldsymbol{\theta}_j^*) \quad (4.16)$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει απευθείας από το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα  $I$  μπορεί να διασπασθεί σε ένα πεπερασμένο άθροισμα ολοκληρωμάτων υπολογιζόμενα σε υποπεριοχές του  $\Theta$ , όπου κάθε υποπεριοχή περιέχει μόνο ένα μέγιστο σημείο. Ασφαλώς κάποιες συνεισφορές στο (4.12) μπορεί να μην είναι σημαντικές.

Η πιο δαπανηρή υπολογιστικά διαδικασία στα ασυμπτωτικά αναπτύγματα είναι η εύρεση των μέγιστων σημείων  $\boldsymbol{\theta}_j^*$ ,  $j=1, \dots, r$ . Σε ορισμένες πρακτικές εφαρμογές μόνο ένα τοπικό μέγιστο υπάρχει στην περιοχή  $\Theta$ , και έτσι μπορεί εύκολα

να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο εύρεσης τοπικών μεγίστων όπως είναι η τροποποιημένη μέθοδος Newton (Modified Newton). Στην περίπτωση πολλαπλών μεγίστων, απαιτούνται πιο εξεζητημένες μέθοδοι για την αξιόπιστη εύρεσή των περισσοτέρων τοπικών μεγίστων (Yang and Beck 1997). Στα παραπάνω αριθμητικά σχήματα απαιτείται ο υπολογισμός της κλίσης (gradient) και της Hessian μήτρας του  $-l(\theta)$ . Αυτοί οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν αριθμητικά χρησιμοποιώντας σχήματα πεπερασμένων διαφορών. Πάντως, ανάλογα με την εφαρμογή, αναλυτικές εκφράσεις για την κλίση και την Hessian μήτρα του  $-l(\theta)$  μπορούν να υπολογισθούν έτσι ώστε να αποφευχθούν πιθανά σφάλματα που προκύπτουν από τις προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών. Στο Παράρτημα Β παρουσιάζεται μία τέτοια εφαρμογή.

## 4.7.2 Μέθοδος Ολοκλήρωσης Βασισμένη στην Προσομοίωση Monte Carlo

### Μέση Τιμή Δείγματος και Διακύμανση Δείγματος

Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή δεδομένης συνάρτησης κατανομής και  $X_1, \dots, X_n$  είναι δείγματα από τη μεταβλητή αυτή. Υποθέτουμε ότι  $X_1, \dots, X_n$  είναι τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής. Έστω  $\theta$  και  $\sigma^2$  δηλώνουν αντίστοιχα την μέση τιμή και την διακύμανσή της  $X$ . Η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση

$$\theta = E[X]$$

ενώ η διακύμανση ορίζεται από τη σχέση

$$\sigma^2 = \text{Var}(X)$$

Ο μέσος όρος των  $n$  δεδομένων τιμών

$$\bar{X} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$$

καλείται μέση τιμή των δειγμάτων (*sample mean*). Όταν ο πληθυσμός με μέση τιμή  $\theta$  είναι άγνωστος η μέση τιμή δείγματος συχνά χρησιμοποιείται για την εκτίμησή της. Επειδή

$$E[\bar{X}] = E\left[\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right] = \sum_{i=1}^n \frac{E[X_i]}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta$$

έχει ως αποτέλεσμα ότι το  $\bar{X}$  είναι μια αμερόληπτη εκτίμηση (unbiased estimator) του  $\theta$ , όπου λέμε ότι μία εκτίμηση κάποιας παραμέτρου είναι αμερόληπτη, όταν η προσδοκώμενη τιμή της είναι ίση με την παράμετρο αυτή.

Για να προσδιορίσουμε την “αξία” του  $\bar{X}$  ως εκτίμηση του πληθυσμού μέσης τιμής  $\theta$ , λαμβάνουμε υπόψη το τετράγωνο του σφάλματος της μέσης τιμής –που είναι το τετράγωνο της διαφοράς μεταξύ  $\bar{X}$  και  $\theta$ .

$$\begin{aligned} E[(\bar{X} - \theta)^2] &= \text{Var}(\bar{X}) \quad (\text{επειδή } E[\bar{X}] = \theta) \\ &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \quad (\text{λόγω ανεξαρτησίας}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{επειδή } \text{Var}(X_i) = \sigma^2) \end{aligned}$$

Έτσι το  $\bar{X}$ , η μέση τιμή των δειγμάτων των  $n$  δεδομένων τιμών  $X_1, \dots, X_n$ , είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή  $\theta$  και διακύμανση  $\sigma^2/n$ . Επειδή σε μια τυχαία μεταβλητή είναι δύσκολο η τιμή της να είναι διαφορετική (μικρότερη ή μεγαλύτερη) από τη μέση τιμή της κατά πολλές φορές την τυπική απόκλιση (standard deviation ή sdt και ίση με την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης), γι αυτό το  $\bar{X}$  είναι μια καλή εκτίμηση του  $\theta$  όταν η  $\sigma / \sqrt{n}$  είναι μικρή.

Εφαρμογή στα ολοκληρώματα (4.5) και (4.7)

Εφαρμόζοντας την παραπάνω μέθοδο για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (4.5) και (4.7) με  $p(\theta)$  συνάρτηση συγκεκριμένης κατανομής, τα ολοκληρώματα μπορούν να γραφούν στη γενική μορφή:

$$I(\mathbf{x}) = \int_{\Theta} h(\boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} = E_{\boldsymbol{\theta}}[h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})]$$

όπου  $h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  είναι  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  στην περίπτωση του ολοκληρώματος (4.5) και  $h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  είναι  $f^2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  στην περίπτωση του ολοκληρώματος (4.7).

Έστω  $\boldsymbol{\theta}^{(k)} \sim p(\boldsymbol{\theta})$ ,  $k=1, \dots, N$  είναι δείγματα της  $\boldsymbol{\theta}$  που παράγονται με βάση την κατανομή  $p(\boldsymbol{\theta})$ .

Η τιμή του ολοκληρώματος  $I$  δίνεται από τη μέση τιμή της μεταβλητής  $h(\boldsymbol{\theta})$  η οποία με βάση την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου δίνεται από τη σχέση

$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \tag{4.17}$$



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 5.1 Γενική Περιγραφή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί αριθμητικά ο βέλτιστος σχεδιασμός συστημάτων TMD που χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο ταλαντώσεων. Τα TMD και η κατασκευή εξετάζονται σαν SDOF συστήματα που παρουσιάστηκαν στην απλοποιημένη μορφή του Σχήματος 2.5 και 2.6, θεωρώντας ότι η κατασκευή υπόκειται σε διέγερση στη βάση της. Ο σκοπός της αριθμητικής μελέτης είναι τριπλός. Πρώτον, να μελετηθεί η ακρίβεια της αριθμητικής μεθόδου Monte Carlo που χρησιμοποιείται για τον αποτελεσματικό, από πλευράς υπολογιστικού χρόνου, υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (4.2), (4.3), (4.5) και (4.7) που περιγράφουν την απόδοση του συστήματος. Για τον σκοπό αυτό, οι εκτιμήσεις της αριθμητικής τιμής του ολοκληρώματος με τη μέθοδο Monte Carlo θα συγκριθούν με τις ακριβείς τιμές που προκύπτουν από αριθμητική, αλλά υπολογιστικά χρονοβόρα, μέθοδο ολοκλήρωσης. Δεύτερον, να συγκριθούν οι πιθανολογικά βασισμένοι βέλτιστοι σχεδιασμοί χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικά μεγέθη απόδοσης: το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{\max}$ , και την πιθανότητα αστοχίας, όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Τέλος να ερευνηθεί η σημασία των αβεβαιοτήτων στις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$  του TMD καθώς και στην απόδοσή του.

Το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$  περιέχει μόνο την φυσική συχνότητα  $\omega_s = \sqrt{k_s/m_s}$  του TMD, και ο συντελεστής απόσβεσης επιλέγεται να είναι  $\zeta_s = c_s/(2m_s\omega_s) = 0.05$ . Το σύνολο των αβέβαιων παραμέτρων  $\theta$  περιέχει τη φυσική συχνότητα  $\omega_p = \sqrt{k_p/m_p}$  της κυρίως κατασκευής, ενώ ο συντελεστής απόσβεσής της επιλέγεται  $\zeta_p = c_p/(2m_p\omega_p) = 0.01$ . Η αβέβαιη παράμετρος  $\theta = \omega_p$  θεωρείται πως ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\hat{\omega}_p = 1$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ .

## 5.2 Αριθμητική Μέθοδος Υπολογισμού των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης

Ο ακριβής υπολογισμός των ολοκληρωμάτων απόδοσης (4.5) και (4.7) επιτυγχάνεται με μια από τις διαθέσιμες αριθμητικές μεθόδους ολοκλήρωσης. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η αριθμητική μέθοδος ολοκλήρωσης σε MatLab adaptive Lobatto quadrature. Για περισσότερες από δύο αβέβαιες παραμέτρους, η αριθμητική μέθοδος απαιτεί πολύ μεγάλο υπολογιστικό χρόνο. Οπότε, για να είναι δυνατή η σύγκριση των προτεινομένων μεθόδων ολοκλήρωσης Monte Carlo με την ακριβή μέθοδο, ο αριθμός των αβέβαιων παραμέτρων περιορίζεται σε ένα ή δύο. Συγκεκριμένα, ως αβέβαιη παράμετρος  $\theta$  θεωρείται η ιδιοσυχνότητα  $\omega_p$  του πρωτεύοντος συστήματος. Η τυπική απόκλιση της αβέβαιης παραμέτρου  $\omega_p$  παίρνει την τιμή  $\sigma = 0.1$ . Στα ολοκληρώματα απόδοσης (4.5) και (4.7), θεωρείται πρώτα ως απόδοση  $f(x, \theta)$  το μέγιστο  $H_{\max}$  της συνάρτησης μεταφοράς  $H(\omega)$  που αναφέρεται στην μετατόπιση του συστήματος. Η μέση τιμή  $\mu_{f(x)}$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma_{f(x)}$  του μέγιστου  $H_{\max}$  των ολοκληρωμάτων συναρτήσει των τιμών της ιδιοσυχνότητας του  $\omega_s$  φαίνονται στα Σχήματα 5.1 και 5.2, αντίστοιχα. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση υπολογίζονται στα σχήματα 5.1 και 5.2 για δεδομένες τις τιμές των παραμέτρων  $\zeta_p = 0.01$ ,  $\zeta_s = 0.01$  και λόγο μαζών  $\mu = 0.01$ .

Στη συνέχεια θεωρείται ως απόδοση  $f(x, \theta)$  η πιθανότητα αστοχίας. Η μέση τιμή  $\mu_{f(x)}$  και η τυπική απόκλιση  $\sigma_{f(x)}$  της πιθανότητας αστοχίας δείχνεται στο Σχήμα 5.3. Στην περίπτωση αυτή η διέγερση μοντελοποιείται με μόνιμο Γκαουσιανό λευκό θόρυβο φασματικής πυκνότητας  $S$ . Η περίοδος  $T$  της μόνιμης απόκρισης ορίζεται ως  $T = 10(2\pi / \hat{\omega}_p)$ , ένα πολλαπλάσιο της πιο πιθανής περιόδου της κύριας κατασκευής. Το μέγεθος που λαμβάνεται υπόψη για τον υπολογισμό της πιθανότητας αστοχίας είναι η σχετική μετατόπιση του πρωτεύοντος συστήματος ως προς τη βάση. Το σύστημα θεωρείται ότι αστοχεί όταν το μέγεθος αυτό ξεπεράσει την οριακή τιμή  $b$ .

Στα Σχήματα 5.1 και 5.2 όπου παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του μέγιστου  $H_{\max}$ , αλλά και στο Σχήμα 5.3 όπου παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της πιθανότητας αστοχίας, φαίνεται πως η περιοχή στην

οποία εμφανίζεται το βέλτιστο (ελάχιστο) για την μέση τιμή διαφέρει από την περιοχή στην οποία εμφανίζεται το βέλτιστο για την τυπική της απόκλιση. Το γεγονός αυτό καθιστά αναγκαίο, για να βρεθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός, να μελετηθεί το πρόβλημα ως πολυκριτηριακό όπως αυτό γίνεται στην παράγραφο 5.4

### **5.3 Μέθοδος Προσομοίωσης Monte Carlo για τον Υπολογισμό των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης**

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων απόδοσης (4.5) και (4.7) με τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo και γίνεται σύγκριση με τις ακριβείς τιμές (αριθμητικές) της παραγράφου 5.2. Τα χαρακτηριστικά της κατασκευής και της διέγερσης είναι όμοια με αυτά της προηγούμενης παραγράφου για να είναι εφικτή η σύγκριση.

Στο Σχήμα 5.4 αφορά τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του μεγίστου της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{\max}$ . Η σύγκριση γίνεται για τρεις διαφορετικούς αριθμούς  $n$  των δειγμάτων. Συγκεκριμένα το  $n$  επιλέγεται να είναι 100, 1000 και 10000 αντίστοιχα. Από τη σύγκριση φαίνεται καθαρά η επίδραση του αριθμού των δειγμάτων  $n$  στον τελικό υπολογισμό.

Στα Σχήματα 5.5 και 5.6 αντίστοιχα υπολογίζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της πιθανότητας αστοχίας. Εδώ φαίνεται πως ιδιαίτερα η τιμή της τυπικής απόκλισης παρουσιάζει μεγάλη διακύμανση και ο υπολογισμός για να γίνει ακριβής απαιτεί σίγουρα μεγάλο αριθμό δειγμάτων. Η σημαντική αυτή διακύμανση θεωρείται σίγουρο πως θα επηρεάσει τη μελέτη του βέλτιστου σχεδιασμού.

### **5.4 Βέλτιστος Σχεδιασμός TMD υπό την Επιρροή Αβεβαιοτήτων**

Αρχικά θα μελετηθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής με ένα σύστημα ελέγχου TMD. Στην παρούσα εφαρμογή το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$  περιέχει μόνο την φυσική συχνότητα  $\omega_s = \sqrt{k_s / m_s}$  του TMD, και ο συντελεστής απόσβεσης επιλέγεται να είναι  $\zeta_s = c_s / (2m_s \omega_s) = 0.05$ . Το σύνολο των αβέβαιων

παραμέτρων  $\theta$  περιέχει τη φυσική συχνότητα  $\omega_p = \sqrt{k_p / m_p}$  της κυρίως κατασκευής, ενώ ο συντελεστής απόσβεσής της επιλέγεται  $\zeta_p = c_p / (2m_p \omega_p) = 0.01$ . Η αβέβαιη παράμετρος  $\theta = \omega_p$  θεωρείται πως ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\hat{\omega}_p = 1$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ .

Η βελτιστοποίηση θα γίνει πρώτα θεωρώντας ως απόδοση τη συνάρτηση μεταφοράς. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις αποτελούνται από τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του μεγίστου της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{\max}$  (συναρτήσεις (4.5) και 4.6)). Ο υπολογισμός των αντικειμενικών συναρτήσεων (ολοκληρώματα 4.5, 4.7) γίνεται αριθμητικά. Οι λύσεις Pareto δείχνονται στα Σχήματα 5.7, 5.8. Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζονται οι λύσεις Pareto στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων ενώ στο σχήμα 5.8 παρουσιάζονται οι λύσεις Pareto στο χώρο των παραμέτρων. Στη συνέχεια, στα Σχήματα 5.9 και 5.10 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του πολυκριτηριακού βέλτιστου σχεδιασμού για την περίπτωση που η απόδοση είναι η πιθανότητα αστοχίας. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις αποτελούνται από τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της πιθανότητας αστοχίας. Και στις δύο περιπτώσεις το επίπεδο αβεβαιότητας της παραμέτρου  $\omega_p$  ορίστηκε  $\sigma = 0.05$ .

Συγκρίνοντας τις περιοχές από τις οποίες παίρνει τιμές η παράμετρος σχεδιασμού  $x_1 = \omega_s$  παρατηρείται πως στην περίπτωση της απόδοσης με βάση το  $H_{\max}$  οι κατά Pareto βέλτιστες τιμές της ιδιοσυχνότητας του TMD κυμαίνονται από  $\omega_{s,opt} = 0.8$  έως 0.95, ενώ στην περίπτωση της απόδοσης με βάση την πιθανότητα αστοχίας η περιοχή των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων είναι σημαντικά μικρότερη, αλλά εντός της περιοχής  $H_{\max}$ , με τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων του TMD να κυμαίνονται από  $\omega_{s,opt} = 0.87$  έως 0.91. Ακόμη παρατηρείται πως για το σύνολο των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων που έχουν προκύψει, οι λύσεις με καλύτερη (χαμηλότερη) μέση τιμή είναι πιο ευαίσθητες στις αβεβαιότητες (μεγαλύτερη τυπική απόκλιση). Ειδικότερα, στην εφαρμογή της πιθανότητας αστοχίας του Σχήματος 5.10 η χαμηλότερη τιμή  $\omega_{s,opt} = 0.87$  αντιστοιχεί στον εύρωστο σχεδιασμό με τη χαμηλότερη διακύμανση λόγω της αβέβαιης παραμέτρου  $\sigma_f = 1.7 \times 10^{-4}$  αλλά την υψηλότερη μέση τιμή πιθανότητας αστοχίας  $\mu_f = 4.4 \times 10^{-4}$ . Η τιμή  $\omega_{s,opt} = 0.91$

αντιστοιχεί στη μικρότερη μέση τιμή της πιθανότητας αστοχίας  $\mu_f = 1.7 \times 10^{-4}$  αλλά έχει σχετικά μεγάλη ευαισθησία ( $\sigma_f = 6.8 \times 10^{-4}$ ) στην αβεβαιότητα της παραμέτρου  $\omega_p$ .

Από τα αποτελέσματα του Σχήματος 5.10, φαίνεται καθαρά ότι η επιλογή της βέλτιστης λύσης  $\omega_s = 0.87$  είναι πολύ πιο ευαίσθητη από την επιλογή  $\omega_s = 0.91$  αφού η διακύμανση της πιθανότητας αστοχίας λόγω της αβεβαιότητας στις τιμές του  $\omega_p$  για  $\omega_s = 0.87$  είναι κατά πολύ μικρότερη από τη διακύμανση της πιθανότητας αστοχίας για  $\omega_s = 0.91$ .

## 5.5 Επίδραση του Επιπέδου των Αβεβαιοτήτων στο Βέλτιστο

### Σχεδιασμό TMD

Στην παράγραφο αυτή εκτός από το βέλτιστο σχεδιασμό ενός συστήματος ελέγχου TMD (Σχήμα 2.5), θα μελετηθεί παράλληλα και ο βέλτιστος σχεδιασμός με δύο όμοια συστήματα TMD (Σχήμα 2.6). Η μελέτη θα εστιαστεί στην περίπτωση που η απόδοση του συστήματος ποσοτικοποιείται με την πιθανότητα αστοχίας.

Αρχικά θα μελετηθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής με ένα σύστημα ελέγχου TMD. Στην παρούσα εφαρμογή το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$  περιέχει μόνο την φυσική συχνότητα  $\omega_s = \sqrt{k_s/m_s}$  του TMD, και ο συντελεστής απόσβεσης επιλέγεται να είναι  $\zeta_s = c_s/(2m_s\omega_s) = 0.01$ . Το σύνολο των αβέβαιων παραμέτρων  $\theta$  περιέχει τη φυσική συχνότητα  $\omega_p = \sqrt{k_p/m_p}$  της κυρίως κατασκευής, ενώ ο συντελεστής απόσβεσής της επιλέγεται  $\zeta_p = c_p/(2m_p\omega_p) = 0.01$ . Η αβέβαιη παράμετρος  $\theta = \omega_p$  θεωρείται πως ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\hat{\omega}_p = 1$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Το μέτωπο του Pareto στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων και οι αντίστοιχες βέλτιστες λύσεις (κατά Pareto) παρουσιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα στα Σχήματα 5.11 και 5.12, αντίστοιχα για τρία διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας της παραμέτρου  $\omega_p$ , που αντιστοιχούν σε  $\sigma = 0.02, 0.05$  και

0.10. Στα σχήματα αυτά φαίνεται καθαρά το πόσο επηρεάζει το επίπεδο των αβεβαιοτήτων στην επιλογή των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$ .

Στη συνέχεια θα μελετηθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής με δύο συστήματα ελέγχου TMD (Σχήμα 2.6). Εδώ το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$  περιέχει τις φυσικές συχνότητες  $x_1 = \omega_{s1}$  και  $x_2 = \omega_{s2}$  των TMD, και οι συντελεστές απόσβεσης επιλέγονται να είναι  $\zeta_{s1} = \zeta_{s2} = 0.01$ . Το σύνολο των αβέβαιων παραμέτρων  $\theta$  περιέχει τη φυσική συχνότητα  $\omega_p = \sqrt{k_p / m_p}$  της κυρίως κατασκευής, ενώ ο συντελεστής απόσβεσής της επιλέγεται  $\zeta_p = c_p / (2m_p \omega_p) = 0.01$ . Η αβέβαιη παράμετρος  $\theta = \omega_p$  θεωρείται πως ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\hat{\omega}_p = 1$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Το μέτωπο του Pareto στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων και οι βέλτιστες κατά Pareto λύσεις στο χώρο των παραμέτρων παρουσιάζονται σε λογαριθμική κλίμακα στα σχήματα 5.13 και 5.14, αντίστοιχα για τα τρία διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας της παραμέτρου  $\omega_p$  που αντιστοιχούν σε  $\sigma = 0.05, 0.10$  και  $0.20$ .

Συγκρίνοντας τα σχήματα 5.11 και 5.13, παρατηρείται πως τα μέτωπα των Pareto, στην περίπτωση των δύο TMD είναι χαμηλότερα από τα μέτωπα Pareto για ένα TMD. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην περίπτωση των δύο TMD αναμένεται καλύτερος έλεγχος ταλαντώσεων και συνεπώς μικρότερη πιθανότητα αστοχίας της κατασκευής. Ακόμη παρατηρώντας το Σχήμα 5.14, για κάθε τιμή του  $\sigma$ , δύο τμήματα βέλτιστων λύσεων προκύπτουν και είναι συμμετρικά στον άξονα  $x_1 = x_2$ . Η συμμετρία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι οι μάζες και τα χαρακτηριστικά της απόσβεσης των δύο TMD επιλέχθηκαν να είναι ακριβώς τα ίδια.

## 5.6 Επίδραση της Ακρίβειας Υπολογισμού των Ολοκληρωμάτων Απόδοσης στον Βέλτιστο Σχεδιασμό

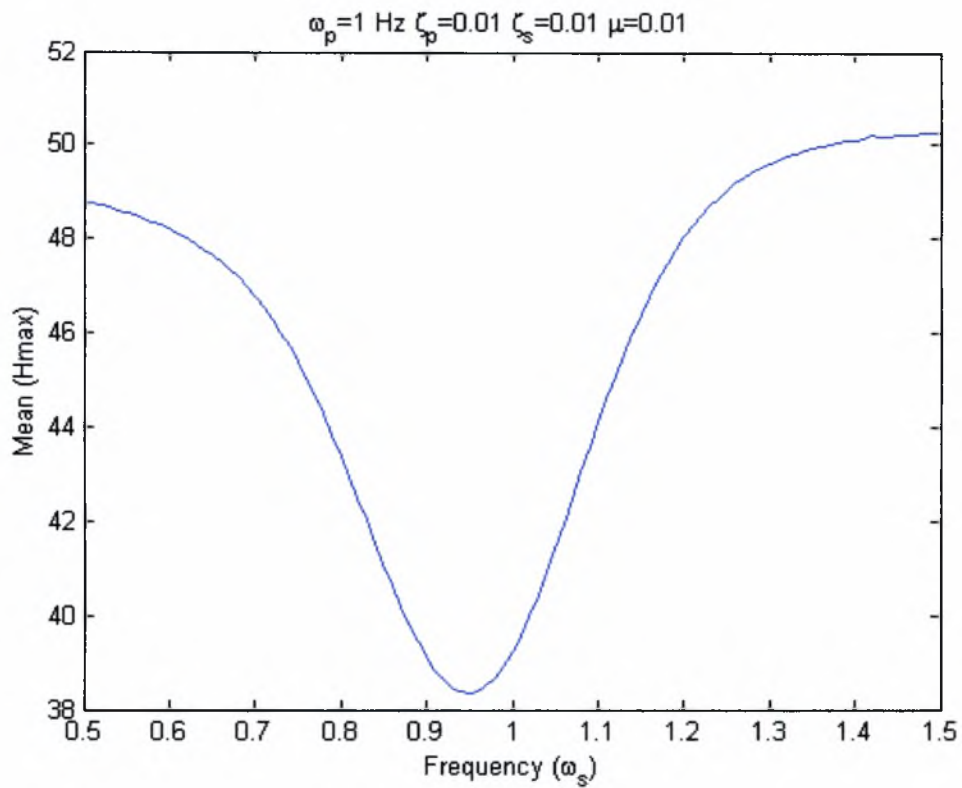
Στην παράγραφο αυτή γίνεται μελέτη βέλτιστου σχεδιασμού όμοια της παραγράφου 5.4 με τη διαφορά ότι οι αντικειμενικές συναρτήσεις (ολοκληρώματα (4.5), (4.7)) υπολογίζονται με τη μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo όπως αυτή παρουσιάστηκε στην παράγραφο 4.4. Θα μελετηθεί ο βέλτιστος σχεδιασμός της κατασκευής με ένα σύστημα ελέγχου TMD και όλες οι παράμετροι θα είναι ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην παράγραφο 5.4 κατά την αριθμητική (ακριβής) επίλυση ώστε να γίνει εφικτή η σύγκριση για να φανεί η απόδοση της μεθόδου Monte Carlo.

Το σύνολο των παραμέτρων σχεδιασμού  $x$  περιέχει μόνο την φυσική συχνότητα  $\omega_s = \sqrt{k_s/m_s}$  του TMD, και ο συντελεστής απόσβεσης επιλέγεται να είναι  $\zeta_s = c_s/(2m_s\omega_s) = 0.05$ . Το σύνολο των αβέβαιων παραμέτρων  $\theta$  περιέχει τη φυσική συχνότητα  $\omega_p = \sqrt{k_p/m_p}$  της κυρίως κατασκευής, ενώ ο συντελεστής απόσβεσής της επιλέγεται  $\zeta_p = c_p/(2m_p\omega_p) = 0.01$ . Η αβέβαιη παράμετρος  $\theta = \omega_p$  θεωρείται πως ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\hat{\omega}_p = 1$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Η βελτιστοποίηση θα γίνει πρώτα μελετώντας ως απόδοση το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{\max}$ , και στη συνέχεια θεωρώντας ως απόδοση την πιθανότητα αστοχίας, όπως αυτές ορίστηκαν στην στο κεφάλαιο 3.

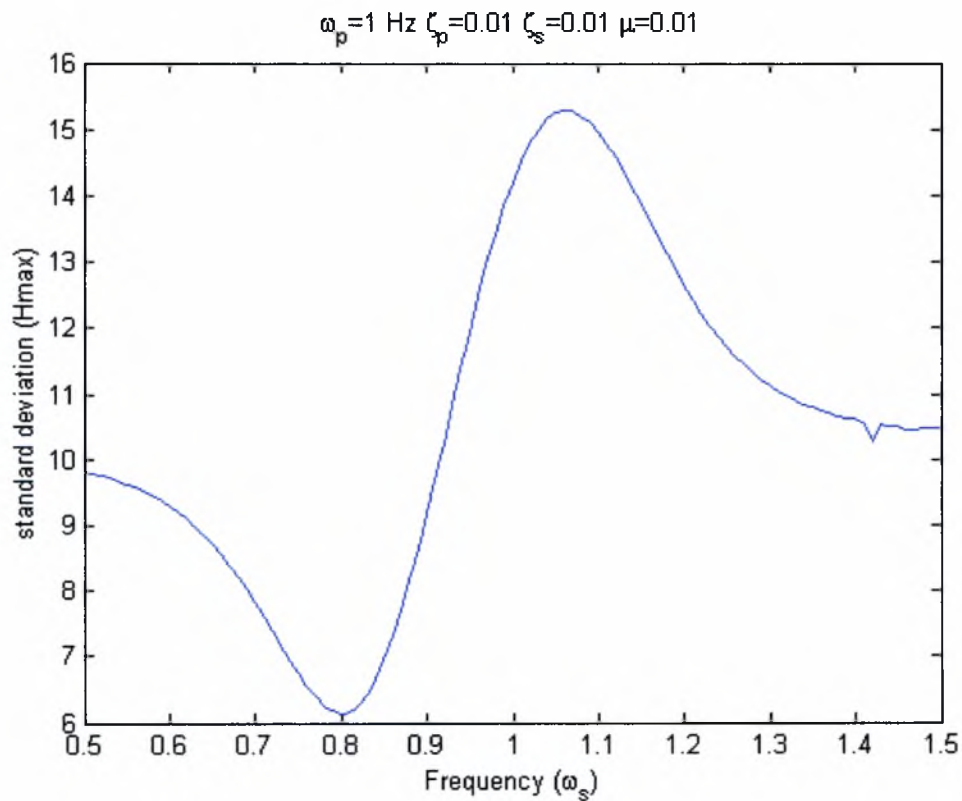
Αρχικά, στα Σχήματα 5.15 και 5.16 παρουσιάζονται οι βέλτιστες λύσεις στο χώρο των αντικειμενικών συναρτήσεων και στο χώρο των παραμέτρων για την περίπτωση που η απόδοση είναι το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς. Ο υπολογισμός των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων με τη μέθοδο Monte Carlo γίνεται για αριθμό δειγμάτων  $n=100$  και  $n=1000$ . Οι βέλτιστες λύσεις υπολογίζονται επίσης με την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης. Παρατηρείται πως και η μέση τιμή αλλά και η τυπική απόκλιση με τη μέθοδο Monte Carlo εμφανίζουν βέλτιστες τιμές λίγο μικρότερες (καλύτερες) από αυτές της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διακύμανση που προκαλείται (Σχήμα 5.4) στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων μέσης τιμής και τυπικής απόκλισης με την προσεγγιστική μέθοδο Monte Carlo επηρεάζει τον ακριβή προσδιορισμό των

βέλτιστων λύσεων (επιλέγονται οι τιμές που κυμαίνονται πιο χαμηλά). Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό στα σχήματα 5.17 και 5.18 όπου γίνεται η αντίστοιχη μελέτη για την περίπτωση που η απόδοση είναι η πιθανότητα αστοχίας. Ο υπολογισμός βέλτιστων λύσεων με τη μέθοδο Monte Carlo γίνεται για αριθμό δειγμάτων  $n = 1000$ . Μάλιστα φαίνεται πως η διακύμανση που παρουσιάζεται στον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης (Σχήμα 5.6), επηρεάζει σημαντικά την βέλτιστη επιλογή των σχεδιαστικών παραμέτρων και μπορεί να δώσει λανθασμένα αποτελέσματα (Σχήμα 5.18). Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά με την αύξηση του αριθμού  $n$  των δειγμάτων στην προσομοίωση Monte Carlo. Όμως αυτό απαιτεί πολύ μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο. Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η ανάπτυξη μεθόδων για τη μείωση του υπολογιστικού χρόνου είναι απαραίτητη ειδικά για τις περιπτώσεις πολλών αβέβαιων παραμέτρων.

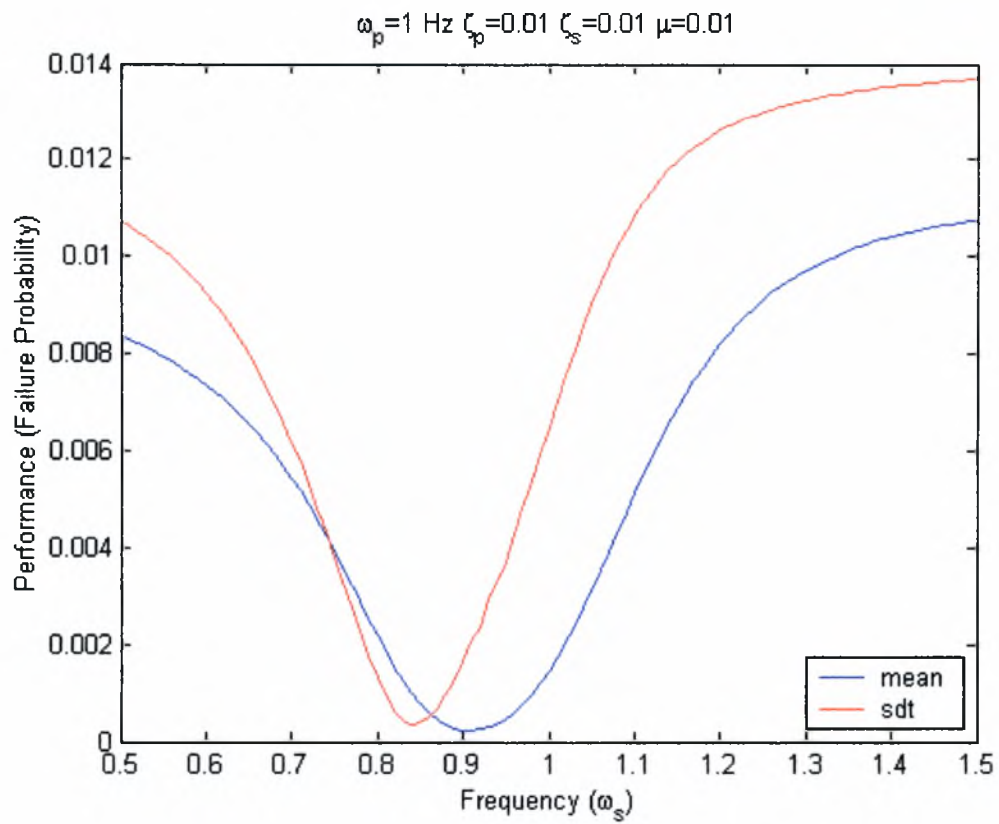




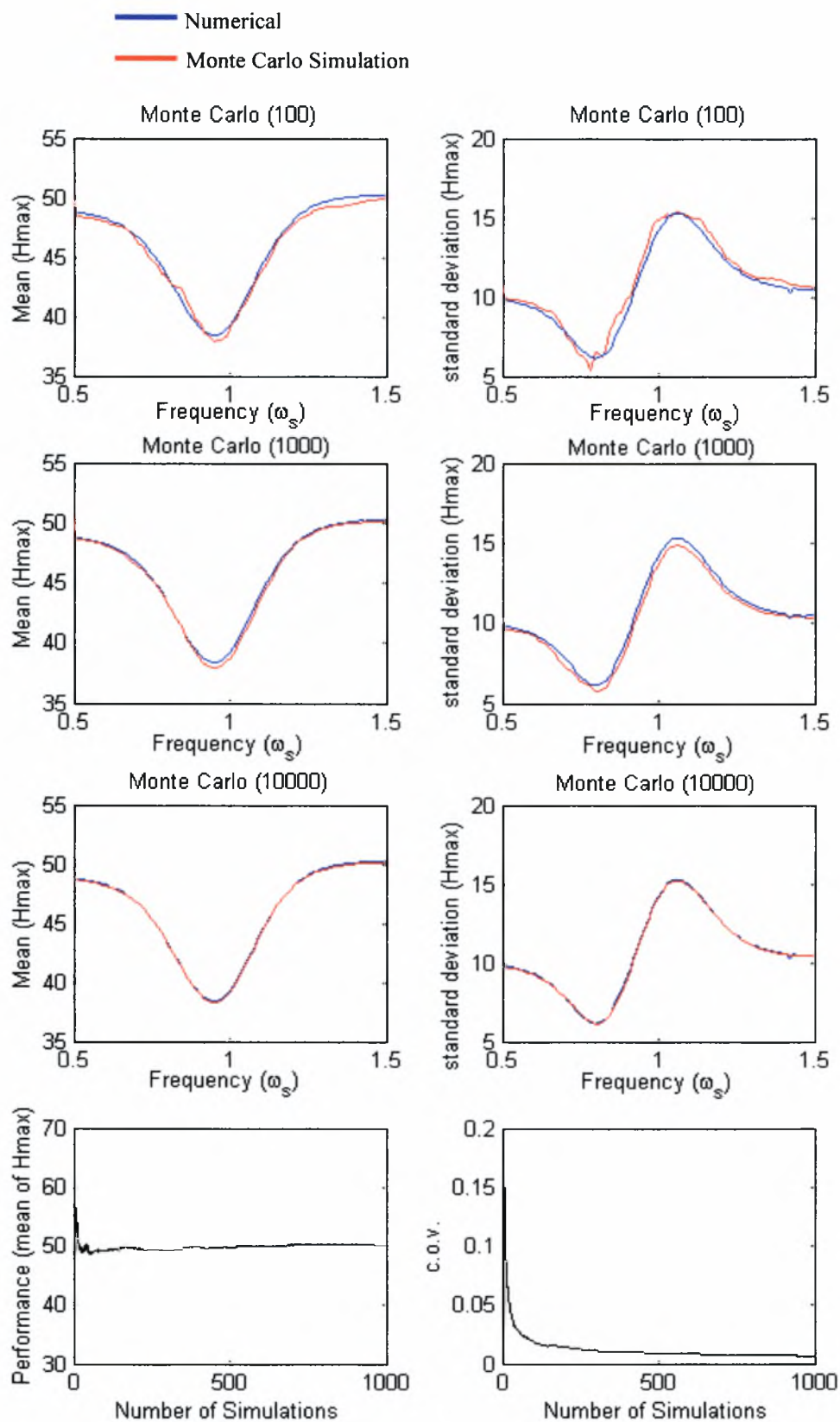
**Σχήμα 5.1** Μέση τιμή του μέγιστου της συνάρτησης μεταφοράς, συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του TMD.



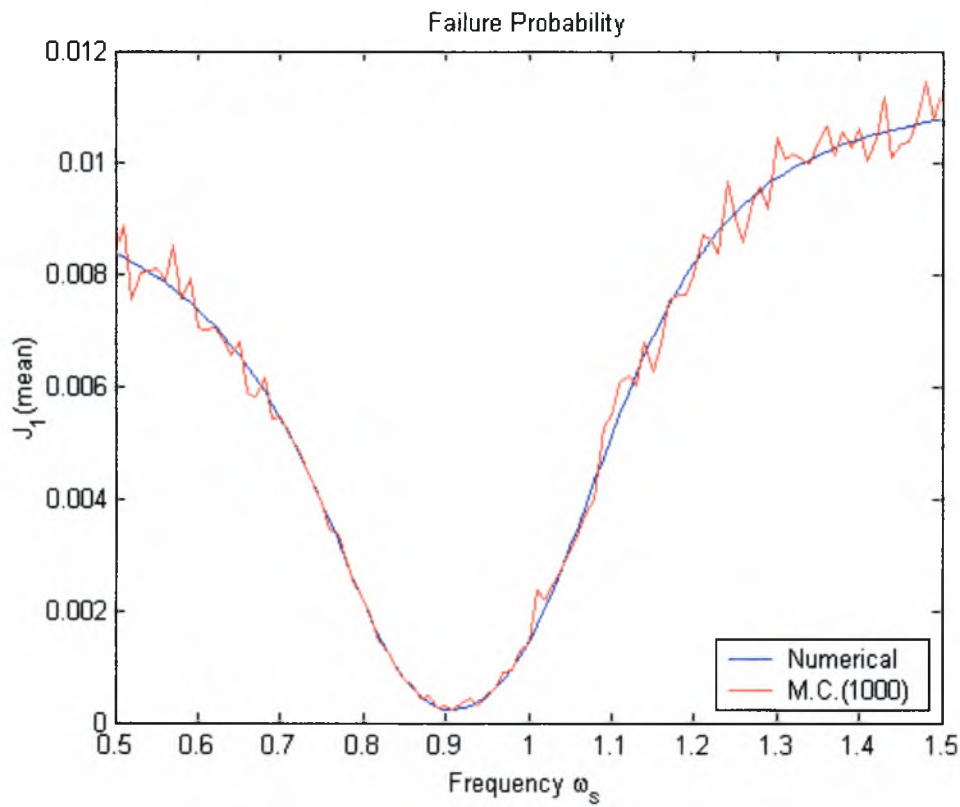
**Σχήμα 5.2** Τυπική απόκλιση της τιμής του μέγιστου της συνάρτησης μεταφοράς, συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του TMD.



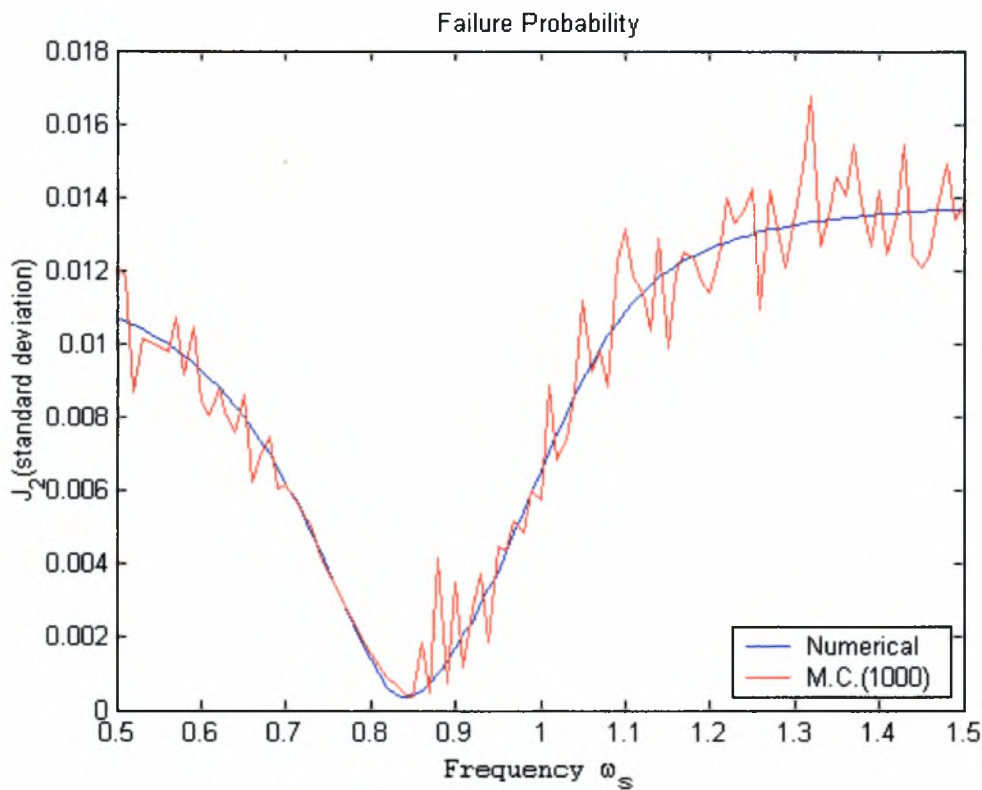
**Σχήμα 5.3** Μέση τιμή (mean) και τυπική απόκλιση (std) της τιμής της πιθανότητας αστοχίας, συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του TMD.



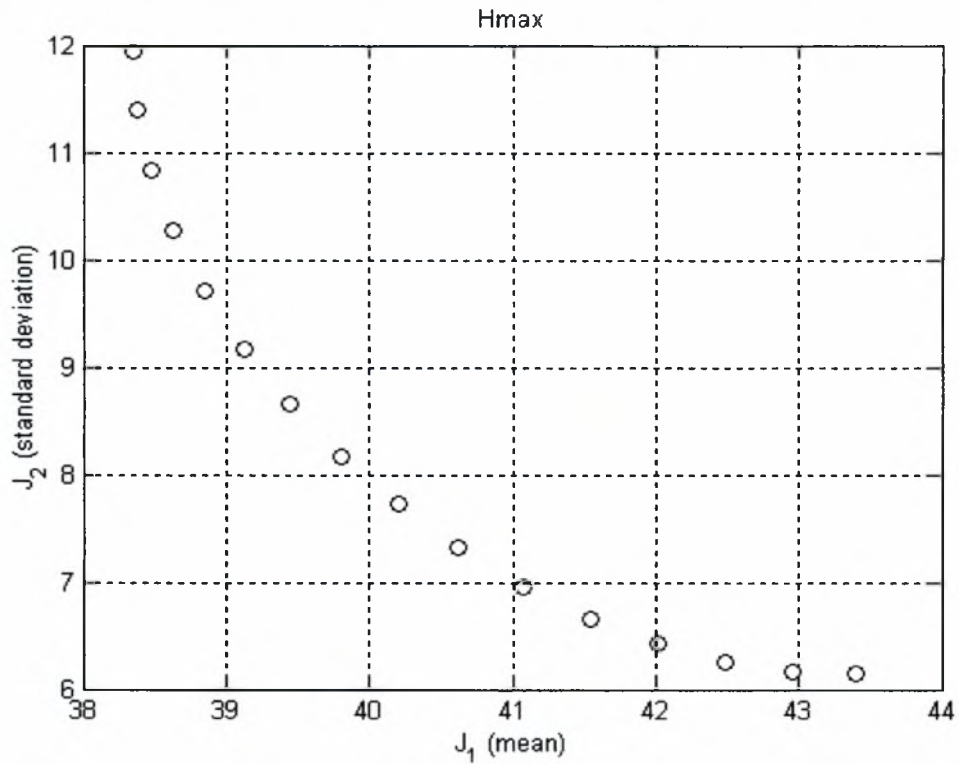
**Σχήμα 5.4** Μέση τιμή και τυπική απόκλιση του μέγιστου της συνάρτησης μεταφοράς, συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$ , του TMD με τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo. Επίδραση του αριθμού  $n$  των δειγμάτων στην ακρίβεια της μεθόδου.



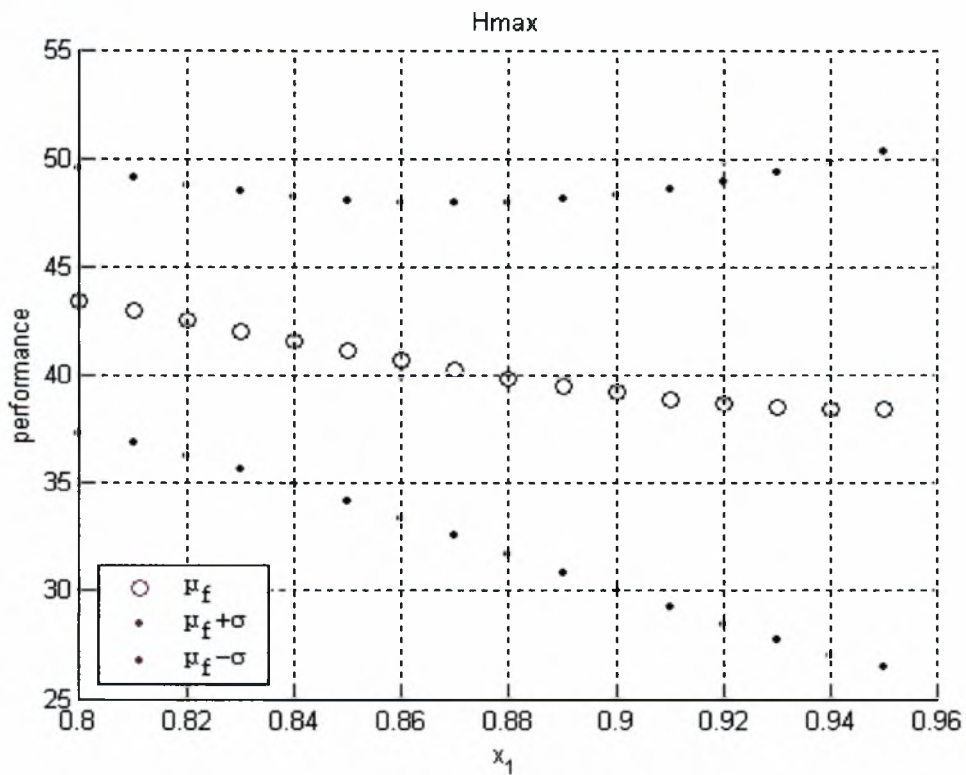
Σχήμα 5.5 Μέση τιμή της πιθανότητας αστοχίας, συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του TMD με τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo



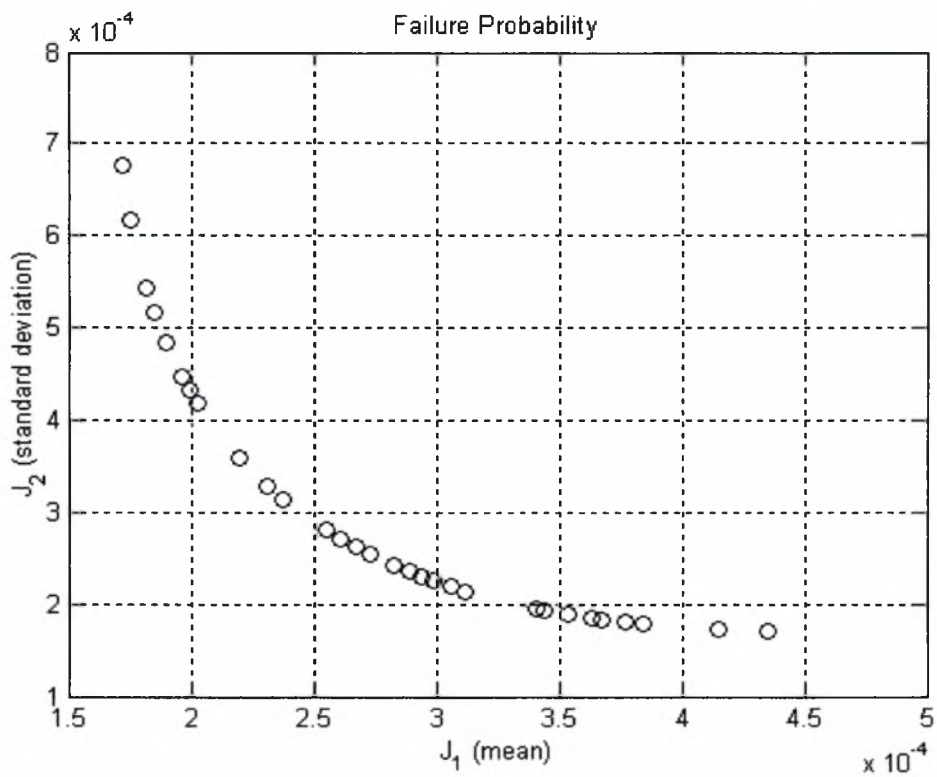
Σχήμα 5.6 Τυπική απόκλιση της πιθανότητας αστοχίας, συναρτήσει της ιδιοσυχνότητας  $\omega_s$  του TMD με τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo



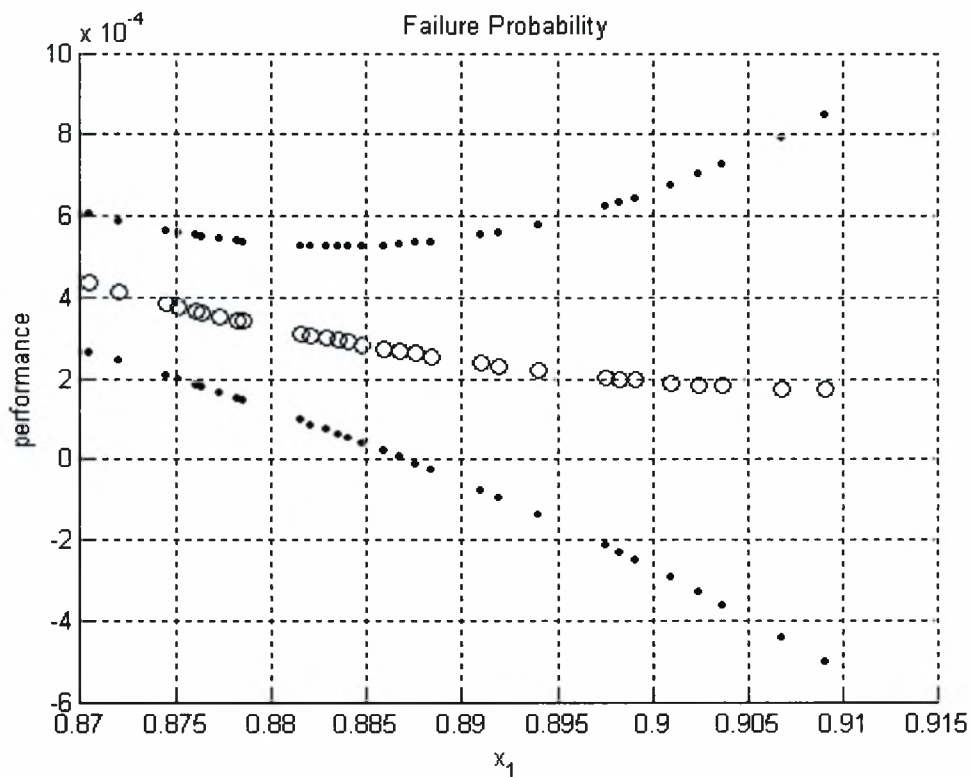
Σχήμα 5.7 Αντικειμενικός χώρος για τη μέση τιμή (mean) και την τυπική απόκλιση (standard deviation) του μεγίστου της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{max}$ .



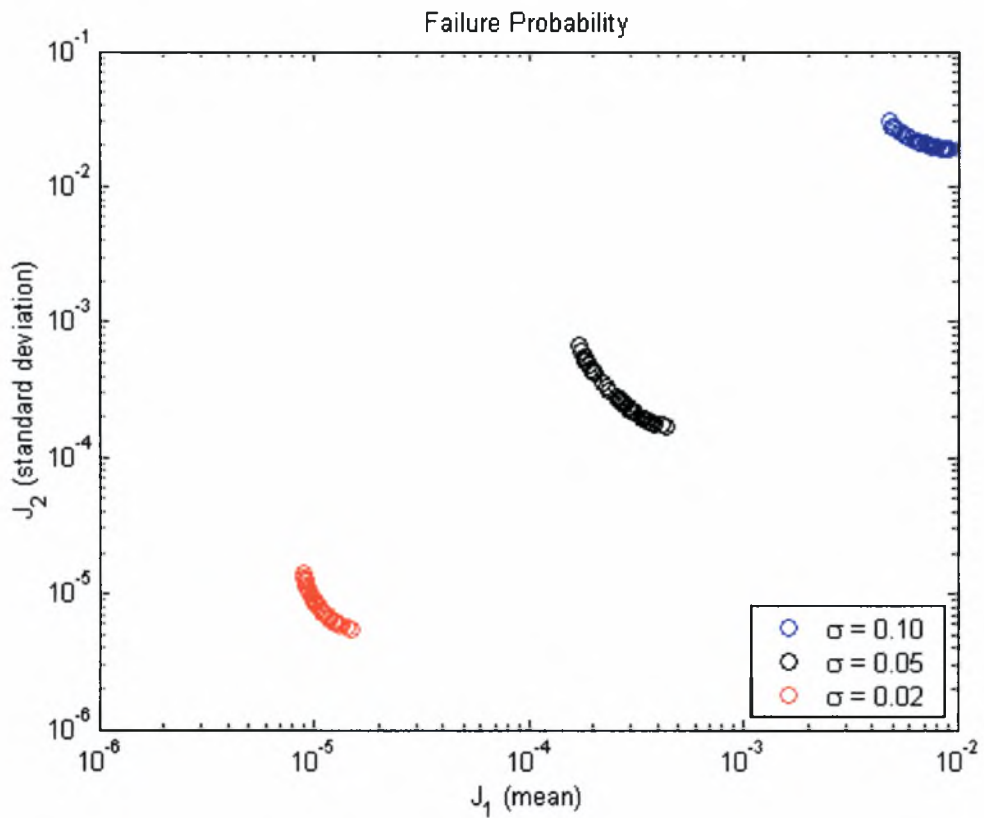
Σχήμα 5.8 Αντικειμενικές τιμές και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων όσον αφορά το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{max}$ .



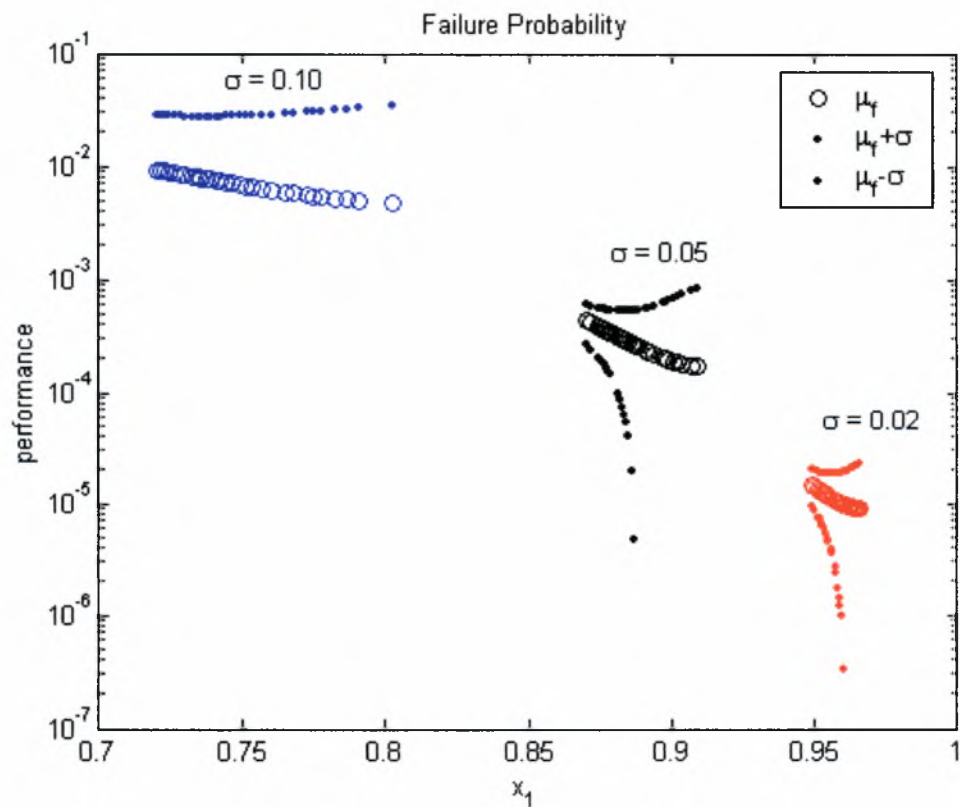
Σχήμα 5.9 Αντικειμενικός χώρος για τη μέση τιμή (mean) και την τυπική απόκλιση (standard deviation) της πιθανότητας αστοχίας.



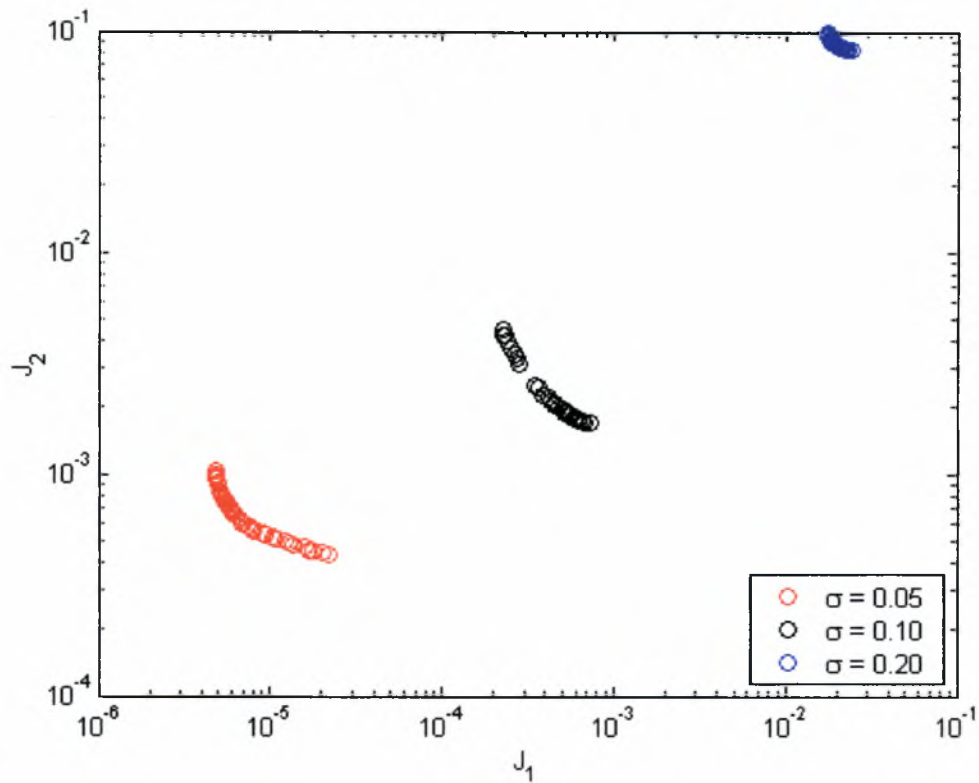
Σχήμα 5.10 Αντικειμενικές τιμές και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων όσον αφορά την πιθανότητα αστοχίας.



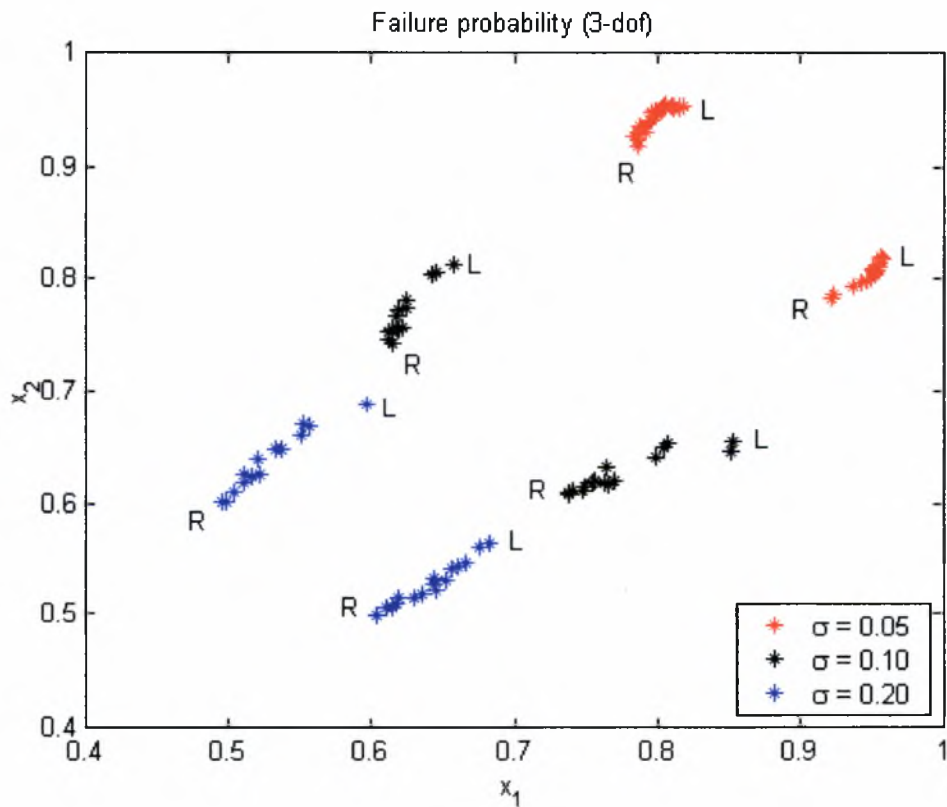
Σχήμα 5.11 Αντικειμενικός χώρος για τη μέση τιμή (mean) και την τυπική απόκλιση (standard deviation) της πιθανότητας αστοχίας ενός TMD σε διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας  $\sigma$ .



Σχήμα 5.12 Αντικειμενικές τιμές και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων όσον αφορά την πιθανότητα αστοχίας ενός TMD σε διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας  $\sigma$ .

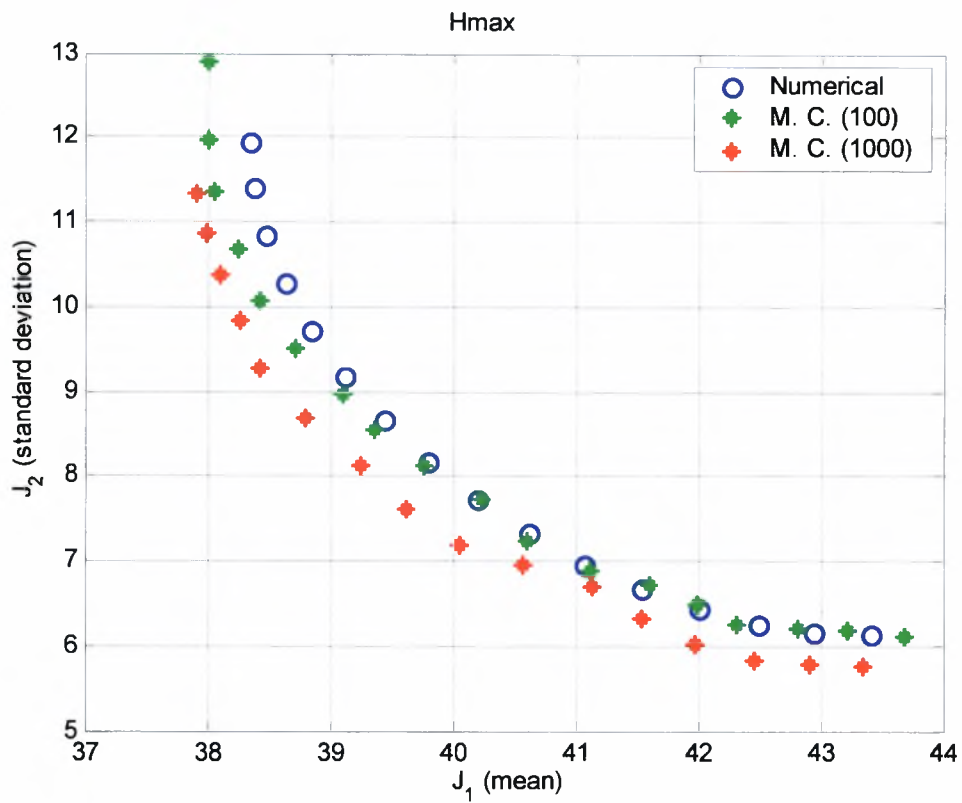


Σχήμα 5.13 Αντικειμενικός χώρος για τη μέση τιμή (mean) και την τυπική απόκλιση (standard deviation) της πιθανότητας αστοχίας δύο TMD σε διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας  $\sigma$ .

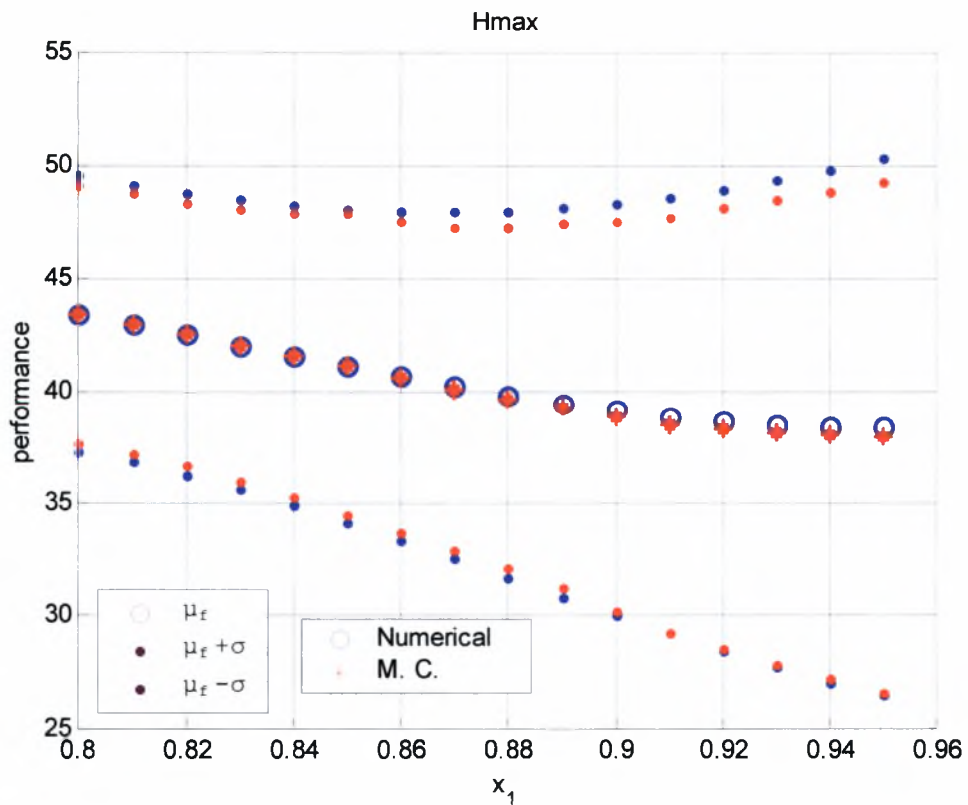


Σχήμα 5.14 Τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού όσον αφορά την πιθανότητα αστοχίας TMD σε διαφορετικά επίπεδα αβεβαιότητας  $\sigma$ .

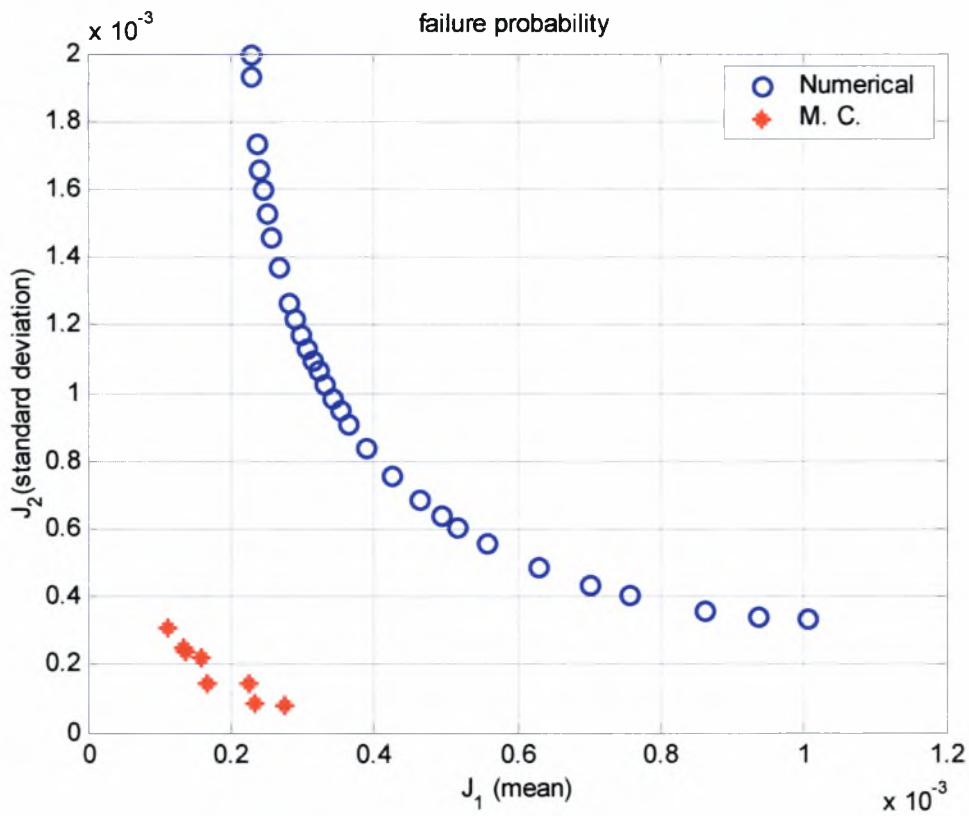




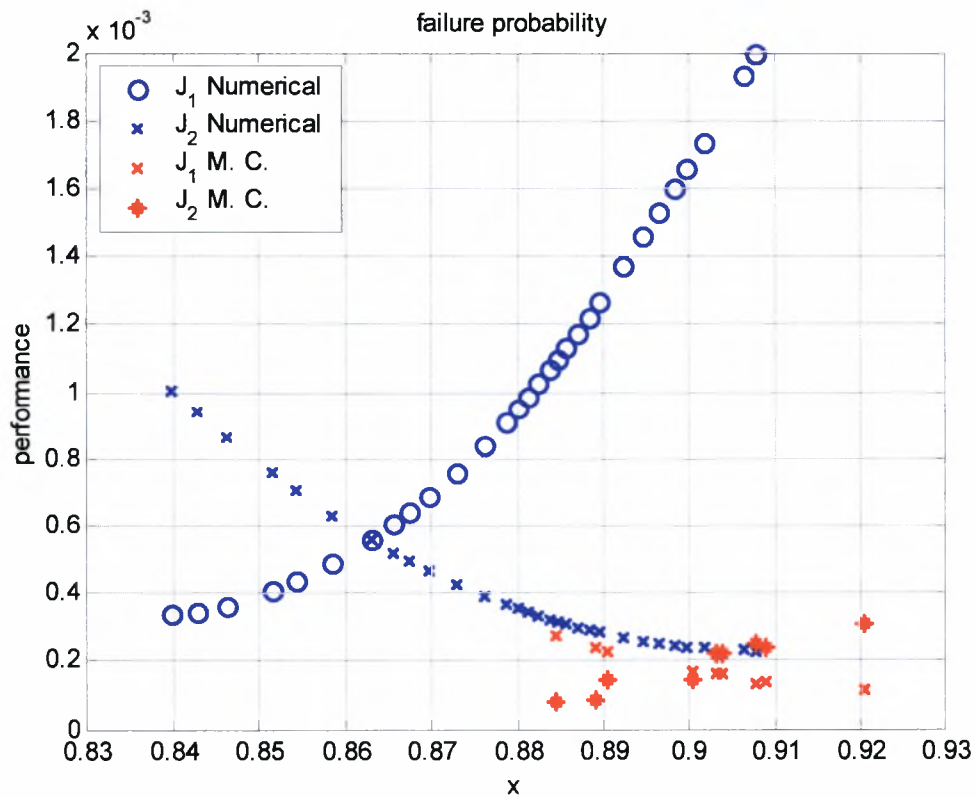
Σχήμα 5.15 Αντικειμενικός χώρος για τη μέση τιμή (mean) και την τοπική απόκλιση (standard deviation) του μεγίστου της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{max}$ .



Σχήμα 5.16 Αντικειμενικές τιμές και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων όσον αφορά το μέγιστο της συνάρτησης μεταφοράς  $H_{max}$ .



Σχήμα 5.17 Αντικειμενικός χώρος για τη μέση τιμή (mean) και την τυπική απόκλιση (standard deviation) της πιθανότητας αστοχίας (n=1000).



Σχήμα 5.18 Αντικειμενικές τιμές και οι αντίστοιχες τιμές των παραμέτρων όσον αφορά την πιθανότητα αστοχίας n=1000.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε ο βέλτιστος σχεδιασμός κατασκευών υπό την επιρροή αβεβαιοτήτων και εφαρμόστηκε στον έλεγχο ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων (πρωτεύων σύστημα) με προσάρτηση απλών ταλαντωτών (δευτερεύον σύστημα).

Μέσα από τη μελέτη του μηχανικού μοντέλου και του ελέγχου του με βάση μηχανικού παθητικού ελέγχου ενός και δύο βαθμών ελευθερίας, προέκυψαν τα ακόλουθα γενικά συμπεράσματα.

- Η επιλογή της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος παίζει καταλυτικό ρόλο στη συμπεριφορά του πρωτεύοντος συστήματος. Επιλέγοντας την ιδιοσυχνότητα του δευτερεύοντος συστήματος κοντά στην ιδιοσυχνότητα του πρωτεύοντος συστήματος, πετυχαίνουμε δραματική μείωση στο πλάτος της απόκρισης καθώς και της πιθανότητας αστοχίας.
- Το μέτρο απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος, προκαλεί μείωση του εύρους των ταλαντώσεων καθώς και της πιθανότητας αστοχίας του πρωτεύοντος συστήματος.
- Όσο αυξάνεται ο λόγος των μαζών, η απόκριση του πρωτεύοντος συστήματος και η πιθανότητα αστοχίας του μειώνεται. Ωστόσο σε αυτή την περίπτωση, η τιμή της ιδιοσυχνότητας του δευτερεύοντος συστήματος για μέγιστη αποτελεσματικότητα στον έλεγχο ταλαντώσεων, αποκλίνει από την τιμή της ιδιοσυχνότητας του πρωτεύοντος συστήματος.
- Όσο αυξάνεται το μέτρο απόσβεσης του πρωτεύοντος συστήματος, η δευτερεύουσα μάζα αδυνατεί να ελαχιστοποιήσει τις αποκρίσεις του κύριου συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται ταυτόχρονα αύξηση του μέτρου απόσβεσης του δευτερεύοντος συστήματος.
- Το εύρος της απόκρισης του πρωτεύοντος συστήματος, καθώς και η πιθανότητα αστοχίας του, στην περιοχή  $\omega_s = \omega_p$  είναι ευαίσθητα της τιμής  $\omega_s$ , του  $\mu$  και του  $\zeta_s$ , οπότε οι αβεβαιότητες στις παράμετρος αυτές  $\omega_p$ ,  $\mu$

και  $\zeta_s$ , επηρεάζουν σημαντικά τις προβλέψεις της απόκρισης και της αξιοπιστίας και θα πρέπει να ληφθούν υπόψη στο σχεδιασμό των συστημάτων ελέγχου TMD.

Όσον αφορά το βέλτιστο σχεδιασμό συστημάτων παθητικού ελέγχου ταλαντώσεων μηχανικών συστημάτων υπό την επιρροή αβεβαιοτήτων προέκυψαν τα ακόλουθα γενικά συμπεράσματα.

- Η προτεινόμενη μεθοδολογία βέλτιστου σχεδιασμού κρίνεται αποτελεσματική για τον προσδιορισμό των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων υπό την επιρροή αβεβαιοτήτων. Συγκεκριμένα ο βέλτιστος σχεδιασμός διατυπώθηκε ως ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης το οποίο συνδυάζει τις παρακάτω μεθόδους και εργαλεία
  - Ανάπτυξη μοντέλων της κατασκευής
  - Στοχαστική μοντελοποίηση των χρονικών ιστοριών της διέγερσης
  - Μοντελοποίηση των αβεβαιοτήτων με κατανομές πυκνότητας πιθανότητας
  - Πιθανολογικά εργαλεία ανάλυσης της απόκρισης των κατασκευών όπως ανάλυση πιθανότητας αστοχίας
  - Ανάλυση κόστους
  - Πολυκριτηριακά εργαλεία βελτιστοποίησης
- Ο αλγόριθμος Strength Pareto Evolutionary Strategy είναι αποτελεσματικός για τη λύση του πολυκριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης.
- Το μέτωπο του Pareto και τα βέλτιστα που προκύπτουν κατά τον εύρωστο σχεδιασμό επηρεάζονται από την ακρίβεια κατά τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που περιγράφουν τα αντικειμενικά κριτήρια.
- Οι αβεβαιότητες στις παράμετρος του μηχανικού συστήματος παίζουν σημαντικό ρόλο στην επιλογή των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού.

## Παράρτημα Α

Αναλυτική έκφραση της Hessian μήτρας στην Ασυμπτωτική Προσέγγιση

$$I \sim I(\theta^*) = (2\pi)^{n/2} h(\theta^*) p(\theta^*) \frac{1}{\sqrt{\det[L(\theta^*)]}}$$

Το  $(i, j)$  στοιχείο  $L_{ij}(\theta)$  της Hessian μήτρας  $L(\theta)$  δίνεται από τη σχέση

$$L_{ij}(\theta) = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

όπου

$$l(\theta) = \ln h(\theta) + \ln p(\theta)$$

Παραγωγίζοντας την  $l(\theta)$  ως προς μια παράμετρο  $\theta_i$  προκύπτει

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{F(\theta)} \cdot \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{p(\theta)} \cdot \frac{\partial p(\theta)}{\partial \theta}$$

και παραγωγίζοντας άλλη μια φορά ως προς  $\theta_j$  προκύπτει

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \frac{1}{F(\theta)} \cdot \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_i} \left( \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{F(\theta)^2} \right) + \frac{1}{p(\theta)} \cdot \frac{\partial p(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - \frac{\partial p(\theta)}{\partial \theta_i} \left( \frac{\partial p(\theta)}{\partial \theta_j} \cdot \frac{1}{p(\theta)^2} \right)$$

## Βιβλιογραφία

1. Au, S.K., and J.L. Beck (2001), "Estimation of Small Failure Probabilities in High Dimensions by Subset Simulation," *Probabilistic Engineering Mechanics*, **16**(4), 263-277.
2. Beyer, H.G. (2001), *The Theory of Evolution Strategies*, Springer-Verlag, Berlin.
3. Bleistein, N., and Handelsman, R. (1986), *Asymptotic Expansions for Integrals*, Dover Publications, Inc., New York, N.Y.
4. Fonseca, C.M., and P.J. Fleming (1995), "An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization," *Evolutionary Computation*, **13**(1), 1-16.
5. Fisherman, G.S. (1996), *Monte Carlo Concepts, Algorithms and Applications*, Springer-Verlag, New York.
6. Lin, Y.K. (1967), *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.
7. Lutes, L.D., and S. Sarkani (1997), *Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, New Jersey.
8. Νατσιάβας Σ. (2001), *Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
9. Νατσιάβας Σ. (1994), *Εφαρμοσμένη Δυναμική*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
10. Papadimitriou, C., J.L. Beck, and L.S. Katafygiotis (1997), "Asymptotic Expansions for Reliability and Moments of Uncertain Dynamic Systems." *Journal of Engineering Mechanics*, **123**(12), 1219-1229.
11. Pradlwarter, H.J., and G.I. Schuëller (1999), "Assessment of Low Probability Events of Dynamical Systems by Controlled Monte Carlo Simulation," *Probabilistic Engineering Mechanics*, **14**, 213-227.
12. Soong, T.T., and Grigoriou, M. (1993). *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
13. Yang, C.M., and Beck, J.L. (1997), "Generalized Trajectory Methods for Finding Multiple Extrema and Roots of Functions." *Rep. No. EERL 97-02*, California Inst. Of Technol., Pasadena, Calif.
14. Zitzler, E., and L. Thiele (1999), "Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, **3**(4), 257-271.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074712

