

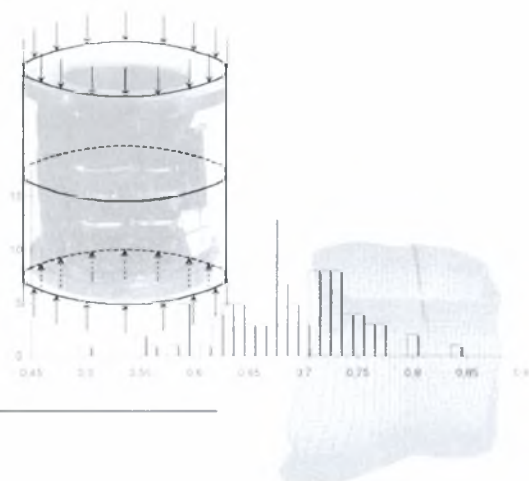
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ**

**Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΑΤΕΛΕΙΩΝ ΤΩΝ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ  
ΣΤΟ ΚΡΙΣΙΜΟ ΦΟΡΤΙΟ ΛΥΓΙΣΜΟΥ ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΩΝ  
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΚΕΛΥΦΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**του**

**Παύλου Ιγγλέση**



**Επιβλέπων: Δρ. Β. Παπαδόπουλος**

**Βόλος, Φεβρουάριος 2005**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3667/1  
Ημερ. Εισ.: 22-06-2005  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΠΜ  
2005  
ΠΓ

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα την εργασία Δρ. κ. Βησσαρίωνα Παπαδόπουλο για την παρότρυνση του να ασχοληθώ με ένα τόσο πρωτότυπο αλλά και απαιτητικό θέμα. Η αρωγή, η συνεχής καθοδήγησή του και η αδιάκοπη συμβουλευτική του υποστήριξη καθόλη τη διάρκεια της έρευνας, αποτέλεσαν αναπόσπαστα και αναντικατάστατα κομμάτια του "μωσαϊκού" που συνθέτει η παρούσα μελέτη .

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές μου στο Βόλο, που καθόλη τη διάρκεια των 5ετών σπουδών μου, στη σχολή Πολιτικών Μηχανικών, μου μετέδωσαν με τον καλύτερο τρόπο της αρχές, τις γνώσεις και την εμπειρία τους πάνω στην απαιτητική και δύσκολη αυτή επιστήμη. Τα 5 χρόνια των σπουδών μου μαζί τους, είναι τα καλύτερα εφόδια και τα πιο γερά θεμέλια για το επαγγελματικό ή και το επιστημονικό μου μέλλον.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα μου και τη μητέρα μου για την 5ετή υποστήριξή τους καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου στο Βόλο και κυρίως διότι σε αυτούς οφείλω τα πάντα.

Παύλος Ιγγλέσης

Βόλος, Φεβρουάριος 2005

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

σελίδα

<b>1. Εισαγωγή</b> .....	1
<b>2. Το πρόβλημα του λυγισμού των κελυφών και των ατελειών τους</b> .....	5
2.1 Το πρόβλημα του λυγισμού των κελυφών .....	5
2.2 Η διαφοροποίηση μεταξύ του θεωρητικού φορτίου λυγισμού και του πειραματικού.....	8
2.3 Αιτίες της διαφοροποίησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μεταξύ θεωρίας και πράξης.....	10
2.3.1 Γεωμετρικές ατέλειες .....	12
2.3.2 Ατέλειες της φόρτισης .....	16
2.3.3 Ατέλειες του υλικού και του πάχους .....	19
2.3.4 Ατέλειες των συνοριακών συνθηκών .....	19
<b>3. Βασικά στοιχεία στοχαστικής ανάλυσης</b> .....	24
3.1 Εισαγωγή .....	24
3.2 Γενικά .....	25
3.3 Στοχαστικές συναρτήσεις - στοχαστικά πεδία.....	26
3.3.1 Ορισμός - Βασικές ιδιότητες .....	26
3.3.2 Ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων.....	27
3.3.3 Διακριτοποιημένος μετασχηματισμός Fourier.....	29
3.3.4 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT).....	31
3.3.5 Απεικόνιση των στοχαστικών πεδίων.....	32
3.3.5.1 Μέθοδος της Φασματικής Απεικόνισης .....	33
3.3.5.2 Προσομοίωση 1D-1V ομογενών πεδίων .....	37
3.3.5.3 Προσομοίωση nD-1V ομογενών πεδίων .....	40

3.3.5.4	Τεχνικές εφαρμογής της Φασματικής Απεικόνισης.....	42
<b>4.</b>	<b>Εφαρμογή της στοχαστικής ανάλυσης στα κυλινδρικά κελύφη</b>	
	<b>με ατέλειες.....</b>	<b>45</b>
4.1	Εισαγωγή .....	45
4.2	Μεθοδολογία .....	47
4.2.1	Μοντελοποίηση των αρχικών γεωμετρικών ατελειών με χρήση της θεωρίας των στοχαστικών πεδίων .....	48
4.2.2	Μοντελοποίηση των υπόλοιπων ατελειών με χρήση της θεωρίας των στοχαστικών πεδίων .....	53
4.2.3	Προσομοίωση Monte Carlo .....	59
4.2.3.1	Γενικά .....	59
4.2.3.2	Γεννήτριες τυχαίων αριθμών.....	60
4.2.3.3	Εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo στην ανάλυση του κυλινδρικού κελύφους με ατέλειες .....	62
<b>5.</b>	<b>Στατική μη-γραμμική ανάλυση με το πεπερασμένο στοιχείο</b>	
	<b>κελύφους TRIC.....</b>	<b>64</b>
5.1	Εισαγωγή .....	64
5.2	Το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC.....	65
5.2.1	Γενικά .....	65
5.2.2	Καταστατικές εξισώσεις.....	67
5.2.3	Ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο στο φυσικό σύστημα.....	68
5.3	Μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc-length method).....	70
<b>6.</b>	<b>Αριθμητικά παραδείγματα και αποτελέσματα προηγούμενων</b>	
	<b>εργασιών.....</b>	<b>74</b>
6.1	Εισαγωγή .....	74
6.2	Παράδειγμα I.....	75

6.2.1	Δεδομένα - Τρόπος εργασίας.....	75
6.2.2	Αποτελέσματα.....	78
6.2.3	Σχολιασμός των αποτελεσμάτων.....	79
6.3	Παράδειγμα ΙΙ.....	80
6.3.1	Δεδομένα - Τρόπος εργασίας.....	80
6.3.2	Αποτελέσματα.....	85
6.3.2.1	Τέλειος κύλινδρος (χωρίς ατέλειες).....	85
6.3.2.2	Συνυπολογισμός μόνο γεωμετρικών ατελειών.....	85
6.3.2.3	Συνυπολογισμός ατελειών υλικού και πάχους κυλίνδρου.....	87
6.3.2.4	Συνυπολογισμός γεωμετρικών ατελειών, ατελειών υλικού και ατελειών στο πάχος του κυλίνδρου.....	90
6.3.3	Σχολιασμός των αποτελεσμάτων.....	91
<b>7.</b>	<b>Συνυπολογισμός και των ατελειών στις συνοριακές συνθήκες .....</b>	<b>93</b>
7.1	Εισαγωγή .....	93
7.2	Δεδομένα .....	94
7.3	Μεθοδολογία .....	94
7.4	Μορφή της κατανομής του φορτίου.....	95
7.5	Ανάλυση μόνο για ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες .....	98
7.6	Συνυπολογισμός αρχικών γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες .....	101
7.7	Συνυπολογισμός όλων των ατελειών .....	106
7.8	Συμπεράσματα.....	108
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....</b>	<b>.....</b>	<b>110</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....</b>	<b>.....</b>	<b>113</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

## Εισαγωγή

Τα κελύφη αποτελούν, τα τελευταία χρόνια, μία από τις πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενες κατασκευές με ποικίλες εφαρμογές. Είναι αλήθεια, ότι ενδέχεται να παρουσιάζουν πολλές φορές, μεγαλύτερες δυσκολίες και πολυπλοκότητα, τόσο στο σχεδιασμό όσο και στην κατασκευή, σε σύγκριση με κάποια άλλη εφαρμογή. Ωστόσο, αν προσπεραστεί αυτός ο σκόπελος, η χρήση κελυφωτών κατασκευών αποτελεί τη μία και μοναδική λύση σε μία πλειάδα εφαρμογών και τα οφέλη που προκύπτουν αφορούν τόσο στην οικονομία και στην πρακτικότητα της κατασκευής που προκύπτει, όσο και στην αισθητική αυτής.

Οι εφαρμογές των κελυφωτών κατασκευών είναι πολλές και δεν αφορούν μόνο την επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού αλλά και τη Μηχανολογία και την (Αερο-) Ναυπηγική. Έτσι, μερικές από τις συνηθέστερες εφαρμογές κελυφών είναι:

- αεροσκάφη, πύραυλοι, μηχανές οχημάτων, υποβρύχια κ.ά.
- containers μεταφοράς υγρών και στερεών (π.χ. τροφίμων, ποτών κ.ά.)
- πάσσαλοι
- στέγες-κελύφη, θόλοι
- αγωγοί μεταφοράς υγρών και αερίων

- silos, καμινάδες, πύργοι και κυλινδρικοί στύλοι κάθε είδους
- ράβδοι δικτυώματος, μεταλλικά υποστυλώματα

Στην πλειοψηφία των εφαρμογών ενός κελύφους αναφερόμαστε σε μεταλλικό κυλινδρικό λεπτότοιχο κέλυφος χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι δεν υφίστανται κελυφωτές κατασκευές με διαφορετικό σχήμα και από διαφορετικό υλικό. Έτσι, συναντάμε ημισφαιρικούς θόλους ή κωνικά silos από οπλισμένο σκυρόδεμα αλλά και κυλινδρικούς αγωγούς από PVC. Παρόλα αυτά, οι περισσότερες έρευνες που έχουν γίνει αφορούν μεταλλικά κελύφη. Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε κατεξοχήν με κυλινδρικά λεπτότοιχα μεταλλικά κελύφη.

Η συμπεριφορά των κυλινδρικών κελυφών αποτελεί ένα πολύπλοκο και δύσκολο στην κατανόηση του φαινόμενο, το οποίο απασχόλησε πολλούς ερευνητές τον περασμένο αιώνα. Η αντοχή τους στο λυγισμό, η κατανομή των τάσεων, οι παραμορφώσεις τους και οι ατέλειες που εμφανίζουν είναι μερικά μόνο από τα θέματα σε σχέση με τα κυλινδρικά κελύφη, που απασχόλησαν την ερευνητική κοινότητα. Η παρούσα εργασία ασχολείται με τον προσδιορισμό του φορτίου λυγισμού ενός κυλινδρικού κελύφους λαμβάνοντας υπόψιν τις ατέλειες κάθε είδους που αυτό εμφανίζει.

Το συγκεκριμένο ζήτημα αποτελούσε ανέκαθεν ένα από τα πλέον δισεπίλυτα και δυσνόητα προβλήματα σε ότι αφορούσε τα κυλινδρικά κελύφη. Είναι ίσως από τις λίγες φορές στην επιστήμη του μηχανικού που παρουσιάζονταν τόσο μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ θεωρίας και πράξης. Το πρόβλημα εστιαζόταν στο γεγονός ότι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ενός λεπτότοιχου κυλινδρικού κελύφους υπό αξονική θλίψη, που προέκυπτε, σύμφωνα με την κλασική και κοινώς αποδεκτή θεωρία λυγισμού, ήταν κατά πολύ μεγαλύτερο από εκείνο που προέκυπτε στα αντίστοιχα πειράματα. Ο προβληματισμός γύρω από το φαινόμενο ήταν έντονος μέχρι που τη δεκαετία του 1930 καταδείχθηκε ο σημαντικότερος λόγος αυτής της διαφοροποίησης που δεν ήταν άλλος από την παρουσία ατελειών κάθε είδους στην κελυφωτή κατασκευή.

Αποτέλεσμα αυτής της μεγάλης διαφοροποίησης ήταν ότι μέχρι και σήμερα οι κυλινδρικές λεπτότοιχες κατασκευές υπολογίζονται και διαστασιολογούνται ιδιαίτερος συντηρητικά. Ο Ευρωκώδικας μέσα από την οδηγία ECCS 18 ακολουθεί μία ιδιαίτερος συντηρητική αντιμετώπιση του ζητήματος με τη χρήση μεγάλων συντελεστών ασφαλείας και του συντελεστή που είναι γνωστός ως "knockdown factor". Ωστόσο, αυτή η αντιμετώπιση είναι άκρως δικαιολογημένη, από τη στιγμή που δεν υπάρχει ακόμα και



σήμερα ακριβής τρόπος υπολογισμού της τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού των εν λόγω κελυφών.

Οι προσπάθειες υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μέσα από αναλυτικές λύσεις που συνυπολόγιζαν και τις ( αρχικές γεωμετρικές κυρίως ) ατέλειες απεδείχθησαν άκαρπες και δύσκολα εφαρμόσιμες σε πιο πρακτική βάση. Για αυτόν το λόγο, τα τελευταία χρόνια και ταυτόχρονα με την ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών άρχισαν να γίνονται βήματα για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος με χρήση της ευρέως αποδεκτής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Εκτός όμως από αυτό, στο πολύ πρόσφατο παρελθόν έγιναν προσπάθειες αντιμετώπισης του προβλήματος πέραν από τα στενά όρια των "ντετερμινιστικών" - αιτιοκρατικών μεθόδων που χρησιμοποιούνταν παλαιότερα. Έγινε δηλαδή, προσπάθεια να διατυπωθούν με στοχαστικό τρόπο οι κάθε είδους ατέλειες που η κατασκευή παρουσιάζει. Μέσα σε αυτές τις προσπάθειες εντάσσεται και η παρούσα εργασία η οποία προτείνει για πρώτη φορά μεθοδολογία αντιμετώπισης - προσομοίωσης των ατελειών που υπάρχουν στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Με τη χρήση ανεπτυγμένων στοχαστικών διαδικασιών που είναι εδραιωμένες και ευρέως αποδεκτές εδώ και πολλά χρόνια, γίνεται προσπάθεια ανάλυσης των ατελειών που εμφανίζονται στις συνοριακές συνθήκες. Ακολουθεί μία ελαστική μη-γραμμική ανάλυση με το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC και τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα πειραματικά.

Έτσι, σε κάθε κεφάλαιο προσεγγίζουμε διαδοχικά την ολοκλήρωση της μεθοδολογίας μας.

Στο Κεφ. 2 γίνεται μία παρουσίαση του προβλήματος του λυγισμού στην ευρεία του έννοια, καθώς και της λύσης που προτείνεται από την κλασσική θεωρία. Επιπλέον, γίνεται η διαπίστωση της μεγάλης διαφοροποίησης των φορτίων λυγισμού μεταξύ θεωρίας και πειραμάτων και ταυτόχρονα αναλύονται διεξοδικά όλες οι αιτίες αυτού του φαινομένου και η επίδραση κάθε μίας σε αυτό.

Στο Κεφ. 3 γίνεται μία παρουσίαση των σημαντικότερων στοιχείων της στοχαστικής ανάλυσης που χρησιμοποιούνται στη μεθοδολογία που προτείνεται και χρησιμοποιείται στη συνέχεια.

Στο Κεφ. 4 γίνεται αναλυτική παρουσίαση της προτεινόμενης μεθοδολογίας μέσα από την εφαρμογή των στοχαστικών διαδικασιών και δίνεται το διάγραμμα ροής του αλγόριθμου που χρησιμοποιήθηκε.

Στο Κεφ. 5 παρουσιάζεται με συντομία το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC καθώς και το πώς έγινε η ελαστική μη-γραμμική ανάλυση που ακολούθησε.

Στο Κεφ. 6 γίνεται μία αναλυτική παρουσίαση των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων όπως αυτά προκύπτουν μέσα από εργασίες που έγιναν στο παρελθόν και χρησιμοποιούν την ίδια ή παρόμοια μεθοδολογία με αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία.

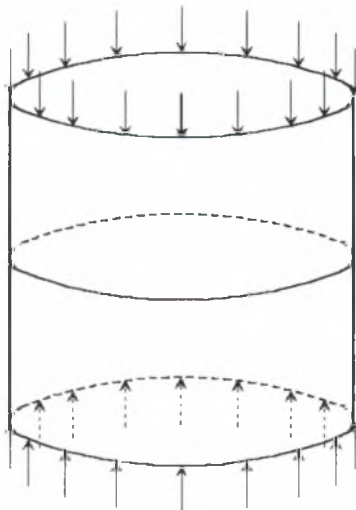
Τέλος, στο Κεφ. 7 παρουσιάζονται αναλυτικά όλα τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα της έρευνας πάνω στην επίδραση που έχουν οι ατέλειες των συντομικών συνθηκών, στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ενός λεπτότοιχου κυλινδρικού κελύφους υπό αξονική θλίψη.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

### Το πρόβλημα του λυγισμού των κελυφών και των ατελειών τους

#### 2.1 Το πρόβλημα του λυγισμού των κελυφών

Ο λυγισμός των κελυφών αποτελεί ίσως ένα από τα πιο περίπλοκα φαινόμενα ευστάθειας. Ας εξετάσουμε όμως αναλυτικά την περίπτωση του λυγισμού ενός λεπτότοιχου κυλίνδρου υπό αξονική θλιπτική φόρτιση όπως αυτός της εικ. 2.1.



**Εικόνα 2.1 :** Λεπτότοιχος κύλινδρος υπό αξονική θλίψη

Αν υποβληθεί σε αξονική φόρτιση  $P$  όπως δείχνει το σχήμα, θα λυγίσει κάποια στιγμή με την εμφάνιση μικρών "κυμάτων" στον κορμό του όπως φαίνεται από τις φωτογραφίες του πειράματος (Donnell 1950) (εικ. 2.2) .



**Εικόνα 2.2 :** Πείραμα λυγισμού κυλίνδρου

Ο απλούστερος τρόπος υπολογισμού της κρίσιμης ελαστικής τάσης λυγισμού γίνεται σύμφωνα με τον ακόλουθο τύπο ( κατά Lorenz and Timoshenko 1908 & 1936 ) :

$$\sigma_u = \frac{Et^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (2.1)$$

όπου :

$E$  = το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του κυλίνδρου

$R$  = η ακτίνα του κυλίνδρου

$t$  = το πάχος του τοιχώματος του κυλίνδρου

$\nu$  = ο λόγος Poisson

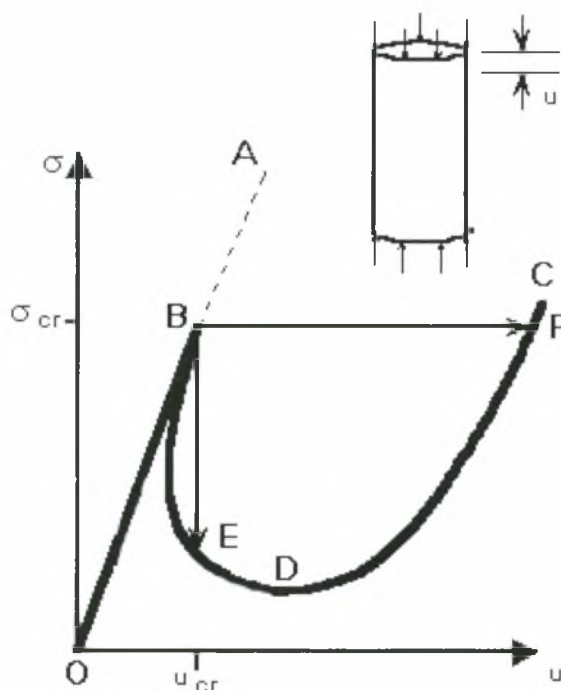
Ο παραπάνω τύπος είναι πιο γνωστός ως :

$$\sigma_u = 0.605 \frac{Et^2}{R} \quad (2.2)$$

εφόσον μιλάμε για χαλύβδινα κελύφη όπου  $\nu=0.3$  .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η καμπύλη τάσεων - παραμορφώσεων ενός κυλινδρικού κελύφους υπό αξονική θλίψη, η οποία φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχ. 2.1 . Χαρακτηριστικό της συγκεκριμένης καμπύλης αποτελεί το γεγονός ότι παρατηρείται μία

δραματική και απότομη μείωση στη φέρουσα ικανότητα ανάληψης φορτίου του κυλίνδρου, αμέσως μόλις φτάσουμε την τιμή της κρίσιμης τάσης λυγισμού.



**Σχήμα 2.1:** Καμπύλη τάσεων - παραμορφώσεων κυλινδρικού κελύφους

Μόλις η επιβαλλόμενη τιμή του φορτίου φτάσει την κρίσιμη τιμή ( σημείο B ) τότε η καμπύλη περνάει απότομα στο σημείο F ακολουθώντας τη διαδρομή που φαίνεται στο σχήμα. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται "snap through" και είναι χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς αυτών των κελυφών.

Η παραπάνω, "κλασική" ανάλυση του φαινομένου μας δίνει ομολογουμένως μία αρκετά ικανοποιητική περιγραφή της συμπεριφοράς ενός ιδανικού κυλίνδρου χωρίς καμία ατέλεια. Ωστόσο, η πραγματικότητα απέχει αρκετά από αυτήν την εξιδανικευμένη εικόνα του κυλίνδρου, καθότι υπεισέρχονται στο πρόβλημα πολλές ατέλειες, που έχουν να κάνουν τόσο με την κατακορυφότητα του φορτίου, τις ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες στήριξης αλλά κυρίως και πάνω απ' όλα με τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που αυτός παρουσιάζει. Επιπλέον, το φαινόμενο στην πράξη είναι έντονα μη-γραμμικό.

## 2.2 Η διαφοροποίηση μεταξύ του θεωρητικού φορτίου λυγισμού και του πειραματικού

Τη δεκαετία του 1930 οι εξελίξεις στην αεροναυπηγική έκαναν επιτακτική την ανάγκη να μελετηθεί και να κατανοηθεί εις βάθος το φαινόμενο του λυγισμού λεπτότοιχων κατασκευών. Τα συνεχή πειράματα που έγιναν (στην εικ. 2.3 φαίνεται κύλινδρος με τοποθετημένους αισθητήρες για τη μέτρηση παραμορφώσεων), κατέδειξαν όμως το γεγονός της μεγάλης διαφοράς μεταξύ του φορτίου λυγισμού που υπολογιζόταν από την κλασσική θεωρία και αυτού που προέκυπτε από τα πειράματα.

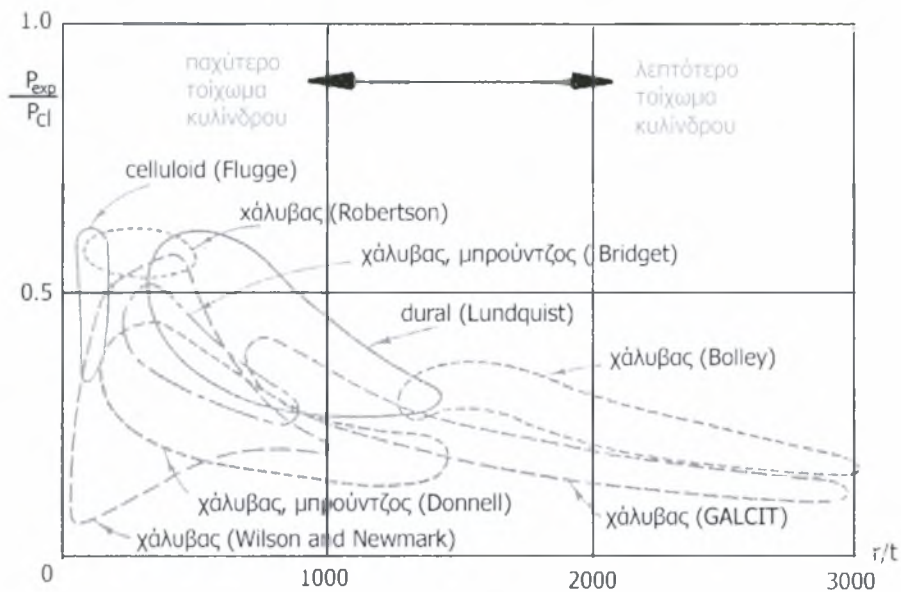


**Εικόνα 2.3:** Κύλινδρος με αισθητήρες για τη μέτρηση παραμορφώσεων

Είναι αλήθεια ότι μέχρι τότε η κλασσική θεωρία λυγισμού λειτουργούσε άριστα σε περιπτώσεις στύλων και επίπεδων πλακών. Στις πλάκες μάλιστα, το φορτίο λυγισμού που προέκυπτε από τη θεωρία ήταν αρκετά συντηρητικό σε σχέση με εκείνο των πειραμάτων, εξαιτίας της θεωρίας της μεταλυγισμικής συμπεριφοράς. Παρόλ' αυτά, στην περίπτωση ενός αξονικά φορτισμένου, λεπτότοιχου, κυλινδρικού κελύφους η κατάσταση διαφοροποιείται αρκετά.

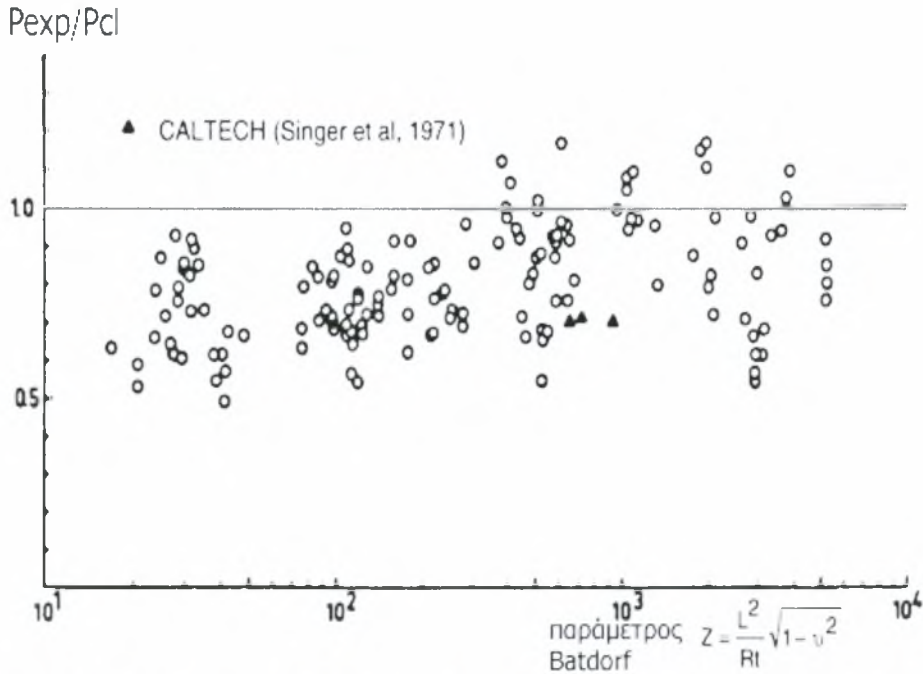
Οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο ζήτημα ήταν πολλοί και το μεγάλο πρόβλημα που ενέκυπτε σε κάθε περίπτωση ήταν η μεγάλη απόκλιση του φορτίου λυγισμού που υπολογιζόταν με βάση την θεωρία, σε σχέση με εκείνο που

προέκυπτε στα πειράματα. Κάτι τέτοιο εξάλλου, φαίνεται παραστατικότερα και στο σχ. 2.2 όπου βλέπουμε ότι οι τιμές του λόγου  $P_{EXP}/P_{cl}$  (όπου  $P_{EXP}$ : η τιμή του φορτίου λυγισμού που προκύπτει στα πειράματα και  $P_{cl}$ : η τιμή του φορτίου λυγισμού που προκύπτει από την κλασική θεωρία) παραμένουν μικρότερες της μονάδος για διάφορα υλικά και για διάφορες γεωμετρίες κυλίνδρων που χρησιμοποιήθηκαν από τους εκάστοτε ερευνητές.



**Σχήμα 2.2:** Τιμές του λόγου  $P_{EXP}/P_{cl}$  σε σύγκριση με διάφορα υλικά και διάφορες γεωμετρίες κυλίνδρων

Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν και από πειράματα που έγιναν αργότερα και φαίνονται παραστατικά στο παρακάτω διάγραμμα (σχ. 2.3) όπου ο λόγος  $P_{EXP}/P_{cl}$  συναρτάται με τη γεωμετρική παράμετρο  $Batdorf$ .



Σχήμα 2.3: Τιμές του λόγου  $P_{exp}/P_{cl}$  σε σύγκριση με τη γεωμετρική παράμετρο Batdorf

## 2.3 Αιτίες της διαφοροποίησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μεταξύ θεωρίας και πράξης

Γίνεται φανερό λοιπόν, ότι τα πειραματικά αποτελέσματα διαφέρουν κατά πολύ από τις προβλέψεις της θεωρίας. Οι λόγοι στους οποίους οφείλεται η διαφοροποίηση αυτή είναι οι εξής:

- 1. Η επίδραση των αρχικών γεωμετρικών ατελειών** που υπάρχουν στην επιφάνεια του κελύφους και οφείλονται στην παραγωγική διαδικασία που ακολουθείται κατά την κατασκευή αυτού.
- 2. Η επίδραση των ατελειών του υλικού** που ισοδυναμεί με μεταβλητό μέτρο ελαστικότητας.
- 3. Η επίδραση των ατελειών στις συνοριακές συνθήκες.**

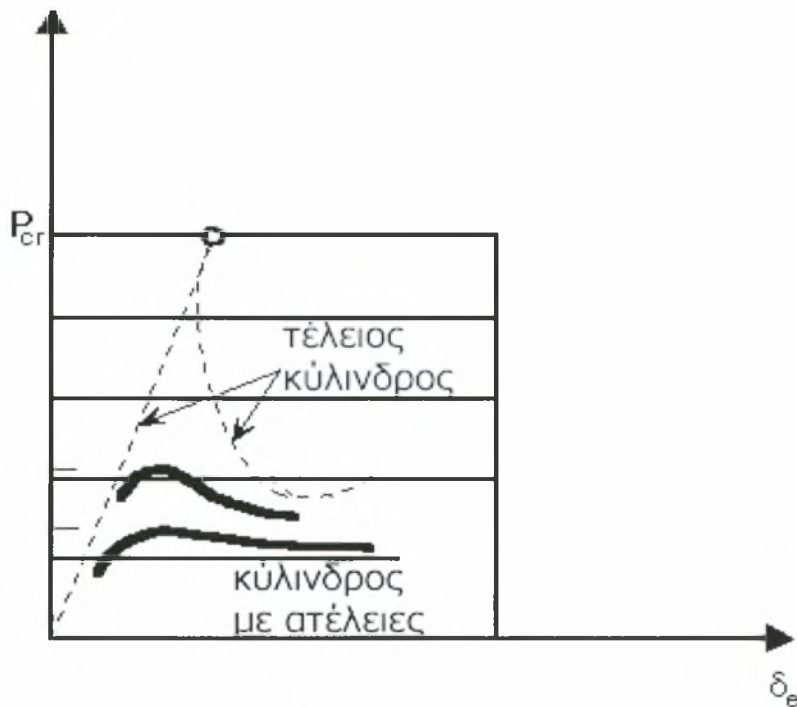


**4. Η επίδραση των ατελειών της φόρτισης.****5. Η επίδραση των ατελειών στο πάχος του κυλίνδρου.**

**6. Η επίδραση των προ-λυγισμικών παραμορφώσεων** που οφείλεται στη θεώρηση του κελύφους ως μεμβράνη.

**7. Η μη γραμμική συμπεριφορά**

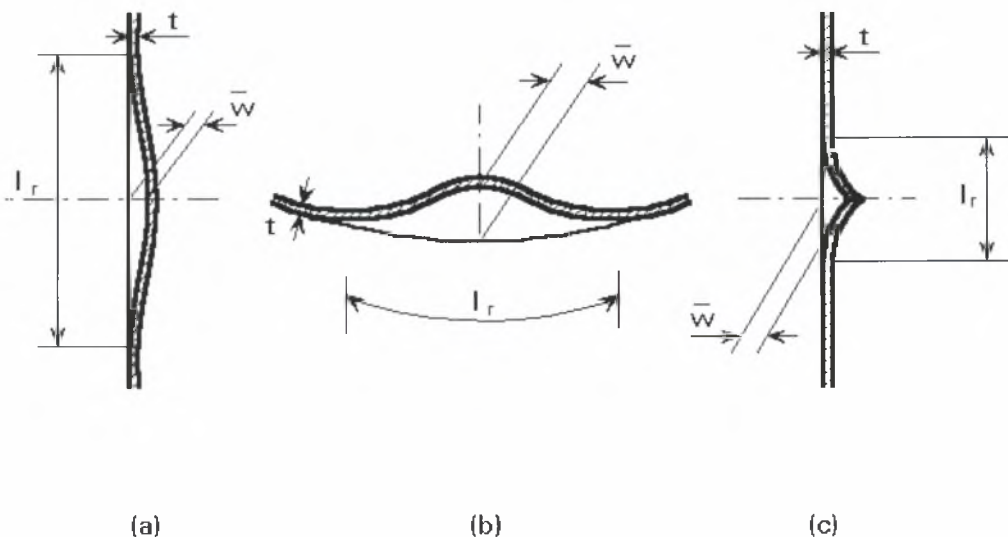
Χαρακτηριστική είναι και η καμπύλη φορτίου - παραμορφώσεων που προέκυπτε στα πειράματα σε σύγκριση με την προβλεπόμενη από τη θεωρία όπως αυτή φαίνεται στο σχ. 2.4.



**Σχήμα 2.4:** Καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων τέλειου κυλίνδρου και κυλίνδρων με ατέλειες

### 2.3.1 Γεωμετρικές ατέλειες

Με τον όρο *αρχικές γεωμετρικές ατέλειες* εννοούμε οποιαδήποτε απόκλιση από το ιδεατό σχήμα του κυλίνδρου ή του κελύφους γενικότερα. Περιπτώσεις τέτοιων ατελειών είναι π.χ. ένα τοπικό εξόγκωμα σε ένα λεπτό κυλινδρικό κέλυφος ( σχ. 2.5 ), μία αρχική καμπυλότητα κ.ά. τα οποία οδηγούν σε εντελώς διαφορετικές γεωμετρίες κελυφών. Έτσι για παράδειγμα, το κυλινδρικό κέλυφος παύει να είναι συμμετρικό και σε πιο ακραίες περιπτώσεις μπορούμε να πούμε ότι ξεφεύγει και από τη γεωμετρία του κυλίνδρου.

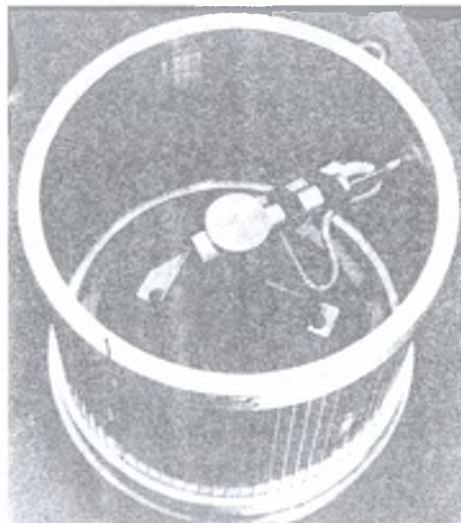


**Σχήμα 2.5:** Παραδείγματα ατελειών στην επιφάνεια του κυλίνδρου

Η μεγάλη διαφοροποίηση μεταξύ των κλασικών θεωρητικών προβλέψεων για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και των πειραματικών αποτελεσμάτων απασχόλησε πολλούς από τους μεγαλύτερους ερευνητές του αιώνα. Έπειτα από την εκτεταμένη έρευνα των Koiter (1945, 1963, 1967) αλλά και της ομάδας του Harvard, υπό τους Hutchinson και Budiansky (1964, 1965, 1967) έγινε κοινά αποδεκτό ότι η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται κατά το μεγαλύτερο ποσοστό, στις ομολογουμένως μικρές *αρχικές γεωμετρικές ατέλειες* του κελύφους. Μάλιστα, οι εργασίες του Koiter έδειξαν ότι μία ατέλεια της τάξεως του 50% του πάχους του κελύφους είναι δυνατόν να μειώσει το φορτίο λυγισμού έως και στο 30% του κλασικού φορτίου λυγισμού που προκύπτει από τη θεωρία.

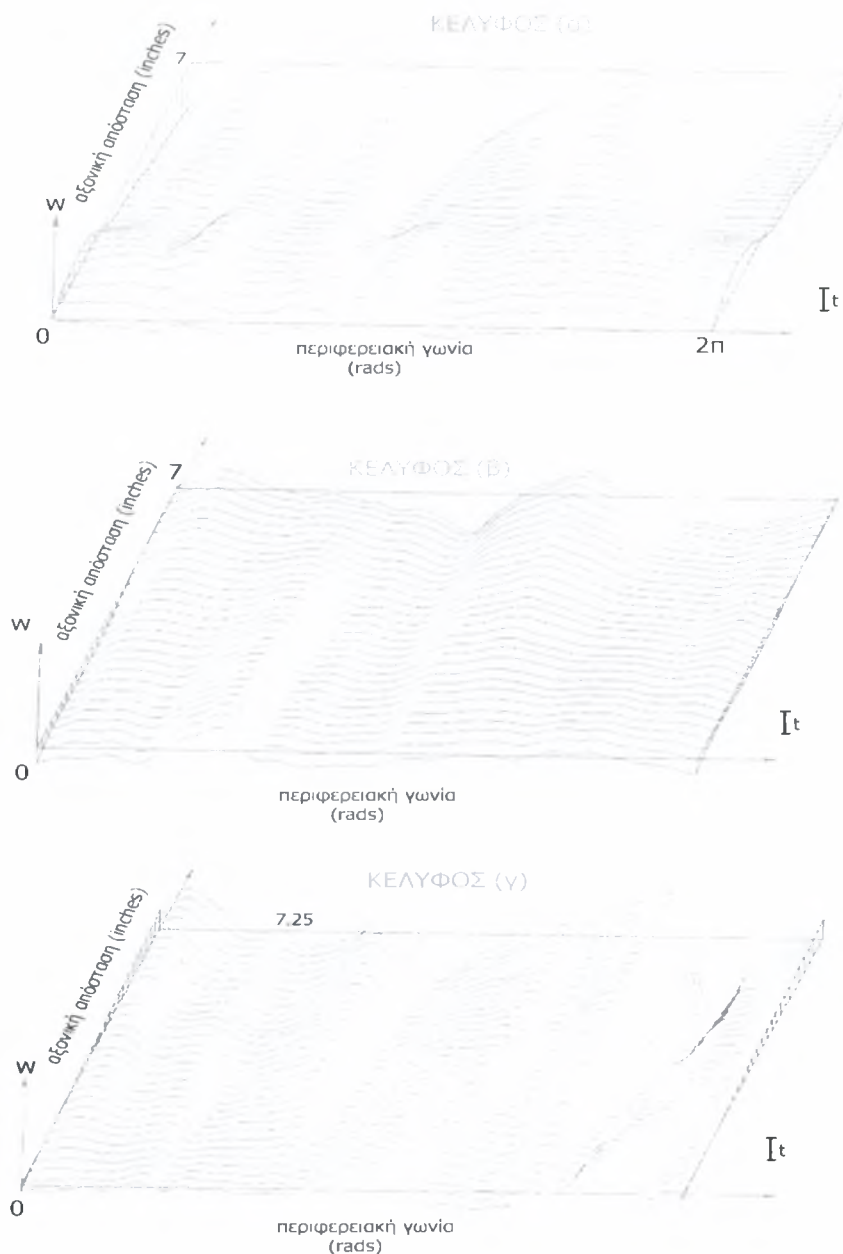
Οι εν λόγω γεωμετρικές ατέλειες δεν είναι ορατές με το μάτι. Οφείλονται κατά κύριο λόγο στην παραγωγική διαδικασία που ακολουθείται για την κατασκευή του εκάστοτε κυλινδρου-κελύφους. Η μέτρηση, η ποσοτικοποίηση, η αναγνώριση και η καταγραφή, εν τέλει, των ατελειών αυτών δεν είναι απλή διαδικασία και απαιτεί εξειδικευμένο εξοπλισμό. Οι πρώτες προσπάθειες μέτρησης των ατελειών ενός κυλινδρικού ή σφαιρικού κελύφους εντοπίζονται τη δεκαετία του 1950 και αφορούσαν κυρίως στην ποσοτική καταγραφή των ατελειών και σε μία συνολική αποτίμηση της απόκλισης του δείγματος από την τέλεια γεωμετρία. Δεν έδιναν καμία πληροφορία για το πλήρες σχήμα και τη μορφή των ατελειών, στοιχεία που όπως αποδείχθηκε αποτελούν τους σημαντικότερους παράγοντες της επίδρασης των ατελειών στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Οι επόμενες συστηματικές προσπάθειες μέτρησης των γεωμετρικών ατελειών ενός κελύφους έγιναν στα τέλη της δεκαετίας του 1960 και συγκεκριμένα το 1968 (GALCIT και Stanford University) όπου χρησιμοποιήθηκαν πιο εξελιγμένοι σαρωτές επιφάνειας (scanners) που κατέγραφαν - αρχικά - αναλογικά την επιφάνεια του κελύφους και αργότερα με ψηφιακές μεθόδους (εικ. 2.4 ). Οι μετρήσεις που έγιναν τότε αφορούσαν κατά κύριο λόγο κυλινδρικά κελύφη από χαλκό με πάχος περίπου 0.1 mm. Το ενδιαφέρον είναι ότι μετρήθηκαν οι ατέλειες τόσο στο αφόρτιστο δοκίμιο όσο και κατά τη φόρτιση του. Έτσι, κατέστη δυνατόν να παρατηρηθούν και να καταγραφούν οι αλλαγές και η εξέλιξη των ατελειών κατά την αξονική φόρτιση του κελύφους.



**Εικόνα 2.4:** Μέτρηση γεωμετρικών ατελειών με ειδικό σαρωτή

Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων που έγιναν και τα οποία δείχνουν ότι και στους 3 τύπους κελυφών (που παράχθηκαν με 3 διαφορετικές διαδικασίες) που εξετάστηκαν, οι ατέλειες ξεπερνούσαν σε μέγεθος το πάχος των δοκιμίων.



**Σχήμα 2.6:** Μετρημένες αρχικές γεωμετρικές ατέλειες στην επιφάνεια τριών διαφορετικών κυλίνδρων

Θα περίμενε κανείς ωστόσο, κελύφη που προέρχονται από το ίδιο εργοστάσιο και τα οποία είναι κατασκευασμένα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο να έχουν παρόμοιου τύπου - αν όχι ίδιες - αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Παρόλ' αυτά όμως, μετρήσεις που έγιναν σε πολλά κυλινδρικά δοκίμια κατέδειξαν το γεγονός ότι ακόμη και κελύφη κατασκευασμένα με πανομοιότυπο τρόπο ενδέχεται να είχαν διαφορετικές ατέλειες.

Κάτι τέτοιο όμως δεν ήταν ο κανόνας παρά οι εξαιρέσεις. Έτσι, ο J. Arbocz από το Delft University έπειτα από πειράματα και μετρήσεις πολλών ετών ξεκίνησε τη δημιουργία της Διεθνούς Τράπεζας Δεδομένων Ατελειών (International Imperfection Data Bank - IIDB). Η IIDB περιλαμβάνει αποτελέσματα μετρήσεων αρχικών γεωμετρικών ατελειών που έγιναν από διάφορους ερευνητές παγκοσμίως ( Caltech, TU-Delft, Technion Haifa, University of Glasgow κ.ά ).

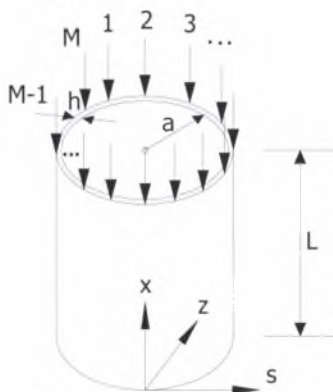
Το σημαντικό είναι καταρχήν, ότι οι μετρημένες κατανομές ατελειών αναλύθηκαν και προσομοιάστηκαν με σειρές Fourier ώστε να γίνει πιο αντιληπτή η μορφή τους και να "αποβάλλουν" την τυχαία δομή και μορφή που τους αποδιδόταν μέχρι τότε. Το δεύτερο σημαντικό κέρδος από τη δημιουργία της IIDB είναι ότι αποδόθηκε σε κάθε μία χρησιμοποιούμενη βιομηχανική μέθοδο παραγωγής κελυφών μία συγκεκριμένη "ταυτότητα ατελειών". Αυτό σημαίνει, ότι γνωρίζοντας την παραγωγική διαδικασία και την μέθοδο με την οποία κατασκευάστηκε π.χ. ένας λεπτότοιχος κύλινδρος, είμαστε πλέον σε θέση να γνωρίζουμε - με τη βοήθεια και τη χρήση της IIDB - με μεγάλη ακρίβεια τις πιθανές γεωμετρικές ατέλειες που αυτός θα έχει.

## 2.3.2 Ατέλειες της φόρτισης

### **Ατέλειες στο είδος του φορτίου**

Οι εκτεταμένες έρευνες των τελευταίων ετών, πάνω στο ζήτημα της διαφοροποίησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού λεπτότοιχων κελυφών, μεταξύ πειραμάτων και κλασσικής θεωρίας, κατέδειξαν τις ατέλειες στη φόρτιση ως ένα επιπλέον αίτιο του φαινομένου αυτού. Πιο συγκεκριμένα μελετήθηκε το πρόβλημα ως εξής:

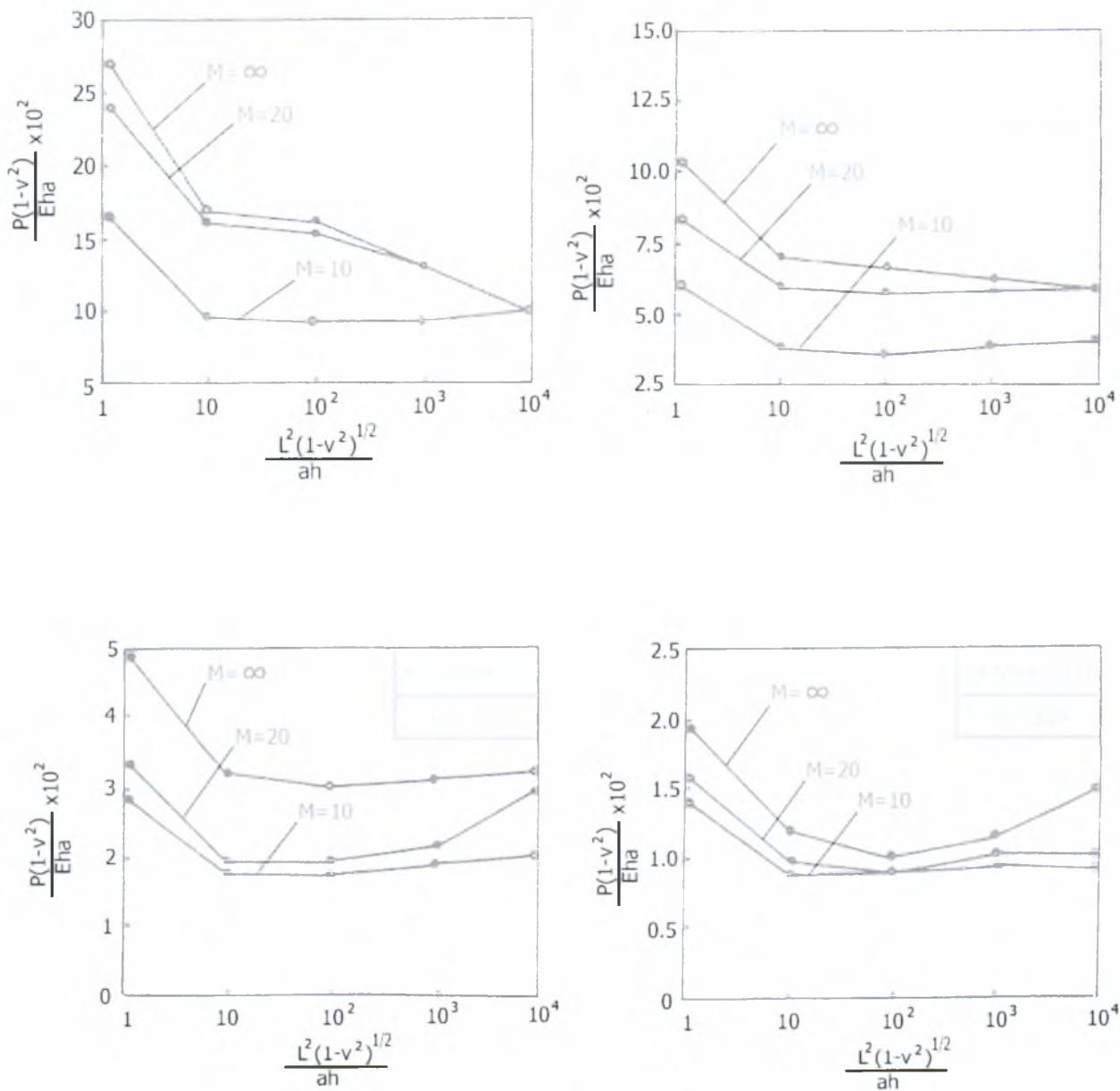
Έστω ότι έχουμε τον παρακάτω λεπτότοιχο ( σχ. 2.7 ), απλά εδραζόμενο κύλινδρο μήκους  $L$ , με πάχος τοιχώματος  $h$  και μέση ακτίνα  $a$  (χρησιμοποιούμε τον όρο μέση ακτίνα λόγω των αρχικών γεωμετρικών ατελειών στην επιφάνεια του κυλίνδρου).



**Σχήμα 2.7:** Κύλινδρος που φορτίζεται με  $M$  συγκεντρωμένα φορτία

Θεωρούμε αρχικά, ότι ο κύλινδρος δεν φορτίζεται από ένα ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο, αλλά από  $M$  συγκεντρωμένα φορτία, που είναι όμως ομοιόμορφα κατανεμημένα στην περιφέρεια του. Ο Long-Yuan Li (1990) με χρήση ενεργειακών εξισώσεων και χρησιμοποιώντας τη θεωρία μεμβράνης των κελυφών κατέληξε στα διαγράμματα του σχ. 2.8 .

Στο σχ. 2.8 συναρτάται η παράμετρος του κρίσιμου φορτίου λυγισμού  $P(1-\nu^2)/Eh$  με τη γεωμετρική παράμετρο  $L^2(1-\nu^2)^{1/2}/ah$  για τέσσερα διαφορετικά κυλινδρικά κελύφη, με διαφορετικούς λόγους  $a/h$ .



**Σχήμα 2.8:** Κρίσιμο φορτίο λυγισμού διάφορων κυλίνδρων για διάφορες κατανομές φορτίων

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

- Προφανώς, όταν αυξάνεται το μήκος  $L$  του κυλίνδρου (δηλαδή η γεωμετρική παράμετρος  $L^2(1-v^2)^{1/2}/ah$ ), το κρίσιμο φορτίο λυγισμού  $P$  (δηλαδή η παράμετρος  $P(1-v^2)/Eh$ ) μειώνεται ("πιο ευλύγιστο").
- Όταν το  $M \rightarrow \infty$  σημαίνει ότι έχουμε άπειρα συγκεντρωμένα φορτία κατανεμημένα ομοιόμορφα στην περιφέρεια του κυλίνδρου, κατάσταση η οποία προσομοιάζει πλήρως την περίπτωση ενός κατανεμημένου φορτίου στην περιφέρεια και για αυτόν το λόγο, η μορφή του παραπάνω διαγράμματος είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις.
- Όταν το  $M$  μειώνεται, δηλαδή το κατανεμημένο φορτίο προσομοιάζεται ή καταλήγει να είναι ένας μικρός αριθμός συγκεντρωμένων φορτίων, τότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μειώνεται έως και στο 50% εκείνου που προκύπτει από τη θεώρηση πλήρως κατανεμημένου φορτίου στην περιφέρεια του κυλίνδρου.
- Όταν ο λόγος ακτίνας προς πάχος τοιχώματος ( $a/h$ ) αυξάνεται τότε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού μειώνεται.

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα είναι ιδιαίτερος σημαντικά. Στην πράξη, η μονοαξονική συμπίεση ενός κυλίνδρου γίνεται με ένα κατανεμημένο φορτίο στην περιφέρειά του. Ωστόσο, οι παραμορφώσεις των άκρων του (στην περιφέρεια που ασκείται το κατανεμημένο) κατά τη διάρκεια της φόρτισης, αλλά και οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που υπάρχουν, οδηγούν σε πολλές συγκεντρωμένες και μάλιστα μη συμμετρικές φορτίσεις. Κατά συνέπεια, είναι πολύ σημαντικό στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός κυλινδρικού κελύφους να λαμβάνουμε υπόψιν μας και τις ατέλειες που υπάρχουν εξαιτίας της κατανεμημένης φόρτισης, η οποία μετατρέπεται στην ουσία σε πεπερασμένο αριθμό συγκεντρωμένων φορτίων τα οποία έχουν μια τυχαία κατανομή τιμών - όπως θα δούμε παρακάτω - στην περιφέρεια η οποία φορτίζεται.



### ***Ατέλειες στη θέση του φορτίου***

Στην κλασσική θεωρία για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός λεπτότοιχου κυλινδρικού κελύφους, θεωρούμε μία φόρτιση αξονική και κατακόρυφη. Στην πραγματικότητα όμως και εν προκειμένω στα πειράματα, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο αφού θα παρουσιάζονται πάντα κάποιες έστω ελάχιστες αποκλίσεις του φορτίου από την κατακόρυφο, όσο και κάποιες εκκεντρότητες σε αυτό.

### **2.3.3 Ατέλειες του υλικού και του πάχους**

Μία λιγότερο σημαντική αιτία της διαφοροποίησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού λεπτότοιχων, αξονικά φορτισμένων κελυφών αποτελούν οι ατέλειες του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο αλλά και του πάχους του τοιχώματος του. Δηλαδή, ενδέχεται το υλικό να παρουσιάζει μικρο-ρηγματώσεις, μικρές οπές ή ακόμη και μεταβολές του μέτρου ελαστικότητας  $E$ , ενώ για την περίπτωση του πάχους του τοιχώματος του κυλίνδρου ενδέχεται αυτό να μην είναι σταθερό λόγω κατασκευαστικής ατέλειας.

Όλες οι ερευνητικές προσπάθειες στο παρελθόν αφορούσαν τη μελέτη κατανομής των τάσεων, υπό αυτές τις ατέλειες και μόνο τα τελευταία χρόνια έγιναν προσπάθειες ολοκληρωτικής μελέτης του προβλήματος με στοχαστικές διαδικασίες και εξελιγμένες αριθμητικές μεθόδους, με χρήση βεβαίως ηλεκτρονικών υπολογιστών. Το πρόβλημα έχει αποδειχθεί ότι είναι ιδιαίτερος πολύπλοκο και οι λιγοστές έρευνες που έχουν γίνει θέτουν σε αμφισβήτηση τη χρήση γραμμικής θεωρίας λυγισμού.

### **2.3.4 Ατέλειες των συνοριακών συνθηκών**

Μία επιπλέον και ιδιαίτερος σημαντική αιτία της διαφοροποίησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού λεπτότοιχων κελυφών, μεταξύ θεωρίας και πειραμάτων είναι και οι ατέλειες των συνοριακών συνθηκών. Είναι προφανές ότι η θεώρηση απλώς εδραζόμενου κυλίνδρου που γίνεται στην κλασσική θεωρητική λύση δεν είναι

ρεαλιστική και ούτε μπορεί να προσομοιαστεί πλήρως με κάποιο τρόπο στο εργαστήριο για τα πειράματα.

Ο J. Arbocz σε άρθρο του μόλις το 1984 απέδειξε τη σημαντική επίδραση των ατελειών των συνοριακών συνθηκών στην τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός λεπτότοιχου κυλινδρικού κελύφους. Χρησιμοποιώντας τον υπολογιστικό κώδικα STAGS που χρησιμοποιεί πεπερασμένες διαφορές για τη μη γραμμική ανάλυση κελυφών, κατάφερε να μοντελοποιήσει πλήρως το κέλυφος AS-2 για το οποίο υπήρχαν εκτεταμένα πειραματικά αποτελέσματα (Caltech 1970). Το κέλυφος AS-2 και όλα του τα χαρακτηριστικά στοιχεία όπως η γεωμετρία, ο τρόπος παραγωγής του αλλά και όλες οι πιθανές αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που αυτό παρουσιάζει ήταν γνωστά από παλαιότερες μετρήσεις και ελέγχους που υπάρχουν καταγεγραμμένα. Εκτός όμως από αυτό, οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες που παρουσιάζει το εν λόγω κέλυφος, είχαν γίνει προσπάθειες "μοντελοποίησής" και προσομοίωσης της κατανομής τους, μέσα στα πλαίσια εξέλιξης της IIDB.

Στη συγκεκριμένη μοντελοποίηση του Arbocz τα αποτελέσματα που προέκυψαν έχουν ως εξής:

$$\frac{P_{calc}}{P_{cl}} = 0.8563 \quad \text{και} \quad \frac{P_{exp}}{P_{cl}} = 0.705$$

όπου:

$P_{calc}$  = το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που υπολογίστηκε από τον κώδικα STAGS

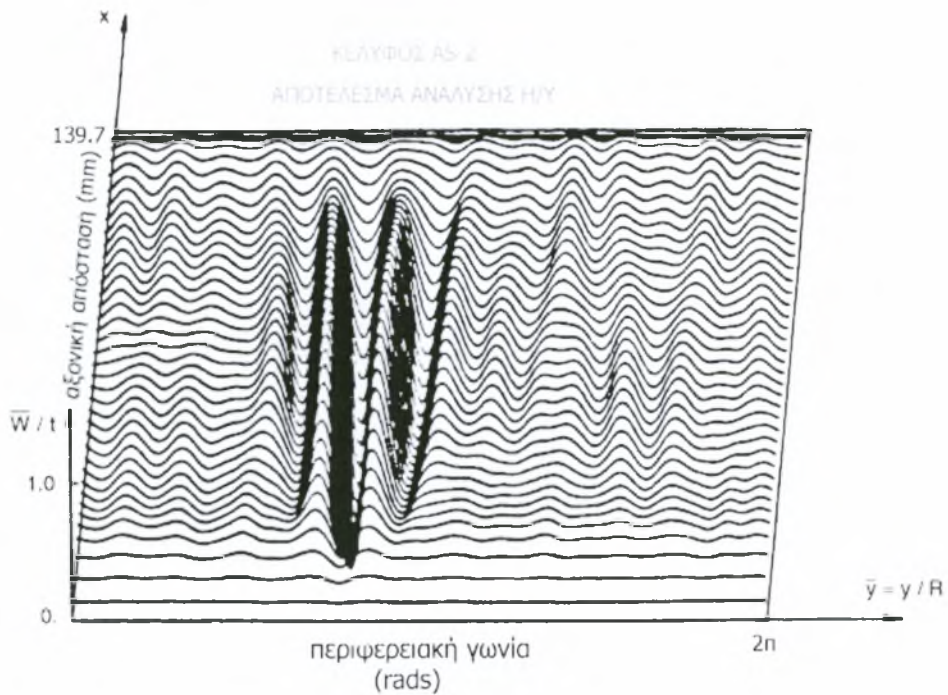
$P_{exp}$  = το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προέκυψε από τα πειράματα

$P_{cl}$  = το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του ιδανικού κελύφους (χωρίς ατέλειες που προέκυψε με βάση την κλασσική θεωρία και είναι ίσο με  $-320.8 \text{ kN/cm}$  (θλιπτικό)

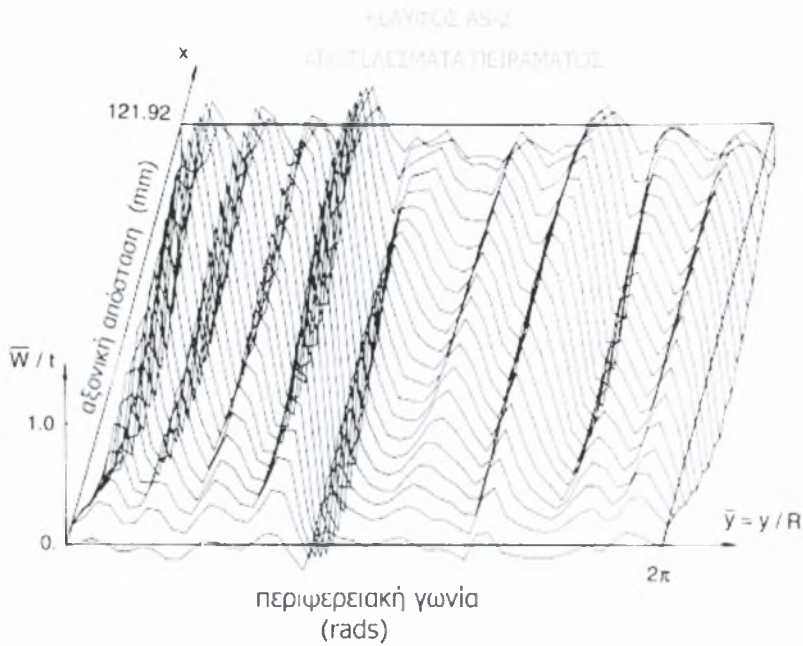
Όπως είναι προφανές από τα αποτελέσματα, η μοντελοποίηση στον υπολογιστή με τον ομολογουμένως αξιόπιστο κώδικα STAGS και το συνυπολογισμό των αρχικών γεωμετρικών ατελειών του κελύφους, οι οποίες προσομοιάστηκαν με μία αποδεκτή

κατανομή, προέκυψε φορτίο λυγισμού απροσδόκητα μεγάλο ( 0.8563 ) σε σχέση με τα πειραματικά δεδομένα ( 0.705 ).

Στις προσπάθειες να δοθεί εξήγηση στη διαφορά αυτή, μία πιο προσεκτική ματιά στις προλυγισμικές παραμορφώσεις του κελύφους όπως αυτές υπολογίζονται από τον κώδικα STAGS και όπως αυτές προκύπτουν από τους πειραματικούς ελέγχους είναι αρκετά κατατοπιστική. Όπως φαίνεται προφανώς στα σχ. 2.9 και σχ. 2.10 υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση.



**Σχήμα 2.9:** Προλυγισμικές παραμορφώσεις κυλίνδρου από ανάλυση στον Η/Υ

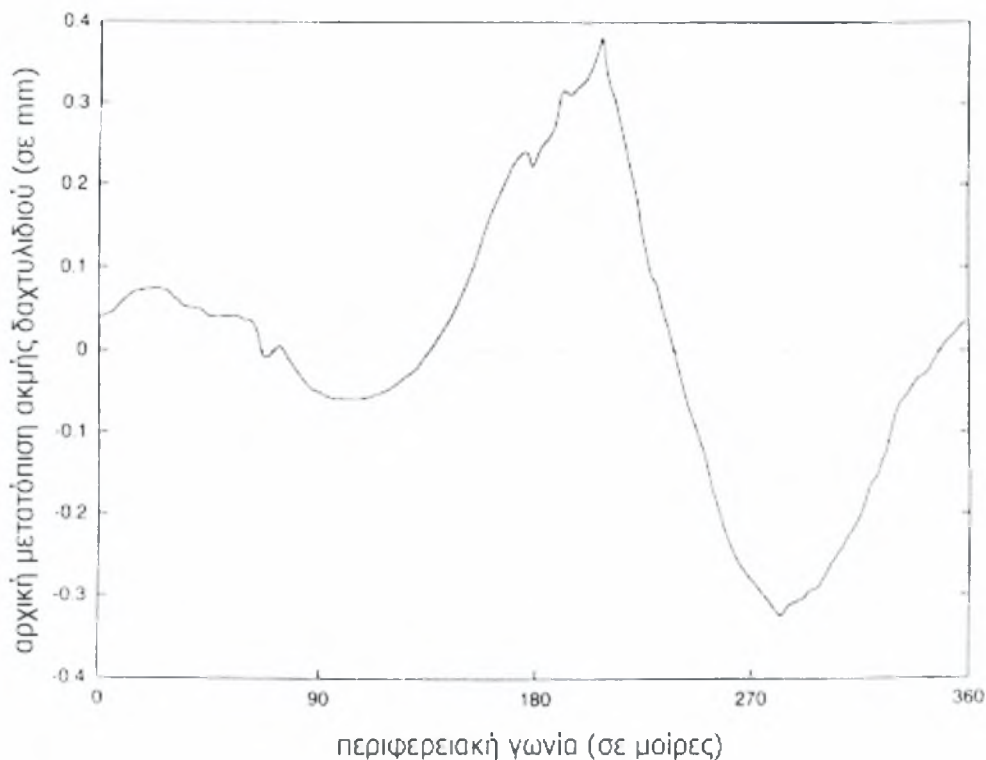


**Σχήμα 2.10:** Προλυγισμικές παραμορφώσεις κυλίνδρου από πείραμα

Από τη στιγμή όμως, που τόσο η κατανομή των ατελειών που χρησιμοποιήθηκε όσο και ο κώδικας STAGS είναι δεδομένης υψηλής αξιοπιστίας, η εξήγηση του προβλήματος οδηγούσε αναπόφευκτα σε μία ενδεχόμενη διαφοροποίηση των συνοριακών συνθηκών που χρησιμοποιούνταν στο πείραμα και σε εκείνες που χρησιμοποιούνταν στο υπολογιστικό μοντέλο.

Στην πειραματική διάταξη η συνοριακή συνθήκη εξασφαλίζεται με ένα ειδικό ελαστικό "δαχτυλίδι" (end-ring) που τοποθετείται στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Η συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη προϋποθέτει μία αρχική παραμόρφωση  $u_0$  η οποία ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του δαχτυλιδιού εισάγεται στο υπολογιστικό πρόγραμμα και ακολουθεί η ανάλυση.

Μία έρευνα του Caltech όμως, η οποία αφορά στο συγκεκριμένο "δαχτυλίδι" που χρησιμοποιείται στα πειράματα κατέδειξε το γεγονός ότι η αρχική αυτή παραμόρφωση του δαχτυλιδιού δεν είναι ίδια σε όλη την περιφέρεια του κυλίνδρου αλλά διαφέρει σημαντικά από σημείο σε σημείο. Κάτι τέτοιο φαίνεται εξάλλου και στο σχ. 2.11 .



**Σχήμα 2.11:** Αρχική παραμόρφωση ελαστικού "δαχτυλιδιού" στην περιφέρεια του κυλίνδρου

Γίνεται φανερό λοιπόν, ότι η αρχική συνθήκη  $u=u_0$  η οποία εισάγεται στον κώδικα πρέπει να αντικατασταθεί από μία άλλη, η οποία να επιτρέπει μεταβολές της αρχικής παραμόρφωσης του δαχτυλιδιού καθόλη την περίμετρο του κυλίνδρου.

Εκτός όμως από αυτό, πρέπει να ληφθεί υπόψιν το γεγονός ότι υπάρχουν αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και στην ακμή του κυλίνδρου και οι οποίες μεταβάλλουν κατά πολύ την κατανομή του φορτίου. Οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες δεν υπάρχουν μετρημένες ούτε καταγεγραμμένες κάπου και για αυτό μόνο υποθέσεις μπορούν να γίνουν για τη μορφή τους. Πιο διεξοδικά αναλύεται το συγκεκριμένο θέμα στα επόμενα κεφάλαια.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι οι συνοριακές συνθήκες αποτελούν σημαντική αιτία διαφοροποίησης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μεταξύ θεωρίας και πράξης. Κατά συνέπεια πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψιν στην ανάλυση, οι όποιες ατέλειες υπάρχουν εκεί, για μία πιο ρεαλιστική αντιμετώπιση του προβλήματος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

## Βασικά στοιχεία στοχαστικής ανάλυσης

### 3.1 Εισαγωγή

Με την πάροδο των ετών και με την εξέλιξη της αεροναυπηγικής, της μηχανολογίας και των κατασκευών στα έργα πολιτικού μηχανικού έγινε επιτακτική η ανάγκη για ευρεία χρήση όλο και πιο συχνά, μελών που αποτελούσαν λεπτότοιχα κυλινδρικά και άλλα κελύφη. Η άγνοια της συμπεριφοράς ωστόσο των λεπτότοιχων κελυφών και η μεγάλη διαφοροποίηση που παρουσιαζόταν στην τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού μεταξύ πειραμάτων και θεωρίας, καθιστούσε το σχεδιασμό και την κατασκευή τους όχι μόνο μία προβληματική αλλά και μία ριψοκίνδυνη διαδικασία. Κατά συνεπεία, οι μηχανικοί κατέληγαν σε συντηρητικές και αντιοικονομικές λύσεις.

Η συνεχής όμως έρευνα πάνω στις ατέλειες των κελυφών, η εξέλιξη στις μεθόδους καταγραφής τους και τα συνεχή πειράματα άρχισαν να δείχνουν ότι οι "ντετερμινιστικοί" τρόποι υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού οδηγούσαν σε αναξιόπιστα αποτελέσματα ( π.χ. μέθοδος του "κάτω ορίου"). Έγινε δηλαδή σαφές, ότι η συμπεριφορά των λεπτότοιχων κυλινδρικών κελυφών έπρεπε να αναλυθεί με στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες θα λάμβαναν υπόψιν τους τον πιθανολογικό και τυχαίο χαρακτήρα των κάθε μορφής ατελειών. Επιπλέον, με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών που χρησιμοποιούν βελτιωμένους κώδικες αξιόπιστων αριθμητικών

μεθόδων (π.χ. πεπερασμένων στοιχείων) είναι δυνατόν να πετύχουμε ακόμη πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Προτού εξετάσουμε όμως, αναλυτικά τα αποτελέσματα και τη μεθοδολογία που ακολουθείται (παρουσιάζονται σε επόμενο κεφάλαιο), πρέπει να αναφερθούμε και να παρουσιάσουμε τα κυριότερα στοιχεία της στοχαστικής ανάλυσης τα οποία χρησιμοποιούνται στην έρευνα.

## **3.2 Γενικά**

Η στοχαστική ανάλυση των κατασκευών με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Stochastic Finite Element Method - SFEM) έχει προσφάτως συγκεντρώσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον. Οι ερευνητές στο συγκεκριμένο πεδίο, προσπαθούν να συνδυάσουν δύο από τις σημαντικότερες μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες στην αντιμετώπιση πολύπλοκων προβλημάτων της σύγχρονης μηχανικής: τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και τη στοχαστική ανάλυση.

Η στοχαστική ανάλυση, στην ευρεία έννοια, αφορά στον άμεσο χειρισμό αβέβαιων παραμέτρων ή αβεβαιότητα των οποίων δεν λαμβάνεται υπόψιν στις συμβατικές, νομοτελειακά καθορισμένες (ντετερμινιστικές) αναλύσεις. Οι ακριβείς τιμές των παραμέτρων αυτών είναι άγνωστες αφού δεν μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια. Στην περίπτωση των κατασκευών που μελετάμε για παράδειγμα, μεταβολές στο πάχος του κυλίνδρου, του μέτρου ελαστικότητας του κυλίνδρου, του σχήματος της διατομής του, των συνοριακών συνθηκών και των τιμών και των θέσεων του αξονικού φορτίου είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα τυχαιότητας στις συγκεκριμένες κατασκευές. Επιπλέον γενικότερα παραδείγματα, είναι οι τιμές του φορτίου ανέμου και του σεισμού που επιδρούν σε μία κατασκευή, αλλά και οι μεταβολές του εμβαδού της διατομής μιας δοκού. Η αβέβαιη διακύμανση των παραμέτρων αυτών μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στην απόκριση και τη συμπεριφορά των κατασκευών και είναι κατά συνέπεια φρονιμότερο να λαμβάνονται υπόψιν κατά το σχεδιασμό.

## **3.3 Στοχαστικές συναρτήσεις - στοχαστικά πεδία**

### **3.3.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες**

Στη μέθοδο των στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων, οι αβεβαιότητες που υπεισέρχονται στην ανάλυση και το σχεδιασμό θεωρούνται ως *στοχαστικές συναρτήσεις*.

*Κάθε συνάρτηση, μιας ή περισσότερων μεταβλητών της οποίας οι τιμές είναι τυχαίες μεταβλητές, ονομάζεται **στοχαστική συνάρτηση**.*

Παραδείγματα στοχαστικών συναρτήσεων απαντώνται συχνότατα γύρω μας: η διατομή ενός δομικού στοιχείου, η φόρτιση μιας κατασκευής, η θερμοκρασία του περιβάλλοντος, η τιμή των μετοχών του χρηματιστηρίου αποτελούν τυπικές περιπτώσεις στοχαστικών συναρτήσεων. Οι στοχαστικές συναρτήσεις ονομάζονται και στοχαστικές διαδικασίες ή στοχαστικά πεδία ανάλογα με το εάν οι αβέβαιες παράμετροι σχετίζονται με το χρόνο ή το χώρο αντίστοιχα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αναφερόμαστε μόνο σε χωρικές μεταβλητές και κατά συνέπεια χρησιμοποιούμε τον όρο "στοχαστικά πεδία".

Οι στοχαστικές διαδικασίες ή πεδία, μπορούν να χαρακτηριστούν ως  $nD - mV$  δηλαδή  $n$  διάστατα - πολυμετάβλητα ( $n$  Dimensional - multi Variate) όπου  $n$  είναι ο αριθμός των διαστάσεων του στοχαστικού πεδίου και  $m$  είναι ο αριθμός των μεταβλητών που χαρακτηρίζονται ως αβέβαιες

Θεωρώντας ένα στοχαστικό πεδίο  $f(x)$  σαν μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  μπορούμε να το περιγράψουμε μαθηματικά χρησιμοποιώντας την πολυδιάστατη συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας. Λόγω όμως της αδυναμίας υπολογισμού της πλήρους αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας ενός στοχαστικού πεδίου, μπορεί αυτή προσεγγιστικά να περιγραφεί από δύο συναρτήσεις:

- τη μέση τιμή της

$$\mu_x(x) = E[f(x)] \quad (3.1)$$



- τη συνάρτηση αυτοσυσχετισμού (autocorrelation function) η οποία ορίζεται ως εξής:

$$R_{xx}(x_1, x_2) = E[f(x_1)f(x_2)] \quad (3.2)$$

όπου  $E$  είναι η προσδοκία.

Μία χρήσιμη ιδιότητα των στοχαστικών πεδίων είναι ότι αυτά μπορούν να αναλυθούν σε άθροισμα ενός πεδίου με μηδενική μέση τιμή (zero mean) και της συνάρτησης της μέσης τιμής. Έτσι, αν  $f(x)$  είναι ένα στοχαστικό πεδίο με συνάρτηση μέσης τιμής  $\mu_x(x)$  τότε το πεδίο

$$g(x) = f(x) - \mu_x(x) \quad (3.3)$$

έχει μηδενική μέση τιμή και διατηρεί όλες τις στατιστικές ιδιότητες του αρχικού πεδίου  $f(x)$  αφού η  $\mu_x(x)$  είναι μία πραγματική και νομοτελειακά καθορισμένη συνάρτηση.

Επιπρόσθετα, πρέπει να αναφέρουμε ότι η σπουδαιότερη κατηγορία στοχαστικών πεδίων είναι τα *στάσιμα (stationary) στοχαστικά πεδία* για τα οποία η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας που τα περιγράφει δεν αλλάζει με τη θέση. Αυτό σημαίνει ότι :

$$\mu_x(x) = \mu_x \quad (3.4)$$

και

$$\sigma_x^2(x) = \sigma_x^2 \quad (3.5)$$

### **3.3.2 Ανάλυση στο πεδίο των συχνοτήτων**

Η ανάλυση Fourier είναι θεμελιώδης για την περιγραφή των στοχαστικών πεδίων αφού το σύνολο των ιδιοτήτων ενός στοχαστικού πεδίου μπορεί με τη χρήση της ανάλυσης Fourier να διατυπωθεί απλούστερα και κομψότερα στο πεδίο των συχνοτήτων. Έτσι, ο μετασχηματισμός Fourier όταν εφαρμοστεί σε ένα στοχαστικό πεδίο τότε προκύπτει το παρακάτω μιγαδικό πεδίο:

$$\bar{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (3.6)$$

Αν είναι γνωστή η συμπεριφορά στο πεδίο των συχνοτήτων τότε το στοχαστικό πεδίο προκύπτει μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (3.7)$$

Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να εφαρμοστεί και στη συνάρτηση αυτοσυσχετισμού  $R_{xx}(\tau)$  ενός στάσιμου στοχαστικού πεδίου, οπότε προκύπτει η συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος (power spectral density function)  $S_{xx}(\omega)$ , η οποία συνδέεται με την  $R_{xx}(\tau)$  μέσω των σχέσεων:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.8)$$

και αντιστρόφως

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.9)$$

Η φυσική σημασία της συνάρτησης πυκνότητας φασματικής ισχύος κατανοείται ευκολότερα αν θέσουμε στην εξ. (3.9) την τιμή  $\tau=0$ , οπότε:

$$R_{xx}(0) = E[f^2(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \sigma_x^2 \quad (3.10)$$

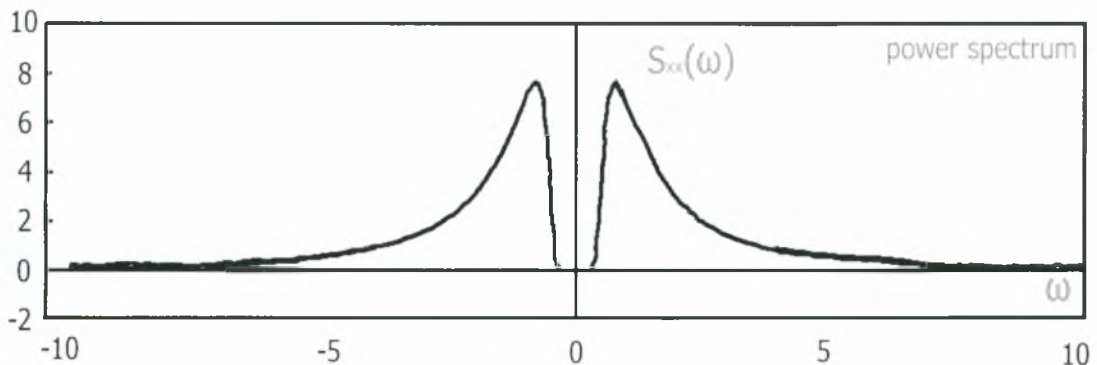
όπου  $\sigma_x^2$  η τυπική απόκλιση του στοχαστικού πεδίου.

Από την εξ.(3.10) προκύπτει ότι η ποσότητα  $S_{xx}(\omega)d\omega$  είναι η συνεισφορά στη μέση τετραγωνική τιμή της  $f(x)$  των συχνοτήτων του διαστήματος  $[\omega, \omega+d\omega]$

Επειδή η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού ενός στάσιμου στοχαστικού πεδίου είναι άρτια, ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (3.11)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος  $S_{xx}(\omega)$  ή απλώς φάσμα ισχύος (power spectrum) περιγράφει το στοχαστικό πεδίο  $f(x)$ . Μία τυπική μορφή συνάρτησης φασματικής ισχύος είναι αυτή του σχ. 3.1.



**Σχήμα 3.1:** Τυπική συνάρτηση φάσματος

Λόγω της συμμετρίας της ως προς τον κατακόρυφο άξονα ονομάζεται και αμφίπλευρη συνάρτηση (two sided).

### **3.3.3 Διακριτοποιημένος μετασχηματισμός Fourier**

Όταν περιγράφουμε ένα στοχαστικό πεδίο από το φάσμα ισχύος του, κάτι που συνηθίζεται και κυριαρχεί στη μέθοδο της φασματικής απεικόνισης του στοχαστικού πεδίου που αναπτύσσεται παρακάτω, τότε είναι απαραίτητος ο υπολογισμός του ολοκληρώματος Fourier της εξίσωσης (3.11). Η πιο συνηθισμένη διαδικασία για τον

υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος είναι ο *ψηφιακός μετασχηματισμός Fourier*, ο οποίος συνίσταται στην απεικόνιση της συνάρτησης αυτοσυσχετισμού ως σειράς διακεκριμένων ισασπεχόντων σημείων με διάστημα  $\Delta T$ . Έτσι η  $R_{xx}(\tau)$  μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$R_{xx}(n) , \quad n=1,2, \dots, N \quad (3.12)$$

όπου το σημείο  $\tau$  παρίσταται ως  $\tau=(n-1)\Delta T$ .

Τότε ο διακριτοποιημένος μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT) θα είναι :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N R_{xx}(n) \exp\{-i\omega(n-1)\Delta T\} \Delta T \quad (3.13)$$

Το φάσμα ισχύος  $S_{xx}(\omega)$ , παρότι είναι συνεχές, μέσω αυτής της διαδικασίας ορίζεται σ' έναν αριθμό από διακριτές συχνότητες. Η μικρότερη συχνότητα απ' όπου ξεκινά το διακριτοποιημένο φάσμα ισχύος, αντιστοιχεί σ' ένα κάτω όριο συχνοτήτων πέρα από το οποίο η συνεισφορά του φάσματος ισχύος στη συνάρτηση αυτοσυσχετισμού είναι αμελητέα. Οι ακόλουθες διακριτές συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια αυτής:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{(N-1)\Delta T}, \dots \quad \text{με} \quad k = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (3.14)$$

Ο αριθμός  $N$  λαμβάνεται ζυγός και συνεπώς ο διακριτοποιημένος μετασχηματισμός Fourier μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N R_{xx}(n) \exp\left\{-2\pi i(n-1) \frac{k}{(N-1)}\right\} \Delta T \quad (3.15)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier θα έχει ως εξής:

$$R_{xx}(n) = \sum_{\kappa=-N/2}^{N/2} S_{xx}(\kappa) \exp \left\{ 2\pi i(n-1) \frac{\kappa}{(N-1)} \right\} \Delta\omega \quad (3.16)$$

### **3.3.4 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT)**

Η διαδικασία του διακριτοποιημένου μετασχηματισμού Fourier είναι υπολογιστικά μη αποτελεσματική. Γι' αυτό το λόγο γίνεται συνήθως η χρήση ενός αλγορίθμου που είναι γνωστός ως ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform - FFT) που αναπτύχθηκε από τους Cooley and Tukey.

Η εφαρμογή του αλγορίθμου FFT απαιτεί τον ορισμό  $N$  διαστημάτων στη συνάρτηση αυτοσυσχετισμού, όπου  $N=2^q$  με  $q$  έναν ακέραιο αριθμό. Έχοντας ορίσει το μήκος αυτών των διαστημάτων  $\Delta\tau$ , το  $q$  επιλέγεται έτσι ώστε το  $(N-1)\Delta\tau$  να είναι ίσο ή μεγαλύτερο του διαστήματος που ενδιαφέρει πάνω στη συνάρτηση αυτοσυσχετισμού. Αν τώρα υποθεθεί πως η σειρά  $R_{xx}(n)$  χωρίζεται σε δύο υποσειρές που παριστάνουν τους όρους στις άρτιες και περιττές θέσεις θα έχουμε:

$$X[n] = R_{xx}[2n] \quad (3.17)$$

και

$$Y[n] = R_{xx}[2n-1] \quad \text{όπου } n=1, \dots, N/2 \quad (3.18)$$

και ο διακριτοποιημένος μετασχηματισμός Fourier της κάθε υποσειράς μπορεί να γραφεί για  $K=1, \dots, N$  ως εξής :

$$S_x(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N/2} X(n) \exp \left\{ -2\pi i \kappa \frac{2n}{(N-1)} \right\} \Delta\tau \quad (3.19)$$

και

$$S_y(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N/2} Y(n) \exp \left\{ -2\pi i \kappa \frac{(2n-1)}{(N-1)} \right\} \Delta\tau \quad (3.20)$$

ενώ το φάσμα ισχύος προκύπτει από τη σχέση:

$$S_{xx}(\kappa) = S_x(\kappa) + S_y(\kappa) \exp\left\{\frac{-2\pi i \kappa}{(N-1)}\right\} \quad (3.21)$$

Παρομοίως, προκύπτει και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

Σε κάθε περίπτωση, πρέπει το βήμα  $\Delta t$  να λαμβάνεται μικρότερο του  $\pi/\omega_u$  όπου  $\omega_u$  είναι η μέγιστη συχνότητα του φάσματος. Αυτό γίνεται για να αποφευχθεί το πρόβλημα των επικαλύψεων (aliasing) που αποτελεί βασικό μειονέκτημα των διακριτοποιημένων μετασχηματισμών Fourier.

### **3.3.5 Απεικόνιση των στοχαστικών πεδίων**

Οι στοχαστικές αναλύσεις και ειδικότερα αυτές που εφαρμόζονται στην ανάλυση των κατασκευών, απαιτούν την απεικόνιση των στοχαστικών πεδίων. Οι μεθοδολογίες που έχουν αναπτυχθεί για την απεικόνιση των στοχαστικών πεδίων διακρίνονται σε δύο ευρείες κατηγορίες:

#### **1. Απεικόνιση του στοχαστικού πεδίου με μία σειρά διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητών**

Στη μέθοδο αυτή βασίζεται η πλειονότητα των μεθόδων στοχαστικών πεπερασμένων στοιχείων που έχουν αναπτυχθεί και οι οποίες στηρίζονται στην ανάπτυξη του στοχαστικού πεδίου σε σειρά γύρω από κάποιους κόμβους στους οποίους συγκεντρώνονται οι ιδιότητες του στοχαστικού πεδίου υπό μορφή τυχαίων μεταβλητών. Οι κόμβοι αυτοί, είτε μπορεί να ταυτίζονται με τους κόμβους του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται για την ανάλυση της κατασκευής, είτε μπορεί να ορίζονται ξεχωριστά, αποκλειστικά και μόνο για την περιγραφή του στοχαστικού πεδίου. Η μέθοδος αυτή δεν αναλύεται

περαιτέρω στην παρούσα εργασία καθότι η έρευνα πάνω στην ανάλυση ευαίσθητων στις ατέλειες κατασκευών, χρησιμοποιεί την επόμενη μεθοδολογία.

## 2. Απευθείας προσομοίωση του στοχαστικού πεδίου με την παραγωγή δειγματοσυναρτήσεων

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρέως στη στοχαστική ανάλυση, στις περιπτώσεις εκείνες όπου είναι αναγκαία η παραγωγή δειγματοσυναρτήσεων του στοχαστικού πεδίου. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσφατα διατυπωθείσα *μέθοδος των σταθμισμένων υπολοίπων* για τη στοχαστική ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία και η *προσομοίωση Monte Carlo*. Παρότι και οι μέθοδοι αυτές κρύβουν ένα είδος διακριτοποίησης, η ακρίβειά τους εξαρτάται λιγότερο από το δίκτυο των πεπερασμένων στοιχείων που επιλέγεται, σε σχέση με τις μεθόδους σημειακής διακριτοποίησης. Το σημαντικότερο πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι βασίζονται στη φασματική απεικόνιση και το μόνο που χρειάζονται ως δεδομένο είναι η συνάρτηση φασματικής ισχύος (power spectrum).

### 3.3.5.1 Μέθοδος της Φασματικής Απεικόνισης

Έστω  $f_0(x)$  ένα 1D-1V στάσιμο στοχαστικό πεδίο με μηδενική συνάρτηση μέσης τιμής και συνάρτηση αυτοσυσχετισμού  $R_{x_0x_0}(\tau)$ . Τότε για αυτό το πεδίο ισχύουν οι εξ. 3.8 και 3.9. Το ακόλουθο θεώρημα είναι θεμελιώδες στη θεωρία των 1D-1V στάσιμων στοχαστικών πεδίων με μηδενικό μέσο όρο:

*Σε κάθε 1D-1V στάσιμο στοχαστικό πεδίο  $f_0(x)$  με πραγματικές τιμές, μέσο όρο μηδενικό και συνάρτηση αυτοσυσχετισμού δύο πλευρών (two sided)  $R_{xx}(\tau)$ , μπορούν να βρεθούν δύο αμοιβαίως ορθογωνικά πραγματικά πεδία  $u(\omega)$  και  $v(\omega)$  με ορθογωνικά βήματα  $du(\omega)$  και  $dv(\omega)$  έτσι ώστε:*

$$f_0(x) = \int_0^{\infty} [\cos(\omega x) du(\omega) + \sin(\omega x) dv(\omega)] \quad (3.22)$$

Τα πεδία  $u(\omega)$  και  $v(\omega)$  και τα αντίστοιχα βήματα  $du(\omega)$  και  $dv(\omega)$  ορίζονται έτσι ώστε να πληρούν τις εξής προϋποθέσεις:

$$E[u(\omega)] = E[v(\omega)] = 0 \quad \mu\epsilon \quad \omega \geq 0 \quad (3.23)$$

$$E[u^2(\omega)] = E[v^2(\omega)] = 2S_{x_0 x_0}(\omega) \quad \mu\epsilon \quad \omega \geq 0 \quad (3.24)$$

$$E[u(\omega)v(\omega')] = 0 \quad \mu\epsilon \quad \omega, \omega' \geq 0 \quad (3.25)$$

$$E[du(\omega)] = E[dv(\omega)] = 0 \quad \mu\epsilon \quad \omega \geq 0 \quad (3.26)$$

$$E[du^2(\omega)] = E[dv^2(\omega)] = 2S_{x_0 x_0}(\omega)d\omega \quad \mu\epsilon \quad \omega \geq 0 \quad (3.27)$$

$$E[du(\omega)du(\omega')] = E[dv(\omega)dv(\omega')] = 0 \quad \mu\epsilon \quad \omega, \omega' \geq 0, \quad \omega \neq \omega' \quad (3.28)$$

$$E[du(\omega)dv(\omega')] = 0 \quad \mu\epsilon \quad \omega, \omega' \geq 0 \quad (3.29)$$

Το στοχαστικό πεδίο  $f_0(x)$  θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση κατανομής φασματικής ισχύος  $S_{x_0 x_0}(\omega)$  η παράγωγος της οποίας είναι η συνάρτηση φασματικής ισχύος  $S_{x_0 x_0}(\omega)$ . Δηλαδή :

$$\frac{dS_{x_0 x_0}(\omega)}{d\omega} = S_{x_0 x_0}(\omega) \quad (3.30)$$

και



$$du(\omega) = u(\omega + d\omega) - u(\omega) \quad , \quad dv(\omega) = v(\omega + d\omega) - v(\omega) \quad (3.31)$$

Από την εξ. (3.10) προκύπτει ότι η συνάρτηση κατανομής φασματικής ισχύος  $S_{x_0, x_0}(\omega)$  είναι πεπερασμένη όταν  $\omega \rightarrow \infty$ . Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$\int_0^{\infty} 2S_{x_0, x_0}(\omega) d\omega < \infty \quad (3.32)$$

Επιπλέον, η εξ. (3.20) μπορεί να ξαναγραφτεί με τη μορφή:

$$f_0(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [\cos(\omega_{\kappa} x) du(\omega_{\kappa}) + \sin(\omega_{\kappa} x) dv(\omega_{\kappa})] \quad (3.33)$$

όπου  $\omega_{\kappa} = \kappa \Delta\omega$ , υπό την προϋπόθεση ότι το  $\Delta\omega$  είναι αρκετά μικρό.

Εάν τα  $du(\omega_{\kappa}), dv(\omega_{\kappa})$  οριστούν ως εξής :

$$du(\omega_{\kappa}) = X_{\kappa} \quad (3.34)$$

$$dv(\omega_{\kappa}) = Y_{\kappa} \quad (3.35)$$

και εάν τα  $X_{\kappa}, Y_{\kappa}$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και τυπική απόκλιση :  $(2S_{x_0, x_0}(\omega)(\omega_{\kappa})\Delta\omega)^{1/2}$  είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι απαιτήσεις των εξισώσεων (3.23) μέχρι (3.29) ικανοποιούνται.

Αντικαθιστώντας τις εξ. (3.34) και (3.35) στην (3.33) λαμβάνεται η ακόλουθη απεικόνιση σε σειρά:

$$f_0(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [\cos(\omega_{\kappa} x) X_{\kappa} + \sin(\omega_{\kappa} x) Y_{\kappa}] \quad (3.36)$$

Όπου τα  $du(\omega_{\kappa}), dv(\omega_{\kappa})$  ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} du(\omega_{\kappa}) &= \sqrt{2} A_{\kappa} \cos \Phi_{\kappa} \\ dv(\omega_{\kappa}) &= -\sqrt{2} A_{\kappa} \sin \Phi_{\kappa} \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου

$$A_{\kappa} = (2S_{x_0 x_0}(\omega_{\kappa}) \Delta\omega)^{1/2} \quad (3.38)$$

και τα  $\Phi_{\kappa}$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες αρχικές φάσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα  $[0 - 2\pi]$ .

Τελικά, αντικαθιστώντας τις εξ. (3.38) στην εξ. (3.33) προκύπτει η ακόλουθη απεικόνιση σε σειρά:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} [\cos(\omega_{\kappa} x) \sqrt{2} (2S_{x_0 x_0}(\omega_{\kappa}) \Delta\omega)^{1/2} \cos \Phi_{\kappa} \\ &\quad - \sin(\omega_{\kappa} x) \sqrt{2} (2S_{x_0 x_0}(\omega_{\kappa}) \Delta\omega)^{1/2} \sin \Phi_{\kappa}] = \\ &\quad \sqrt{2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} (2S_{x_0 x_0}(\omega_{\kappa}) \Delta\omega)^{1/2} \cos(\omega_{\kappa} x + \Phi_{\kappa}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

για την οποία μπορεί όπως είπαμε εύκολα να αποδειχτεί ότι ικανοποιεί τις εκφράσεις των εξισώσεων (3.23) μέχρι (3.29) .

**3.3.5.2 Προσομοίωση 1D - 1V ομογενών πεδίων**

Η διαδικασία που ακολουθείται για την προσομοίωση ενός 1D - 1V στοχαστικού πεδίου, προκύπτει από την εξ. (3.39) για ένα πεπερασμένο αριθμό όρων της σειράς. Πρέπει πρώτα να γίνει μία διάκριση μεταξύ του στοχαστικού πεδίου  $f_0(x)$  και της προσομοίωσής του  $f(x)$ .

Η διαδικασία προσομοίωσης έχει ως εξής:

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cos(\omega_n x + \Phi_n) \quad (3.40)$$

όπου

$$A_n = (2S_{xx}(\omega_n)\Delta\omega)^{1/2}, \quad \text{με} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.41)$$

$$\omega_n = n\Delta\omega, \quad \text{με} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.42)$$

$$\Delta\omega = \frac{\omega_u}{N} \quad (3.43)$$

και

$$A_0 = 0 \quad \text{ή} \quad S_{xx}(0) = 0 \quad (3.44)$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

- Στην εξ. (3.43) το  $\omega_u$  παριστάνει ένα *άνω φίλτρο* στη συνάρτηση φασματικής ισχύος πέρα από το οποίο αυτή μπορεί να θεωρηθεί μηδενική λόγω της μικρής της συνεισφοράς. Κάτι τέτοιο φαίνεται εξάλλου και στη μορφή της συνάρτησης φασματικής ισχύος στο σχ. 3.1 .
- Αφού το  $\omega_u$  λαμβάνει μία σταθερή τιμή, τότε καθώς το  $N \rightarrow \infty$  θα είναι και  $\Delta\omega \rightarrow 0$  , έτσι ώστε  $N\Delta\omega = \omega_u$  .
- Οι μεταβλητές  $\Phi_1, \dots, \Phi_{N-1}$  της εξ. (3.43) είναι ανεξάρτητες γωνίες αρχικής φάσης ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα  $[0 - 2\pi]$ .<sup>3</sup>
- Υπό την ισχύ της εξ. (3.44) αποδεικνύεται ότι το πεδίο  $f(x)$  που παράγεται από τη διαδικασία προσομοίωσης της εξ. (3.40) είναι περιοδικό με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$  . Αυτό σημαίνει ότι όσο μεγαλύτερο είναι το  $N$  για το δεδομένο φίλτρο  $\omega_u$  , τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η περίοδος του πεδίου προσομοίωσης.
- Το βήμα  $\Delta\omega$  κατά τη γέννηση των δειγματοσυναρτήσεων πρέπει να υπακούει στη συνθήκη:

$$\Delta\omega \leq \frac{2\pi}{2\omega_u} \quad (3.45)$$

έτσι ώστε να αποφεύγονται οι επικαλύψεις (aliasing) στη συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος κατά το μετασχηματισμό από το πεδίο των συχνοτήτων.

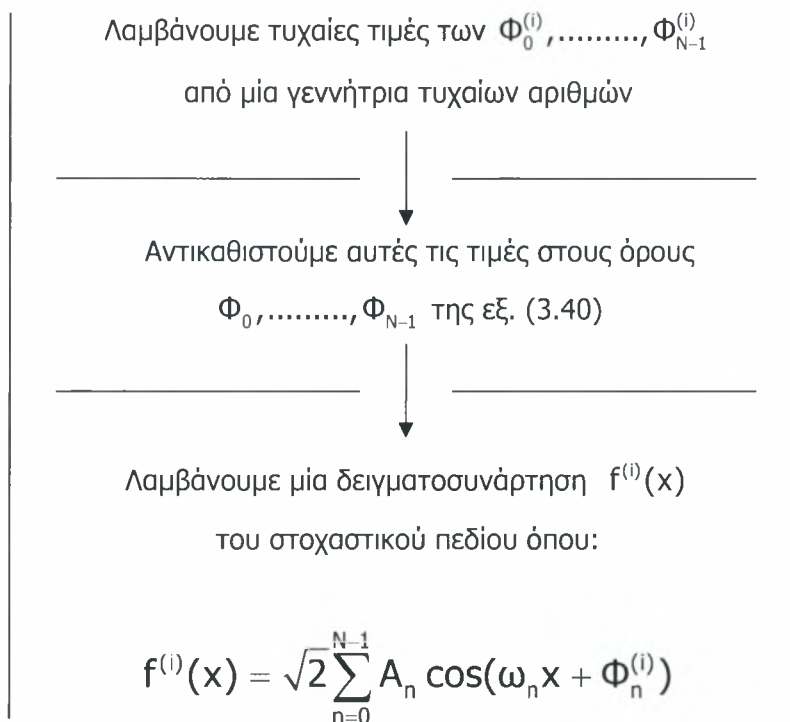
- Οι δειγματοσυναρτήσεις  $f^{(i)}(x)$  που παράγονται από την εξ. (3.40) είναι φραγμένες ως ακολούθως :

$$f^{(i)}(x) \leq \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} A_n = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{N-1} (2S_{xx}(\omega_n)\Delta\omega)^{1/2} \quad (3.46)$$

Αυτό το όριο είναι αρκετά μεγάλο για όλες τις πρακτικές εφαρμογές ακόμη και για μικρές τιμές του  $N$  και μπορεί εύκολα να υπολογιστεί όποια και αν είναι η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχετισμού.

- Μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι οι συναρτήσεις μέσης τιμής και αυτοσυσχετισμού του πεδίου προσομοίωσης είναι ταυτόσημες με αυτές του στοχαστικού πεδίου που περιγράφουν.

Κατά συνέπεια:



**3.3.5.3 Προσομοίωση nD - 1V ομογενών πεδίων**

Η προσομοίωση των 1D - 1V ομογενών στοχαστικών πεδίων μπορεί να επεκταθεί άμεσα στην προσομοίωση nD-1V ομογενών στοχαστικών πεδίων με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ένα μηδενικού μέσου όρου nD-1V ομογενές στοχαστικό πεδίο:

$$f_0(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_0(X) \quad (3.47)$$

τότε θα ισχύει ότι:

$$E[f_0(X)] = 0 \quad (3.48)$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχετισμού ορίζεται ως εξής:

$$R_{x_0x_0}(\xi) = E[f_0(X_r)f_0(X_s)] \quad (3.49)$$

όπου  $\mathbf{X}_r$  και  $\mathbf{X}_s$  είναι τα διανύσματα θέσεως στο  $\mathbf{R}^n$  και  $\xi$  είναι το διάνυσμα διαχωρισμού.

Για ένα ομογενές στοχαστικό πεδίο η συνάρτηση  $R_{x_0x_0}$  είναι συμμετρική γύρω από το διάνυσμα διαχωρισμού  $\xi$  και συνεπώς ισχύει ότι:

$$R_{x_0x_0}(\xi) = R_{x_0x_0}(-\xi) \quad (3.50)$$

Η συνάρτηση φασματικής ισχύος ορίζεται από το μετασχηματισμό Fourier της  $R_{x_0x_0}(\xi)$  ως εξής :

$$S_{x_0x_0}(\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_0x_0}(\xi) e^{-i\kappa\xi} d\xi \quad (3.51)$$

όπου:

$n$  = η διάσταση του στοχαστικού πεδίου ( $nD-1V$ )

$\mathbf{k}=(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$  το διάνυσμα των συχνοτήτων

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνεται από τη σχέση :

$$R_{x_0x_0}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_0x_0}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\xi}d\mathbf{k} \quad (3.50)$$

Κατ' αντιστοιχία με τη διαδικασία προσομοίωσης για ένα  $1D - 1V$  στοχαστικό πεδίο , ορίζουμε το διάνυσμα των άνω φίλτρων στις συχνότητες ως εξής:

$$\mathbf{K}_u = [\mathbf{K}_{1u}, \dots, \mathbf{K}_{nu}]^T \quad (3.51)$$

Κατά συνέπεια το αυξητικό διάνυσμα  $\Delta\mathbf{k}$  θα γραφτεί ως εξής :

$$\Delta\mathbf{k} = [\Delta\mathbf{k}_1, \dots, \Delta\mathbf{k}_n]^T = \left[ \frac{\mathbf{K}_{1u}}{N_1}, \dots, \frac{\mathbf{K}_{nu}}{N_n} \right] \quad (3.52)$$

Τελικά και με βάση όλα τα παραπάνω, η κατασκευή του πεδίου προσομοίωσης για  $N_1, \dots, N_n \rightarrow \infty$  γράφεται ως εξής :

$$\begin{aligned}
 f(X) = & \sqrt{2} \sum_{\kappa_1=0}^{N_1} \dots \sum_{\kappa_n=1}^{N_n} \sum_{I_i=\pm 1}^n [2S_{x_0 x_0} (I_1 \kappa_{1\kappa_1}, I_2 \kappa_{2\kappa_2}, \dots, I_n \kappa_{n\kappa_n}) \\
 & \Delta \kappa_1, \dots, \Delta \kappa_n]^{1/2} \cos(I_1 \kappa_{1\kappa_1} X_1, I_2 \kappa_{2\kappa_2} X_2, \dots, I_n \kappa_{n\kappa_n} X_n + \\
 & + \Phi_{\kappa_1, \dots, \kappa_n}^{I_1, \dots, I_n}) \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

όπου :

$I_1, \dots, I_n =$  μεταβλητές που λαμβάνουν τις τιμές 1 ή -1

$\Phi_{\kappa_1, \dots, \kappa_n}^{I_1, \dots, I_n} =$  ανεξάρτητες γωνίες αρχικής φάσης ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα  $[0 - 2\pi]$

$\kappa_{i\kappa_i} = \kappa_i \Delta \kappa_i$  (αλλαγή συμβολισμού χάριν συντομίας)

### **3.3.5.4 Τεχνικές εφαρμογής της φασματικής απεικόνισης**

Στην πρακτική της εφαρμογή, η μέθοδος της φασματικής απεικόνισης μπορεί να έχει μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Γι' αυτό το λόγο έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι που μειώνουν τον υπολογιστικό χρόνο της γέννησης δειγματοσυναρτήσεων και κάνουν πιο ευέλικτη τη συνολική διαδικασία.

#### **Χρήση του ταχέως μετασχηματισμού Fourier (FFT)**

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί ο FFT, η εξ. (3.40) μπορεί να ξαναγραφτεί στην εξής μορφή:



$$f^{(i)}(p\Delta x) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} B_n \exp[i(n\Delta\omega)(p\Delta x)] \right\} \quad \mu\epsilon \quad p = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.54)$$

όπου:

Re = το πραγματικό μέρος

$i$  = ο φανταστικός αριθμός

$$\text{και } B_n = \sqrt{2}A_n e^{i\Phi_n^{(i)}}$$

Η δειγματοσυνάρτηση της εξ. (3.54) είναι περιοδική με περίοδο  $T_0=2\pi/\Delta\omega$  όπου  $\Delta\omega=\omega_u/N$  όπου  $N$  ο αριθμός των διαστημάτων κατά τη διακριτοποίηση του φάσματος. Κατά συνέπεια τα  $\Delta x$  και  $\Delta\omega$  συνδέονται ως ακολούθως:

$$M\Delta x = T_0 = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \Rightarrow \quad (3.55)$$

$$\Delta x = \frac{2\pi}{M\Delta\omega} \Rightarrow \quad (3.56)$$

$$\Delta x \Delta\omega = \frac{2\pi}{M} \quad (3.57)$$

Συνεπώς με τη βοήθεια της εξ. (3.57) , η εξ. (3.54) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής :

$$f^{(i)}(p\Delta x) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{M-1} B_n e^{i(np\frac{2\pi}{M})} \right\} \quad (3.58)$$

Προκειμένου να αποφευχθούν οι επικαλύψεις (aliasing) στη συνάρτηση πυκνότητας φασματικής ισχύος, το βήμα  $\Delta x$  πρέπει να πληρεί την ακόλουθη συνθήκη :

$$\Delta x \leq \frac{2\pi}{2\omega_u} \quad (3.59)$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τις εξ. (3.57) και (3.59) προκύπτει ότι μεταξύ  $M$  και  $N$  πρέπει να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$M \geq 2N \quad (3.60)$$

όπου για πλήρη εκμετάλλευση της τεχνικής πρέπει το  $M$  να είναι ακέραιη δύναμη του 2, δηλαδή:

$$M \geq 2^u \quad (3.61)$$

Επομένως, αντί να χρησιμοποιηθεί η εξ. (3.40) που χρειάζεται άμεση άθροιση συνημίτονων για την ψηφιακή γέννηση δειγματοσυναρτήσεων του στοχαστικού πεδίου προσομοίωσης, μπορεί να αξιοποιηθεί η τεχνική FFT μέσω της εξ. (3.54) με αποτέλεσμα τη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

### Εφαρμογή της στοχαστικής ανάλυσης στα κυλινδρικά κελύφη με ατέλειες

#### 4.1 Εισαγωγή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφάλαιο 3, έγινε γρήγορα αντιληπτό από τους ερευνητές ότι το πρόβλημα του υπολογισμού του κρίσιμου φορτίου λυγισμού κατασκευών που είναι ευαίσθητες σε ατέλειες (imperfection sensitive structures) έπρεπε να περάσει από την αιτιοκρατική στη στοχαστική ανάλυση.

Οι πρώτες προσπάθειες πιθανολογικής αντιμετώπισης του ζητήματος ανάγονται στα τέλη της δεκαετίας του 1950 και στις αρχές της δεκαετίας του 1960, οπότε και ξεκίνησαν από διάφορους ερευνητές (Bolotin, Fraser, Budiansky, Amazigo, Hansen). Ωστόσο, εξαιτίας της έλλειψης πειραματικών δεδομένων για το είδος και τη μορφή των γεωμετρικών ατελειών που μπορεί να εμφανιστούν στην πράξη σε κελύφη, οι παραπάνω ερευνητές εργάζονταν με κάποιες απλές, ιδεατές κατανομές ατελειών τις οποίες αυτοί υπέθεταν.

Στη δεκαετία του 1960 με τις εργασίες των J. Arbocz, J. Babcock και I. Elishakoff πάνω στις μετρήσεις των ατελειών και με τις προσπάθειες για την ταξινομημένη και συστηματοποιημένη καταγραφή τους (βλ. δημιουργία IIDB) τα πράγματα άρχισαν να γίνονται ευκολότερα. Η προσομοίωση των μετρημένων ατελειών με σειρές Fourier άνοιξε

νέους δρόμους, καθότι ο προσδιορισμός των συντελεστών της ανάλυσης Fourier άρχισε να γίνεται με στοχαστικές διαδικασίες θεωρώντας τους τυχαίες μεταβλητές. Επιπλέον, το ιστόγραμμα των κρίσιμων φορτίων που προέκυπταν, λαμβανόταν με την προσομοίωση Monte Carlo ή άλλες παρόμοιες μεθόδους.

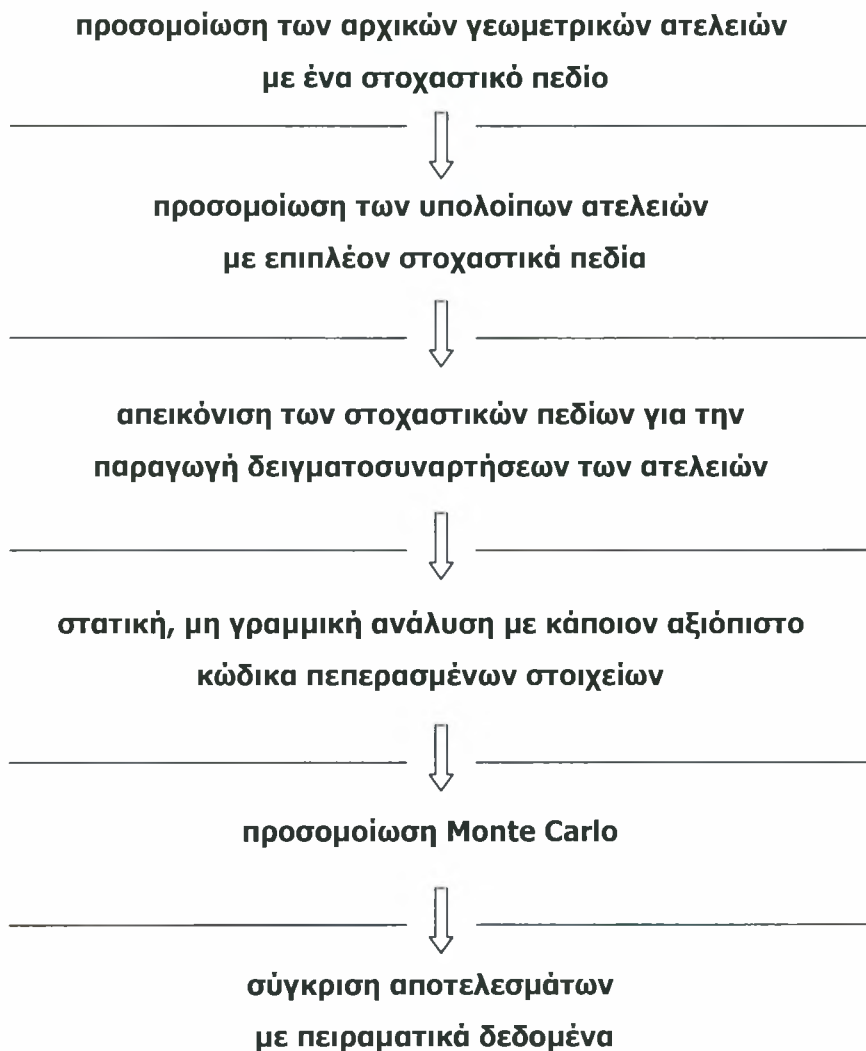
Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα των παραπάνω, πρώιμων στοχαστικών αναλύσεων είναι ότι ο καθορισμός του κρίσιμου φορτίου λυγισμού γινόταν, εν τέλει, με αναλυτικές ή ημι-αναλυτικές διαδικασίες. Έχει γίνει ευρέως γνωστό όμως τις τελευταίες δεκαετίες, ότι οι αναλυτικές λύσεις δεν προσφέρουν ευελιξία και παρουσιάζουν ποικίλα προβλήματα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, όταν εφαρμοσθούν σε πιο πολύπλοκες κελυφωτές κατασκευές.

Λύση στο παραπάνω πρόβλημα ήρθε να δώσει η βελτίωση και ανάπτυξη των αριθμητικών μεθόδων (κυρίως της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων), η οποία σε συνδυασμό με τη ραγδαία εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και της συνεχώς αυξανόμενης ισχύς τους, άνοιξε νέους δρόμους στην ανάλυση του λυγισμού των λεπτότοιχων κελυφών με ατέλειες. Εξελιγμένοι υπολογιστικοί κώδικες αξιοποιούν τα τελευταία θεωρητικά ευρήματα και με τη χρήση βελτιωμένων πεπερασμένων στοιχείων και στοχαστικών διαδικασιών οδηγούν σε πιο ρεαλιστικές τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού.

Η προσπάθειες που έχουν γίνει σε αυτόν τομέα, αφορούν εργασίες των τελευταίων ετών και είναι γεγονός, πως το συγκεκριμένο θέμα χρήζει επιπλέον έρευνας και ανάλυσης. Πιο συγκεκριμένα, οι μοναδικές δύο εργασίες που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία είναι των C.A.Schenk - G.I.Schueller το 2003 και αργότερα των V.Papadopoulos - M.Papadrakakis το 2004. Η εργασία των C.A.Schenk - G.I.Schueller (2003) αφορά ανάλυση κυλινδρικού λεπτότοιχου κελύφους στο οποίο λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Στην εργασία των V.Papadopoulos - M.Papadrakakis (2004) γίνεται ανάλυση λεπτότοιχου κυλινδρικού κελύφους στο οποίο εκτός από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, λαμβάνονται, για πρώτη φορά, υπόψιν τόσο οι ατέλειες (μεταβλητότητα) στο πάχος του κυλίνδρου όσο και οι ατέλειες του υλικού.

## 4.2 Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία και τα βήματα ανάλυσης που ακολουθούνται και στις δύο προαναφερθείσες εργασίες είναι σχεδόν τα ίδια. Αν προσπαθήσουμε να κάνουμε μία αποκωδικοποίηση των βημάτων που ακολουθούνται, θα μπορούσαμε συνοπτικά να έχουμε:



Και οι δύο εργασίες καταπιάνονται με χάλκινα κυλινδρικά κελύφη τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των A-shells (η κατηγοριοποίηση αφορά τον τρόπο κατασκευής όπως έχει προαναφερθεί). Η γεωμετρία, οι ιδιότητες του υλικού αλλά και το φορτίο λυγισμού (που προέκυψε έπειτα από πειράματα σε 7 δοκίμια ) των A-shells φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$\psi$	R(mm)	t(mm)	L(mm)	E(N/mm <sup>2</sup> )	P(N)
A-7	101.6	0.1140	203.20	104110	3036.4
A-8	101.6	0.1179	203.20	104800	3673.8
A-9	101.6	0.1153	203.20	101350	3724.8
A-10	101.6	0.1204	203.20	102730	3196.9
A-12	101.6	0.1204	209.55	104800	3853.0
A-13	101.6	0.1128	196.85	104110	3108.8
A-14	101.6	0.1110	196.85	108940	3442.9

όπου :

R = η ακτίνα του κυλίνδρου σε mm

t = το πάχος του τοιχώματος του κυλίνδρου σε mm

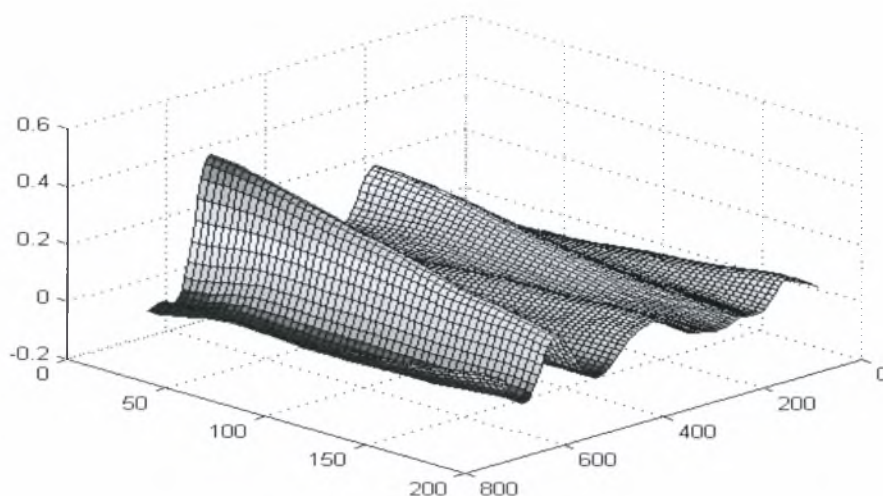
L = το μήκος του κυλίνδρου σε mm

E = το μέτρο ελαστικότητας σε N/mm<sup>2</sup>

P = το φορτίο λυγισμού σε N που προέκυψε στα πειράματα

#### **4.2.1 Μοντελοποίηση των αρχικών γεωμετρικών ατελειών με χρήση της θεωρίας των στοχαστικών πεδίων**

Αρχικά, γίνεται η προσομοίωση των αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες των κελυφωτών κατασκευών, μπορούν με μεγάλη ακρίβεια να προσομοιαστούν από ένα δισδιάστατο στοχαστικό πεδίο μίας μεταβλητής (2D-1V). Στην περίπτωση του αξονικά φορτισμένου λεπτότοιχου κυλίνδρου, όλες οι στατιστικές ιδιότητες του στοχαστικού πεδίου βασίζονται στις μετρήσεις και τα δεδομένα από την Τράπεζα Δεδομένων (IIDB) των J. Arbocz και J. Abramovich. Μία τυπική εικόνα των μετρημένων γεωμετρικών ατελειών ενός κελύφους A-shell φαίνεται στην εικ. 4.1 .



**Εικόνα 4.1:** Μετρημένες αρχικές γεωμετρικές ατέλειες από την IIDB

Από την εικ. 4.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι ατέλειες κατά την αξονική διεύθυνση του κυλίνδρου και οι ατέλειες κατά την περιμετρική διεύθυνση του κυλίνδρου δεν έχουν καμία σχέση μεταξύ τους. Μάλιστα, είναι εμφανές ότι οι ατέλειες κατά την διεύθυνση της περιμέτρου είναι μία τάξη μεγέθους σχεδόν μεγαλύτερες από εκείνες στην αξονική διεύθυνση.

Ωστόσο, η μέθοδος, με την οποία θα φτάσουμε από τις μετρήσεις και τα στατιστικά δεδομένα των ατελειών της IIDB, στην ακριβή διατύπωση των στατιστικών παραμέτρων του στοχαστικού μας πεδίου μπορεί να ποικίλει. Έτσι, ενώ στην εργασία των C.A.Schenk - G.I.Schueller (2003) χρησιμοποιείται η "ανάπτυξη Karhunen-Loéve", οι V.Paradopoulos - M.Paradrakakis (2004) χρησιμοποιούν τη μέθοδο της φασματικής απεικόνισης (spectral representation method).

Αν θελήσουμε να δούμε πιο σχηματικά τα αποτελέσματα των εργασιών τότε μπορούμε καταρχήν να δούμε στην εικ. 4.2 το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων των C.A.Schenk - G.I.Schueller (2003) όπου η προσομοίωση των γεωμετρικών ατελειών έγινε με την ανάπτυξη Karhunen-Loéve.



**Εικόνα 4.2:** Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων όπου οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες έχουν προσομοιωθεί με την ανάπτυξη Karhunen-Loéne

Παρόλ' αυτά η μέθοδος της φασματικής απεικόνισης πλεονεκτεί συγκριτικά με τη μέθοδο Karhunen-Loéne σε υπολογιστικό χρόνο. Είναι μία μέθοδος η οποία είναι τεκμηριωμένη και ευρέως διαδεδομένη, ήδη από τη δεκαετία του 1970 για τη μοντελοποίηση και προσομοίωση μη ομογενών στοχαστικών πεδίων και μη στάσιμων διαδικασιών. Για τον υπολογισμό του φάσματος από τις πραγματικές μετρήσεις-δεδομένα των ατελειών χρησιμοποιείται η "μέθοδος κινούμενου παραθύρου" (standard moving window technique).

Ακολουθώντας λοιπόν, τη μεθοδολογία των V.Papadopoulos - M.Papadrakakis (2004) , οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες γράφονται ως μεταβλητότητα της ακτίνας  $r$  του κυλίνδρου, η οποία οριοθετείται από το παρακάτω 2D-1V, μη ομογενές στοχαστικό πεδίο Gauss:

$$r(x, y) = R + a_0(x, y) + f_1(x, y) \quad (4.1)$$

όπου:

$r(x, y)$  = η μεταβλητή ακτίνα σε κάθε σημείο της κατασκευής

$R$  = η ακτίνα του ιδεατού - τέλειου κυλίνδρου

$a_0(x, y)$  = η μέση συνάρτηση των ατελειών του κυλίνδρου σε σχέση με την τέλεια γεωμετρία του κελύφους



$f_1(x, y)$  = ένα μη ομογενές στοχαστικό πεδίο Gauss μηδενικού μέσου όρου

### Υπολογισμός της συνάρτησης $f_1(x, y)$ με τη μέθοδο της φασματικής απεικόνισης (spectral representation method)

Η παραγωγή των δειγματοσυναρτήσεων του 2D-1V ομογενούς στοχαστικού πεδίου  $f_1(x, y)$  ακολουθεί τη "μέθοδο της σειράς των συνημιτόνων" (series cosines formula) αντί για τον Ταχύ Μετασχηματισμό Fourier (FFT). Κάτι τέτοιο γίνεται διότι τα σημεία προσομοίωσης γίνονται στα κέντρα βάρους των πεπερασμένων στοιχείων κελύφους TRIC που χρησιμοποιούνται. Ο FFT απαιτεί τα σημεία προσομοίωσης να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στην κατασκευή και κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει.

Η διαπίστωση της πλήρους ανεξαρτησίας μεταξύ των ατελειών κατά τη διεύθυνση  $x$  και των ατελειών κατά τη διεύθυνση  $y$ , οδήγησαν στη χρησιμοποίηση ενός φάσματος (power spectrum) το οποίο αποτελούνταν από δύο ανεξάρτητα φάσματα για κάθε μία εκ των δύο διευθύνσεων:

$$S^E(\kappa_1, \kappa_2, x_1, x_2) = S_1^E(\kappa_1, x_1) S_2^E(\kappa_2, x_2) \quad (4.2)$$

όπου τα  $S_1^E(\kappa_1, x_1)$  και  $S_2^E(\kappa_2, x_2)$  αποτελούν δύο ανεξάρτητα 1-D φάσματα για την αξονική και την περιμετρική διεύθυνση αντιστοίχως. Το παρακάτω ολοκλήρωμα μας δίνει τη συνάρτηση του φάσματος καθ' όλο το ύψος και το πλάτος του κυλίνδρου (διευθύνσεις  $x_1$  και  $x_2$ ):

$$S^E(\kappa_1, \kappa_2, x_1, x_2) = \frac{\int_{x_2-b}^{x_2+b} \int_{x_1-a}^{x_1+a} f(x_1, x_2) \exp[-2\pi i(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2)] dx_1 dx_2}{8\pi ab} \quad (4.3)$$

Τα διαστήματα  $2a$  και  $2b$  που χρησιμοποιούνται ως άκρα ολοκλήρωσης αποτελούν τις διαστάσεις του "κινούμενου παραθύρου" (moving window) μέσα στο οποίο υπολογίζεται κάθε φορά το φάσμα των ατελειών για κάθε σημείο του

διακριτοποιημένου πλέον κυλίνδρου (σε κάθε κόμβο δηλαδή του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων).

Στη συνέχεια χρησιμοποιούνται οι παρακάτω τύποι για τον υπολογισμό των  $A_{n_1 n_2}^{(1)}$  και  $A_{n_1 n_2}^{(2)}$  :

$$A_{n_1 n_2}^{(1)} = \sqrt{2S^E(\kappa_{1n_1}, \kappa_{2n_2}, x_1, x_2) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \quad (4.4)$$

$$A_{n_1 n_2}^{(2)} = \sqrt{2S^E(\kappa_{1n_1}, -\kappa_{2n_2}, x_1, x_2) \Delta\kappa_1 \Delta\kappa_2} \quad (4.5)$$

και τέλος η σχέση που θα μας δώσει τις τιμές της  $f_1(x, y)$  :

$$f^{(i)}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [A_{n_1 n_2}^{(1)} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \kappa_{2n_2} x_2 + \varphi_{n_1 n_2}^{(1)(i)}) + A_{n_1 n_2}^{(2)} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 - \kappa_{2n_2} x_2 + \varphi_{n_1 n_2}^{(2)(i)})] \quad (4.6)$$

όπου:

$\varphi_{n_1 n_2}^{(j)(i)}$  = (με  $j=1,2$ ) είναι ανεξάρτητες τυχαίες αρχικές φάσεις της (i) προσομοίωσης ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

$x_i$  = (με  $i=1,2$ ) οι συντεταγμένες των κόμβων στους οποίους υπολογίζεται η συνάρτηση  $f$

$\kappa_{iu}$  = (με  $i=1,2$ ) τα όρια που ορίζουν την ενεργό περιοχή του φάσματος (βλ. παρακάτω)

## **4.2.2 Μοντελοποίηση των υπόλοιπων ατελειών του κυλίνδρου με χρήση της θεωρίας των στοχαστικών πεδίων**

### **α) Μοντελοποίηση ατελειών υλικού και πάχους κυλίνδρου**

Πέραν όμως των αρχικών γεωμετρικών ατελειών, όπως ήδη έχουμε πει, στην εργασία των V.Papadopoulos - M.Papadarakakis (2004), τόσο το υλικό, όσο και το πάχος του κυλίνδρου, για πρώτη φορά δεν λαμβάνονται με "ντετερμινιστικό" τρόπο, αλλά ως δύο επιπλέον στοχαστικά πεδία, συνεκτιμώντας έτσι στην ανάλυση τις ατέλειες αυτών των δύο σημαντικών παραμέτρων.

Το υλικό εισάγεται ως ένα 2D-1V ομογενές στοχαστικό πεδίο με μεταβλητό μέτρο ελαστικότητας  $E$ :

$$E(x, y) = E_0 [1 + f_2(x, y)] \quad (4.7)$$

όπου:

$E_0$  = η μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας

$f_2(x, y)$  = ένα ομογενές στοχαστικό πεδίο Gauss μηδενικού μέσου όρου

και για το πάχος  $t$  κυλίνδρου παρομοίως:

$$t(x, y) = t_0 [1 + f_3(x, y)] \quad (4.8)$$

όπου:

$t_0$  = η μέση τιμή του πάχους του κυλίνδρου

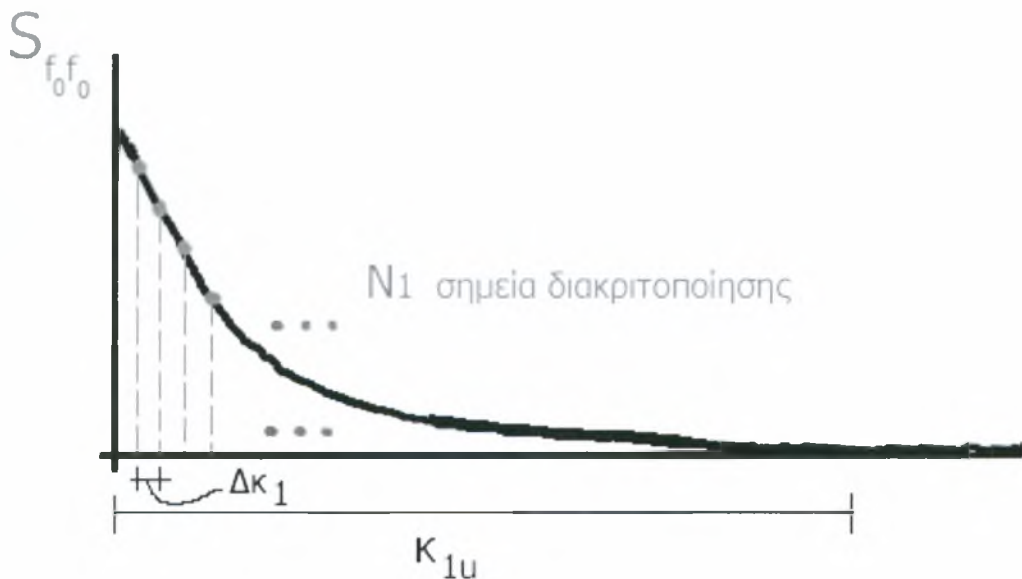
$f_3(x, y)$  = ένα ομογενές στοχαστικό πεδίο Gauss μηδενικού μέσου όρου

Καταρχήν, υπολογίζεται πάλι το φάσμα (spectrum) των ατελειών από την παρακάτω σχέση:

$$S_{f_0 f_0}(k_1, k_2) = \frac{\sigma_f^2}{4\pi} b_1 b_2 \exp \left[ -\frac{1}{4} (b_1^2 k_1^2 + b_2^2 k_2^2) \right] \quad (4.9)$$

Το πρόβλημα που προκύπτει με τις συγκεκριμένες ατέλειες είναι ότι δεν έχουμε πειραματικά δεδομένα και μετρήσεις που να μας δίνουν μία εικόνα του φάσματός τους και κατά συνέπεια τις στατιστικές ιδιότητές τους, όπως συνέβαινε με τις γεωμετρικές ατέλειες για τις οποίες είχαμε τις μετρήσεις από την IIDB. Κατά συνέπεια γίνεται μία διερεύνηση και υπόθεση σε ό,τι αφορά τα στατιστικά μεγέθη  $b_1$  και  $b_2$  αλλά και την τυπική απόκλιση  $\sigma_f^2$  του στοχαστικού πεδίου των ατελειών πάχους και υλικού για να καταλήξουμε σε κάποια τιμή που φαίνεται να είναι πιο ρεαλιστική.

Για τη χρησιμοποίηση της εξ. 4.9 όμως, πρέπει να καθορίσουμε σε πόσα σημεία πρέπει να υπολογιστεί η τιμή του φάσματος για να λάβουμε κάποιες τιμές οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Αυτό καθορίζεται από τις τιμές των παραμέτρων  $\kappa_1$  και  $\kappa_2$  για την κάθε διεύθυνση αντιστοίχως. Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ότι οι τιμές του φάσματος είναι μηδενικές από μία τιμή  $\kappa_{1u}$  και  $\kappa_{2u}$  και πάνω οι οποίες καθορίζουν την "ενεργό περιοχή" του φάσματος. Έτσι ορίζουμε ένα μήκος διακριτοποίησης  $\Delta\kappa_1$  και  $\Delta\kappa_2$  και σε κάθε βήμα υπολογίζουμε την τιμή του φάσματος με την εξ. 4.9. Η διαδικασία φαίνεται πιο εποπτικά στο σχ. 4.1.



**Σχήμα 4.1:** Διακριτοποίηση του φάσματος

όπου:

$$-K_{1u} \leq K_1 \leq K_{1u} \quad \text{και} \quad -K_{2u} \leq K_2 \leq K_{2u} \quad (4.10)$$

$$\Delta K_1 = \frac{K_{1u}}{N_1} \quad \text{και} \quad \Delta K_2 = \frac{K_{2u}}{N_2} \quad (4.11)$$

$$n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad \text{και} \quad n_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1 \quad (4.12)$$

$$K_{1n_1} = n_1 \Delta K_1 \quad \text{και} \quad K_{2n_2} = n_2 \Delta K_2 \quad (4.13)$$

Στη συνέχεια και αφού έχουμε πάρει τις τιμές του φάσματος υπολογίζουμε τα παρακάτω:

$$A_{n_1 n_2}^{(1)} = \sqrt{2S_{f_0 f_0}(K_{1n_1}, K_{2n_2}) \Delta K_1 \Delta K_2} \quad (4.14)$$

και

$$A_{n_1 n_2}^{(2)} = \sqrt{2S_{f_0 f_0}(K_{1n_1}, -K_{2n_2}) \Delta K_1 \Delta K_2} \quad (4.14)$$

(προφανώς από την εξ. 4.14 φαίνεται ότι παίρνουμε τιμές φάσματος  $S_{f_0 f_0}$  και για τιμές  $-K_{2n_2}$ )

Τέλος, εφαρμόζοντας τη σειρά συνημιτόνων παίρνουμε τιμές για τη δειγματοσυνάρτηση τόσο του πάχους όσο και του υλικού:

$$\begin{aligned} f^{(i)}(x_1, x_2) = & \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} [A_{n_1 n_2}^{(1)} \cos(K_{1n_1} x_1 + K_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(1)(i)}) + \\ & + A_{n_1 n_2}^{(2)} \cos(K_{1n_1} x_1 - K_{2n_2} x_2 + \Phi_{n_1 n_2}^{(2)(i)})] \end{aligned} \quad (4.15)$$

όπου:

$\Phi_{n_1, n_2}^{(j)(i)}$  με  $j=1,2$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες αρχικές φάσεις της (i) προσομοίωσης ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

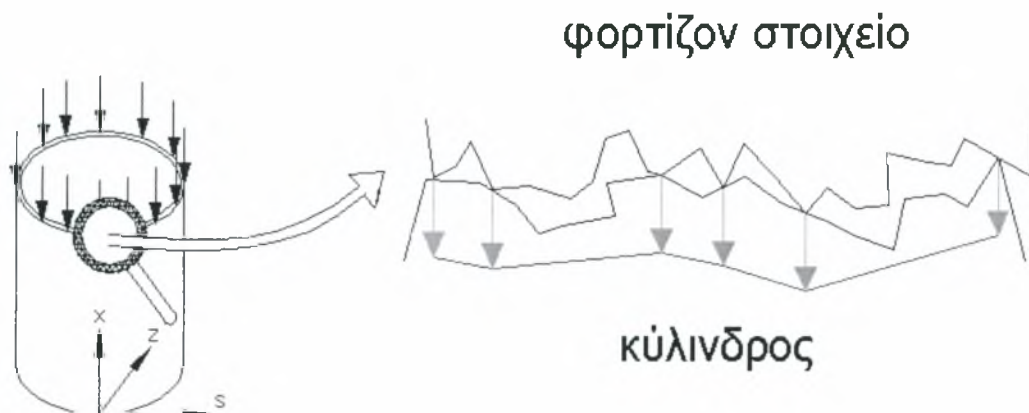
Η παραγωγή των τυχαίων αρχικών φάσεων  $\Phi_{n_1, n_2}^{(j)(i)}$  γίνεται με τη χρήση μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών, η οποία όπως είναι εμφανές, σε κάθε προσομοίωση της μεθόδου Monte Carlo παράγει διαφορετικές τιμές οι οποίες δίνουν τελικά και διαφορετικές τιμές στις δειγματοσυναρτήσεις.

## **β) Μοντελοποίηση ατελειών στις συνοριακές συνθήκες του κυλίνδρου**

Εκτός από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, τις ατέλειες στο υλικό και τις ατέλειες στο πάχος του κυλίνδρου, έχει αποδειχθεί - όπως είπαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο - ότι σημαντικότερο ρόλο, στο πρόβλημα, παίζουν και οι ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες. Στην παρούσα εργασία, γίνεται προσπάθεια να μοντελοποιηθούν οι ατέλειες των συνοριακών συνθηκών με τη χρήση στοχαστικών πεδίων.

Οι ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες αποτελούν ουσιαστικά μία ανομοιόμορφη κατανομή φορτίου στην φορτιζόμενη ακμή του κυλίνδρου. Κάτι τέτοιο είναι απόλυτα λογικό, αν σκεφτούμε ότι στις δύο ακμές του κυλίνδρου υπάρχουν, όπως έχει αποδειχθεί, γεωμετρικές ατέλειες όπως εκείνες που υπάρχουν στην περίμετρο του κυλίνδρου.

Η διαφορά όμως, με αυτές τις ατέλειες είναι ότι βρίσκονται κατά την τρίτη διεύθυνση του κυλίνδρου, σε αντίθεση με τις περιφερειακές ατέλειες που εκτείνονταν κατά τις άλλες δύο διευθύνσεις. Έτσι λοιπόν, αν θελήσουμε να κάνουμε μία μεγέθυνση στο σημείο επαφής ακμής κυλίνδρου - φορτιζοντος στοιχείου θα βλέπαμε περίπου μια κατάσταση όπως αυτή της εικ. 4.3.



**Εικόνα 4.3:** Γεωμετρικές ατέλειες στην φορτιζόμενη ακμή του κυλίνδρου

Παρατηρούμε δηλαδή ότι τελικά θα έχουμε μία ανομοιόμορφη κατανομή φορτίου, η οποία είναι άμεση συνέπεια των γεωμετρικών ατελειών που υπάρχουν εκ κατασκευής, τόσο στην φορτίζουσα επιφάνεια, όσο και στην ακμή του κυλίνδρου.

Κατά συνέπεια, γράφουμε το φορτίο που ασκείται στους κόμβους του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων της πάνω ακμής του κυλίνδρου, ως ένα 1D-1V ομογενές στοχαστικό πεδίο με μεταβλητή τιμή  $F$ :

$$F(x) = F_0 [1 + f_3(x)] \quad (4.15)$$

όπου:

$F_0$  = το σταθερό φορτίο που επιβάλλεται από τη φορτίζουσα επιφάνεια

$f_3(x)$  = στοχαστική συνάρτηση οι τιμές της οποίας θα προκύψουν από τη φασματική απεικόνιση

Στη συνέχεια, ακολούθησε η φασματική απεικόνιση αυτού του 1D-1V ομογενούς στοχαστικού πεδίου η οποία έγινε με τις γνωστές εξισώσεις οι οποίες απλά μετατρέπονται αναλόγως καθότι έχουμε μία διάσταση:

Για το φάσμα:

$$S_{f_0 f_0}(\kappa_1) = \frac{\sigma_f^2}{4\pi} b_1 \exp\left[-\frac{1}{4}(b_1^2 \kappa_1^2)\right] \quad (4.16)$$

Για την απεικόνιση και την παραγωγή δειγματοσυναρτήσεων:

$$-\kappa_{1u} \leq \kappa_1 \leq \kappa_{1u} \quad (4.17)$$

$$n_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1 \quad (4.18)$$

$$\Delta\kappa_1 = \frac{\kappa_{1u}}{N_1} \quad (4.19)$$

$$\kappa_{1n_1} = n_1 \Delta\kappa_1 \quad (4.20)$$

$$A_{n_1}^{(1)} = \sqrt{2S_{f_0}(\kappa_{1n_1})\Delta\kappa_1} \quad (4.21)$$

$$f^{(i)}(x_1) = \sqrt{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} [A_{n_1 n_2}^{(1)} \cos(\kappa_{1n_1} x_1 + \varphi_{n_1 n_2}^{(1)(i)})] \quad (4.22)$$

Ωστόσο, το μεγαλύτερο ίσως πρόβλημα που προκύπτει με τις εν λόγω ατέλειες, είναι το γεγονός ότι δεν υπάρχει μετρημένο και καταγεγραμμένο κανένα στοιχείο που να αφορά τη μορφή της κατανομής τους, ούτε το εύρος τους, σε αντίθεση, όπως έχουμε ήδη πει, με τις περιφερειακές ατέλειες του κυλίνδρου οι οποίες είναι αναλυτικότερα καταγεγραμμένες στην IIDB. Γι' αυτόν το λόγο, έγινε μία διερεύνηση σε ότι αφορά τις στοχαστικές παραμέτρους  $b_1$  και  $\sigma_f^2$  του συγκεκριμένου φάσματος της κατανομής του ασκούμενου φορτίου ώστε να καταλήξουμε στην όσο το δυνατόν ρεαλιστικότερη κατάσταση.



## **4.2.3 Προσομοίωση Monte Carlo**

### **4.2.3.1 Γενικά**

Όπως αναφέρθηκε στη μεθοδολογία, στο εδάφιο 4.2 , για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων του προβλήματος ακολουθείται μία από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους προσομοίωσης : η προσομοίωση Monte Carlo. Είναι απαραίτητο λοιπόν, να αναφερθούμε εν συντομία στην προσομοίωση αυτή καθώς αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της έρευνας μας.

Οι μέθοδοι προσομοίωσης χρησιμοποιούνται σ' ένα ευρύτατο φάσμα εφαρμογών που εκτείνονται από την προσομοίωση μιας πτήσης με υπερηχητικό αεριωθούμενο ή μιας πολεμικής σύρραξης έως τη συμπεριφορά μιας κατασκευής υπό στατικά ή δυναμικά φορτία. Παρ' ότι οι μέθοδοι προσομοίωσης χρησιμοποιούνται διστακτικά ως τελευταία λύση, όταν όλες οι άλλες μέθοδοι αποτυγχάνουν, πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα αυτό, αλλά και η αλματώδης εξέλιξη στα υπολογιστικά και τεχνολογικά δεδομένα προδιαγράφουν ένα καλύτερο μέλλον για την ανάλυση συστημάτων και επιχειρησιακών ερευνών με τις μεθόδους αυτές.

Ο R. Y. Rubinstein ( "Simulation and the Monte Carlo Method" , John Wiley & Sons, 1981) δίνει τον ορισμό των μεθόδων προσομοίωσης ως εξής:

*"Προσομοίωση είναι μία αριθμητική τεχνική προκειμένου να διεξάγονται πειράματα σε έναν ψηφιακό υπολογιστή υπό την προϋπόθεση ότι αναγνωρίζονται κάποιοι τύποι λογικών ή μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν τη συμπεριφορά ενός συστήματος για μία εκτεταμένη περίοδο πραγματικού χρόνου".*

Στις μεθόδους προσομοίωσης λοιπόν, πραγματοποιούνται δειγματοληπτικά πειράματα πάνω στο μοντέλο ενός συστήματος. Η προσομοίωση Monte Carlo θεωρείτο ανέκαθεν μία τεχνική που προσπαθούσε να επιλύσει ένα μοντέλο χρησιμοποιώντας τυχαίους ή ψευδοτυχαίους αριθμούς. Οι τυχαίοι αριθμοί είναι ουσιαστικά ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα  $[0,1]$ . Στην πραγματικότητα αυτοί οι αριθμοί προκύπτουν από υπολογιστικούς κώδικες που

παράγουν σειρές από ψευδοτυχαία ψηφία, όπου κάθε ψηφίο από το 0 έως το 9 έχει περίπου την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί. Αυτοί οι κώδικες λέγονται γεννήτριες τυχαίων αριθμών. Τα ψηφία αυτά, εάν ομαδοποιηθούν στη συνέχεια με κατάλληλα απεικόνιση παράγουν ψευδοτυχαίους αριθμούς οσοδήποτε μεγάλους.

Στις αρχές του αιώνα η μέθοδος Monte Carlo χρησιμοποιήθηκε για τη λύση της εξίσωσης Boltzmann. Ο όρος " Monte Carlo" εισήχθη από τους von Neumann and Ulan κατά τη διάρκεια του Δεύτερου Παγκοσμίου Πολέμου σαν κωδική ονομασία για τη μυστική εργασία που γινόταν στα εργαστήρια του Los Alamos. Η έμπνευση του όρου προέρχεται από τα διάσημα casino της πόλης του Monte Carlo στο Monaco.

Στην ουσία, η μέθοδος Monte Carlo αναπαριστά τη λύση ενός προβλήματος σαν παράμετρο ενός υποθετικού πληθυσμού (αριθμός προσομοιώσεων - simulations) και χρησιμοποιώντας μία ακολουθία τυχαίων αριθμών κατασκευάζει ένα πληθυσμιακό δείγμα από το οποίο λαμβάνονται στατιστικές εκτιμήσεις της παραμέτρου. Με άλλα λόγια, η προσομοίωση Monte Carlo εκτιμά το αποτέλεσμα ενός προβλήματος που μπορεί να είναι ένας πραγματικός αριθμός, ένα σύνολο αριθμών, μία απόφαση θετική ή αρνητική κ.λ.π.. Η εκτίμηση του αποτελέσματος είναι εκτός των άλλων και συνάρτηση του τρόπου με τον οποίον παρήχθησαν και χρησιμοποιήθηκαν οι τυχαίοι αριθμοί.

#### **4.2.3.2. Γεννήτριες τυχαίων αριθμών**

Όπως είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο της μεθοδολογίας, βασικότατο σημείο της διαδικασίας αποτελεί η γένεση των τυχαίων αριθμών ( κεφ. 4.2.2 και 4.2.1 ) και ειδικότερα το σημείο όπου αυτοί χρησιμοποιούνται για το σχηματισμό του πλήθους των δειγματοσυναρτήσεων.

Οι γεννήτριες των τυχαίων αριθμών, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίον δημιουργούνται οι τυχαίες μεταβλητές, αποτελούν ουσιαστικά το κρυμμένο μυστικό της επιτυχίας της μεθόδου Monte Carlo. Ωστόσο ο αλγόριθμος κατασκευής τους πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεγμένος καθότι ενδέχεται οι αριθμοί που θα παραχθούν κάθε άλλο παρά τυχαίοι να είναι.

Έχει μεγάλη, λοιπόν, σημασία το πόσο καλή είναι αυτή η ψευδοτυχαιότητα, ή αλλιώς κατά πόσο ελέγχουμε τι περιοδικότητα διαθέτουν οι αλγόριθμοι που παράγουν

ψευδοτυχαίους αριθμούς. Η περιοδικότητα αυτή, δηλαδή ο αριθμός των τυχαίων αριθμών που παράγονται πριν αυτοί αρχίσουν να επαναλαμβάνονται, πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερος του μεγέθους του δείγματος που απαιτείται.

Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι για τη γένεση ψευδοτυχαίων αριθμών είναι αυτές που βασίζονται σ' έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που παράγει μία μη τυχαία σειρά από αριθμούς μέσω του υπολοίπου της διαίρεσης ενός γραμμικού μετασχηματισμού, με έναν ακέραιο αριθμό  $m$ . Είναι προφανές, ότι αυτή η διαδικασία είναι νομοτελειακά καθορισμένη (deterministic) αφού κάθε όρος της σειράς που παράγεται είναι ήδη γνωστός μέσω της σχέσης από την οποία προκύπτει. Παρ' όλα αυτά όμως, μπορεί να δειχτεί ότι η σειρά που παράγεται από μία τέτοια διαδικασία προσεγγίζει την ομοιόμορφη κατανομή και μάλιστα ότι οι αριθμοί είναι μεταξύ τους στατιστικά ανεξάρτητοι.

Οι επαναπροσδιορισμικές (congruential) αυτές μέθοδοι βασίζονται στην παρακάτω εξίσωση:

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \bmod m \quad (4.23)$$

όπου ο πολλαπλασιαστής  $a$ , το βήμα  $c$  και το μέτρο  $m$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

Τροφοδοτώντας την εξ. με μία αρχική τιμή  $X_0$  που αλλιώς ονομάζεται και σπόρος (seed) και διαιρώντας το αποτέλεσμα κάθε βήματος με  $m$ , παράγεται η κανονική κατανομή:

$$U_i = \frac{X_i}{m} \quad (4.24)$$

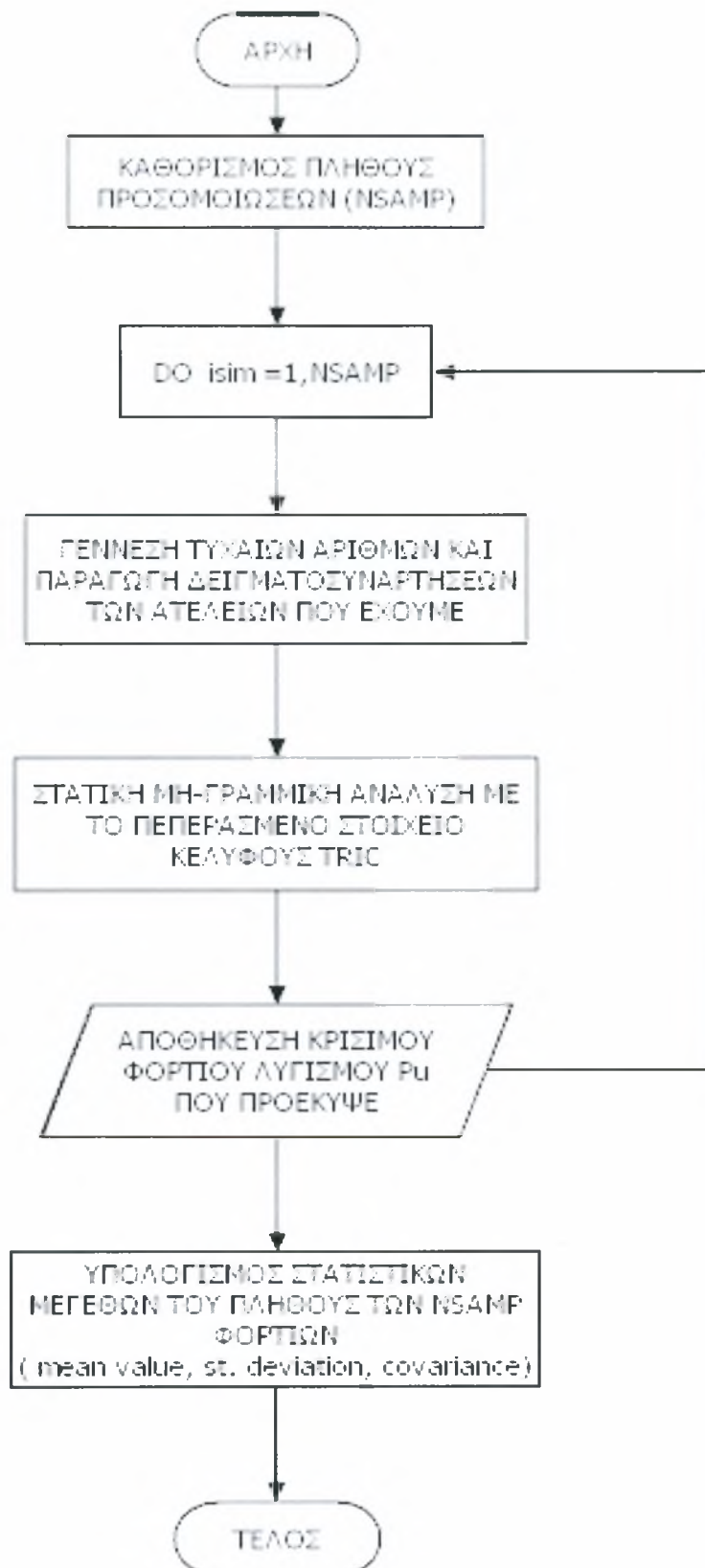
Είναι προφανές ότι αυτή η σειρά θα επαναλάβει τον εαυτό της μετά από  $m$  το πολύ βήματα. Προκειμένου να εξασφαλιστεί μεγάλη περιοδικότητα πρέπει να επιλεγεί αφ' ενός ένα αρκετά μεγάλο  $m$  και αφ' εταίρου να εξασφαλιστεί ότι το μήκος της περιόδου θα είναι  $m$  και όχι μικρότερο.

Σε κάθε περίπτωση, όμως, μπορούμε να πούμε ότι οι ψευδοτυχαίοι αριθμοί που παράγονται με τον παραπάνω αλγόριθμο μας ικανοποιούν απόλυτα για τα προβλήματα στα οποία χρησιμοποιείται η μέθοδος Monte Carlo και για αυτό είναι η κατεξοχήν χρησιμοποιούμενη γεννήτρια τυχαίων αριθμών.

### **4.2.3.3 Εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo στην ανάλυση του κυλινδρικού κελύφους με ατέλειες**

Ο βασικός αλγόριθμος της μεθόδου Monte Carlo συνίσταται ουσιαστικά στην επίλυση του προβλήματος NSAMP φορές καταλήγοντας κάθε φορά σε μία διαφορετική τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του κυλίνδρου με τις ατέλειες. Έχουμε δηλαδή NSAMP αποτελέσματα. Η τιμή των προσομοιώσεων (simulations) NSAMP που θα πραγματοποιηθούν είναι αυθαίρετη και ουσιαστικά αποτελεί το δείγμα πληθυσμού. Η εκλογή της τιμής της μεταβλητής NSAMP καθορίζεται από την κρίση του αναλυτή για το κατά πόσο η τιμή που επέλεξε αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα για εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Βέβαια, είναι προφανές ότι το ιδανικότερο θα ήταν να πραγματοποιηθεί ένας τεράστιος αριθμός προσομοιώσεων για όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικά αποτελέσματα. Ωστόσο κάτι τέτοιο είναι απαγορευτικό από άποψη υπολογιστικού χρόνου για τα σημερινά δεδομένα. Έτσι, στην εργασία των C.A.Schenk - G.I.Schueller επιλέγεται NSAMP=250 και στην εργασία των V.Papadopoulos - M.Papadrakakis λαμβάνεται NSAMP=200.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε της στατιστικές ιδιότητες του δείγματος των NSAMP κρίσιμων φορτίων, όπως η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και το coefficient of variation, έτσι ώστε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά του κυλίνδρου. Σχηματικά, ο αλγόριθμος φαίνεται επόμενη σελίδα :



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

## Στατική μη-γραμμική ανάλυση με το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC

### 5.1 Εισαγωγή

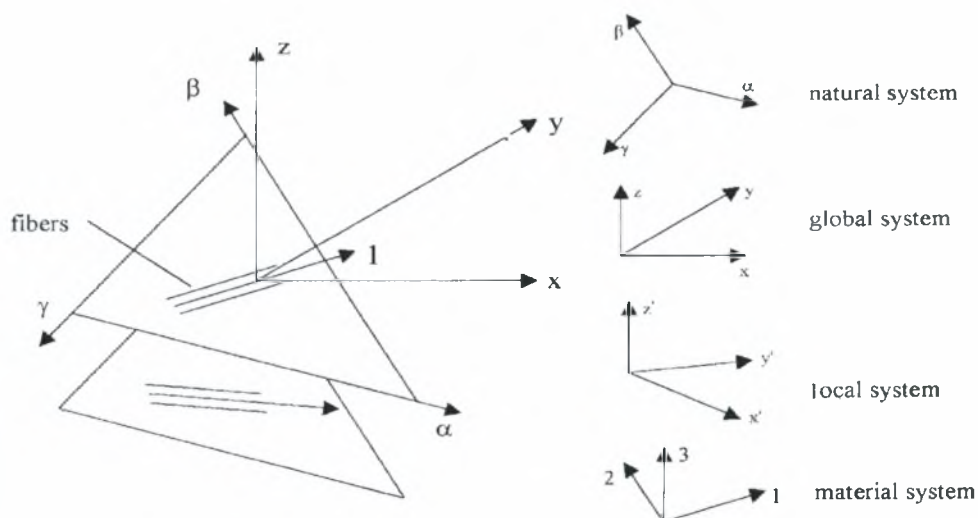
Στην παρούσα εργασία, όπως και στην εργασία των V.Paradopoulos - M.Paradrakakis(2004) γίνεται μία στατική μη-γραμμική ανάλυση με έναν κώδικα πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιεί το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC. Αντιθέτως, στην εργασία των C.A.Schenk - G.I.Schueller(2003) γίνεται επίσης μία στατική μη-γραμμική ανάλυση, αλλά με χρήση ενός τετραπλευρικού πεπερασμένου στοιχείου κελύφους με 9 κόμβους και 5 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, το οποίο αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως "πεπερασμένο στοιχείο 480".

Καθότι, η παρούσα εργασία ακολουθεί μία στατική μη-γραμμική ανάλυση με το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC είναι σκόπιμο, χάριν πληρότητας, να γίνει μία σύντομη παρουσίαση αυτού, αλλά και της στατικής μη-γραμμικής ανάλυσης που χρησιμοποιείται. Περισσότερα στοιχεία για το TRIC σε συνδυασμό και με τη μη-γραμμική ανάλυση υπάρχουν στις αναφορές [5] και [10].

## 5.2 Το πεπερασμένο στοιχείο κελύφους TRIC

### 5.2.1. Γενικά

Το στοιχείο TRIC (TRIangular Composite) αποτελεί τη βελτίωση μιας σειράς στοιχείων που προτάθηκαν από τον κ. Ι. Αργύρη (1995) και τους συνεργάτες του. Είναι ένα τριγωνικό επίπεδο και πολυστρωματικό στοιχείο κελύφους, το οποίο χρησιμοποιείται για την γραμμική και μη γραμμική ανάλυση λεπτών και σχετικά παχιών, ισότροπων και ανισότροπων κελυφών, πλακών αλλά και άλλων δομικών στοιχείων. Το στοιχείο αυτό, ανήκει σε μια καινούργια κατηγορία στοιχείων που μορφώνονται βάση της μεθόδου των φυσικών μορφών.



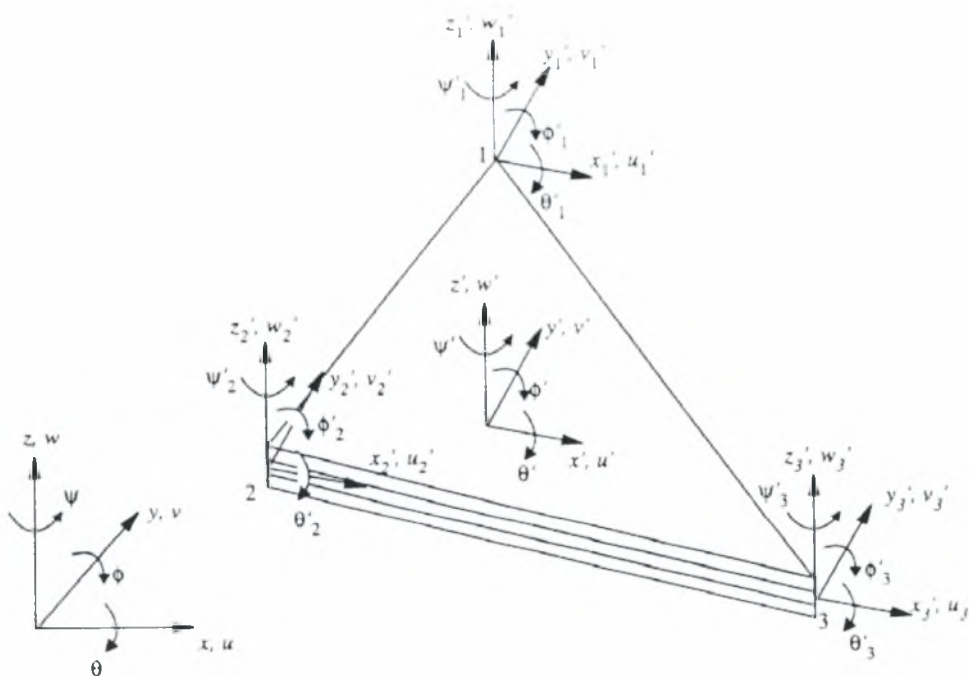
**Εικόνα 5.1:** Συστήματα αναφοράς του TRIC

Στο πεπερασμένο στοιχείο TRIC υπάρχουν 4 συστήματα αναφοράς όπως φαίνεται και από την εικ. 5.1 :

1. **Το φυσικό σύστημα "αβγ"**, οι άξονες του οποίου ταυτίζονται με τις πλευρές του τριγώνου

2. **Το τοπικό καρτεσιανό σύστημα** συντεταγμένων  $x'y'z'$ , η αρχή του οποίου βρίσκεται στο κέντρο βάρους του τριγώνου. Οι άξονες  $x'$  και  $y'$  κείτονται επί του επιπέδου του στοιχείου, ενώ ο άξονας  $z'$  είναι κάθετος σε αυτό.
3. **Το καθολικό καρτεσιανό σύστημα** συντεταγμένων  $xyz$  στο οποίο διατυπώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας
4. **Το σύστημα συντεταγμένων του υλικού** 123, για κάθε στρώση του τριγώνου, με τον άξονα 1 παράλληλο στη διεύθυνση των ινών, τον άξονα 2 κάθετο στον άξονα 1 και τον άξονα 3 κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου.

Το στοιχείο στο καθολικό καρτεσιανό σύστημα, έχει 18 βαθμούς ελευθερίας δηλαδή από 6 σε κάθε έναν από τους 3 κόμβους του (εικ. 5.2).



**Εικόνα 5.2:** Το τριγωνικό στοιχείο TRIC με τους επικόμβιους βαθμούς ελευθερίας

Ο αριθμός των παραμορφωσιακών μορφών του στοιχείου είναι ίσος με τη διαφορά του πλήθους των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας του στοιχείου και του



πλήθους των κινήσεων στερεού σώματος που μπορεί το στοιχείο να εκτελέσει στο χώρο, δηλαδή:

### **18 καρτεσιανοί β.ε. - 6 κινήσεις στερεού σώματος = 12 παραμορφωσιακές μορφές**

Το πεπερασμένο στοιχείο TRIC έχει πολλά πλεονεκτήματα συγκριτικά με άλλα στοιχεία κελύφους. Μεταξύ όλων των άλλων, αναφέρουμε χαρακτηριστικά τα εξής :

- Μείωση των διαστάσεων του μητρώου δυσκαμψίας στο φυσικό σύστημα, γεγονός που συνεπάγεται λιγότερες πράξεις και άρα μικρότερος υπολογιστικός χρόνος. Εύκολη αναγωγή των μητρώων από το φυσικό σύστημα στο τοπικό και καθολικό καρτεσιανό σύστημα.
- Όλα τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αναλυτικά. Σε αντίθεση με τα αντίστοιχα ισοπαραμετρικά στοιχεία κελύφους στα οποία υπολογίζεται σε κάθε σημείο Gauss, το μητρώο δυσκαμψίας υπολογίζεται αριθμητικά και κατόπιν γίνεται ολοκλήρωση στο σύνολο των σημείων που διαθέτει κάθε στοιχείο.
- Επειδή πρόκειται για πολυστρωματικό υλικό υπάρχει η δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού των τάσεων σε κάθε στρώση του στοιχείου. Έτσι μπορεί εύκολα και με μεγάλη ακρίβεια να βρεθεί αν μια στρώση έχει διαρρεύσει ή όχι σε κάθε στοιχείο, κάτι που είναι πολύ χρήσιμο για τη μη γραμμική ανάλυση των φορέων.



### **5.2.2. Καταστατικές εξισώσεις**

Η σχέση που συνδέει τις τάσεις με τις ανηγμένες παραμορφώσεις στο φυσικό σύστημα, για κάθε στρώση ( $k$ ) του στοιχείου έχει την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{ca} \\ \sigma_{cb} \\ \sigma_{cy} \\ \sigma_{sa} \\ \sigma_{sb} \\ \sigma_{sy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ay} & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{by} & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{ya} & K_{yb} & K_{yy} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & X_{aa} & X_{ab} & X_{ay} \\ \cdot & \cdot & \cdot & X_{ba} & X_{bb} & X_{by} \\ \cdot & \cdot & \cdot & X_{ya} & X_{yb} & X_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_{ta} \\ Y_{tb} \\ Y_{ty} \\ Y_{sa} \\ Y_{sb} \\ Y_{sy} \end{Bmatrix}_k \quad (5.1)$$

ή πιο σύντομα:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_c \\ \sigma_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} K_{ct} & \cdot \\ \cdot & X_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_t \\ Y_s \end{Bmatrix}_k \quad (5.2)$$

όπου:

$k = 1, \dots, N$  είναι ο αριθμός των στρώσεων

Σύμφωνα με τη μέθοδο των φυσικών μορφών, η φυσική ακαμψία προέρχεται μόνο από την παραμόρφωση του στοιχείου και όχι από τις κινήσεις στερεού σώματος.

### **5.2.3 Ελαστοπλαστικό καταστατικό μητρώο στο φυσικό σύστημα**

Το φυσικό ελαστοπλαστικό μητρώο ακαμψίας έχει την ίδια μορφή με το ελαστικό μητρώο ακαμψίας. Η επαυξητική σχέση τάσεων – ανηγμένων παραμορφώσεων στο φυσικό σύστημα, σε ένα βήμα φόρτισης, δίνεται από τη σχέση:

$$d\sigma_c^k = K_{ct}^{el-pl} dY_t^k \quad (5.3)$$

και ισχύει για κάθε στρώση  $k$ .

Η κύρια παραδοχή που γίνεται για την μόρφωση του ελαστοπλαστικού μητρώου ακαμψίας στηρίζεται στο διαχωρισμό της επαυξητικής ανηγμένης παραμόρφωσης σε ελαστικό και πλαστικό μέρος:

$$d\gamma_t = d\gamma_t^e + d\gamma_t^{pl} \quad (5.4)$$

Η επαυξητική τάση δίνεται από τη σχέση:

$$d\sigma_c = k_{ct}^{el} d\gamma_t - k_{ct}^{el} d\gamma_t^{pl} \quad (5.5)$$

Η αναλυτική έκφραση της σχέσης (5.5) είναι:

$$d\sigma_c^r = \left[ k_{ct}^{el} - \frac{1}{H + s_N^t k_{ct}^{el} s_N} (k_{ct}^{el} s_N)(k_{ct}^{el} s_N)^t \right]^T d\gamma_t^r \quad (5.6)$$

όπου η έκφραση μέσα στις αγκύλες είναι το ελαστοπλαστικό μητρώο ακαμψίας στο φυσικό σύστημα για κάθε στρώση k και:

$H$  = το μέτρο κράτυνσης

$s_N$  = το διάνυσμα της πλαστικής ροής όπως προκύπτει από τον τύπο

$$s_N = \frac{\partial F}{\partial \sigma_c} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ca}} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{c\beta}} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{c\gamma}} \right]^t \quad (5.7)$$

Μετά τον υπολογισμό του μητρώου ακαμψίας κάθε στρώσης, μορφώνεται το μητρώο ακαμψίας του στοιχείου, μετασχηματίζεται στο τοπικό και στη συνέχεια στο καθολικό σύστημα όπου γίνεται η μόρφωση του μητρώου ακαμψίας του φορέα. Το φυσικό ελαστοπλαστικό μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου προκύπτει αθροίζοντας τα ελαστοπλαστικά μητρώα δυσκαμψίας κάθε στρώσης του στοιχείου.

$$k_N^{el-pl} = \sum_{k=1}^n (a_N^t k_{ct}^{el-pl} a_N) \quad (5.8)$$

## 5.3 Μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc-length method)

Στην ελαστική μη-γραμμική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε για την εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του κυλίνδρου, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc-length method) για την εύρεση της καμπύλης φορτίου μετατοπίσεων.

Στη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου, η κατασκευή φορτίζεται με φορτίο  $\lambda \mathbf{P}$ , όπου  $\mathbf{P}$  είναι το σταθερό εξωτερικό φορτίο -φορτίο βάσης- και  $\lambda$  είναι ο φορτικός συντελεστής. Αν με  $\delta$  συμβολίζεται ο αριθμός της επαύξησης του φορτίου και με  $i$  ο αριθμός της μη γραμμικής επανάληψης στην οποία βρισκόμαστε στο  $m$  βήμα, έχουμε:

$$\mathbf{P}_{i+1}^m = \mathbf{P}_i^m + \delta \lambda \mathbf{P} \quad (5.9)$$

Σε κάθε επανάληψη, ορίζεται η παράμετρος  $\delta \lambda$  έτσι ώστε το φορτίο να αυξάνει προοδευτικά ανάλογα με την επέκταση της μη γραμμικότητας στο φορέα. Η εξίσωση ισορροπίας σε κάθε επανάληψη γράφεται:

$$\mathbf{K}_i^m \mathbf{x}_i = \mathbf{P}_{i+1}^m - \mathbf{F}_i^m \quad (5.10)$$

όπου  $\mathbf{F}_i^m$  είναι το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων. Το διάνυσμα των παραμενουσών δράσεων είναι:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F}_i^m - \mathbf{P}_i \quad (5.11)$$

Το διάνυσμα της μετατόπισης  $\mathbf{x}$  σε κάθε επανάληψη δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{x}_i = \delta \lambda_{i+1} \mathbf{x}_i^p + \mathbf{x}_i^c \quad (5.12)$$

Το δiάνυσμα των μετατοπίσεων της πρόλεξης είναι:

$$\mathbf{x}_i^p = \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{P} \quad (5.13)$$

ενώ το διορθωτικό δiάνυσμα των μετατοπίσεων είναι:

$$\mathbf{x}_i^c = -\mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{g}_i \quad (5.13)$$

Το επαυξητικό δiάνυσμα των μετατοπίσεων στο τέλος της  $i+1$  επανάληψης είναι:

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \lambda_{i+1} \mathbf{x}_i^p + \mathbf{x}_i^c \quad (5.14)$$

ενώ το συνολικό δiάνυσμα των μετατοπίσεων είναι:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \delta \lambda_{i+1} \mathbf{x}_i^p + \mathbf{x}_i^c \quad (5.15)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία που προτάθηκε από τον Crisfield η ακτίνα σύγκλισης της μεθόδου  $\Delta l$  (κυλινδρική μέθοδος σταθερού μήκους τόξου) υπολογίζεται από:

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} \Delta \mathbf{u}_i = \Delta l \quad (5.16)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση 5.13 και 5.14 στη σχέση 5.16 προκύπτει η πιο κάτω δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\mathbf{a}_1 \delta_{i+1}^2 + \mathbf{a}_2 \delta_{i+1} + \mathbf{a}_3 = 0 \quad (5.17)$$

με τις αντίστοιχες τιμές των  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  και  $\mathbf{a}_3$  που προκύπτουν.

Για την πρώτη αύξηση του φορτίου, το  $\delta \lambda_1$  δίνεται σαν δεδομένο του προβλήματος και χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η ακτίνα του μήκους τόξου  $\Delta l$ , η οποία παραμένει σταθερή σε όλη της διάρκεια της υπολογιστικής διαδικασίας. Για τις επόμενες αυξήσεις το μήκος του τόξου υπολογίζεται από τις ρίζες της δευτεροβάθμιας

εξίσωσης. Η μέθοδος σταθερού μήκους τόξου μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο με τη μέθοδο Newton-Raphson (Standard Newton Raphson) όσο και με τη τροποποιημένη Newton-Raphson (modified Newton-Raphson). Στην περίπτωση μας χρησιμοποιήθηκε η τροποποιημένη Newton-Raphson (modified Newton-Raphson).

Κατά τη μη γραμμική ανάλυση με τη μέθοδο σταθερού μήκους τόξου, χρησιμοποιούνται επίσης δύο παράμετροι με τις οποίες προσδιορίζονται οι περιοχές σταθερής και ουδέτερης ισορροπίας, καθώς και οι περιοχές ισχυρής και ασθενούς αστάθειας. Οι παράμετροι αυτοί λαμβάνουν υπόψη την ενέργεια της κατασκευής (παράμετρος τρέχουσας ακαμψίας) χρησιμοποιώντας το διάνυσμα μετατοπίσεων της πρόλεξης και το είδος των ιδιοτιμών του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας (θετικές, μηδενικές, αριθμός αρνητικών ιδιοτιμών κτλ.). Οι πληροφορίες από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του προσήμου της ορίζουσας του εφαπτομενικού μητρώου ακαμψίας. Οι παράμετροι αυτοί εκφράζονται ως εξής:

$$\text{Ενέργεια πρόλεξης: } E_p = \mathbf{u}_p^t \mathbf{K}_T \mathbf{u}_p$$

$$\text{ή παράμετρος τρέχουσας ακαμψίας: } S_p = \mathbf{x}_0^t \mathbf{P}$$

$$\text{ιδιοτιμές, ορίζουσα: } \lambda_n, \text{ πρόσημο } (|\mathbf{K}_T|)$$

Οι πιθανοί δρόμοι ισορροπίας είναι οι ακόλουθοι:

1. Όταν και η ενέργεια και η πρώτη ιδιοτιμή είναι θετικές, τότε η κίνηση της κατασκευής ονομάζεται σταθερή (stable).
2. Όταν η ενέργεια είναι θετική αλλά η πρώτη ιδιοτιμή είναι μηδενική τότε υπάρχει σημείο διακλάδωσης (bifurcation point). Η ύπαρξη και άλλων δρόμων ισορροπίας εκτός από τον κύριο, εξαρτάται από τον αριθμό των μηδενικών ιδιοτιμών. Πολλές διακλαδώσεις μπορεί να περιλαμβάνουν σταθερές συμμετρικές διακλαδώσεις, μη σταθερούς συμμετρικούς δρόμους και αντισυμμετρικές διακλαδώσεις.
3. Όταν η ενέργεια και η πρώτη ιδιοτιμή είναι και οι δύο μηδενικές, τότε η κατασκευή βρίσκεται σε ουδέτερη ισορροπία (neutral equilibrium), ενώ μπορεί να υπάρχουν και

άλλοι δρόμοι ισορροπίας. Γενικά, η ύπαρξη μηδενικών ιδιοτιμών δείχνει την ύπαρξη διακλαδώσεων και τη πιθανότητα για δρόμους δευτερεύουσας ισορροπίας.

4. Όταν υπάρχουν μία ή περισσότερες αρνητικές ιδιοτιμές στο εφαπτομενικό μητρώο, η κατασκευή κινείται σε ασταθές περιοχές. Αν και η ενέργεια και οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές, η κατασκευή κινείται σε ισχυρή ασταθή περιοχή (*strongly unstable region*). Αν η ενέργεια είναι θετική αλλά μία ή περισσότερες ιδιοτιμές είναι αρνητικές, η κατασκευή περνά σε περιοχή ασθενούς αστάθειας (*weakly unstable region*) και τείνει να αποκτήσει θετική ενέργεια.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο

## Αριθμητικά παραδείγματα και αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών

### 6.1 Εισαγωγή

Η μεγάλη επίδραση των κάθε είδους ατελειών, στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού λεπτότοιχων κυλινδρικών κελυφών έχει αποδειχθεί μέσα από πολλές εργασίες. Η συνήθης αντιμετώπιση του προβλήματος όμως γινόταν μέσα από αναλυτικές ή ημιαναλυτικές λύσεις. Είναι σκόπιμο λοιπόν, να αναφέρουμε τα αποτελέσματα των εργασιών που εφάρμοσαν αριθμητικές μεθόδους και τα οποία καταδεικνύουν τη σπουδαιότητα των ατελειών στην ανάλυση των κελυφών αυτού του είδους.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι δύο σημαντικότερες εργασίες που έχουν γίνει στη συγκεκριμένη κατεύθυνση είναι των C.A.Schenk - G.I.Schueller το 2003 και αργότερα των V.Paradopoulos - M.Paradrakakis το 2004. Για λόγους συντομίας, τα αποτελέσματα αλλά και ο τρόπος εργασίας των C.A.Schenk - G.I.Schueller θα αναφερθούν λιγότερο αναλυτικά - χωρίς ωστόσο να μειώνεται η αξία τους - καθώς η μεθοδολογία της παρούσας εργασίας είναι όμοια με εκείνη των V.Paradopoulos - M.Paradrakakis (2004) .

Σκοπός όλων των προηγούμενων εργασιών, αλλά και της παρούσας είναι να προσεγγιστεί όσο το δυνατόν περισσότερο η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτει στα πειράματα. Επιπλέον, πρέπει να δειχθεί ότι η κατανομή των κρίσιμων



φορτίων λυγισμού που προκύπτουν από τα πειράματα σε κάποιον πεπερασμένο αριθμό δοκιμών έχει τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες ( standard deviation, coefficient of variation) με εκείνη που προκύπτει από τα αποτελέσματα της ανάλυσης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

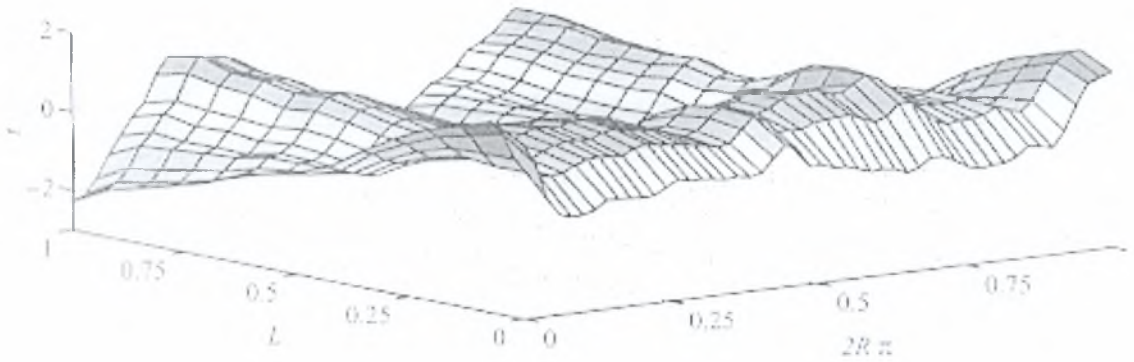
## **6.2 Παράδειγμα I**

### **6.2.1 Δεδομένα - Τρόπος εργασίας**

Οι C.A.Schenk - G.I.Schueller (2003) λαμβάνουν υπόψιν μόνο τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες. Το κέλυφος που αναλύεται ( βλ. Κεφ.4 ) έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

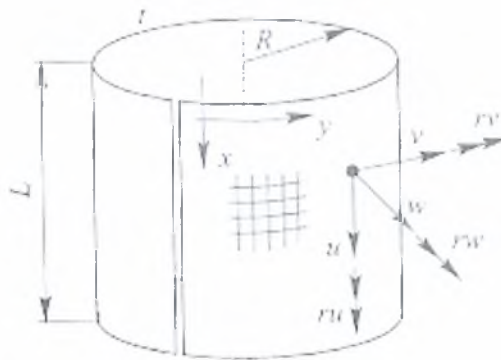
Ακτίνα R	0.01016 m
Πάχος τοιχώματος t	0.00011597 m
Μήκος L	0.2023 m
Μέτρο Ελαστικότητας E	$1.0441 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Δείκτης Poisson $\nu$	0.3

Για την παραγωγή των δειγματοσυναρτήσεων των γεωμετρικών ατελειών χρησιμοποιείται η "ανάπτυξη Karhunen-Loève" και όλα τα στατιστικά δεδομένα προέρχονται από την IIDB (στην εικ. φαίνονται οι μετρημένες ατέλειες ενός A shell όπως βρίσκονται στην IIDB).



**Εικόνα 6.1:** Μετρημένες αρχικές γεωμετρικές ατέλειες από την IIDB

Στην εικ. 6.2 φαίνεται ο κύλινδρος που αναλύθηκε καθώς και τα διάφορα συστήματα συντεταγμένων του. Η ανάλυση έγινε χρησιμοποιώντας ένα τετραπλευρικό στοιχείο κελύφους με 5 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο ( αναφέρεται κατά Rankin et al. ως "πεπερασμένο στοιχείο 480").



**Εικόνα 6.2:** Ο κύλινδρος και τα συστήματα συντεταγμένων

Επιπλέον για την επιλογή του καλύτερου δικτύου πεπερασμένων στοιχείων σε ότι αφορά την πυκνότητά του έγινε με διερεύνηση για διάφορα δίκτυα τα αποτελέσματα της οποίας φαίνονται στο σχ. 6.1. Σε αυτά τα διαγράμματα συγκρίνονται τα διάφορα δίκτυα πεπερασμένων στοιχείων που δοκιμάστηκαν, με το δείκτη  $\lambda$  ο οποίος αποτελεί το *ανηγμένο φορτίο λυγισμού* που προέκυπτε.

Ο δείκτης  $\lambda$  αποτελεί ουσιαστικά το μέτρο σύγκρισης του φορτίου λυγισμού που προκύπτει από την ανάλυση στον H/Y, σε σύγκριση με το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προβλέπει η κλασσική θεωρία:

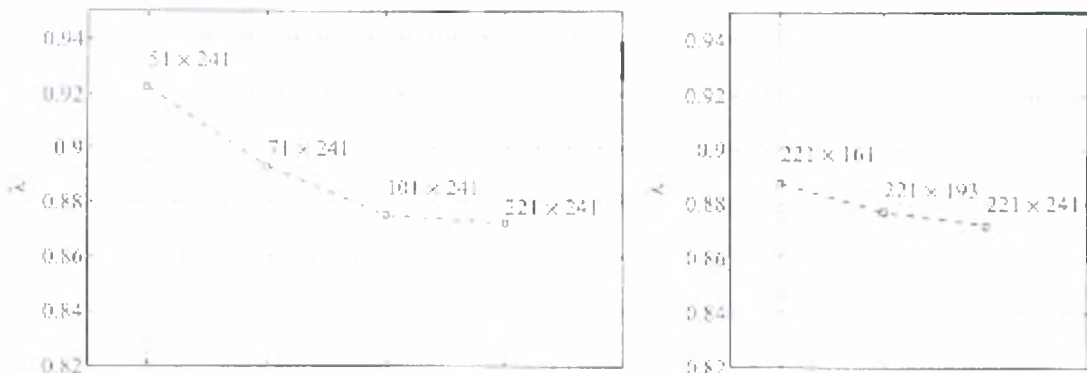
$$\lambda = \frac{\text{κρίσιμο φορτίο λυγισμού ανάλυσης}}{\text{κρίσιμο φορτίο λυγισμού κλασσικής θεωρίας}}$$

Το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ενός ισότροπου κυλινδρικού κελύφους χωρίς ατέλειες και υπό αξονική συμπίεση, που προβλέπει η κλασσική θεωρία, κατά Lorenz and Timoshenko είναι:

$$\sigma_u^{(\text{perfect})} = \frac{Et^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (\text{κρίσιμη τάση})$$

$$P_u^{(\text{perfect})} = \sigma_u^{(\text{perfect})} \cdot (2\pi R) \quad (\text{κρίσιμο φορτίο λυγισμού})$$

Για το συγκεκριμένο κύλινδρο που εξετάζουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προκύπτει είναι  $P_u^{(\text{perfect})} = 5350 \text{ kN}$ .



**Σχήμα 6.1:** Τιμές του ανηγμένου φορτίου λυγισμού  $\lambda$  για διάφορα δίκτυα Π.Σ.

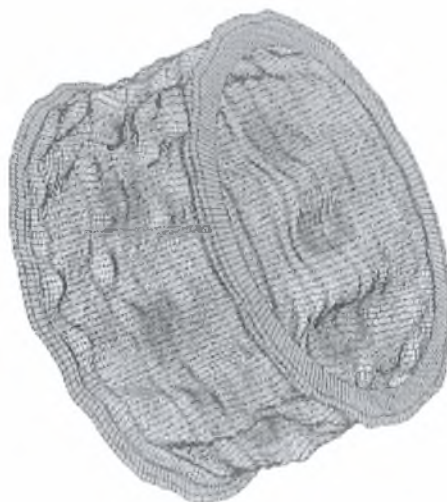
Τελικά επιλέχθηκε ένα δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων  $101 \times 193$  το οποίο θεωρήθηκε ικανοποιητικό ( το σφάλμα διακριτοποίησης προκύπτει περίπου 3%) όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα.

Κατόπιν της επιλογής του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων, ακολούθησε μία στατική μη γραμμική ανάλυση με τον αξιόπιστο κώδικα STAGS. Για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων επιλέχθηκε η *τροποποιημένη μέθοδος Newton Raphson (modified Newton-Raphson method)* ενώ για την εύρεση της καμπύλης φορτίου - μετατοπίσεων επιλέχθηκε η *μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (arc - length method)*.

Τελικά, πραγματοποιήθηκε μια προσομοίωση Monte Carlo σε ένα πλήθος 250 "δειγμάτων" - κυλίνδρων κάθε ένας εκ των οποίων είχε και διαφορετικές αρχικές γεωμετρικές ατέλειες.

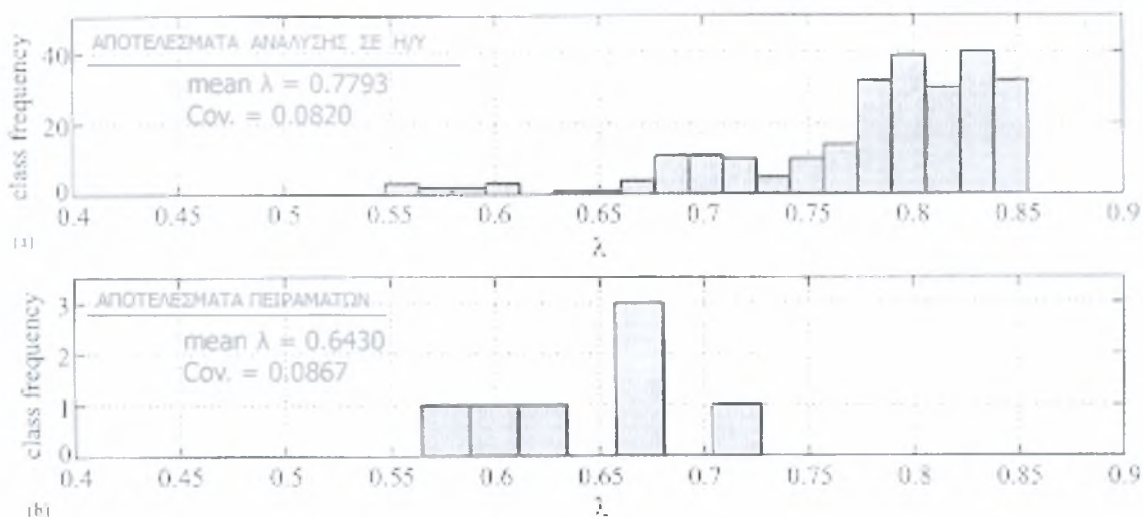
### **6.2.2 Αποτελέσματα**

Στην εικ. 6.3 φαίνεται ο παραμορφωμένος κύλινδρος τη στιγμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού :



**Εικόνα 6.3:** Ο παραμορφωμένος κύλινδρος τη στιγμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού

Έπειτα από τις 250 προσομοιώσεις που έγιναν, στα πλαίσια της Monte Carlo simulation, τα αποτελέσματα φαίνονται εποπτικά στο ιστόγραμμα (α) του σχ. 6.2 ,όπου ταυτόχρονα φαίνεται και το ιστόγραμμα (β) των πειραματικών δοκιμών που έγιναν στα 7 κυλινδρικά δοκίμια του πίνακα του εδαφίου 4.2 ( σύμφωνα με την IIDB ) :



**Σχήμα 6.2:** (α) Ιστόγραμμα 250 simulations της ανάλυσης και (β) Ιστόγραμμα από πειράματα σε 7 κυλινδρικά δοκίμια

### 6.2.3 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων

Στο ιστόγραμμα (α) του σχ. 6.2 βλέπουμε ότι, με τις 250 προσομοιώσεις που έγιναν, πήραμε ένα μέσο όρο  $\lambda = 0.7793$  (που αντιστοιχεί σε φορτίο 4169 N , ενώ στο ιστόγραμμα (β), από τα πειραματικά αποτελέσματα 7 δοκιμών - κυλίνδρων προέκυψε ένας μέσος όρος  $\lambda = 0.6430$  (που αντιστοιχεί σε φορτίο 3440 N). Κάτι τέτοιο είναι απόλυτα φυσιολογικό, γιατί τα πειραματικά δοκίμια έχουν επιπρόσθετα από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και ατέλειες στο πάχος του τοιχώματος, ατέλειες στο υλικό, ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες αλλά και ατέλειες στην κατακορυφότητα του φορτίου. Όλες αυτές οι επιπλέον ατέλειες δεν λήφθηκαν υπόψιν στην ανάλυση και για αυτό προέκυψε φορτίο λυγισμού μεγαλύτερο από το πειραματικό. Ωστόσο, έγινε σαφέστατα φανερή η μεγάλη επίδραση που έχουν οι αρχικές γεωμετρικές ατέλειες στο

κρίσιμο φορτίο λυγισμού αφού είδαμε ότι αυτό μειώθηκε πάνω από 20% σε σχέση με το φορτίο που υπολογίζεται από την κλασσική θεωρία.

Ένα επίσης σημαντικό εύρημα της συγκεκριμένης εργασίας αποτελεί το γεγονός ότι η κατανομή των φορτίων μπορεί πολύ ικανοποιητικά να υπολογιστεί με τη συγκεκριμένη μεθοδολογία, καθότι τα covariance of efficient των δύο κατανομών είναι πολύ κοντά.

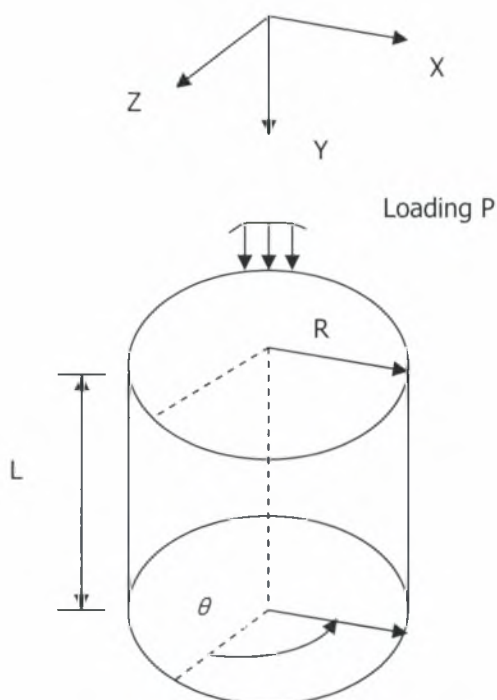
## **6.3 Παράδειγμα ΙΙ**

Η εργασία των V.Papadopoulos - M.Papadrakakis (2004) αποτελεί ουσιαστικά επέκταση της εργασίας των C.A.Schenk - G.I.Schueller και προχωράει την ανάλυση ένα βήμα παραπάνω. Εκτός από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες λαμβάνονται υπόψιν για πρώτη φορά και οι ατέλειες στο πάχος και στο υλικό του κυλίνδρου.

### **6.3.1 Δεδομένα - Τρόπος εργασίας**

Ο κύλινδρος που αναλύθηκε καθώς και όλα τα γεωμετρικά στοιχεία και τα στοιχεία του υλικού του φαίνονται στο σχ. 6.3 και στον παρακάτω πίνακα.

Ακτίνα $R$	0.01016 m
Πάχος τοιχώματος $t$	0.00011597 m
Μήκος $L$	0.2023 m
Μέτρο Ελαστικότητας $E$	$1.0441 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Δείκτης Poisson $\nu$	0.3



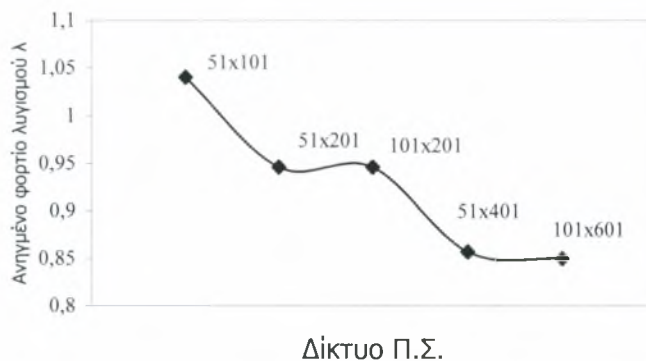
**Σχήμα 6.3:** Κυλινδρικό κέλυφος υπό αξονική θλίψη

### **Δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων**

Η ανάλυση γίνεται με το πεπερασμένο στοιχείο TRIC. Προκειμένου να εξαχθούν ακριβή και ικανοποιητικά αποτελέσματα από τη μη-γραμμική ανάλυση που απαιτείται για την προσομοίωση Monte Carlo, πρέπει να επιλεγθεί το πλέον βέλτιστο δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων το οποίο θα ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

1. Θα έχει ικανοποιητική ακρίβεια στην πρόβλεψη του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του κυλίνδρου
2. Θα παρέχει ακριβή απεικόνιση των ιδιοτήτων των στοχαστικών πεδίων των ατελειών που μοντελοποιούνται

Για το σκοπό αυτό, έγινε μία διερεύνηση πάνω σε διάφορα δίκτυα πεπερασμένων στοιχείων για την ανάλυση ενός τεταρτημορίου του τέλειου (χωρίς ατέλειες) κυλίνδρου, τα αποτελέσματα της οποίας φαίνονται στο σχ. 6.4 :

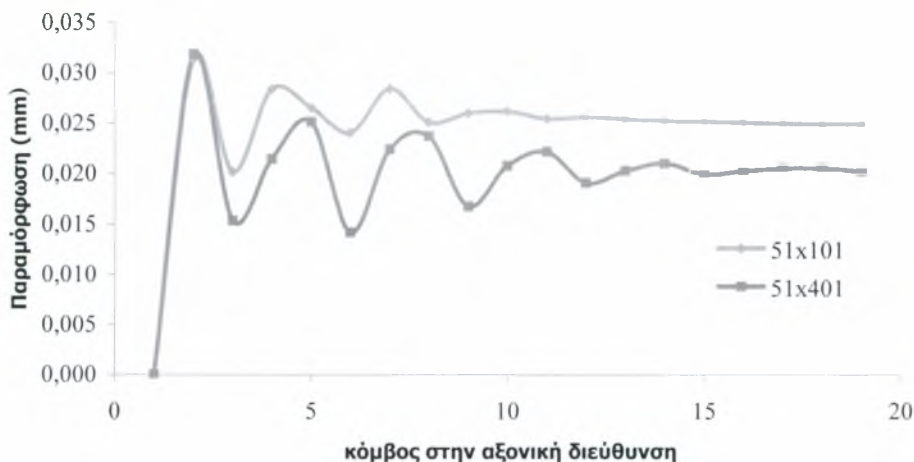


**Σχήμα 6.4:** Παραμετρική διερεύνηση για την επιλογή του καλύτερου δικτύου Π.Σ.

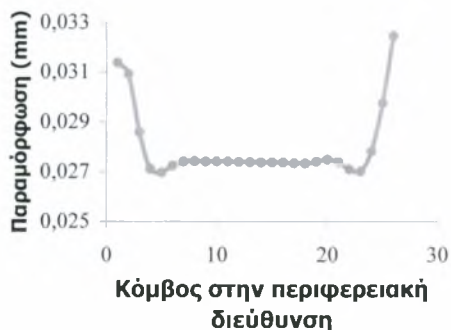
Από το σχ. 6.4 γίνεται φανερό ότι μία διακριτοποίηση του κυλίνδρου με 51 κόμβους κατά την αξονική διεύθυνση είναι ικανοποιητική, ενώ για την περιφερειακή διεύθυνση απαιτείται μία διακριτοποίηση με 401 κόμβους. Μία τέτοια διακριτοποίηση προσφέρει ικανοποιητική ακρίβεια και ικανοποιεί τις πιο πάνω απαιτήσεις που τέθηκαν. Ωστόσο, ένα δίκτυο πεπερασμένων στοιχείων TRIC διαστάσεων 51 x 401 έχει περίπου 120,000 βαθμούς ελευθερίας και είναι προφανές ότι η χρήση ενός τέτοιου μοντέλου σε μία μη- γραμμική ανάλυση σε συνδυασμό με την Monte Carlo Simulation, απαιτεί υπερβολικά μεγάλο ( απαγορευτικό θα λέγαμε) υπολογιστικό χρόνο.

Έτσι, στα πλαίσια της προσπάθειας μείωσης του απαιτούμενου υπολογιστικού χρόνου του μοντέλου μελετήθηκαν οι προλυγισμικές παραμορφώσεις ενός πυκνού (51x401) και ενός αραιότερου δικτύου (51x101) τόσο κατά την αξονική διεύθυνση (σχ. 6.5) όσο και κατά την περιφερειακή διεύθυνση (σχ. 6.6 ) του ενός τεταρτημορίου του κυλίνδρου.

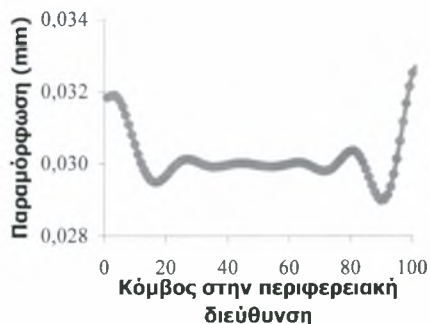




**Σχήμα 6.5:** Προλυγισμικές παραμορφώσεις του κυλίνδρου κατά την αξονική διεύθυνση



(α)



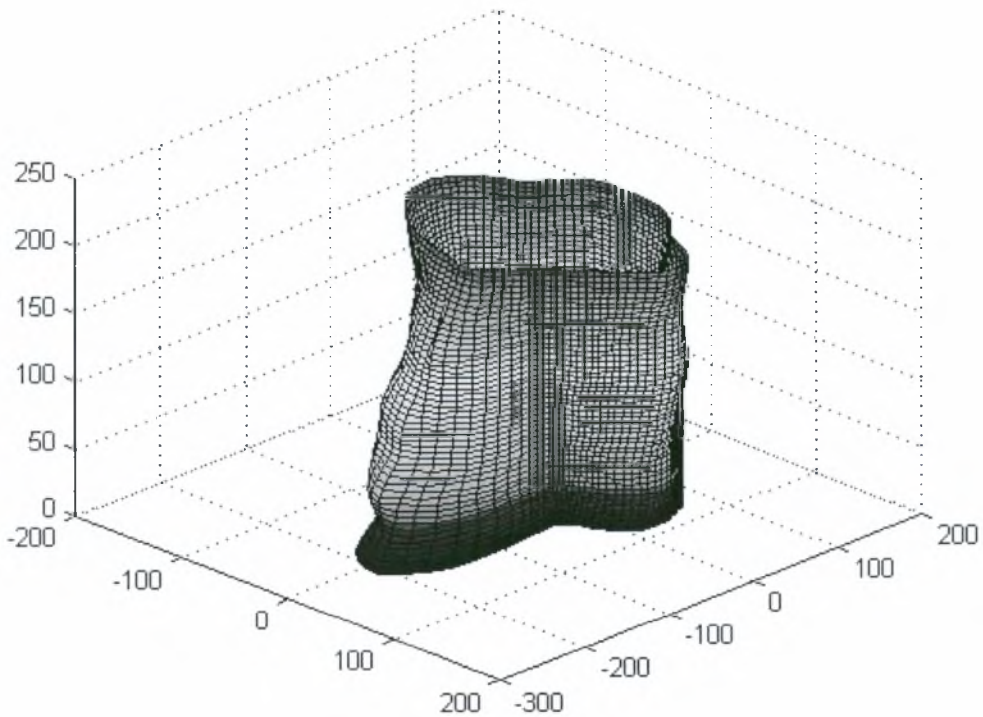
(β)

**Σχήμα 6.6:** Προλυγισμικές παραμορφώσεις του κυλίνδρου κατά την περιφερειακή διεύθυνση (α) δίκτυο 51x101 και (β) δίκτυο 51x401

Από τα παραπάνω σχήματα γίνεται φανερό ότι το παραμορφωμένο σχήμα που προκύπτει από το αραιό δίκτυο (51x101) είναι αρκετά κοντά σε εκείνο που προκύπτει από το πιο πυκνό δίκτυο (51x401). Συνεπώς, το οποιοδήποτε σφάλμα ( περίπου 15% ) προκύπτει στον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του κυλίνδρου με τη χρήση του αραιότερου δικτύου (51x101) θεωρείται ως ένα συστηματικό σφάλμα διακριτοποίησης, το οποίο δεν επηρεάζει την αξιοπιστία των συγκριτικών αποτελεσμάτων για τη λυγισμική συμπεριφορά του κυλίνδρου με ατέλειες.

Επιπλέον, αν γίνει μία εκτύπωση ( υπό κατάλληλη κλίμακα ) των γεωμετρικών ατελειών που παράγονται από την εξίσωση 4.6 τότε παίρνουμε μία μορφή όπως της εικ. 6.4. Βλέπουμε δηλαδή ότι το συγκεκριμένο δίκτυο απεικονίζει ικανοποιητικά το στοχαστικό πεδίο καθότι η διαμόρφωση και η πυκνότητα του επηρεάζουν τα μήκη συσχέτισης του φάσματος των ατελειών ( $b_1$  και  $b_2$ ).

Κατά συνέπεια, από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι η χρήση του δικτύου  $51 \times 101$  κρίνεται αρκετά ικανοποιητική και προσφέρει ακριβείς και επαρκείς προβλέψεις του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του κυλίνδρου με ατέλειες.



**Εικόνα 6.4:** Ο κύλινδρος μετά την προσομοίωση των αρχικών γεωμετρικών ατελειών με τη μέθοδο της φασματικής απεικόνισης ( υπό κατάλληλη κλίμακα )

### **Τρόπος ανάλυσης**

Για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων επιλέχθηκε η τροποποιημένη μέθοδος *Newton Raphson (modified Newton-Raphson method)* ενώ για την εύρεση της καμπύλης φορτίου - μετατοπίσεων επιλέχθηκε η μέθοδος σταθερού μήκους τόξου (*arc - length method*).

### **6.3.2 Αποτελέσματα**

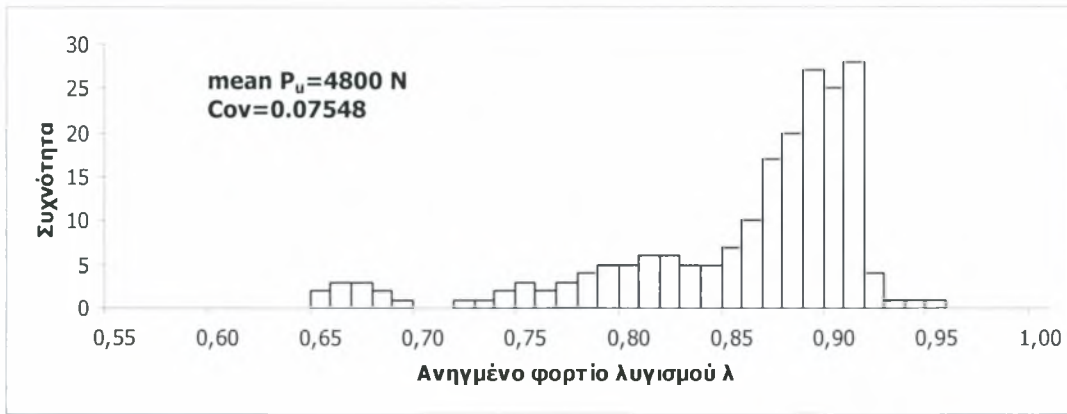
Η εφαρμογή της μεθόδου Monte Carlo έγινε για έναν αριθμό προσομοιώσεων NSAMP=200, ο οποίος κρίθηκε επαρκής για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και του coefficient of variation της κατανομής των κρίσιμων φορτίων λυγισμού που προέκυπταν από την ανάλυση.

#### **6.3.2.1 Τέλειος κύλινδρος (χωρίς ατέλειες)**

Η στατική μη-γραμμική ανάλυση με έναν αξιόπιστο κώδικα πεπερασμένων στοιχείων TRIC, χωρίς να ληφθούν υπόψιν οποιουδήποτε είδους ατέλειες (τέλειος κύλινδρος) δίνει την τιμή  $P_u^{(perfect)} = 5650$  N.

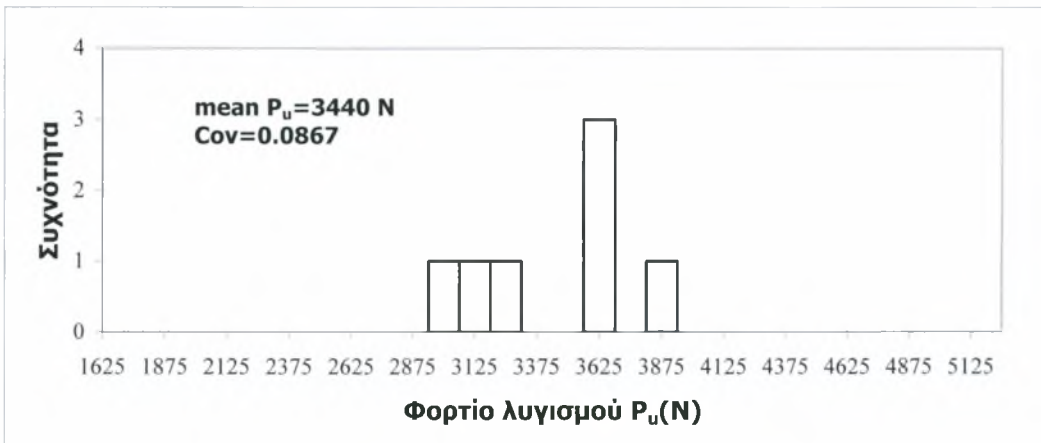
#### **6.3.2.2 Συνυπολογισμός μόνο γεωμετρικών ατελειών**

Το ιστόγραμμα των 200 simulations που έγιναν στα πλαίσια της μεθόδου Monte Carlo φαίνεται στο σχ. 6.7. Για λόγους σύγκρισης και μόνο, το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προκύπτει σε κάθε simulation, διαιρείται με το  $P_u^{(perfect)} = 5650$  N και όχι με αυτό που δίνει η κλασική θεωρία (5350 N), έτσι ώστε να λάβουμε υπόψιν και το σφάλμα διακριτοποίησης λόγω του αραιότερου δικτύου πεπερασμένων στοιχείων. Έτσι, προκύπτει το ανηγμένο φορτίο λυγισμού  $\lambda$  που δίνεται στα ιστογράμματα.



**Σχήμα 6.7:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό μόνο γεωμετρικών ατελειών (200 simulations)

Παράλληλα, για λόγους ευκολίας και σύγκρισης παραθέτουμε ξανά στο σχ. 6.8 το ιστόγραμμα που προέκυψε από τα πειραματικά αποτελέσματα σε 7 δοκίμια - κυλίνδρους, αυτή τη φορά με ακριβείς τιμές φορτίων λυγισμού που προέκυψαν.



**Σχήμα 6.8:** Ιστόγραμμα φορτίων που προέκυψαν από τα πειράματα σε 7 κυλινδρικά δοκίμια

Από τη σύγκριση των δύο παραπάνω ιστογραμμάτων, παρατηρούμε ότι η κατανομή των φορτίων, όπως προέκυψαν από την ανάλυση στον Η/Υ προσεγγίζει εκείνη των πειραματικών αποτελεσμάτων. Επιπλέον, το coefficient of variation των δύο κατανομών είναι σχεδόν το ίδιο.

Παρόλα αυτά, παρατηρείται ακόμα διαφοροποίηση στη μέση τιμή του φορτίου λυγισμού αφού στην ανάλυση προέκυψε  $P_u=4800\text{ N}$  ενώ στα πειράματα βρέθηκε η τιμή  $P_u=3440\text{ N}$ . Αυτό οφείλεται, όπως έχουμε εξάλλου πει και πιο πριν, σε δύο παράγοντες :

- Εν μέρει, στο γεγονός ότι στην ανάλυση δεν έχουν ληφθεί υπόψιν κανενός είδους ατέλειες πέραν των αρχικών γεωμετρικών ατελειών. Κάτι τέτοιο, όπως αποδείχθηκε και στην εργασία των C.A.Schenk - G.I.Schueller (2003), δεν είναι ρεαλιστικό και δίνει κρίσιμα φορτία λυγισμού μεγαλύτερα των πειραμάτων αφού σημαντική επίδραση έχουν και οι υπόλοιπες ατέλειες που υπάρχουν στην κατασκευή ( ατέλειες στο υλικό, στο πάχος του τοιχώματος του κυλίνδρου, ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες, απόκλιση του ασκούμενου φορτίου από την κατακόρυφο ).
- Εν μέρει, στο σταθερό σφάλμα διακριτοποίησης που προκύπτει από τη διακριτοποίηση του φορέα με το αραιότερο δίκτυο των 51x101 κόμβων και το οποίο δίνει σταθερά μεγαλύτερα κρίσιμα φορτία λυγισμού. Αυτό δικαιολογεί εξάλλου και την διαφορά που υπάρχει μεταξύ του αποτελέσματος της εργασίας των C.A.Schenk - G.I.Schueller (  $P_u = 4169 \text{ N}$  ) και της εργασίας των V.Paradopoulos - M.Paradrakakis (  $P_u = 4800 \text{ N}$  ). Υπάρχει δηλαδή ένα σταθερό σφάλμα της τάξης του 15% παραπάνω.

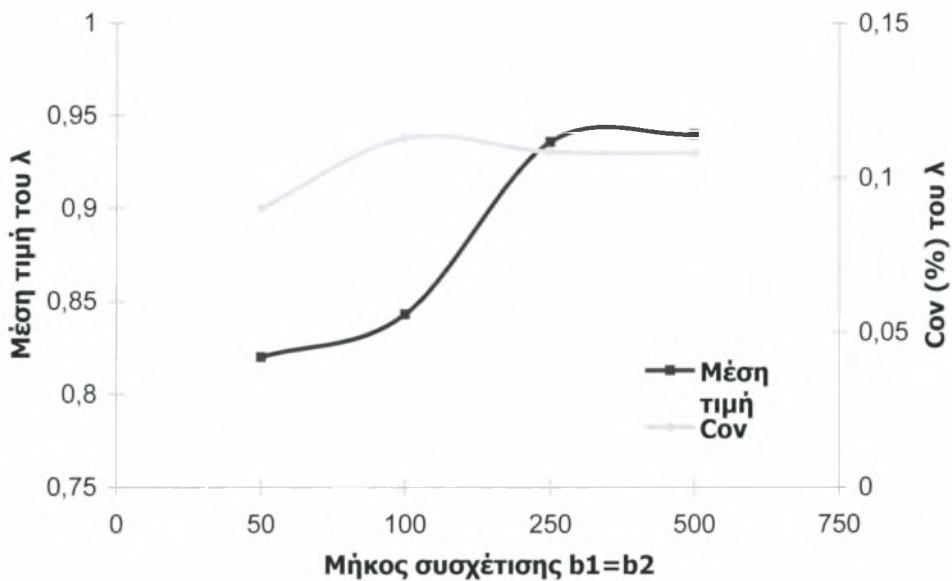
### **6.3.2.3 Συνοπολογισμός ατελειών υλικού και πάχους κυλίνδρου**

Όπως έχει προειπωθεί και σε προηγούμενο κεφάλαιο (κεφ. 4), δεν υπάρχει κανένα καταγεγραμμένο και μετρημένο στην πράξη, στοιχείο για τη μορφή και το είδος των ατελειών που παρουσιάζει το υλικό και το πάχος του τοιχώματος του κυλίνδρου. Παρόλ' αυτά, στην εργασία των V.Paradopoulos - M.Paradrakakis γίνεται για πρώτη φορά μία προσπάθεια συνοπολογισμού και αυτών των ατελειών στην ανάλυση έτσι ώστε να διαπιστωθεί η επίδρασή τους στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Για το σκοπό αυτό και λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω γίνεται μία προκαταρκτική παραμετρική διερεύνηση σε ό,τι αφορά τις στατιστικές ιδιότητες των συγκεκριμένων στοχαστικών πεδίων (μέτρου ελαστικότητας  $E$  και πάχους  $t$ ).

Θεωρούμε καταρχήν, ότι και τα δύο στοχαστικά πεδία (τα οποία περιγράφονται εκτενώς στο κεφ. 4) έχουν ένα φάσμα το οποίο έχει τυπική απόκλιση  $\sigma_f = 0.1$ . Επιπλέον,

γίνεται η υπόθεση ότι και στις δύο διευθύνσεις τα στοχαστικά πεδία έχουν την ίδια τιμή μήκους συσχέτισης  $b_1=b_2$  (correlation lengths). Πραγματοποιήθηκαν επομένως, δύο ξεχωριστές παραμετρικές αναλύσεις για διάφορες τιμές των μηκών συσχέτισης:

1. Στην πρώτη ανάλυση υπολογίστηκε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του κυλίνδρου λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις ατέλειες του υλικού. Δηλαδή, αναλύθηκε ο τέλειος κύλινδρος (χωρίς γεωμετρικές ατέλειες) θεωρώντας μοναδικό στοχαστικό πεδίο το μέτρο ελαστικότητας  $E$ . Μελετήθηκαν οι εξής τιμές των μηκών συσχέτισης: (α)  $b_1=b_2=50$  , (β)  $b_1=b_2=100$  , (γ)  $b_1=b_2=250$  , (δ)  $b_1=b_2=500$  . Τα αποτελέσματα της διερεύνησης φαίνονται στο σχ. 6.8.



**Σχήμα 6.9:** Μέση τιμή ανηγμένου φορτίου λυγισμού και coefficient of variation σε σχέση με το μήκος συσχέτισης του στοχαστικού πεδίου του μέτρου ελαστικότητας  $E$

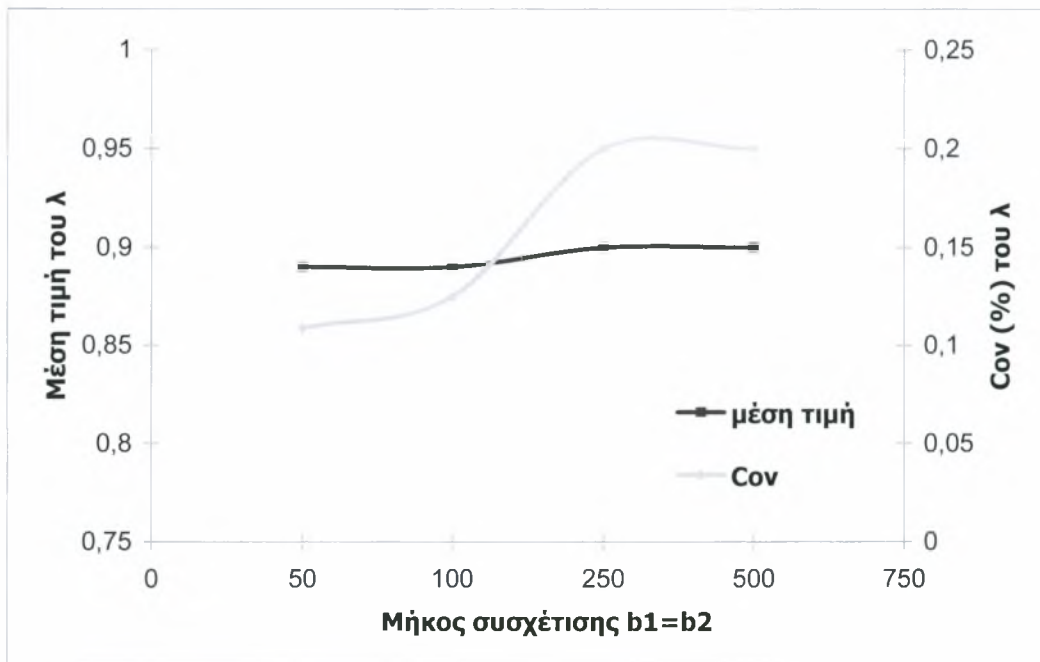
Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι π.χ. για την τιμή  $b_1=b_2=250$  έχουμε ένα  $\lambda=0.90$  το οποίο αντιστοιχεί σε μία τιμή κρίσιμου φορτίου λυγισμού :

$$P_u = 0.90 \times 5650 = 5085 \text{ N}$$

Γίνεται δηλαδή φανερό ότι οι συγκεκριμένες ατέλειες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Επιπλέον, για μικρές τιμές του  $b_1=b_2$

(το οποίο σημαίνει ότι μία τιμή του  $E$  που προκύπτει σε ένα σημείο δεν έχει καμία σχέση με τη διπλανή της δηλαδή η κατανομή είναι πιο "άστατη") βλέπουμε ότι ο φορτικός συντελεστής  $\lambda$  μειώνεται αισθητά.

2. Στη δεύτερη ανάλυση υπολογίστηκε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του κυλίνδρου λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις ατέλειες του πάχους του κυλίνδρου. Δηλαδή, αναλύθηκε ο τέλειος κύλινδρος (χωρίς γεωμετρικές ατέλειες) θεωρώντας μοναδικό στοχαστικό πεδίο το πάχος του τοιχώματος  $t$ . Μελετήθηκαν οι εξής τιμές των μηκών συσχέτισης: (α)  $b_1=b_2=50$  , (β)  $b_1=b_2=100$  , (γ)  $b_1=b_2=250$  , (δ)  $b_1=b_2=500$  . Τα αποτελέσματα της διερεύνησης φαίνονται στο σχ. 6.10 .



**Σχήμα 6.10:** Μέση τιμή ανηγμένου φορτίου λυγισμού και coefficient of variation σε σχέση με το μήκος συσχέτισης του στοχαστικού πεδίου του πάχους  $t$

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι π.χ. για την τιμή  $b_1=b_2=250$  έχουμε ένα  $\lambda=0.90$  το οποίο αντιστοιχεί σε μία τιμή κρίσιμου φορτίου λυγισμού :

$$P_u = 0.90 \times 5650 = 5085 \text{ N}$$

Γίνεται δηλαδή φανερό, ότι και αυτές οι ατέλειες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μείωση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Επιπλέον, είναι εμφανές ότι η μέση τιμή του φορτικού συντελεστή παραμένει σχεδόν σταθερή (0.90) για τα διάφορα

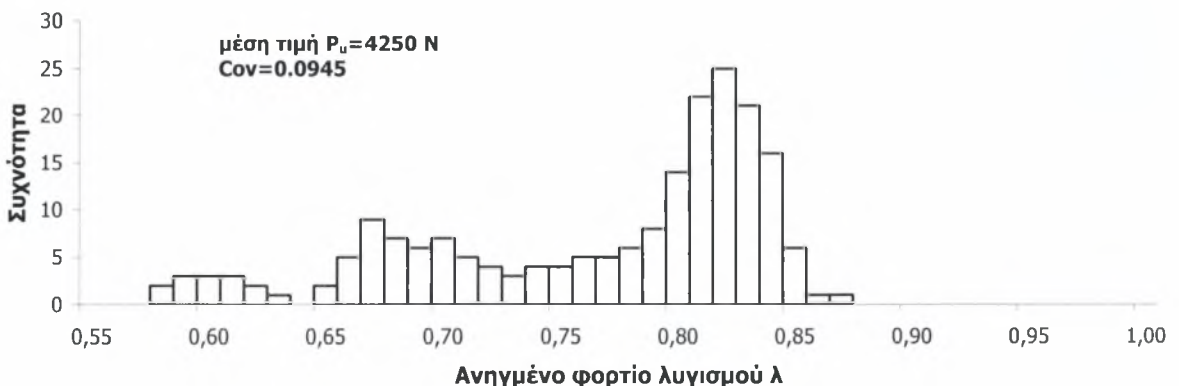
μήκη συσχέτισεως σε αντίθεση με τα Covariance των κατανομών των τιμών του  $\lambda$  τα οποία αυξάνονται με την αύξηση των μηκών συσχέτισης και φτάνουν μέχρι και 20%.

### **6.3.2.4 Συνυπολογισμός γεωμετρικών ατελειών, ατελειών υλικού και ατελειών στο πάχος του κυλίνδρου**

Τελικώς, έγινε ανάλυση λαμβάνοντας ταυτόχρονα υπόψιν τις γεωμετρικές ατέλειες, τις ατέλειες του υλικού και τις ατέλειες στο πάχος του κυλίνδρου. Η συγκεκριμένη ανάλυση και με βάση τα προηγούμενα συμπεράσματα, έγινε για δύο ακραίες τιμές στα μήκη συσχέτισης ( $b_1=b_2=50$  και  $b_1=b_2=500$ ) των στοχαστικών πεδίων του μέτρου ελαστικότητας  $E$  και του πάχους  $t$ . Αυτό έγινε, καθώς από την προηγούμενη διερεύνηση οι τιμές 50 και 500 δίνουν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του φορτίου λυγισμού. Επιπλέον, για το στοχαστικό πεδίο του μέτρου ελαστικότητας επιλέχθηκε  $\sigma_f=0.1$  και για το στοχαστικό πεδίο του πάχους  $\sigma_f=0.01$ .

Τα ιστογράμματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση, από την προσομοίωση Monte Carlo που έγινε για 200 simulations φαίνονται στα σχ. 6.11 και σχ. 6.12.

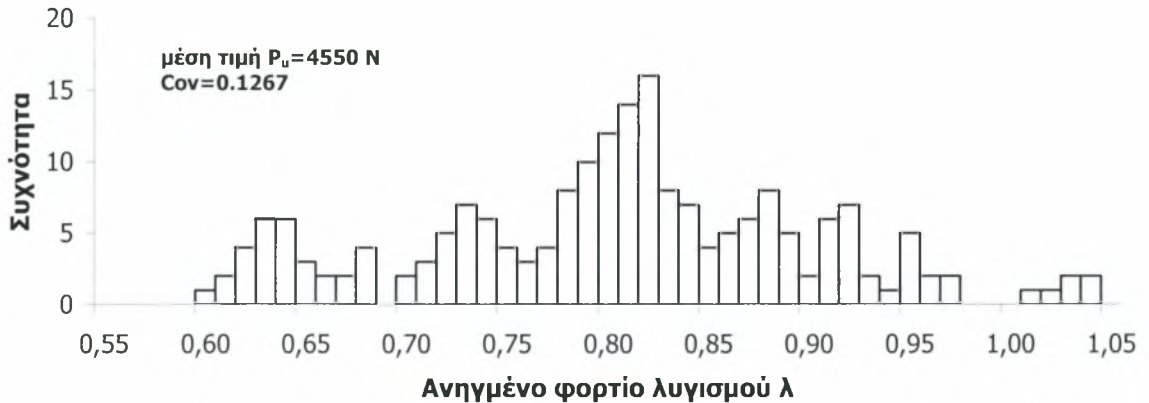
1. Για μήκη συσχέτισης των στοχαστικών πεδίων  $E$  και  $t$  :  $b_1=b_2=50$



**Σχήμα 6.11:** Ιστογράμμα ανηγμένων φορτίων  $\lambda$  για συνυπολογισμό αρχικών γεωμετρικών ατελειών, ατελειών υλικού και ατελειών πάχους (με  $b_1=b_2=50$ )



2. Για μήκη συσχέτισης των στοχαστικών πεδίων  $E$  και  $t$  :  $b_1=b_2=500$



**Σχήμα 6.12:** Ιστογράμμο ανηγμένων φορτίων  $\lambda$  για συνυπολογισμό αρχικών γεωμετρικών ατελειών, ατελειών υλικού και ατελειών πάχους (με  $b_1=b_2=500$ )

Γίνεται αμέσως φανερό ότι η μέση τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προέκυψε είναι ακόμα μικρότερη από ότι προηγουμένως. Δηλαδή, έχουμε  $P_u=4250$  N για  $b_1=b_2=50$  και  $P_u=4550$  N για  $b_1=b_2=500$  ενώ τα coefficient of variation βρέθηκαν 0.0945 και 0.1267 αντιστοίχως. Επιπλέον, βλέπουμε ότι η διασπορά - κατανομή των φορτίων που παρατηρήθηκε στην ανάλυση όπου είχαν ληφθεί υπόψιν μόνο οι γεωμετρικές ατέλειες (σχ. 6.7) , διατηρείται σχεδόν ίδια στην περίπτωση του  $b_1=b_2=50$  με συνυπολογισμό και των υπολοίπων ατελειών. Αυτό φαίνεται εξάλλου και από τα coefficient of variations των δύο κατανομών τα οποία είναι κοντά ( 0.07548 και 0.0945 αντιστοίχως). Αντιθέτως, παρατηρούμε ότι για μεγαλύτερες τιμές των μηκών συσχέτισης ( π.χ.  $b_1=b_2=500$  ) η διασπορά που παρατηρείται στα φορτία είναι μεγαλύτερη γεγονός που φαίνεται και από το μεγαλύτερο coefficient of variation αυτής της κατανομής (0.1267).

### **6.3.3 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων**

Η επίδραση που έχουν οι επιπλέον ατέλειες , τόσο του υλικού όσο και του πάχους του κυλίνδρου, γίνεται φανερό ότι είναι ιδιαίτερως σημαντική. Με τη συγκεκριμένη

μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο και εφαρμόστηκε σε αυτό, καταφέρνουμε να μοντελοποιήσουμε ικανοποιητικά τις ατέλειες που παρουσιάζονται στο συγκεκριμένο κυλινδρικό κέλυφος. Η τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού πέφτει κατά πολύ συνυπολογίζοντας στην ανάλυση όλο και περισσότερες ατέλειες και η διασπορά των αποτελεσμάτων που παίρνουμε προσεγγίζει κατά πολύ εκείνη των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Βέβαια, πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι τα πειραματικά αποτελέσματα των 7 δοκιμιών που παίρνουμε από την IIDB δεν αποτελούν ικανοποιητικό στατιστικό δείγμα για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Ωστόσο, το γεγονός ότι η προσομοίωση στον Η/Υ πλησιάζει όλο και περισσότερο τα πειραματικά αποτελέσματα είναι ιδιαίτερως ενθαρρυντική και είναι σχεδόν σίγουρο, ότι ο συνυπολογισμός και άλλων ατελειών στην ανάλυση θα δώσει αποτελέσματα ακόμη πιο κοντά στα πειραματικά.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο

## Συνυπολογισμός και των ατελειών στις συνοριακές συνθήκες

### 7.1 Εισαγωγή

Κυριότερος σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να αναδείξει και να αποδείξει τη σημαντική επίδραση που έχουν στο πρόβλημα και οι ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο κεφ. 4, οι ατέλειες αυτές αφορούν κυρίως γεωμετρικές ατέλειες στην ακμή του κυλίνδρου η οποία δέχεται τη φόρτιση, με συνέπεια να μεταβάλλεται η κατανομή του φορτίου που δέχεται ο κύλινδρος.

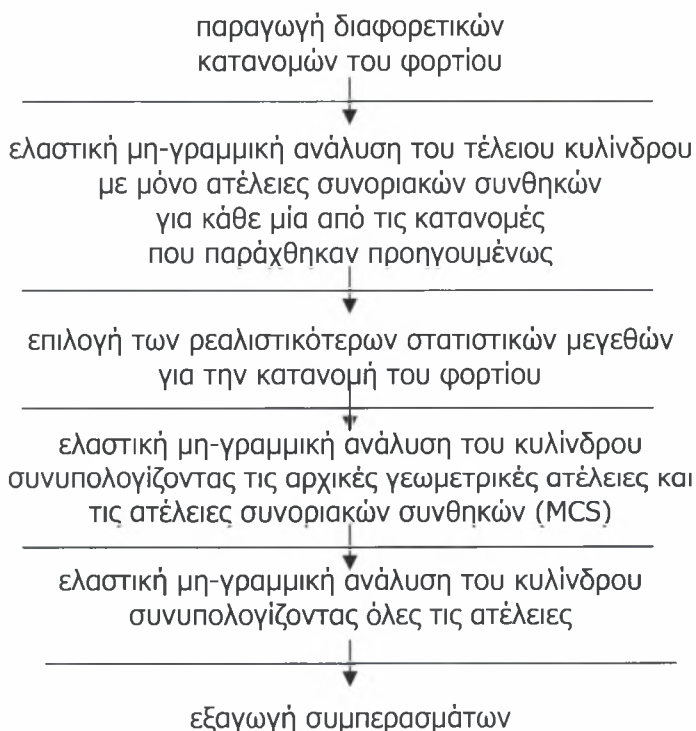
Οι γεωμετρικές ατέλειες που υπάρχουν καταγεγραμμένες στην IIDB αφορούν τις δύο άλλες διευθύνσεις του κυλίνδρου και δεν συμμετέχουν στην αλλαγή της υπάρχουσας κατανομής φορτίου. Έτσι, η απουσία οποιουδήποτε πειραματικού δεδομένου ή οποιονδήποτε μετρήσεων που να αφορούν τις γεωμετρικές ατέλειες που υπάρχουν στην ακμή του κυλίνδρου που φορτίζεται, κατέστησε απαραίτητη μία προκαταρκτική παραμετρική διερεύνηση του προβλήματος. Η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε αναλύεται στο κεφ. 5 και η προκαταρκτική διερεύνηση που έγινε αφορούσε τις στατιστικές παραμέτρους του στοχαστικού πεδίου που περιγράφει την κατανομή του φορτίου πάνω στη φορτιζόμενη ακμή του κυλίνδρου.

## 7.2 Δεδομένα

Αναλύθηκε ο κύλινδρος του σχ. 6.3 με τα χαρακτηριστικά που φαίνονται στον αντίστοιχο πίνακα . Το πεπερασμένο στοιχείο που χρησιμοποιήθηκε ήταν το TRIC και το δίκτυο των στοιχείων ήταν διαστάσεων 101 x 51 όπως αυτό που επιλέχθηκε κατά την εργασία των V.Paradopoulos - M.Paradrakakis (2004) μετά και τη διερευνητική εργασία με τα δίκτυα πεπερασμένων στοιχείων που δοκιμάστηκαν.

## 7.3 Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία για τη μελέτη της επίδρασης των ατελειών στις συνοριακές συνθήκες ακολούθησε σχηματικά τα παρακάτω βήματα:

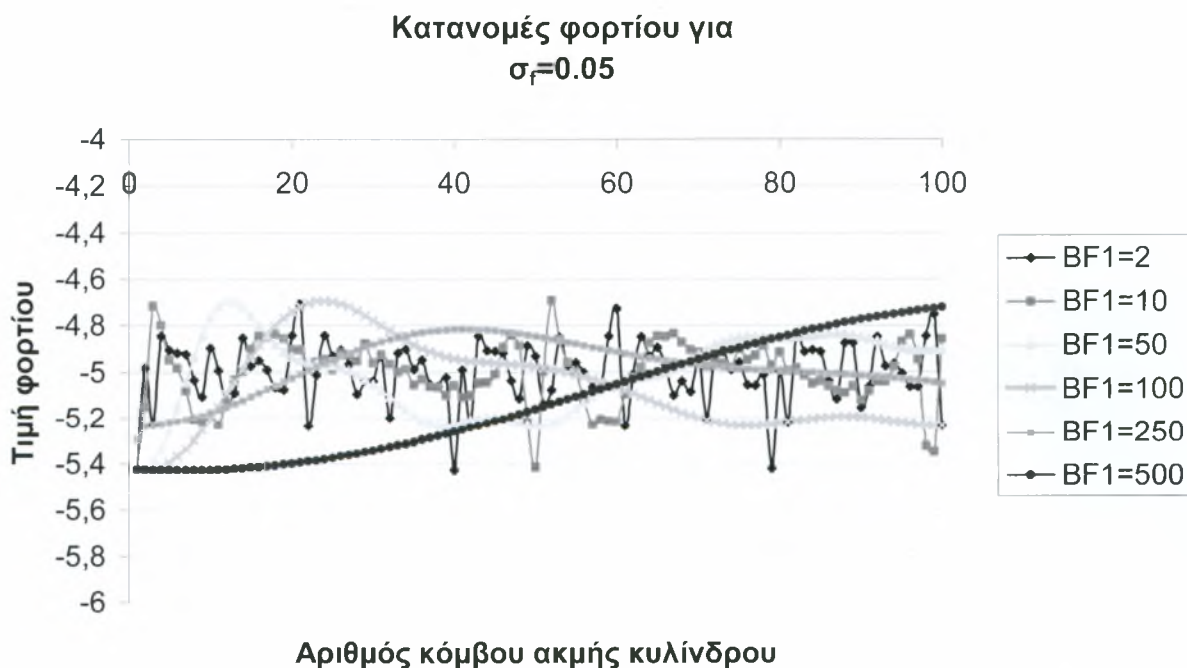


## 7.4 Η μορφή της κατανομής του φορτίου

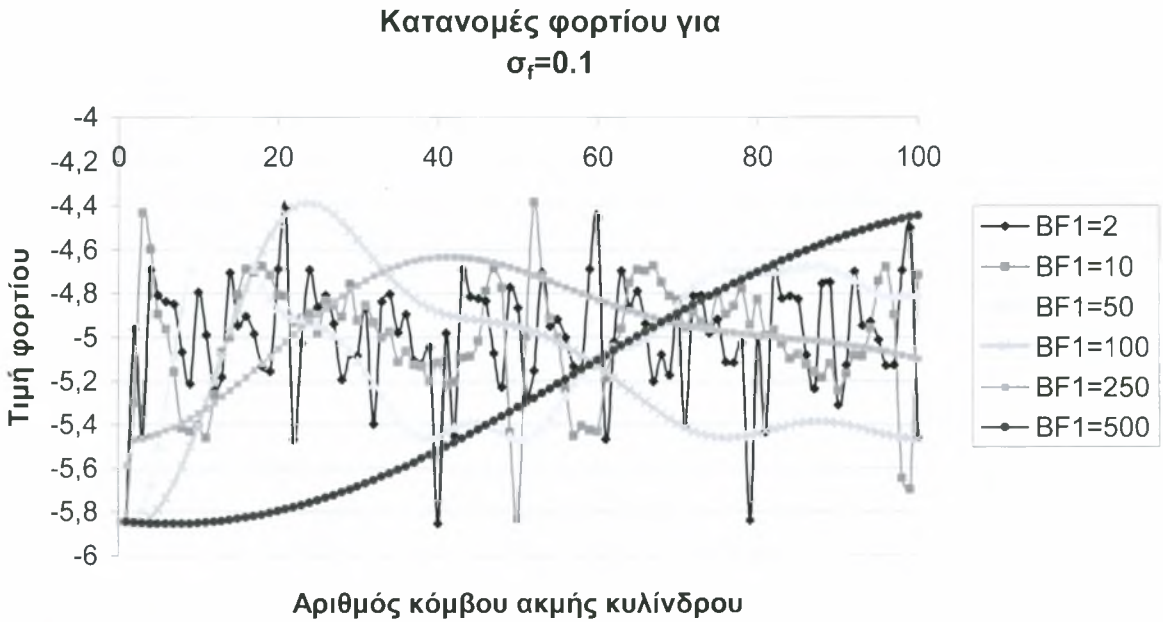
Η προκαταρκτική διερεύνηση που έγινε σε ότι αφορά την κατανομή του φορτίου αφορούσε δύο μεγέθη :

- την μέση τυπική απόκλιση της κατανομής του φορτίου  $\sigma_f$  όπου δοκιμάστηκαν τα μεγέθη :  $\sigma_f=0.05$ ,  $\sigma_f=0.1$ ,  $\sigma_f=0.2$  και  $\sigma_f=0.3$
- το μήκος συσχέτισης  $b_{f1}$  όπου δοκιμάστηκαν οι τιμές :  $b_{f1}=2$ ,  $b_{f1}=10$ ,  $b_{f1}=50$ ,  $b_{f1}=100$ ,  $b_{f1}=250$ ,  $b_{f1}=500$

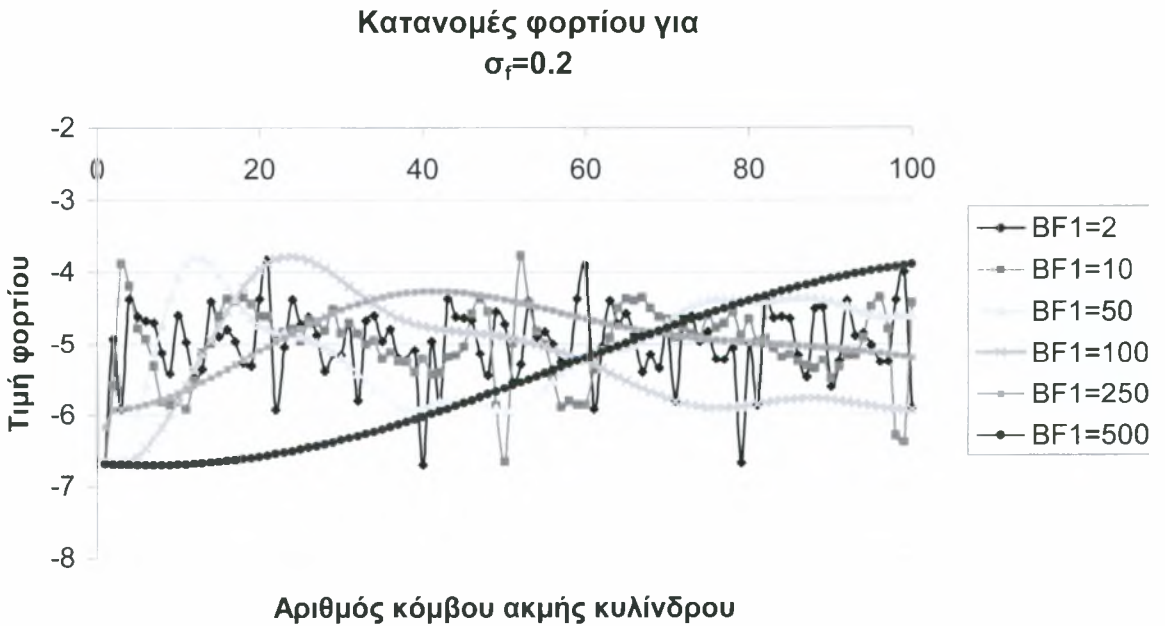
Επομένως, οι κατανομές φορτίων που προέκυψαν μετά και τη μέθοδο της φασματικής απεικόνισης για την παραγωγή των δειγματοσυναρτήσεων του φορτίου είχαν τις μορφές που φαίνονται στα σχ. 7.1, σχ. 7.2, σχ. 7.3 και σχ. 7.4 .



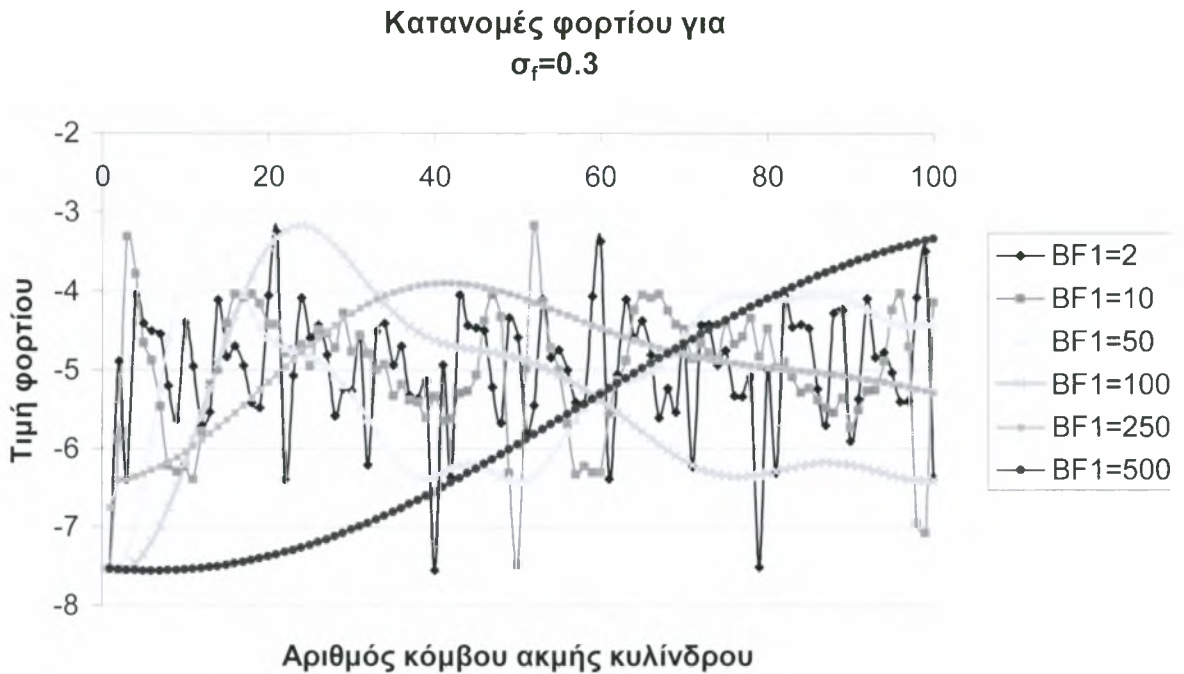
**Σχήμα 7.1:** Διάφορες κατανομές φορτίων στην πάνω ακμή του κυλίνδρου για  $\sigma_f=0.05$



**Σχήμα 7.2:** Διάφορες κατανομές φορτίων στην πάνω ακμή του κυλίνδρου για  $\sigma_f=0.1$



**Σχήμα 7.3:** Διάφορες κατανομές φορτίων στην πάνω ακμή του κυλίνδρου για  $\sigma_f=0.2$



**Σχήμα 7.4:** Διάφορες κατανομές φορτίων στην πάνω ακμή του κυλίνδρου για  $\sigma_f=0.3$

Στα παραπάνω σχήματα, έχουμε ουσιαστικά "ανοίξει" σε μία ευθεία την περίμετρο της ακμής του κυλίνδρου η οποία φορτίζεται. Κατά τη διεύθυνση αυτή έχουμε 101 κόμβους του δικτύου των πεπερασμένων στοιχείων TRIC σε καθέναν εκ των οποίων υπολογίστηκε - με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφεται στο κεφ. 4 - η τιμή του στοχαστικού πεδίου του φορτίου που ασκείται. Κατά αυτόν τον τρόπο προέκυψαν οι παραπάνω κατανομές φορτίων.

### **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

1. Είναι έντονα φανερό από τα διαγράμματα, ότι όσο η τιμή του  $b_{f1}$  μικραίνει, τόσο πιο άστατη είναι η κατανομή του φορτίου.
2. Η τιμή γύρω από την οποία κινείται η κατανομή του φορτίου (ο μέσος όρος δηλαδή) είναι το -5 (το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη φορά του φορτίου η

οποία είναι αντίθετη από τη θετικά ορισμένη από τους άξονες συντεταγμένων που έχουμε ορίσει ). Αυτό συμβαίνει διότι θεωρούμε ότι ξεκινάμε τη φόρτιση του κυλίνδρου από την τιμή  $-5$  και αυξάνουμε διαδοχικά έτσι ώστε να καταγράψουμε όλη την καμπύλη φορτίου-παραμόρφωσης.

3. Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας την τυπική απόκλιση  $\sigma_f$  της κατανομής, έχουμε μεγαλύτερο εύρος στις τιμές, κάτι που το περιμένουμε εξάλλου. Έτσι, ενώ για  $\sigma_f=0.05$  οι τιμές είναι μεταξύ  $-4$  και  $-6$  στην περίπτωση που  $\sigma_f=0.3$  οι τιμές κυμαίνονται από  $-2$  έως  $-8$  .

## **7.5 Ανάλυση μόνο για ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες**

Με βάση τις παραπάνω κατανομές φορτίων, ακολούθησε ανάλυση του τέλειου κυλίνδρου ( χωρίς αρχικές γεωμετρικές ατέλειες δηλαδή ) λαμβάνοντας υπόψιν μόνο της ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες. Δηλαδή, για κάθε μία εκ των παραπάνω κατανομών υπολογίστηκε και ένα κρίσιμο φορτίο λυγισμού του κυλίνδρου που προέκυπτε.

Αρχικά, είχε γίνει η υπόθεση ότι η κατανομή του φορτίου ήταν ανομοιόμορφη μόνο στο πρώτο increment της μη-γραμμικής ανάλυσης και στα επόμενα ήταν ομοιόμορφη. Τα αποτελέσματα για τις τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προέκυπταν ήταν εξαιρετικά κοντά στην τιμή  $5650$  N που προκύπτει από την ανάλυση του τέλειου κυλίνδρου. Παρατηρώντας τις μετακινήσεις που προέκυπταν είδαμε ότι ενώ στο πρώτο increment αυτές ακολουθούσαν την ανομοιόμορφη κατανομή του φορτίου, στη συνέχεια και μετά το δεύτερο increment αυτές ομαλοποιούνταν με συνέπεια να φτάνουμε ουσιαστικά στην ανάλυση του τέλειου κυλίνδρου. Κάτι τέτοιο δεν ήταν σωστό και είχε ως συνέπεια να διατηρήσουμε την ανομοιόμορφη κατανομή του φορτίου και στα υπόλοιπα increments.

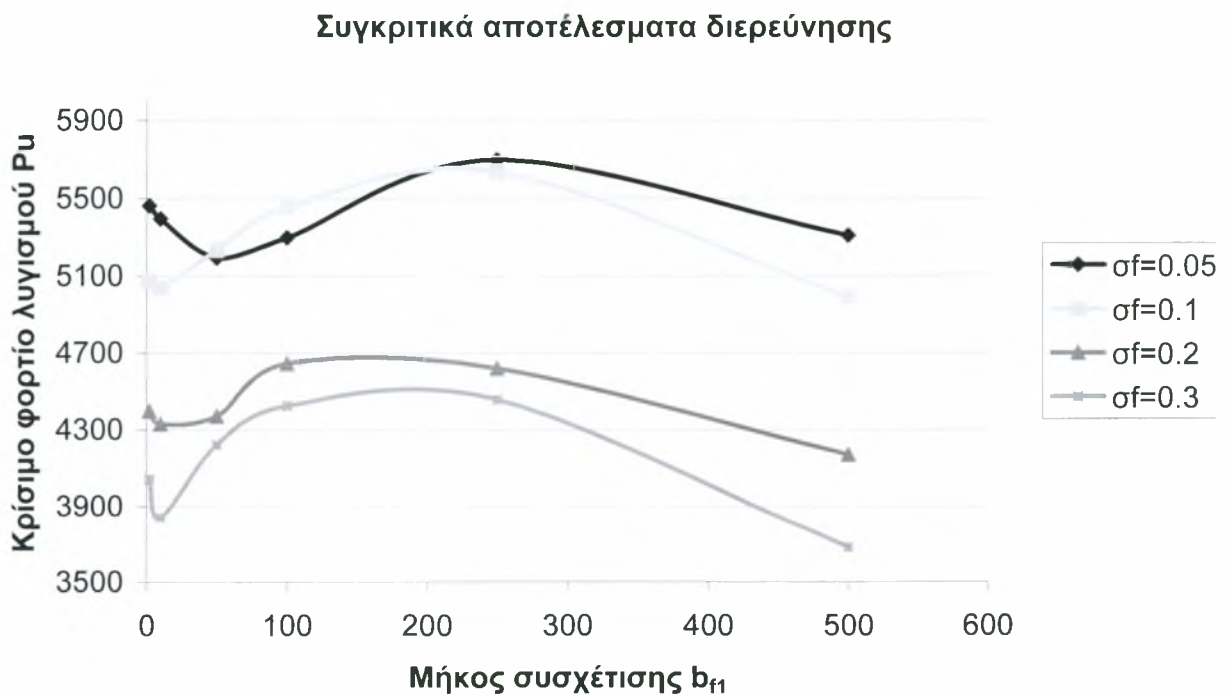
Είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε, ότι για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου λυγισμού λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες, δεν



ήταν απαραίτητη η Monte Carlo Simulation. Δηλαδή, για κάθε μία κατανομή φορτίου έγινε μόνο μία προσομοίωση.

Η Monte Carlo Simulation δημιουργεί σε κάθε προσομοίωση και μία διαφορετική κατανομή ( με τα ίδια βέβαια στατιστικά μεγέθη κάθε φορά). Το φορτίο ασκείται στην πάνω ακμή του κυλίνδρου η οποία έχει κυκλικό σχήμα. Έτσι, επειδή αναλύουμε τον τέλειο κύλινδρο, έχουμε ουσιαστικά μία συμμετρική κατασκευή και μία διαφοροποίηση στην κατανομή του φορτίου από προσομοίωση σε προσομοίωση ( με την παραγωγή άλλων τυχαίων αριθμών για τη δημιουργία της κατανομής ) δεν θα προκαλέσει μεταβολή στην τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Συνεπώς, σε κάθε simulation θα παίρνουμε την ίδια σχεδόν τιμή και για αυτό έγινε ένα simulation σε αυτήν τη διερεύνηση.

Τα αποτελέσματα της διερεύνησης φαίνονται στο σχ. 7.5



**Σχήμα 7.5:** Κρίσιμο φορτίο λυγισμού για διάφορες κατανομές φορτίων, στην ανάλυση μόνο για ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες

Από το σχ. 7.5 καταδεικνύεται για πρώτη φορά η μεγάλη επίδραση των ατελειών στις συνοριακές συνθήκες. Γίνεται φανερό ότι οι τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προέκυπταν σε κάθε περίπτωση που διερευνήθηκε, ήταν πάντα σχεδόν μικρότερες από την τιμή  $P_u=5650$  N η οποία προκύπτει για τον τέλειο κύλινδρο απουσία κάθε ατέλειας. Μάλιστα, παρατηρείται μία μείωση της τάξης του 10-15% στο φορτίο λυγισμού και στην περίπτωση μεγαλύτερων τυπικών αποκλίσεων η μείωση αυτή αγγίζει και το 25%. Αυτό είναι ιδιαίτερος σημαντικό, αν αναλογιστούμε ότι στην ανάλυση έχουν ληφθεί υπόψιν μόνο οι ατέλειες στην κατανομή του φορτίου.

### **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

1. Οι μεγαλύτερες τιμές του φορτίου λυγισμού για το ίδιο  $\sigma_f$  προκύπτουν για τις τιμές  $b_{f1}=100$  και 250.
2. Για την τιμή  $b_{f1}=500$  παρατηρούμε ότι παρατηρείται μεγάλη και σχετικά απότομη πτώση του φορτίου λυγισμού. Αν παρατηρήσουμε μία τυπική μορφή κατανομής του φορτίου στην πάνω ακμή του κυλίνδρου για  $b_{f1}=500$  όπως αυτή παρουσιάζεται στα σχ. 7.1, σχ. 7.2, σχ. 7.3 και σχ. 7.4 θα μας δώσει μία ενδεχόμενη εξήγηση του φαινομένου αυτού. Βλέπουμε ότι η συγκεκριμένη κατανομή φορτίου παρουσιάζει μία μεγάλη συγκέντρωση φορτίων προς τη μία πλευρά της ακμής του κυλίνδρου, οπότε εμφανίζεται και μία ροπή η οποία μειώνει το φορτίο λυγισμού.

και τέλος,

3. Είναι φανερό ότι με την αύξηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma_f$  της κατανομής του φορτίου, μειώνονται και οι τιμές του κρίσιμου φορτίου λυγισμού. Ωστόσο, η ακραία τιμή 0.05 δεν θεωρείται ιδιαίτερος ρεαλιστική.

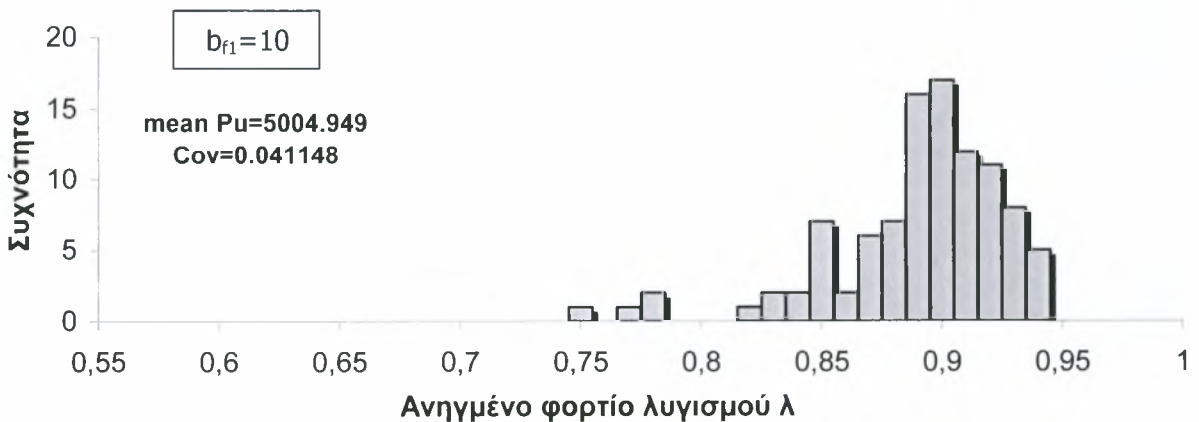
## 7.6 Συνυπολογισμός αρχικών γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες

Το επόμενο βήμα στη μελέτη μας, ήταν να ερευνήσουμε πλέον την επίδραση των ατελειών στις συνοριακές συνθήκες σε συνδυασμό με τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες.

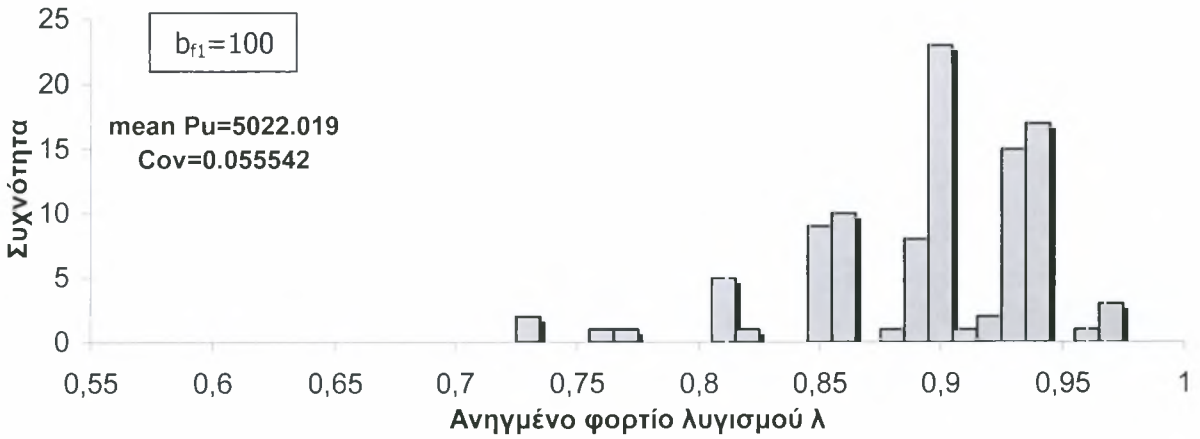
Σε αυτό το στάδιο ήταν απαραίτητη η χρήση της μεθόδου Monte Carlo σε αντίθεση με ό,τι προηγήθηκε. Κατά συνέπεια, έγιναν 100 simulations με σκοπό να εξαχθεί το ιστόγραμμα των κρίσιμων φορτίων λυγισμού που προέκυπταν και να συγκριθεί η κατανομή τους με αυτή που προέκυψε στα πειράματα των 7 δοκιμών που υπάρχουν στην IIDB.

Η διερεύνηση που έγινε αυτή τη φορά αφορούσε τα δύο ακραία μεγέθη των τιμών του μήκους συσχέτισης  $b_{f1}=10$  και  $b_{f1}=100$ , ενώ για τις τυπικές αποκλίσεις ελήφθησαν οι τιμές  $\sigma_f=0.1$ ,  $\sigma_f=0.2$  και  $\sigma_f=0.3$ . Αναλυτικά, τα ιστογράμματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση φαίνονται στα επόμενα σχήματα.

### 1. Για $\sigma_f=0.1$

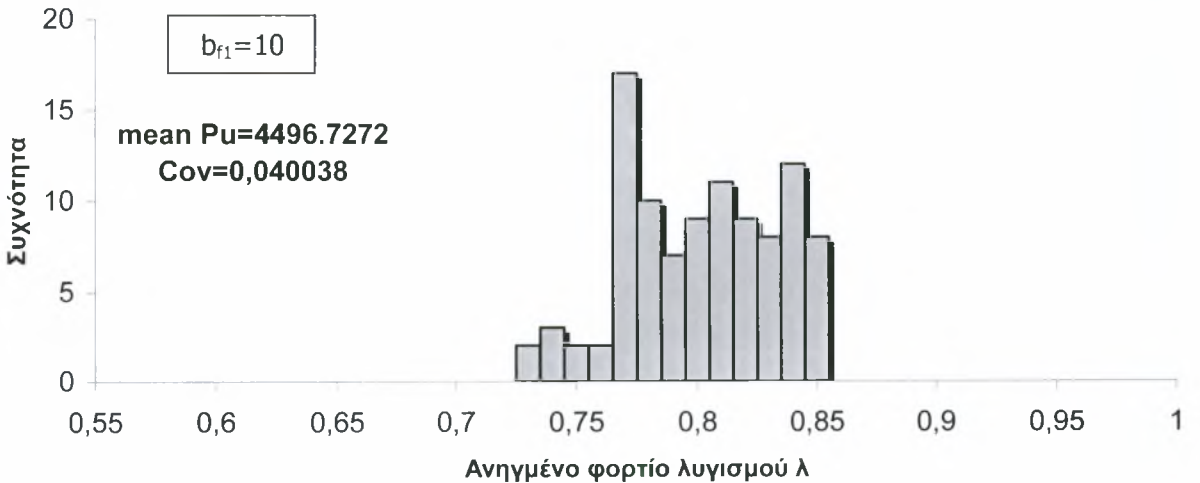


**Σχήμα 7.6:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες (100 simulations) για  $\sigma_f=0.1$  και  $b_{f1}=10$

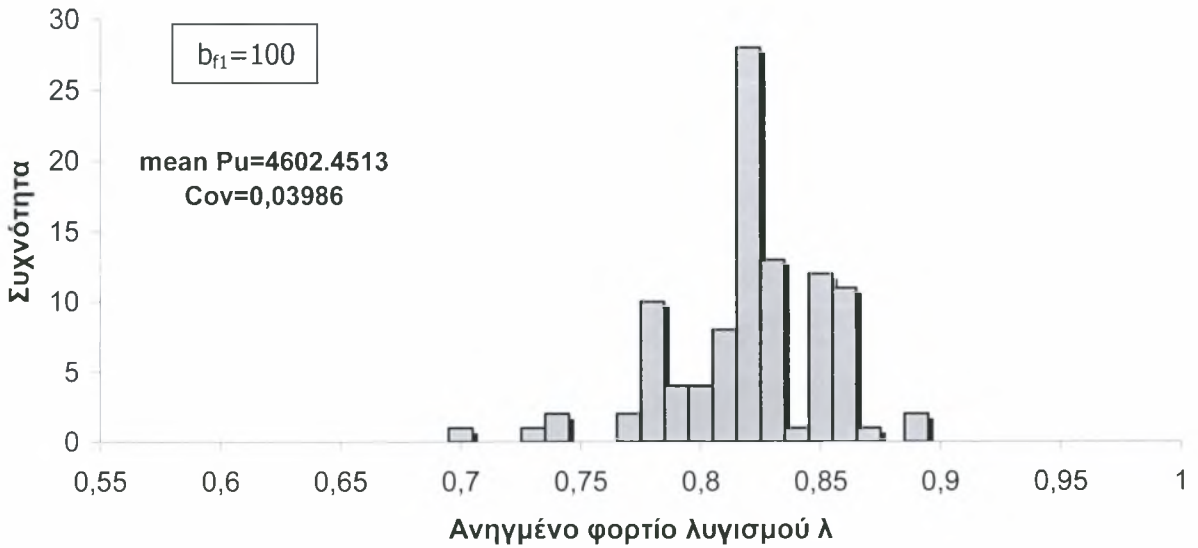


**Σχήμα 7.7:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες (100 simulations) για  $\sigma_f=0.1$  και  $b_{f1}=100$

## 2. Για $\sigma_f=0.2$

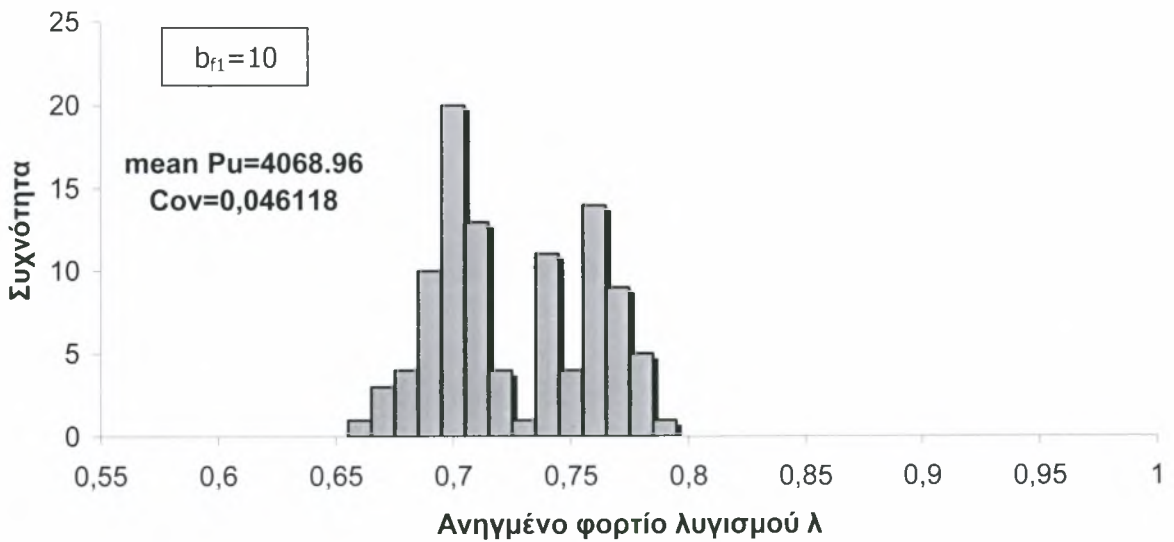


**Σχήμα 7.8:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες (100 simulations) για  $\sigma_f=0.2$  και  $b_{f1}=10$

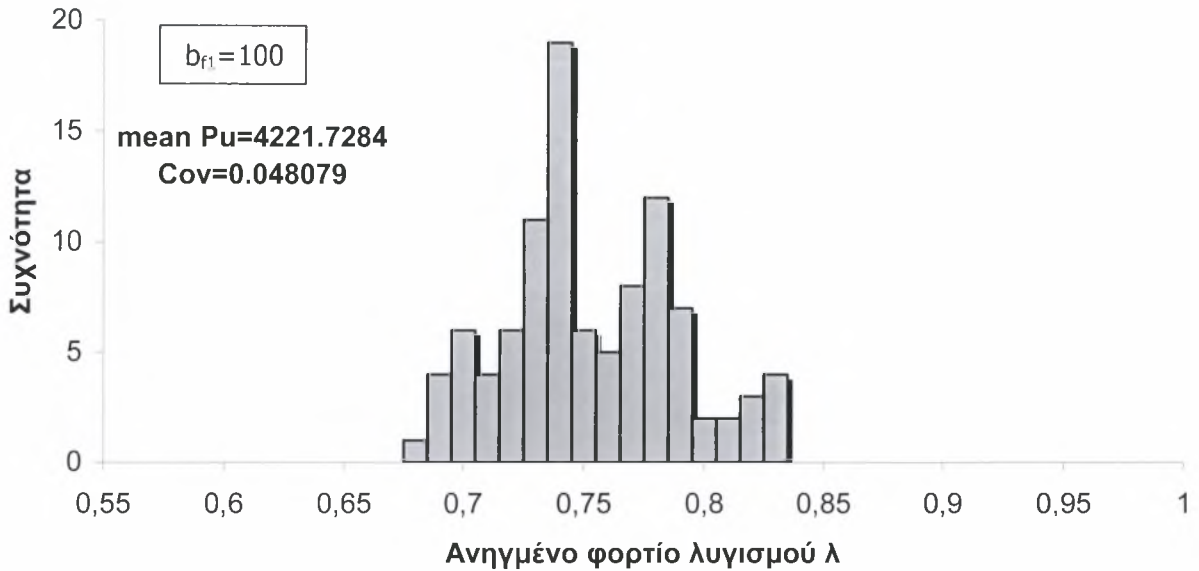


**Σχήμα 7.9:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες (100 simulations) για  $\sigma_f=0.2$  και  $b_{f1}=100$

**3. Για  $\sigma_f=0.3$**

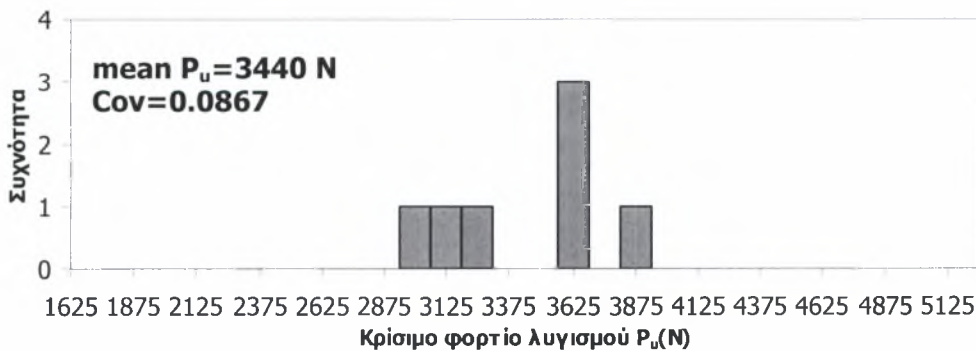


**Σχήμα 7.10:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες (100 simulations) για  $\sigma_f=0.3$  και  $b_{f1}=10$



**Σχήμα 7.11:** Ιστογράμμο ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό γεωμετρικών ατελειών και ατελειών στις συνοριακές συνθήκες (100 simulations) για  $\sigma_f = 0.3$  και  $b_{f1} = 100$

Τα παραπάνω ιστογράμματα αποδεικνύουν τη μεγάλη επίδραση των ατελειών των συνοριακών συνθηκών στην κατανομή του φορτίου. Γίνεται φανερό, ότι η κατανομή των φορτίων που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση, όπως αυτή αποτυπώνεται στα παραπάνω ιστογράμματα, μοιάζει κατά πολύ με την κατανομή των φορτίων που προέκυψαν από τα πειράματα των 7 δοκιμών της IIDB (σχ. 6.8 )



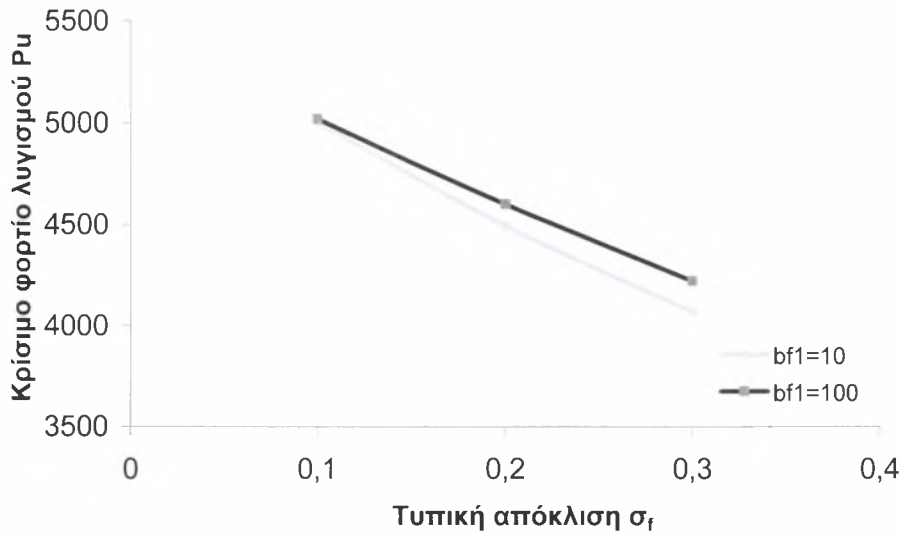
**Σχήμα 7.12:** Ιστογράμμο φορτίων που προέκυψαν από τα πειράματα σε 7 κυλινδρικά δοκίμια

Παρατηρούμε, ότι όπως και στα πειράματα, οι κατανομές εμφανίζουν μία συγκέντρωση τιμών γύρω από κάποια τιμή, ενώ ταυτόχρονα υπάρχει και μία διασπορά τιμών σε πιο χαμηλές ως επί το πλείστον τιμές. Βέβαια, η εξαγωγή συμπερασμάτων σε σύγκριση με την κατανομή που προέκυψε στα πειράματα δεν μπορεί, σε καμία περίπτωση, να χαρακτηριστεί ασφαλής, καθότι το δείγμα των 7 δοκιμών που χρησιμοποιήθηκε δεν είναι αντιπροσωπευτικό. Παρόλ' αυτά, η γενική εικόνα της κατανομής που προκύπτει από την ανάλυσή μας δεν διαφέρει σε πολύ από εκείνη των πειραμάτων. Μάλιστα, χαρακτηριστικότερη εικόνα της κατανομής που περιγράψαμε, αποτελεί εκείνη που προέκυψε για  $\sigma_f=0.2$  και  $b_{f1}=100$  και αυτά είναι τα στατιστικά δεδομένα της κατανομής που χρησιμοποιήθηκαν για την επόμενη ανάλυση.

Επιπλέον, από τα ιστογράμματα που προέκυψαν παρατηρούμε σχεδόν μία σταθερή τιμή για το coefficient of variation της κατανομής η οποία κυμαίνεται περίπου στο 0.05%. Αυτή η τιμή είναι μικρότερη βέβαια, από εκείνη που προκύπτει στα πειράματα χωρίς ωστόσο να αποκλίνει πολύ ( 0.0867 ). Κάτι τέτοιο συμβαίνει διότι στην ανάλυση έχουμε συνυπολογίσει μόνο τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες και τις ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες.

Από τα ιστογράμματα που προέκυψαν, γίνεται επίσης φανερό η συνεχιζόμενη πτώση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού του κυλίνδρου με την προσθήκη όλο και περισσότερων ατελειών στην ανάλυση. Η μέση τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού π.χ. για  $\sigma_f=0.2$  και  $b_{f1}=100$  είναι  $P_u=4602$  N, ενώ για την αντίστοιχη περίπτωση όταν στην ανάλυση είχαν υπολογιστεί μόνο οι ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες ήταν  $P_u=4645$  N. Εξάλλου, καταδεικνύεται ξανά το γεγονός ότι με την αύξηση της τυπικής απόκλισης η τιμή του φορτίου λυγισμού πέφτει.

Αυτό φαίνεται και στο σχ. 7.13 όπως και το γεγονός ότι με την αύξηση του  $b_{f1}$  υπάρχει αύξηση στο φορτίο λυγισμού που προκύπτει.



**Σχήμα 7.13:** Κρίσιμο φορτίο από την ανάλυση με γεωμετρικές ατέλειες και ατέλειες συνοριακών συνθηκών σε σχέση με την τυπική απόκλιση της κατανομής του φορτίου

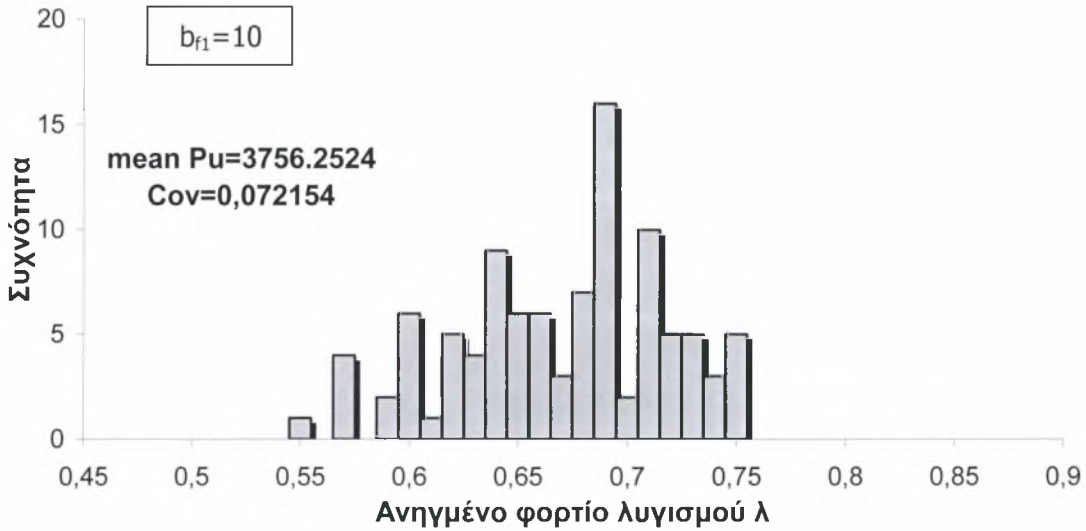
## 7.7 Συνυπολογισμός όλων των ατελειών

Τελευταίο στάδιο της έρευνας στα πλαίσια της παρούσας εργασίας ήταν η ανάλυση λαμβάνοντας όλες τις ατέλειες που εμφανίζονται. Δηλαδή, πραγματοποιήθηκε μία Monte Carlo Simulation σε ένα πληθυσμιακό δείγμα 100 προσομοιώσεων σε κάθε μία εκ των οποίων είχαν ληφθεί υπόψιν οι ακόλουθες ατέλειες :

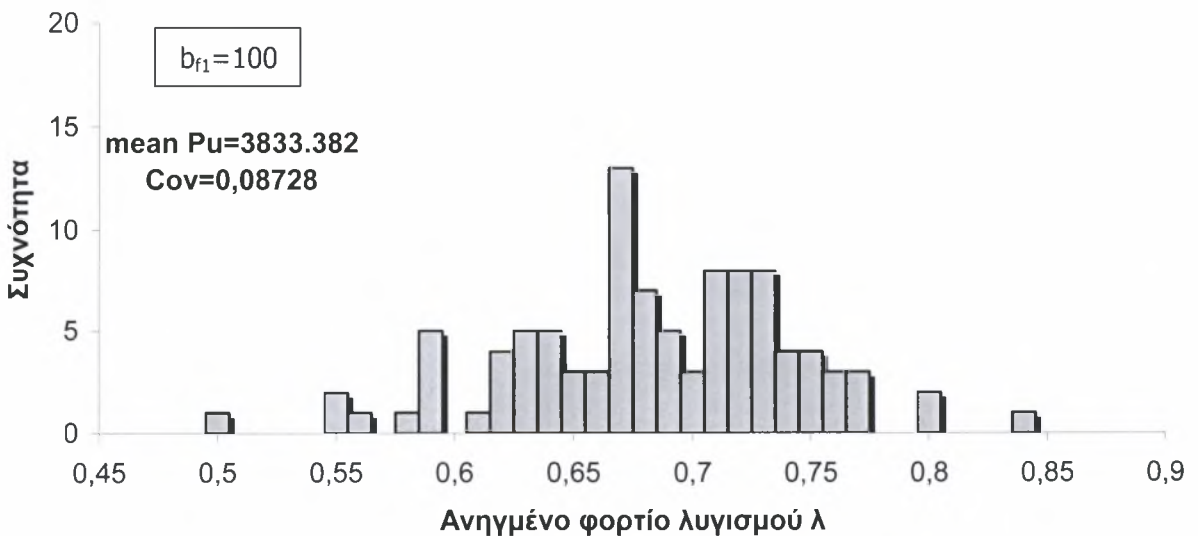
- αρχικές γεωμετρικές ατέλειες όπως αυτές περιγράφονται στην IIDB
- ατέλειες στο υλικό ( μεταβλητό μέτρο ελαστικότητας  $E$  ) με  $b_1=b_2=50$
- ατέλειες στο πάχος του τοιχώματος του κυλίνδρου ( μεταβλητό πάχος  $t$  ) με  $b_1=b_2=50$
- ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες ( μεταβλητή κατανομή του φορτίου στην πάνω ακμή του κυλίνδρου ) για  $\sigma_f=0.2$  και (α)  $b_1=10$  και (β)  $b_1=100$



Τα ιστογράμματα των φορτίων που προέκυψαν για κάθε μία εκ των δύο περιπτώσεων κατανομής του φορτίου στην πάνω ακμή του κυλίνδρου φαίνονται στα σχ. 7.14 και σχ. 7.15 .



**Σχήμα 7.14:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό όλων των ατελειών (100 simulations) για  $\sigma_f=0.2$  και  $b_{f1}=10$



**Σχήμα 7.14:** Ιστόγραμμα ανηγμένων φορτίων με συνυπολογισμό όλων των ατελειών (100 simulations) για  $\sigma_f=0.2$  και  $b_{f1}=100$

Τα παραπάνω ιστογράμματα μας δίνουν μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα του τι συμβαίνει παρουσία όλων των ατελειών τις οποίες έχουμε προσομοιάσει με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε. Η μέση τιμή του κρίσιμου φορτίου λυγισμού έχει πέσει ακόμα περισσότερο και κυμαίνεται περίπου στην τιμή 3800 N.

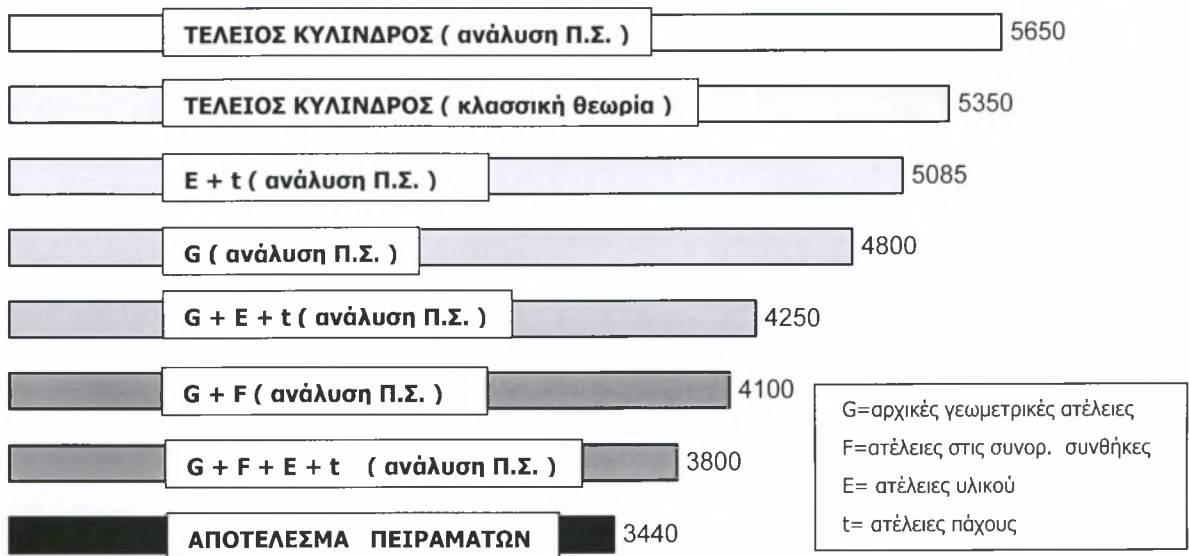
Ωστόσο, η σύγκριση της μέσης τιμής με την τιμή πρέπει να είναι μόνο ενδεικτική καθώς, όπως έχει προειπωθεί, υπεισέρχονται στην ανάλυση και τα σταθερά σφάλματα διακριτοποίησης που μας δίνουν τιμές μεγαλύτερες. Για αυτό το σημαντικότερο που προκύπτει από την τελευταία ανάλυση είναι η τιμή που προκύπτει για τα covariance of efficient των κατανομών των φορτίων που προκύπτουν. Αυτό είναι το μέγεθος που θα μας καθορίσει το μορφή και τη διασπορά της κατανομής που προκύπτει. Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων ( $Cov=0.07215$  και  $Cov=0.0872$ ) στα ιστογράμματα που προέκυψαν (σχ. 7.14 και σχ. 7.15) και των πειραματικών αποτελεσμάτων ( $Cov=0.0867$ ) των 7 δοκιμίων (σχ. 7.12), γίνεται φανερό ότι οι τιμές των covariance of efficient είναι πολύ κοντά. Αυτό το γεγονός είναι ιδιαίτερος ενθαρρυντικός για τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας καθώς καταδεικνύει τη σημαντική επίδραση που έχουν στο πρόβλημα οι ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες.

## **7.8 Συμπεράσματα**

Στην παρούσα εργασία γίνεται προσπάθεια διερεύνησης της επίδρασης των ατελειών των συνοριακών συνθηκών πάνω στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ενός ισότροπου κυλινδρικού κελύφους υπό αξονική θλίψη. Για το σκοπό αυτό, αναλύθηκε ένας κύλινδρος ο οποίος εκτός από τις αρχικές γεωμετρικές ατέλειες, τις ατέλειες υλικού και τις ατέλειες στο πάχος του τοιχώματός του, εμφανίζει και ατέλειες στις συνοριακές συνθήκες. Ο συνδυασμός όλων αυτών των ατελειών εντάχθηκε σε έναν αξιόπιστο κώδικα πεπερασμένων στοιχείων TRIC και ακολούθησε μία ελαστική μη-γραμμική ανάλυση. Για την εξαγωγή της κατανομής των φορτίων που προέκυπταν κάθε φορά χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Monte Carlo Simulation.

Ο συνδυασμός όλων των παραπάνω ατελειών στην ανάλυση οδήγησε σε περαιτέρω μείωση της μέσης τιμής του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προέκυψε, γεγονός που αναδεικνύει τη μεγάλη επίδραση που έχουν και οι ατέλειες στις συνοριακές

συνθήκες. Η τιμή που προέκυψε για το συνδυασμό όλων των ατελειών βρίσκεται ακόμη πιο κοντά σε αυτήν των πειραματικών δεδομένων. Επιπλέον, το σχήμα της κατανομής των φορτίων όπως αυτό προκύπτει στα πειράματα, διατηρήθηκε σχεδόν ίδιο στην περίπτωση της ανάλυσής που έγινε για το συνδυασμό όλων των ατελειών. Χαρακτηριστικό για την πρόοδο των αναλύσεων είναι το σχ. 7.15 όπου φαίνονται οι τιμές των κρίσιμων φορτίων λυγισμού που προκύπτουν από κάθε είδους ανάλυση.



**Σχήμα 7.15:** Σχηματική απεικόνιση των τιμών του κρίσιμου φορτίου λυγισμού που προκύπτουν σε κάθε ανάλυση

Ωστόσο, για μία πιο ολοκληρωμένη ανάλυση πρέπει να εισαχθούν στην ανάλυση και άλλες ατέλειες, όπως αυτή της μη κατακορυφότητας του φορτίου που ασκείται στον κύλινδρο. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε ακόμη πιο ασφαλή συμπεράσματα για την πρόβλεψη του κρίσιμου φορτίου λυγισμού αυτών των κυλινδρικών κελυφών και αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

## Ο σχεδιασμός των κυλινδρικών κελυφών

Παρόλες τις έρευνες και τα πειράματα που έγιναν τις τελευταίες δεκαετίες, ο σχεδιασμός των λεπτότοιχων κελυφών ( π.χ. ενός κυλίνδρου υπό αξονική θλίψη) βασιζόταν και βασίζεται στη φιλοσοφία σχεδιασμού που έχει επικρατήσει με την ορολογία "σχεδιασμός του κάτω ορίου". Αυτή η φιλοσοφία συνοψίζεται στον ακόλουθο τύπο:

$$P_a \leq \frac{\gamma}{FS} P_{crit}$$

όπου:

$P_a$  = επιτρεπτό αξονικό φορτίο

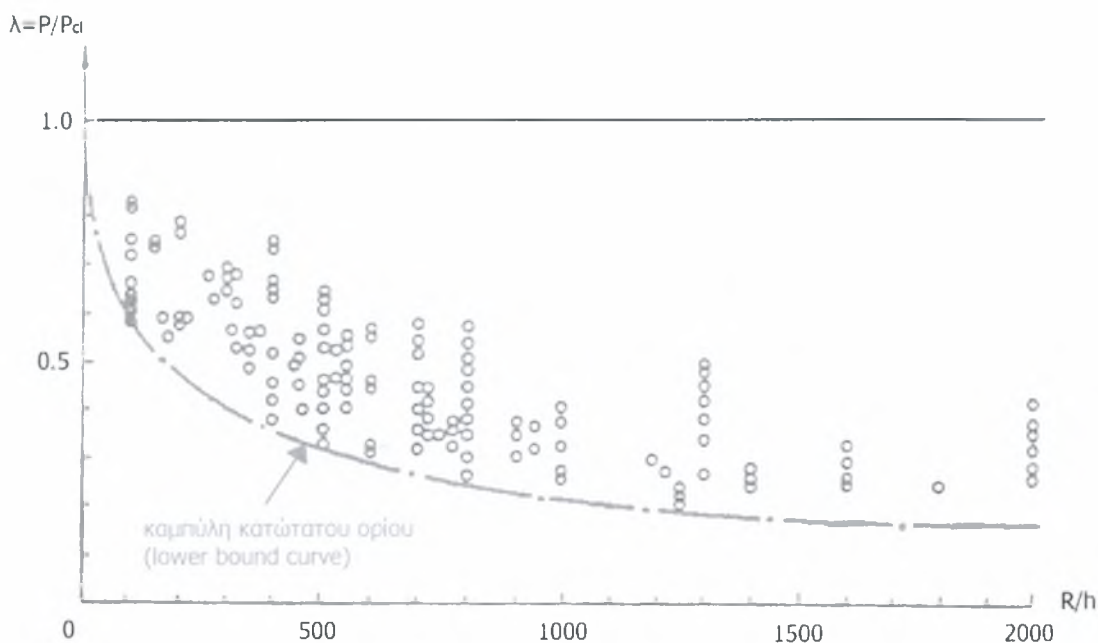
$P_{cr}$  = κρίσιμο φορτίο λυγισμού της ιδεατής κατασκευής ( χωρίς ατέλειες ) όπως προκύπτει από την κλασσική θεωρία

$\gamma$  = συντελεστής "κατάρρευσης" ( "knockdown" factor )

FS = συντελεστής ασφαλείας

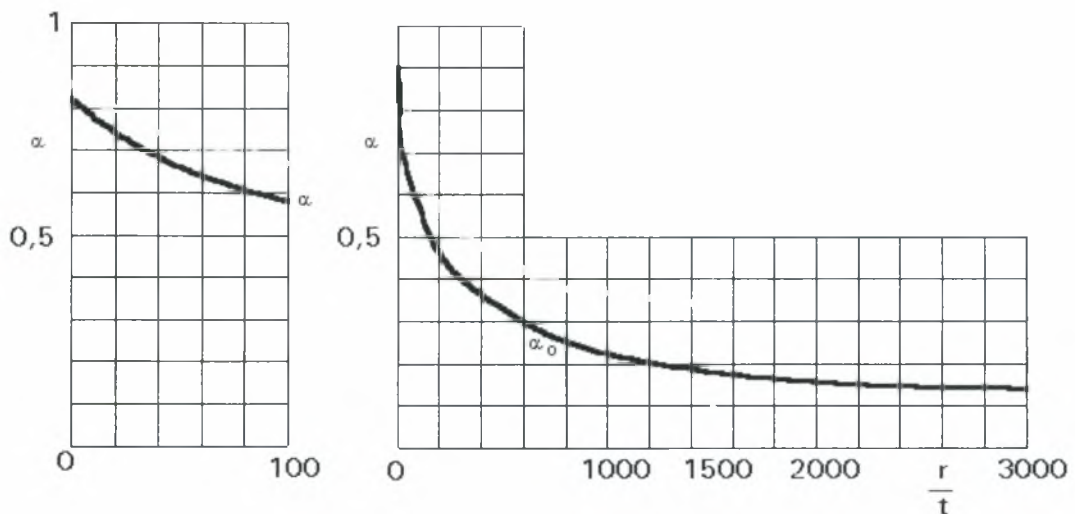
Ο εμπειρικός συντελεστής "κατάρρευσης"  $\gamma$  επιλέγεται έτσι ώστε όταν πολλαπλασιαστεί με το  $P_{cr}$  ( το ελάχιστο φορτίο λυγισμού της ιδεατής κατασκευής), να

προκύπτει ένα κατώτατο όριο για κάθε πειραματικό αποτέλεσμα που έχει προκύψει στο παρελθόν. Για παράδειγμα, σε ισότροπα κυλινδρικά κελύφη υπό αξονική θλίψη, κάτι τέτοιο οδηγεί στην καμπύλη του "κάτω ορίου" όπως φαίνεται στο σχ. Π-1 . Τα τοποθετημένα στο διάγραμμα σημεία αποτελούν τιμές του λόγου  $P/P_{cl}$  (κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προκύπτει στο πείραμα δια το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που προβλέπει η κλασσική θεωρία) για διάφορα κελύφη με εναλλακτικά  $R/h$ .



**Σχήμα Π-1:** Καμπύλη κατώτατου ορίου

Εν τω μεταξύ, η οδηγία του European Convention for Constructional Steelwork ("Buckling of Steel Shells", European Recommendation, ECCS, 1988) δίνει τιμές για τον συντελεστή "κατάρρευσης" οι οποίες φαίνονται στο σχ. Π-2 συναρτήσεϊ του λόγου  $R/t$  .



**Σχήμα Π-2:** Τιμές του "knockdown factor" κατά ECCS

Ο σχεδιασμός του κάτω ορίου μπορεί από τη μια, να δίνει ασφαλή αποτελέσματα, αλλά από την άλλη οδηγεί σε συντηρητικό και αντιοικονομικό σχεδιασμό. Επιπλέον, είναι φανερό ότι η επιτυχία της "ντετερμινιστικού" χαρακτήρα αυτής μεθόδου εξαρτάται άμεσα από την ποιότητα και την ποσότητα των πειραματικών δεδομένων-αποτελεσμάτων που υπάρχουν. Και αν μπορούμε να πούμε ότι για τον αξονικά θλιβόμενο, λεπτότοιχο κύλινδρο υπάρχει μεγάλο εύρος και μεγάλη ποσότητα πειραματικών δεδομένων, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε το ίδιο για οποιαδήποτε άλλης μορφής κελύφη. Ακόμη και τα πειραματικά δεδομένα που υπάρχουν για τον κύλινδρο, αφορούν πάντα μεταλλικούς κυλίνδρους και όχι από κάποιο άλλο υλικό.

Κατά συνέπεια, ο σχεδιασμός του "κάτω ορίου" εμφανίζει πολλά προβλήματα και μπορεί να χρησιμοποιείται μόνο σε κατασκευές, όπου το κόστος και το συνολικό βάρος του υλικού της κελυφωτής κατασκευής είναι μικρής σημασίας. Σε κάθε άλλη περίπτωση απαιτείται μία πιο γενική και ενδελεχής ανάλυση του φαινομένου του λυγισμού, η οποία να λαμβάνει υπόψιν της το στοχαστικό χαρακτήρα της συμπεριφοράς των κελυφών.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

---

1. Arbocz J., "The effect of imperfect boundary conditions on the collapse behavior of anisotropic shells", *International Journal of Solids and Structures* 37, (2000) 6891-6915
2. Arbocz J., J.H. Starnes Jr " Future directions and challenges in shell stability analysis", *Thin-Walled Structures* 40 (2002) 729–754
3. Arbocz J. and Babcock C. D. Jr., "The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells", *Journal of Applied Mechanics*, March 1969, 28-38
4. Arbocz J. and Hol J. M. A. M., "Collapse of axially compressed cylindrical shells with random imperfections", *Thin Walled Structures*, 23 (1995), 131-158
5. Argyris J., Tenek L. and Olofsson L., "TRIC: a simple but sophisticated 3-node triangular element on 6 rigid-body and 12 straining modes for fast computational simulations of arbitrary isotropic and laminated composite shells", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 145 (1997) 11-85
6. Calladine C. R., "Understanding imperfection-sensitivity in the buckling of thin-walled shells", *Thin Walled Structures* 23 (1995) 215-235
7. Chryssanthopoulos M. K. and Poggi C., "Stochastic imperfection modeling in shell buckling studies", *Thin Walled Structures*, 23 (1995), 179-200
8. Donnell L. H. and Wan C. C., "Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression", *Journal of Applied Mechanics*, March 1950, p. 73 - 83
9. Long-Yuan Li, "Influence of loading imperfections on the stability of an axially compressed cylindrical shell", *Thin Walled Structures*, 10 (1990), 215-220

10. Νικολάου Κ., "Ελαστική και μη γραμμική ανάλυση με το τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο TRIC - Εφαρμογές σε κελύφη και μεταλλικούς πλαισιακούς φορείς", Διπλωματική Εργασία, Παν. Θεσσαλίας, Σεπτέμβριος 2004
11. Palassopoulos G. V. "The most significant imperfection modes for the buckling strength of Imperfection-Sensitive Structures", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, (2003), p. 23501
12. Παπαδόπουλος Β. , "Οριακή ανάλυση αξιοπιστίας τριδιάστατων πλαισιακών κατασκευών με στοχαστικά πεπερασμένα στοιχεία", Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Αθήνα, Ιανουάριος 1998
13. Papadopoulos V. and Papadrakakis M., " The effect of material and thickness variability on the buckling load of shells with random initial imperfections"
14. Schenk C. A. and Schueller G. I. , "Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections", International Journal of Non-Linear Mechanics 38 (2003), 1119-1132
15. Shinozuka M. and Deodatis G., "Auto-Regressive Model for Nonstationary Stochastic Processes", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 11, November 1988
16. Shinozuka M. and Deodatis G., "Simulation of Stochastic processes by Spectral Representation Method", Appl. Mech. Rev., 44(4) (1991), 191-203
17. Simitse G. J., "Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: A review", Appl. Mech. Rev. vol 39, no 10, Oct. 1986
18. Singer J. and Abramovich H., "The development of shell imperfection measurement techniques", Thin Walled Structures 23 (1995) 379-398





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074683