



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μιχάλης Αγόρας

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΑΣ
ΣΕ ΠΟΡΩΔΗ ΜΕΤΑΛΛΑ ΛΟΓΩ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΠΛΑΣΤΙΚΩΝ
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΝΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

Εξεταστική Επιτροπή

Νίκος Αράβας, Καθηγητής (Επιβλέπων)
Αντώνης Γιαννακόπουλος, Αν. Καθηγητής
Σπύρος Καραμάνος, Επ. Καθηγητής

Βόλος 2005



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 4363/1
Ημερ. Εισ.: 21-03-2005
Δωρεά: Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ
2005
ΑΓΟ

© 2005 Μιχάλης Αγόρας

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Ευχαριστίες.

Οφείλω ένα θερμό ευχαριστώ στον καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας κ. Νίκο Αράβα για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε στο συγκεκριμένο θέμα. Θεωρώ πολύτιμη τη γνώση που απέκτησα με αφορμή τις απαιτήσεις της εργασίας και χάρη στην ενθάρρυνση και τη σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας. Οι πολύωρες συζητήσεις μας -σε μια περίοδο μάλιστα που οι υποχρεώσεις του ήταν ιδιαίτερα αυξημένες- είχαν πάντα διδακτικό χαρακτήρα για μένα. Εκτιμώ ιδιαίτερα τις πολύτιμες εμπειρίες του απ' το χώρο της έρευνας που είχε την καλοσύνη να μοιραστεί μαζί μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Αντώνη Γιαννακόπουλο και κ. Σπύρο Καραμάνο για το χρόνο και την υπομονή που διέθεσαν για τη μελέτη και αξιολόγηση της εργασίας.

Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους που με βοήθησαν κατά την εκμάθηση του ABAQUS, και ιδιαίτερα τους υποψήφιους διδάκτορες του τμήματος Γιάννη Παπατριανταφίλλου και Σωτηρία Χουλιάρα.

Με την ευκαιρία, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου για όλες τις ευχάριστες στιγμές που ζήσαμε όλα αυτά τα χρόνια στο Βόλο.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου για την ηθική συμπαράσταση, την οικονομική υποστήριξη, την κατανόηση και πάνω απ' όλα για το ενδιαφέρον και την αγάπη της.

Μιχάλης Αγόρας

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΟ-ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΛΛΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ.....	4
1.1. Στοιχεία παραμορφώσεων.....	5
1.2. Στοιχεία ρυθμού παραμορφώσεων.....	8
1.3. Περιγραφή της έντασης και συζυγή μεγέθη.....	12
1.4. Μικροδομή και καταστατικές μεταβλητές.....	14
1.5. Η ελαστοπλαστική συμπεριφορά των μετάλλων σε πεπερασμένες παραμορφώσεις.....	14
2. ΈΝΑ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΠΟΡΩΔΗ ΜΕΤΑΛΛΑ: ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙΛΑΣΑΜ-CASTAÑEDA.....	19
2.1. Η μοντελοποίηση της μικροδομής - Εσωτερικές μεταβλητές.....	20
2.2. Η καταστατική εξίσωση για το ελαστικό τμήμα της απόκρισης.....	21
2.3. Η καταστατική εξίσωση για το πλαστικό τμήμα της απόκρισης.....	22
2.4. Οι εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών.....	23
2.5. Η καταστατική εξίσωση για τη συνολική απόκριση.....	28
3. ΓΕΝΙΚΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΑΙΛΑΣΑΜ-CASTAÑEDA.....	30
3.1. Το ζήτημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ενός καταστατικού μοντέλου - Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.....	31
3.2. Η αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου Kailasam-Castañeda.....	35
3.2.1. Το πρόβλημα της επίπεδης έντασης.....	41
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Διαδικασίες υπολογισμού των τανυστών Eshelby.....	42
4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....	49
4.1. Έλεγχος των προβλέψεων του μοντέλου Kailasam-Castañeda στο πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού.....	51
4.2. Όρια διαμορφωσιμότητας πορωδών μεταλλικών ελασμάτων.....	62
4.2.1. Τοποθέτηση του προβλήματος - Η αναλυτική μορφή.....	62
4.2.2. Υπολογιστικές μέθοδοι και αποτελέσματα - Διαγράμματα ορίων διαμόρφωσης.....	68
ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	75
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: 1. Το "Input File" για τη δοκιμασία της μοναδιαίας κυψελίδας. 2. Αρχείο ανάγνωσης δεδομένων από "Results File".	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: Το πρόγραμμα προσδιορισμού των ορίων διαμορφώσεως.	
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: Το υποπρόγραμμα UMAT για το πρόβλημα της επίπεδης έντασης.	

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η περιγραφή της “φαινόμενης ή ισοδύναμης καταστατικής συμπεριφοράς” (effective or overall constitutive behavior) των σύνθετων-ετερογενών υλικών (υλικά με περισσότερες από μια φάσεις) είναι ένα σημαντικό και ταυτόχρονα δύσκολο πρόβλημα. Η αξία του αντικειμένου σχετίζεται με το εύρος των εφαρμογών των συγκεκριμένων υλικών, ενώ η δυσκολία του έγκειται σε ζητήματα όπως η περιγραφή της κατάστασης της μικροδομής και η επίδρασή της στην απόκριση του υλικού. Με στόχο την αντιμετώπιση του προβλήματος σε μη-γραμμικά υλικά, ο Pedro Ponte Castañeda πρότεινε το 1991 μια γενική θεωρία [25], η οποία αντιμετωπίζει με αξιοσημείωτη επιτυχία τις δυσκολίες που προαναφέραμε. Η προταθείσα θεωρία θεμελιώνεται σε μια τεχνική ομογενοποίησης και, χρησιμοποιώντας αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών [15], [17], [18], [27], [28], επιτυγχάνει τον προσδιορισμό “ορίων ή εκτιμήσεων” (bounds or estimates) των τοπικών ιδιοτήτων του σύνθετου υλικού (effective properties), τις οποίες εδώ θα χαρακτηρίζουμε ομογενοποιημένες, καθώς επίσης και τον προσδιορισμό του μέσου ρυθμού της παραμόρφωσης και του μέσου spin των επιμέρους φάσεων. Κεντρική υπόθεση της διαδικασίας της ομογενοποίησης είναι ότι η “τυπική” (χαρακτηριστικής του μεγέθους) διάσταση των μεμονωμένων φάσεων είναι πολύ μικρότερη από την τυπική διάσταση του σώματος ή της διακύμανσης των επιβαλλόμενων συνοριακών συνθηκών (από μαθηματικής απόψεως, ο λόγος τους τείνει στο μηδέν). Η θεωρία βρίσκει εφαρμογή σε υλικά με ισότροπες, μη-γραμμικά ιξώδεις φάσεις¹.

Η εφαρμογή της εν λόγω θεωρίας σε πορώδη μεταλλικά υλικά, για τη γενική περίπτωση που υποβάλλονται σε τριδιάστατες πεπερασμένες παραμορφώσεις, μελετήθηκε αναλυτικά απ’ τους Kailasam και Castañeda [15] και Kailasam και άλλους [18], [19], και οδήγησε στην ανάπτυξη ενός ανισότροπου καταστατικού μοντέλου (θα αναφερόμαστε σε αυτό ως “μοντέλο KC”). Με βάση αυτό το μοντέλο, υποτίθεται ότι οι πόροι έχουν αρχικά ελλειψοειδές σχήμα και κατανέμονται τυχαία μέσα στον ελαστοπλαστικό μεταλλικό φορέα. Αυτή η υπόθεση περιλαμβάνει την ειδική περίπτωση κατά την οποία το αρχικό σχήμα των πόρων είναι σφαιρικό και συνεπώς το πορώδες υλικό είναι αρχικά ισότροπο. Η ανάπτυξη πεπερασμένων πλαστικών παραμορφώσεων στο πορώδες μέταλλο συνεπάγεται την αλλαγή του μεγέθους, της μορφής και του προσανατολισμού των πόρων, ενώ το σχήμα τους παραμένει ελλειψοειδές. Σε κάθε σημείο του ομογενοποιημένου συνεχούς μέσου, ορίζεται ένα “αντιπροσωπευτικό ελλειψοειδές”, το οποίο εκφράζει τα χαρακτηριστικά του μέρους της μικροδομής που σχετίζεται με την πορώδη φάση. Αυτό το στοιχείο της θεώρησης προσδίδει έναν τοπικά ορθοτροπικό χαρακτήρα στο πορώδες υλικό, και μάλιστα οι κύριοι άξονες της ορθοτροπίας συμπίπτουν με τους άξονες του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς. Οι καταστατικές μεταβλητές οι οποίες χαρακτηρίζουν την κατάσταση της μικροδομής, σε κάθε σημείο του ομογενοποιημένου συνεχούς μέσου, είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση στη μεταλλική φάση $\bar{\epsilon}^p$ (ισότροπη φάση), το κλάσμα όγκου των κενών στο συνεχές μέσο ή πορώδες f , οι λόγοι των πλευρών του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς w_1 , w_2 και οι κατευθύνσεις των κυρίων αξόνων του $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$.

Μια εκτενής συζήτηση σχετικά με την “αριθμητική υλοποίηση” του καταστατικού μοντέλου που προαναφέραμε, σ’ ένα περιβάλλον πεπερασμένων στοιχείων, καθώς και ένας αλγόριθμος για την αριθμητική του ολοκλήρωση, παρουσιάζεται λεπτομερώς στις εργασίες [14] και [19]. Οι εργασίες αυτές περιλαμβάνουν επίσης ένα σύνολο εφαρμογών όπου εξετάζονται οι προβλέψεις του μοντέλου και ταυτόχρονα γίνονται συγκρίσεις με τις αντίστοιχες προβλέψεις του ισότροπου μοντέλου Gurson [13]. Μια νέα πρόταση η οποία βελτιώνει σημαντικά την απόδοση του αλγορίθμου που προτάθηκε στην εργασία [19], δημοσιεύτηκε απ’ τους Aravas και Castañeda [4]. Σ’ αυτή τη δημοσίευση περιλαμβάνεται επίσης ένα σύνολο εφαρμογών.

¹ Μια οριακή περίπτωση της μη-γραμμικά ιξώδους συμπεριφοράς είναι η τέλεια πλαστική συμπεριφορά.

Στην εργασία που κρατάτε στα χέρια σας, όπως θα έχετε ήδη υποψιαστεί απ' τον τίτλο και τη μικρή εισαγωγή που προηγήθηκε, ασχολούμαστε με υπολογιστικά ζητήματα σχετικά με την απόκριση πορωδών μεταλλικών υλικών σε πεπερασμένες παραμορφώσεις, και θεωρούμε ότι η καταστατική τους συμπεριφορά περιγράφεται απ' το ανισότροπο μοντέλο KC.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας το αντικείμενό μας είναι το ίδιο το μοντέλο KC. Θα επιχειρήσουμε να ελέγξουμε τις προβλέψεις του στο πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού μέσω της “δοκιμασίας της μοναδιαίας κυψελίδας” (unit cell test). Για λόγους σύγκρισης, οι υπολογισμοί εκτελέστηκαν επίσης μέσω του γνωστού ισότροπου μοντέλου Gurson [13]. Με στόχο τη μελέτη της επίδρασης των χαρακτηριστικών της πορώδους φάσης στην απόκριση του υλικού, θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση του τέλει πλαστικού μεταλλικού φορέα, ενώ θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας για τρεις περιπτώσεις σκλήρυνσης του μεταλλικού φορέα.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μας ασχολούμαστε με το πρόβλημα του προσδιορισμού των “ορίων διαμορφωσιμότητας” (limits to formability) πορωδών μεταλλικών ελασμάτων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την περίπτωση όπου το έλασμα παραμορφώνεται σε κατάσταση επίπεδης έντασης, υπό την επιβολή ανάλογων ορθών παραμορφώσεων σε δυο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις στο επίπεδο της έντασης, και αναζητούμε τις συνθήκες υπό τις οποίες το υλικό του ελάσματος γίνεται “ασταθές” ή “αστοχεί” με το σχηματισμό “λαιμού” σε μια στενή ζώνη (local necking). Η εμφάνιση της αστάθειας οφείλεται στη συγκέντρωση της παραμόρφωσης στη ζώνη (localization of deformation). Η ανάλυση που ακολουθούμε βασίζεται στο μοντέλο Marciniak-Kuczynski [20]. Πρόκειται να ασχοληθούμε με τα προβλήματα “ανάλυσης διακλαδώσεων” (bifurcation analysis) και “ανάλυσης ατελειών” (imperfection analysis). Τα αποτελέσματα των σχετικών υπολογισμών, παρουσιάζονται με συμπυκνωμένο τρόπο στο “διάγραμμα ορίων διαμόρφωσης” (forming limits diagram). Για τις ανάγκες εκτέλεσης του συγκεκριμένου θέματος, αναπτύξαμε έναν αλγόριθμο ολοκλήρωσης του καταστατικού μοντέλου KC για την ιδιαίτερη περίπτωση του προβλήματος επίπεδης έντασης (βλέπε ενότητα 3.2.1), τον οποίο στη συνέχεια κωδικοποιήσαμε σε μορφή υποπρογράμματος UMAT¹ (για να είμαστε ακριβείς, τροποποιήσαμε τον κώδικα UMAT για αξονοσυμμετρικά προβλήματα και προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης, που είχαμε στη διάθεσή μας²). [Μπορείτε να βρείτε αυτόν τον κώδικα στο παράρτημα Γ.]

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα ορίων διαμόρφωσης ελασμάτων έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, διότι περιλαμβάνουν ένα σύνολο απαραίτητων πληροφοριών για την εκτέλεση κατεργασιών διαμόρφωσής τους (όπως η βαθιά κοίλανση). Ο πειραματικός προσδιορισμός αυτών των διαγραμμάτων είναι, κατά κανόνα, εξαιρετικά δαπανηρός.

Στο πρώτο κεφάλαιο, ξεκινώντας απ' τις ιδέες στις ποίες θεμελιώνεται η θεωρία των συνεχών μέσων, παρουσιάζουμε ορισμένα γνωστά αποτελέσματα και επιχειρούμε να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της ελαστοπλοπλαστικής καταστατικής συμπεριφοράς των μετάλλων, μέσω της παρουσίασης ενός τυπικού καταστατικού μοντέλου. Ο στόχος μας ήταν το κεφάλαιο αυτό να αποτελέσει το υπόβαθρο για την παρουσίαση του μοντέλου KC, που γίνεται στο δεύτερο κεφάλαιο. Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης του μοντέλου, καθώς επίσης και ένα σύνολο σχετικών υπολογιστικών ζητημάτων. Το πρόβλημα της επίπεδης έντασης και η εφαρμογή του αλγορίθμου σ' αυτή την περίπτωση παρουσιάζονται στην ενότητα 3.2.1. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις εφαρμογές που αναφέραμε πιο πάνω.

Κλίνουμε αυτό το εισαγωγικό σημείωμα με μια αναφορά στον κώδικα συμβολισμού που χρησιμοποιούμε στο κείμενο. Τα έντονα γράμματα δηλώνουν τανυστές, η τάξη των οποίων

¹ (User Subroutine) Πρόκειται για κώδικες σε FORTRAN, οι οποίοι υλοποιούν αλγορίθμους ολοκλήρωσης καταστατικών μοντέλων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν απ' το πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS.

² Ο κώδικας αυτός αναπτύχθηκε απ' τον καθηγητή Ν. Αράβα, στα πλαίσια της εργασίας [4].

υποδεικνύεται απ' τα συμφραζόμενα. Οι συνιστώσες των ταχυστών αναφέρονται σε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_i ($i=1, 2, 3$), και ισχύει η σύμβαση της αθροίσεως για τους επαναλαμβανόμενους δείκτες. Ο τελευταίος κανόνας δεν ισχύει όταν ο δείκτης είναι υπογραμμισμένος. Οι Λατινικοί δείκτες παίρνουν τιμές απ' το σύνολο $\{1, 2, 3\}$, ενώ οι Ελληνικοί απ' το $\{1, 2\}$. Ο δείκτης T σε έναν ταχυστή δευτέρας τάξεως υποδηλώνει την αναστροφή του και οι δείκτες s και a το συμμετρικό και αντισυμμετρικό του μέρους, αντίστοιχα. Αν οι \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} είναι ταχυστές πρώτης τάξεως, οι \mathbf{A} , \mathbf{B} , ταχυστές δευτέρας τάξεως και οι \mathbf{C} και \mathbf{D} , ταχυστές τετάρτης τάξεως, ορίζουμε τα γινόμενα: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$, $(\mathbf{ab})_{ij} = a_i b_j$, $(\mathbf{abcd})_{ijkl} = a_i b_j c_k d_l$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A})_i = a_k A_{ki}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a})_i = A_{ik} a_k$, $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{kl} B_{kl}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$, $(\mathbf{AB})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = a_k A_{kl} b_l = (\mathbf{ab}) : \mathbf{A}$, $(\mathbf{C} : \mathbf{A})_{ij} = C_{ijkl} A_{kl}$, $(\mathbf{A} : \mathbf{C})_{ij} = A_{kl} C_{klij}$, $\mathbf{A} : \mathbf{C} : \mathbf{B} = A_{ij} C_{ijkl} B_{kl}$ και $(\mathbf{C} : \mathbf{D})_{ijkl} = C_{ijpq} D_{pqkl}$.

1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΟΠΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΛΛΩΝ ΥΠΟ ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΜΕΣΩΝ¹

Το εγχείρημα της θεωρητικής πρόβλεψης της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών σωμάτων, θεμελιώνεται στην αντίληψη ότι η επίδραση των εξωτερικών μηχανικών φορτίων συνεπάγεται την ανταπόκριση των σωμάτων με τάσεις και παραμορφώσεις. Το πλήρες σύνολο των σχέσεων που συνδέουν τις συνιστώσες της απόκρισης αποτελεί το καταστατικό μοντέλο, και είναι ένα ιδιαίτερο πρόβλημα για κάθε κατηγορία υλικών. Αυτή η ιδιαιτερότητα αντικατοπτρίζει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της μικροδομής και κατ' επέκταση, τη φύση του υλικού. Αυτές τις (ασαφείς και μάλλον φιλοσοφικές) παρατηρήσεις θα προσπαθήσουμε να διευκρινίσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο.

Θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε θεμελιώδεις έννοιες που χρησιμοποιούνται κατά την ανάπτυξη των καταστατικών μοντέλων· ξεκινώντας απ' τις κεντρικές ιδέες και αρχές, θα παρουσιάσουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις και συμπεράσματα που προκύπτουν απ' την ανάλυση της θεωρίας των συνεχών μέσων και της καταστατικής θεωρίας. Συγκεκριμένα, στις ενότητες 1.1 και 1.2, παρουσιάζουμε ορισμένα στοιχεία κινηματικής πεπερασμένων παραμορφώσεων, ενώ στην ενότητα 1.3 ασχολούμαστε με το ζήτημα της περιγραφής της έντασης. Στην ενότητα 1.4 επιχειρούμε να προσεγγίσουμε την “εικόνα” της μικροδομής και την έννοια της καταστατικής μεταβλητής. Στην τελευταία ενότητα (1.5) παρουσιάζουμε ένα τυπικό καταστατικό μοντέλο με στόχο να αναδείξουμε τις κεντρικές ιδέες που χρησιμοποιούνται κατά την ανάπτυξή του.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση, αξίζει να σημειώσουμε ότι αυτό το κεφάλαιο σχεδιάστηκε ώστε να αποτελέσει το υπόβαθρο για την περιγραφή του μοντέλου KC, που γίνεται στο επόμενο κεφάλαιο. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για τις αποδείξεις των προτάσεων που παρουσιάζονται, μπορεί να ανατρέξει σε βιβλιογραφία σχετική με τη Μηχανική των Συνεχών Μέσων· προτείνουμε τα βιβλία:

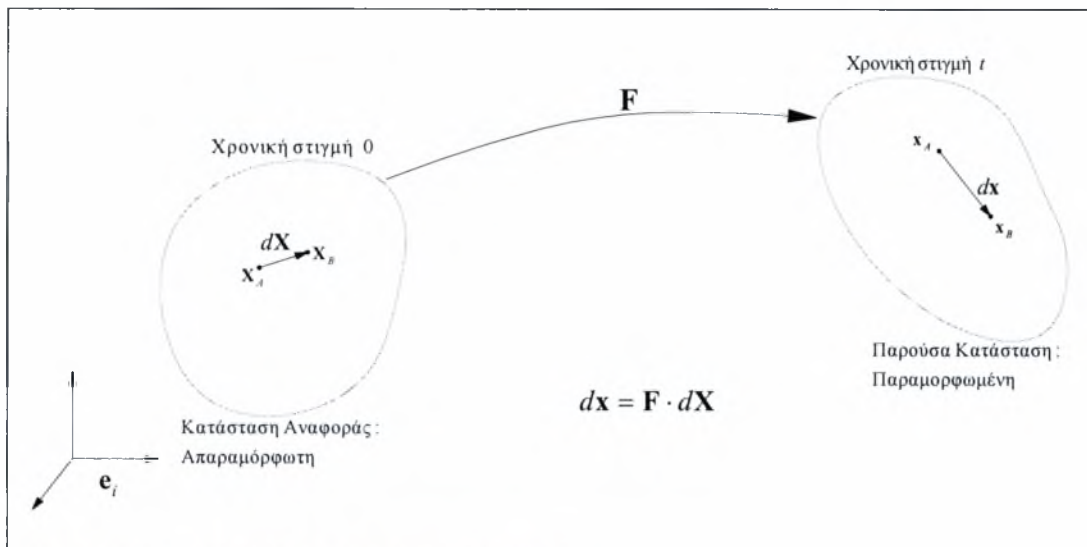
- Chadwick, P., ‘Continuum Mechanics: Concise Theory and Problems’, George Allen & Unwin Ltd., 1976 (ανατύπωση Dover Publications, 1999)” και
- J. Bonet & R. D. Wood, ‘Non-Linear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis’, Cambridge Univ. Press, 1997.

¹ Αυτό το κεφάλαιο βασίστηκε σε σημειώσεις από μαθήματα του καθηγητή του Τμήματος, κ. Νίκου Αράβα. Η ευθύνη για ενδεχόμενα λάθη είναι αποκλειστικά δική μου.

1.1. Στοιχεία παραμορφώσεων.

Μιλώντας για παραμορφώσεις, εννοούμε τις αλλαγές που συμβαίνουν στη γεωμετρία του σώματος. Οι αλλαγές αυτές έχουν τοπικό χαρακτήρα, αναφέρονται δηλαδή στη “γειτονιά” του υλικού σημείου αναφοράς. Κατά συνέπεια, ο ορισμός της παραμορφώσεως προϋποθέτει τον ορισμό μιας γεωμετρίας αναφοράς, που ορίζει την “απαραμόρφωτη” κατάσταση του σώματος, και μιας “τρέχουσας” ή “παρούσας” γεωμετρίας, που ορίζει την “παραμορφωμένη” του κατάσταση. Και οι δυο γεωμετρίες ορίζονται πλήρως μέσω των διανυσμάτων θέσεως των υλικών σημείων του σώματος.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζουμε το μετασχηματισμό της γεωμετρίας ενός σώματος απ’ την απαραμόρφωτη κατάσταση, που υποθέτουμε ότι αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t = 0$, στην παραμορφωμένη, που αντιστοιχεί σε μια τυχαία χρονική στιγμή t .



Σχήμα 1.1. Η “κλίση της παραμορφώσεως”.

Θεωρούμε ένα τυχαίο υλικό σημείο A του συνεχούς μέσου, το οποίο ορίζεται απ’ τα διανύσματα θέσεώς του, \mathbf{X} και $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, στην κατάσταση αναφοράς και στην παρούσα κατάσταση, αντίστοιχα (παραλείπουμε τους δείκτες αναφοράς για απλότητα στους συμβολισμούς). Επιλέγουμε, επίσης τυχαία, ένα δεύτερο υλικό σημείο B στη γειτονιά του A. Η σχετική θέση του B ως προς το A, ορίζεται απ’ τα διανύσματα $d\mathbf{X}$ και $d\mathbf{x}$, στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη γεωμετρία, αντίστοιχα (βλέπε Σχήμα 1.1). Εξ’ ορισμού, τα διανύσματα $d\mathbf{X}$ και $d\mathbf{x}$ ορίζουν μια (απειροστή) υλική ίνα του σώματος και το ζήτημα που μας απασχολεί είναι με ποιο τρόπο παραμορφώνεται ($d\mathbf{X} \rightarrow d\mathbf{x}$) ή, σε “πιο Μαθηματική ορολογία”, ποιος είναι ο τελεστής που όταν ενεργεί στο $d\mathbf{X}$ δίνει το $d\mathbf{x}$; Εξορισμού, ο τελεστής αυτός -θα τον συμβολίζουμε στο εξής με \mathbf{F} - είναι η κλίση του πεδίου $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ στο χώρο \mathcal{E}^X -με \mathcal{E}^M , θα συμβολίζουμε τον Ευκλείδειο χώρο που ορίζει το μέγεθος \mathbf{M} - στο σημείο A^1 , δηλαδή

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (1.1)$$

¹ Μια εφαρμογή της ιδέας για την περίπτωση βαθμωτών πεδίων υπάρχει στο βιβλίο των G. B. Tomas και R. L. Finney, ‘Απειροστικός Λογισμός’, Τόμος Β, σελ. 289, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1997.

Το μέγεθος \mathbf{F} είναι ένας τανυστής 2^{ος} τάξεως, αποκαλείται τανυστής κλίσης της παραμόρφωσης και ικανοποιεί τη θεμελιώδη σχέση:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (1.2)$$

Επειδή το σημείο \mathbf{B} είναι τυχαία επιλογή, ο τανυστής \mathbf{F} περιέχει όλες τις πληροφορίες για την παραμόρφωση στο σημείο \mathbf{A} . Για να το θέσουμε διαφορετικά, δοθέντος του \mathbf{F} σ' ένα υλικό σημείο, μπορεί να υπολογιστούν οι αλλαγές οποιουδήποτε υλικού στοιχείου (όγκου, επιφάνειας, υλικής ίνας) του συνεχούς μέσου, στη γειτονιά αυτού του σημείου. Έτσι, η ανηγμένη διόγκωση, $J = dV/dV_0$, υλικού στοιχείου απειροστού όγκου dV_0 που μετασχηματίζεται σε dV , προκύπτει ότι είναι

$$J = \det[\mathbf{F}]. \quad (1.3)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα σχετικά αποτελέσματα για την περίπτωση των υλικών ινών.

Θεωρούμε μια απειροστή υλική ίνα $d\mathbf{X}$ στην απαραμόρφωτη κατάσταση, η οποία μετά την παραμόρφωση γίνεται $d\mathbf{x}$. Μπορούμε να γράψουμε $d\mathbf{X} = |d\mathbf{X}|\mathbf{N}$ και $d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}|\mathbf{n}$, όπου \mathbf{N} και \mathbf{n} είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις αντίστοιχες κατευθύνσεις. Ορίζοντας

$$\lambda = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} = \frac{\sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}}{\sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}}, \quad (1.4)$$

την “ανηγμένη αλλαγή μήκους” (stretch ratio) της υλικής ίνας, εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\lambda = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}} = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}}, \quad (1.5)$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{-1} \cdot \mathbf{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{n}}}, \quad (1.6)$$

όπου έχουμε ορίσει τους τανυστές \mathbf{C} και \mathbf{B} , γνωστοί στη βιβλιογραφία ως δεξιός και αριστερός Cauchy-Green αντίστοιχα. [Αποδεικνύεται ότι οι τανυστές \mathbf{C} και \mathbf{B} είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι (Αράβας [1]), κάτι που συνεπάγεται ότι έχουν πραγματικές και θετικές ιδιοτιμές, και ιδιοδιανύσματα κάθετα μεταξύ τους.] Απ' τη σχέση (1.5) είναι προφανές ότι το λ είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης \mathbf{N} . Αποδεικνύεται ότι οι ακρότατες τιμές του λ συμβαίνουν στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων του \mathbf{C} και ότι το τετράγωνό τους (δηλαδή οι τιμές λ^2) είναι ιδιοτιμές του \mathbf{C} . Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με λ_i^2 ($i=1,2,3$) τις τιμές αυτές και με \mathbf{N}_i τα ιδιοδιανύσματα του \mathbf{C} , ο \mathbf{C} γράφεται

$$\mathbf{C} = \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i. \quad (1.7)$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\mathbf{B} = \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i. \quad (1.8)$$

Κομβικό σημείο στην ανάλυση των παραμορφώσεων αποτελεί η πολική παραγοντοποίηση (Αράβας [1]) του τανυστή κλίσης της παραμορφώσεως

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}. \quad (1.9)$$

Η πρώτη σχέση αποκαλείται δεξιά παραγοντοποίηση, ενώ η δεύτερη, αριστερή. Οι τανυστές \mathbf{U} και \mathbf{V} είναι συμμετρικοί, θετικά ορισμένοι και ορίζονται απ' τις σχέσεις

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}} = \lambda_i \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (1.10)$$

και

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}} = \lambda_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i, \quad (1.11)$$

αντίστοιχα. Η δράση τους πάνω σε μια απειροστή υλική ίνα συνεπάγεται -εν γένει- μια “καθαρή παραμόρφωση” (επιμήκυνση ή επιβράχυνση) και μια περιστροφή της (οι υλικές ίνες που βρίσκονται στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων τους, δεν περιστρέφονται). Το σημαντικό είναι ότι οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι διαφορετικοί για κάθε υλική ίνα, εν αντιθέσει με τον μετασχηματισμό \mathbf{R} . Ο τανυστής \mathbf{R} είναι γνήσιος ορθογώνιος (τανυστής περιστροφής): εκφράζει μια “ολόσωμη περιστροφή”, με την έννοια ότι περιστρέφει όλες τις υλικές ίνες κατά το ίδιο μέγεθος, και ορίζεται απ' τις σχέσεις $\mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}$. Αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\mathbf{R} = \mathbf{n}_i \mathbf{N}_i. \quad (1.12)$$

Όπως είδαμε πιο πάνω, η καθαρή παραμόρφωση οφείλεται στον \mathbf{U} ή στον \mathbf{V} , ανάλογα με τον τρόπο που βλέπουμε το μετασχηματισμό \mathbf{F} . Επομένως, ο τανυστής των παραμορφώσεων θα πρέπει να είναι ομοαξονικός¹ του \mathbf{U} , ή εναλλακτικά του \mathbf{V} . Έτσι οδηγούμαστε στον ορισμό των δυο παρακάτω οικογενειών τανυστών παραμορφώσεων

$$\text{Οικογένεια Lagrange: } \mathbf{E}^{(m)} = f^{(m)}(\lambda_i) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i \quad (1.13)$$

$$\text{Οικογένεια Euler} \quad : \quad \mathbf{e}^{(m)} = f^{(m)}(\lambda_i) \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i \quad (1.14)$$

(τα συστήματα συντεταγμένων που ορίζονται απ' τα \mathbf{N}_i και \mathbf{n}_i ονομάζονται συστήματα Lagrange και Euler, αντίστοιχα). Οι συναρτήσεις $f^{(m)}(\lambda)$ επιλέγονται έτσι ώστε στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων ($\lambda \rightarrow 1$), οι πιο πάνω ορισμοί να ανάγονται στον “κλασικό” ορισμό των απειροστών ορθών παραμορφώσεων ($\epsilon_{ii} = \lambda_i - 1$, για $i=1,2,3$). Ως αποτέλεσμα, προκύπτει ότι πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί $f^{(m)}(1)=0$ και $f^{(m)'}(1)=1$. Με βάση αυτούς τους περιορισμούς, αποδεικνύεται ότι η γενικότερη μορφή των συναρτήσεων $f^{(m)}(\lambda)$ είναι

$$f^{(m)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{m}(\lambda^m - 1), & m \neq 0 \\ \ln \lambda & , \quad m = 0 \end{cases}, \quad (1.15)$$

η οποία ισχύει για κάθε ακέραιο m . Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις (1.13), (1.14) και (1.15) ορίζουν το πλήρες σύνολο των τανυστών των παραμορφώσεων, ενώ αξίζει να τονίσουμε ότι για οποιαδήποτε επιλογή τανυστή παραμορφώσεων προκύπτει μια ισοδύναμη περιγραφή του

¹ Δυο τανυστές \mathbf{A} και \mathbf{B} ονομάζονται ομοαξονικοί αν διαγωνοποιούνται στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων κατά συνέπεια, ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

καταστατικού μοντέλου¹. Παρακάτω, παρουσιάζονται μερικοί τανυστές παραμορφώσεων που χρησιμοποιούνται συχνά.

Για $m = 0$, προκύπτουν οι τανυστές

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(0)} &= \ln \lambda_i \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i = \ln \mathbf{U} \\ \mathbf{e}^{(0)} &= \ln \lambda_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = \ln \mathbf{V} \end{aligned} \quad (1.16)$$

που αποκαλούνται τανυστές παραμορφώσεων Henky ή λογαριθμικοί. Απ' την οικογένεια Lagrange, για $m = 2$, προκύπτει ο τανυστής Green

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}), \quad (1.17)$$

ενώ για $m = 1$, προκύπτει ο τανυστής Biot

$$\mathbf{E}^{(1)} = (\lambda_i - 1) \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i = \mathbf{U} - \mathbf{I}. \quad (1.18)$$

Απ' την οικογένεια Euler, για $m = -2$, προκύπτει ο τανυστής παραμορφώσεων Almansi

$$\mathbf{e}^{(-2)} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_i^2} \right) \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2}). \quad (1.19)$$

1.2. Στοιχεία ρυθμού παραμορφώσεων.

Σε ένα δεύτερο επίπεδο ανάλυσης της κινηματικής, μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε το ρυθμό αλλαγής της γεωμετρίας του σώματος, που εύλογα αποκαλείται ρυθμός παραμόρφωσης. Αφού παρατηρήσουμε ότι ο ορισμός του πεδίου των διανυσμάτων θέσεως των υλικών σημείων του συνεχούς μέσου τη χρονική στιγμή t , $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ², συνεπάγεται τον ορισμό του αντίστοιχου πεδίου των ταχυτήτων

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad (1.20)$$

το σκεπτικό που ακολουθείται είναι ίδιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα για τον προσδιορισμό της αλλαγής της γεωμετρίας του σώματος.

Αναφερόμενοι στην παρούσα γεωμετρία του σχήματος 1.1, το ζήτημα είναι να βρούμε την αλλαγή $d\mathbf{v}$, που προκαλεί στο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ μια τυχαία απειροστή αλλαγή $d\mathbf{x}$, στη γειτονιά του σημείου A, στο χώρο \mathcal{E}^x . Η απάντηση είναι

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x}, \quad (1.21)$$

όπου \mathbf{L} , είναι η κλίση του πεδίου $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ στο χώρο \mathcal{E}^x , στο σημείο A

¹ Κάθε φορά πρέπει να επιλέγεται ο αντίστοιχος συζυγής τανυστής των τάσεων. Μια αναφορά στις συζυγείς ποσότητες γίνεται στην ενότητα 1.3.

² Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ είναι ουσιαστικά η εξίσωση της τροχιάς -σε παραμετρική μορφή- του υλικού σημείου, του οποίου η θέση στην απαραμόρφωτη γεωμετρία ($t = 0$) ορίζεται απ' το διάνυσμα \mathbf{X} .

$$\mathbf{L} = \nu \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \nu(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (1.22)$$

Ο \mathbf{L} είναι ένας τανυστής 2^{ος} τάξεως, αποκαλείται τανυστής κλίσης της ταχύτητας και περιέχει όλες τις πληροφορίες για το ρυθμό αλλαγής της γεωμετρίας του σώματος στο σημείο αναφοράς. Έτσι, για παράδειγμα, ο ρυθμός ανηγμένης διόγκωσης προκύπτει ότι δίνεται απ' τη σχέση $\dot{J} = JL_{kk} = JD_{kk}$ (για τον τανυστή \mathbf{D} συζητάμε παρακάτω).

Η σχέση μεταξύ των \mathbf{L} και \mathbf{F} προκύπτει ως εξής:

$$d\nu = \frac{\partial}{\partial t}[d\mathbf{x}] = \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}] = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} \Rightarrow d\nu = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (1.23)$$

Ο \mathbf{L} , όπως κάθε τανυστής 2^{ος} τάξεως, μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τμήματος:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^s + \mathbf{L}^a, \quad (1.24)$$

όπου το συμμετρικό του τμήμα, \mathbf{L}^s , το οποίο θα συμβολίζουμε στο εξής με \mathbf{D} , είναι

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \Rightarrow \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.25)$$

και το αντισυμμετρικό, \mathbf{L}^a , το οποίο θα συμβολίζουμε στο εξής με \mathbf{W} , είναι

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \Rightarrow \mathbf{W} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.26)$$

Οι τανυστές \mathbf{D} και \mathbf{W} αποκαλούνται “ρυθμός της παραμόρφωσης” και “spin του συνεχούς μέσου” αντίστοιχα, και έχουν ένα συγκεκριμένο φυσικό νόημα, το οποίο θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε στη συνέχεια.

Για τις ορθές συνιστώσες του \mathbf{D} , αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση

$$D_{\underline{nn}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial t} [\ln \lambda] = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}, \quad (1.27)$$

όπου λ είναι η ανηγμένη αλλαγή μήκους στην κατεύθυνση που ορίζεται απ' το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} . Συνεπώς, $D_{\underline{nn}}$ είναι ο ρυθμός αλλαγής μήκους ανά μονάδα μήκους της υλικής ίνας, της οποίας ο προσανατολισμός στην παρούσα γεωμετρία, ορίζεται απ' το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} .

Οι “διατμητικές” συνιστώσες του \mathbf{D} , αποδεικνύεται¹ ότι ικανοποιούν τη σχέση

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\text{Sin}\theta} \left[(D_{\underline{mm}} + D_{\underline{nn}}) \text{Cos}\theta - 2D_{\underline{mn}} \right], \quad (1.28)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι υλικές ίνες, που στην παρούσα γεωμετρία βρίσκονται στις κατευθύνσεις \mathbf{m} και \mathbf{n} . Στη γενική περίπτωση, είναι δύσκολο να προκύψουν συμπεράσματα απ' τη σχέση (1.28), για τη σημασία της διατμητικής συνιστώσας $D_{\underline{mn}}$. Για την

¹ Για την απόδειξη, χρησιμοποιείται η σχέση (1.30), η οποία παρουσιάζεται παρακάτω.

περίπτωση όμως, όπου $\theta = 90^\circ$ ($\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$), η σχέση (1.28) γίνεται $2D_{mn} = -\dot{\theta}$, από όπου προκύπτει το συμπέρασμα ότι, $2D_{mn}$ είναι ο ρυθμός μείωσης της γωνίας μεταξύ δυο υλικών ινών οι οποίες στην παρούσα γεωμετρία τέμνονται στο σημείο αναφοράς του \mathbf{D} και βρίσκονται πάνω στις, κάθετες μεταξύ τους, διευθύνσεις \mathbf{m} και \mathbf{n} .

Γενικά, ένα διάνυσμά $\mathbf{m}(t)$ το οποίο περιστρέφεται χωρίς ν' αλλάζει το μήκος του, μπορεί να γραφεί ως εξής: $\mathbf{m}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{m}_0$, όπου $\mathbf{R}(t)$ είναι ο γνήσιος ορθογώνιος τανυστής που εκφράζει την περιστροφή του διανύσματος απ' τον προσανατολισμό $\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}(t=0)$ στον προσανατολισμό $\mathbf{m}(t)$ ($\mathbf{R}(t=0) = \delta$). Αποδεικνύεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος \mathbf{m} δίνεται απ' τη σχέση

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{W}^m \cdot \mathbf{m}, \quad (1.29)$$

όπου $\mathbf{W}^m = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$, είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής, που ονομάζεται spin του διανύσματος \mathbf{m} . Στην ειδική περίπτωση που το $\mathbf{m}(t)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμά, το οποίο ορίζει τον προσανατολισμό μιας υλικής ίνας $d\mathbf{x}$ καθ' όλη τη διάρκεια της παραμόρφωσης, δηλαδή $d\mathbf{x}(t) = |d\mathbf{x}(t)|\mathbf{m}(t)$, προκύπτει ότι το αντίστοιχο spin δίνεται απ' τη σχέση

$$\mathbf{W}^m = \mathbf{W} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}\mathbf{m} - \mathbf{m}\mathbf{m} \cdot \mathbf{D}. \quad (1.30)$$

Με βάση την τελευταία σχέση, αποδεικνύεται ότι το spin \mathbf{W} (το αντισυμμετρικό μέρος του \mathbf{L}) είναι το μέσο spin των υλικών ινών που βρίσκονται γύρο απ' το σημείο αναφοράς [3]. Επίσης, για τις υλικές ίνες που στιγμιαία ταυτίζονται με τις ιδιοκατευθύνσεις του \mathbf{D} (και συνεπώς το \mathbf{m} είναι στιγμιαία ιδιοδιάνυσμα του \mathbf{D}), η σχέση (1.30) γίνεται $\mathbf{W}^m = \mathbf{W}$, απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα ότι, \mathbf{W} είναι το spin των υλικών ινών που στιγμιαία βρίσκονται στις κατευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων του \mathbf{D} .

Στο σχήμα 1.2 ορίζουμε τον προσανατολισμό των αξόνων Lagrange (ιδιοδιανύσματα του \mathbf{U}) και Euler (ιδιοδιανύσματα του \mathbf{V}).

Με βάση τη σχέση (1.29), μπορούμε να γράψουμε

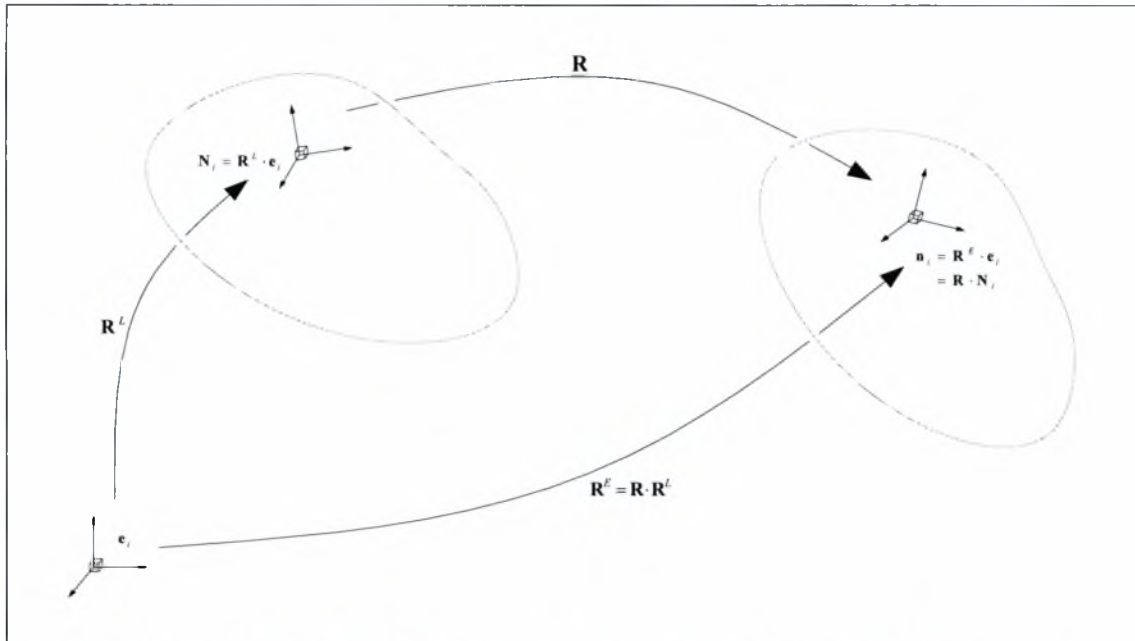
$$\dot{\mathbf{N}}_i = \mathbf{W}^L \cdot \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{W}^L = \dot{\mathbf{R}}^L \cdot \mathbf{R}^{L^T} \quad (1.31)$$

και

$$\dot{\mathbf{n}}_i = \mathbf{W}^E \cdot \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{W}^E = \dot{\mathbf{R}}^E \cdot \mathbf{R}^{E^T}. \quad (1.32)$$

Στη συνέχεια, ορίζοντας τους τανυστές

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= D_{ij} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \\ \mathbf{W} &= W_{ij} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \\ \mathbf{W}^E &= W_{ij}^E \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \end{aligned} \quad (1.33)$$



Σχήμα 1.2. Ο προσανατολισμός των συστημάτων Lagrange (\mathbf{N}_i) και Euler (\mathbf{n}_i).

και

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^L &= W_{ij}^L \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j \\ \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} = D_{ij} \mathbf{N}_i \mathbf{N}_j \end{aligned} \quad (1.34)$$

αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} W_{ij}^L &= -\frac{2\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} D_{ij}, \quad i \neq j \text{ \& } \lambda_i \neq \lambda_j \\ W_{ii}^L &= 0, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (1.35)$$

και

$$\begin{aligned} W_{ij}^E &= W_{ij} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} D_{ij}, \quad i \neq j \text{ \& } \lambda_i \neq \lambda_j \\ W_{ii}^E &= 0, \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (1.36)$$

όπου λ_i ($i=1,2,3$) είναι οι ιδιοτιμές των ταυιστών \mathbf{U} και \mathbf{V} , και ταυτόχρονα οι ανηγμένες αλλαγές μήκους των υλικών ινών που βρίσκονται στις κύριες διευθύνσεις τους. Επειδή όμως, τα ιδιοδιανύσματα των \mathbf{U} και \mathbf{V} συμπίπτουν με διαφορετικές $-\epsilon$ ν γένει- υλικές ίνες, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, οι ταυιστές \mathbf{W}^L και \mathbf{W}^E εκφράζουν απλώς τα spin των αντίστοιχων διανυσμάτων κι όχι spin κάποιων υλικών ινών.

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με μια παρατήρηση που θα φανεί χρήσιμη στο 3^ο κεφάλαιο, κατά την αντιμετώπιση του θέματος της ολοκλήρωσης του καταστατικού μοντέλου Kailasam-Castañeda.

Στις απειροστές παραμορφώσεις, ο ρυθμός μεταβολής του τανυστή των παραμορφώσεων ϵ ταυτίζεται με τον τανυστή του ρυθμού της παραμόρφωσης \mathbf{D} , δηλαδή $\mathbf{D} = \dot{\epsilon}$. Στην περίπτωση των πεπερασμένων παραμορφώσεων όμως, δεν υπάρχει τανυστής παραμορφώσεων (Lagrange (1.13) ή Euler (1.14)), για τον οποίο να ισχύει μια τέτοια σχέση. Ωστόσο, όπως είναι αναμενόμενο, πιο πολύπλοκες σχέσεις πάντα μπορεί να βρεθούν.

Για τους λογαριθμικούς τανυστές, στην ειδική περίπτωση που οι άξονες Lagrange (\mathbf{N}_i) δεν περιστρέφονται, και συνεπώς $\mathbf{W}^L = 0$, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} = \dot{\mathbf{E}}^{(0)} = (\ln \mathbf{U})^{\cdot} \quad (1.37)$$

και

$$\mathbf{D} = (\mathbf{e}^{(0)})^{\nabla} = (\ln \mathbf{V})^{\nabla}, \quad (1.38)$$

όπου το σύμβολο " ∇ " έχει επικρατήσει να χρησιμοποιείται για το συστροφικό, με το spin \mathbf{W} , ρυθμό μεταβολής ενός τανυστή, που ονομάζεται επίσης παράγωγος Jaumann. Η παράγωγος Jaumann του $\mathbf{e}^{(0)}$ δίνεται απ' τη σχέση

$$\mathbf{e}^{(0)\nabla} = \dot{\mathbf{e}}^{(0)} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}^{(0)} + \mathbf{e}^{(0)} \cdot \mathbf{W}. \quad (1.39)$$

Γενικά, για το συστροφικό με ένα spin ω ρυθμό μεταβολής, τον οποίο επιλέγουμε να συμβολίσουμε με το δείκτη " $C-R$ " (Co-Rotational), ενός τανυστή $1^{ης}$ τάξεως \mathbf{a} και ενός τανυστή $2^{ης}$ τάξεως \mathbf{A} , αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{a}^{C-R} = \dot{\mathbf{a}} - \omega \cdot \mathbf{a} \quad (1.40)$$

και

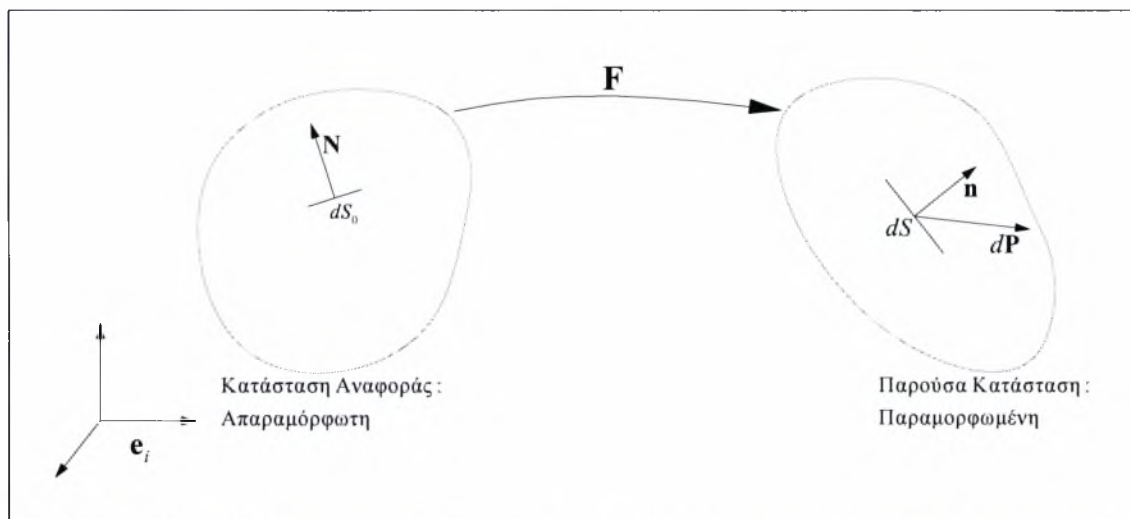
$$\mathbf{A}^{C-R} = \dot{\mathbf{A}} - \omega \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \omega, \quad (1.41)$$

αντίστοιχα.

1.3. Περιγραφή της έντασης και συζυγή μεγέθη.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον ορισμό μερικών απ' τους τανυστές των τάσεων που χρησιμοποιούνται συχνά στις εφαρμογές.

Θεωρούμε μια απειροστή υλική επιφάνεια $d\mathbf{S}_0 = dS_0 \mathbf{N}$ με τυχαίο προσανατολισμό, στην απαραμόρφωτη κατάσταση, η οποία ακολουθώντας την παραμόρφωση του σώματος, μετασχηματίζεται σε $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$.



Σχήμα 1.3. Η δύναμη που ασκείται σε υλική επιφάνεια στην παραμορφωμένη γεωμετρία.

Η επιφάνεια dS δέχεται μια δύναμη $d\mathbf{P}$, η οποία ορίζεται απ' τη σχέση $d\mathbf{P} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS$. Έτσι προκύπτει ο ορισμός του (συμμετρικού) τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$, που ονομάζεται πραγματικός ή Cauchy. Αποδεικνύεται ότι $d\mathbf{P} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} dS_0$, όπου

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{1.42}$$

είναι ο ονομαστικός (ή 1^{ος} Piola-Kirchoff) τανυστής των τάσεων, ο οποίος δεν είναι συμμετρικός. Ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \tag{1.43}$$

ονομάζεται 2^{ος} Piola-Kirchoff, ενώ ο τανυστής

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.44}$$

ονομάζεται τανυστής τάσεων Kirchoff.

Στη θεωρία ξεκινάμε συνήθως με υποθέσεις. Με βάση τα όσα ειπώθηκαν σχετικά με τα μεγέθη που μπορούν να περιγράψουν την παραμόρφωση και την ένταση, είναι εύλογο το ερώτημα: για ποιους συγκεκριμένους τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων είναι “σωστό” να υποθέσουμε μια καταστατική σχέση. Η απάντηση είναι, για οποιοδήποτε “κατάλληλο ζεύγος”! Η επιλογή των κατάλληλων ζευγαριών ποσοτήτων (συζυγείς ποσότητες) βασίζεται στον ορισμό της ισχύος των εσωτερικών τάσεων (stress power), ή εσωτερικής μηχανικής ισχύος, ανά μονάδα μάζας:

$$dP = \frac{1}{\rho} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_0} \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) \tag{1.45}$$

όπου P είναι η ισχύς των εσωτερικών τάσεων και, ρ και ρ_0 , η πυκνότητα του σώματος στην παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη κατάσταση, αντίστοιχα. Εξ' ορισμού, τα ζεύγη $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ και $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D})$ αποτελούν συζυγείς ποσότητες. Όλα τα υπόλοιπα ζεύγη, προκύπτουν απ' την ανάλυση της εξίσωσης (1.45). Για παράδειγμα, προκύπτει ότι

$$\text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D}) = \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}}^G). \tag{1.46}$$

Τα μεγέθη S και E^G (τανυστής παραμορφώσεων Green) είναι συζυγείς τανυστές έντασης-παραμόρφωσης.

1.4. Μικροδομή και καταστατικές μεταβλητές.

Ο ισχυρισμός ότι “η μικροδομή είναι η ταυτότητα του υλικού” θεμελιώνεται -κατά την υποκειμενική μου αντίληψη- στις παρακάτω τρεις προτάσεις (υποθέσεις), οι οποίες (μάλλον) αναδεικνύουν το πρόβλημα της “μοντελοποίησης της μικροδομής” σε κεντρικό, για την ανάπτυξη του καταστατικού μοντέλου:

- “Η μικροδομή του υλικού καθορίζει τις μηχανικές του ιδιότητες.”
- “Οι μηχανικές ιδιότητες του υλικού καθορίζουν τη μηχανική του συμπεριφορά.” [Ποιοτικά μιλώντας, μπορούμε να πούμε ότι οι μηχανικές ιδιότητες είναι ο “συνδεδετικός κρίκος” μεταξύ έντασης και παραμόρφωσης.]
- “Η μικροδομή εξελίσσεται -εν γένει- με την εξέλιξη της παραμόρφωσης.” [Οι μόνιμες παραμορφώσεις ενός σώματος που υποβάλλεται σε ένα σύστημα φόρτισης, ισοδυναμούν με μη ανακτήσιμες (με την αποφόρτιση) αλλαγές στη μικροδομή του.]

Το ζήτημα της μοντελοποίησης της μικροδομής, συνίσταται στον ορισμό των χαρακτηριστικών της μεγεθών, και τον προσδιορισμό των κανόνων που διέπουν την εξέλιξή τους. Τα μεγέθη αυτά ορίζονται τοπικά, είναι αδιάστατα και ονομάζονται καταστατικές ή εσωτερικές μεταβλητές. Η αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι συνυφασμένη με την κατηγορία των υλικών στην οποία αναφέρεται.

Θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε την έννοια της καταστατικής μεταβλητής, με ένα παράδειγμα. Στο εσωτερικό ενός κρυσταλλικού κόκκου, ως γνωστόν, υπάρχουν “προτιμητέα” επίπεδα και διευθύνσεις ολισθήσεων. Τα πολυκρυσταλλικά μεταλλικά υλικά, όμως, θεωρούμε ότι είναι τοπικά ισότροπα, κι αυτό για δυο λόγους: πρώτον, το μέγεθος των κόκκων είναι πολύ μικρό σχετικά με το μέγεθος του μεταλλικού σώματος και δεύτερον διότι ο προσανατολισμός τους σε ένα “υλικό σημείο” θεωρείται τυχαίος. Σ’ αυτή την περίπτωση λοιπόν, μας ενδιαφέρει να εκφράσουμε την επίδραση των πλαστικών παραμορφώσεων στο φαινόμενο της κράτνωσης (στην αύξηση δηλαδή, της ιδιότητας του υλικού που αποκαλούμε όριο διαρροής). Αυτή η επίδραση εκφράζεται μέσω μια βαθμωτής καταστατικής μεταβλητής, που (εύλογα) αποκαλείται ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, συμβολίζεται με $\bar{\varepsilon}^p$ και είναι ένας κατάλληλος συνδυασμός (μια αναλλοίωτη για την ακρίβεια) των συνιστωσών του πλαστικού μέρους του τανυστή των παραμορφώσεων. Στη συνέχεια, το όριο διαρροής εκφράζεται μονοσήμαντα (αν αγνοηθεί η επίδραση άλλων παραγόντων, όπως η ταχύτητα παραμόρφωσης) ως συνάρτηση του $\bar{\varepsilon}^p$, μέσω κάποιου νόμου κράτνωσης.

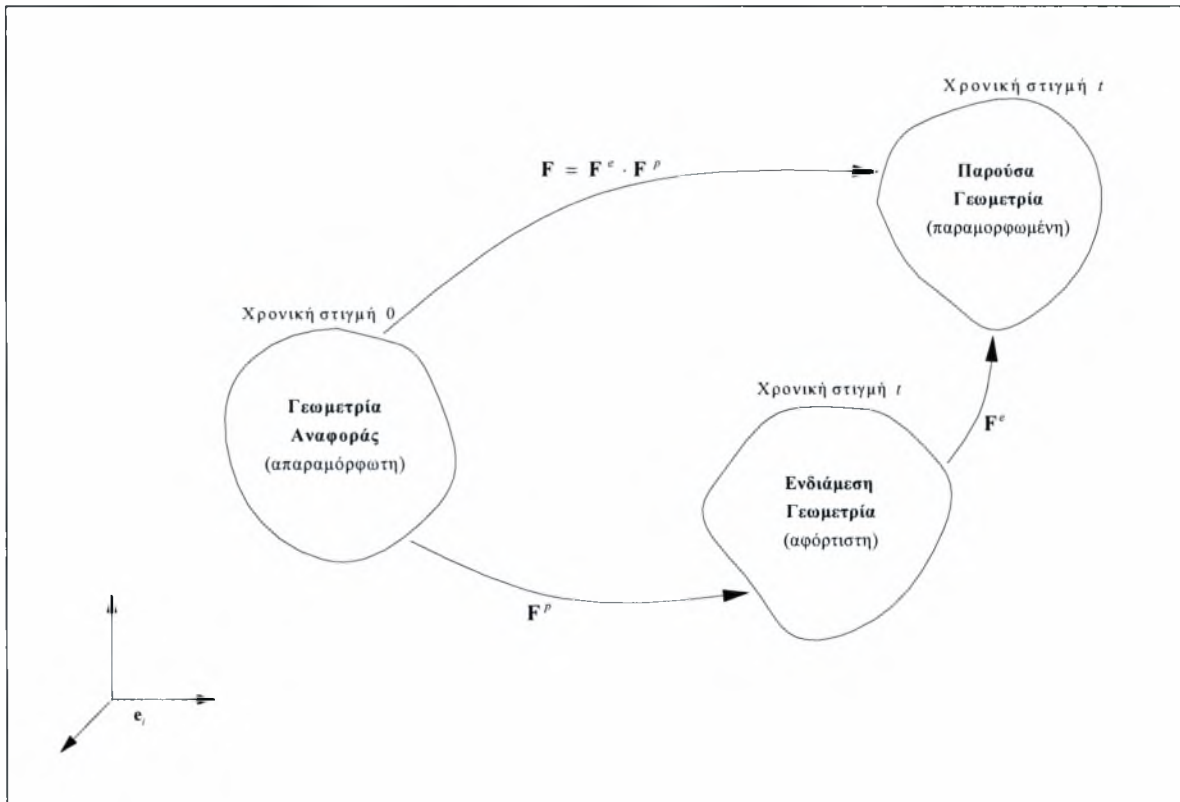
Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε με \mathbf{s} το σύνολο των καταστατικών μεταβλητών ενός προβλήματος. Το σύνολο αυτό μπορεί να περιλαμβάνει τανυστές μηδενική (βαθμωτά μεγέθη), πρώτης ή δευτέρας τάξεως. Για παράδειγμα, στο μοντέλο KC, το σύνολο αυτό είναι $\mathbf{s} = \{\bar{\varepsilon}^p, f, w_1, w_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ (οι καταστατικές μεταβλητές επεξηγούνται αναλυτικά στην ενότητα 2.1.).

1.5. Η ελαστοπλαστική συμπεριφορά των μετάλλων σε πεπερασμένες παραμορφώσεις.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση ενός τυπικού καταστατικού μοντέλου, αξίζει να υπενθυμίσουμε δυο θεμελιώδη, γενικά συμπεράσματα που προκύπτουν από όσα είναι γνωστά μέχρι σήμερα απ’ τη μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς των υλικών. Το πρώτο αφορά τη διαφορετικότητα της φύσης των φαινομένων της Ελαστικότητας και Πλαστικότητας. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις έντασης-παραμόρφωσης στην ελαστική και πλαστική

περιοχή πρέπει να είναι διαφορετικές. Το δεύτερο αφορά την εξάρτηση της αποκρίσεως απ' την ιστορία της φόρτισης, όταν υπάρχουν πλαστικές παραμορφώσεις, κάτι που σημαίνει ότι η σχέση έντασης-παραμόρφωσης δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στην πλαστική περιοχή. Αυτό μας οδηγεί στην ανάπτυξη καταστατικών νόμων που συσχετίζουν χρονικούς ρυθμούς μεταβολής τάσεων-παραμορφώσεων κι όχι τα ίδια τα μεγέθη των τάσεων και παραμορφώσεων.

Είναι λοιπόν προφανές, ότι ο ορισμός του συνολικού τανυστή των παραμορφώσεων δεν επαρκεί. Πρέπει να γίνει σαφής διαχωρισμός μεταξύ του ελαστικού και πλαστικού του τμήματος. Αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας ότι η κίνηση \mathbf{F} , συνίσταται από έναν μετασχηματισμό \mathbf{F}^p , στην πλαστική περιοχή, ακολουθούμενο από έναν μετασχηματισμό \mathbf{F}^e , στην ελαστική περιοχή, δηλαδή $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$. Έτσι, προκύπτει η ανάγκη για τον ορισμό μιας επιπλέον γεωμετρίας, την οποία αποκαλούμε ενδιάμεση. Η νέα εικόνα της κίνησης παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.4. Η ενδιάμεση γεωμετρία.

Ο τανυστής κλίσης της ταχύτητας γράφεται $\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p$, όπου \mathbf{L}^e και \mathbf{L}^p είναι το ελαστικό και πλαστικό του τμήμα, αντίστοιχα. Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στις ενότητες 1.1 και 1.2, και αναφέρονταν στα μεγέθη \mathbf{F} και \mathbf{L} , μπορεί εύκολα να προσαρμοστεί για τα νέα μεγέθη, δηλαδή τα \mathbf{F}^e , \mathbf{F}^p και \mathbf{L}^e , \mathbf{L}^p , αντίστοιχα. [Μια εκτενής συζήτηση σχετικά με τον ορισμό της ενδιάμεσης γεωμετρίας και την ανάλυση της κινηματικής της παραμόρφωσης παρουσιάζεται στην εργασία του κυρίου Dafalias [8].]

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τη γενική μορφή ενός τυπικού καταστατικού μοντέλου για την περίπτωση της υποελαστικής συμπεριφοράς, αφού προηγουμένως κάνουμε μια σύντομη αναφορά στην υπερελαστική συμπεριφορά, της οποίας αποτελεί μια προσέγγιση.

Α. ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ.

Θα διατυπώσουμε το ελαστικό τμήμα των καταστατικών εξισώσεων, με βάση το συζυγές ζεύγος ταυιστών έντασης-παραμόρφωσης ($\mathbf{S}^e, \mathbf{E}^{G^e}$), όπου $\mathbf{S}^e = J^e \mathbf{F}^{e-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{e-T}$ είναι ο δεύτερος Piola-Kirchhoff, ταυιστής των τάσεων και $\mathbf{E}^{G^e} = (\mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e - \mathbf{I})/2$, το ελαστικό τμήμα του ταυιστή παραμορφώσεων Green. Επίσης, θα θεωρήσουμε ότι η μικροδομή, της οποίας ο προσανατολισμός υποθέτουμε ότι ορίζεται μέσω των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{n}^{(i)}$, περιστρέφεται με spin $\boldsymbol{\omega}$ (δηλαδή $\dot{\mathbf{n}}^{(i)} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(i)}$) λόγω πεπερασμένων πλαστικών παραμορφώσεων.

Ένα υλικό αποκαλείται υπερελαστικό, όταν το έργο των εσωτερικών τάσεων (stress work), κατά μήκος οποιαδήποτε “κύκλου παραμόρφωσης”, είναι μηδέν. Κατά συνέπεια, το αντίστοιχο έργο για οποιαδήποτε διαδρομή στο χώρο των παραμορφώσεων είναι ανεξάρτητο απ’ τη διαδρομή (αυτός, είναι ο ορισμός των συντηρητικών πεδίων). Το σημαντικό συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε, είναι ότι πρέπει να υπάρχει ένα ελαστικό δυναμικό W^e , το οποίο εξαρτάται μόνο απ’ την παραμορφωσιακή κατάσταση \mathbf{E}^{G^e} , και η “κλίση” του στο χώρο $\mathcal{E}^{\mathbf{E}^{G^e}}$ να ισούται με τον ταυιστή των τάσεων \mathbf{S}^e , δηλαδή

$$\mathbf{S}^e = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}^{G^e}} \left[W^e \left(\mathbf{E}^{G^e} \right) \right]. \quad (1.47)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την τελευταία σχέση, καταλήγουμε στην εξίσωση ρυθμών που μας ενδιαφέρει:

$$\dot{\mathbf{S}}^e = \hat{\mathcal{L}}^e : \dot{\mathbf{E}}^{G^e}, \quad \hat{\mathcal{L}}^e = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{E}^{G^e} \partial \mathbf{E}^{G^e}} \left[W^e \left(\mathbf{E}^{G^e} \right) \right]. \quad (1.48)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν ένα ελαστικό δυναμικό υπάρχει για ένα συζυγές ζεύγος, τότε ένα αντίστοιχο δυναμικό υπάρχει για οποιοδήποτε άλλο ζεύγος.

Υλικά όπως τα μέταλλα, στα οποία οι ελαστικές παραμορφώσεις είναι πολύ μικρές σχετικά με τις πλαστικές, χαρακτηρίζονται υποελαστικά. Αυτή η συμπεριφορά έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζονται στις καταστατικές εξισώσεις όροι που είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότεροι από άλλους, ώστε να μπορούμε να τους αγνοήσουμε. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν μέχρι το τέλος, στη συνέχεια αυτής της ενότητας, έχουν προκύψει με αυτή την προσέγγιση.

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση για το ελαστικό τμήμα της απόκρισης, μπορεί να γραφεί (Aravas [2])

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^e : \mathbf{D}^e, \quad (1.49)$$

όπου $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, είναι ο συστροφικός με το spin της μικροδομής, ρυθμός μεταβολής του $\boldsymbol{\sigma}$ και

$$\mathcal{L}_{ijkl}^e = R_{im}^e R_{jn}^e R_{kp}^e R_{lq}^e \hat{\mathcal{L}}_{mnpq}^e. \quad (1.50)$$

Όπως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, μια εναλλακτική έκφραση της (1.49) είναι

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^e : \mathbf{D}^e + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}^p - \mathbf{W}^p \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.51)$$

όπου $\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \sigma$, είναι η παράγωγος Jaumann του σ , και \mathbf{W}^P είναι το πλαστικό spin (συζητάμε γι' αυτό παρακάτω).

B. ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ.

Η ανάπτυξη των καταστατικών εξισώσεων για το πλαστικό τμήμα της παραμόρφωσης, ξεκινάει πάντοτε απ' τη διατύπωση της συνθήκης πλαστικής διαρροής, καθώς πρόκειται για τον κανόνα που για δεδομένη κατάσταση του υλικού (\mathbf{s}), καθορίζει ποιες εντατικές καταστάσεις (σ) προκαλούν πλαστική διαρροή. Έστω

$$\Phi(\sigma, \mathbf{s}) = 0, \quad (1.52)$$

η συνθήκη αυτή. Η εξίσωση (1.52) ορίζει μια (κλειστή και κυρτή, όπως αποδεικνύεται) “επιφάνεια” (“επιφάνεια διαρροής”) στο χώρο των τάσεων \mathcal{E}^σ , το “μέγεθος” της οποίας καθορίζεται απ' τις τιμές των καταστατικών μεταβλητών \mathbf{s} . Η συνθήκη $\Phi(\sigma, \mathbf{s}) < 0$, συνεπάγεται ότι η εντατική κατάσταση σ βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας διαρροής και αντιστοιχεί σε αμιγώς ελαστικές παραμορφώσεις (για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή). [Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η συνθήκη $\Phi(\sigma, \mathbf{s}) > 0$, φροντίζουμε να μην ισχύει ποτέ.]

Η εξίσωση για το πλαστικό τμήμα του ρυθμού της παραμόρφωσης \mathbf{D}^P , προκύπτει με εφαρμογή του κανόνα της καθετότητας. Πρόκειται για ένα συμπέρασμα που βασίζεται σε πολύ γενικές αρχές, και η σημασία του είναι η εξής: στο χώρο των τάσεων \mathcal{E}^σ , το μέγεθος \mathbf{D}^P είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια διαρροής, στο σημείο σ , και συνεπώς παράλληλο στην κλίση της συνάρτησης διαρροής στο χώρο \mathcal{E}^σ , στο εν λόγω σημείο. Η ιδέα αυτή εκφράζεται συμβολικά ως εξής:

$$\mathbf{D}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\Phi(\sigma, \mathbf{s})] = \dot{\lambda} \mathbf{N}(\sigma, \mathbf{s}) \quad (1.53)$$

Ο συντελεστής “συγκραμμικότητας” $\dot{\lambda}$ αποκαλείται πλαστικός πολλαπλασιαστής.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μέρος του μοντέλου αποτελούν και οι εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών. Μπορούμε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις αυτές στη μορφή:

$$\overset{\circ}{\mathbf{s}} = \dot{\lambda} \mathbf{G}(\sigma, \mathbf{s}) \quad (1.54)$$

όπου $\overset{\circ}{\mathbf{s}}$ είναι ο συστροφικός, με το spin ω , ρυθμός μεταβολής των καταστατικών μεταβλητών και \mathbf{G} , ένα κατάλληλο σύνολο συναρτήσεων. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από ειδικούς κανόνες που σχετίζονται με τη φύση της μικροδομής.

Στην περίπτωση των ανισότροπων υλικών, απαιτείται μια επιπλέον εξίσωση για το πλαστικό spin \mathbf{W}^P , το οποίο ορίζεται ως το μέσο spin του συνεχούς μέσου \mathbf{W} σχετικά με το spin της μικροδομής ω , δηλαδή

$$\mathbf{W}^P = \mathbf{W} - \omega. \quad (1.55)$$

Η μορφή αυτής της εξίσωσης είναι

$$\mathbf{W}^P = \dot{\lambda} \mathbf{\Omega}^P(\sigma, \mathbf{s}), \quad (1.56)$$

όπου $\mathbf{\Omega}^P$ είναι μια κατάλληλη τανυστική συνάρτηση. Η εξίσωση (1.56) προκύπτει με έμμεσο τρόπο. Συγκεκριμένα, ορίζοντας “κατάλληλα” το ρυθμό περιστροφής της μικροδομής

καταλήγουμε σε μια σχέση για το spin ω , και στη συνέχεια με χρήση της σχέσης (1.55), καταλήγουμε στην (1.56). [Για ισότροπα υλικά $\mathbf{W}^p = \mathbf{0}$.]

Τέλος, επιβάλλουμε τον εξής περιορισμό: όσο συμβαίνει πλαστική διαρροή του υλικού, οποιαδήποτε μεταβολή στην ένταση πρέπει να προκαλεί μια μεταβολή στις καταστατικές μεταβλητές, τέτοια ώστε να ικανοποιείται συνεχώς ο κανόνας πλαστικής διαρροής¹. Αυτό διατυπώνεται μαθηματικά ως εξής:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = 0 \quad (1.57)$$

Η πιο πάνω εξίσωση εξασφαλίζει τη συνέχεια της πλαστικής διαρροής, αποκαλείται “συνθήκη συμβιβαστού”¹ και οδηγεί στον υπολογισμό του πλαστικού πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$, όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (1.57) μπορεί να γραφεί στη μορφή (Dafalias [7])

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{s}} = 0, \quad (1.58)$$

η οποία, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (1.49),

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^e : \mathbf{D}^e = \mathcal{L}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) = \mathcal{L}^e : (\mathbf{D} - \dot{\lambda} \mathbf{N}), \quad (1.59)$$

και τις σχέσεις (1.53) και (1.54), γίνεται

$$\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : (\mathbf{D} - \dot{\lambda} \mathbf{N}) + \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{G} = 0. \quad (1.60)$$

Λύνοντας την (1.60) ως προς $\dot{\lambda}$, παίρνουμε

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{L} \mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D}, \quad (1.61)$$

όπου $L = H + \mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{N}$ και $H = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{G}$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.60) το $\dot{\lambda}$ απ’ την (1.61), παίρνουμε

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^e : \left[\mathbf{D} - \left(\frac{1}{L} \mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D} \right) \mathbf{N} \right], \quad (1.62)$$

από όπου προκύπτει η γενική, ελαστοπλαστική καταστατική εξίσωση

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}_o^{ep} : \mathbf{D}, \quad \mathcal{L}_o^{ep} = \mathcal{L}^e - \frac{1}{L} (\mathcal{L}^e : \mathbf{N}) (\mathcal{L}^e : \mathbf{N}), \quad (1.63)$$

η οποία, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (1.51), γίνεται

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^{ep} : \mathbf{D}, \quad \mathcal{L}^{ep} = \mathcal{L}^e - \frac{1}{L} (\mathcal{L}^e : \mathbf{N} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega}^p + \boldsymbol{\Omega}^p \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathcal{L}^e : \mathbf{N}. \quad (1.64)$$

¹ Επομένως, η συνθήκη $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}) > 0$ είναι αδύνατη.

¹ Άλλοι ερευνητές αναφέρονται σε αυτή τη συνθήκη ως “συνθήκη συνέπειας”.

2

ΕΝΑ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΠΟΡΩΔΗ ΜΕΤΑΛΛΑ: ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙΛΑΣΑΜ-CASTAÑEDA

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε μια περιγραφή του ανισότροπου καταστατικού μοντέλου Kailasam- Castañeda για πορώδη μέταλλα που υπόκεινται σε πεπερασμένες παραμορφώσεις.

Τα πορώδη μέταλλα κατατάσσονται στην κατηγορία των σύνθετων, ετερογενών υλικών, καθώς δυο τουλάχιστον φάσεις ενυπάρχουν πάντα στη δομή τους. Η μια είναι μεταλλική φάση, την οποία θα αποκαλούμε μεταλλικό φορέα ή απλώς φορέα και η άλλη είναι η πορώδης φάση, δηλαδή οι κενές περιοχές (πόροι) που παρεμβάλλονται στο φορέα. Αυτή η ιδιαιτερότητα των συγκεκριμένων υλικών έχει σημαντικές επιπτώσεις στις ιδιότητες (effective properties) και κατ' επέκταση, στην απόκριση (effective response) των πορωδών μετάλλων. Το καταστατικό μοντέλο των Kailasam και Castañeda (KC) για πορώδη μέταλλα θεμελιώνεται στη θεωρία που προτάθηκε απ' τον Pedro Ponte Castañeda [25], και επιχειρεί την προσομοίωση αυτών των επιπτώσεων, μέσω μιας λεπτομερούς περιγραφής της κατάστασης της μικροδομής. Μέσω της εν λόγω θεωρίας, επιτυγχάνεται η εκτίμηση του “ομογενοποιημένου ελαστικού τανυστή ενδοτικότητας” (effective elastic compliance tensor), που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση του ελαστικού τμήματος των καταστατικών εξισώσεων, της “ομογενοποιημένης συνάρτησης διαρροής” (effective yield function), που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση του πλαστικού τμήματος των καταστατικών εξισώσεων, και των μέσων ρυθμών παραμόρφωσης και spin στην πορώδη φάση, που επιτρέπουν τον προσδιορισμό των εξισώσεων εξελίξεως των χαρακτηριστικών της μικροδομής.

Ο τανυστής ρυθμού της παραμόρφωσης \mathbf{D} , σε κάθε σημείο του ομογενοποιημένου συνεχούς μέσου, γράφεται ως το άθροισμα ενός ελαστικού και ενός πλαστικού τμήματος

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p. \quad (2.1)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις για το ελαστικό και πλαστικό τμήμα της απόκρισης διατυπώνονται ξεχωριστά.

Το κεφάλαιο ξεκινάει με τον ορισμό των καταστατικών (ή εσωτερικών) μεταβλητών του προβλήματος (ενότητα 2.1). Οι καταστατικές εξισώσεις για το ελαστικό και πλαστικό τμήμα της παραμόρφωσης παρουσιάζονται στις ενότητες 2.2 και 2.3 αντίστοιχα, ενώ στην ενότητα 2.5

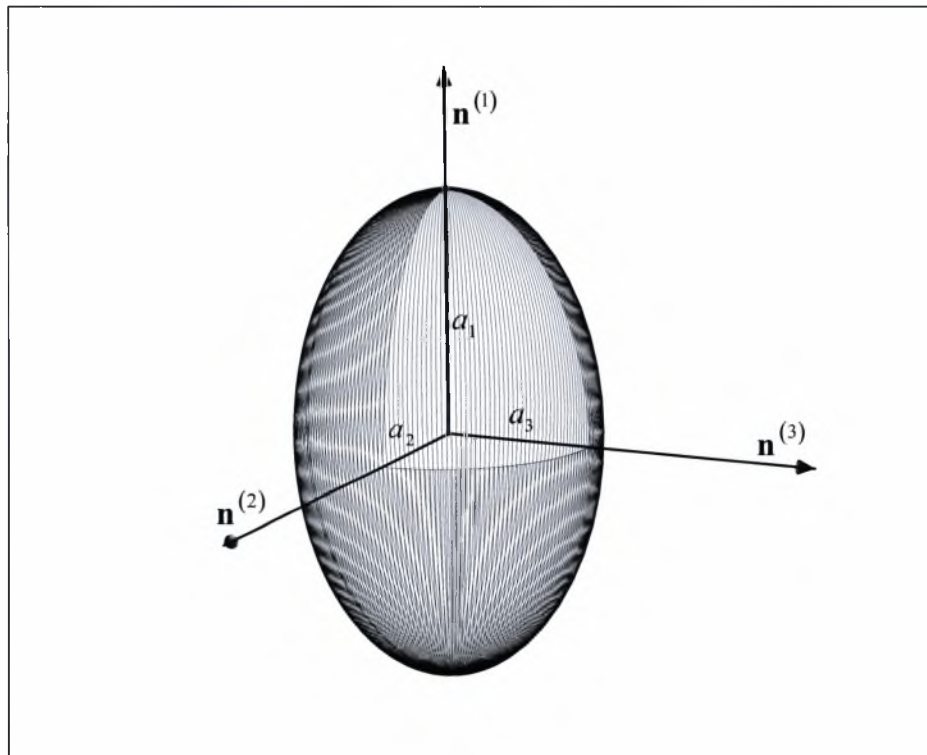
γίνεται η “σύμπτυξη” τους σε μια σχέση που συνδέει την παράγωγο Jaumann του ταυνοστή της τάσης ($\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$) με το ρυθμό μεταβολής της συνολικής παραμόρφωσης (\mathbf{D}). Στην ενότητα 2.4 περιγράφονται οι εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών.

2.1. Η μοντελοποίηση της μικροδομής - Εσωτερικές μεταβλητές.

Η επίδραση των πόρων στο καταστατικό μοντέλο KC, εκφράζεται μέσω τριών χαρακτηριστικών τους: του μεγέθους, της μορφής και του προσανατολισμού τους. Οι βασικές παραδοχές που γίνονται για την μοντελοποίηση της μικροδομής, είναι οι εξής:

- Το αρχικό σχήμα των πόρων είναι ελλειψοειδές, και η κατανομή τους μέσα στον ελαστοπλαστικό μεταλλικό φορέα, τυχαία.
- Καθώς το πορώδες μέταλλο υπόκειται σε πεπερασμένες πλαστικές παραμορφώσεις, το σχήμα τους παραμένει ελλειψοειδές, αλλά το μέγεθος, η μορφή και ο προσανατολισμός τους αλλάζουν εν γένει.
- Το υλικό του μεταλλικού φορέα είναι ισότροπο. Το χαρακτηριστικό αυτό εκφράζεται στο καταστατικό μοντέλο, μέσω της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης $\bar{\varepsilon}^P$ στο μεταλλικό φορέα.

Βασικό στοιχείο της μοντελοποίησης είναι το αντιπροσωπευτικό ελλειψοειδές (σχήμα 2.1), μέσω του οποίου εκφράζονται η μορφή και ο προσανατολισμός των πόρων, σε κάθε σημείο του ομογενοποιημένου συνεχούς μέσου. Τα χαρακτηριστικά μεγέθη του ελλειψοειδούς είναι τα μήκη των κυρίων αξόνων του $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$ και τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(2)}$ στις κύριες διευθύνσεις του.



Σχήμα 2.1. Το αντιπροσωπευτικό ελλειψοειδές.

Ως αποτέλεσμα αυτής της ιδέας, πέντε νέες καταστατικές (ή εσωτερικές) μεταβλητές εισάγονται στο μοντέλο: οι λόγοι των πλευρών $w_1 = a_3/a_1$ και $w_2 = a_3/a_2$, και τα μοναδιαία

διανύσματα $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ και $\mathbf{n}^{(3)}$ στις κύριες διευθύνσεις του τοπικού αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς. Τα μεγέθη αυτά προσδίδουν έναν τοπικά ορθοτροπικό χαρακτήρα στην συμπεριφορά του πορώδους μετάλλου, ο οποίος διατηρείται κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης. Μάλιστα, οι κύριοι άξονες της ορθοτροπίας ταυτίζονται με τους κύριους άξονες του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς. Στην ειδική περίπτωση που $a_1 = a_2 = a_3$, το σχήμα των πόρων είναι σφαιρικό και κατ' επέκταση, η συμπεριφορά του σώματος τοπικά ισότροπη.

Το μέγεθος των πόρων εκφράζεται μέσω μιας καταστατικής μεταβλητής που αποκαλείται πορώδες και ορίζεται (τοπικά) ως το κλάσμα όγκου των κενών στο συνεχές μέσο:

$$f = \frac{V_{void}}{V_{total}}. \quad (2.2)$$

Συνοψίζοντας, το σύνολο των καταστατικών μεταβλητών που εκφράζουν την κατάσταση της μικροδομής στο μοντέλο είναι

$$\mathbf{s} = \{\bar{\varepsilon}^p, f, w_1, w_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}\}.$$

2.2. Η καταστατική εξίσωση για το ελαστικό τμήμα της απόκρισης.

Μιλώντας για πεπερασμένες παραμορφώσεις σε μεταλλικά υλικά, εννοούμε ουσιαστικά το πλαστικό τμήμα τους. Επομένως, μια υποελαστική μορφή για το ελαστικό τμήμα του τανυστή του ρυθμού της παραμόρφωσης, μπορεί να υποτεθεί:

$$\mathbf{D}^e = \mathcal{M}^e : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.3)$$

όπου \mathcal{M}^e είναι ο ομογενοποιημένος ελαστικός τανυστής ενδοτικότητας και $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ είναι ο συστροφικός, με το spin των πόρων, ρυθμός μεταβολής του πραγματικού (ή Cauchy) τανυστή των τάσεων, δηλαδή

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.4)$$

Στην πιο πάνω σχέση, ο τανυστής $\boldsymbol{\omega}$ είναι το spin των πόρων σχετικά με ένα σταθερό σύστημα αναφοράς (ανεξάρτητο της κίνησης του παραμορφώσιμου σώματος) και αποκαλείται “το spin της μικροδομής”, καθώς εκφράζει το ρυθμό περιστροφής των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{n}^{(i)}$ του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς, που όπως έχει ειπωθεί πιο πάνω, συμπίπτουν με τις κύριες κατευθύνσεις της ορθοτροπίας¹. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής: $\dot{\mathbf{n}}^{(i)} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(i)}$ με $i = 1, 2, 3$.

Η μορφή του ομογενοποιημένου ελαστικού τανυστή ενδοτικότητας, προκύπτει [31] μετά από κατάλληλες απλοποιητικές παραδοχές (Ponte Castañeda και Willis [26]) και τη χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων έρευνας (Willis [31], [32]). Παραθέτουμε εδώ το αποτέλεσμα:

$$\mathcal{M}^e = \mathcal{M} + \frac{f}{1-f} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (2.5)$$

¹ Η ορθοτροπία, και γενικότερα η ανισοτροπία, αποδίδεται στην κατευθυντικότητα της μικροδομής.

Στην έκφραση (2.5), \mathcal{M} είναι ο ελαστικός τανυστής ενδοτικότητας του μεταλλικού φορέα, αντίστροφος του ελαστικού τανυστή ακαμψίας \mathcal{L}

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 2\mu\mathbf{K} + 3\kappa\mathbf{J}, & \mathcal{M} &= \mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{K} + \frac{1}{3\kappa}\mathbf{J} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{K} + \frac{1-2\nu}{1+\nu}\mathbf{J}\right), \\ \mathbf{J} &= \frac{1}{3}\delta\delta, & \mathbf{K} &= \mathbf{I} - \mathbf{J}, & \mathbf{Q} &= \mathcal{L}:(\mathbf{I} - \mathbf{S}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Με μ και κ συμβολίζουμε αντίστοιχα τα μέτρα διάτμησης και διόγκωσης του φορέα, με ν το λόγο Poisson του φορέα, ενώ δ είναι ο μοναδιαίος 2^{ος} τάξεως τανυστής με Καρτεσιανές συνιστώσες δ_{ij} (το δέλτα του Kronecker) και \mathbf{I} ο συμμετρικός 4^{ης} τάξεως μοναδιαίος τανυστής ($I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$). Στις σχέσεις (2.6) περιλαμβάνεται και η σχέση ορισμού του τανυστή \mathbf{Q} [31], στην οποία εμφανίζεται ο 4^{ης} τάξεως τανυστής Eshelby ([9], [10]) \mathbf{S} . Σημειώνουμε ότι ο τανυστής \mathbf{S} εξαρτάται από το λόγο Poisson ν του φορέα, και τις καταστατικές μεταβλητές ($w_1, w_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}$) ενώ ο \mathbf{Q} εξαρτάται επιπλέον από το μέτρο διάτμησης μ του φορέα. Εκφράσεις για τον υπολογισμό των δυο τελευταίων τανυστών παρουσιάζονται στο παράρτημα του τρίτου κεφαλαίου.

Είναι σημαντικό να παρατηρηθεί ότι τα στοιχεία του \mathcal{M}^e δεν παραμένουν σταθερά κατά τη διάρκεια της παραμόρφωσης, λόγω της εξάρτησής τους από τα χαρακτηριστικά του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς (δηλαδή από τις καταστατικές μεταβλητές $f, w_1, w_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$ και $\mathbf{n}^{(3)}$), τα οποία μεταβάλλονται εν γένει.

2.3. Η καταστατική εξίσωση για το πλαστικό τμήμα της απόκρισης.

Η ομογενοποιημένη συνάρτηση διαρροής διατυπώνεται ως εξής ([14], [27]):

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}) = \frac{1}{1-f} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma} - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^P), \quad (2.7)$$

όπου σ_y είναι το όριο διαρροής σε εφελκυσμό του μεταλλικού φορέα, ο οποίος θεωρούμε ότι κρατύνεται ισοτροπικά. Υποθέτουμε ότι το σ_y είναι μια συνάρτηση της ισοδύναμης πλαστικής του παραμόρφωσής $\bar{\varepsilon}^P$. Ο τανυστής 4^{ης} τάξεως \mathbf{m} ορίζεται απ' τη σχέση:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}\left(f, w_1, w_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)}\right) = 3\mu\mathcal{M}^e|_{\nu=1/2} = \frac{3}{2}\mathbf{K} + \frac{3f}{1-f}\mu\mathbf{Q}^{-1}|_{\nu=1/2}, \quad (2.8)$$

όπου η έκφραση για τον \mathcal{M}^e είναι ίδια με εκείνη της σχέσης (2.5), με τη διαφορά ότι $\nu \rightarrow 1/2$, καθώς υποθέτουμε πλαστική ασυμπιεστότητα για το υλικό του μεταλλικού φορέα. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση Φ εξαρτάται απ' τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ και τις καταστατικές μεταβλητές του μοντέλου, και εμφανίζει ορθοτροπική συμμετρία με άξονες συμμετρίας τους άξονες που ορίζονται απ' τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{n}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$).

Η εξίσωση για το πλαστικό τμήμα του τανυστή του ρυθμού της παραμόρφωσης \mathbf{D}^P , προκύπτει με εφαρμογή του κανόνα της “καθετότητας”:

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{2}{1-f} \mathbf{m} : \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.9)$$

όπου $\dot{\lambda} \geq 0$, είναι ο πλαστικός πολλαπλασιαστής, ο οποίος υπολογίζεται απ' τη “συνθήκη συμβιβαστού”, όπως θα δούμε στην παράγραφο 2.5.

Στην ειδική περίπτωση που το σχήμα των πόρων είναι σφαιρικό (συνεπώς, $w_1 = w_2 = 1$), το πορώδες μέταλλο είναι μακροσκοπικά ισότροπο και η συνάρτηση διαρροής γίνεται

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}^p, f) = \left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\sigma_e}{1-f}\right)^2 + \frac{9}{4}f \left(\frac{p}{1-f}\right)^2 - \sigma_y^2(\bar{\varepsilon}^p) = 0, \quad (2.10)$$

όπου $\sigma_e = \sqrt{3\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d / 2}$ είναι η ισοδύναμη κατά von Mises τάση, $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - p\delta$ είναι το αποκλίνον και $p = \sigma_{kk} / 3$ το υδροστατικό μέρος του $\boldsymbol{\sigma}$.

2.4. Οι εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών.

Η εξέλιξη της παραμόρφωσης συνεπάγεται αλλαγές στη μικροδομή. Επομένως, για την πληρότητα του μοντέλου, απαιτείται να καθοριστούν οι κανόνες που διέπουν αυτές τις αλλαγές.

Υποθέτουμε ότι η εξέλιξη της μικροδομής οφείλεται αποκλειστικά στις πλαστικές παραμορφώσεις του μεταλλικού φορέα, οι οποίες συνεπάγονται αλλαγές στον όγκο, τη μορφή και τον προσανατολισμό των πόρων. Η υπόθεση αυτή φαίνεται αρκετά εύλογη, καθώς οι ελαστικές παραμορφώσεις στα μέταλλα είναι μικρές σχετικά με τις πλαστικές. Οι ζητούμενες εξισώσεις εξέλιξης για την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση του φορέα $\bar{\varepsilon}^p$ και το πορώδες f προσδιορίζονται απ' την κινηματική της παραμόρφωσης. Οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις υπόλοιπες καταστατικές μεταβλητές προσδιορίζονται υποθέτοντας ότι η εξέλιξή τους χαρακτηρίζεται απ' τους μέσους ρυθμούς παραμόρφωσης και spin στην πορώδη φάση, οι εκτιμήσεις των οποίων επιτυγχάνονται μέσω της διαδικασίας ομογενοποίησης των Ponte Castañeda και Zaidman [27] και Kailasam και Ponte Castañeda [16].

Η εξέλιξη της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης και του πορώδους.

Η ιδέα που χρησιμοποιείται για τον ορισμό του κανόνα εξέλιξης της $\bar{\varepsilon}^p$ είναι ότι το τοπικό “μακροσκοπικό” πλαστικό έργο $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}$ πρέπει να ισούται με το αντίστοιχο “μικροσκοπικό” έργο $(1-f)\sigma_y \dot{\bar{\varepsilon}}^p$, και συνεπώς

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{N}}{(1-f)\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)} \equiv \dot{\lambda} g_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}). \quad (2.11)$$

Το πορώδες είναι ένα είδος ατέλειας στο υλικό, καθώς πρόκειται ουσιαστικά για οπές οι οποίες παρεμβάλλονται στο μεταλλικό φορέα και σταματάνε τη συνέχεια της κρυσταλλικής δομής του. Επειδή οι μεταβολές του πορώδους που οφείλονται στις ελαστικές παραμορφώσεις είναι μικρές και πλήρως ανακτήσιμες (με την αποφόρτιση), υποθέτουμε ότι οι αλλαγές στο f οφείλονται αποκλειστικά στο πλαστικό μέρος του ογκομετρικού ρυθμού των παραμορφώσεων, δηλαδή στο D_{kk}^p (κι όχι στο ολικό D_{kk}). Η εξίσωση εξέλιξης του πορώδους προκύπτει απ' την εξίσωση της συνέχειας, θεωρώντας πλαστικά ασυμπίεστο το υλικό του μεταλλικού φορέα, και είναι

$$\dot{f} = (1-f)D_{kk}^p = \dot{\lambda}(1-f)N_{kk} \equiv \dot{\lambda}g_2(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}). \quad (2.12)$$

Η εξέλιξη των λόγων των πλευρών και των κυρίων αξόνων της ορθοτροπίας.

Οι πληροφορίες σχετικά με την εξέλιξη της μορφής (w_1, w_2) και του προσανατολισμού $(\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)})$ των πόρων, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, περιλαμβάνονται στο μέσο ρυθμό παραμόρφωσης και το μέσο spin των πόρων, που προσδιορίζονται μέσω της θεωρίας του Ponte Castañeda [25]. Συγκεκριμένα, όπως έχει δείχθει στις εργασίες των Ponte Castañeda και Zaidman [27] και Kailasam και Ponte Castañeda [16], ο μέσος ρυθμός παραμόρφωσης \mathbf{D}^v και το μέσο spin \mathbf{W}^v του τοπικού αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς είναι

$$\mathbf{D}^v = \mathbf{A}:\mathbf{D}^p \quad \text{και} \quad \mathbf{W}^v = \mathbf{W} - \mathbf{C}:\mathbf{D}^p, \quad (2.13)$$

όπου \mathbf{A} και \mathbf{C} είναι οι σχετικοί, 4^{ης} τάξεως, “τανυστές συγκέντρωσης” (concentration tensors), που ορίζονται απ’ τις σχέσεις

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{I} - (1-f)\mathbf{S}|_{v=1/2} \right]^{-1} \quad \text{και} \quad \mathbf{C} = -(1-f)\mathbf{\Pi}:\mathbf{A}. \quad (2.14)$$

Στη σχέση (2.14), $\mathbf{\Pi}$ είναι ο 4^{ης} τάξεως τανυστής περιστροφής Eshelby ([9], [10]), ο οποίος ορίζει το spin ενός μεμονωμένου πόρου σ’ έναν άπειρο γραμμικό, ιξώδη φορέα και εξαρτάται απ’ τους λόγους των πλευρών (w_1, w_2) και τα διανύσματα προσανατολισμού $(\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)})$. Ο τανυστής $\mathbf{\Pi}$ είναι συμμετρικός ως προς τους δυο πρώτους δείκτες και αντισυμμετρικός ως προς τους δυο τελευταίους, δηλαδή $\Pi_{ijkl} = \Pi_{ijlk} = -\Pi_{jikl}$. Ο τρόπος υπολογισμού του τανυστή $\mathbf{\Pi}$ παρουσιάζεται στο παράρτημα του κεφαλαίου 3.

Σημειώνουμε ότι οι τανυστές συγκέντρωσης \mathbf{A} και \mathbf{C} χαρακτηρίζονται απ’ τις ίδιες συμμετρίες και αντισυμμετρίες με τους \mathbf{S} και $\mathbf{\Pi}$ αντίστοιχα, και εξαρτώνται απ’ τις μεταβλητές $(f, w_1, w_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)})$. Οι εκφράσεις των \mathbf{A} και \mathbf{C} στο όριο $f \rightarrow 0$ ανάγονται στις αντίστοιχες εκφράσεις του Eshelby ([9], [10]) για την περίπτωση ενός μεμονωμένου πόρου σ’ έναν άπειρο, ασυμπιεστο φορέα.

Για να βρούμε, τις εξισώσεις εξέλιξης των λόγων των πλευρών χρησιμοποιούμε τις σχέσεις ορισμού τους $(w_i = a_3/a_i, i=1,2)$, τη σχέση (1.27) του προηγούμενου κεφαλαίου και λίγη άλγεβρα. Έτσι, για το w_1 έχουμε:

$$\dot{w}_1 = w_1 \left(\frac{\dot{a}_3}{a_3} - \frac{\dot{a}_1}{a_1} \right) = w_1 \left(\mathbf{n}^{(3)} \cdot \mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^{(3)} - \mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^{(1)} \right) = w_1 \left(\mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} - \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \right) : \mathbf{D}^v, \quad (2.15)$$

και με αντικατάσταση των (2.13) και (2.9) παίρνουμε

$$\dot{w}_1 = \dot{\lambda} w_1 \left(\mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} - \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} \right) : \mathbf{A} : \mathbf{N} \equiv \dot{\lambda} g_3(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}). \quad (2.16)$$

Παρομοίως, προκύπτει ότι

$$\dot{w}_2 = \dot{\lambda} w_2 \left(\mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} - \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} \right) : \mathbf{A} : \mathbf{N} \equiv \dot{\lambda} g_4(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}). \quad (2.17)$$

Συνεχίζουμε με τον προσδιορισμό των εξισώσεων εξέλιξης των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{n}^{(i)}$. Ο ρυθμός μεταβολής των $\mathbf{n}^{(i)}$ δίνεται απ’ τη σχέση

$$\dot{\mathbf{n}}^{(i)} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(i)}, \quad (2.18)$$

όπου ο αντισυμμετρικός τανυστής $\boldsymbol{\omega}$ είναι το spin της μικροδομής και ταυτόχρονα το spin των αξόνων Euler της μέσης παραμόρφωσης του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς, για το οποίο ισχύει η κινηματική σχέση (Biot [5], Hill [11], Ogden [22], βλέπε επίσης σχέση (1.36) προηγούμενου κεφαλαίου)

$$\omega'_{ij} = W'_{ij} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} D'_{ij}, \quad i \neq j, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad (2.19)$$

όπου λ_i είναι οι ανηγμένες αλλαγές μήκους, σε κάθε μια απ' τις τρεις κύριες διευθύνσεις του τοπικού αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς, δηλαδή

$$\lambda_i = \frac{a_i}{a_0} = \frac{a_3/a_0}{a_3/a_i} = \frac{\lambda_3}{w_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{με} \quad w_3 = 1, \quad (2.20)$$

όπου με a_0 συμβολίζουμε την ακτίνα μιας σφαίρας αναφοράς. Στην εξίσωση (2.19) συσχετίζονται συνιστώσες τανυστών ως προς ένα σύστημα αναφοράς που στιγμιαία ταυτίζεται με το σύστημα Euler, δηλαδή το σύστημα $\mathbf{n}^{(i)}$ (υιοθετούμε το συμβολισμό αυτό για το υπόλοιπο του κεφαλαίου).

Επειδή όμως, ο απώτερος στόχος μας είναι να εκφράσουμε το πρόβλημα υπό μορφή μιας ολοκληρωμένης υπολογιστικής διαδικασίας, όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται στις εξισώσεις πρέπει να εκφράζονται ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Πρέπει επομένως, οι όροι της εξίσωσης (2.19) να αναφέρονται σε ένα σταθερό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, διότι ένα τέτοιο σύστημα χρησιμοποιείται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, που αποτελεί τη βάση της υπολογιστικής μας διαδικασίας.

Η εξίσωση (2.19), λαμβάνοντας υπόψη την (2.20), γίνεται

$$\mathbf{n}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(j)} = \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{W}^v \cdot \mathbf{n}^{(j)} + \frac{w_i^2 + w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} \mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^{(j)}, \quad i \neq j, \quad w_i \neq w_j. \quad (2.21)$$

Επίσης, επειδή ο τανυστής \mathbf{D}^v είναι συμμετρικός, ισχύει

$$\mathbf{n}^{(i)} \cdot \mathbf{D}^v \cdot \mathbf{n}^{(j)} = \left(\mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} \right) : \mathbf{D}^v = \frac{1}{2} \left(\mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} + \mathbf{n}^{(j)} \mathbf{n}^{(i)} \right) : \mathbf{D}^v. \quad (2.22)$$

Συνδυάζοντας τις (2.21) και (2.22) παίρνουμε

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W}^v + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ w_i \neq w_j}}^3 \frac{w_i^2 + w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} \left[\left(\mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} + \mathbf{n}^{(j)} \mathbf{n}^{(i)} \right) : \mathbf{D}^v \right] \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)}, \quad (w_3 = 1), \quad (2.23)$$

που με αντικατάσταση των $\mathbf{D}^v = \mathbf{A} : \mathbf{D}^p$, $\mathbf{W}^v = \mathbf{W} - \mathbf{C} : \mathbf{D}^p$ και $\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}$, παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - \dot{\lambda} \left[\mathbf{C} : \mathbf{N} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ w_i \neq w_j}}^3 \frac{w_i^2 + w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} \left[\left(\mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} + \mathbf{n}^{(j)} \mathbf{n}^{(i)} \right) : \mathbf{A} : \mathbf{N} \right] \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} \right]. \quad (2.24)$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία εξίσωση, το πλαστικό spin \mathbf{W}^P -που ορίζεται ως το μέσο spin του συνεχούς μέσου σχετικά με το spin της μικροδομής, δηλαδή $\mathbf{W}^P = \mathbf{W} - \boldsymbol{\omega}$ - γράφεται

$$\mathbf{W}^P = \dot{\lambda} \boldsymbol{\Omega}^P, \quad (2.25)$$

όπου

$$\boldsymbol{\Omega}^P = \mathbf{C} : \mathbf{N} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j \\ w_i \neq w_j}}^3 \frac{w_i^2 + w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} \left[\left(\mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)} + \mathbf{n}^{(j)} \mathbf{n}^{(i)} \right) : \mathbf{A} : \mathbf{N} \right] \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{n}^{(j)}, \quad w_3 = 1. \quad (2.26)$$

Οι συνιστώσες του $\boldsymbol{\Omega}^P$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς το οποίο ταυτίζεται με τους άξονες του τοπικού αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς είναι

$$\Omega_{ij}^{P'} = \left(C'_{ijkl} - \frac{w_i^2 + w_j^2}{w_i^2 - w_j^2} A'_{ijkl} \right) N'_{kl}, \quad i \neq j, \quad w_i \neq w_j, \quad w_3 = 1. \quad (2.27)$$

Στην ειδική περίπτωση που δυο εκ των λόγων των πλευρών, έστω οι w_1 και w_2 , είναι μεταξύ τους ίσοι, το υλικό γίνεται τοπικά εκγαρσίως -ως προς τη διεύθυνση $\mathbf{n}^{(3)}$ - ισότροπο, τα στοιχεία C'_{12kl} μηδενίζονται και το στοιχείο W_{12}^P δεν μπορεί πια να υπολογιστεί απ' την εξίσωση (2.26). Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να θέσουμε $W_{12}^P = 0$ (Aravas [2]). Επίσης, στην "ακόμα πιο ειδική" περίπτωση που και οι τρεις λόγοι των πλευρών είναι μεταξύ τους ίσοι ($w_1 = w_2 = w_3 = 1$), το υλικό γίνεται τοπικά ισότροπο, ο τανυστής συγκέντρωσης spin \mathbf{C} μηδενίζεται και οι εξισώσεις (2.25) και (2.26) συνεπάγονται (Dafalias [7])

$$\mathbf{W}^P = 0. \quad (2.28)$$

Στην περίπτωση ενός διδιάστατου προβλήματος, στο οποίο η παραμόρφωση συμβαίνει στο επίπεδο $x_1 - x_2$, το $\boldsymbol{\Omega}^P$ παίρνει τη μορφή

$$\boldsymbol{\Omega}^P = \omega^P (-\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) = \omega^P \left(-\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} \right), \quad (2.29)$$

όπου $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις x_1, x_2 αντίστοιχα. Η ποσότητα $\omega^P = -\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}^P \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{n}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\Omega}^P \cdot \mathbf{n}^{(2)}$, λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.26), γίνεται

$$\omega^P = -\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{N}) \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \frac{w_1^2 + w_2^2}{w_1^2 - w_2^2} \left(\mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(1)} \right) : \mathbf{A} : \mathbf{N}, \quad \text{για } w_1 \neq w_2 \quad (2.30)$$

και

$$\omega^P = 0, \quad \text{για } w_1 = w_2. \quad (2.31)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις Φ , \mathbf{N} , g_1 , g_2 , g_3 , g_4 και Ω^P , είναι ισότροπες συναρτήσεις των ορισμάτων τους, δηλαδή ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Phi(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T, f, w_1, w_2, \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}^{(i)}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, f, w_1, w_2, \mathbf{n}^{(i)}), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}^T, f, w_1, w_2, \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}^{(i)}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, f, w_1, w_2, \mathbf{n}^{(i)}) \cdot \mathbf{R}^T, \quad \text{κ.λ.π} \quad (2.33)$$

για κάθε γνήσιο ορθογώνιο τανυστή \mathbf{R} . Η σημασία αυτής της ιδιότητας (αποκαλείται “μαθηματική ισοτροπία”¹) είναι ότι υπερτιθέμενες περιστροφές στερεού σώματος (αυτό ακριβώς εκφράζει ένας γνήσιος ορθογώνιος τανυστής) αφήνουν αναλλοίωτες τις καταστατικές εξισώσεις².

Συνεχίζουμε, σημειώνοντας ότι για το συστροφικό με το spin των πόρων, ρυθμό μεταβολής των $\mathbf{n}^{(i)}$, ισχύει

$$\overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(i)} = 0 \quad (2.34)$$

και επίσης $\overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(i)} = \dot{\mathbf{n}}^{(i)} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}^{(i)}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{W}^P$ και τον ορισμό της παραγώγου Jaumann (συστροφικός, με το spin \mathbf{W} , ρυθμός μεταβολής) των $\mathbf{n}^{(i)}$, δηλαδή $\overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(i)} = \dot{\mathbf{n}}^{(i)} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}^{(i)}$, προκύπτει ότι $\overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(i)} = \overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(i)} - \mathbf{W}^P \cdot \mathbf{n}^{(i)}$. Εφαρμόζοντας την (2.34) στην τελευταία εξίσωση, παίρνουμε

$$\overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(i)} = -\mathbf{W}^P \cdot \mathbf{n}^{(i)} = -\dot{\lambda} \Omega^P \cdot \mathbf{n}^{(i)}. \quad (2.35)$$

Η χρησιμότητα της πιο πάνω μορφής της εξίσωσης εξέλιξης των $\mathbf{n}^{(i)}$ θα φανεί στη συνέχεια. Τελειώνοντας, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις εξέλιξης των καταστατικών μεταβλητών \mathbf{s} , δηλαδή τις (2.11), (2.12), (2.16), (2.17) και (2.35), σε μια συμβολική μορφή:

$$\overset{\nabla}{\mathbf{s}} = \dot{\lambda} \mathbf{G}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}) \quad (2.36)$$

όπου $\overset{\nabla}{\mathbf{s}} = \left\{ \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \overset{\nabla}{f}, \overset{\nabla}{w}_1, \overset{\nabla}{w}_2, \overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(1)}, \overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(2)}, \overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(3)} \right\}$ και \mathbf{G} είναι το αντίστοιχο σύνολο συναρτήσεων, ενώ

$\dot{\lambda}$ είναι ο πλαστικός πολλαπλασιαστής.

¹ Προς αποφυγήν συγχύσεων, επισημαίνουμε ότι η ανισοτροπία του υλικού (οφείλεται στην κατευθυντικότητα της μικροδομή, η οποία εκφράζεται μέσω του τανυστικού χαρακτήρα των $\mathbf{n}^{(i)}$) είναι μια διαφορετική ιδιότητα.

² Έτσι όπως θα έπρεπε να συμβαίνει, διότι οι κινήσεις στερεού σώματος δεν έχουν καμία επίδραση στην κατάσταση του ίδιου του σώματος και συνεπώς δεν πρέπει να επηρεάζουν την απόκρισή του.

2.5. Η καταστατική εξίσωση για τη συνολική απόκριση.

Το μόνο που απομένει για την ολοκλήρωση της περιγραφής του καταστατικού μοντέλου KC είναι η διατύπωση της “δυνθήκης συμβιβαστού”, μέσω της οποίας υπολογίζουμε τον πλαστικό πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$, και μια τεχνική λεπτομέρεια: η σύνθεση των καταστατικών εξισώσεων για το ελαστικό και πλαστικό μέρος της παραμόρφωσης, με στόχο την ανάπτυξη μιας σχέσης μεταξύ της παραγώγου Jaumann του πραγματικού τανυστή των τάσεων, $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$, και του τανυστή του συνολικού ρυθμού της παραμόρφωσης, \mathbf{D} .

Υποθέτοντας πλαστική φόρτιση ($\dot{\lambda} > 0$) και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.3) $\mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \dot{\lambda} \mathbf{N}$, παίρνουμε

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^e : \mathbf{D} - \dot{\lambda} \mathcal{L}^e : \mathbf{N}, \quad (2.37)$$

όπου $\mathcal{L}^e = \mathcal{M}^{e^{-1}}$.

Επειδή η Φ είναι ισότροπη συνάρτηση, η συνθήκη συμβιβαστού

$$\dot{\Phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \dot{\mathbf{s}} = 0, \quad (2.38)$$

όπου $\dot{\mathbf{s}} = \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{f}, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{\mathbf{n}}^{(1)}, \dot{\mathbf{n}}^{(2)}, \dot{\mathbf{n}}^{(3)}\}$, μπορεί να διατυπωθεί επίσης στη μορφή (Dafalias [7])

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{s}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{s}} = 0, \quad (2.39)$$

όπου $\overset{\circ}{\mathbf{s}} = \{\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{w}_1, \overset{\circ}{w}_2, \overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(1)}, \overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(2)}, \overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(3)}\}$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\overset{\circ}{\mathbf{n}}^{(i)} = 0$, η εξίσωση (2.39)

ανάγεται στην απλή μορφή

$$\mathbf{N} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} \dot{w}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} \dot{w}_2 = 0. \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.40) τα μεγέθη $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, \dot{f} , \dot{w}_1 και \dot{w}_2 απ' τις (2.11), (2.12), (2.16) και (2.17), αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$\mathbf{N} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} H = 0 \quad \text{ή} \quad \dot{\lambda} = \frac{1}{H} \mathbf{N} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{για } H \neq 0, \quad (2.41)$$

όπου

$$H = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} g_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial f} g_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} g_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} g_4 \right). \quad (2.42)$$

Το μέγεθος H αποκαλείται “ρυθμός σκληρύνσεως” (hardening rate)· μας πληροφορεί σχετικά με την κράτνση ή πράνση του υλικού του πορώδους μετάλλου. Συγκεκριμένα, αν $H > 0$ συμπεραίνουμε ότι το υλικό κρατύνεται στιγμιαία (η επιφάνεια διαρροής διαστέλλεται στο χώρο των τάσεων), αν $H < 0$ συμπεραίνουμε ότι το υλικό πραΰνεται στιγμιαία (η επιφάνεια διαρροής συστέλλεται στο χώρο των τάσεων) ενώ η περίπτωση $H = 0$, αντιστοιχεί σε στιγμιαία

“τέλεια πλαστική” συμπεριφορά. Οι διαστάσεις του H στο συγκεκριμένο μοντέλο είναι “τάση” υψωμένη στην 3^η δύναμη.

Μια εναλλακτική έκφραση για το $\dot{\lambda}$ προκύπτει με αντικατάσταση του $\overset{\circ}{\sigma}$ από την (2.37) στην (2.41):

$$\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D} - \dot{\lambda} (\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{N} + H) = 0 \quad \text{ή} \quad \dot{\lambda} = \frac{1}{L} \mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D}, \quad (2.43)$$

όπου $L = H + \mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{N}$, είναι μια θετική ποσότητα¹.

Για μια εντατική κατάσταση σ που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διαρροής, δηλαδή τέτοια ώστε $\Phi(\sigma, s) = 0$, η απαίτηση $\dot{\lambda} > 0$ ορίζει τη “συνθήκη πλαστικής φόρτισης”:

$$\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D} > 0, \quad (2.44)$$

ενώ $\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D} = 0$, αντιστοιχεί σε “ουδέτερη φόρτιση” ($\dot{\lambda} = 0$) και $\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D} < 0$, σε “ελαστική αποφόρτιση” ($\dot{\lambda} = 0$).

Αντικαθιστώντας το $\dot{\lambda}$ απ’ την (2.43) στην (2.37) παίρνουμε

$$\overset{\circ}{\sigma} = \left(\mathcal{L}^e - \frac{1}{L} \mathcal{L}^e : \mathbf{N} \mathbf{N} : \mathcal{L}^e \right) : \mathbf{D}. \quad (2.45)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ $\overset{\nabla}{\sigma}$ και $\overset{\circ}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\sigma} &= \overset{\circ}{\sigma} + \sigma \cdot \mathbf{W}^p - \mathbf{W}^p \cdot \sigma = \overset{\circ}{\sigma} + \dot{\lambda} (\sigma \cdot \mathbf{\Omega}^p - \mathbf{\Omega}^p \cdot \sigma) = \\ &= \overset{\circ}{\sigma} + \frac{1}{L} (\sigma \cdot \mathbf{\Omega}^p - \mathbf{\Omega}^p \cdot \sigma) (\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D}), \end{aligned} \quad (2.46)$$

και αντικαθιστώντας το $\overset{\circ}{\sigma}$ απ’ την (2.45) στην (2.46), καταλήγουμε στη ζητούμενη εξίσωση

$$\boxed{\overset{\nabla}{\sigma} = \mathcal{L}^{ep} : \mathbf{D}, \quad \mathcal{L}^{ep} = \mathcal{L}^e - \frac{1}{L} (\mathcal{L}^e : \mathbf{N}) (\mathcal{L}^e : \mathbf{N}) + \frac{1}{L} (\sigma \cdot \mathbf{\Omega}^p - \mathbf{\Omega}^p \cdot \sigma) (\mathcal{L}^e : \mathbf{N})} \quad (2.47)$$

για την περίπτωση της πλαστικής φόρτισης. Σημειώνουμε ότι ο τανυστής \mathcal{L}^{ep} δεν έχει τη διαγώνια συμμετρία ($\mathcal{L}_{ijkl}^{ep} \neq \mathcal{L}_{klij}^{ep}$, εν γένει), λόγω του τελευταίου όρου στην πιο πάνω εξίσωση.

Ο όρος αυτός εκφράζει τη συνεισφορά του “πλαστικού spin” στον \mathcal{L}^{ep} .

Για την περίπτωση της ουδέτερης φόρτισης ή της ελαστικής αποφόρτισης ($\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{D} \leq 0$), η αντίστοιχη εξίσωση είναι πιο απλή:

$$\boxed{\overset{\nabla}{\sigma} = \mathcal{L}^e : \mathbf{D}}. \quad (2.48)$$

¹ Ο όρος $\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{N}$ είναι θετικός, επειδή ο τανυστής \mathcal{L}^e είναι θετικά ορισμένος και διάστασης (Μέτρο Ελαστικότητας)·(Τάση Διαρροής)². Στα μέταλλα το μέτρο ελαστικότητας είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο του ορίου διαρροής, και επομένως το πρόσημο του L καθορίζεται αποκλειστικά απ’ το πρόσημο του όρου $\mathbf{N} : \mathcal{L}^e : \mathbf{N}$.

3

ΓΕΝΙΚΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΤΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ KAILASAM-CASTAÑEDA

Ένα καταστατικό μοντέλο περιγράφει τις σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες της απόκρισης. Όταν η απόκριση ενός σώματος εξαρτάται απ' την ιστορία της φόρτισης που του επιβάλλεται, όπως συμβαίνει στην ελαστοπλαστική συμπεριφορά των μετάλλων, οι σχέσεις αυτές είναι διαφορικές εξισώσεις του χρόνου, και συνεπώς, η επίλυση του προβλήματος είναι συνυφασμένη με την επίλυση τέτοιων εξισώσεων. Το πρόβλημα είναι πολύπλοκο και αντιμετωπίζεται, κατά κανόνα, αριθμητικά.

Η επίλυση του προβλήματος επιτυγχάνεται “βηματικά” ή “αυξητικά” (incrementally), δηλαδή με σταδιακή αύξηση της φόρτισης και υπολογισμό της λύσης στο τέλος κάθε βήματος. Σε κάθε βήμα, η υπολογιστική διαδικασία ξεκινάει με μια αρχική εκτίμηση του κινηματικού πεδίου, η οποία υφίσταται συνεχείς βελτιώσεις –μέσω του αλγορίθμου Newton, κάτι που προϋποθέτει την εκτίμηση του σχετικού πίνακα Jacobi- μέχρι την ικανοποίηση του αιτήματος της ισορροπίας στο σώμα. Για κάθε εκτίμηση του κινηματικού πεδίου, απαιτείται ο προσδιορισμός των καταστατικώς συμβατών πεδίων των τάσεων και καταστατικών μεταβλητών. Ο υπολογισμός αυτών των πεδίων επιτυγχάνεται μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων, με αρχικές τιμές τη λύση του προηγούμενου βήματος. Το κεντρικό θέμα αυτού του κεφαλαίου είναι η αριθμητική ολοκλήρωση του καταστατικού μοντέλου KC.

Το ζήτημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ενός καταστατικού μοντέλου υποβάλλεται με ακρίβεια από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία βρίσκεται στον πυρήνα της υπολογιστικής μας διαδικασίας. Γι' αυτό, κρίνεται σκόπιμη μια αναφορά σ' αυτό το θέμα. Η ενότητα (3.1) είναι αφιερωμένη σ' αυτό το σκοπό, ενώ στην ενότητα (3.2) παρουσιάζεται μια πρόσφατη πρόταση (Aravas και Castañeda [4]) για την αριθμητική ολοκλήρωση του καταστατικού μοντέλου KC, καθώς επίσης και τα συγκριτικά της πλεονεκτήματα σχετικά με μια προηγούμενη προσπάθεια (Kailasam και άλλοι [19]). Στην υποενότητα 3.2.1, παρουσιάζουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου στο πρόβλημα της επίπεδης έντασης. Στο παράρτημα του κεφαλαίου παραθέτουμε δυο τρόπους για τον υπολογισμό των τανυστών Eshelby \mathbf{S} και $\mathbf{\Pi}$, και του τανυστή \mathbf{Q} , που γνωρίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, κατά την περιγραφή του μοντέλου.

3.1. Το ζήτημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ενός καταστατικού μοντέλου - Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων¹.

Σ' αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε το ζήτημα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ενός καταστατικού μοντέλου (γενικά). Το ζήτημα αυτό αποτελεί μέρος του μη-γραμμικού προβλήματος συνοριακών τιμών (χωρικά και χρονικά εξαρτώμενου), το οποίο συνίσταται απ' τα εξής τμήματα:

$$\text{Ισορροπία}^2: \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (A)$$

$$\text{Συμβιβαστικότητα:} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \nabla + (\mathbf{v} \nabla)^T]. \quad (B)$$

$$\text{Καταστατικό Μοντέλο.} \quad (C)$$

$$\text{Συνοριακές Συνθήκες:} \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{στη συνοριακή περιοχή } S_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} & \text{στη συνοριακή περιοχή } S_t \end{cases} \quad (D)$$

Με \mathbf{b} συμβολίζουμε τα καταναμεημένα, στο χώρο \mathcal{E}^x (δηλαδή στον όγκο V του σώματος), εξωτερικά φορτία και με $\hat{\mathbf{t}}$ το διάνυσμα της τάσης στη συνοριακή απειροστή επιφάνεια $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, η οποία ανήκει στην περιοχή S_t .

Αποδεικνύεται ότι τα τμήματα (A) και (D) ισοδυναμούν με την “αρχή των δυνατών ταχυτήτων”

$$\int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}^* dV + \int_{S_t} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}^* dS = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^* dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L}^* dV. \quad (3.1)$$

Η εξίσωση (3.1) εκφράζει το γεγονός ότι η ισχύς των εξωτερικών φορτίων ισούται με την ισχύ των εσωτερικών φορτίων (δηλαδή των εσωτερικών τάσεων), για οποιοδήποτε κινηματικώς παραδεκτό πεδίο ταχυτήτων \mathbf{v}^* (\mathbf{L}^* είναι η κλίση του πεδίου \mathbf{v}^* και \mathbf{D}^* ο αντίστοιχος ρυθμός παραμόρφωσης). Στην ειδική περίπτωση που το πεδίο \mathbf{v}^* είναι το πραγματικό πεδίο ταχυτήτων του προβλήματος, η εξίσωση (3.1) εκφράζει την αρχή διατήρησης της μηχανικής ισχύος.

Η διατύπωση του προβλήματος μέσω της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.1), επιτρέπει τη διακριτοποίηση του με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η οποία βασίζεται σε δυο κεντρικές ιδέες: τη διαμέριση του χώρου \mathcal{E}^x σε (πεπερασμένα) στοιχεία, και τη θεώρηση ως βασικών μεταβλητών, των μετατοπίσεων στους κόμβους των στοιχείων (διακριτές μεταβλητές). Το πεδίο των μετατοπίσεων $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, ορίζεται -κατά προσέγγιση- μέσω του αναπτύγματος

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^N \quad (3.2)$$

όπου \mathbf{u}^N είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους και $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ ένα σύνολο κατάλληλων “συναρτήσεων βάσης”³. Η μητρική μορφή της εξίσωσης (3.2) είναι

$$\underbrace{\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}}_{3 \times 1} = \underbrace{[\mathbf{N}(\mathbf{x})]}_{3 \times 3N} \underbrace{\{\mathbf{u}^N\}}_{3N \times 1}. \quad (3.3)$$

Παρομοίως, μπορούμε να διατυπώσουμε το πεδίο $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ ως εξής:

¹ Αυτή η ενότητα βασίστηκε επίσης σε σημειώσεις από μαθήματα του καθηγητή του Τμήματος, κ. Νίκου Αράβα. Η ευθύνη για ενδεχόμενα λάθη είναι αποκλειστικά δική μου.

² Αγνοούμε τα φαινόμενα αδράνειας.

³ Οι συναρτήσεις αυτές είναι ζήτημα επιλογής, και συνεπώς γνωστές.

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}^{*N} \quad \text{και} \quad \underbrace{\{\mathbf{v}^*(\mathbf{x})\}}_{3 \times 1} = \underbrace{[\mathbf{N}(\mathbf{x})]}_{3 \times 3N} \underbrace{\{\mathbf{v}^{*N}\}}_{3N \times 1} \quad (3.4)$$

και συνεπώς

$$\underbrace{\{L^*(\mathbf{x})\}}_{9 \times 1} = \underbrace{[B_L(\mathbf{x})]}_{9 \times 3N} \underbrace{\{\mathbf{v}^{*N}\}}_{3N \times 1}, \quad (3.5)$$

όπου

$$[B_L(\mathbf{x})] = \nabla_{\mathbf{x}} [N(\mathbf{x})]. \quad (3.6)$$

Η εξίσωση (3.1), λαμβάνοντας υπόψη τις (3.3), (3.4)b και (3.5), γίνεται

$$\Gamma(\{\mathbf{u}^N\}, \{\mathbf{v}^{*N}\}) = \underbrace{[\mathbf{v}^{*N}]}_{1 \times 3N} \left(\int_V \underbrace{[B_L]^T}_{3N \times 9} \underbrace{\{\sigma\}}_{9 \times 1} dV - \int_V \underbrace{[N]^T}_{3N \times 3} \underbrace{\{b\}}_{3 \times 1} dV - \int_{S_f} \underbrace{[N]^T}_{3N \times 3} \underbrace{\{\hat{t}\}}_{3 \times 1} dS \right) = 0. \quad (3.7)$$

Απ' την τελευταία εξίσωση, λόγω του γεγονότος ότι το $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$ είναι ένα τυχαίο κινηματικός παραδεκτό πεδίο ταχυτήτων, προκύπτει το σύστημα μη-γραμμικών (ως προς \mathbf{u}^N) εξισώσεων

$$R(\{\mathbf{u}^N\}) = \left(\int_V [B_L]^T \{\sigma\} dV \right) - \left(\int_V [N]^T \{b\} dV + \int_{S_f} [N]^T \{\hat{t}\} dS \right) = 0, \quad (3.8)$$

το οποίο, για απλότητα στους συμβολισμούς, παριστάνουμε ως εξής:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^N) = \mathbf{A}^\sigma(\mathbf{u}^N) - \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

όπου ο όρος $\mathbf{A}^\sigma(\mathbf{u}^N)$ (ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.8)) εκφράζει τη συνεισφορά των εσωτερικών τάσεων σ στο ενεργειακό ισοζύγιο (3.1), και συνεπώς εξαρτάται άμεσα απ' το καταστατικό μοντέλο. Η συνεισφορά των εξωτερικών φορτίων, εκφράζεται στον όρο \mathbf{A} , ο οποίος είναι ανεξάρτητος¹ του \mathbf{u}^N και συνεπώς γνωστός. Σημειώνουμε ότι η εξίσωση (3.9) ισχύει σε κάθε χρονική στιγμή.

Η επίλυση του προβλήματος [Εξίσωση (3.9) και Καταστατικό Μοντέλο] γίνεται βηματικά ή αυξητικά. Για να δούμε πως προχωράει η ανάλυση, θεωρούμε τη σχηματική αναπαράσταση της επόμενης σελίδας, στην οποία υποθέτουμε ότι η λύση είναι γνωστή τη χρονική στιγμή t_n ² και ζητείται η λύση τη χρονική στιγμή t_{n+1} .

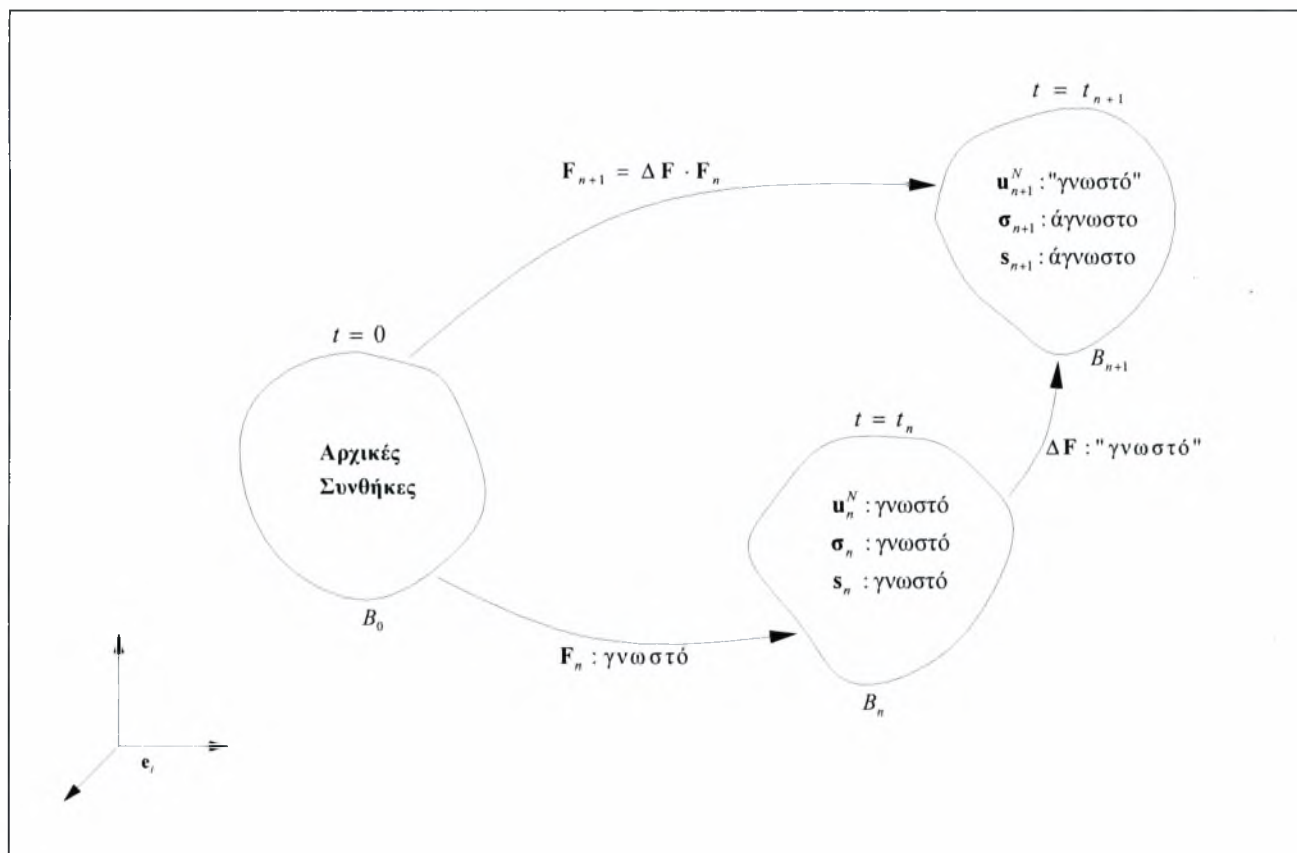
Δεδομένου λοιπόν του όρου $\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{A}_n + \Delta \mathbf{A}$, ζητείται το διάνυσμα $\mathbf{u}_{n+1}^N = \mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}^N$ που ικανοποιεί την εξίσωση (3.9). Η διατύπωση της εξισώσεως (3.9) για τη χρονική στιγμή t_{n+1} ,

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}^N) = \mathbf{A}^\sigma(\mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}^N) - \mathbf{A}_{n+1} = 0, \quad (3.10)$$

¹ Η εξάρτηση των περιοχών ολοκλήρωσης (V και S_f) απ' τη λύση \mathbf{u}^N είναι μόνο τυπική. Η αριθμητική επίλυση της (3.8) γίνεται με τη μέθοδο Newton, και συνεπώς οι περιοχές αυτές είναι σταδιακά υπολογίσιμες.

² Η λύση τη χρονική στιγμή $t = 0$, δίνεται απ' τις αρχικές συνθήκες.

συνεπάγεται μια διανυσματική, μη-γραμμική εξίσωση ως προς $\Delta \mathbf{u}^N$ (βασικές άγνωστοι), την οποία επιλέγουμε -ως συνήθως, σ' αυτές τις περιπτώσεις- να επιλύσουμε με τη μέθοδο Newton.



Σχήμα 3.1. Η βηματική προσέγγιση.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα βασικά βήματα του αλγορίθμου Newton για το σύστημα (3.10).

- Ξεκινάμε με μια αρχική εκτίμηση (υπόθεση) για τη λύση· τη συμβολίζουμε εδώ με $\Delta \mathbf{u}_*^N$.
- Ελέγχουμε αν η εκτίμηση $\Delta \mathbf{u}_*^N$ ικανοποιεί την εξίσωση (3.10)².
 - Αν την ικανοποιεί, η $\Delta \mathbf{u}_*^N$ είναι η ζητούμενη λύση (δηλαδή $\Delta \mathbf{u}^N = \Delta \mathbf{u}_*^N$) και ο αλγόριθμος τερματίζεται.
 - Αν όχι, η $\Delta \mathbf{u}_*^N$ χρειάζεται "βελτίωση", και συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα.
- Υποθέτουμε μια νέα εκτίμηση $\Delta \mathbf{u}_{**}^N = \Delta \mathbf{u}_*^N + \delta(\Delta \mathbf{u}_*^N)$, "διορθωμένη" κατά $\delta(\Delta \mathbf{u}_*^N)$ (η νέα άγνωστη ποσότητα). Διατυπώνοντας το ανάπτυγμα Taylor της εξίσωσης (3.10) για $\Delta \mathbf{u}^N = \Delta \mathbf{u}_{**}^N$,

$$\mathbf{R} \left[\left(\mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}_*^N \right) + \delta(\Delta \mathbf{u}_*^N) \right] = \mathbf{R} \left(\mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}_*^N \right) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}^\sigma}{\partial (\Delta \mathbf{u}^N)} \right|_{\Delta \mathbf{u}^N = \Delta \mathbf{u}_*^N} \cdot \delta(\Delta \mathbf{u}_*^N) = \mathbf{0}, \quad (3.11)$$

² Με κάποιο κριτήριο ανοχής που έχουμε προαποφασίσει, διότι είναι μάλλον απίθανο να την ικανοποιεί ακριβώς.

όπου έχουμε αγνοήσει όρους τάξεως $O[(\delta(\Delta \mathbf{u}_*^N))^2]$ και μεγαλύτερης, καταλήγουμε σ' ένα γραμμικό σύστημα ως προς $\delta(\Delta \mathbf{u}_*^N)$, του οποίου η λύση είναι

$$\delta(\Delta \mathbf{u}_*^N) = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{R}(\mathbf{u}_n^N + \Delta \mathbf{u}_*^N), \quad (3.12)$$

όπου με \mathbf{J} συμβολίζουμε τον πίνακα Jacobi, $\mathbf{J} = \left(\partial \mathbf{A}^\sigma / \partial (\Delta \mathbf{u}_*^N) \right) \Big|_{\Delta \mathbf{u}_*^N = \Delta \mathbf{u}_*^N}$, του συστήματος.

4. Με γνωστή πια την ποσότητα $\Delta \mathbf{u}_*^N$, κάνουμε την αντικατάσταση $\Delta \mathbf{u}_*^N = \Delta \mathbf{u}_{**}^N$ και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Οι υπολογιστικές απαιτήσεις του πιο πάνω αλγορίθμου, λαμβάνοντας υπόψη την περιγραφή σχετικά με τη διακριτοποίηση του προβλήματος, αναδεικνύουν το λόγο και τα ζητήματα για το πρόβλημα της ολοκλήρωσης του καταστατικού μοντέλου. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε τα εξής:

- A. Η εκτέλεση του 2^{ου} βήματος του αλγορίθμου Newton απαιτεί τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στους όγκους των στοιχείων, κάτι όμως που προϋποθέτει τη γνώση του πεδίου των τάσεων, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}^e)$, στο εσωτερικό τους (\mathbf{x}^e), τη χρονική στιγμή t_{n+1} . Επιλέγοντας να υπολογίσουμε αριθμητικά αυτά τα ολοκληρώματα με τη μέθοδο Gauss, το ζήτημα για το καταστατικό μοντέλο μετατίθεται στον υπολογισμό των τανυστών των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}_{(i)}^e)$, στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss $\mathbf{x}_{(i)}^e$, του κάθε στοιχείου.
- B. Με βάση και την 1^η παρατήρηση, η εκτέλεση του 3^{ου} βήματος απαιτεί επιπλέον τον υπολογισμό των στοιχείων του πίνακα Jacobi τη χρονική στιγμή t_{n+1} , στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss, κάτι που οδηγεί στο δεύτερο ζήτημα για το καταστατικό μοντέλο. Συγκεκριμένα, η άγνωστη ποσότητα σ' αυτούς τους υπολογισμούς είναι το μέγεθος $(\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1} / \partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{(i)}^e}$ -όπου με $\boldsymbol{\varepsilon}$ συμβολίζουμε τον τανυστή της παραμόρφωσης- που εξαρτάται απ' τις καταστατικές μεταβλητές $\mathbf{s}_{n+1}(\mathbf{x}_{(i)}^e)$. [Αξίζει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια υπολογισμού του πίνακα Jacobi δεν επηρεάζει καθόλου την ακρίβεια της λύσης, διότι το αν μια προτεινόμενη λύση $(\Delta \mathbf{u}_*^N)$ πληροί τις προδιαγραφές, αποφασίζεται αποκλειστικά στο βήμα 2. Επηρεάζει όμως το μέγεθος των υπολογισμών, κάτι που μόνο αδιάφορος δε μας αφήνει!]

Συνοψίζοντας, με βάση την “αριθμητική εικόνα” του προβλήματος, οι υπολογιστικές απαιτήσεις απ' το καταστατικό μοντέλο συνίστανται στον υπολογισμό των τανυστών $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{x}_{(i)}^e)$ και $\mathbf{s}_{n+1}(\mathbf{x}_{(i)}^e)$, στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss των πεπερασμένων στοιχείων, οι οποίοι αντιστοιχούν στο πεδίο των μετατοπίσεων που προκύπτει με βάση το διάνυσμα των μετατοπίσεων στους κόμβους \mathbf{u}_{n+1}^N , μέσω της σχέσης $\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_{n+1}^N = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) + \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \Delta \mathbf{u}_*^N$. Οι υπολογισμοί αυτοί επιτυγχάνονται μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης των καταστατικών εξισώσεων -στο πεδίο του χρόνου- από t_n έως t_{n+1} . Πρόκειται για μια διαδικασία που επαναλαμβάνεται σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss, του κάθε στοιχείου. Η περιγραφή μιας τέτοιας διαδικασίας, για την περίπτωση του καταστατικού μοντέλου KC αποτελεί το βασικό αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

3.2. Η αριθμητική ολοκλήρωση του μοντέλου Kailasam-Castañeda.

Μας ενδιαφέρει η ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων στα σημεία ολοκλήρωσης Gauss των πεπερασμένων στοιχείων. Σ' ένα συγκεκριμένο σημείο ολοκλήρωσης Gauss, είναι γνωστή η λύση $(\mathbf{F}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{s}_n)$ τη χρονική στιγμή t_n , όπως και ο τανυστής κλίσης της παραμορφώσεως \mathbf{F}_{n+1} τη στιγμή t_{n+1} , και το ζήτημα είναι ο προσδιορισμός των τανυστών $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ και \mathbf{s}_{n+1} και των στοιχείων του πίνακα Jacobi, τη χρονική στιγμή t_{n+1} (βλέπε σχήμα 3.1).

Ο τανυστής κλίσης της παραμορφώσεως $\mathbf{F}(t)$, κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{F}(t) = \Delta\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}_n = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{F}_n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (3.13)$$

όπου $\mathbf{R}(t)$ και $\mathbf{U}(t)$ είναι οι τανυστές της δεξιάς πολικής παραγοντοποίησης του $\Delta\mathbf{F}(t)$. Κατά συνέπεια, οι τανυστές ρυθμού της παραμόρφωσης $\mathbf{D}(t)$ και spin $\mathbf{W}(t)$, γράφονται

$$\mathbf{D}(t) = \left[\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \mathbf{F}^{-1}(t) \right]_s = \left[\Delta\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \Delta\mathbf{F}^{-1}(t) \right]_s \quad (3.14)$$

και

$$\mathbf{W}(t) = \left[\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \mathbf{F}^{-1}(t) \right]_a = \left[\Delta\dot{\mathbf{F}}(t) \cdot \Delta\mathbf{F}^{-1}(t) \right]_a, \quad (3.15)$$

όπου οι δείκτες “s” και “a” δηλώνουν τα συμμετρικά και αντισυμμετρικά μέρη των τανυστών, αντίστοιχα.

Υποθέτοντας ότι οι άξονες Lagrange του μετασχηματισμού $\Delta\mathbf{F}(t)$ (δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{U}(t)$) δεν αλλάζουν προσανατολισμό κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος $[t_n, t_{n+1}]$ (δηλαδή $\dot{\mathbf{N}}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{N}(t) = \text{σταθερό}$), αποδεικνύεται ότι

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t), \quad \mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{R}^T(t), \quad (3.16)$$

όπως επίσης

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R}^T(t), \quad \overset{\nabla}{\mathbf{n}}^{(i)}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \dot{\mathbf{n}}^{(i)}(t), \quad (3.17)$$

όπου $\mathbf{E}(t) = \ln \mathbf{U}(t)$, είναι ο λογαριθμικός (Lagrange) τανυστής της παραμόρφωσης αναφορικά με τη γεωμετρία του σώματος τη χρονική στιγμή t_n , $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{R}^T(t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t) \cdot \mathbf{R}(t)$ και $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}(t) = \mathbf{R}^T(t) \cdot \mathbf{n}^{(i)}(t)$.

Σημειώνουμε ότι στην αρχή του χρονικού βήματος ($t = t_n$)

$$\Delta\mathbf{F}_n = \mathbf{R}_n = \mathbf{U}_n = \boldsymbol{\delta}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma}_n, \quad \hat{\mathbf{n}}_n^{(i)} = \mathbf{n}_n^{(i)} \quad \text{και} \quad \mathbf{E}_n = 0, \quad (3.18)$$

ενώ στο τέλος του ($t = t_{n+1}$),

$$\Delta\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{-1} = \mathbf{R}_{n+1} \cdot \mathbf{U}_{n+1} = \text{γνωστό}, \quad \text{και} \quad \mathbf{E}_{n+1} = \ln \mathbf{U}_{n+1} = \text{γνωστό}. \quad (3.19)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι συναρτήσεις Φ , \mathbf{N} , g_1 , g_2 , g_3 , g_4 και $\mathbf{\Omega}^p$ είναι ισότροπες συναρτήσεις των ορισμάτων τους, οι καταστατικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p, \quad (3.20)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \hat{\mathcal{L}}^e : \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\lambda} \left[\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{\Omega}^p(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) - \mathbf{\Omega}^p(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right], \quad (3.21)$$

$$\Phi(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) = 0, \quad (3.22)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}), \quad (3.23)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \dot{\lambda} g_1(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\mathbf{E}}^p}{(1-f)\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)}, \quad (3.24)$$

$$\dot{f} = \dot{\lambda} g_2(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) = (1-f) \dot{E}_{kk}^p, \quad (3.25)$$

$$\dot{w}_1 = \dot{\lambda} g_3(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) = (\mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} - \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)}) : \hat{\mathbf{A}} : \dot{\mathbf{E}}^p, \quad (3.26)$$

$$\dot{w}_2 = \dot{\lambda} g_4(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) = (\mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} - \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)}) : \hat{\mathbf{A}} : \dot{\mathbf{E}}^p, \quad (3.27)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{n}}}^{(i)} = -\dot{\lambda} \mathbf{\Omega}^p(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(i)}, \quad (3.28)$$

όπου $\hat{\mathcal{L}}_{ijkl}^e = R_{mi} R_{nj} R_{pk} R_{ql} \mathcal{L}_{mnpq}^e$, $\hat{\mathbf{s}} = \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, f, w_1, w_2, \hat{\mathbf{n}}^{(1)}, \hat{\mathbf{n}}^{(2)}, \hat{\mathbf{n}}^{(3)}\}$ και $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, f, w_1, w_2, \hat{\mathbf{n}}^{(1)}, \hat{\mathbf{n}}^{(2)}, \hat{\mathbf{n}}^{(3)})$.

Σ' αυτό το σημείο ανοίγουμε μια παρένθεση, για να υπενθυμίσουμε τις μεθόδους *forward* και *backward Euler*, που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά για την αριθμητική ολοκλήρωση διαφορικών εξισώσεων. Έστω

$$\frac{d}{dt}[y(t)] = f(y, t) \Rightarrow dy = f(y, t) dt, \quad (3.29)$$

μια μη-γραμμική διαφορική εξίσωση (t είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή). Ζητείται η τιμή της λύσης $y_{n+1} = y(t_{n+1})$, όταν είναι γνωστή η τιμή $y_n = y(t_n)$. Κατά τη μέθοδο *forward Euler*, θεωρούμε τη συνάρτηση f σταθερή στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$ και ίση με την τιμή της για $t = t_n$, δηλαδή $f = f_n = f(y_n, t_n)$, οπότε η y_{n+1} υπολογίζεται άμεσα απ' την ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.29) και είναι

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot (t_{n+1} - t_n). \quad (3.30)$$

Κατά τη μέθοδο *backward Euler*, θεωρούμε επίσης σταθερή την f στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$, αλλά ίση με την τιμή της για $t = t_{n+1}$, δηλαδή $f = f_{n+1} = f(y_{n+1}, t_{n+1})$. Με ολοκλήρωση της (3.29) στο διάστημα $[t_n, t_{n+1}]$, παίρνουμε

$$y_{n+1} = y_n + f(y_{n+1}, t_{n+1}) \cdot (t_{n+1} - t_n), \quad (3.31)$$

που είναι μια μη-γραμμική, αλγεβρική εξίσωση (το y_{n+1} είναι άγνωστο), η επίλυση της οποίας μας δίνει την y_{n+1} . Οι δυο μέθοδοι παρέχουν ίδια ακρίβεια, διαφέρουν όμως ως προς την ευστάθεια. Η backward Euler είναι πιο ευσταθής.

Σε μια εργασία των Kailasam, Aravas και Ponte Castañeda [19], προτάθηκε ένα σχήμα forward Euler για την αριθμητική ολοκλήρωση των καταστατικών εξισώσεων (3.20)-(3.28). Για την εξασφάλιση της ευστάθειας της προτεινόμενης διαδικασίας, απαιτείται ο περιορισμός του μεγέθους της παραμόρφωσης που χρησιμοποιείται σε κάθε χρονικό βήμα. Το πρόβλημα είναι ιδιαίτερα έντονο στην περίπτωση που οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή των τάσεων περιστρέφονται ουσιαστικά. Ως αποτέλεσμα, εξαιρετικά μικρά χρονικά βήματα απαιτείται να χρησιμοποιούνται σε προβλήματα όπως οι κατεργασίες διαμόρφωσης των μετάλλων. Με στόχο την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, οι Aravas και Ponte Castañeda [4] πρότειναν μια νέα διαδικασία, την οποία παρουσιάζουμε πιο κάτω.

Απ' την αναλυτική ολοκλήρωση των εξισώσεων (3.20) και (3.25), προκύπτουν οι σχέσεις

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}^e + \Delta \mathbf{E}^p \Leftrightarrow \Delta \mathbf{E}^e = \Delta \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}^p \quad (3.32)$$

και

$$f_{n+1} = 1 - (1 - f_n) \exp[-\Delta E_{kk}^p], \quad (3.33)$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\Delta A = A_{n+1} - A_n$ και $\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n = \text{γνωστό}$.

Ολοκληρώνοντας αριθμητικά την εξίσωση (3.23) με backward Euler, παίρνουμε

$$\Delta \mathbf{E}^p = \Delta \lambda \mathbf{N}_{n+1}, \quad \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, f_{n+1}, w_a|_{n+1}, \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}). \quad (3.34)$$

Η προσέγγιση της εξίσωσης εξέλιξης των $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$ με

$$\dot{\hat{\mathbf{n}}}^{(i)} = -\dot{\lambda} \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(i)} \Rightarrow \frac{d\hat{\mathbf{n}}^{(i)}}{d\lambda} = -\boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(i)}, \quad (3.35)$$

επιτρέπει την αναλυτική της ολοκλήρωση, με αποτέλεσμα¹

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}(\Delta \lambda) = \exp(-\Delta \lambda \boldsymbol{\Omega}_n^p) \cdot \mathbf{n}_n^{(i)}. \quad (3.36)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το εκθετικό ενός αντισυμμετρικού τανυστή 2^{ος} τάξεως \mathbf{A} ($\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$), είναι ένας ορθογώνιος τανυστής, ο οποίος μπορεί να υπολογιστεί απ' την ακόλουθη έκφραση την οποία απέδειξε ο Gibbs (Cheng και Gupta [6]):

$$\exp(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\delta} + \frac{\sin a}{a} \mathbf{A} + \frac{1 - \cos a}{a^2} \mathbf{A}^2, \quad (3.37)$$

όπου $a = \sqrt{A_{ij}A_{ij}/2}$ είναι το μέτρο του αξονικού διανύσματος του \mathbf{A} .

¹ Απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση της (3.28) με forward Euler, θα έδινε το αποτέλεσμα $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)} = (\boldsymbol{\delta} - \Delta \lambda \boldsymbol{\Omega}_n^p) \cdot \mathbf{n}_n^{(i)}$. Ο παράγοντας $\boldsymbol{\delta} - \Delta \lambda \boldsymbol{\Omega}_n^p$ είναι μια προσέγγιση δυο-όρων του ορθογώνιου τανυστή $\exp(-\Delta \lambda \boldsymbol{\Omega}_n^p)$. Συνεπώς, αυτός ο τρόπος ολοκλήρωσης θα άλλαζε το μήκος των $\mathbf{n}_n^{(i)}$.

Στην ειδική περίπτωση ενός διδιάστατου προβλήματος, στο οποίο η κίνηση συμβαίνει στο επίπεδο $x_1 - x_2$, τα μοναδιαία διανύσματα μπορούν να γραφούν

$$\hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \cos \hat{\theta} \mathbf{e}_1 + \sin \hat{\theta} \mathbf{e}_2, \quad \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = -\sin \hat{\theta} \mathbf{e}_1 + \cos \hat{\theta} \mathbf{e}_2, \quad \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \times \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = \mathbf{e}_3, \quad (3.38)$$

όπου \mathbf{e}_i είναι τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις x_i , και η εξίσωση (3.36) ισοδυναμεί με

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n + \Delta \hat{\theta}, \quad \Delta \hat{\theta}(\Delta \lambda) = -\Delta \lambda \omega_n^p, \quad (3.39)$$

όπου το ω_n^p ορίζεται απ' τις εξισώσεις (2.29) και (2.30).

Οι υπόλοιπες εξισώσεις του καταστατικού μοντέλου, δηλαδή οι (3.21), (3.24), (3.26) και (3.27), ολοκληρώνονται με τη μέθοδο forward Euler και συνεπάγονται τα εξής αποτελέσματα:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}(\Delta \lambda, \Delta \mathbf{E}^p) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e - \mathcal{L}_n^e : \Delta \mathbf{E}^p + \Delta \lambda (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n^p - \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n), \quad (3.40)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p(\Delta \mathbf{E}^p) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p + \frac{\boldsymbol{\sigma}_n : \Delta \mathbf{E}^p}{(1 - f_n) \sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)}, \quad (3.41)$$

$$w_1|_{n+1}(\Delta \mathbf{E}^p) = w_1|_n + w_1|_n (\mathbf{n}_n^{(3)} \mathbf{n}_n^{(3)} - \mathbf{n}_n^{(1)} \mathbf{n}_n^{(1)}) : \mathbf{A}_n : \Delta \mathbf{E}^p, \quad (3.42)$$

$$w_2|_{n+1}(\Delta \mathbf{E}^p) = w_2|_n + w_2|_n (\mathbf{n}_n^{(3)} \mathbf{n}_n^{(3)} - \mathbf{n}_n^{(2)} \mathbf{n}_n^{(2)}) : \mathbf{A}_n : \Delta \mathbf{E}^p, \quad (3.43)$$

όπου συμβολίζουμε με $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathcal{L}_n^e : \Delta \mathbf{E} =$ γνωστό, το μέγεθος που είναι γνωστό ως “ελαστική πρόβλεψη” (“elastic predictor”). Επίσης, έχουν χρησιμοποιηθεί οι σχέσεις $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma}_n$, $\hat{\mathbf{n}}^{(i)} = \mathbf{n}^{(i)}$ και $\hat{\mathcal{L}}_n^e = \mathcal{L}_n^e$.

Στη συνέχεια, συνοψίζουμε τον αλγόριθμο ολοκλήρωσης του καταστατικού μοντέλου. Επιλέγουμε ως βασικές μεταβλητές τις ποσότητες $\Delta \lambda$ και $\Delta \mathbf{E}^p$. Ξεκινώντας απ' το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\Phi(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}(\Delta \lambda, \Delta \mathbf{E}^p), \hat{\mathbf{s}}_{n+1}(\Delta \lambda, \Delta \mathbf{E}^p)) = 0, \quad (3.44)$$

$$\mathbf{G}(\Delta \lambda, \Delta \mathbf{E}^p) = \Delta \mathbf{E}^p - \Delta \lambda \hat{\mathbf{N}}_{n+1}(\Delta \lambda, \Delta \mathbf{E}^p) = \mathbf{0}, \quad (3.45)$$

αντικαθιστούμε τα μεγέθη $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, $w_1|_{n+1}$, $w_2|_{n+1}$, f_{n+1} και $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}$ απ' τις σχέσεις (3.40)-(3.43), (3.33) και (3.36), αντίστοιχα, και στη συνέχεια το λύνουμε ως προς $\Delta \lambda$ και $\Delta \mathbf{E}^p$, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Newton (σελίδα 3). Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις εξισώσεις (3.40)-(3.43), (3.33) και (3.36), βρίσκουμε τις ποσότητες $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p$, $w_1|_{n+1}$, $w_2|_{n+1}$, f_{n+1} και $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}$, αντίστοιχα. Τέλος, τα μεγέθη $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ και $\mathbf{n}_{n+1}^{(i)}$, υπολογίζονται απ' τις σχέσεις

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{R}_{n+1} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \cdot \mathbf{R}_{n+1}^T \quad \text{και} \quad \mathbf{n}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{R}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}. \quad (3.46)$$

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (3.44) και (3.45) προϋποθέτει τον προσδιορισμό των στοιχείων του αντίστοιχου πίνακα Jacobi. Αναφερόμαστε σε πίνακα, διότι κατά την εκτέλεση της υπολογιστικής διαδικασίας οι ταυιστές και γενικότερα οι ταυιστικές

εκφράσεις που συναντήσαμε, υπολογίζονται μέσω των αντίστοιχων μητρικών μορφών των ταυνοστών. Μια αναλυτική συζήτηση σχετικά με το θέμα θα βρείτε στην εργασία των Nadeau και Ferrari [24]. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των αξονοσυμμετρικών προβλημάτων ή προβλημάτων επίπεδης παραμόρφωσης, η μητρική μορφή του ταυνοστή $\Delta \mathbf{E}^p$ είναι $[\Delta E_{11}^p, \Delta E_{22}^p, \Delta E_{33}^p, \Delta E_{12}^p]$, ενώ η μορφή του πίνακα Jacobi είναι

$$[DJAC] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta \lambda)} & \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta E_{11}^p)} & \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta E_{22}^p)} & \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta E_{33}^p)} & \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta E_{12}^p)} \\ \frac{\partial G_{11}}{\partial (\Delta \lambda)} & \frac{\partial G_{11}}{\partial (\Delta E_{11}^p)} & \frac{\partial G_{11}}{\partial (\Delta E_{22}^p)} & \frac{\partial G_{11}}{\partial (\Delta E_{33}^p)} & \frac{\partial G_{11}}{\partial (\Delta E_{12}^p)} \\ \frac{\partial G_{22}}{\partial (\Delta \lambda)} & \frac{\partial G_{22}}{\partial (\Delta E_{11}^p)} & \frac{\partial G_{22}}{\partial (\Delta E_{22}^p)} & \frac{\partial G_{22}}{\partial (\Delta E_{33}^p)} & \frac{\partial G_{22}}{\partial (\Delta E_{12}^p)} \\ \frac{\partial G_{33}}{\partial (\Delta \lambda)} & \frac{\partial G_{33}}{\partial (\Delta E_{11}^p)} & \frac{\partial G_{33}}{\partial (\Delta E_{22}^p)} & \frac{\partial G_{33}}{\partial (\Delta E_{33}^p)} & \frac{\partial G_{33}}{\partial (\Delta E_{12}^p)} \\ \frac{\partial G_{12}}{\partial (\Delta \lambda)} & \frac{\partial G_{12}}{\partial (\Delta E_{11}^p)} & \frac{\partial G_{12}}{\partial (\Delta E_{22}^p)} & \frac{\partial G_{12}}{\partial (\Delta E_{33}^p)} & \frac{\partial G_{12}}{\partial (\Delta E_{12}^p)} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Δεδομένων των αναλυτικών εκφράσεων όλων των απαιτούμενων μεγεθών -ως προς $\Delta \lambda$ και $\Delta \mathbf{E}^p$ - οι εκφράσεις για τα στοιχεία του πίνακα Jacobi προκύπτουν εύκολα με εκτέλεση των πράξεων. Στη συνέχεια παραθέτουμε τα σχετικά αποτελέσματα.

Οι μερικές παράγωγοι ως προς $\Delta \lambda$ υπολογίζονται απ' τις σχέσεις

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta \lambda)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \lambda)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}} \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}}{\partial (\Delta \lambda)} = \hat{\mathbf{N}}_{n+1} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \lambda)}, \quad (3.48)$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial (\Delta \lambda)} = -\hat{\mathbf{N}}_{n+1} - \Delta \lambda \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \lambda)} + \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}}{\partial (\Delta \lambda)} \right] = -\hat{\mathbf{N}}_{n+1} - \Delta \lambda \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \lambda)}, \quad (3.49)$$

όπου έχουμε αγνοήσει τις μεταβολές των μεγεθών Φ και $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$ ως προς $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(i)}$. Οι αντίστοιχες παράγωγοι ως προς $\Delta \mathbf{E}^p$ είναι

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_{n+1}} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} + \frac{\partial \Phi}{\partial w_a|_{n+1}} \frac{\partial w_a|_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)}, \quad (3.50)$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = \mathbf{I} - \Delta \lambda \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} : \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} + \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial f_{n+1}} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} + \frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial w_a|_{n+1}} \frac{\partial w_a|_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} \right], \quad (3.51)$$

ενώ για τους όρους των τεσσάρων τελευταίων εξισώσεων, προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} = \hat{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{2}{1-f_{n+1}} \hat{\mathbf{m}}_{n+1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p} = -2\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p) \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_{n+1}} = \frac{3}{(1-f_{n+1})^2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} : \left[\frac{1}{2} \mathbf{K} + \frac{1+f_{n+1}}{1-f_{n+1}} \mu \mathbf{Q}_{n+1}^{-1} \Big|_{\nu=1/2} \right] : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial w_a|_{n+1}} = -\frac{3f_{n+1}\mu}{(1-f_{n+1})^2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} : \left[\mathbf{Q}_{n+1}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{Q}_{n+1}}{\partial w_a|_{n+1}} : \mathbf{Q}_{n+1}^{-1} \right]_{\nu=1/2} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \quad a=1,2, \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \lambda)} = \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n^p - \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = -\mathcal{L}_n^e, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} = \frac{2}{1-f_{n+1}} \hat{\mathbf{m}}_{n+1}, \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial f_{n+1}} = \frac{6}{(1-f_{n+1})^2} \left[\frac{1}{2} \mathbf{K} + \frac{1+f_{n+1}}{1-f_{n+1}} \mu \mathbf{Q}_{n+1}^{-1} \Big|_{\nu=1/2} \right] : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{N}}_{n+1}}{\partial w_a|_{n+1}} = -\frac{6f_{n+1}\mu}{(1-f_{n+1})^2} \left[\mathbf{Q}_{n+1}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{Q}_{n+1}}{\partial w_a|_{n+1}} : \mathbf{Q}_{n+1}^{-1} \right]_{\nu=1/2} : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \quad a=1,2, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_n}{(1-f_n)\sigma_y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p)} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial f_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = (1-f_n) \exp[-\Delta E_{kk}^p] \boldsymbol{\delta} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial w_\alpha|_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = w_\alpha|_n \left(\mathbf{n}_n^{(\alpha)} \mathbf{n}_n^{(\alpha)} - \mathbf{n}_n^{(1)} \mathbf{n}_n^{(1)} \right) : \mathbf{A}_n \quad (3.63)$$

Ο πίνακας Jacobi που απαιτείται για την εκτέλεση του αλγορίθμου Newton που παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.1, τίθεται προσεγγιστικά ίσος με τον αντίστοιχο πίνακα του ελαστοπλαστικού τανυστή \mathcal{L}_{n+1}^{ep} , στο τέλος του χρονικού βήματος. Αφού υπολογιστούν οι τανυστές $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ και \mathbf{s}_{n+1} , ο τανυστής \mathcal{L}_{n+1}^{ep} υπολογίζεται μέσω της σχέσης (2.47).

Στη συνέχεια, κάνουμε μια σύγκριση του αλγορίθμου που παρουσιάστηκε πιο πάνω και της πρότασης [19], για την ολοκλήρωση του καταστατικού μοντέλου ΚC. Η εξίσωση (3.40) μπορεί να γραφεί

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e - \Delta\lambda \mathcal{L}_n^e : \hat{\mathbf{N}}_{n+1} + \Delta\lambda (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n^p - \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n). \quad (3.64)$$

Η αντίστοιχη έκφραση στην προσέγγιση [19] είναι

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e - \Delta\lambda \mathcal{L}_n^e : \mathbf{N}_n + \Delta\lambda (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n^p - \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n). \quad (3.65)$$

Στις εξισώσεις (3.64) και (3.65), ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e$, είναι η ελαστική πρόβλεψη και ο τελευταίος, $\Delta\lambda (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n^p - \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n)$, οφείλεται στην περιστροφή των αξόνων της ορθοτροπίας σχετικά με το συνεχές μέσο· ο δεύτερος όρος, $-\Delta\lambda \mathcal{L}^e : \mathbf{N}$, εκφράζει την “επιστροφή” στην επιφάνεια διαρροής. Όταν υπάρχει μικρή ή καθόλου κράτυνση (η επιφάνεια διαρροής διαστέλλεται λίγο ή καθόλου) και οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή των τάσεων υφίστανται ουσιαστική περιστροφή, κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, είναι πιθανόν να μην μπορεί να βρεθεί $\Delta\lambda$ με το σχήμα forward Euler (3.65), που να ικανοποιεί τον κανόνα πλαστικής διαρροής, αν το μέγεθος του $\Delta\mathbf{E}$ υπερβαίνει την παραμόρφωση διαρροής (Ortiz και Porro [23]). Για να το θέσουμε διαφορετικά, η ευθεία που βρίσκεται στη διεύθυνση \mathbf{N}_n και διέρχεται απ’ το σημείο $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e$ στο χώρο των τάσεων, δεν τέμνει την επιφάνεια διαρροής. Το πλεονέκτημα της νέας προσέγγισης είναι ότι η “επιστροφή” στην επιφάνεια διαρροής γίνεται στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$ με αποτέλεσμα η τομή με την επιφάνεια διαρροής να είναι πάντοτε εφικτή, κάτι που επιτρέπει τη χρήση μεγάλων $\Delta\mathbf{E}$.

3.2.1. Το πρόβλημα της επίπεδης έντασης.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την υλοποίηση του αλγορίθμου ολοκλήρωσης, που παρουσιάστηκε πιο πάνω, στο πρόβλημα της επίπεδης έντασης. Η υπόθεση της επίπεδης εντατικής κατάστασης αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση για προβλήματα σε σώματα με ομοιόμορφο, λεπτό (σχετικά με τις άλλες δυο διαστάσεις) πάχος, στα οποία η φόρτιση περιορίζεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στη διεύθυνση του πάχους. Σ’ αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιείται η εξίσωση (3.9) για τον προσδιορισμό της λύσης στο επίπεδο της έντασης και η κάθετη σε αυτό ορθή συνιστώσα της παραμόρφωσης, την οποία θεωρούμε ομοιόμορφη, υπολογίζεται εντός του καταστατικού μοντέλου μέσω της συνθήκης μηδενισμού της αντίστοιχης συνιστώσας της έντασης, κάτι που αποτελεί το λόγο για τον οποίο το συγκεκριμένο πρόβλημα χρήζει ξεχωριστής αντιμετώπισης.

Η μορφή του τανυστή των τάσεων, θεωρώντας ότι το επίπεδο που ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_1 και \mathbf{e}_2 του σταθερού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων είναι το επίπεδο της έντασης, είναι

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad (3.66)$$

[υπενθυμίζουμε τη σύμβαση ότι οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τιμές 1 ή 2 (όχι 3)] ενώ η μορφή του πεδίου των μετατοπίσεων είναι

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = u_i(\mathbf{X}) \mathbf{e}_i \quad \text{με} \quad u_1 = u_1(X_1, X_2), \quad u_2 = u_2(X_1, X_2) \quad \text{και} \quad u_3 = u_3(X_3). \quad (3.67)$$

Απ’ την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \bar{\mathbf{F}} + \Delta F_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad \text{με} \quad \Delta \bar{\mathbf{F}} = \Delta F_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta. \quad (3.68)$$

Η μορφή των τανυστών της δεξιάς πολική παραγοντοποίησης του $\Delta \mathbf{F}$ είναι

$$\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \text{με} \quad \bar{\mathbf{R}} = R_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \quad \text{και} \quad \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}} + \Delta F_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \text{με} \quad \bar{\mathbf{U}} = U_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad (3.69)$$

ενώ η μορφή του λογαριθμικού τανυστή των παραμορφώσεων είναι

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \bar{\mathbf{E}} + \Delta E_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad \text{με} \quad \Delta \bar{\mathbf{E}} = \Delta E_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta. \quad (3.70)$$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το διαφορετικό στοιχείο του συγκεκριμένου προβλήματος είναι ότι η τιμή του ΔF_{33} , και συνεπώς και του ΔE_{33} , είναι άγνωστη κατά την έναρξη της διαδικασίας ολοκλήρωσης του καταστατικού μοντέλου. Το μέγεθος ΔE_{33} υπολογίζεται μέσω της συνθήκης

$$(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})_{33} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1})_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (3.71)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (3.70), η (3.40) γίνεται

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^e + \Delta E_{33} \mathcal{L}_n^e : \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 - \mathcal{L}_n^e : \Delta \mathbf{E}^p + \Delta \lambda (\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n^p - \boldsymbol{\Omega}_n^p \cdot \boldsymbol{\sigma}_n), \quad (3.72)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^e = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathcal{L}_n^e : \Delta \bar{\mathbf{E}}$ είναι το γνωστό -στην αρχή του βήματος- μέρος της ελαστικής πρόβλεψης. Εφαρμόζοντας τη συνθήκη (3.71) στη σχέση (3.72) και εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στη σχέση υπολογισμού του ΔE_{33} :

$$\Delta E_{33} (\Delta \mathbf{E}^p) = \frac{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 : \mathcal{L}_n^e : (\Delta \mathbf{E}^p - \Delta \bar{\mathbf{E}})}{\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 : \mathcal{L}_n^e : \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3}. \quad (3.73)$$

Η τελευταία εξίσωση μας πληροφορεί ότι το ΔE_{33} εξαρτάται μόνο απ' το $\Delta \mathbf{E}^p$. Το σκεπτικό αντιμετώπισης του προβλήματος από εδώ και πέρα, είναι ίδιο με αυτό που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, δηλαδή και πάλι αντιμετωπίζουμε ως βασικές μεταβλητές τις $\Delta \lambda$ και $\Delta \mathbf{E}^p$ και ως βασικές εξισώσεις τις (3.44) και (3.45), με δυο διαφορές: πρώτον, το σύστημα των εξισώσεων εμπλουτίζεται με μια επιπλέον εξίσωση, την (3.73), και μια επιπλέον μεταβλητή, την ΔE_{33} , και δεύτερον, η εξίσωση (3.57) γίνεται

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial (\Delta E_{33})} \frac{\partial (\Delta E_{33})}{\partial (\Delta \mathbf{E}^p)} = -\mathcal{L}_n^e + \mathcal{L}_n^e : \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \frac{1}{(\mathcal{L}_n^e)_{3333}} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 : \mathcal{L}_n^e. \quad (3.74)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Διαδικασίες Υπολογισμού των Τανυστών Eshelby.

Πιο κάτω, παραθέτουμε δυο τρόπους υπολογισμού των τανυστών Eshelby \mathbf{S} και $\mathbf{\Pi}$, και του τανυστή \mathbf{Q} .

1^{ος} Τρόπος (Willis [31], [33]).

Έστω $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{-1}$, ο ελαστικός τανυστής ενδοτικότητας του μεταλλικού φορέα. Ο Willis ([31], [33]) απέδειξε ότι οι τανυστές $\mathbf{P} = \mathbf{S} : \mathcal{M}$ και $\mathbf{R} = \mathbf{\Pi} : \mathcal{M}$ μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi w_1 w_2} \int_{|\xi|=1} \mathbf{H}(\xi) \frac{1}{|\mathbf{Z}^{-1} \cdot \xi|^3} dS(\xi), \quad \mathbf{R} = \frac{1}{4\pi w_1 w_2} \int_{|\xi|=1} \hat{\mathbf{H}}(\xi) \frac{1}{|\mathbf{Z}^{-1} \cdot \xi|^3} dS(\xi) \quad (3.75)$$

και συνεπώς

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi w_1 w_2} \int_{|\xi|=1} \mathbf{H}(\xi) : \mathcal{L} \frac{1}{|\mathbf{Z}^{-1} \cdot \xi|^3} dS(\xi), \quad \mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi w_1 w_2} \int_{|\xi|=1} \hat{\mathbf{H}}(\xi) : \mathcal{L} \frac{1}{|\mathbf{Z}^{-1} \cdot \xi|^3} dS(\xi) \quad (3.76)$$

όπου

$$\mathbf{Z} = w_1 \mathbf{n}^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} + w_2 \mathbf{n}^{(2)} \mathbf{n}^{(2)} + \mathbf{n}^{(3)} \mathbf{n}^{(3)} \quad (3.77)$$

και ξ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει τον προσανατολισμό της απειροστής επιφάνειας dS . Για ισότροπα υλικά ($\mathcal{L} = 2\mu\mathbf{K} + 3\kappa\mathbf{J}$) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}(\xi) : \mathcal{L})_{ijkl}(\xi, \nu) &= \frac{1}{2|\xi|^2} (\delta_{ik} \xi_j \xi_l + \delta_{jk} \xi_i \xi_l + \delta_{il} \xi_j \xi_k + \delta_{jl} \xi_i \xi_k) - \\ &\quad - \frac{1}{|\xi|^4} \frac{1}{1-\nu} \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l + \frac{1}{|\xi|^2} \frac{\nu}{1-\nu} \xi_i \xi_j \delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.78)$$

και

$$(\hat{\mathbf{H}}(\xi) : \mathcal{L})_{ijkl}(\xi, \nu) = \frac{1}{2|\xi|^2} (\delta_{ik} \xi_j \xi_l - \delta_{jk} \xi_i \xi_l + \delta_{il} \xi_j \xi_k - \delta_{jl} \xi_i \xi_k) \quad (3.79)$$

Οι Kailasam, Aravas και Castañeda [19] απέδειξαν ότι ο τανυστής \mathbf{Q} μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\mathbf{Q} = \frac{\mu}{4\pi w_1 w_2} \int_{|\xi|=1} \mathbf{E}(\xi) \frac{1}{|\mathbf{Z}^{-1} \cdot \xi|^3} dS(\xi), \quad (3.80)$$

όπου

$$E_{ijkl}(\xi, \nu) = \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{|\xi|^2}(\delta_{ik}\xi_j\xi_l + \delta_{jk}\xi_i\xi_l + \delta_{il}\xi_j\xi_k + \delta_{jl}\xi_i\xi_k) + \frac{2\nu}{1-\nu} \left[\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{|\xi|^2}(\delta_{ij}\xi_k\xi_l + \delta_{kl}\xi_i\xi_j) \right] + \frac{2}{|\xi|^4} \frac{1}{1-\nu} \xi_i\xi_j\xi_k\xi_l \quad (3.81)$$

Οι πιο πάνω σχέσεις προσδιορίζουν τους τανυστές \mathbf{S} , $\mathbf{\Pi}$ και \mathbf{Q} . Και στις τρεις περιπτώσεις εμφανίζονται ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \int_{|\xi|=1} A(\xi) dS(\xi) \quad (3.82)$$

ή, ισοδύναμα, σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$I = \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} A(\xi(\theta, \phi)) \sin \phi d\theta d\phi \quad (3.83)$$

όπου $\xi = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$. Κάνοντας τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων, $\theta(r) = (r+1)\pi$ και $\phi(s) = (s+1)\pi/2$, το ολοκλήρωμα (3.83) γίνεται

$$I = \frac{\pi^2}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A(\xi(\theta(r), \phi(s))) \sin \phi(s) dr ds \quad (3.84)$$

και μπορεί να υπολογιστεί με την αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης Gauss, απ' τη σχέση

$$I \cong \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^{NG} \sum_{j=1}^{NG} W_i W_j A(\xi(\theta_i, \phi_j)) \sin \phi_j \quad (3.85)$$

όπου $\theta_i = \theta(r_i)$ και $\phi_i = \phi(s_i)$, με (r_i, s_i) να αποτελούν τους σταθμούς ολοκλήρωσης Gauss, W_i και W_j είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές βάρους και NG είναι ο αριθμός των σταθμών ολοκλήρωσης.

Ένα σημαντικό πρόβλημα αυτής της υπολογιστικής διαδικασίας ανακύπτει όταν ένα τουλάχιστον απ' τα μεγέθη w_1 και w_2 είναι “αρκετά” διαφορετικό της μονάδας. Σ' αυτή την περίπτωση ο αριθμός των απαιτούμενων σημείων (ή σταθμών) ολοκλήρωσης Gauss, για “ανεκτή” ακρίβεια υπολογισμών γίνεται εξαιρετικά μεγάλος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου $w_1 = 0.2$ και $w_2 = 5$, για τον υπολογισμό των στοιχείων του \mathbf{S} με σφάλμα μικρότερο του 1% απαιτούνται $NG = 257$ σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε κάθε κατεύθυνση. Το μέγεθος του προβλήματος γίνεται φανερό αν αναλογιστούμε ότι αυτοί οι υπολογισμοί γίνονται σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης Gauss του κάθε στοιχείου, του υπολογιστικού πλέγματος των πεπερασμένων στοιχείων.

Το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζεται όταν ο υπολογισμός των τανυστών \mathbf{S} και $\mathbf{\Pi}$ γίνεται με έναν διαφορετικό τρόπο· ο τρόπος αυτός παρουσιάζεται στη συνέχεια.

2^{ος} Τρόπος (Eshelby [9], [10]).

Σ' αυτή τη διαδικασία χρησιμοποιούνται εκφράσεις για τα στοιχεία των τανυστών \mathbf{S} και $\mathbf{\Pi}$ σχετικά με ένα σύστημα συντεταγμένων που ταυτίζεται με τους άξονες του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς (Eshelby [9], [10]). Απαιτείται ο αριθμητικός υπολογισμός μόνο ελλειπτικών ολοκληρωμάτων, και ως αποτέλεσμα παίρνουμε τα στοιχεία S'_{ijkl} και Π'_{ijkl} (ως προς σύστημα του οποίου οι άξονες ταυτίζονται με τις κατευθύνσεις $\mathbf{n}^{(i)}$). Τα στοιχεία S_{ijkl} και Π_{ijkl} , ως προς το σταθερό σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, υπολογίζονται απ' τα S'_{ijkl} και Π'_{ijkl} αντίστοιχα, μέσω γνωστών σχέσεων μετασχηματισμού.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τις σχέσεις υπολογισμού των εν λόγω συνιστωσών των τανυστών \mathbf{S} και $\mathbf{\Pi}$, καθώς επίσης και των αντίστοιχων συνιστωσών του τανυστή \mathbf{Q} . Τονίζουμε ιδιαίτερα το γεγονός ότι η αρίθμηση των αξόνων γίνεται έτσι ώστε $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, όπου $a_1 = a_3 / w_1$, $a_2 = a_3 / w_2$ και $a_3 = 1$, διότι μόνο γι' αυτή τη διάταξη ισχύουν. Για απλοποίηση των συμβολισμών, αφαιρούμε τον τόνο απ' τα στοιχεία και ορίζουμε $a \equiv a_1$, $b \equiv a_2$ και $c \equiv a_3$. Επομένως, στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $a \geq b \geq c$.

Τα Στοιχεία του \mathbf{S} [Συμμετρίες: $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$]:

$$S_{1111} = Pa^2 I_{11} + R I_1 \quad (3.86)$$

$$S_{2222} = Pb^2 I_{22} + R I_2 \quad (3.87)$$

$$S_{3333} = Pc^2 I_{33} + R I_3 \quad (3.88)$$

$$S_{1122} = Pb^2 I_{12} - R I_1 \quad (3.89)$$

$$S_{1133} = Pc^2 I_{13} - R I_1 \quad (3.90)$$

$$S_{2211} = Pa^2 I_{12} - R I_2 \quad (3.91)$$

$$S_{2233} = Pc^2 I_{23} - R I_2 \quad (3.92)$$

$$S_{3311} = Pa^2 I_{13} - R I_3 \quad (3.93)$$

$$S_{3322} = Pb^2 I_{23} - R I_3 \quad (3.94)$$

$$S_{1212} = \frac{P}{2}(a^2 + b^2)I_{12} + \frac{R}{2}(I_1 + I_2) \quad (3.95)$$

$$S_{1313} = \frac{P}{2}(a^2 + c^2)I_{13} + \frac{R}{2}(I_1 + I_3) \quad (3.96)$$

$$S_{2323} = \frac{P}{2}(b^2 + c^2)I_{23} + \frac{R}{2}(I_2 + I_3) \quad (3.97)$$

όπου

$$P = \frac{3}{8\pi(1-\nu)}, \quad R = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}. \quad (3.98)$$

Τα Στοιχεία του Π [Συμμετρίες και Αντισυμμετρίες: $\Pi_{ijkl} = \Pi_{jikl} = -\Pi_{jilk}$]:

$$\Pi_{2121} = \frac{I_1 - I_2}{8\pi}, \quad (3.99)$$

$$\Pi_{3131} = \frac{I_1 - I_3}{8\pi}. \quad (3.100)$$

Τα συμμετρικά και αντισυμμετρικά στοιχεία με τα Π_{2121} και Π_{3131} , υπολογίζονται εύκολα με χρήση των σχέσεων $\Pi_{ijkl} = \Pi_{jikl} = -\Pi_{jilk}$. Τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν.

Τα Στοιχεία του Q = L:(I-S) [Συμμετρίες: $Q_{ijkl} = Q_{jikl} = Q_{ijlk}$ και $Q_{ijkl} = Q_{klij}$]:

$$Q_{1111} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(4\pi - \frac{1}{2}I_1 - \frac{3a^2}{2}I_{11} \right) \quad (3.101)$$

$$Q_{2222} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(4\pi - \frac{1}{2}I_2 - \frac{3b^2}{2}I_{22} \right) \quad (3.102)$$

$$Q_{3333} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(4\pi - \frac{1}{2}I_3 - \frac{3c^2}{2}I_{33} \right) \quad (3.103)$$

$$Q_{1122} = \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \left[16\pi\nu + (1-4\nu)(I_1 + I_2) - 3(a^2 + b^2)I_{12} \right] \quad (3.104)$$

$$Q_{1133} = \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \left[16\pi\nu + (1-4\nu)(I_1 + I_3) - 3(a^2 + c^2)I_{13} \right] \quad (3.105)$$

$$Q_{2233} = \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \left[16\pi\nu + (1-4\nu)(I_2 + I_3) - 3(b^2 + c^2)I_{23} \right] \quad (3.106)$$

$$Q_{1212} = \mu - \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(I_1 + I_2) + 3(a^2 + b^2)I_{12} \right] \quad (3.107)$$

$$Q_{1313} = \mu - \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(I_1 + I_3) + 3(a^2 + c^2)I_{13} \right] \quad (3.108)$$

$$Q_{2323} = \mu - \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(I_2 + I_3) + 3(b^2 + c^2)I_{23} \right] \quad (3.109)$$

Στις τελευταίες σχέσεις, με μ και ν συμβολίζουμε αντίστοιχα, το μέτρο διάτμησης και το λόγο Poisson του μεταλλικού φορέα. Οι συντελεστές "I", που εμφανίζονται σε όλες τις πιο πάνω σχέσεις, εξαρτώνται απ' τη "συγκεκριμένη" διάταξη των a , b και c . Συγκεκριμένα:

- Για $a > b > c$:

$$I_1 = \frac{4\pi abc}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)^{1/2}} (F - E) \quad (3.110)$$

$$I_3 = \frac{4\pi abc}{(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)^{1/2}} \left[\frac{b(a^2 - c^2)^{1/2}}{ac} - E \right] \quad (3.111)$$

$$I_2 = 4\pi - I_1 - I_3 \quad (3.112)$$

$$I_{12} = \frac{I_2 - I_1}{3(a^2 - b^2)}, \quad I_{13} = \frac{I_3 - I_1}{3(a^2 - c^2)}, \quad I_{23} = \frac{I_3 - I_2}{3(b^2 - c^2)} \quad (3.113)$$

$$I_{11} = \frac{4\pi}{3a^2} - I_{12} - I_{13}, \quad I_{22} = \frac{4\pi}{3b^2} - I_{12} - I_{23}, \quad I_{33} = \frac{4\pi}{3c^2} - I_{13} - I_{23}. \quad (3.114)$$

- Για $a = b > c$:

$$I_1 = I_2 = \frac{2\pi a^2 c}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \left[\cos^{-1}\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{c}{a} \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^{1/2} \right] \quad (3.115)$$

$$I_3 = 4\pi - 2I_1 \quad (3.116)$$

$$I_{13} = \frac{I_3 - I_1}{3(a^2 - c^2)}, \quad I_{23} = I_{13}, \quad I_{12} = \frac{\pi}{3a^2} - \frac{I_{13}}{4} \quad (3.117)$$

$$I_{11} = 3I_{12}, \quad I_{22} = I_{11}, \quad I_{33} = \frac{4\pi}{3c^2} - I_{13} - I_{23}. \quad (3.118)$$

- Για $a > b = c$:

$$I_2 = I_3 = \frac{2\pi ac^2}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \left[\frac{a}{c} \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)^{1/2} - \cosh^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \right], \quad I_1 = 4\pi - 2I_2 \quad (3.119)$$

$$I_{12} = \frac{I_2 - I_1}{3(a^2 - b^2)}, \quad I_{13} = I_{12}, \quad I_{23} = \frac{\pi^2}{3b^2} - \frac{I_{12}}{4} \quad (3.120)$$

$$I_{11} = \frac{4\pi}{3a^2} - I_{12} - I_{13}, \quad I_{22} = 3I_{23}, \quad I_{33} = I_{22}. \quad (3.121)$$

▪ Για $a = b = c$:

$$I_{11} = \frac{4\pi}{3a^2} - I_{12} - I_{13}, \quad I_{22} = 3I_{23}, \quad I_{33} = I_{22}, \quad (3.122)$$

όπου

$$E(\theta, k) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \, d\phi, \quad F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (3.123)$$

είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα 1^{ου} και 2^{ου} είδους, με

$$\theta = \sin^{-1} \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{(a^2 - c^2)^{1/2}}. \quad (3.124)$$



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις εφαρμογές που εκτελέσαμε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου ασχολούμαστε με τον έλεγχο των προβλέψεων του ανισότροπου μοντέλου KC στο πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού. Οι σχετικοί υπολογισμοί εκτελέστηκαν μέσω του προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα χρήσης ενός καταστατικού μοντέλου με τη μορφή “υποπρογράμματος χρήστη” (user subroutine) UMAT. Το υποπρόγραμμα UMAT που χρησιμοποιήθηκε σ' αυτούς τους υπολογισμούς, αποτελεί ουσιαστικά την κωδικοποιημένη (σε Fortran) έκφραση του αλγορίθμου που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.2.1, για την περίπτωση των αξονοσυμμετρικών προβλημάτων. Ο πίνακας Jacobi, που απαιτείται για την προσέγγιση της λύσης στον αλγόριθμο Newton (ενότητα 3.1), προσεγγίζεται με τον πίνακα του τανυστή \mathcal{L}^{ep} [σχέση (2.46)]. Ο έλεγχος αναφέρεται στη σύγκριση των προβλέψεων του μοντέλου με τα αριθμητικά αποτελέσματα απ' τη “δοκιμασία της μοναδιαίας κυψελίδας” (unit cell test). Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίστηκε επίσης μέσω του ABAQUS.

Για λόγους σύγκρισης, εκτελέσαμε του ίδιους υπολογισμούς μέσω του γνωστού μοντέλου Gurson [13], το οποίο αγνοεί τις αλλαγές που μπορεί να συμβαίνουν στη μορφή και τον προσανατολισμό των πόρων και κατ' επέκταση, τις επιπτώσεις τους στην απόκριση του υλικού. Οι μόνες καταστατικές μεταβλητές σε αυτό το μοντέλο είναι το πορώδες f και η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\epsilon}^p$, και οι εξισώσεις που καθορίζουν την εξέλιξή τους είναι ίδιες με τις αντίστοιχες του μοντέλου KC. Συνεπώς, πρόκειται για ένα ισότροπο μοντέλο. Η συνάρτηση πλαστικής διαρροής του μοντέλου Gurson είναι

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p, f) = \left[\frac{\sigma_e}{\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)} \right]^2 + 2f \text{Cosh} \left[\frac{3p}{2\sigma_y(\bar{\epsilon}^p)} \right] - (1 + f^2) = 0, \quad (4.1)$$

όπου $\sigma_e = \sqrt{3\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d} / 2$ είναι η ισοδύναμη τάση κατά von Mises, $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - p\boldsymbol{\delta}$ είναι το αποκλίνων και $p = \sigma_{kk} / 3$ το υδροστατικό μέρος του $\boldsymbol{\sigma}$. Η καταστατική εξίσωση για το πλαστικό τμήμα της απόκριση προκύπτει με χρήση του κανόνα της καθετότητας, ενώ η εξίσωση για το ελαστικό τμήμα προκύπτει απ' την αντίστοιχη σχέση που χρησιμοποιείται στο μοντέλο

KC, μέσω της αντικατάστασης $w_1 = w_2 = 1$. Το μοντέλο Gurson είναι ενσωματωμένο στο περιβάλλον του ABAQUS.

Θεωρήσαμε ότι το υλικό του μεταλλικού φορέα, με μέτρο ελαστικότητας E και λόγο Poisson ν , υφίσταται ισότροπη σκλήρυνση με

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = \sigma_0 \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_0} \right)^{1/n} \quad (4.2)$$

όπου σ_0 είναι το αρχικό όριο διαρροής σε εφελκυσμό, $n \geq 1$ είναι ο εκθέτης σκλήρυνσης και $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$. Στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $E = 300\sigma_0$ και $\nu = 0.3$. Τέλος, υποθέσαμε ότι αρχικά οι πόροι έχουν σφαιρικό σχήμα και κατανέμονται ομοιόμορφα στην έκταση του δοκιμίου - το πορώδες δοκίμιο, δηλαδή, είναι αρχικά ισότροπο - και ότι το αρχικό πορώδες είναι $f_0 = 0.04$.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στη μελέτη της αστάθειας ή αστοχίας, με το σχηματισμό “λαιμού” σε μια στενή ζώνη (local necking), και την κατασκευή των σχετικών “διαγραμμάτων ορίων διαμόρφωσης” (forming limit diagrams) πορώδων μεταλλικών ελασμάτων, τα οποία παραμορφώνονται σε συνθήκες επίπεδης εντατικής καταστάσεως, υπό την επιβολή ανάλογων ορθών παραμορφώσεων σε δυο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις στο επίπεδο της έντασης. Η ανάλυση που ακολουθήσαμε βασίζεται στη θεώρηση που προτάθηκε απ’ τους Marciniak-Kuczynski [20], βάση της οποίας υποτίθεται η ύπαρξη μιας ομογενούς και ομοιόμορφης ατέλειας στην κατάσταση αναφοράς του –κατά τα άλλα- ομογενούς και ομοιόμορφου ελάσματος και αναζητούνται οι συνθήκες υπό τις οποίες η παραμόρφωση συγκεντρώνεται ή εντοπίζεται (localization of deformation) στην περιοχή της ατέλειας. Υποτίθεται επίσης ότι η απόκριση του ελάσματος (εντός και εκτός της ατέλειας) διατηρεί τον ομοιόμορφο χαρακτήρα της καθ’ όλη τη διάρκεια της παραμορφώσεως, και λαμβάνει χώρα σε κατάσταση επίπεδης εντάσεως.

Θεωρήσαμε μια αρχική ατέλεια γεωμετρικής φύσεως και συγκεκριμένα μια ανομοιομορφία στο πάχος του ελάσματος. Θεωρήσαμε επίσης ότι η καταστατική συμπεριφορά του πορώδους υλικού περιγράφεται απ’ το ανισότροπο καταστατικό μοντέλο KC και ότι το υλικό του μεταλλικού φορέα υφίσταται ισότροπη σκλήρυνση με βάση το νόμο (4.2). Οι τιμές για τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίδιες με αυτές της προηγούμενης εφαρμογής, όπως επίσης και η αρχική τιμή του πορώδους. Στην ενότητα 4.2.1, παρουσιάζουμε λεπτομερώς την ανάλυση που οδηγεί στον προσδιορισμό των ορίων διαμορφωσιμότητας, και στην ενότητα 4.2.2, παρουσιάζουμε τα σχετικά αριθμητικά αποτελέσματα.

4.1. Έλεγχος των προβλέψεων του μοντέλου Kailasam-Castañeda στο πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού.

Θεωρούμε το πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού κυλινδρικού, πορώδους, μεταλλικού δοκιμίου, με βασικό στόχο τον έλεγχο των προβλέψεων του ανισότροπου καταστατικού μοντέλου KC σχετικά με την εξέλιξη της μικροδομής και τις επιπτώσεις της στην απόκριση του υλικού. Υποθέτουμε ότι οι πόροι έχουν αρχικά σφαιρικό σχήμα και κατανέμονται τυχαία στον ελαστοπλαστικό μεταλλικό φορέα. Λόγω της αξονικής συμμετρίας του προβλήματος, το μοντέλο προβλέπει την εξέλιξη του σχήματος των πόρων σε αξονοσυμμετρικό ελλειψοειδές, με άξονα συμμετρίας (μεγάλος άξονας) στη διεύθυνση της φόρτισης. Ο προσανατολισμός των πόρων παραμένει σταθερός κατά τη διάρκεια της παραμορφώσεως και θεωρούμε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}^{(1)}$ του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς βρίσκεται στη διεύθυνση του άξονα φόρτισης. Ως αποτέλεσμα, το υλικό του πορώδους μετάλλου θα είναι συνεχώς, εγκαρσίως -ως προς τη διεύθυνση $\mathbf{n}^{(1)}$ - ισότροπο. Οι εσωτερικές μεταβλητές που χαρακτηρίζουν την κατάσταση της μικροδομής στο μοντέλο, είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\epsilon}^p$, το πορώδες f και ο λόγος των πλευρών του αντιπροσωπευτικού ελλειψοειδούς $w_1 = a_3/a_1$, όπου a_1 και a_3 είναι τα ημιμήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα, αντίστοιχα ($w_2 = a_3/a_2 = 1$, διότι $a_2 = a_3$).

Στα πλαίσια του μοντέλου Gurson, προβλέπεται διατήρηση της σφαιρικής μορφής των πόρων όπως επίσης και της ισότροπης κατανομής τους, κάτι που συνεπάγεται τη διατήρηση του ισοτροπικού χαρακτήρα του υλικού του πορώδους δοκιμίου¹. Οι καταστατικές μεταβλητές σ' αυτή την περίπτωση είναι η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση $\bar{\epsilon}^p$ και το πορώδες f .

Παρατηρώντας την ομοιομορφία του προβλήματος του μονοαξονικού εφελκυσμού, η ιδέα για την πραγματοποίηση του ελέγχου των προβλέψεων του μοντέλου KC είναι η προσομοίωση της τοπικής πραγματικότητας σε κάποιο σημείο (κάθε σημείο είναι κατάλληλο γι' αυτό το σκοπό) του ομογενοποιημένου μετάλλου. Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει η επίλυση του "προβλήματος της μοναδιαίας κυψελίδας" (unit cell test), δηλαδή μιας κατάλληλης περιοχής του πορώδους δοκιμίου που περικλείει έναν μόνο πόρο. Θεωρούμε ότι η μοναδιαία κυψελίδα του κυλινδρικού δοκιμίου (εξ' ορισμού, επαναλαμβανόμενη στο χώρο σχηματίζει το δοκίμιο) είναι ένα κανονικό εξαγωνικό πρίσμα με μια "κενή" περιοχή (έναν πόρο), αρχικά σφαιρικού σχήματος, στο κέντρο του. Στη συνέχεια, θεωρώντας το σχήμα της κυψελίδας κατά προσέγγιση κυλινδρικό, την υποβάλλουμε στο σύστημα φόρτισης που θα δεχόταν αν ήταν μέσα στο δοκίμιο (δεν είναι ακριβώς μονοαξονικός εφελκυσμός, διότι η περιφερειακή της επιφάνεια υπόκειται σε έναν κινηματικό περιορισμό).

Ορίζουμε το πορώδες της μοναδιαίας κυψελίδας, f^c , ως το κλάσμα του όγκου του πόρου προς τον συνολικό όγκο της κυψελίδας, και το λόγο των πλευρών του πόρου, w_1^c , ως το κλάσμα της μικρότερης προς τη μεγαλύτερη απόσταση απ' το κέντρο (ουσιαστικά, είναι ο λόγος των πλευρών του σχήματος που το ανισότροπο μοντέλο προβλέπει ότι θα είναι αξονοσυμμετρικό ελλειψοειδές). Αυτά είναι τα μεγέθη, των οποίων τις μεταβολές μας ενδιαφέρει να συγκρίνουμε με τις προβλέψεις για τις αντίστοιχες μεταβολές των καταστατικών μεταβλητών f και w_1 .

Με βάση την εικόνα που παίρνουμε απ' τα μοντέλα, το υλικό του πορώδους δοκιμίου είναι ομογενές². Επομένως, αναμένεται όλα τα πεδία να είναι ομοιόμορφα. Έτσι, υποθέτοντας ότι η

¹ Αυτές οι παραδοχές είναι θεμελιώδη χαρακτηριστικά του μοντέλου Gurson και συνεπώς ανεξάρτητα απ' το συγκεκριμένο πρόβλημα

² Αξίζει να διευκρινιστεί πάντως, ότι αν και η διαδικασία της ομογενοποίησης είναι θεμελιώδης για το μοντέλο Kailasam-Castañeda, δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο στη θεωρία που οδηγεί στο μοντέλο Gurson. Εκεί, επιχειρείται η προσομοίωση της επίδρασης στις ιδιότητες ενός ομογενούς μετάλλου, από ένα μέγεθος - το πορώδες- που αντιμετωπίζεται αμιγώς μακροσκοπικά.

φόρτιση γίνεται στην διεύθυνση X_1 , η μορφή του τανυστή κλίσης της παραμορφώσεως, του λογαριθμικού τανυστή των παραμορφώσεων και του τανυστή των τάσεων, θα είναι αντίστοιχα

$$\mathbf{F} = \lambda_a \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_r (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) = \mathbf{U} \quad (\mathbf{R} = \delta), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E} = E_a \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + E_r (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \quad \text{με} \quad E_a = \ln \lambda_a \quad \text{και} \quad E_r = \ln \lambda_r \quad (4.4)$$

και

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_a \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad (4.5)$$

όπου οι δείκτες “α” και “r” υποδηλώνουν την αξονική (η οποία συμπίπτει με τη X_1) και ακτινική διεύθυνση αντίστοιχα, ενώ τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 ορίζουν το σταθερό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο γίνονται οι μετρήσεις. Επίσης, στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^p = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

και

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}. \quad (4.7)$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις πιο πάνω σχέσεις, τον κανόνα πλαστικής διαρροής $\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{N}$ και την εξίσωση (2.40) για το $\dot{\lambda}$, προκύπτει ότι

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \frac{1}{H} (\mathbf{N} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{N} = \frac{N_{11} \dot{\sigma}_a}{H} \mathbf{N}, \quad (4.8)$$

και συνεπώς

$$\frac{d\sigma_a}{dE_a^p} = \frac{1}{N_{11}^2} H. \quad (4.9)$$

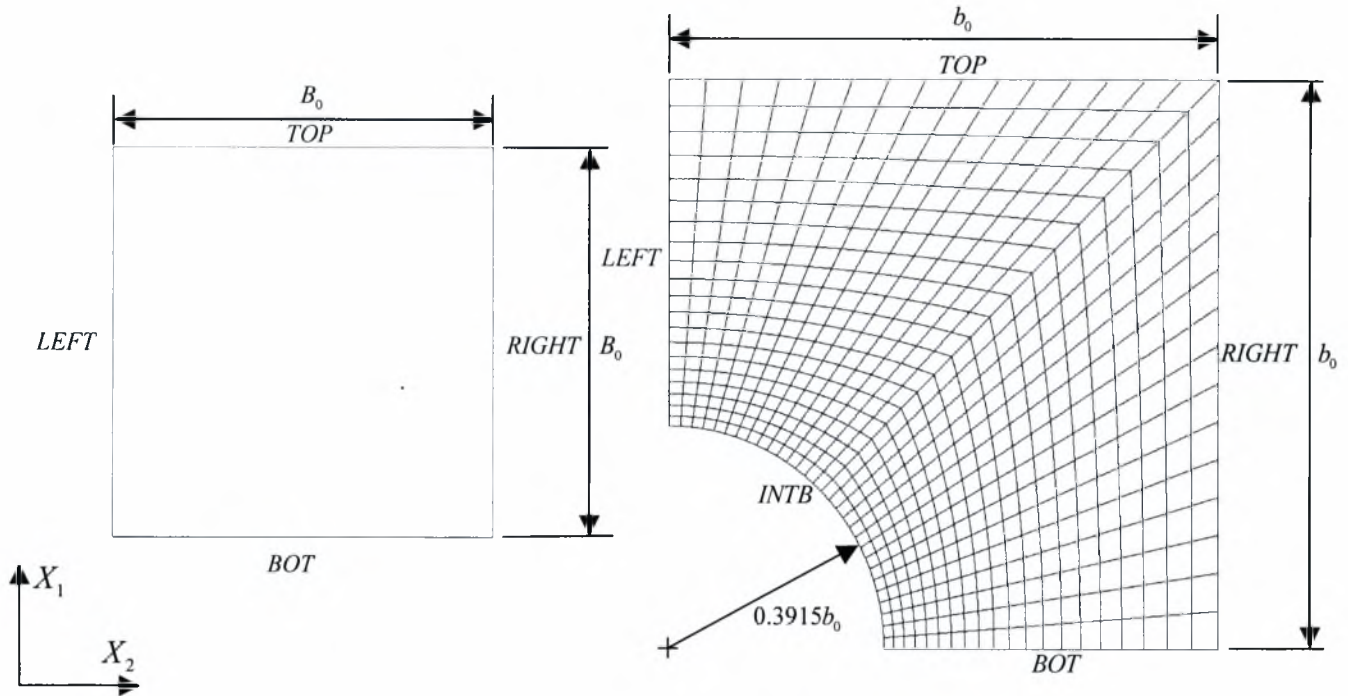
Απ’ την τελευταία σχέση προκύπτει ένα συμπέρασμα που θα φανεί χρήσιμο κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων: η κλίση του σ_a ως προς E_a^p είναι ανάλογη και ομόσημη του ρυθμού σκληρύνσεως H .

Λόγω του αξονοσυμμετρικού χαρακτήρα των προβλημάτων, όπως επίσης και της συμμετρίας τους ως προς το κεντρικό, εγκάρσιο (κάθετο στη διεύθυνση φόρτισης) επίπεδο, οι απαιτούμενοι κάναβοι είναι επίπεδοι. Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζουμε την απαραμόρφωτη μορφή τους, και επιπλέον, ορίζουμε τις διαστάσεις των δυο σωμάτων. Η ακτίνα του πόρου στην απαραμόρφωτη κυψελίδα υπολογίζεται απ’ τη συνθήκη $f_0^c = f_0 = 0.04$, και είναι $0.3915b_0$.

Για το ομογενοποιημένο δοκίμιο, λόγω της ομοιομορφίας της λύσης, χρησιμοποιείται ένα μόνο, αξονοσυμμετρικό, τετρακομβικό στοιχείο (CAX4H). Για την κυψελίδα, χρησιμοποιείται ένα πλέγμα 30×20 αξονοσυμμετρικών τετρακομβικών στοιχείων (CAX4H). Οι επιφάνειες “TOP” του ομογενοποιημένου δοκιμίου και της κυψελίδας, μετατοπίζονται κατά $0.4B_0$ και $0.4b_0$, αντίστοιχα. Η κίνηση στις επιφάνειες “LEFT” επιτρέπεται μόνο στη διεύθυνση X_1 , και στις “BOT”, μόνο στη X_2 . Η κυψελίδα υπόκειται σ’ έναν επιπλέον κινηματικό περιορισμό: το



περιφερειακό της σύνορο (“RIGHT”) μετατοπίζεται ομοιόμορφα στην διεύθυνση X_2 (η επίδραση των γειτονικών στην περιφέρειά της, κυψελίδων). Οι υπόλοιπες επιφάνειες είναι αφόρτιστες.



Σχήμα 4.1. Οι απαραμόρφωτοι κάναβοι για τα προβλήματα του ομογενοποιημένου δοκιμίου (αριστερά) και της μοναδιαίας κυψελίδας (δεξιά).

Ο υπολογισμός του μεγέθους w_f^i είναι τετριμμένος, καθώς μέρος της λύσης στο τέλος κάθε χρονικού βήματος, είναι και η γεωμετρία του σώματος [οι συντεταγμένες των κόμβων 1 και 31 αρκούν (βλέπε σχήμα 4.2)]. Επίσης τετριμμένος, για τον ίδιο λόγο, είναι ο υπολογισμός του συνολικού όγκου της κυψελίδας. Επομένως, για τον υπολογισμό του f^c , το μόνο που απαιτείται είναι ο υπολογισμός του όγκου της κενής περιοχής στο εσωτερικό της κυψελίδας. Ο υπολογισμός αυτός εκτελέστηκε θεωρώντας το ζητούμενο όγκο ως το άθροισμα των όγκων των κόλourων κώνων που προκύπτουν απ’ την περιστροφή τραπεζίων, όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα 4.2, γύρω απ’ τον άξονα X_1 (οφείλουμε την ιδέα αυτή στον Αρχιμήδη). Ο όγκος του κόλourου κώνου δίνεται απ’ τη σχέση

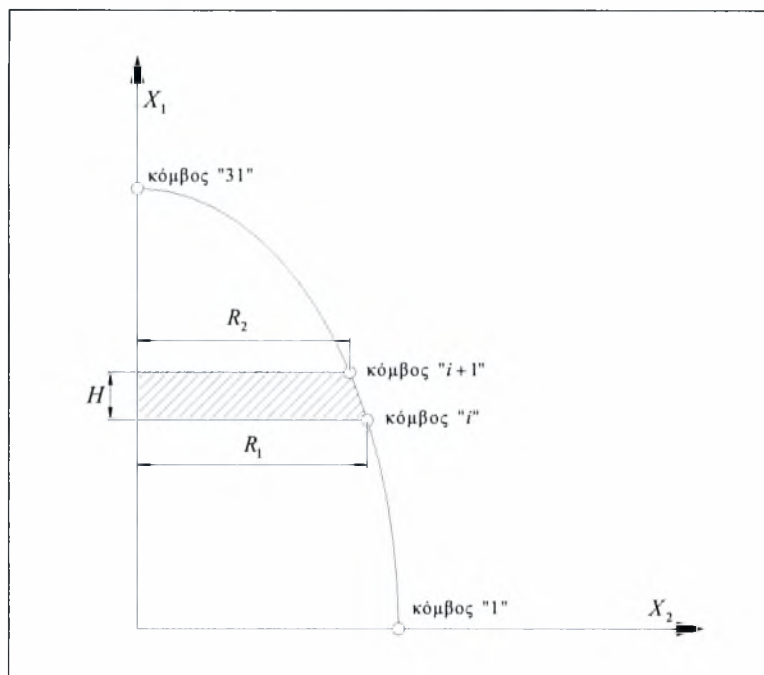
$$V^K = \pi H (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) / 3, \tag{4.10}$$

όπου R_1 και R_2 , είναι οι ακτίνες των βάσεων και H το ύψος του.

Το υλικό της κυψελίδας είναι ίδιο με το υλικό του μεταλλικού φορέα του πορώδους δοκιμίου, του οποίου η καταστατική συμπεριφορά στην πλαστική περιοχή υποθέτουμε ότι περιγράφεται απ’ το μοντέλο von Mises. Υπενθυμίζουμε το κριτήριο διαρροής κατά von Mises:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sigma_e^2 - \sigma_y^2 (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = 0, \tag{4.11}$$

όπου το όριο διαρροής σ_y δίνεται απ’ τη σχέση (4.2).



Σχήμα 4.2. Αναπαράσταση της ιδέας για τον υπολογισμό του όγκου του πόρου της μοναδιαίας κυψελίδας.

Στα σχήματα 4.3, 4.4, 4.5 και 4.6, παριστάνουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών για τις τιμές του εκθέτη σκληρύνσεως $n \rightarrow \infty$, $n=10$, $n=5$ και $n=3$, αντίστοιχα. Οι διακεκομμένες γραμμές δείχνουν την εξέλιξη μεγεθών στη μοναδιαία κυψελίδα και οι συνεχείς τις αντίστοιχες προβλέψεις των μοντέλων. Στο πρόβλημα της μοναδιαία κυψελίδας, συμβολίζουμε με σ_a τη μέση τάση που δέχεται η επιφάνεια φόρτισης, ενώ με E_a και E_r , τις παραμορφώσεις $E_a = \ln \left[(b_0 + u_1^{TOP}) / b_0 \right]$ και $E_r = \ln \left[(b_0 + u_2^{RIGHT}) / b_0 \right]$, όπου u_1^{TOP} και u_2^{RIGHT} , είναι οι μετατοπίσεις των επιφανειών TOP και RIGHT, αντίστοιχα.

Επειδή το στοιχείο που παρουσιάζει το μεγαλύτερο ενδιαφέρον για μας είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ανισότροπου μοντέλου, δηλαδή η εξέλιξη των μεταβλητών f και w_i και οι επιπτώσεις που συνεπάγεται στην απόκριση του πορώδους μετάλλου, θα εστιάσουμε την προσοχή μας στο σχήμα 4.3, δηλαδή στην περίπτωση του τέλεια πλαστικού μεταλλικού φορέα. Κλίνοντας αυτό το θέμα, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στα υπόλοιπα σχήματα (δηλαδή στην επίδραση της κράτυνσης του μεταλλικού φορέα).

Αποτελέσματα για υλικά με τέλεια πλαστικό μεταλλικό φορέα.

Τάσεις και παραμορφώσεις.

Στο σχήμα 4.3.(a), παριστάνουμε την εξέλιξη της αξονικής τάσης σ_a σε συνάρτηση με την αξονική παραμόρφωση E_a . Το σχήμα αυτό θυμίζει έντονα το “διάγραμμα $\sigma - \varepsilon$ ” ενός ομογενούς, ελαστικού, τέλεια-πλαστικού, υλικού von Mises. Η πιο οφθαλμοφανής διαφορά είναι ίσως το γεγονός ότι, και στις τρεις περιπτώσεις, η ανηγμένη τάση διαρροής είναι μικρότερη της μονάδας, κάτι που οφείλεται βεβαίως στην ύπαρξη του πορώδους.

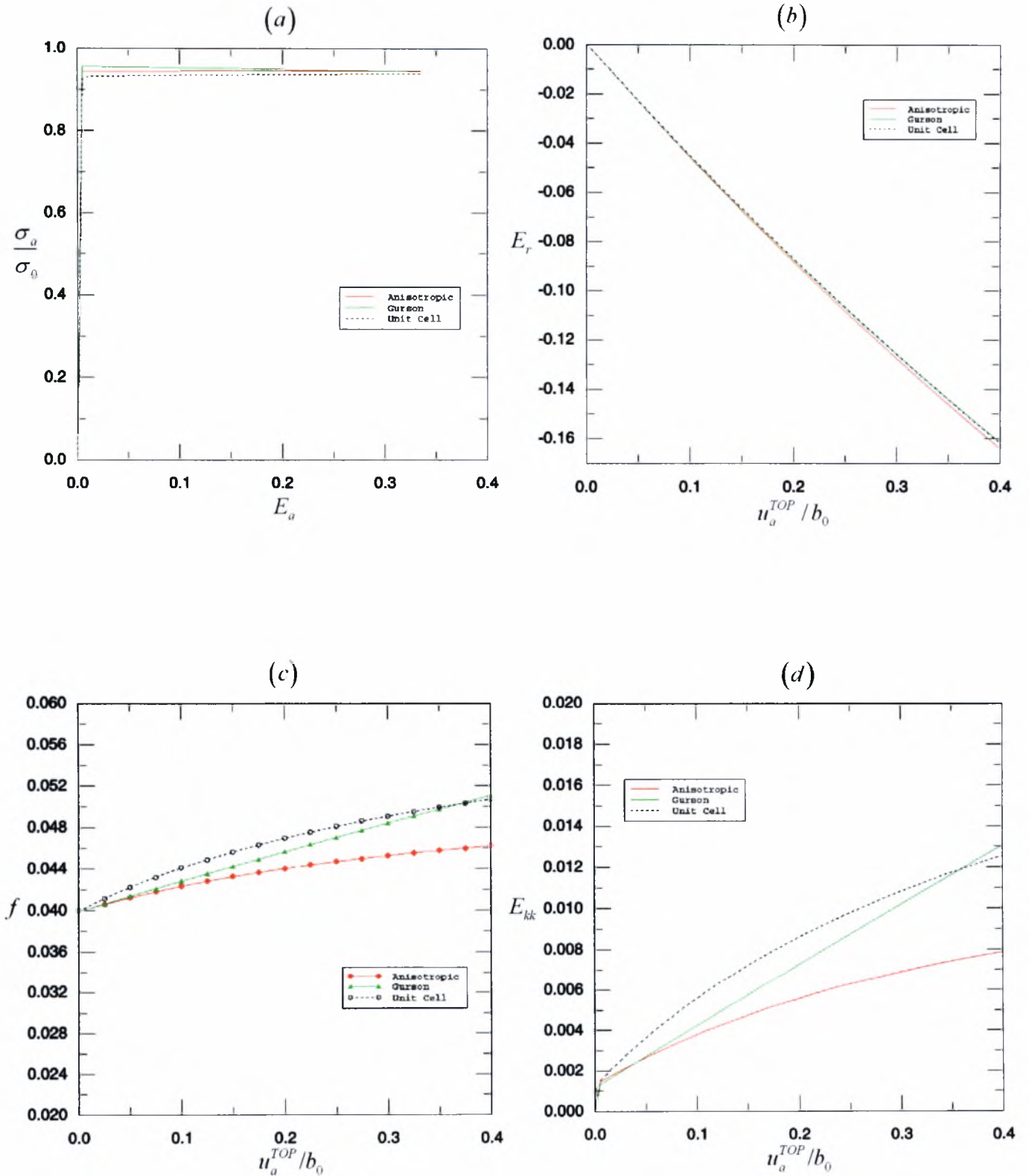
Από ποσοτικής απόψεως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι προβλέψεις των δυο μοντέλων είναι αρκετά καλές, με τις προβλέψεις του ανισότροπου μοντέλου να είναι λίγο καλύτερες. Το

σημαντικότερο συμπέρασμα, όμως, που προκύπτει απ' αυτό το διάγραμμα σχετίζεται με την κλίση που προβλέπεται για την σ_a , μετά την έναρξη της πλαστικοποίησης. Το μοντέλο Gurson προβλέπει μια συνεχή μείωση της σ_a , και συνεπώς εξασθένηση (softening) του πορώδους υλικού, κάτι που γίνεται εύκολα κατανοητό, διότι η αύξηση του πορώδους (σχήμα 4.3.c) συνεπάγεται μείωση της δυνατότητας αντίδρασης του υλικού στην εξωτερική φόρτιση. Απ' την άλλη πλευρά το μοντέλο KC προβλέπει αύξηση της σ_a και συνεπώς σκλήρυνση του πορώδους υλικού, παρά το γεγονός της αύξησης του πορώδους (σχήμα 4.3.(c)). Αυτό οφείλεται στη δυνατότητα αλλαγής της μορφής (ανισοτροπία) των πόρων, που επιτρέπεται σ' αυτό το μοντέλο. Το αποτέλεσμα είναι η σημαντική “επιμήκυνση” των πόρων στην κατεύθυνση της φόρτισης (σχήμα 4.3.e), κάτι που αποτελεί τον παράγοντα που αντιστρατεύεται την αύξηση του πορώδους, στον καθορισμό του προσήμου του H , και τελικά πετυχαίνει να επικρατεί. Ένας διαφορετικός τρόπος διατύπωσης αυτού του γεγονότος είναι ο εξής: σ' ένα επίπεδο του πορώδους δοκιμίου, κάθετο στη διεύθυνση φόρτισης, έχουμε μια συνεχή μείωση του ποσοστού της πορώδους φάσης σε συνδυασμό με μια αντίστοιχη αύξηση του ποσοστού του υλικού του μεταλλικού φορέα, και συνεπώς αύξηση της δυνατότητας αντίδρασης του δοκιμίου στην εξωτερική φόρτιση. Η αξία της ποιοτικής αυτής πληροφορίας, γίνεται εμφανής σε προβλήματα όπου το φαινόμενο της αλληλεπίδρασης μεταξύ των πόρων ασκεί ουσιαστική επίδραση στην απόκριση του υλικού. Συγκεκριμένα, σε περιπτώσεις όπου οι πόροι βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους, οι παραμορφώσεις στην ενδιάμεση περιοχή γίνονται πολύ μεγάλες [“συγκέντρωση παραμορφώσεων” (localization of deformation)] με αποτέλεσμα τη συνένωση των πόρων και κατ' επέκταση την αστάθεια του υλικού (σε μακροσκοπικό επίπεδο). Το φαινόμενο είναι εξαιρετικά δύσκολο να μοντελοποιηθεί (ειδικά στα πλαίσια ενός μοντέλου με τη γενικότητα του ομογενοποιημένου μοντέλου KC) και στην πραγματικότητα αγνοείται και απ' τα δυο μοντέλα. Παρόλα αυτά όμως, το μοντέλο KC είναι σε θέση να μας πληροφορήσει σχετικά με την πιθανότητα εμφάνισης μιας τέτοιας αστάθειας, σε αντίθεση με το μοντέλο Gurson που αδυνατεί πλήρως. Τα αποτελέσματα απ' το πρόβλημα της μοναδιαίας κυψελίδας επιβεβαιώνουν τη θετική κλίση της καμπύλης που προβλέπει το ανισότροπο μοντέλο.

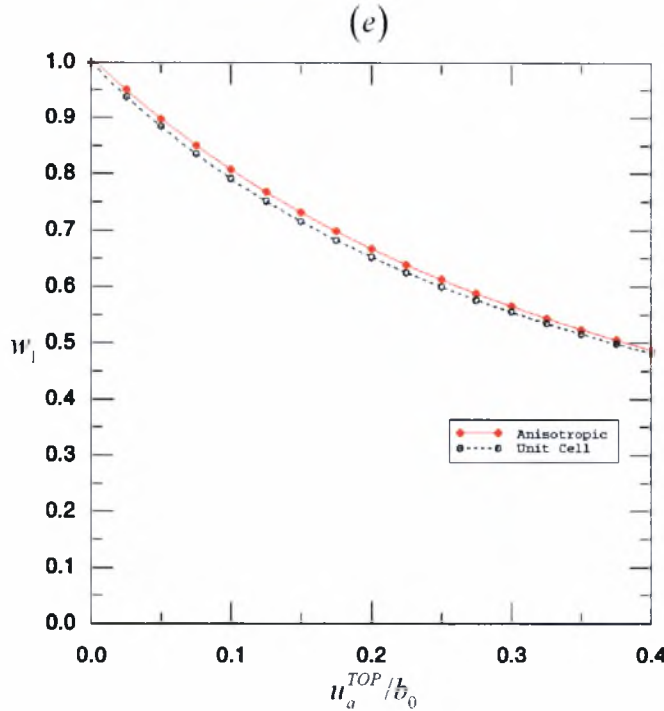
Στο σχήμα 4.3.(b), παριστάνουμε την εξέλιξη της ακτινικής λογαριθμικής παραμόρφωσης E_r σε συνάρτηση με τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_1^{TOP} . Παρατηρούμε ότι και πάλι οι προβλέψεις των μοντέλων είναι αρκετά καλές, με τις προβλέψεις του μοντέλου Gurson, αυτή τη φορά, να είναι λίγο καλύτερες. Αυτή η μικρή απόκλιση στα αποτελέσματα για την εξέλιξη της E_r είναι ικανή να εξηγήσει την παρατήρηση που ακολουθεί.

Πορώδες.

Στο σχήμα 4.3.(c), παριστάνουμε την εξέλιξη του πορώδους f σε συνάρτηση με τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_1^{TOP} . Η πρόβλεψη του πορώδους δεν μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητική για κανένα από τα δυο μοντέλα. Το ανισότροπο μοντέλο, αν και προβλέπει το μη γραμμικό χαρακτήρα της μεταβολής του πορώδους που παρατηρείται στην κυψελίδα, οι ποσοτικές αποκλίσεις των αποτελεσμάτων είναι μεγάλες. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου Gurson, αν και είναι καλύτερες απ' τις εκτιμήσεις του ανισότροπου μοντέλου, και πάλι δεν μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικές, κυρίως λόγω της πρόβλεψής ότι το πορώδες αυξάνεται με σχεδόν σταθερό ρυθμό. Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε αυτά τα αποτελέσματα.



Σχήμα 4.3. Η εξέλιξη της αξονικής τάσης σ_a ως προς την αξονική παραμόρφωση E_a (a) και η εξέλιξη της ακτινικής παραμόρφωσης E_r (b), του πορώδους f (c) και της αναλλοίωτης E_{kk} (d), ως προς τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_a^{TOP} , για τέλεια πλαστικό μεταλλικό φορέα ($n \rightarrow \infty$).



Σχήμα 4.3. Η εξέλιξη του λόγου των πλευρών w_1 ως προς τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_a^{TOP} (e), για τέλεια πλαστικό μεταλλικό φορέα ($n \rightarrow \infty$).

Όπως ειπώθηκε στην ενότητα 2.4, η εξίσωση εξέλιξης του πορώδους (2.11) προκύπτει απ' την εξίσωση της συνέχειας, θεωρώντας πλαστικά ασυμπιεστο το υλικό του μεταλλικού φορέα. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση αυτή ορίζει επίσης την εξέλιξη του πορώδους της μοναδιαίας κυψελίδας, με το \mathbf{D}^p να εκφράζει το μέσο ρυθμό παραμόρφωσης του εξωτερικού της συνόρου. Συνεπώς, η εξίσωση (3.18), δηλαδή

$$\dot{f} = (1-f)\dot{E}_{kk}^p, \quad (4.12)$$

ισχύει, εκτός απ' τα δυο μοντέλα, και για τη μοναδιαία κυψελίδα. Απ' την αναλυτική ολοκλήρωση της (4.12) από 0 έως t προκύπτει ότι

$$f = 1 - (1 - f_0)e^{-E_{kk}^p} \quad (4.13)$$

Επομένως, η εξέλιξη του E_{kk}^p καθορίζει την εξέλιξη του πορώδους. Το γεγονός ότι η μόνη ουσιαστική συνεισφορά του E_{kk}^e στο E_{kk} συμβαίνει πριν την έναρξη της πλαστικοποίησης σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το μέγεθος αυτής της συνεισφοράς είναι σχεδόν ίδιο στις τρεις περιπτώσεις (σχήμα 4.3.(d)), μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι οι αποκλίσεις των αποτελεσμάτων του σχήματος 4.3.(d) ευθύνονται για τις αντίστοιχες αποκλίσεις του σχήματος 4.3.(c). Επιπλέον, επειδή $E_{kk} = E_a + 2E_r$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι αποκλίσεις που παρατηρήσαμε στο σχήμα 4.3.(b) για το E_r ευθύνονται για τις αποκλίσεις στις προβλέψεις για το πορώδες (η παραμόρφωση E_a είναι η συνοριακή συνθήκη των προβλημάτων).

Ο Λόγος των Πλευρών.

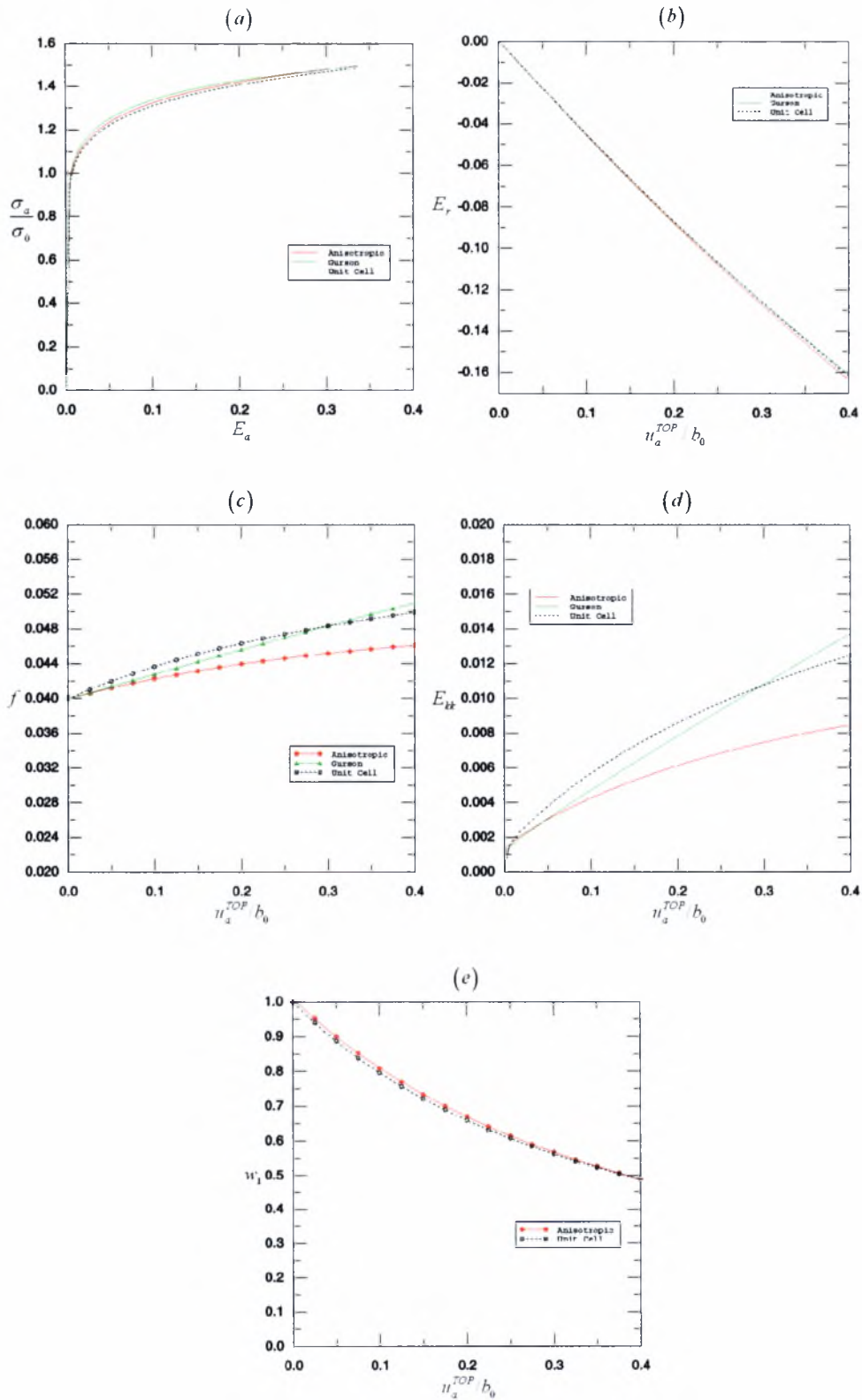
Στο σχήμα 4.3.(c), παριστάνουμε την εξέλιξη του λόγου w_1 σε συνάρτηση με τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_1^{TOP} . Η συμφωνία αυτών των αποτελεσμάτων είναι σχεδόν εντυπωσιακή, αν ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι για ο υπολογισμός αυτού του μεγέθους μέσω του μοντέλου KC προϋποθέτει την εκτίμηση της μέσης παραμόρφωσης στην πορώδη φάση, μέσω μιας πολύπλοκης διαδικασίας -της διαδικασίας ομογενοποίησης. [Υπενθυμίζουμε ότι στο μοντέλο Gurson δεν λαμβάνονται υπόψη οι αλλαγές στη μορφή των πόρων, δηλαδή $w_1 = w_2 = 1$.]

Αποτελέσματα για υλικά με κρατυνόμενο μεταλλικό φορέα.

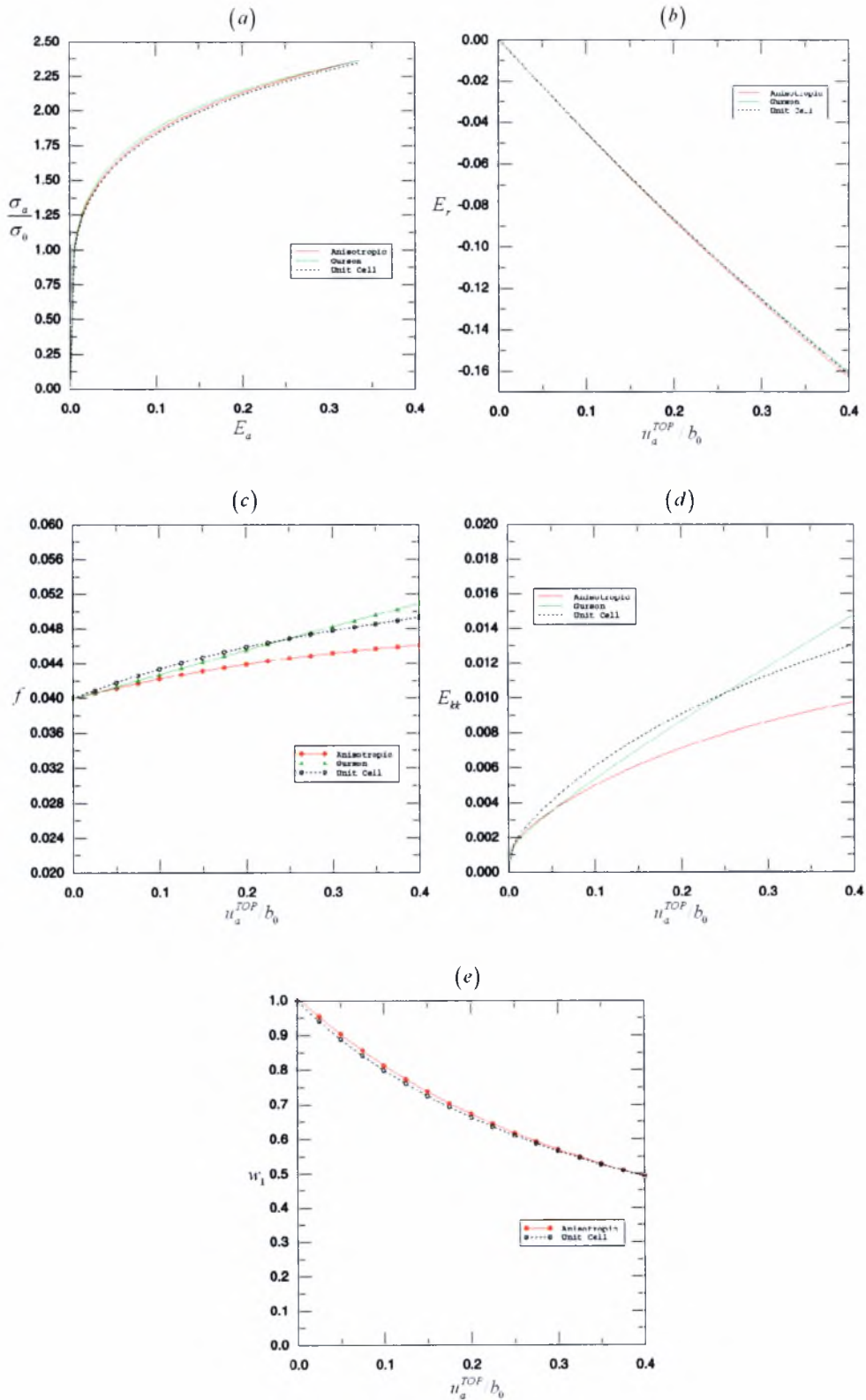
Στα σχήματα 4.4(a), 4.5(a) και 4.6(a), παρατηρούμε ότι η ποιοτική διαφορά μεταξύ των προβλέψεων των δυο μοντέλων, που παρατηρήσαμε πιο πάνω (για $n \rightarrow \infty$), δεν υφίσταται. Αυτό συμβαίνει, διότι η προβλεπόμενη σκλήρυνση του πορώδους δοκιμίου οφείλεται ουσιαστικά στην κράτυνση του μεταλλικού φορέα. Από ποσοτικής απόψεως, παρατηρούμε ότι οι προβλέψεις των δυο μοντέλων βρίσκονται σε καλή συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα στη μοναδιαία κυψελίδα.

Απ' τα σχήματα 4.3(c), 4.4(c), 4.5(c) και 4.6(c), συμπεραίνουμε ότι οι προβλέψεις των μοντέλων για το πορώδες, είναι ουσιαστικά ανεξάρτητες απ' την κράτυνση του μεταλλικού φορέα. Τα αποτελέσματα στη μοναδιαία κυψελίδα, δείχνουν μια μικρή μείωση του πορώδους, καθώς μειώνεται ο εκθέτης σκλήρυνσης n . Αυτό μπορεί να αποδοθεί στην επίδραση της κράτυνσης, στην κατανομή των παραμορφώσεων στην κυψελίδα. Συγκεκριμένα, η περιοχή που καταπονείται περισσότερο στην κυψελίδα, είναι μια στενή ζώνη στη γειτονία του συνόρου *INTB*. Η περιοχή αυτή παρουσιάζει μεγαλύτερη αντίσταση σε παραμόρφωση, με την πρόοδο της παραμόρφωσης, σε ένα κρατυνόμενο υλικό, κάτι που τείνει να "εξομαλύνει" την κατανομή των παραμορφώσεων στην κυψελίδα. Ο μηχανισμός αυτός δεν υφίσταται σε ένα τέλεια πλαστικό υλικό, κάτι που οδηγεί στη "συγκέντρωση των παραμορφώσεων" σ' αυτή την περιοχή, και κατ' επέκταση, σε μεγαλύτερη αύξηση του όγκου της κενής περιοχής.

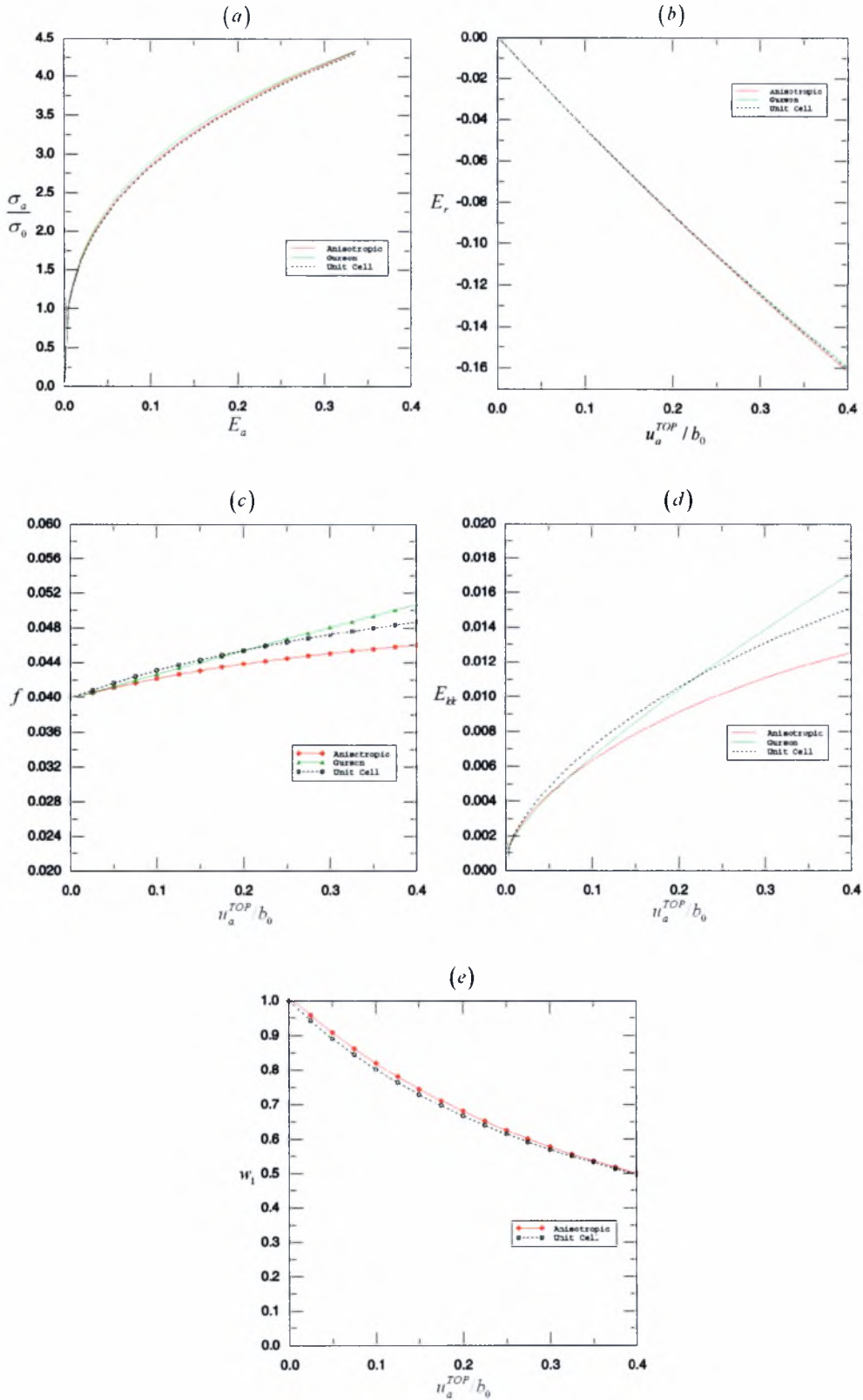
Τέλος, απ' τα σχήματα 4.3(e), 4.4(e), 4.5(e) και 4.6(e), συμπεραίνουμε ότι η εξέλιξη του λόγου των πλευρών w_1 , επηρεάζεται ελάχιστα απ' την κράτυνση του μεταλλικού φορέα, ενώ αξίζει να παρατηρηθεί η πολύ καλή συμφωνία των σχετικών προβλέψεων του ανισότροπου μοντέλου με τα αποτελέσματα στη μοναδιαία κυψελίδα.



Σχήμα 4.4. Η εξέλιξη της αξονικής τάσης σ_a ως προς την αξονική παραμόρφωση E_a (a) και η εξέλιξη της ακτινικής παραμόρφωσης E_r (b), του πορώδους f (c) της αναλλοίωτης E_{kk} (d) και του λόγου των πλευρών w_1 (e) ως προς τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_a^{TOP} , για $n=10$.



Σχήμα 4.5. Η εξέλιξη της αξονικής τάσης σ_a ως προς την αξονική παραμόρφωση E_a (a) και η εξέλιξη της ακτινικής παραμόρφωσης E_r (b), του πορώδους f (c) της αναλλοίωτης E_{kk} (d) και του λόγου των πλευρών w_1 (e) ως προς τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_a^{TOP} , για $n=5$.



Σχήμα 4.6. Η εξέλιξη της αξονικής τάσης σ_a ως προς την αξονική παραμόρφωση E_a (a) και η εξέλιξη της ακτινικής παραμόρφωσης E_r (b), του πορώδους f (c) της αναλλοίωτης E_{kk} (d) και του λόγου των πλευρών w_1 (e) ως προς τη μετατόπιση της επιφάνειας φόρτισης u_a^{TOP} , για $n=3$.

4.2. Όρια διαμορφωσιμότητας πορώδων μεταλλικών ελασμάτων.

Με τον όρο “όρια διαμορφωσιμότητας” (limits to formability) αναφερόμαστε στην “ωφέλιμη ολκιμότητα” ενός σώματος, και πιο συγκεκριμένα, στη “μέγιστη παραμόρφωση” που μπορεί να του επιβληθεί, χωρίς να προκληθεί η εμφάνιση φαινομένων αστάθειας ή αστοχίας του υλικού. Σ’ αυτή την εργασία, το ενδιαφέρον μας εστιάζεται στο είδος της αστάθειας που εμφανίζεται με το σχηματισμό λαιμού σε μια στενή ζώνη (local necking) σε λεπτά, ομοιόμορφα ελάσματα, τα οποία θεωρούμε ότι παραμορφώνονται σε συνθήκες επίπεδης εντατικής καταστάσεως.

Το πρόβλημα της αναζήτησης των ορίων διαμορφωσιμότητας στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς στη σχετική βιβλιογραφία (ενδεικτικά, βλέπε Rice [29], Needleman και Tveergard [21], Tveergard [30]), συνηθίζεται να τίθεται με δυο τρόπους. Κατά τον πρώτο τρόπο, ο οποίος αποκαλείται “ανάλυση διακλαδώσεων” (bifurcation analysis), το υλικό του ελάσματος θεωρείται ομογενές και το πάχος του αρχικά ομοιόμορφο, και αναζητούνται οι συνθήκες υπό τις οποίες η καταστατικά συμβατή και ομοιόμορφη λύση, χάνει τη μοναδικότητά της. Κατά το δεύτερο τρόπο, ο οποίος αποκαλείται “ανάλυση ατελειών” (imperfection analysis), θεωρείται ότι το έλασμα περιλαμβάνει αρχικά μια ατέλεια περιορισμένη σε μια “στενή” ζώνη, η οποία μπορεί να είναι καταστατικής ή γεωμετρικής φύσεως, και αναζητούνται οι συνθήκες υπό τις οποίες η παραμόρφωση “συγκεντρώνεται” ή “εντοπίζεται” (localization of deformation) σε αυτή τη ζώνη.

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, θα ασχοληθούμε με τις δυο πιο πάνω κατηγορίες προβλημάτων. Θεωρούμε ένα ομογενές, πορώδες μεταλλικό έλασμα, με δυο περιοχές - διαφορετικού εν γένει- ομοιόμορφου πάχους, όπως αυτό του σχήματος 4.8. Όταν τα αρχικά πάχη των δυο περιοχών είναι ίδια, το πρόβλημά μας ανήκει στην πρώτη κατηγορία (bifurcation analysis), ενώ όταν το αρχικό πάχος στη ζώνη είναι μικρότερο απ’ το αρχικό πάχος στο υπόλοιπο έλασμα, στη δεύτερη (imperfection analysis). Η ανάλυση που ακολουθείται είναι του τύπου Marciniak-Kuczynski [20], και παρουσιάζεται λεπτομερώς στην ενότητα 4.2.1. Στην ενότητα 4.2.2, παρουσιάζεται η υπολογιστική διαδικασία και τα σχετικά αποτελέσματα.

Θεωρούμε ότι η καταστατική συμπεριφορά του ελάσματος περιγράφεται απ’ το ανισότροπο μοντέλο KC. [Υπενθυμίζουμε ότι η παρουσίαση του αλγορίθμου ολοκλήρωσης του μοντέλου KC για το πρόβλημα της επίπεδης έντασης, γίνεται στην ενότητα 3.2.1.]

4.2.1. Τοποθέτηση του προβλήματος – Η αναλυτική μορφή.

Θεωρούμε το ομογενές, ομοιόμορφου πάχους H , πορώδες μεταλλικό έλασμα του σχήματος 4.7, το οποίο υποβαλλόμενο σε διαξονική ομοιόμορφη φόρτιση στις διευθύνσεις X_1 και X_2 παραμορφώνεται σε κατάσταση επίπεδης έντασης. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή απ’ την ιστορία της παραμορφώσεως (παρούσα κατάσταση), συμβολίζουμε με h το (ομοιόμορφο) πάχος του ελάσματος και με σ και \mathbf{F} τα αναπτυχθέντα ομοιόμορφα και καταστατικά συμβατά πεδία της πραγματικής τάσης και της κλίσης της παραμόρφωσης, αντίστοιχα. Η μορφή των πεδίων αυτών είναι

$$\sigma = \sigma_{\alpha\alpha} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (4.14)$$

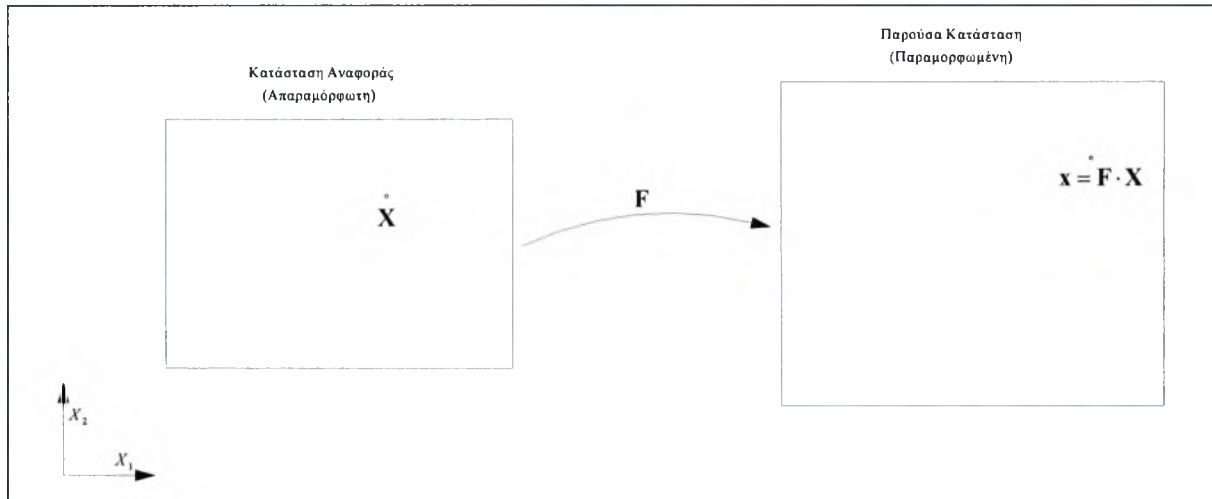
όπου $\sigma_{\alpha\alpha}$ είναι η (ορθή) συνιστώσα του τανυστή των τάσεων στη διεύθυνση X_α , με $\alpha = 1, 2$, και

$$\mathbf{F} = \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \bar{\mathbf{F}} + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \text{με} \quad \bar{\mathbf{F}} = \lambda_{\underline{\alpha}} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (4.15)$$

όπου λ_i είναι η ανηγμένη αλλαγή μήκους των υλικών ινών που βρίσκονται στη διεύθυνση X_i ,

με $i=1,2,3$ ($\lambda_3 = h/H$). Επομένως, η μορφή του λογαριθμικού τανυστή των παραμορφώσεων είναι

$$\mathbf{E} = E_{ii} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.7. Αναπαράσταση του ομοιόμορφου προβλήματος.

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία, σε κάθε χρονική στιγμή, η παραμόρφωση είναι τέτοια ώστε

$$E_{22} = \rho E_{11}, \quad (4.17)$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας ρ είναι σταθερός σε κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή. Απ' την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\lambda_2 = \lambda_1^\rho. \quad (4.18)$$

Το πιο πάνω πρόβλημα και η αντίστοιχη απόκριση του ελάσματος, θα αποκαλούνται στο εξής “βασικό πρόβλημα” και “βασική λύση”, αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, με στόχο την πρόβλεψη των συνθηκών υπό τις οποίες συμβαίνει μια διακλάδωση της λύσης από τη βασική, ή εντοπισμός των παραμορφώσεων σε μια “περιορισμένη” περιοχή του ελάσματος, θεωρούμε το πρόβλημα που παριστάνουμε γραφικά στο σχήμα 4.8. Υποθέτουμε ότι το έλασμα του σχήματος 4.7, περιλαμβάνει αρχικά μια στενή ζώνη ομοιόμορφου πάχους H^b , με $H^b \leq H$, στο εσωτερικό της οποίας η παραμόρφωση λαμβάνει χώρα υπό συνθήκες επίπεδης εντατικής καταστάσεως. Στο εξωτερικό της ζώνης, επικρατούν οι συνθήκες του βασικού προβλήματος. Στην παρούσα κατάσταση του ελάσματος (σχήμα 4.8) η μορφή των, επίσης ομοιόμορφων και καταστατικά συμβατών, πεδίων σ^b και \mathbf{F}^b εντός της ζώνης, είναι

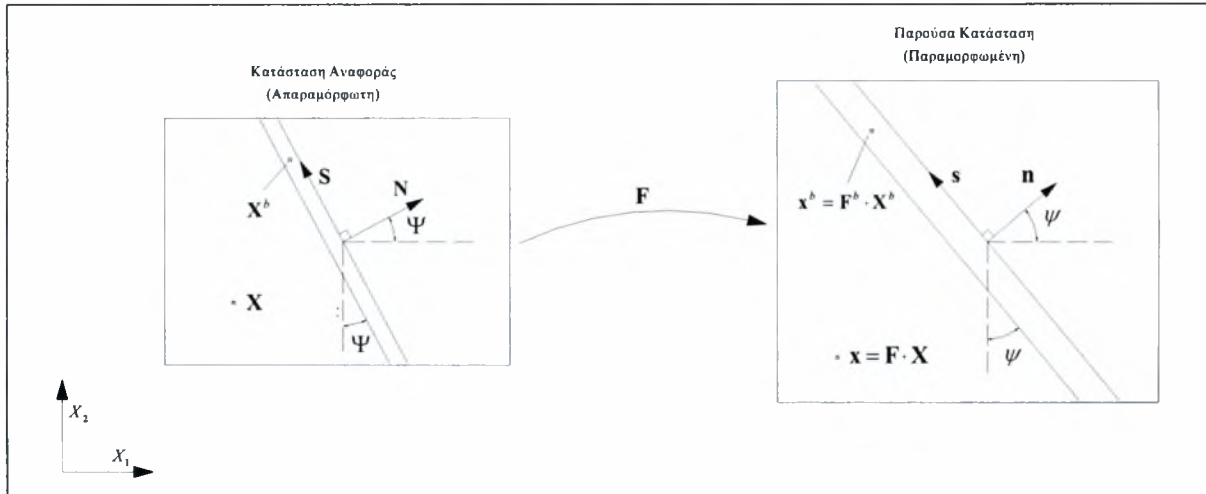
$$\sigma^b = \sigma_{\alpha\beta}^b \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \quad (4.19)$$

και

$$\mathbf{F}^b = \bar{\mathbf{F}}^b + F_{33}^b \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad \text{με} \quad \bar{\mathbf{F}}^b = F_{\alpha\beta}^b \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad (4.20)$$

αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι $F_{33}^b = \lambda_3^b = h^b / H^b$, όπου h^b είναι το (ομοιόμορφο) πάχος του ελάσματος στη ζώνη, στην παρούσα κατάσταση. Ο προσανατολισμός της ζώνης στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη γεωμετρία ορίζεται απ' τις γωνίες Ψ και ψ , αντίστοιχα. Απ' την κινηματική της παραμόρφωσης του βασικού προβλήματος, εύκολα προκύπτει ότι

$$\tan \psi = \lambda_1^{1-\rho} \tan \Psi. \quad (4.21)$$



Σχήμα 4.8 Αναπαράσταση του ανομοιόμορφου προβλήματος.

Υποθέτουμε ότι η απόκριση εντός της ζώνης δεν επηρεάζει την εξέλιξη της βασικής λύσης, αλλά επηρεάζεται απ' αυτή, μέσω των περιορισμών της κινηματικής και στατικής συμβατότητας, που πρέπει να διέπουν τις δυο αποκρίσεις. Ακολουθεί η διατύπωση αυτών των περιορισμών.

Το αίτημα της κινηματικής συμβατότητας στο επίπεδο $X_1 - X_2$ διατυπώνεται ως εξής: η επενέργεια των $\bar{\mathbf{F}}^b$ και $\bar{\mathbf{F}}$ σε κάθε υλική ίνα της τομής του επιπέδου $X_1 - X_2$ με τη διεπιφάνεια (το σύνορο των δυο περιοχών), πρέπει να οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι, αν $d\bar{\mathbf{X}}_l$ είναι μια τέτοια υλική ίνα, πρέπει να ισχύει

$$\bar{\mathbf{F}}^b \cdot d\bar{\mathbf{X}}_l = \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\mathbf{X}}_l \Rightarrow (\bar{\mathbf{F}}^b - \bar{\mathbf{F}}) \cdot d\bar{\mathbf{X}}_l = \mathbf{0}, \quad (4.22)$$

και συνεπώς

$$\Delta \bar{\mathbf{F}} \cdot |d\bar{\mathbf{X}}_l| \mathbf{S} = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0} \Rightarrow \Delta \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \right) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (4.23)$$

όπου \mathbf{S} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της $d\bar{\mathbf{X}}_l$, και

$$\Delta \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}^b - \bar{\mathbf{F}} = \Delta \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \right). \quad (4.24)$$

Η εξίσωση (4.23) γράφεται

$$\Delta\left(\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{X}}}\right) \cdot \mathbf{S} = 0, \quad \text{με } \alpha = 1, 2, \quad (4.25)$$

κάτι που σημαίνει ότι

$$\Delta\left(\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{X}}}\right) \perp \mathbf{S} \quad \text{ή} \quad \Delta\left(\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{X}}}\right) \parallel \mathbf{N} \Rightarrow \Delta\left(\frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial \bar{\mathbf{X}}}\right) = G_\alpha \mathbf{N}. \quad (4.26)$$

όπου με \mathbf{N} , συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στον αρχικό προσανατολισμό της ζώνης. Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\Delta\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}}\right) = \mathbf{GN} \quad \text{ή} \quad \Delta \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{GN}, \quad (4.27)$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\bar{\mathbf{F}}^b = \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{GN}. \quad (4.28)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (4.27) από δεξιά με \mathbf{N} , βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{G} = \Delta\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \bar{\mathbf{X}}}\right) \cdot \mathbf{N} \Rightarrow \mathbf{G} = \Delta\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial N}\right), \quad (4.29)$$

όπου συμβολίζουμε με N , τη διεύθυνση που ορίζεται απ' το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{N} .

Το σημαντικό συμπέρασμα της πιο πάνω συνθήκης, είναι η δυνατότητα ύπαρξης του διανύσματος \mathbf{G} . Απομένει η διατύπωση του κανόνα που το προσδιορίζει. Η δεύτερη συνθήκη είναι ικανή να μας οδηγήσει σε αυτόν τον κανόνα. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε αναλυτικά τη σχετική διαδικασία.

Το αίτημα της στατικής συμβατότητας εκφράζεται μέσω της συνθήκης ισοροπίας των δυνάμεων στη διεπιφάνεια, δηλαδή

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^b \Rightarrow h\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = h^b \boldsymbol{\sigma}^b \cdot \mathbf{n}, \quad (4.30)$$

όπου \mathbf{P} και \mathbf{P}^b είναι οι συνολικές δυνάμεις που δέχεται απ' τις δυο πλευρές της, και \mathbf{n} το μοναδιαίο, κάθετο σ' αυτή διάνυσμα (βλέπε σχήμα 4.8). Για την εισαγωγή των πληροφοριών της καταστατικής συμπεριφοράς, απαιτείται η διατύπωση της τελευταίας εξίσωσης σε μορφή ρυθμών, δηλαδή

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}}^b \Rightarrow (h\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})' = (h^b \boldsymbol{\sigma}^b \cdot \mathbf{n})'. \quad (4.31)$$

Μια ιδέα που απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση, είναι να ορίσουμε τις δυνάμεις \mathbf{P} και \mathbf{P}^b βάση των ονομαστικών τανυστών των τάσεων, \mathbf{t} και \mathbf{t}^b , αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι οι τανυστές \mathbf{t} και \mathbf{t}^b συνδέονται με τους $\boldsymbol{\sigma}$ και $\boldsymbol{\sigma}^b$, μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{t} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{και} \quad \mathbf{t}^b = J^b \mathbf{F}^{b-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^b, \quad (4.32)$$

όπου $J = \det \mathbf{F}$ και $J^b = \det \mathbf{F}^b$. Απ' τη σχέση (4.32), προκύπτει ότι

$$t_{33} = t_{i3} = t_{3i} = 0 \quad \text{και} \quad t_{33}^b = t_{i3}^b = t_{3i}^b = 0. \quad (4.33)$$

Με βάση τις τελευταίες σχέσεις, οι δυνάμεις \mathbf{P} και \mathbf{P}^b ορίζονται ως εξής:

$$\mathbf{P} = H\mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{t}}, \text{ με } \bar{\mathbf{t}} = t_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \text{ και } \mathbf{P}^b = H^b \mathbf{N} \cdot \bar{\mathbf{t}}^b, \text{ με } \bar{\mathbf{t}}^b = t_{\alpha\beta}^b \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta. \quad (4.34)$$

Βάση των πιο πάνω ορισμών των \mathbf{P} και \mathbf{P}^b η εξίσωση (4.31) γράφεται

$$H\mathbf{N} \cdot \dot{\bar{\mathbf{t}}} = H^b \mathbf{N} \cdot \dot{\bar{\mathbf{t}}}^b. \quad (4.35)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, θα θεωρήσουμε ότι η καταστατική συμπεριφορά του υλικού του ελάσματος περιγράφεται απ' το ανισότροπο μοντέλο KC. Στην περίπτωση του βασικού προβλήματος, η μορφή της γενικής ελαστοπλαστικής καταστατικής εξισώσεως (2.46) είναι

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L}^{ep} : \mathbf{D}. \quad (4.36)$$

Αποδεικνύεται ότι η πιο πάνω εξίσωση, λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση (4.32), μπορεί να διατυπωθεί (ισοδύναμα) ως εξής:

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathfrak{R} : \dot{\mathbf{F}}^T, \quad (4.37)$$

όπου

$$\mathfrak{R}_{ijkl} = J F_{im}^{-1} F_{kn}^{-1} (\mathcal{L}_{mjnl}^{ep} + T_{mjnl}) \text{ και } T_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ik} \sigma_{jl} - \sigma_{il} \delta_{jk} - \delta_{il} \sigma_{jk}) + \sigma_{ij} \delta_{kl}. \quad (4.38)$$

Η τελευταία καταστατική σχέση, είναι μια “συμπυκνωμένη” έκφραση των εξισώσεων

$$\dot{i}_{\alpha\beta} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta kl} \dot{F}_{lk} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{F}_{\delta\gamma} + \mathfrak{R}_{\alpha\beta 33} \dot{F}_{33}, \quad (4.39)$$

$$\dot{i}_{\alpha 3} = \mathfrak{R}_{\alpha 3 kl} \dot{F}_{lk} = 0, \quad (4.40)$$

$$\dot{i}_{3\alpha} = \mathfrak{R}_{3\alpha kl} \dot{F}_{lk} = 0, \quad (4.41)$$

και

$$\dot{i}_{33} = \mathfrak{R}_{33 kl} \dot{F}_{lk} = 0. \quad (4.42)$$

Απ' την (4.42) παίρνουμε

$$\dot{i}_{33} = \mathfrak{R}_{33 kl} \dot{F}_{lk} = \mathfrak{R}_{33\gamma\delta} \dot{F}_{\delta\gamma} + \mathfrak{R}_{3333} \dot{F}_{33} = 0 \Rightarrow \dot{F}_{33} = -\frac{\mathfrak{R}_{33\gamma\delta}}{\mathfrak{R}_{3333}} \dot{F}_{\delta\gamma}. \quad (4.43)$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην (4.39), παίρνουμε την εξίσωση

$$\dot{i}_{\alpha\beta} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{F}_{\delta\gamma} - \mathfrak{R}_{\alpha\beta 33} \frac{\mathfrak{R}_{33\gamma\delta}}{\mathfrak{R}_{3333}} \dot{F}_{\delta\gamma} = \left(\mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathfrak{R}_{\alpha\beta 33} \frac{\mathfrak{R}_{33\gamma\delta}}{\mathfrak{R}_{3333}} \right) \dot{F}_{\delta\gamma}, \quad (4.44)$$

η οποία μπορεί να διατυπωθεί στη συμπυκνωμένη μορφή

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{F}}^T, \text{ με } C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} - \mathfrak{R}_{\alpha\beta 33} \frac{\mathfrak{R}_{33\gamma\delta}}{\mathfrak{R}_{3333}}, \quad (4.45)$$

ή σε μητρωϊκή μορφή

$$\begin{Bmatrix} \dot{i}_{11} \\ \dot{i}_{22} \\ \dot{i}_{12} \\ \dot{i}_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1112} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2212} & C_{2221} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1212} & C_{1221} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2112} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{11} \\ \dot{F}_{22} \\ \dot{F}_{21} \\ \dot{F}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & \hat{C}_{13} & \hat{C}_{14} \\ \hat{C}_{21} & \hat{C}_{22} & \hat{C}_{23} & \hat{C}_{24} \\ \hat{C}_{31} & \hat{C}_{32} & \hat{C}_{33} & \hat{C}_{34} \\ \hat{C}_{41} & \hat{C}_{42} & \hat{C}_{43} & \hat{C}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.46)$$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η καταστατική συμπεριφορά μέσα στη ζώνη περιγράφεται απ' την εξίσωση

$$\dot{\mathbf{i}}^b = \mathbf{C}^b : \dot{\mathbf{F}}^{bT} = \mathbf{C}^b : (\dot{\mathbf{F}}^T + \mathbf{N}\dot{\mathbf{G}}), \quad \text{με} \quad C_{\alpha\beta\gamma\delta}^b = \mathfrak{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}^b - \mathfrak{R}_{\alpha\beta 33}^b \frac{\mathfrak{R}_{33\gamma\delta}^b}{\mathfrak{R}_{3333}^b}, \quad (4.47)$$

όπου

$$\mathfrak{R}_{ijkl}^b = J^b F_{im}^{b-1} F_{kn}^{b-1} (\mathcal{L}_{mjnl}^{epb} + T_{mjnl}^b) \quad \text{και} \quad T_{mjnl}^b = \frac{1}{2} (\sigma_{ik}^b \delta_{jl} - \delta_{ik}^b \sigma_{jl}^b - \sigma_{il}^b \delta_{jk} - \delta_{il}^b \sigma_{jk}^b) + \sigma_{ij}^b \delta_{kl}. \quad (4.48)$$

Η μητρική μορφή της εξίσωσης (4.47) είναι

$$\begin{Bmatrix} \dot{i}_{11}^b \\ \dot{i}_{22}^b \\ \dot{i}_{12}^b \\ \dot{i}_{21}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111}^b & C_{1122}^b & C_{1112}^b & C_{1121}^b \\ C_{2211}^b & C_{2222}^b & C_{2212}^b & C_{2221}^b \\ C_{1211}^b & C_{1222}^b & C_{1212}^b & C_{1221}^b \\ C_{2111}^b & C_{2122}^b & C_{2112}^b & C_{2121}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{11}^b \\ \dot{F}_{22}^b \\ \dot{F}_{21}^b \\ \dot{F}_{12}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11}^b & \hat{C}_{12}^b & \hat{C}_{13}^b & \hat{C}_{14}^b \\ \hat{C}_{21}^b & \hat{C}_{22}^b & \hat{C}_{23}^b & \hat{C}_{24}^b \\ \hat{C}_{31}^b & \hat{C}_{32}^b & \hat{C}_{33}^b & \hat{C}_{34}^b \\ \hat{C}_{41}^b & \hat{C}_{42}^b & \hat{C}_{43}^b & \hat{C}_{44}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{F}_{11}^b \\ \dot{F}_{22}^b \\ \dot{F}_{21}^b \\ \dot{F}_{12}^b \end{Bmatrix}. \quad (4.49)$$

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.45) και (4.47) στην (4.35), παίρνουμε

$$H \mathbf{N} \cdot (\mathbf{C} : \dot{\mathbf{F}}^T) = H^b \mathbf{N} \cdot [\mathbf{C}^b : (\dot{\mathbf{F}}^T + \mathbf{N}\dot{\mathbf{G}})] \Rightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^b : (\mathbf{N}\dot{\mathbf{G}}) = \mathbf{N} \cdot \left(\frac{H}{H^b} \mathbf{C} - \mathbf{C}^b \right) : \dot{\mathbf{F}}^T. \quad (4.50)$$

Γράφουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{b}}, \quad (4.51)$$

όπου

$$A_{\alpha\beta} = N_\gamma C_{\gamma\alpha\delta\beta}^b N_\delta, \quad B_{\alpha\beta} = N_\gamma \left(\frac{H}{H^b} C_{\gamma\alpha\beta\beta} - C_{\gamma\alpha\beta\beta}^b \right) \quad \text{και} \quad b_\alpha = \lambda_\alpha. \quad (4.52)$$

Εκτελώντας τις αλγεβρικές πράξεις στις πιο πάνω εξισώσεις, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_{11} &= \hat{C}_{11}^b N_1^2 + (\hat{C}_{14}^b + \hat{C}_{41}^b) N_1 N_2 + \hat{C}_{44}^b N_2^2, \\ A_{12} &= \hat{C}_{13}^b N_1^2 + (\hat{C}_{12}^b + \hat{C}_{43}^b) N_1 N_2 + \hat{C}_{42}^b N_2^2, \\ A_{21} &= \hat{C}_{31}^b N_1^2 + (\hat{C}_{21}^b + \hat{C}_{34}^b) N_1 N_2 + \hat{C}_{24}^b N_2^2, \\ A_{22} &= \hat{C}_{33}^b N_1^2 + (\hat{C}_{23}^b + \hat{C}_{32}^b) N_1 N_2 + \hat{C}_{22}^b N_2^2, \end{aligned} \quad (4.53)$$

και

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{11} - \hat{C}_{11}^b \right) N_1 + \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{41} - \hat{C}_{41}^b \right) N_2, \\
B_{12} &= \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{12} - \hat{C}_{12}^b \right) N_1 + \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{42} - \hat{C}_{42}^b \right) N_2, \\
B_{21} &= \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{31} - \hat{C}_{31}^b \right) N_1 + \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{21} - \hat{C}_{21}^b \right) N_2, \\
B_{22} &= \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{32} - \hat{C}_{32}^b \right) N_1 + \left(\frac{H}{H^b} \hat{C}_{22} - \hat{C}_{22}^b \right) N_2,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

όπου $N_1 = \cos \Psi$ και $N_2 = \sin \Psi$.

Με τη διατύπωση της εξίσωσης (4.51), ολοκληρώνεται η σωστή (πλήρης και ακριβής) τοποθέτηση του νέου προβλήματος (δηλαδή του προβλήματος στη ζώνη). Όπως είδαμε, ενώ το βασικό πρόβλημα είναι ανεξάρτητο απ' το πρόβλημα στο εσωτερικό της ζώνης, η επίλυση του δεύτερου προβλήματος προϋποθέτει τον υπολογισμό του διανύσματος \mathbf{G} , και συνεπώς είναι συνυφασμένη με την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4.51). Αυτή η εξίσωση αντικατοπτρίζει την εξάρτηση του προβλήματος στη ζώνη απ' το βασικό πρόβλημα και ταυτόχρονα αποτελεί τη βάση για τον ορισμό των συνθηκών που καθορίζουν τα όρια διαμόρφωσης του ελάσματος.

Υπό το φως της ανάλυσης που προηγήθηκε, συνεχίζουμε με τη διατύπωση των δυο κατηγοριών προβλημάτων και των αντίστοιχων συνθηκών, βάση των οποίων ορίζουμε τα όρια διαμόρφωσης.

Κατά το πρόβλημα της ανάλυσης διακλαδώσεων, το πάχος του ελάσματος είναι αρχικά ομοιόμορφο, δηλαδή $H^b = H$, και η απόκριση του υλικού (βασική λύση) διατηρεί τον ομοιόμορφο χαρακτήρα της μέχρι το σημείο διακλάδωσης. Σ' αυτή την περιοχή, έχουμε $\mathbf{C}^b = \mathbf{C}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, και η εξίσωση (4.51) γίνεται

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}. \tag{4.55}$$

Η διακλάδωση της λύσης από τη βασική γίνεται εφικτή όταν η εξίσωση (4.55) επιδέχεται μη τετριμμένη λύση, δηλαδή όταν $\dot{\mathbf{G}} \neq \mathbf{0}$. Επομένως, η συνθήκη που προσδιορίζει ένα όριο διαμόρφωσης του ελάσματος είναι $\det \mathbf{A} = 0$.

Κατά το πρόβλημα ανάλυσης ατελειών, οι αρχικές συνθήκες είναι $H^b < H$ και $\mathbf{G}(t=0) = \mathbf{0}$. Η συγκέντρωση της παραμόρφωσης στη ζώνη, είναι συνυφασμένη με τον απειρισμό του ρυθμού μεταβολής μιας τουλάχιστον εκ των συνιστωσών της. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\frac{d|\mathbf{G}|}{d\lambda} = \infty \quad \left(\text{εναλλακτικά, } \frac{dh^b}{d\lambda} = -\infty \right). \tag{4.56}$$

Η συνθήκη αυτή ικανοποιείται όταν $\det \mathbf{A} = 0$.

Η διαδικασία επίλυσης των δυο προβλημάτων και τα σχετικά αποτελέσματα για τις εφαρμογές που εκτελέστηκαν, παρουσιάζονται λεπτομερώς στην ενότητα που ακολουθεί.

4.2.2. Υπολογιστικές μέθοδοι και αποτελέσματα – Διαγράμματα ορίων διαμόρφωσης.

Η επίλυση των προβλημάτων στις δυο περιοχές επιτυγχάνεται βηματικά (incrementally). Θα περιγράψουμε τη σχετική διαδικασία, για την περίπτωση του τυχαίου χρονικού βήματος

$[t_n, t_{n+1}]$, στο πρόβλημα ανάλυσης ατελειών (το πρόβλημα ανάλυσης διακλαδώσεων αντιμετωπίζεται ως ειδική περίπτωση του προβλήματος ανάλυσης ατελειών).

Έστω ότι είναι γνωστή η λύση τη χρονική στιγμή t_n και ζητείται η λύση τη στιγμή t_{n+1} . Συγκεκριμένα, θεωρούμε γνωστά τα μεγέθη $\mathbf{F}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathcal{L}_n^{ep}, \bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ και $\mathbf{F}_n^b, \boldsymbol{\sigma}_n^b, \mathcal{L}_n^{epb}$, και άγνωστα τα $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1}^{ep}, F_{33}|_{n+1} = \lambda_3|_{n+1}$ και $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^b, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^b, \mathcal{L}_{n+1}^{epb}, F_{33}^b|_{n+1} = \lambda_3^b|_{n+1}$. Το μέγεθος $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^b$ υπολογίζεται απ' τη σχέση

$$\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^b = \bar{\mathbf{F}}_{n+1} + \mathbf{G}_{n+1} \mathbf{N}, \quad (4.57)$$

όπου

$$\mathbf{G}_{n+1} = \mathbf{G}_n + \Delta \mathbf{G}, \quad (4.58)$$

και το $\Delta \mathbf{G}$, υπολογίζεται απ' την επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$\mathbf{A}_n \cdot \Delta \mathbf{G} = \mathbf{B}_n \cdot \Delta \mathbf{b}, \quad (4.59)$$

που προκύπτει απ' την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.51) με forward Euler. Τα στοιχεία των \mathbf{A}_n και \mathbf{B}_n υπολογίζονται απ' τις σχέσεις (4.53) και (4.54), ενώ τα στοιχεία των \mathbf{C}_n και \mathbf{C}_n^b , που απαιτούνται γι' αυτούς τους υπολογισμούς, απ' τις (4.45) και (4.47), αντίστοιχα.

Με δεδομένα τα μεγέθη $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ και $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^b$, όλα τα υπόλοιπα (άγνωστα) μεγέθη υπολογίζονται μέσω του υποπρογράμματος UMAT, το οποίο υλοποιεί τον αλγόριθμο για το πρόβλημα της επίπεδης εντατικής καταστάσεως, που περιγράψαμε στην ενότητα 3.2.1¹. Υπενθυμίζουμε ότι, ένα εκ των μεγεθών που υπολογίζονται σε αυτόν τον κώδικα, είναι και το ΔE_{33} (εξίσωση (3.73)), δηλαδή η μεταβολή της συνιστώσας της παραμορφώσεως στη διεύθυνση X_3 . Όταν τα μεγέθη ΔE_{33} και ΔE_{33}^b είναι γνωστά, τα $\lambda_3|_{n+1}$ και $\lambda_3^b|_{n+1}$ υπολογίζονται απ' τις σχέσεις

$$\lambda_3|_{n+1} = \lambda_3|_n \exp(\Delta E_{33}) \quad (4.60)$$

και

$$\lambda_3^b|_{n+1} = \lambda_3^b|_n \exp(\Delta E_{33}^b), \quad (4.61)$$

αντίστοιχα.

Αναλυτικότερα, ο αλγόριθμος υπολογισμού της λύσης στο χρονικό βήμα $[t_n, t_{n+1}]$ είναι ο εξής:

- Υπολογίζουμε τα στοιχεία του \mathbf{A}_n , όπως περιγράψαμε πιο πάνω, και ελέγχουμε αν η ορίζουσά του αλλάζει πρόσημο.
 - Αν ναι, ο αλγόριθμος τερματίζεται (θεωρούμε ότι το όριο διαμόρφωσης έχει επιτευχθεί τη στιγμή t_n).
 - Αν όχι, συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα.

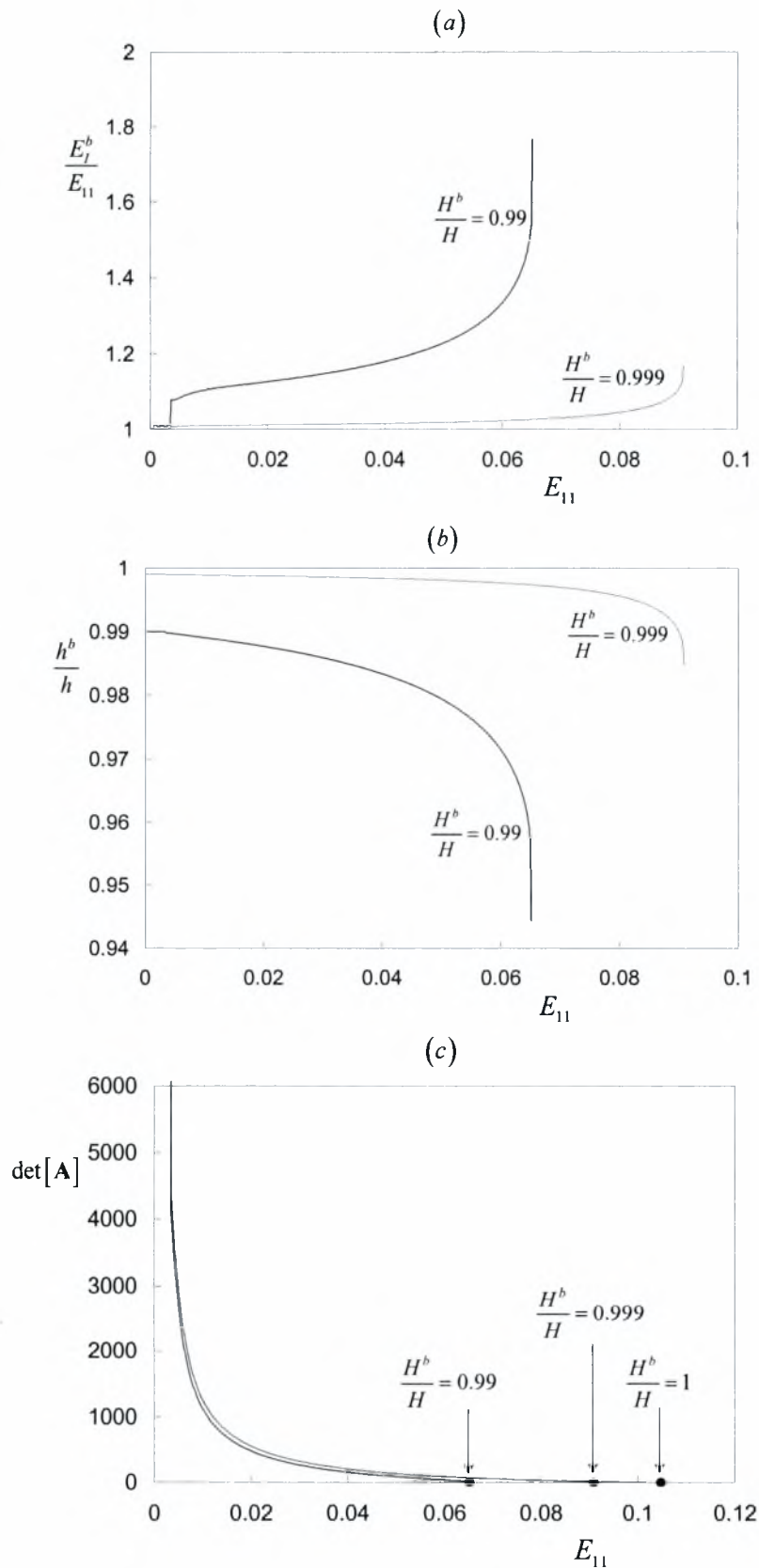
¹ Μπορείτε να βρείτε αυτό τον κώδικα στο παράρτημα Γ.

- Επιβάλλουμε ένα $\Delta\lambda_1$, και υπολογίζουμε τα μεγέθη $\lambda_1|_{n+1} = \lambda_1|_n + \Delta\lambda_1$, $\lambda_2|_{n+1} = (\lambda_1|_{n+1})^p$ και $\Delta\lambda_2 = \lambda_2|_{n+1} - \lambda_2|_n$. Επομένως, γνωρίζουμε τα μεγέθη $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$ και $\Delta\mathbf{b}$.
- Υπολογίζουμε τα στοιχεία του \mathbf{B}_n , όπως περιγράψαμε πιο πάνω. Λύνουμε το σύστημα (4.59), υπολογίζοντας έτσι το $\Delta\mathbf{G}$, και μέσω της σχέσης (4.58), βρίσκουμε το \mathbf{G}_{n+1} . Επομένως, μέσω της σχέσης (4.57), μπορούμε να υπολογίσουμε το $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^b$.
- Καλώντας το υποπρόγραμμα UMAT για $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}$, βρίσκουμε τη βασική λύση τη στιγμή t_{n+1} . Επιπλέον, υπολογίζουμε το ύψος $h_{n+1} = H \lambda_3|_{n+1}$.
- Καλώντας το υποπρόγραμμα UMAT για $\bar{\mathbf{F}}_{n+1}^b$, βρίσκουμε τη λύση στη ζώνη τη στιγμή t_{n+1} . Επιπλέον, υπολογίζουμε το ύψος $h_{n+1}^b = H^b \lambda_3^b|_{n+1}$.

Στους υπολογισμούς που εκτελέστηκαν χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές $E = 300\sigma_0$, για το μέτρο ελαστικότητας και $n = 10$, για τον εκθέτη σκλήρυνσης του μεταλλικού φορέα του πορώδους υλικού. Θεωρήσαμε ότι οι πόροι έχουν αρχικά σφαιρική μορφή ($w_1 = w_2 = 1$) και είναι ομοιόμορφα κατανομημένοι στον ισότροπο μεταλλικό φορέα. Για το αρχικό πορώδες του ελάσματος χρησιμοποιήθηκε η τιμή $f_0 = 0.04$.

Με στόχο την ενδεικτική γραφική απεικόνιση της εξέλιξης της ανάλυσης, παριστάνουμε στα σχήματα 4.9(a), 4.9(b) και 4.9(c) την μεταβολή των μεγεθών E_I^b/E_{11} (με E_I^b συμβολίζουμε τη μέγιστη κύρια λογαριθμική παραμόρφωση στη ζώνη), h^b/h και $\det \mathbf{A}$, αντίστοιχα, σε συνάρτηση με την E_{11} , για την περίπτωση $\rho = 0$ (επίπεδη παραμόρφωση) και $\Psi = 0$ και για αρχικές ατέλειες $(H^b/H) = 1$, $(H^b/H) = 0.999$ και $(H^b/H) = 0.99$. Οι καμπύλες αυτών των σχημάτων δείχνουν με ξεκάθαρο τρόπο την πορεία προς τον εντοπισμό των παραμορφώσεων στη ζώνη. Στο σχήμα 4.9(c) σημειώνουμε τα σημεία μηδενισμού της ορίζουσας του \mathbf{A} , που όπως είδαμε, αντιστοιχούν σε όρια διαμόρφωσης. Μπορούμε να διακρίνουμε τα ίδια όρια για $(H^b/H) = 0.999$ και $(H^b/H) = 0.99$, και στα σχήματα 4.9(a) και 4.9(b), όπου παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες τιμές της E_{11} στα σημεία του σχήματος 4.9(c) αποτελούν άνω φράγματα των καμπυλών.

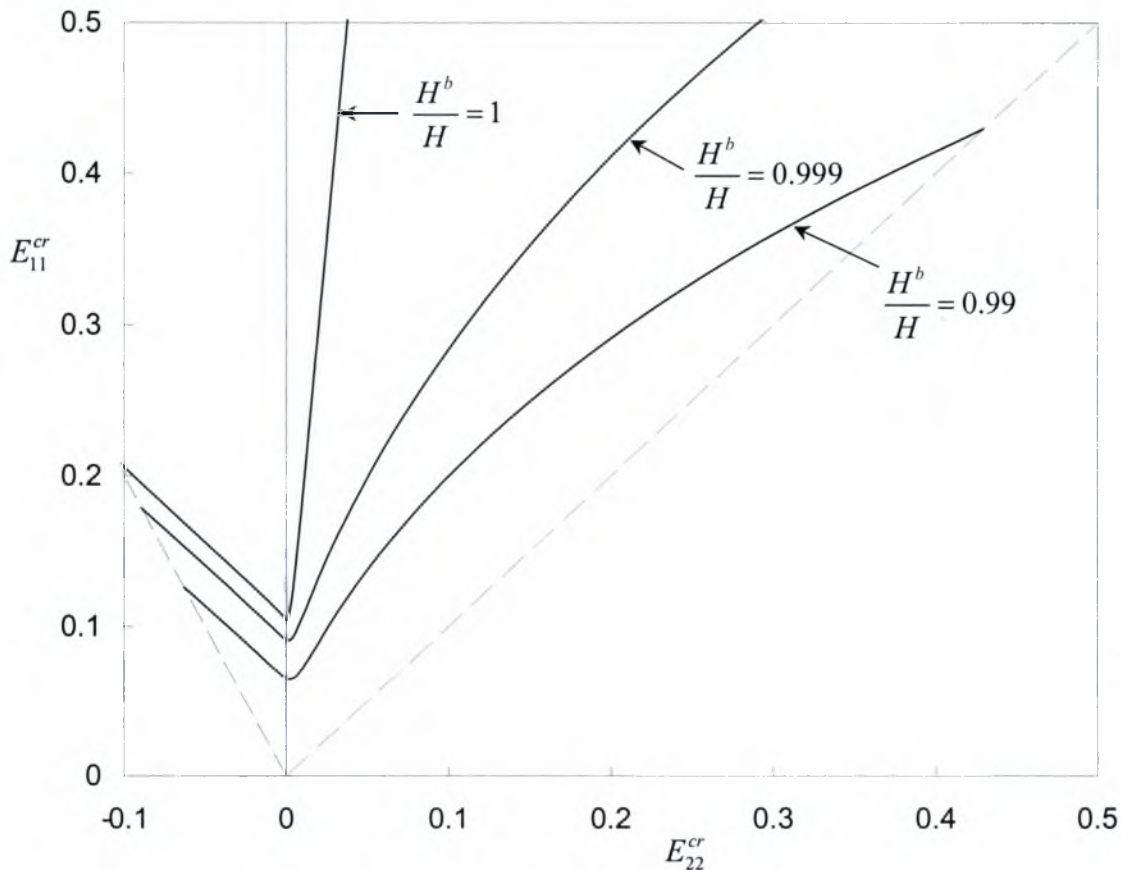
Επιχειρήσαμε να προσδιορίσουμε τα όρια διαμόρφωσης ελασμάτων, μέσω των διαδικασιών ανάλυσης διακλαδώσεων και ανάλυσης ατελειών, όπως περιγράφηκαν πιο πάνω. Στα πλαίσια του προβλήματος ανάλυσης ατελειών, θεωρήσαμε ελάσματα με “αρχικές ατέλειες” $(H^b/H) = 0.999$ και $(H^b/H) = 0.99$. Και στις τρεις περιπτώσεις, οι υπολογισμοί εκτελέστηκαν για ένα πλήθος τιμών του λόγου παραμορφώσεων απ’ την περιοχή $[-0.5, 1]$. Σημειώνουμε ότι η τιμή $\rho = -0.5$ αντιστοιχεί -κατά προσέγγιση- στις συνθήκες παραμόρφωσης του μονοαξονικού εφελκυσμού. Η προσπάθεια εκτίμησης ορίων διαμόρφωσης για μικρότερες τιμές του ρ , με βάση τον τύπο της αστοχίας που θεωρούμε εδώ (local necking), δεν έχει νόημα, διότι σ’ αυτή την περίπτωση ενδέχεται αυτά τα όρια να καθορίζονται από έναν διαφορετικό



Σχήμα 4.9 Μεταβολή της μέγιστης κύριας παραμόρφωσης στη ζώνη E_i^b (a), του πάχους h^b (b), και της ορίζουσας του πίνακα \mathbf{A} (c) σε συνάρτηση με την επιβαλλόμενη παραμόρφωση E_{11} , για $\rho = 0$ και $\Psi = 0$.

μηχανισμό αστοχίας του υλικού: το λυγισμό. Απ' την άλλη πλευρά, για $\rho > 1$, λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, υπολογίζουμε τα ίδια όρια διαμόρφωσης, καθώς η περίπτωση $\rho = 1$ αντιστοιχεί σε "ισοδύναμο διαξονικό εφελκυσμό" (equal biaxial tension). Στη συνέχεια, ο δείκτης " cr " θα υποδηλώνει τις τιμές ενός μεγέθους στις οριακές καταστάσεις και επιπλέον, οι τιμές αυτές θα αποκαλούνται κρίσιμες (π. χ. A^{cr} για τις κρίσιμες τιμές του μεγέθους A).

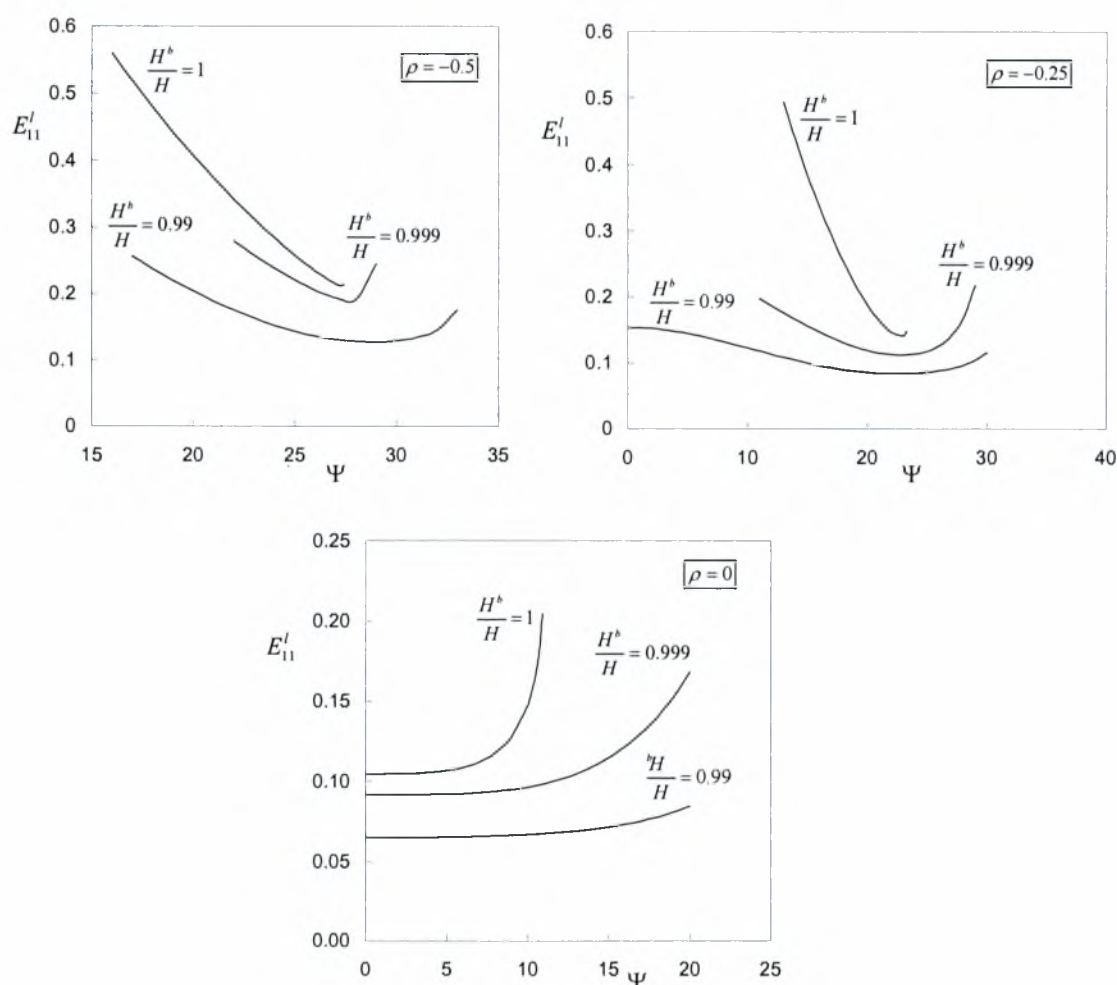
Τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται -μέσω των διαγραμμάτων ορίων διαμόρφωσης- στο σχήμα 4.10. Το πιο ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει απ' τις καμπύλες αυτού του σχήματος είναι η εξαιρετικά έντονη εξάρτηση των ορίων διαμόρφωσης απ' το μέγεθος της αρχικής ατέλειας. Στην περίπτωση του αρχικά ομοιόμορφου ελάσματος (ανάλυση διακλαδώσεων), παρατηρούμε ότι μόλις το ρ ξεπερνάει την τιμή μηδέν, η κλίση της σχετικής καμπύλης γίνεται σύντομα πολύ μεγάλη, με αποτέλεσμα τα όρια διαμόρφωσης του ελάσματος να είναι ουσιαστικά ανύπαρκτα για τη μεγαλύτερη περιοχή των θετικών τιμών του ρ . Στην περίπτωση του ελάσματος με αρχική ατέλεια ($H^b/H = 0.999$), καθώς το ρ τείνει στη μονάδα, παρατηρούμε ότι τα προβλεπόμενα όρια γίνονται μη-ρεαλιστικά μεγάλα. Στην περιοχή των αρνητικών τιμών του ρ , η απόκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ των τριών περιπτώσεων που θεωρήσαμε, είναι πολύ μικρότερη απ' ότι στην περιοχή των θετικών τιμών του.



Σχήμα 4.10. Διαγράμματα ορίων διαμόρφωσης πορωδών μεταλλικών ελασμάτων - Αποτελέσματα ανάλυσης διακλαδώσεων [$(H^b/H) = 1$] και ανάλυσης ατελειών [$(H^b/H) = 0.999$ και $(H^b/H) = 0.99$].

Αξίζει να σημειώσουμε ότι σχετικές μελέτες που έχουν γίνει για διαφορετικά υλικά ή για διαφορετικού τύπου ατέλειες [21], [30], έχουν οδηγήσει στο ίδιο συμπέρασμα όσον αφορά την ευαισθησία των αποτελεσμάτων στο μέγεθος της αρχικής ατέλειας.

Οι αναλυτικές εκφράσεις (4.53) και (4.54) για τα στοιχεία των ταυνοστών **A** και **B**, αντίστοιχα, καθιστούν προφανή την εξάρτηση του προβλήματος απ' τον αρχικό προσανατολισμό της ζώνης. Αυτό σημαίνει ότι για συγκεκριμένη τιμή του ρ και για διαφορετικές τιμές της γωνίας Ψ υπολογίζουμε -εν γένει- διαφορετικά σημεία διακλάδωσης ή εντοπισμού των παραμορφώσεων στη ζώνη (ανάλογα με το πρόβλημα που θεωρούμε). Από όλα αυτά τα σημεία, το όριο διαμόρφωσης του ελάσματος είναι εκείνο που αντιστοιχεί στη μικρότερη παραμόρφωση E_{11} (ή E_{22}). Επομένως, με στόχο τον προσδιορισμό του Ψ^{cr} , για κάθε τιμή του ρ , οι υπολογισμοί έπρεπε να εκτελεστούν για κάθε $\Psi \in [0^\circ, 45^\circ]$. Εκτελέσαμε τους υπολογισμούς με βήμα μιας μοίρας (συνολικά, 46 υπολογισμοί για κάθε ρ). Στο σχήμα 4.11 παρουσιάζουμε ενδεικτικά, τα αποτελέσματα των υπολογισμών για τις περιπτώσεις $\rho = -0.5$, $\rho = -0.25$ και $\rho = 0$.



Σχήμα 4.11. Η επίδραση του αρχικού προσανατολισμού της ζώνης Ψ στην οριακή παραμόρφωση E'_{11} , για $\rho = -0.5$, $\rho = -0.25$ και $\rho = 0$.

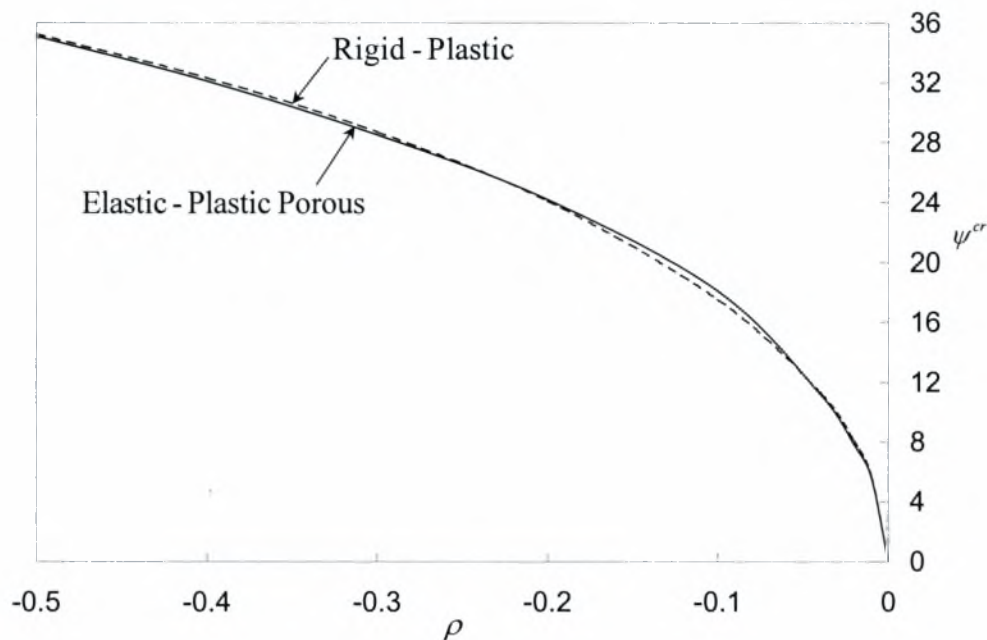
Τα ελάχιστα των καμπυλών των διαγραμμάτων που παρουσιάζονται αντιστοιχούν σε όρια διαμόρφωσης του ελάσματος [σημεία (E_{11}^{cr}, Ψ^{cr})]. Τέτοια σημεία χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των καμπυλών του σχήματος 4.10.

Απ' τους υπολογισμούς προέκυψε ότι για $\rho \geq 0$, ο κρίσιμος αρχικός προσανατολισμός της ζώνης είναι $\Psi^{cr} = 0^\circ$. Απ' τη σχέση (4.21), για $\Psi = 0^\circ$, προκύπτει ότι ο προσανατολισμός της

ζώνης παραμένει σταθερός ($\psi = 0^\circ$) σε κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς, για $\rho \geq 0$ βρίσκουμε ότι $\psi^{cr} = 0^\circ$. Στο σχήμα 4.12, παρουσιάζουμε με συνεχή γραμμή τις προβλέψεις της ανάλυσής μας για τον προσανατολισμό της ζώνης ψ^{cr} στα σημεία διακλάδωσης¹, για τις αρνητικές τιμές του ρ . Σ' αυτό το σχήμα έχουμε προσθέσει και τα αντίστοιχα αποτελέσματα (διακεκομμένη γραμμή) των σημείων διακλάδωσης που προβλέπονται για κλασικά στέρεο-πλαστικά υλικά με "ομαλή επιφάνεια διαρροής" (smooth yield surface) και καθετότητα (βλέπε Hill [12]). Συγκεκριμένα, γι' αυτά τα υλικά δεν προβλέπεται διακλάδωση της λύσης σε ένα ομοιόμορφο έλασμα στην περιοχή των θετικών τιμών του ρ , ενώ για $\rho \leq 0$, προκύπτει ότι

$$\tan \psi_H^{cr} = \sqrt{-\rho} \quad (4.62)$$

όπου ψ_H^{cr} είναι η αντίστοιχη κρίσιμη γωνία διακλάδωσης στην παραμορφωμένη κατάσταση του ελάσματος. Η συμφωνία των προβλέψεων είναι αξιοσημείωτη.



Σχήμα 4.12. Οι κρίσιμες γωνίες διακλάδωσης ψ^{cr} (συνεχής γραμμή) και ψ_H^{cr} (διακεκομμένη γραμμή) σε συνάρτηση με το ρ , για $\rho \leq 0$.

¹ Οι γωνίες ψ^{cr} υπολογίζονται με χρήση της σχέσεως (4.21), αφού τα άμεσα αποτελέσματα της ανάλυσής μας είναι τα Ψ^{cr} και E_{11}^{cr} .

Βιβλιογραφία – Αναφορές

- [1] N. Αράβας, ‘Καρτεσιανοί Τανυστές’, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας, (2003).
- [2] N. Aravas, ‘Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals’, *Int. J. Solids Structures* **29** (1992) 2137-2157.
- [3] N. Aravas & E. C. Aifantis, ‘On the Geometry of Slip and Spin in Finite Plastic Deformation / Appendix’, *Int. J. Plasticity*, **7**, 141-160, 1991.
- [4] N. Aravas and P. Ponte Castañeda, ‘Numerical methods for porous metals with deformation-induced anisotropy’, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **193** (2004) 3767 –3805.
- [5] M. A. Biot, *Mechanics of incremental deformations*, Wiley, New York (1965).
- [6] H. Cheng and K. C. Gupta, ‘An historical note on finite rotations’, *J. Appl. Mech.* **56** (1989) 139-145.
- [7] Y. F. Dafalias, ‘The plastic spin’, *J. Appl. Mech.* **52** (1985) 865-871.
- [8] Y. F. Dafalias, ‘Issues on the constitutive formulation at larger elastoplastic deformations, part 1: Kinematics’, *Acta Mech.* **69** (1987) 119-138.
- [9] J. D. Eshelby, ‘The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems’, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **241** (1957) 376-396.
- [10] J. D. Eshelby, ‘Elastic inclusions and inhomogeneities’, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. II (eds. I. N. Sneddon and R. Hill), 87-140, (1961).
- [11] R. Hill, ‘Aspects of invariance in solid mechanics’, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18 (ed. C-S. Yih), 1-75, Academic Press, New York, (1978).
- [12] R. Hill, ‘On the discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets’, *J. Mech. Phys. Solids.* **1** (1952) 19-30.
- [13] A. L. Gurson, ‘Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media’, *J. Engng. Mater. Tech.* **99** (1977) 2-15.
- [14] M. Kailasam, ‘A general constitutive theory for particulate composites and porous materials with evolving microstructures’, *Ph.D. thesis, University of Pennsylvania* (1998).
- [15] M. Kailasam and P. Ponte Castañeda, ‘The evolution of anisotropy in porous materials and its implications for linear localization’, *Mechanics of Granular and Porous Materials (IUTAM Symposium)* (eds. N. A. Fleck and A.C.F. Cocks), 365-376, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands (1997).
- [16] M. Kailasam and P. Ponte Castañeda, ‘A general constitutive theory for linear and nonlinear particulate media with microstructure evolution’, *J. Mech. Phys. Solids.* **46** (1998) 427-465.
- [17] M. Kailasam, P. Ponte Castañeda and J. R. Willis, ‘The effect of particle size, shape, distribution and their evolution on the constitutive response of nonlinearly viscous composites – I. Theory’, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* **355** (1997a) 1835-1852.
- [18] M. Kailasam, P. Ponte Castañeda and J. R. Willis, ‘The effect of particle size, shape, distribution and their evolution on the constitutive response of nonlinearly viscous composites – I. Examples’, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* **355** (1997b) 1853-1872.

- [19] M. Kailasam, N. Aravas and P. Ponte Castañeda, 'Porous metals with developing anisotropy: Constitutive models, computational issues and application to deformation processing', *Computer modeling in Engineering and Sciences* **1** (2000) 105-118.
- [20] Z. Marciniak and K. Kuczynski, 'Limit strains in the process of stretch forming sheet metal', *Int. J. Mech. Sciences* **9** (1967) 609-620.
- [21] A. Needleman, and V. Tvergaard, 'Limits to formability in rate-sensitive metal sheets', *Mechanical Behavior of Materials – IV* (eds. J. Carlsson and N. G. Ohlson), 51-65, Pergamon Press, Oxford and New York, London (1984).
- [22] R. W. Odgen, *Non-linear elastic deformations*, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications, Halsted Press, New York, (1984).
- [23] M. Ortiz and E. P. Popov, 'Accuracy and stability of integration algorithms for elasto-plastic constitutive relations', *Int. J. Numer. Methods Engrg.* **21** (1985) 1561-1576.
- [24] J.C.Nadeau, M.Ferrari, 'Invariant tensor-to-matrix mappings for evaluation of tensorial expressions', *J.Elast.* **52** (1998) 43-61.
- [25] P. Ponte Castañeda, 'The effective mechanical properties of nonlinear isotropic solids', *J. Mech. Phys. Solids* **39** (1991) 45-71.
- [26] P. Ponte Castañeda and J. R. Willis, 'The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media', *J. Mech. Phys. Solids* **43** (1995) 1919-1951.
- [27] P. Ponte Castañeda and M. Zaidman, 'Constitutive models for porous materials with evolving microstructure', *J. Mech. Phys. Solids* **42** (1994) 1459-1497.
- [28] P. Ponte Castañeda and M. Zaidman, 'On the finite deformation of nonlinear composite materials. Part I – Instantaneous constitutive relations', *Int. J. Solids Structures* **33** (1996) 1271-1286.
- [29] J. R. Rice, 'The localization of plastic deformation', *Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics* (ed. W. T. Koiter), 207-220, North-Holland Publishing Corporation, (1976).
- [30] V. Tvergaard, 'Bifurcation and imperfection sensitivity at necking instabilities', *Zeits. Ang. Math. Mech.* **60** (1980) T26-T34.
- [31] J. R. Willis, 'Bounds and self-consistent estimates for the overall moduli of anisotropic composites', *J. Mech. Phys. Solids* **25** (1977) 185-202.
- [32] J. R. Willis, 'Variational principles and bounds for the overall properties of composites', *Continuum Models for Discrete Systems* (ed. J. W. Prowan) (1978) 185-215, University of Waterloo Press.
- [33] J. R. Willis, 'Variational and related methods for the overall properties of composites', *Advances in Applied Mechanics* (ed. C.-S. Yih) Vol. 21 (1981) 2-74, Academic Press, Inc., London.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.1.

Το “Input File” για τη δοκιμασία της μοναδιαίας κυψελίδας.

```

*HEADING
  UNIAXIAL TENSION IN UNIT CELL --- FINITE STRAINS
**  CYLINDRICAL SPECIMEN WITH AN
**  INITIALLY SPHERICAL VOID IN ITS CENTER
**
*PREPRINT, ECHO=YES, MODEL=YES
*RESTART, WRITE, FREQ=10
**
*****Nodes*****
**
*NODE, NSET=ALPHA3
  1, 0.3915, 0.0
*NODE, NSET=ALPHA1
  31, 0.0, 0.3915
*NODE, NSET=FIC
10000, 0.0, 0.0
20000, 0.0, 0.0
*NSET, NSET=GRIP
  10000
**
*NGEN, NSET=INTB, LINE=C
  1, 31, 1, 10000, 0.0, 0.0
**
*NODE
  621, 1.0, 0.0
  636, 1.0, 1.0
  651, 0.0, 1.0
**
*NGEN, NSET=RIGHT
  621, 636, 1
**
*NGEN, NSET=TOP
  636, 651, 1
**
*NSET, NSET=EXTB
  RIGHT, TOP
**
*NFILL, NSET=ALLN, BIAS=0.95
  INTB, EXTB, 20,31
**
*NSET, NSET=BOT, GENERATE
  1, 621, 31
*NSET, NSET=LEFT, GENERATE
  31, 651, 31
**
*****Elements*****
**
*ELEMENT, TYPE=CAX4H, ELSET=MEL
  1, 1, 32, 33, 2
*ELGEN, ELSET=ALLE
  1, 30, 1, 1, 20, 31, 30
*ELSET, ELSET=TOP, GENERATE
  586, 600, 1
**
*****Material Properties*****
**
*SOLID SECTION, ELSET=ALLE, MATERIAL=ONE
*MATERIAL, NAME=ONE
*ELASTIC

```

```

300., 0.3
*PLASTIC
1.
**
*****B.C.*****
**
*BOUNDARY
  BOT, 2
  LEFT, 1
*EQUATION
  2
  TOP, 2, 1., 10000, 2, -1.
  2
  RIGHT, 1, 1., 20000, 1, -1.
**
*****
**
*****Step*****
**
*STEP, INC=10000, NLGEOM
*STATIC
0.005, 0.40, , 0.005
*BOUNDARY
10000, 2, 2, 0.40
*CONTROLS, PARAMETERS=FIELD, FIELD=DISPLACEMENT
1.D-3
**
**
**
*EL PRINT, FREQ=0
*NODE PRINT, FREQ=0
**
*OUTPUT, FIELD, VARIABLE=ALL
*NODE OUTPUT
*ELEMENT OUTPUT
**
*NODE FILE, FREQ=1, NSET=INTB
COORD
*NODE FILE, FREQ=1, NSET=TOP
COORD
*NODE FILE, FREQ=1, NSET=GRIP
RF
**
*END STEP

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.2.

Αρχείο ανάγνωσης δεδομένων από “Results File”.


```

SUBROUTINE HKSMAIN
C
C   EXTRACTS INFORMATION FROM FILE TensionC.fill [*NODE FILE] AND
C   CALCULATES POROSITY fc, ASPECT RATIO w1 AND STRESS S22
C
  INCLUDE 'aba_param.inc'
  CHARACTER*80 FNAME
  DIMENSION ARRAY(2000), JRRAY(NPRECD,2000), LRUNIT(2,1)
  DIMENSION X(2000), Y(2000)
  EQUIVALENCE (ARRAY(1), JRRAY(1,1))
C
  FNAME='TensionC'
  NRU=1
  LRUNIT(1,1)=8
  LRUNIT(2,1)=2
  LOUTF=0
  CALL INITPF(FNAME,NRU,LRUNIT,LOUTF)
  JUNIT=8
  CALL DBRNU(JUNIT)
C
  IOUT1=321
  IOUT2=322
  IOUT3=323
  IOUT4=324
  IOUT5=325
  IOUT6=326
  IOUT7=327
  OPEN(UNIT=IOUT1,FILE='U2TOP.out')
  WRITE(IOUT1,*) 0.D0
  OPEN(UNIT=IOUT2,FILE='Ea.out')
  WRITE(IOUT2,*) 0.D0
  OPEN(UNIT=IOUT3,FILE='Er.out')
  WRITE(IOUT3,*) 0.D0
  OPEN(UNIT=IOUT4,FILE='S22.out')
  WRITE(IOUT4,*) 0.D0
  OPEN(UNIT=IOUT5,FILE='Porosity.out')
  WRITE(IOUT5,*) 0.04D0
  OPEN(UNIT=IOUT6,FILE='Aspect Ratio w1.out')
  WRITE(IOUT6,*) 1.D0
  OPEN(UNIT=IOUT7,FILE='DISTR.out')
  WRITE(IOUT7,*) 1.D0
C
  PI=4.D0*DATAN(1.D0)
  SURF=PI
C
  DO 100 K1=1,99999
    CALL DBFILE(0,ARRAY,JRCD)
    IF (JRCD.NE.0) GO TO 110

    KEY=JRRAY(1,2)
    IF (KEY.EQ.2000) THEN
      INC=JRRAY(1,9)
      U=ARRAY(3)

    ELSE IF (KEY.EQ.107) THEN
      NODE=JRRAY(1,3)
      X(NODE)=ARRAY(4)
      Y(NODE)=ARRAY(5)
    ELSE IF (KEY.EQ.104) THEN
      RFORCE1=ARRAY(4)
      RFORCE2=ARRAY(5)
      S22=RFORCE2/SURF
      WRITE(IOUT4,*) S22 .
    ENDIF
C
  *****Calculation of void volume*****
  IF (NODE.EQ.31) THEN
109    VVOID=0.0
    DVVOID=0.0
    DO 300 K3=1,30
      R1=X(K3)
      R2=X(K3+1)
      H=Y(K3+1)-Y(K3)
      DVVOID=PI*H*(R1*R1+R2*R2+R1*R2)/3.0
      VVOID=VVOID+DVVOID
300    CONTINUE
  ENDIF
C
  *****

```

```

IF (NODE.EQ.636) THEN
  VTOTAL=(PI*X(NODE)**2)*Y(NODE)
C
  POROSITY=VVOID/VTOTAL
C
  DISTR=X(NODE)/Y(NODE)
C
  W1=X(1)/Y(31)
C
  SURF=PI*X(NODE)**2
C
  Ea=DLOG(Y(NODE))
  Er=DLOG(X(NODE))
  WRITE(IOUT2,*) Ea
  WRITE(IOUT3,*) Er

  WRITE(IOUT1,*) U
  WRITE(IOUT5,*) POROSITY
  WRITE(IOUT6,*) W1
  WRITE(IOUT7,*) DISTR
ENDIF
C
100 CONTINUE
C
110 STOP
END

```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.

Το πρόγραμμα προσδιορισμού των ορίων διαμορφώσεως.

```

PROGRAM LOCAL_NECKING
C
PARAMETER (MTENS=3,MDI=2,MSHR=MTENS-MDI,NSTATV=6,NPROPS=7)
PARAMETER (NTENS=4,NDI=3,NSHR=NTENS-NDI)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
CHARACTER*80 CMNAME
C
DIMENSION STRESS (MTENS) , STATEV (NSTATV) ,
+DDSDDE (NTENS,NTENS) , DDSDDT (MTENS) , DRPLDE (MTENS) ,
+STRAN (MTENS) , DSTRAN (MTENS) , TIME (2) , PREDEF (1) , DPRED (1) ,
+PROPS (NPROPS) , COORDS (3) , DROT (3,3) , DFGRD0 (3,3) , DFGRD1 (3,3)
DIMENSION STRESSB (MTENS) , STATEVB (NSTATV) , DFGRD0B (3,3) ,
+DFGRD1B (3,3)
DIMENSION CHAT (4,4) , CHATB (4,4) ,
+A (2,2) , B (2) , G (2) , GT (2) , INDX (10) , R (3,3) , U (3,3) , V (3,3)
DIMENSION STRESS0 (MTENS) , STATEV0 (NSTATV) , DFGRD00 (3,3) , CHAT0 (4,4)
C
DIMENSION EB (3,3) , EIGV1 (2) , EIGV2 (2)
C
COMMON/KHARD/HC
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
IWR=0
IOUT=7
OPEN(UNIT=IOUT,STATUS='UNKNOWN',FILE='Message File.out')
IOUT1=51
OPEN(UNIT=IOUT1,STATUS='UNKNOWN',
+FILE='EVOLUTION RESULTS.out')
WRITE(IOUT1,*) ' RO E11 EHATBMAX DG1DL1
+HRATIO'
WRITE(IOUT1,*)
IOUT2=52
OPEN(UNIT=IOUT2,STATUS='UNKNOWN',FILE='EQUILIBRIUM EVOLUTION.out')
WRITE(IOUT2,*) ' RO E11 P1 PB1
+ P2 PB2'
WRITE(IOUT2,*)
IOUT3=53
OPEN(UNIT=IOUT3,STATUS='UNKNOWN',FILE='Cr Strains.out')
WRITE(IOUT3,*) ' RO E11CR E22CR E33CR
+ EBMAXCR EBMINCR E33bCR'
WRITE(IOUT3,*)
IOUT5=55
OPEN(UNIT=IOUT5,STATUS='UNKNOWN',FILE='Cr  $\Psi$   $\psi$ .out')
WRITE(IOUT5,*) ' RO  $\Psi$ 0  $\Psi$ limit E11limit'
WRITE(IOUT5,*)
C
-----
NOEL=1
NPT=1
KSTEP=1
DPSI0=PI/180.D0
DTIME=10.D0
C
H0=1.D0
H0B=0.99D0
HORATIO=H0/H0B
C
RO=0.D0
NPSI0I=1
NPSI0F=46
DL10=0.00001D0
E11RANGE=0.8D0
C
-----
C
PROPS(1)=300.D0
PROPS(2)=0.3D0
PROPS(3)=1.D0
PROPS(4)=10.D0
PROPS(5)=0.D0
PROPS(6)=0.D0
PROPS(7)=0.D0
C
STATEV0(1)=0.D0
STATEV0(2)=0.04D0
STATEV0(3)=1.D0
STATEV0(4)=1.D0
STATEV0(5)=0.D0
STATEV0(6)=0.D0

```

```

CALL KINITIA(DFGRD00,3*3)
CALL KINITIA(DROT,3*3)
DO I=1,3
  DFGRD00(I,I)=1.D0
  DROT(I,I)=1.D0
ENDDO

CALL KINITIA(STRESS0,MTENS)

CALL UMAT(STRESS0,STATEV0,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
+RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
+STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
+MDI,MSHR,MTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
+CELENT,DFGRD00,DFGRD00,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)

CALL CHATMX(STRESS0,DDSDDE,DFGRD00,CHAT0,MTENS,NTENS)

-----
***** FIND [CRITICAL] VALUE OF  $\Psi_0$  THAT CORRESPONDS TO MIN E11cr *****
E11CR=0.8D0
PSI0CR=0.D0
PSICR=0.D0
DO 90 IPSI0=NPSI0I,NPSI0F
  PSI0=(IPSI0-1)*DPSI0
  PSI0D=PSI0*180.D0/PI
  AN1=DCOS(PSI0)
  AN2=DSIN(PSI0)

  WRITE(IOUT2,*)
  WRITE(IOUT2,*) 'HB/H=',H0B/H0
  WRITE(IOUT2,*) 'PSI0=',PSI0D
  WRITE(IOUT2,*)
  WRITE(IOUT1,*)
  WRITE(IOUT1,*) 'HB/H=',H0B/H0
  WRITE(IOUT1,*) 'PSI0=',PSI0D
  WRITE(IOUT1,*)

LINCT=0
DO KINC=1,9999999

***** INITIAL CONDITIONS *****
IF (KINC.EQ.1) THEN
  CALL KCOPY(DFGRD00,DFGRD0,3*3)
  CALL KCOPY(DFGRD00,DFGRD1,3*3)
  CALL KCOPY(DFGRD00,DFGRD0B,3*3)
  CALL KCOPY(DFGRD00,DFGRD1B,3*3)
  CALL KCOPY(STRESS0,STRESS,MTENS)
  CALL KCOPY(STRESS0,STRESSB,MTENS)
  CALL KCOPY(STATEV0,STATEV,NSTATV)
  CALL KCOPY(STATEV0,STATEVB,NSTATV)
  CALL KCOPY(CHAT0,CHAT,4*4)
  CALL KCOPY(CHAT0,CHATB,4*4)
  P1=0.D0
  P2=0.D0
  PB1=0.D0
  PB2=0.D0
  G(1)=0.D0
  G(2)=0.D0
  GT(1)=0.D0
  GT(2)=0.D0
  DL1=DL10
  AL1T=1.D0
  E11=0.D0
  EHATBMAX=0.D0
  DG1DL1=0.D0

  WRITE(IOUT1,1001) RO,E11,EHATBMAX,DG1DL1,H0B/H0
  WRITE(IOUT2,1002) RO,E11,P1,PB1,P2,PB2
ENDIF

-----
501  AL1=AL1T+DL1
      AL2=AL1**RO
      DL2=AL2-AL1T**RO

```



```

A(1,1)=CHATB(1,1)*AN1**2+CHATB(4,4)*AN2**2+
+ (CHATB(1,4)+CHATB(4,1))*AN1*AN2
A(1,2)=CHATB(1,3)*AN1**2+CHATB(4,2)*AN2**2+
+ (CHATB(1,2)+CHATB(4,3))*AN1*AN2
A(2,1)=CHATB(3,1)*AN1**2+CHATB(2,4)*AN2**2+
+ (CHATB(2,1)+CHATB(3,4))*AN1*AN2
A(2,2)=CHATB(3,3)*AN1**2+CHATB(2,2)*AN2**2+
+ (CHATB(2,3)+CHATB(3,2))*AN1*AN2
DETA=A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1)
C
IF (DETA.LT.0.D0) GOTO 9000
C
B(1)=(HORATIO*CHAT(1,1)-CHATB(1,1))*DL1*AN1+
+ (HORATIO*CHAT(1,2)-CHATB(1,2))*DL2*AN1+
+ (HORATIO*CHAT(4,1)-CHATB(4,1))*DL1*AN2+
+ (HORATIO*CHAT(4,2)-CHATB(4,2))*DL2*AN2+(P1-PB1)/HOB
B(2)=(HORATIO*CHAT(3,1)-CHATB(3,1))*DL1*AN1+
+ (HORATIO*CHAT(3,2)-CHATB(3,2))*DL2*AN1+
+ (HORATIO*CHAT(2,1)-CHATB(2,1))*DL1*AN2+
+ (HORATIO*CHAT(2,2)-CHATB(2,2))*DL2*AN2+(P2-PB2)/HOB
C
CALL KLUDCMP(A,2,INDX)
CALL KLUBKSB(A,2,INDX,B)
C
DG1DL1=B(1)/DL1
WRITE(*,2001) RO,PSI0D,PSID,KINC,E11,HRATIO,DG1DL1,DETA
C
G(1)=GT(1)+B(1)
G(2)=GT(2)+B(2)
C
PSI=DATAN(AL1**(1.D0-RO))*DTAN(PSI0)
PSID=PSI*180.D0/PI
C
DFGRD1(1,1)=AL1
DFGRD1(2,2)=AL2
CALL UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
+ RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
+ STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
+ MDI,MSHR,MTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
+ CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
CALL NOMINAL(H0,AN1,AN2,DFGRD1,STRESS,P1,P2)
C
AL3=DFGRD1(3,3)
H=AL3*H0
C
CALL CHATMX(STRESS,DDSDDE,DFGRD1,CHAT,MTENS,NTENS)
C
DFGRD1B(1,1)=AL1+G(1)*AN1
DFGRD1B(1,2)=G(1)*AN2
DFGRD1B(2,1)=G(2)*AN1
DFGRD1B(2,2)=AL2+G(2)*AN2
CALL UMAT(STRESSB,STATEVB,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
+ RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
+ STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
+ MDI,MSHR,MTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,
+ CELENT,DFGRD0B,DFGRD1B,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
CALL NOMINAL(H0B,AN1,AN2,DFGRD1B,STRESSB,PB1,PB2)
C
AL3B=DFGRD1B(3,3)
HB=AL3B*H0B
HRATIO=HB/H
C
CALL CHATMX(STRESSB,DDSDDE,DFGRD1B,CHATB,MTENS,NTENS)
C
AL1T=AL1
GT(1)=G(1)
GT(2)=G(2)
C
CALL KCOPY(DFGRD1,DFGRD0,3*3)
CALL KCOPY(DFGRD1B,DFGRD0B,3*3)
C
E11=DLOG(AL1)
E22=DLOG(AL2)
E33=DLOG(AL3)
E33B=DLOG(AL3B)
C

```

```

C****  FIND EIGENVALUES OF UHATB
        CALL KPOLAR (DFGRD1B,R,U,V)
        AUX1=U(1,1)+U(2,2)
        AUX2=DSQRT((U(1,1)-U(2,2))**2+4*U(1,2)**2)
        AL1B=(AUX1+AUX2)/2
        AL2B=(AUX1-AUX2)/2
        EHATBMAX=DLOG(AL1B)
        EHATBMIN=DLOG(AL2B)

C
C****  FORM EB(3,3)
        CALL KINITIA(EB,3*3)
        EB(3,3)=E33B
        IF (U(1,2).NE.0.0) THEN
            AUX1=(U(1,1)-AL1B)/U(1,2)
            AUX2=DSQRT(1+AUX1**2)
            EIGV1(1)=1/AUX2
            EIGV1(2)=-AUX1*EIGV1(1)
            AUX1=(U(1,1)-AL2B)/U(1,2)
            AUX2=DSQRT(1+AUX1**2)
            EIGV2(1)=1/AUX2
            EIGV2(2)=-AUX1*EIGV2(1)
            DO I=1,2
                DO J=1,2
                    EB(I,J)=EHATBMAX*EIGV1(I)*EIGV1(J)+EHATBMIN*EIGV2(I)*EIGV2(J)
                ENDDO
            ENDDO
        ELSE
            EB(1,1)=DLOG(U(1,1))
            EB(2,2)=DLOG(U(2,2))
        ENDIF

        IF (E11.GT.E11RANGE) GOTO 90

        LINC=KINC/10
        LWR=LINC-LINCT
        IF (LWR.EQ.1) THEN
            LINCT=LINC
            WRITE(IOUT1,1001) RO,E11,EHATBMAX,DG1DL1,HRATIO
            WRITE(IOUT2,1002) RO,E11,P1,PB1,P2,PB2
        ENDIF

C
        ENDDO

C
9000 CONTINUE

C
        WRITE(IOUT5,4006) RO,PSI0D,PSID,E11

C
        IF (E11.LT.E11CR) THEN
            E11CR=E11
            PSI0CR=PSI0D
            PSICR=PSID

C
            E22CR=E22
            E33CR=E33
            EBMAXCR=EHATBMAX
            EBMINCR=EHATBMIN
            E33BCR=E33B
            S11CR=STRESS(1)
            S22CR=STRESS(2)
            S11BCR=STRESSB(1)
            S22BCR=STRESSB(2)
            S12BCR=STRESSB(3)
            HRATIOCR=HRATIO
            FCR=STATEV(2)
            FBCR=STATEVB(2)
            W1CR=STATEV(3)
            W2CR=STATEV(4)
            W1BCR=STATEVB(3)
            W2BCR=STATEVB(4)
        ENDIF

C
90 CONTINUE

C
        WRITE(IOUT3,4003) RO,E11CR,E22CR,E33CR,EBMAXCR,EBMINCR,E33BCR
        WRITE(IOUT5,*)
        WRITE(IOUT5,*) '      RO      Ψ0CR      ΨCR      E11CR'
        WRITE(IOUT5,*)
        WRITE(IOUT5,4006) RO,PSI0CR,PSICR,E11CR

```

```

WRITE (IOUT5, *)
WRITE (IOUT5, *)
WRITE (IOUT5, *)
C
100 CONTINUE
C
9001 CONTINUE
C
1001 FORMAT (2X, F6.4, 4 (2X, F10.5))
1002 FORMAT (2X, F6.4, 2X, F8.5, 2X, 4F18.5)
2001 FORMAT (F6.3, 2 (2X, F4.1), I7, 4 (2X, F11.5))
4003 FORMAT (2X, F6.3, 6 (2X, F10.5))
4006 FORMAT (2X, F6.3, 2 (2X, F5.1), 2X, F10.5)
C
STOP
END
C
C*****
C
SUBROUTINE CHATMX (STRESS, DDSDE, DFGRD1, CHAT, MTENS, NTENS)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)

DIMENSION STRESS (MTENS), DDSDE (NTENS, NTENS), DFGRD1 (3, 3), FINV (3, 3)
DIMENSION AM (3, 3, 3, 3), AR (3, 3, 3, 3), C (2, 2, 2, 2), CHAT (4, 4)
DIMENSION SCR3 (3, 3)
C
CALL KINITIA (AM, 3*3*3*3)
CALL KINITIA (AR, 3*3*3*3)
CALL KINITIA (C, 2*2*2*2)
CALL KINV (DFGRD1, FINV, 3, SCR3)
DETF=DFGRD1 (1, 1)*DFGRD1 (2, 2)-DFGRD1 (1, 2)*DFGRD1 (2, 1)
DETF=DETF*DFGRD1 (3, 3)
C
C**** FORM M-TENSOR
AM (3, 3, 3, 3)=DDSDE (3, 3)
C
AM (1, 1, 3, 3)=DDSDE (1, 3)+STRESS (1)
AM (2, 2, 3, 3)=DDSDE (2, 3)+STRESS (2)
AM (1, 2, 3, 3)=DDSDE (4, 3)+STRESS (3)
AM (2, 1, 3, 3)=DDSDE (4, 3)+STRESS (3)
C
AM (3, 3, 1, 1)=DDSDE (3, 1)
AM (3, 3, 2, 2)=DDSDE (3, 2)
AM (3, 3, 1, 2)=DDSDE (3, 4)
AM (3, 3, 2, 1)=DDSDE (3, 4)
C
AM (1, 1, 1, 1)=DDSDE (1, 1)
AM (1, 1, 2, 2)=DDSDE (1, 2)+STRESS (1)
AM (1, 1, 1, 2)=DDSDE (1, 4)-STRESS (3)
AM (1, 1, 2, 1)=DDSDE (1, 4)
C
AM (2, 2, 1, 1)=DDSDE (2, 1)+STRESS (2)
AM (2, 2, 2, 2)=DDSDE (2, 2)
AM (2, 2, 1, 2)=DDSDE (2, 4)
AM (2, 2, 2, 1)=DDSDE (2, 4)-STRESS (3)
C
AM (1, 2, 1, 1)=DDSDE (4, 1)
AM (1, 2, 2, 2)=DDSDE (4, 2)+STRESS (3)
AM (1, 2, 1, 2)=DDSDE (4, 4)+(STRESS (1)-STRESS (2))/2
AM (1, 2, 2, 1)=DDSDE (4, 4)-(STRESS (1)+STRESS (2))/2
C
AM (2, 1, 1, 1)=DDSDE (4, 1)+STRESS (3)
AM (2, 1, 2, 2)=DDSDE (4, 2)
AM (2, 1, 1, 2)=DDSDE (4, 4)-(STRESS (1)+STRESS (2))/2
AM (2, 1, 2, 1)=DDSDE (4, 4)-(STRESS (1)-STRESS (2))/2
C
C**** FORM R-TENSOR
AR (3, 3, 3, 3)=DETF*(FINV (3, 3)**2)*AM (3, 3, 3, 3)

AUX=DETF*FINV (3, 3)
DO IA=1, 2
DO IB=1, 2
SUM=0.0
DO IM=1, 2
SUM=SUM+FINV (IA, IM)*AM (IM, IB, 3, 3)
ENDDO
AR (IA, IB, 3, 3)=SUM*AUX

```

```

        ENDDO
ENDDO
C
DO IC=1,2
  DO ID=1,2
    SUM=0.D0
    DO IN=1,2
      SUM=SUM+FINV(IC,IN)*AM(3,3,IN,ID)
    ENDDO
    AR(3,3,IC,ID)=SUM*AUX
  ENDDO
ENDDO
C
DO IA=1,2
  DO IB=1,2
    DO IC=1,2
      DO ID=1,2
        SUMM=0.D0
        DO IM=1,2
          SUMN=0.D0
          DO IN=1,2
            SUMN=SUMN+FINV(IA,IM)*FINV(IC,IN)*AM(IM,IB,IN,ID)
          ENDDO
          SUMM=SUMM+SUMN
        ENDDO
        AR(IA,IB,IC,ID)=SUMM*DETF
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
C
C**** FORM C-TENSOR
DO I=1,2
  DO J=1,2
    DO K=1,2
      DO L=1,2
        C(I,J,K,L)=AR(I,J,K,L)-AR(I,J,3,3)*AR(3,3,K,L)/AR(3,3,3,3)
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
ENDDO
C
CHAT(1,1)=C(1,1,1,1)
CHAT(1,2)=C(1,1,2,2)
CHAT(1,3)=C(1,1,1,2)
CHAT(1,4)=C(1,1,2,1)
C
CHAT(2,1)=C(2,2,1,1)
CHAT(2,2)=C(2,2,2,2)
CHAT(2,3)=C(2,2,1,2)
CHAT(2,4)=C(2,2,2,1)
C
CHAT(3,1)=C(1,2,1,1)
CHAT(3,2)=C(1,2,2,2)
CHAT(3,3)=C(1,2,1,2)
CHAT(3,4)=C(1,2,2,1)
C
CHAT(4,1)=C(2,1,1,1)
CHAT(4,2)=C(2,1,2,2)
CHAT(4,3)=C(2,1,1,2)
CHAT(4,4)=C(2,1,2,1)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE NOMINAL(H,AN1,AN2,DFGRD1,STRESS,P1,P2)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION DFGRD1(3,3),STRESS(3),SNOM(2,2),FINV(3,3),SCR3(3,3)
C
DETF=DFGRD1(1,1)*DFGRD1(2,2)-DFGRD1(1,2)*DFGRD1(2,1)
DETF=DETF*DFGRD1(3,3)
CALL KINV(DFGRD1,FINV,3,SCR3)
C
C**** FORM NOMINAL STRESS

```

```

      SNOM(1,1)=DETF*(FINV(1,1)*STRESS(1)+FINV(1,2)*STRESS(3))
      SNOM(1,2)=DETF*(FINV(1,1)*STRESS(3)+FINV(1,2)*STRESS(2))
      SNOM(2,1)=DETF*(FINV(2,1)*STRESS(1)+FINV(2,2)*STRESS(3))
      SNOM(2,2)=DETF*(FINV(2,1)*STRESS(3)+FINV(2,2)*STRESS(2))
C
C**** FORM FORCE COMPONENTS
      P1=H*(AN1*SNOM(1,1)+AN2*SNOM(2,1))
      P2=H*(AN1*SNOM(1,2)+AN2*SNOM(2,2))
C
      RETURN
      END
C
C*****
C
      INCLUDE 'LOC_mahesh_PL-S.f'
c
c
c**** changes needed in UMAT
c 1) replace INCLUDE statement with DOUBLE PRECISION
c

```


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ.

Το υποπρόγραμμα UMAT για το πρόβλημα της επίπεδης έντασης.

```

SUBROUTINE UMAT(STRESS1,STATEV,DDSDDE1,SSE,SPD,SCD,
+RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,
+STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,
+MDI,MSHR,MTENS,NSTATV,PROPS,NPROPS,CODS,DROT,PNEWDT,
+CELENT,DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
C Plane Stress
C
C Finite strain Ponte-Kailasam model for voided metals with
C deformation induced anisotropy
C
C If IUNLOAD.NE.0 elastic stiffness on first iteration of increment
C If ITESTDE.NE.0 tests the size of the strain increment
C If ICONSISTENT.NE.0 uses "consistent" tangent of forward-Euler
C
C INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
C CHARACTER*80 CMNAME
C
C DIMENSION STRESS1(MTENS),STATEV(NSTATV),
+DDSDDE1(MTENS,MTENS),DDSDDT(MTENS),DRPLDE(MTENS),
+STRAN(MTENS),DSTRAN(MTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
+PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)
C
C-----
C DIMENSION STRESS(4),DDSDDE(4,4),
+ STINIT(4),ANTINIT(4),DEINIT(4),DSDEP(4,4)
C-----
C
C DIMENSION X(200),W(200),
+ S(4,4),P(4,4),Q(4,4),QINV(4,4),
+ CEL(4,4),AMTLD(4,4),
+ AMTLDT(4,4),DQDW1(4,4),DQDW2(4,4),
+ AIMX(4,4),AJMX(4,4),AKMX(4,4),DELTA(6),
+ AMX(4,4),CMX(4,4),AN(4),QMX(4,4),
+ AUXM1(4,4),AUXM2(4,4),AUXM3(4,4),
+ AUXM4(4,4),AUXM5(4,4),CELT(4,4),ANT(4),
+ DQDN1(4,4,3),DQDN2(4,4,3),DQDN3(4,4,3)
C
C DIMENSION AN1(3),AN2(3),AN3(3),
+ AN1T(3),AN2T(3),AN3T(3),SEL(6),AUXM(3,3),DF(3,3),
+ R(3,3),RT(3,3),U(3,3),V(3,3),UMI1(3,3),UMI2(3,3),UMI3(3,3),
+ UMI4(3,3),DSEL(6),STRESST(6),OMEGA(3,3),V1(6),
+ V2(6),V3(6),DETENS(3,3),DE(6),DEP(6),DROTT(3,3),OMEGAT(3,3),
+ ADOTN(6),DEVOID(6),DPHIDN1(3),DPHIDN2(3),DPHIDN3(3),
+ STRSABA(6)
C
C DIMENSION R1(6),R2(6),R31(6),R32(6),GV(7),DNDF(6),DNDW1(6),
+ DNDW2(6),DFDEP(6),DYDEP(6),DGDL(6)
C DIMENSION DGDEP(4,4),DJAC(5,5)
C DIMENSION INDX(10),SCR3(3,3),SCR4(4,4),SCR5(5,5)
C
C COMMON/KNICK/AJMX,AKMX
C COMMON/KNICK2/PI,DELTA,AIMX,X,W
C
C*** ARRAYS FROM THE ESHELBY SUBROUTINE
C DIMENSION X(200),W(200),
C + S(NTENS,NTENS),P(NTENS,NTENS),Q(NTENS,NTENS),QINV(NTENS,NTENS),
C + CEL(NTENS,NTENS),AMTLD(NTENS,NTENS),
C + AMTLDT(NTENS,NTENS),DQDW1(NTENS,NTENS),DQDW2(NTENS,NTENS),
C + AIMX(NTENS,NTENS),AJMX(NTENS,NTENS),AKMX(NTENS,NTENS),
C + AMX(NTENS,NTENS),CMX(NTENS,NTENS),AN(NTENS),QMX(NTENS,NTENS),
C + AUXM1(NTENS,NTENS),AUXM2(NTENS,NTENS),AUXM3(NTENS,NTENS),
C + AUXM4(NTENS,NTENS),AUXM5(NTENS,NTENS),CELT(NTENS,NTENS),ANT(NTENS),
C + DQDN1(NTENS,NTENS,3),DQDN2(NTENS,NTENS,3),DQDN3(NTENS,NTENS,3)
C
C*** STATE VARIABLES
C
C STATEV(1)=EBAR
C STATEV(2)=F
C STATEV(3)=W1
C STATEV(4)=W2
C STATEV(5)=THETA IN DEGREES
C STATEV(6)=YFLAG (0=ELASTICITY, 1=PLASTICITY)
C
C-----

```

```

NDI=3
NSHR=1
NTENS=4
DE33=0.D0
C-----
C
C*** IOUT=7 WRITES ON THE .msg FILE
IOUT=7
C*** SEE USER'S MANUAL SECTION 3.6.1
C
C
C   FLAGS!!!!!!!!!!!!!!
C
C
C   IUNLOAD=0
C   ICONSISTENT=0
C   ITESTDE=0
C
C   NGAUS=32
C
C
C
C   iwr=0
C   if (kinc.eq.20) IWR=01
C   if (kinc.eq.6) write(iout,*) 'noel, npt', noel, npt
C   IF (KINC.EQ.6.AND.NOEL.EQ.649.AND.NPT.EQ.2) IWR=01
C
C   IF (IWR.NE.0) THEN
C     WRITE(IOUT,*)
C     WRITE(IOUT,*) 'KSTEP, KINC'
C     WRITE(IOUT,1002) KSTEP,KINC
C     WRITE(IOUT,*) 'STEP-TIME, TOTAL-TIME, DTIME'
C     WRITE(IOUT,1001) TIME(1),TIME(2),DTIME
C     WRITE(IOUT,*) 'NOEL, NPT'
C     WRITE(IOUT,1002) NOEL,NPT
C   END IF
C
C** TIME(2)=TOTAL-time at the beginning of the current increment
C
C** TIME(1)=STEP-time at the beginning of the current increment
C   IF (TIME(1).EQ.0.D0) THEN
C     PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C     CALL KINITIA(DELTA,NTENS)
C     DO I=1,NDI
C       DELTA(I)=1.D0
C     ENDDO
C     CALL KINITIA(AIMX,NTENS*NTENS)
C     DO I=1,NDI
C       AIMX(I,I)=1.D0
C     ENDDO
C     DO I=NDI+1,NTENS
C       AIMX(I,I)=0.5D0
C     ENDDO
C     CALL KINITIA(AJMX,NTENS*NTENS)
C     DO I=1,NDI
C     DO J=1,NDI
C       AJMX(I,J)=1.D0/3.D0
C     ENDDO
C     ENDDO
C     DO I=1,NTENS
C     DO J=1,NTENS
C       AKMX(I,J)=AIMX(I,J)-AJMX(I,J)
C     ENDDO
C     ENDDO
C     AA=0.D0
C     BB=0.D0
C     CALL JACOBI(AA,BB,NGAUS,X,W)
C   END IF
C
C   E=PROPS(1)
C   ANU=PROPS(2)
C   SIG0=PROPS(3)
C   EXPO=PROPS(4)
C   FN=PROPS(5)
C   EN=PROPS(6)
C   SN=PROPS(7)

```

```

G=E/(2.D0*(1.D0+ANU))
AK=E/(3.D0*(1.D0-2.D0*ANU))
EO=SIG0/E
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'E, ANU, SIG0, EXPO'
  WRITE(IOUT,1001) E,ANU,SIG0,EXPO
  WRITE(IOUT,*) 'G, AK, EO'
  WRITE(IOUT,1001) G,AK,EO
  IF (FN.EQ.0.D0) WRITE(IOUT,*) 'NO VOID NUCLATION'
  IF (FN.NE.0.D0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'VOID NUCLATION'
    WRITE(IOUT,*) ' FN, EN, SN'
    WRITE(IOUT,1001) FN,EN,SN
  END IF
END IF
C
EBART=STATEV(1)
FT=STATEV(2)
W1T=STATEV(3)
W2T=STATEV(4)
THETADT=STATEV(5)
THETAT=THETADT*PI/180.D0
YFLAG=STATEV(6)
ZS=DSIN(THETAT)
ZC=DCOS(THETAT)
AN1T(1)=ZC
AN1T(2)=ZS
AN1T(3)=0.D0
AN2T(1)=-ZS
AN2T(2)=ZC
AN2T(3)=0.D0
AN3T(1)=0.D0
AN3T(2)=0.D0
AN3T(3)=1.D0
C
C-----
STRESS(1)=STRESS1(1)
STRESS(2)=STRESS1(2)
STRESS(3)=0.D0
STRESS(4)=STRESS1(3)
C-----
CALL KCOPY(STRESS,STRESST,NTENS)
CALL KCOPY(STRESS,STRSABA,NTENS)
CALL KTRANSPOSE(DROT,DROTT,3,3)
CALL KROTSTRS(STRESST,DROTT,QMX,NTENS)
C
C-----INITIAL STRESS --> STINIT(4)-----
CALL KCOPY(STRESST,STINIT,NTENS)
C-----
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'EBART, FT, W1T, W2T, THETAT, YFLAG'
  WRITE(IOUT,1001) EBART,FT,W1T,W2T,THETADT,YFLAG
  WRITE(IOUT,*) 'AN1T(I), AN2T(I), AN3T(I)'
  WRITE(IOUT,1001) (AN1T(I),I=1,3)
  WRITE(IOUT,1001) (AN2T(I),I=1,3)
  WRITE(IOUT,1001) (AN3T(I),I=1,3)
  WRITE(IOUT,*) 'NGAUS'
  WRITE(IOUT,1002) NGAUS
  WRITE(IOUT,*) 'X(1), X(2),...'
  WRITE(IOUT,1001) X(1),X(2)
  WRITE(IOUT,*) 'W(1), W(2),...'
  WRITE(IOUT,1001) W(1),W(2)
  WRITE(IOUT,*) 'STRESST BEFORE UN-ROTATION'
  WRITE(IOUT,1001) (STRSABA(I),I=1,NTENS)
  WRITE(IOUT,*) 'STRESST'
  WRITE(IOUT,1001) (STRESST(I),I=1,NTENS)
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD0'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DFGRD0(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD1'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DFGRD1(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'DROT'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DROT(I,J),J=1,3)

```

```

      ENDDO
      END IF
C
C*** FORM ELASTIC STIFFNESS CEL
C
      CALL KESH_Q(Q, ANU, W1T, W2T, AN1T, AN2T, AN3T, X, W, NGAUS, NTENS, G)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'Q'
        DO I=1,NTENS
          WRITE(IOUT,1001) (Q(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
      END IF
C
      CALL KINV(Q, QINV, NTENS, SCR4)
      DO I=1,NTENS
        DO J=NDI+1,NTENS
          QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
        ENDDO
      ENDDO
      DO I=NDI+1,NTENS
        DO J=1,NTENS
          QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
        ENDDO
      ENDDO
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'QINV'
        DO I=1,NTENS
          WRITE(IOUT,1001) (QINV(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
      END IF
C
      Z1=2.D0*G
      Z2=3.D0*AK
      Z3=FT/(1.D0-FT)
      DO I=1,NTENS
        DO J=1,NTENS
          CEL(I,J)=AKMX(I,J)/Z1+AJMX(I,J)/Z2+QINV(I,J)*Z3
        ENDDO
      ENDDO
C
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'CEL^(-1)'
        DO I=1,NTENS
          WRITE(IOUT,1001) (CEL(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
      END IF
C
      CALL KCOPY(CEL,AUXM1,NTENS*NTENS)
      CALL KINV(AUXM1,CEL,NTENS,SCR4)
C
      DO I=1,NTENS
        DO J=NDI+1,NTENS
          CEL(I,J)=CEL(I,J)/2.D0
        ENDDO
      ENDDO
      DO I=NDI+1,NTENS
        DO J=1,NTENS
          CEL(I,J)=CEL(I,J)/2.D0
        ENDDO
      ENDDO
C
      CALL KCOPY(CEL,DDSDDE,NTENS*NTENS)
      CALL KCOPY(CEL,CELT,NTENS*NTENS)
C
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'CEL'
        DO I=1,NTENS
          WRITE(IOUT,1001) (CEL(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
      END IF
C
C*** VALUE OF YIELD FUNCTION AT TIME T
C
      POISSON=0.5D0
      CALL KESH_Q(Q, POISSON, W1T, W2T, AN1T, AN2T, AN3T, X, W, NGAUS, NTENS, G)
      CALL KINV(Q, QINV, NTENS, SCR4)
      DO I=1,NTENS
        DO J=NDI+1,NTENS

```



```

      QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
ENDDO
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
DO J=1,NTENS
  QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
ENDDO
ENDDO
CALL KMTLD(AMTLDT,FT,G,NTENS,AKMX,QINV)
CALL KYFCN(PHIT,STRESST,EBART,FT,AMTLDT,EXPO,E0,SIG0,AUXM1,NTENS,
+ NDI)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'M-TILDE AT TIME T'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (AMTLDT(I,J),J=1,NTENS)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'PHIT'
  WRITE(IOUT,1001) PHIT
ENDIF
C
AUX=0.D0
DO I=1,3
DO J=1,3
  AUX=AUX+DABS(DFGRD1(I,J)-DFGRD0(I,J))
ENDDO
ENDDO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DFGRD1-DFGRD0'
  WRITE(IOUT,1001) AUX
END IF
IF (AUX.NE.0.D0) GOTO 29
C
C
C
C
C
C
C*** DE=0 NEEDS DDSDE ONLY
C
IF (IUNLOAD.NE.0) GOTO 18
IF (YFLAG.NE.0.D0) GOTO 19
18 CONTINUE
C*** ELASTICITY
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
  DDSDE(I,J)=DDSDE(I,J)+STRESST(I)*DELTA(J)
ENDDO
ENDDO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DEMAG=0, ELASTIC DDSDE'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
  ENDDO
END IF
GOTO 9999
C
19 CONTINUE
C*** PLASTICITY
C
IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'DEMAG=0, PLASTIC DDSDE'
C
CALL KPLJAC(DDSDE,CEL,STRESST,EBART,FT,W1T,W2T,AN1T,AN2T,AN3T,
+ X,W,NGAUS,S,P,Q,QINV,AMTLDT,DQDW1,DQDW2,AIMX,AJMX,AKMX,
+ AMX,CMX,AN,QMX,AUXM1,AUXM2,AUXM3,AUXM4,OMEGA,
+ NTENS,NDI,ANU,G,AK,EXPO,E0,SIG0,FN,EN,SN,IOUT,IWR)
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
  DDSDE(I,J)=DDSDE(I,J)+STRESST(I)*DELTA(J)
ENDDO
ENDDO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DEMAG=0, PLASTIC DDSDE'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
  ENDDO
END IF
GOTO 9999
C

```

```

C
C
C
C
C
29  CONTINUE
C
C*** INTEGRATE ELASTOPLASTIC EQUATIONS
C
CALL KINV(DFGRD0,AUXM,3,SCR3)
CALL KMULT(DFGRD1,AUXM,DF,3,3,3)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DF'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DF(I,J),J=1,3)
  ENDDO
END IF
C
CALL KPOLAR(DF,R,U,V)
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'R'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (R(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'U'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (U(I,J),J=1,3)
  ENDDO
  WRITE(IOUT,*) 'V'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (V(I,J),J=1,3)
  ENDDO
END IF
C
CALL KCOPY(U,UMI1,3*3)
DO I=1,3
  UMI1(I,I)=UMI1(I,I)-1.D0
ENDDO
CALL KMULT(UMI1,UMI1,UMI2,3,3,3)
CALL KMULT(UMI2,UMI1,UMI3,3,3,3)
CALL KMULT(UMI3,UMI1,UMI4,3,3,3)
DO I=1,3
DO J=1,3
  DETENS(I,J)=UMI1(I,J)-UMI2(I,J)/2.D0+UMI3(I,J)/3.D0
+
  -UMI4(I,J)/4.D0
ENDDO
ENDDO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DETENS'
  DO I=1,3
    WRITE(IOUT,1001) (DETENS(I,J),J=1,3)
  ENDDO
END IF
C
DO I=1,NDI
  DE(I)=DETENS(I,I)
ENDDO
DO I=1,NSHR
  IF (I.EQ.1) DE(NDI+I)=DETENS(1,2)
  IF (I.EQ.2) DE(NDI+I)=DETENS(1,3)
  IF (I.EQ.3) DE(NDI+I)=DETENS(2,3)
ENDDO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DE VECTOR (WITH TENSOR-SHEAR COMPONENTS)'
  WRITE(IOUT,1001) (DE(I),I=1,NTENS)
END IF
C
CALL KAB(DE,DE,DEMAG,NTENS,NDI)
DEMAG=DSQRT(2.D0*DEMAG/3.D0)
ETOL=DEMAG*1.D-3
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'DEMAG, ETOL'
  WRITE(IOUT,1001) DEMAG,ETOL
END IF
IF (ITESTDE.NE.0) THEN
  EMAX=4.D0*E0
  RATIO=DEMAG/EMAX
  IF (RATIO.GT.1.D0) THEN

```

```

      pnewdt=0.5d0
C     PNEWDT=0.9D0/RATIO
      WRITE(IOUT,*) 'DEMAG>4*E0. UMAT CUTS BACK. PNEWDT=', pnewdt
      WRITE(IOUT,*) 'NOEL, NPT, KSTEP, KINC'
      WRITE(IOUT,1002) NOEL,NPT,KSTEP,KINC
      RETURN
    END IF
  END IF
C
  DO I=NDI+1,NTENS
    DE(I)=DE(I)*2.D0
  ENDDO
  DE(3)=0.D0
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'DE VECTOR (WITH ENNG-SHEAR COMPONENTS)'
    WRITE(IOUT,1001) (DE(I),I=1,NTENS)
  END IF
  CALL KMULT(CELT,DE,DSEL,NTENS,NTENS,1)
C-----FIND DE(3)-----
  DE33INIT=-DSEL(3)/CELT(3,3)
  DE(3)=DE33INIT
  CALL KCOPY(DE,DEINIT,NTENS)
  CALL KMULT(CELT,DEINIT,DSEL,NTENS,NTENS,1)
C-----
  DO I=1,NTENS
    SEL(I)=STRESST(I)+DSEL(I)
  ENDDO
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'DSEL'
    WRITE(IOUT,1001) (DSEL(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'SEL'
    WRITE(IOUT,1001) (SEL(I),I=1,NTENS)
  END IF
C
C*** CHECK FOR YIELDING
C
  YTOL=SIG0*1.D-4
  CALL KYFCN(PHIEL,SEL,EBART,FT,AMTLDT,EXPO,E0,SIG0,AUXM1,NTENS,NDI)
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'PHIEL, YTOL'
    WRITE(IOUT,1001) PHIEL,YTOL
  END IF
  IF (PHIEL.LE.YTOL) GOTO 1000
  IF (PHIEL.GT.YTOL) GOTO 2000
C
C*** ELASTICITY
C
1000 CONTINUE
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'ELASTICITY'
  CALL KCOPY(SEL,STRESS,NTENS)
  CALL KCOPY(AN1T,AN1,3)
  CALL KCOPY(AN2T,AN2,3)
  CALL KCOPY(AN3T,AN3,3)
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'STRESS HAT'
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
C
C*** ROTATE STRESS, AN1, AN2 AND AN3
C
  CALL KROTSTRS(STRESS,R,QMX,NTENS)
  CALL KMULT(R,AN1,V1,3,3,1)
  CALL KCOPY(V1,AN1,3)
  CALL KMULT(R,AN2,V1,3,3,1)
  CALL KCOPY(V1,AN2,3)
  CALL KMULT(R,AN3,V1,3,3,1)
  CALL KCOPY(V1,AN3,3)
  THETA=DATAN2(AN1(2),AN1(1))*180.D0/PI
  STATEV(5)=THETA
  STATEV(6)=0.D0
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'STRESS AFTER ROTATION'
    WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'AN1, AN2 AND AN3 AFTER ROTATION'
    WRITE(IOUT,1001) (AN1(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,1001) (AN2(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,1001) (AN3(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,*) 'THETA AFTER ROTATION'
    WRITE(IOUT,1001) THETA
  END IF

```

```

      END IF
C
C*** ELASTIC JACOBIAN
C
      DO I=1,NTENS
      DO J=1,NTENS
        DDSDE(I,J)=DDSDE(I,J)+STRESS(I)*DELTA(J)
      ENDDO
      ENDDO
C
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'ELASTIC DDSDE'
        DO I=1,NTENS
          WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
      END IF
      GOTO 9999
C
C*** PLASTICITY
C
      2000 CONTINUE
      IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'PLASTICITY'
C
C-----FORM DSDEP-----
      DO I=1,NTENS
        DO J=1,NTENS
          DSDEP(I,J)=CELT(I,3)*CELT(J,3)/CELT(3,3)-CELT(I,J)
        ENDDO
      ENDDO
C-----
C
      FRACT=0.D0
      AUX=0.D0
C-----
      CALL KINITIA(ANTINIT,NTENS)
C-----
C
      IF (YFLAG.NE.0) THEN
        CALL KFINDN(ANT,STRESST,FT,AMTLDT,AUXM1,NTENS,NDI)
        ZZ=ANT(1)+ANT(2)+ANT(3)
C
C-----
        CALL KCOPY(ANT,ANTINIT,NTENS)
C-----
C
      CALL KAB(ANT,DSEL,AUX,NTENS,NDI)
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'AN AT T'
        WRITE(IOUT,1001) (ANT(I),I=1,NTENS)
        WRITE(IOUT,*) 'N_KK AT T'
        WRITE(IOUT,1001) ZZ
        WRITE(IOUT,*) 'ANT:DSEL'
        WRITE(IOUT,1001) AUX
      END IF
      END IF
C
      IF (YFLAG.EQ.0.D0.OR.AUX.LT.0.D0) THEN
C*** FIND ELASTIC FRACTION
        CALL KELFR(STRESST,DSEL,FT,NTENS,NDI,AMTLDT,AUXM1,PHIT,FRACT)
        DO I=1,NTENS
          STRESST(I)=STRESST(I)+FRACT*DSEL(I)
          DE(I)=(1.D0-FRACT)*DE(I)
        ENDDO
        IF (IWR.NE.0) THEN
          WRITE(7,*) 'ELASTIC FRACTION R'
          WRITE(7,1001) FRACT
          WRITE(IOUT,*) 'STRESST AFTER SCALING'
          WRITE(IOUT,1001) (STRESST(I),I=1,NTENS)
          WRITE(IOUT,*) 'DE AFTER SCALING (ENGNG-SHEAR)'
          WRITE(IOUT,1001) (DE(I),I=1,NTENS)
          CALL KYFCN(PHIT,STRESST,EBART,FT,AMTLDT,EXPO,E0,SIG0,AUXM1,
+            NTENS,NDI)
          WRITE(IOUT,*) 'PHIT AFTER SCALING OF STRESS'
          WRITE(IOUT,1001) PHIT
        END IF
      END IF
C
C*** PRELIMINARY CALCULATIONS AT THE START OF THE INCREMENT

```

```

C
C** FIND N AT T
CALL KFINDN (ANT, STRESST, FT, AMTLDT, AUXM1, NTENS, NDI)
CALL KCOPY (ANT, AN, NTENS)
C** FIND A, C AT T
CALL KAC (AMX, CMX, FT, W1T, W2T, AN1T, AN2T, AN3T, S, P, AUXM1, AUXM2,
+ X, W, NGAUS, NTENS, NDI, AIMX)
C
IF (IWR.NE.0) THEN
WRITE (IOUT, *) 'ESHELBY TENSOR S (ANU=0.5) FROM KAC'
DO I=1, NTENS
WRITE (IOUT, 1001) (S(I, J), J=1, NTENS)
ENDDO
WRITE (IOUT, *) 'A AT T'
DO I=1, NTENS
WRITE (IOUT, 1001) (AMX(I, J), J=1, NTENS)
ENDDO
WRITE (IOUT, *) 'EHSELBY TENSOR PI (ANU=0.5) FROM KAC'
DO I=1, NTENS
WRITE (IOUT, 1001) (P(I, J), J=1, NTENS)
ENDDO
WRITE (IOUT, *) 'C AT T'
DO I=1, NTENS
WRITE (IOUT, 1001) (CMX(I, J), J=1, NTENS)
ENDDO
END IF
C
C** FIND OMEGA AT T
OM=0.D0
WTOL=1.D-2
IF (DABS(W1T-W2T).GE.WTOL) THEN
T12=CMX(4, 1)*ANT(1)+CMX(4, 2)*ANT(2)+CMX(4, 3)*ANT(3)+
+ 2.D0*CMX(4, 4)*ANT(4)
B21=(W2T*W2T+W1T*W1T)/(W2T*W2T-W1T*W1T)
V3(1)=-DSIN(2.D0*THETAT)
V3(2)=-V3(1)
V3(3)=0.D0
V3(4)=DCOS(2.D0*THETAT)
C-----
CALL KCOPY (ANT, V1, NTENS)
DO I=NDI+1, NTENS
V1(I)=V1(I)*2.D0
END DO
CALL KMULT (AMX, V1, V2, NTENS, NTENS, 1)
CALL KCOPY (V2, ADOTN, NTENS)
C-----
CALL KAB (V3, ADOTN, AUX, NTENS, NDI)
OM=-T12-0.5D0*B21*AUX
END IF
C
CALL KINITIA (OMEGAT, 3*3)
OMEGAT(1, 2)=-OM
OMEGAT(2, 1)=OM
CALL KCOPY (OMEGAT, OMEGA, 3*3)
C
ZX=W1T-W2T
IF (IWR.NE.0) THEN
WRITE (IOUT, *) 'W1T-W2T, WTOL'
WRITE (IOUT, 1001) ZX, WTOL
WRITE (IOUT, *) 'OMEGA AT T'
DO I=1, 3
WRITE (IOUT, 1001) (OMEGAT(I, J), J=1, 3)
ENDDO
ENDIF
C
R1(1)=2.D0*STRESST(4)*OM
R1(2)=-R1(1)
R1(3)=0.D0
R1(4)=(STRESST(2)-STRESST(1))*OM
IF (IWR.NE.0) THEN
WRITE (IOUT, *) 'R1=S.OM-OM.S'
WRITE (IOUT, 1001) (R1(I), I=1, NTENS)
END IF
C
CALL KYCURVE (YIELD, H, EBART, EXPO, E0, SIG0)
AUX=(1.D0-FT)*YIELD
DO I=1, NTENS
R2(I)=STRESST(I)/AUX

```



```

END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'R2'
  WRITE(IOUT,1001) (R2(I),I=1,NTENS)
END IF
C
V3(1)=AN3T(1)**2-AN1T(1)**2
V3(2)=AN3T(2)**2-AN1T(2)**2
V3(3)=AN3T(3)**2-AN1T(3)**2
V3(4)=2.D0*(AN3T(1)*AN3T(2)-AN1T(1)*AN1T(2))
CALL KMULT(V3,AMX,R31,1,NTENS,NTENS)
V3(1)=AN3T(1)**2-AN2T(1)**2
V3(2)=AN3T(2)**2-AN2T(2)**2
V3(3)=AN3T(3)**2-AN2T(3)**2
V3(4)=2.D0*(AN3T(1)*AN3T(2)-AN2T(1)*AN2T(2))
CALL KMULT(V3,AMX,R32,1,NTENS,NTENS)
DO I=1,NTENS
  R31(I)=W1T*R31(I)
  R32(I)=W2T*R32(I)
END DO
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'R31'
  WRITE(IOUT,1001) (R31(I),I=1,NTENS)
  WRITE(IOUT,*) 'R32'
  WRITE(IOUT,1001) (R32(I),I=1,NTENS)
END IF
C
C FIND HH, H1, H2, H3, GG, G1, G2 AT T (needed for DL estimate)
GG=0.D0
DO I=1,NDI
  GG=GG+ANT(I)
END DO
HH=GG*(1.D0-FT)
C nucleation term added below
C
CALL KCOPY(ANT,V1,NTENS)
DO I=NDI+1,NTENS
  V1(I)=V1(I)*2.D0
END DO
CALL KMULT(AMX,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
CALL KCOPY(V2,ADOTN,NTENS)
C
V3(1)=AN3T(1)**2-AN1T(1)**2
V3(2)=AN3T(2)**2-AN1T(2)**2
V3(3)=AN3T(3)**2-AN1T(3)**2
V3(4)=AN3T(1)*AN3T(2)-AN1T(1)*AN1T(2)
CALL KAB(V3,ADOTN,G1,NTENS,NDI)
V3(1)=AN3T(1)**2-AN2T(1)**2
V3(2)=AN3T(2)**2-AN2T(2)**2
V3(3)=AN3T(3)**2-AN2T(3)**2
V3(4)=AN3T(1)*AN3T(2)-AN2T(1)*AN2T(2)
CALL KAB(V3,ADOTN,G2,NTENS,NDI)
H1=G1*W1T
H2=G2*W2T
C
CALL KYCURVE(YIELD,H,EBART,EXPO,E0,SIG0)
CALL KAB(STRESST,ANT,SUM,NTENS,NDI)
H3=SUM/((1.D0-FT)*YIELD)
ANUCL=0.D0
IF (FN.NE.0.D0)
+ ANUCL=(FN/(SN*DSQRT(2.D0*PI)))*DEXP(-0.5D0*((EBART-EN)/SN)**2)
HH=HH+ANUCL*H3
C
HHT=HH
H1T=H1
H2T=H2
H3T=H3
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'HH, H1, H2, H3 AT T'
  WRITE(IOUT,1001) HH,H1,H2,H3
END IF
C
C*** DETERMINE DL
C
C FIRST ESTIMATES FOR DL AND DEP
C
CALL KMTLD(AMTLDT,FT,G,NTENS,AKMX,QINV)

```

```

CALL KFINDN (ANT, STRESST, FT, AMTLDT, AUXM1, NTENS, NDI)
CALL KYCURVE (YIELD, H, EBART, EXPO, E0, SIG0)
DPHIDEP=-2.D0*YIELD*H
POISSON=0.5D0
CALL KDQ (DQDW1, DQDW2, POISSON, W1T, W2T, AN1T, AN2T, AN3T, X, W, NGAUS,
+ NTENS, G)
CALL KDFD (DPHIDF, DPHIDW1, DPHIDW2, AKMX, FT, STRESST, DQDW1, DQDW2,
+ AUXM1, AUXM2, AUXM3, AUXM4, NTENS, NDI, G, W1T, W2T, AN1T, AN2T, AN3T,
+ QINV)
C
CALL KFINDDL (DL, STRESST, EBART, FT, W1T, W2T, AN1T, AN2T, AN3T,
+ ANT, CEL, DE, NTENS, NDI, HH, H1, H2, H3, EXPO, E0, SIG0, G, Q, QINV,
+ DQDW1, DQDW2, AKMX, AUXM1, AUXM2, AUXM3, AUXM4,
+ DPHIDF, DPHIDW1, DPHIDW2, DPHIDEP)
C
DO I=1, NTENS
  DEP (I) =DL*ANT (I)
END DO
C
C-----
CALL KCOPY (DEP, V1, NTENS)
DO I=NDI+1, NTENS
  V1 (I) =V1 (I) *2.D0
ENDDO
CALL KMULT (CELT, V1, V2, NTENS, NTENS, 1)
DE33=DE33INIT+V2 (3) /CELT (3, 3)
C-----
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE (IOUT, *) 'FIRST ESTIMATE FOR DL'
  WRITE (IOUT, 1001) DL
  WRITE (IOUT, *) 'FIRST ESTIMATE FOR DEP'
  WRITE (IOUT, 1001) (DEP (I), I=1, NTENS)
END IF
C
C
C
C
C NEWTON LOOP FOR DL AND DEP
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE (IOUT, *) 'NEWTON LOOP STARTS'
  WRITE (IOUT, *) ' DL, DEP (I) '
  WRITE (IOUT, *) '-PHI, -GV (I) '
END IF
C
DO ITER=1, 20
C
CALL KCOPY (DEP, V1, NTENS)
DO I=NDI+1, NTENS
  V1 (I) =V1 (I) *2.D0
END DO
CALL KMULT (AMX, V1, DEVOID, NTENS, NTENS, 1)
C
C-----UPDATE VARIABLES @ TIME 'T'-----
DEINIT (3) =DE33
DE (3) =DE33
CALL KMULT (CELT, DEINIT, DSEL, NTENS, NTENS, 1)
DO I=1, NTENS
  SEL (I) =STINIT (I) +DSEL (I)
ENDDO
IF (YFLAG.NE.0) THEN
  CALL KAB (ANTINIT, DSEL, AUX, NTENS, NDI)
ENDIF
IF (YFLAG.EQ.0.D0.OR.AUX.LT.0.D0) THEN
C*** FIND FRACT, STRESST, AFTER SCALING
CALL KELFR (STINIT, DSEL, FT, NTENS, NDI, AMTLDT, AUXM1, PHIT, FRACT)
DO I=1, NTENS
  STRESST (I) =STINIT (I) +FRACT*DSEL (I)
ENDDO
C
CALL KFINDN (ANT, STRESST, FT, AMTLDT, AUXM1, NTENS, NDI)
CALL KCOPY (ANT, AN, NTENS)
C*** FIND OMEGA AT T
OM=0.D0
WTOL=1.D-2
IF (DABS (W1T-W2T) .GE. WTOL) THEN
  T12=CMX (4, 1) *ANT (1) +CMX (4, 2) *ANT (2) +CMX (4, 3) *ANT (3) +

```

```

+      2.D0*CMX(4,4)*ANT(4)
      B21=(W2T*W2T+W1T*W1T)/(W2T*W2T-W1T*W1T)
      V3(1)=-DSIN(2.D0*THETAT)
      V3(2)=-V3(1)
      V3(3)=0.D0
      V3(4)=DCOS(2.D0*THETAT)
C-----
      CALL KCOPY(ANT,V1,NTENS)
      DO I=NDI+1,NTENS
        V1(I)=V1(I)*2.D0
      END DO
      CALL KMULT(AMX,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
      CALL KCOPY(V2,ADOTN,NTENS)
C-----
      CALL KAB(V3,ADOTN,AUX,NTENS,NDI)
      OM=-T12-0.5D0*B21*AUX
      END IF
      CALL KINITIA(OMEGAT,3*3)
      OMEGAT(1,2)=-OM
      OMEGAT(2,1)=OM
      CALL KCOPY(OMEGAT,OMEGA,3*3)
C*** FIND R1 @ T
      R1(1)=2.D0*STRESST(4)*OM
      R1(2)=-R1(1)
      R1(3)=0.D0
      R1(4)=(STRESST(2)-STRESST(1))*OM
C*** FIND R2 @ T
      CALL KYCURVE(YIELD,H,EBART,EXPO,E0,SIG0)
      AUX=(1.D0-FT)*YIELD
      DO I=1,NTENS
        R2(I)=STRESST(I)/AUX
      END DO
      ENDIF
C-----
      CALL KUPDATE(DL,STRESS,EBAR,F,W1,W2,AN1,AN2,AN3,STRESST,EBART,
+      FT,W1T,W2T,AN1T,AN2T,AN3T,SEL,CELT,NTENS,NDI,ANT,GG,G1,G2,HH,
+      H1,H2,H3,OMEGAT,V,DEVOID,DEP,R1,R2,R31,R32,ANUCL,IWR,IOUT)
C
      POISSON=0.5D0
      CALL KESH_Q(Q,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
      CALL KINV(Q,QINV,NTENS,SCR4)
      DO I=1,NTENS
        DO J=NDI+1,NTENS
          QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
        ENDDO
      ENDDO
      DO I=NDI+1,NTENS
        DO J=1,NTENS
          QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
        ENDDO
      ENDDO
C
      CALL KMTLD(AMTLD,F,G,NTENS,AKMX,QINV)
      CALL KYFCN(PHI,STRESS,EBAR,F,AMTLD,EXPO,E0,SIG0,AUXM1,NTENS,
+      NDI)
      CALL KFINDN(AN,STRESS,F,AMTLD,AUXM1,NTENS,NDI)
      GV(1)=-PHI
      DO I=1,NTENS
        GV(1+I)=- (DEP(I)-DL*AN(I))
      END DO
C
      IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,2001) DL,(DEP(I),I=1,NTENS)
        WRITE(IOUT,1001) (GV(I),I=1,1+NTENS)
      END IF
C
      IF (DABS(GV(1)).GT.YTOL) GOTO 100
      DO I=2,1+NTENS
        IF (DABS(GV(I)).GT.ETOL) GOTO 100
      END DO
      GOTO 2500
100  CONTINUE
C
C*** FIND DPHIDL, DYDEP(I)
      CALL KAB(AN,R1,DPHIDL,NTENS,NDI)
      CALL KYCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
      DPHIDEP=-2.D0*YIELD*H

```

```

        POISSON=0.5D0
        CALL KDQ(DQDW1,DQDW2,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,
+         NTENS,G)
        CALL KDFD(DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,AKMX,F,STRESS,DQDW1,DQDW2,
+         AUXM1,AUXM2,AUXM3,AUXM4,NTENS,NDI,G,W1,W2,AN1,AN2,AN3,
+         QINV)
        CALL KCOPY(AN,V1,NTENS)
        DO I=NDI+1,NTENS
            V1(I)=V1(I)*2.D0
        END DO
C-----
        CALL KMULT(DSDEP,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
C-----
        DO I=1,NTENS
            DFDEP(I)=(1.D0-FT)*DELTA(I)+ANUCL*R2(I)
        END DO
        DO I=1,NTENS
C-----
            DYDEP(I)=V2(I)+DPHIDEP*R2(I)+DPHIDF*DFDEP(I)+
+            DPHIDW1*R31(I)+DPHIDW2*R32(I)
C-----
        END DO
C
C*** FIND DGD(I), DGDEP(I,J)
        CALL KCOPY(R1,V1,NTENS)
        DO I=NDI+1,NTENS
            V1(I)=V1(I)*2.D0
        END DO
        CALL KMULT(AMTLD,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
        AUX=2.D0*DL/(1.D0-F)
        DO I=1,NTENS
            DGD(I)=-AN(I)-AUX*V2(I)
        END DO
C
        CALL KDN(DNDF,DNDW1,DNDW2,F,AKMX,Q,QINV,G,STRESS,NTENS,NDI,
+         AN,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,AUXM1,AMTLD)
C-----
        CALL KCOPY(DSDEP,AUXM1,NTENS*NTENS)
C-----
        DO I=NDI+1,NTENS
            DO J=1,NTENS
                AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
            END DO
        END DO
        CALL KMULT(AMTLD,AUXM1,AUXM2,NTENS,NTENS,NTENS)
        AUX=2.D0/(1.D0-F)
        DO I=1,NTENS
            DO J=1,NTENS
C-----
                DGDEP(I,J)=AIMX(I,J)-DL*(AUX*AUXM2(I,J)+DNDF(I)*DFDEP(J)+
+                DNDW1(I)*R31(J)+DNDW2(I)*R32(J))
C-----
            END DO
        END DO
C
        DJAC(1,1)=DPHIDL
        DO J=1,NTENS
            DJAC(1,1+J)=DYDEP(J)
        END DO
        DO I=1,NTENS
            DJAC(1+I,1)=DGD(I)
        END DO
        DO I=1,NTENS
            DO J=1,NTENS
                DJAC(1+I,1+J)=DGDEP(I,J)
            END DO
        END DO
        DO I=1,1+NTENS
            DO J=1+NDI+1,1+NTENS
                DJAC(I,J)=DJAC(I,J)*2.D0
            END DO
        END DO
        CALL KLUDCMP(DJAC,1+NTENS,INDX)
        CALL KLUBKSB(DJAC,1+NTENS,INDX,GV)
        DL=DL+GV(1)
        DO I=1,NTENS
            DEP(I)=DEP(I)+GV(1+I)
        END DO

```

```

C-----
  CALL KCOPY (DEP,V1,NTENS)
  DO I=NDI+1,NTENS
    V1(I)=V1(I)*2.D0
  ENDDO
  CALL KMULT (CELT,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
  DE33=DE33INIT+V2(3)/CELT(3,3)
C-----
  END DO
  WRITE(IOUT,*) 'NEWTON LOOP DOES NOT CONVERGE. PNEWDT SET TO 0.5.'
  WRITE(IOUT,*) 'NOEL, NPT, KSTEP, KINC'
  WRITE(IOUT,1002) NOEL,NPT,KSTEP,KINC
  PNEWDT=0.5D0
  RETURN
2500 CONTINUE
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'STRESS'
    WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'EBAR, F'
    WRITE(IOUT,1001) EBAR, F
    WRITE(IOUT,*) 'W1, W2'
    WRITE(IOUT,1001) W1,W2
    WRITE(IOUT,*) 'AN1(I), AN2(I), AN3(I)'
    WRITE(IOUT,1001) (AN1(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,1001) (AN2(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,1001) (AN3(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,*) 'DEP'
    WRITE(IOUT,1001) (DEP(I),I=1,NTENS)
  END IF
C
C*** ROTATE STRESS, AN1, AN2 AND AN3
C
  CALL KROTSTRS (STRESS,R,QMX,NTENS)
  CALL KMULT (R,AN1,V1,3,3,1)
  CALL KCOPY (V1,AN1,3)
  CALL KMULT (R,AN2,V1,3,3,1)
  CALL KCOPY (V1,AN2,3)
  CALL KMULT (R,AN3,V1,3,3,1)
  CALL KCOPY (V1,AN3,3)
C
C MAKE SURE THAT W1<W2
  IF (W1.GT.W2) THEN
    AUX=W1
    W1=W2
    W2=AUX
    CALL KCOPY (AN1,V1,3)
    CALL KCOPY (AN2,AN1,3)
    CALL KCOPY (V1,AN2,3)
    AUX=AN1(1)*AN2(2)-AN2(1)*AN1(2)
    IF (AUX.LT.0.D0) THEN
      DO I=1,2
        AN2(I)=-AN2(I)
      END DO
    END IF
  END IF
C
C
  THETA=DATAN2 (AN1(2),AN1(1))*180.D0/PI
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'ROTATED STRESS VECTOR'
    WRITE(IOUT,1001) (STRESS(I),I=1,NTENS)
    WRITE(IOUT,*) 'ROTATED UNIT VECTORS AN1, AN2, AN3'
    WRITE(IOUT,1001) (AN1(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,1001) (AN2(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,1001) (AN3(I),I=1,3)
    WRITE(IOUT,*) 'THETA IN DEGREES'
    WRITE(IOUT,1001) THETA
  END IF
C
C*** UPDATE STATE VARIABLES
C
C
  STATEV(1)=EBAR
  STATEV(2)=F
  STATEV(3)=W1
  STATEV(4)=W2
  STATEV(5)=THETA
  STATEV(6)=1.D0

```

```

C
C*** PLASTIC TANGENT MODULUS
C
      iwr1=iwr
C      IF (ICONSISTENT.EQ.0) THEN
          CALL KPLJAC(ddsdde, CEL, STRESS, EBAR, F, W1, W2, AN1, AN2, AN3,
+ X, W, NGAUS, S, P, Q, QINV, AMTLD, DQDW1, DQDW2, AIMX, AJMX, AKMX,
+ AMX, CMX, AN, QMX, AUXM1, AUXM2, AUXM3, AUXM4, OMEGA,
+ NTENS, NDI, ANU, G, AK, EXPO, E0, SIG0, FN, EN, SN, IOUT, IWR1)
C
C*** PLASTIC JACOBIAN
C
      ELSE
C          CALL KKPLJAC(DDSDDE, CEL, STRESS, EBAR, F, W1, W2, AN1, AN2, AN3,
C + X, W, NGAUS, S, P, Q, QINV, AMTLD, DQDW1, DQDW2, AIMX, AJMX, AKMX,
C + AMX, CMX, AN, QMX, AUXM1, AUXM2, AUXM3, AUXM4, OMEGA,
C + NTENS, NDI, ANU, G, AK, EXPO, E0, SIG0, IOUT, IWR1,
C + CELT, ANT, HHT, H1T, H2T, H3T, OMEGAT, STRESS1)
C          END IF
C
      DO I=1, NTENS
      DO J=1, NTENS
          DDSDDDE(I, J)=FRACT*CEL(I, J)+(1.D0-FRACT)*DDSDDE(I, J)
      END DO
      END DO
C
      DO I=1, NTENS
      DO J=1, NTENS
          DDSDDDE(I, J)=DDSDDE(I, J)+STRESS(I)*DELTA(J)
      ENDDO
      ENDDO
C
      IF (IWR.NE.0) THEN
          IF (ICONSISTENT.EQ.0) WRITE(IOUT, *)
+ 'FINAL TANGENT MODULUS'
          IF (ICONSISTENT.NE.0) WRITE(IOUT, *)
+ 'FINAL CONSISTENT PLASTIC DDSDDDE'
          DO I=1, NTENS
              WRITE(IOUT, 1001) (DDSDDE(I, J), J=1, NTENS)
          END DO
      END IF
C
C
C
9999 CONTINUE
C
      DFGRD1(3, 3)=DFGRD0(3, 3)*Exp(DE33)
C      IF (IWR.NE.0) THEN
C          WRITE(IOUT, *) 'DFGRD1(1, 1)          DFGRD1(3, 3)'
C          WRITE(IOUT, *) DFGRD1(1, 1), DFGRD1(3, 3)
C      ENDIF
      WRITE(IOUT, *) 'DE11          DE33'
      WRITE(IOUT, *) DE(1), DE33
C
C-----UPDATE STRESS1 (mTENS), DDSDDDE1 (mTENS, MTENS) -----
      STRESS1(1)=STRESS(1)
      STRESS1(2)=STRESS(2)
      STRESS1(3)=STRESS(4)
C
      DDSDDDE1(1, 1)=DDSDDE(1, 1)-DDSDDE(1, 3)*DDSDDE(3, 1)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(2, 2)=DDSDDE(2, 2)-DDSDDE(2, 3)*DDSDDE(3, 2)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(3, 3)=DDSDDE(4, 4)-DDSDDE(4, 3)*DDSDDE(3, 4)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(1, 2)=DDSDDE(1, 2)-DDSDDE(1, 3)*DDSDDE(3, 2)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(2, 1)=DDSDDE(2, 1)-DDSDDE(2, 3)*DDSDDE(3, 1)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(1, 3)=DDSDDE(1, 4)-DDSDDE(1, 3)*DDSDDE(3, 4)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(3, 1)=DDSDDE(4, 1)-DDSDDE(4, 3)*DDSDDE(3, 1)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(2, 3)=DDSDDE(2, 4)-DDSDDE(2, 3)*DDSDDE(3, 4)/DDSDDE(3, 3)
      DDSDDDE1(3, 2)=DDSDDE(4, 2)-DDSDDE(4, 3)*DDSDDE(3, 2)/DDSDDE(3, 3)
      IF (IWR.NE.0) THEN
          WRITE(IOUT, *) 'DDSDDDE1'
          DO I=1, 3
              WRITE(IOUT, 1001) (DDSDDDE1(I, J), J=1, 3)
          ENDDO
      ENDIF
C-----
C
      RETURN
1001 FORMAT(1P8E13.5)

```



```

2001 FORMAT(2X,1P8E13.5)
1002 FORMAT(10I5)
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KDN(DNDF,DNDW1,DNDW2,F,AKMX,Q,QINV,G,STRESS,NTENS,NDI,
+ AN,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,AUXM1,AMTLD)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION DNDF(NTENS),DNDW1(NTENS),DNDW2(NTENS),AKMX(NTENS,NTENS),
+ Q(NTENS,NTENS),QINV(NTENS,NTENS),STRESS(NTENS),
+ AN(NTENS),AN1(3),AN2(3),AN3(3),X(NGAUS),W(NGAUS),
+ AUXM1(NTENS,NTENS),AMTLD(NTENS,NTENS)
DIMENSION V1(6),SCR4(4,4)
C
AUX=2.D0*(1.D0+F)*G/(1.D0-F)
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
AUXM1(I,J)=AKMX(I,J)+AUX*QINV(I,J)
END DO
END DO
CALL KCOPY(STRESS,V1,NTENS)
DO I=NDI+1,NTENS
V1(I)=V1(I)*2.D0
END DO
CALL KMULT(AUXM1,V1,DNDF,NTENS,NTENS,1)
AUX=3.D0/(1.D0-F)**2
DO I=1,NTENS
DNDF(I)=AUX*DNDF(I)
END DO
C
POISSON=0.5D0
DW1=0.005D0*W1
W11=W1-DW1
CALL KESH_Q(Q,POISSON,W11,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
CALL KINV(Q,QINV,NTENS,SCR4)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
END DO
END DO
DO I=NDI+1,NTENS
DO J=1,NTENS
QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
ENDDO
ENDDO
CALL KMTLD(AMTLD,F,G,NTENS,AKMX,QINV)
CALL KFINDN(V1,STRESS,F,AMTLD,AUXM1,NTENS,NDI)
DO I=1,NTENS
DNDW1(I)=(V1(I)-AN(I))/(-DW1)
END DO
C
POISSON=0.5D0
DW2=0.005D0*W2
W21=W2+DW2
CALL KESH_Q(Q,POISSON,W1,W21,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
CALL KINV(Q,QINV,NTENS,SCR4)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
END DO
END DO
DO I=NDI+1,NTENS
DO J=1,NTENS
QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
END DO
END DO
CALL KMTLD(AMTLD,F,G,NTENS,AKMX,QINV)
CALL KFINDN(V1,STRESS,F,AMTLD,AUXM1,NTENS,NDI)
DO I=1,NTENS
DNDW2(I)=(V1(I)-AN(I))/DW2
END DO
C
RETURN
END
C

```

```

C*****
C
C      SUBROUTINE KINITIA(A,N)
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION A(1)
C
C      DO I=1,N
C         A(I)=0.D0
C      ENDDO
C
C      RETURN
C      END
C
C*****
C
C      SUBROUTINE KPOLAR(F,R,U,V)
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
C      DIMENSION F(3,3),R(3,3),U(3,3),V(3,3)
C      DIMENSION FT(3,3),C(3,3),C2(3,3),AL(3),AI(3,3),UINV(3,3),RT(3,3)
C
C      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C      CALL KINITIA(AI,3*3)
C      DO 10 I=1,3
10    AI(I,I)=1.D0
C
C      CALL KTRANPOSE(F,FT,3,3)
C      CALL KMULT(FT,F,C,3,3,3)
C
C      CALL KMULT(C,C,C2,3,3,3)
C      TR1= C(1,1)+ C(2,2)+ C(3,3)
C      TR2=C2(1,1)+C2(2,2)+C2(3,3)
C      DET=C(1,1)*C(2,2)*C(3,3)-C(3,2)*C(2,3))
C      * -C(1,2)*C(2,1)*C(3,3)-C(3,1)*C(2,3))
C      * +C(1,3)*C(2,1)*C(3,2)-C(3,1)*C(2,2))
C      AI1=TR1
C      AI2=0.5D0*(TR1*TR1-TR2)
C      AI3=DET
C
C      B=AI2-AI1*AI1/3.D0
C      D=- (2.D0/27.D0)*AI1**3+AI1*AI2/3.D0-AI3
C
C      IF (DABS(B).LT.1.D-6) THEN
C         AUX=AI1/3.D0
C         AL(1)=AUX
C         AL(2)=AUX
C         AL(3)=AUX
C      ELSE
C         AM=2.D0*DSQRT(-B/3.D0)
C         AN=3.D0*D/(AM*B)
C         AUX=1.D0-AN*AN
C         IF (AUX.LT.0.D0) THEN
C            IF (AN.GT.1.D0) T=0.D0
C            IF (AN.LT.(-1.D0)) T=PI/3.D0
C         ELSE
C            T=DATAN2(DSQRT(AUX),AN)/3.D0
C         END IF
C         DO I=1,3
C            X=AM*DCOS(T+2.D0*(I-1)*PI/3.D0)
C            AL(I)=X+AI1/3.D0
C         ENDDO
C      END IF
C
C      DO I=1,3
C         AL(I)=DSQRT(AL(I))
C      ENDDO
C
C      BI1=AL(1)+AL(2)+AL(3)
C      BI2=AL(1)*AL(2)+AL(2)*AL(3)+AL(3)*AL(1)
C      BI3=AL(1)*AL(2)*AL(3)
C      DD=BI1*BI2-BI3
C
C      AUX1=BI1*BI1-BI2
C      AUX2=BI1*BI3
C      DO I=1,3

```

```

DO J=1,3
  U(I,J) = (-C2(I,J)+AUX1*C(I,J)+AUX2*AI(I,J))/DD
  UINV(I,J) = (C(I,J)-BI1*U(I,J)+BI2*AI(I,J))/BI3
ENDDO
ENDDO
C
CALL KMULT(F,UINV,R,3,3,3)
CALL KTRANPOSE(R,RT,3,3)
CALL KMULT(F,RT,V,3,3,3)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KMULT(A,B,C,L,M,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(L,M),B(M,N),C(L,N)
C
DO 10 I=1,L
DO 10 J=1,N
AUX=0.D0
DO 20 K=1,M
20  AUX=AUX+A(I,K)*B(K,J)
10  C(I,J)=AUX
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KCOPY(A,B,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(1),B(1)
C
DO 10 I=1,N
10  B(I)=A(I)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KADOTB(A,B,C)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(3),B(3)
C
C=A(1)*B(1)+A(2)*B(2)+A(3)*B(3)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KAB(A,B,C,NTENS,NDI)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(NTENS),B(NTENS)
C
C=0.D0
DO I=1,NDI
  C=C+A(I)*B(I)
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
  C=C+A(I)*B(I)*2.D0
ENDDO
C
RETURN
END
C
C*****

```

```

C
SUBROUTINE KTRANPOSE(A,AT,M,N)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(M,N),AT(N,M)
C
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,M
10 AT(I,J)=A(J,I)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KINV(A,AINV,N,Y)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION A(N,N),AINV(N,N),Y(N,N)
DIMENSION INDX(100)
C
CALL KINITIA(Y,N*N)
DO I=1,N
Y(I,I)=1.D0
ENDDO
CALL KCOPY(A,AINV,N*N)
CALL KLUDCMP(AINV,N,INDX)
DO 19 J=1,N
CALL KLUBKSB(AINV,N,INDX,Y(1,J))
19 CONTINUE
CALL KCOPY(Y,AINV,N*N)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KLUDCMP(A,N,INDX)
C
Replaces an NxN matrix A by its LU decomposition.
C
INDX: Output vector which records the row permutation effected by the partial pivoting.
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
PARAMETER (NMAX=10,TINY=1.0E-20)
DIMENSION A(N,N),INDX(N),VV(NMAX)
C
DO 12 I=1,N
AAMAX=0.D0
DO 11 J=1,N
IF (DABS(A(I,J)).GT.AAMAX) AAMAX=DABS(A(I,J))
11 CONTINUE
IF (AAMAX.EQ.0.) PAUSE 'Singular matrix'
VV(I)=1.D0/AAMAX
12 CONTINUE
DO 19 J=1,N
DO 14 I=1,J-1
SUM=A(I,J)
DO 13 K=1,I-1
SUM=SUM-A(I,K)*A(K,J)
13 CONTINUE
A(I,J)=SUM
14 CONTINUE
AAMAX=0.D0
DO 16 I=J,N
SUM=A(I,J)
DO 15 K=1,J-1
SUM=SUM-A(I,K)*A(K,J)
15 CONTINUE
A(I,J)=SUM
DUM=VV(I)*DABS(SUM)
IF (DUM.GE.AAMAX) THEN
IMAX=I
AAMAX=DUM
ENDIF
16 CONTINUE
IF (J.NE.IMAX) THEN

```

```

DO 17 K=1,N
DUM=A(IMAX,K)
A(IMAX,K)=A(J,K)
A(J,K)=DUM
17 CONTINUE
VV(IMAX)=VV(J)
ENDIF
INDX(J)=IMAX
IF (A(J,J).EQ.0.) A(J,J)=TINY
IF (J.NE.N) THEN
DUM=1.D0/A(J,J)
DO 18 I=J+1,N
18 A(I,J)=A(I,J)*DUM
CONTINUE
ENDIF
19 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KLUBKSB(A,N,INDX,B)
C Solves the linear system A.x=b.
C A & INDX are inputs, returned by SUBROUTINE LUDCMP.
C B is input as the right-hand side vector b, and returns with the solution vector x.

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)

DIMENSION A(N,N),INDX(N),B(N)
II=0
DO 12 I=1,N
LL=INDX(I)
SUM=B(LL)
B(LL)=B(I)
IF (II.NE.0) THEN
DO 11 J=II,I-1
SUM=SUM-A(I,J)*B(J)
11 CONTINUE
ELSE IF (SUM.NE.0.) THEN
II=I
ENDIF
B(I)=SUM
12 CONTINUE
DO 14 I=N,1,-1
SUM=B(I)
IF (I.LT.N) THEN
DO 13 J=I+1,N
SUM=SUM-A(I,J)*B(J)
13 CONTINUE
ENDIF
B(I)=SUM/A(I,I)
14 CONTINUE
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KYCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
IF (EXPO.GT.50.D0) THEN
YIELD=SIG0
H=0.D0
ELSE
YIELD=SIG0*(EBAR/E0+1.D0)**(1.D0/EXPO)
H=(SIG0/(E0*EXPO))*(SIG0/YIELD)**(EXPO-1.D0)
END IF
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KMILD(AMILD,F,G,NTENS,AKMX,QINV)
C

```

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION AKMX (NTENS,NTENS) , AMTLD (NTENS,NTENS) , QINV (NTENS,NTENS)
C
      AUX=3.D0*F*G/ (1.D0-F)
      DO I=1,NTENS
      DO J=1,NTENS
         AMTLD (I, J) =1.5D0*AKMX (I, J) +AUX*QINV (I, J)
      END DO
      END DO
C
      RETURN
      END
C
C*****
C
      SUBROUTINE KYFCN (PHI, STRESS, EBAR, F, AMTLD, EXPO, E0, SIG0, AUXM1, NTENS,
+ NDI)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION STRESS (1) , AMTLD (NTENS,NTENS) , AUXM1 (NTENS,NTENS) ,
+ AUX1 (6)
C
      CALL KCOPY (AMTLD, AUXM1, NTENS*NTENS)
      DO I=1,NTENS
      DO J=NDI+1,NTENS
         AUXM1 (I, J) = AUXM1 (I, J) *2.D0
      ENDDO
      ENDDO
      CALL KMULT (AUXM1, STRESS, AUX1, NTENS, NTENS, 1)
C
      CALL KAB (STRESS, AUX1, SE, NTENS, NDI)
C
      CALL KYCURVE (YIELD, H, EBAR, EXPO, E0, SIG0)
C
      PHI=SE/ (1.D0-F) -YIELD*YIELD
C
      RETURN
      END
C
C*****
C
      SUBROUTINE KFINDN (AN, STRESS, F, AMTLD, AUXM1, NTENS, NDI)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION AN (1) , STRESS (1) , AMTLD (NTENS,NTENS) , AUXM1 (NTENS,NTENS)
C
      CALL KCOPY (AMTLD, AUXM1, NTENS*NTENS)
      DO 40 I=1,NTENS
      DO 40 J=NDI+1,NTENS
40      AUXM1 (I, J) = AUXM1 (I, J) *2.D0
      CALL KMULT (AUXM1, STRESS, AN, NTENS, NTENS, 1)
C
      AUX=2.D0/ (1.D0-F)
      DO 50 I=1,NTENS
50      AN (I) =AN (I) *AUX
C
      RETURN
      END
C
C*****
C
      SUBROUTINE KROTSTRS (STRESS, R, QMX, NTENS)
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION STRESS (NTENS) , R (3, 3) , QMX (NTENS,NTENS) , AUX (6)
C
      CALL KINITIA (QMX, NTENS*NTENS)
      DO I=1, 3
      DO J=1, 3
         QMX (I, J) =R (I, J) **2
      ENDDO
      ENDDO
C
      QMX (1, 4) =2.D0*R (1, 1) *R (1, 2)

```



```

QMX(2,4)=2.D0*R(2,1)*R(2,2)
QMX(3,4)=2.D0*R(3,1)*R(3,2)
C
QMX(4,1)=R(1,1)*R(2,1)
QMX(4,2)=R(1,2)*R(2,2)
QMX(4,3)=R(1,3)*R(2,3)
C
QMX(4,4)=R(1,2)*R(2,1)+R(2,2)*R(1,1)
C
CALL KMULT(QMX,STRESS,AUX,NTENS,NTENS,1)
CALL KCOPY(AUX,STRESS,NTENS)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KELFR(STRESST,DSEL,FT,NTENS,NDI,AMTLDT,AUXM1,PHIT,
+ FRACT)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION STRESST(NTENS),DE(NTENS),AMTLDT(NTENS,NTENS),
+ AUXM1(NTENS,NTENS),DSEL(6),AUX1(6)
C
CALL KCOPY(AMTLDT,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
ENDDO
ENDDO
C
CALL KMULT(AUXM1,DSEL,AUX1,NTENS,NTENS,1)
C***
AUX1=M_TILDE:DSEL
CALL KAB(DSEL,AUX1,A,NTENS,NDI)
C
CALL KAB(STRESST,AUX1,B,NTENS,NDI)
C
C=(1.D0-FT)*PHIT
C
D=B*B-A*C
IF (D.GE.0.D0) THEN
FRACT=(-B+DSQRT(D))/A
ELSE
FRACT=0.D0
END IF
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KAC(AMX,CMX,F,W1,W2,AN1,AN2,AN3,S,P,AUXM1,AUXM2,
+ X,W,NGAUS,NTENS,NDI,AIMX)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION AMX(NTENS,NTENS),CMX(NTENS,NTENS),S(NTENS,NTENS),
+ P(NTENS,NTENS),AUXM1(NTENS,NTENS),AUXM2(NTENS,NTENS),
+ AN1(1),AN2(1),AN3(1),X(1),W(1),AIMX(NTENS,NTENS),SCR4(4,4)
C
POISSON=0.5D0
CALL KESH_S(S,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS)
AUX=1.D0-F
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
AMX(I,J)=AIMX(I,J)-AUX*S(I,J)
ENDDO
ENDDO
CALL KCOPY(AMX,AUXM1,NTENS*NTENS)
CALL KINV(AUXM1,AMX,NTENS,SCR4)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
AMX(I,J)=AMX(I,J)/2.D0
ENDDO
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
DO J=1,NTENS

```

```

      AMX ( I , J ) = AMX ( I , J ) / 2 . D0
    ENDDO
  ENDDO
C  FIND C
  CALL KESH_PI ( P , W1 , W2 , AN1 , AN2 , AN3 , X , W , NGAUS , NTENS )
  CALL KCOPY ( P , AUXM1 , NTENS * NTENS )
  DO I = 1 , NTENS
  DO J = NDI + 1 , NTENS
    AUXM1 ( I , J ) = AUXM1 ( I , J ) * 2 . D0
  ENDDO
  ENDDO
  CALL KMULT ( AUXM1 , AMX , AUXM2 , NTENS , NTENS , NTENS )
  AUX = - ( 1 . D0 - F )
  DO I = 1 , NTENS
  DO J = 1 , NTENS
    CMX ( I , J ) = AUX * AUXM2 ( I , J )
  ENDDO
  ENDDO
C
  RETURN
  END
C
C*****
C
  SUBROUTINE KFINDDL ( DL , STRESS , EBAR , F , W1 , W2 , AN1 , AN2 , AN3 ,
+ AN , CEL , DE , NTENS , NDI , HH , H1 , H2 , H3 , EXPO , E0 , SIG0 , G , Q , QINV ,
+ DQDW1 , DQDW2 , AKMX , AUXM1 , AUXM2 , AUXM3 , AUXM4 ,
+ DPHIDF , DPHIDW1 , DPHIDW2 , DPHIDEP )
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION ( A - H , O - Z )
C
  DIMENSION STRESS ( 1 ) , AN1 ( 1 ) , AN2 ( 1 ) , AN3 ( 1 ) , AN ( 1 ) ,
+ CEL ( NTENS , NTENS ) , DE ( 1 ) , Q ( NTENS , NTENS ) ,
+ QINV ( NTENS , NTENS ) , DQDW1 ( NTENS , NTENS ) , DQDW2 ( NTENS , NTENS ) ,
+ AKMX ( NTENS , NTENS ) , AUXM1 ( NTENS , NTENS ) , AUXM2 ( NTENS , NTENS ) ,
+ AUXM3 ( NTENS , NTENS ) , AUXM4 ( NTENS , NTENS ) , V1 ( 6 )
C
C  FIND DL
  HC = - ( DPHIDF * HH + DPHIDW1 * H1 + DPHIDW2 * H2 + DPHIDEP * H3 )
  CALL KCOPY ( CEL , AUXM1 , NTENS * NTENS )
  DO I = 1 , NTENS
  DO J = NDI + 1 , NTENS
    AUXM1 ( I , J ) = AUXM1 ( I , J ) * 2 . D0
  ENDDO
  ENDDO
  CALL KMULT ( AUXM1 , AN , V1 , NTENS , NTENS , 1 )
  CALL KAB ( AN , V1 , AL , NTENS , NDI )
  AL = HC + AL
C*** RECALL THAT 'DE' HAS ENGG SHEAR COMPONENTS
  DL = 0 . D0
  DO I = 1 , NTENS
    DL = DL + V1 ( I ) * DE ( I )
  ENDDO
  DL = DL / AL
C
  RETURN
  END
C
C*****
C
  SUBROUTINE KUPDATE ( DL , STRESS , EBAR , F , W1 , W2 , AN1 , AN2 , AN3 , STRESST ,
+ EBART , FT , W1T , W2T , AN1T , AN2T , AN3T , SEL , CEL , NTENS , NDI , AN , GG , G1 , G2 ,
+ HH , H1 , H2 , H3 , OMEGA , V , DEVOID , DEP , R1 , R2 , R31 , R32 , ANUCL , IWR , IOUT )
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION ( A - H , O - Z )
C
  DIMENSION STRESS ( NTENS ) , AN1 ( 3 ) , AN2 ( 3 ) , AN3 ( 3 ) , STRESST ( NTENS ) ,
+ AN1T ( 3 ) , AN2T ( 3 ) , AN3T ( 3 ) , SEL ( 1 ) , CEL ( NTENS , NTENS ) , AN ( 1 ) , OMEGA ( 3 , 3 ) ,
+ V ( 3 , 3 ) , DEVOID ( NTENS ) , DEP ( NTENS ) , R1 ( NTENS ) , R2 ( NTENS ) , R31 ( NTENS ) ,
+ R32 ( NTENS )
  DIMENSION ROT ( 3 , 3 ) , V1 ( 6 ) , V2 ( 6 ) , V3 ( 6 )
C
  DLTOL = 1 . D - 8
  IF ( DABS ( DL ) . LT . DLTOL ) THEN
    CALL KCOPY ( SEL , STRESS , NTENS )
    EBAR = EBART
    F = FT
    W1 = W1T

```

```

      W2=W2T
      CALL KCOPY (AN1T,AN1,3)
      CALL KCOPY (AN2T,AN2,3)
      CALL KCOPY (AN3T,AN3,3)
      RETURN
END IF
C
C*** UPDATE STRESSES
CALL KCOPY (DEP,V1,NTENS)
DO I=NDI+1,NTENS
  V1(I)=V1(I)*2.D0
ENDDO
CALL KMULT (CEL,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
DO I=1,NTENS
  STRESS(I)=SEL(I)-V2(I)+DL*R1(I)
ENDDO
C
C*** UPDATE EBAR
CALL KAB (R2,DEP,DEBAR,NTENS,NDI)
EBAR=EBART+DEBAR
C
C*** UPDATE F
DEPKK=DEP(1)+DEP(2)+DEP(3)
DF=(1.D0-FT)*DEPKK+ANUCL*DEBAR
F=FT+DF
C
C*** UPDATE W1, W2, AN1, AN2, AN3
WTOL=1.D-2
IF (DABS(W1T-W2T).LT.WTOL) GOTO 10
C
C W1T different from W2T
C
  CALL KAB (R31,DEP,DW1,NTENS,NDI)
  CALL KAB (R32,DEP,DW2,NTENS,NDI)
  W1=W1T+DW1
  W2=W2T+DW2
C
C ROT=EXP(-OMEGA*DL)
OM=-OMEGA(2,1)*DL
ZS=DSIN(OM)
ZC=DCOS(OM)
CALL KINITIA (ROT,3*3)
ROT(1,1)=ZC
ROT(2,2)=ZC
ROT(1,2)=-ZS
ROT(2,1)=ZS
ROT(3,3)=1.D0
C
CALL KMULT (ROT,AN1T,AN1,3,3,1)
CALL KMULT (ROT,AN2T,AN2,3,3,1)
CALL KMULT (ROT,AN3T,AN3,3,3,1)
GOTO 999
C
10 CONTINUE
C |W1T-W2T|<1.D-2 needs special treatment
C
IF (W1T.NE.W2T) THEN
  CALL KAB (R31,DEP,DW1,NTENS,NDI)
  CALL KAB (R32,DEP,DW2,NTENS,NDI)
  W1=W1T+DW1
  W2=W2T+DW2
  CALL KCOPY (AN1T,AN1,3)
  CALL KCOPY (AN2T,AN2,3)
  CALL KCOPY (AN3T,AN3,3)
END IF
C
IF (W1T.EQ.W2T) THEN
C
  Update AN1, AN2 and AN3
  CALL KINITIA (AN1,3)
  CALL KINITIA (AN2,3)
  CALL KINITIA (AN3,3)
  AN3(3)=1.D0
  ZX=1.D-6*DSQRT (DEVOID(1)**2+DEVOID(2)**2+DEVOID(3)**2)/3.D0
  IF (DABS(DEVOID(4)).LT.ZX) THEN
    DAL1=DEVOID(1)
    DAL2=DEVOID(2)
    AN1(1)=1.D0

```

```

ELSE
  R=DSQRT(( (DEVOID(1)-DEVOID(2))/2.D0)**2+DEVOID(4)**2)
  AM=(DEVOID(1)+DEVOID(2))/2.D0
  DAL1=AM+R
  DAL2=AM-R
  AN1(1)=- (DEVOID(2)-DAL1)/DEVOID(4)
  AN1(2)=1.D0
  ZZ=DSQRT(AN1(1)**2+AN1(2)**2)
  AN1(1)=AN1(1)/ZZ
  AN1(2)=AN1(2)/ZZ
END IF
AN2(1)=-AN1(2)
AN2(2)=AN1(1)
C
C   Update W1 and W2
DE11=DEVOID(1)*AN1(1)**2+DEVOID(2)*AN1(2)**2+
+ 2.D0*DEVOID(4)*AN1(1)*AN1(2)
DE22=DEVOID(1)*AN2(1)**2+DEVOID(2)*AN2(2)**2+
+ 2.D0*DEVOID(4)*AN2(1)*AN2(2)
DE33=DEVOID(3)
W1=W1T*DEXP(DE33-DE11)
W2=W2T*DEXP(DE33-DE22)
C   W1=W1T+W1T*(DE33-DE11)
C   W2=W2T+W2T*(DE33-DE22)
END IF
C
C
999 CONTINUE
C
RETURN
1001 FORMAT(1P8E13.5)
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KDFD(DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,AKMX,F,STRESS,DQDW1,DQDW2,
+ AUXM1,AUXM2,AUXM3,AUXM4,NTENS,NDI,G,W1,W2,AN1,AN2,AN3,QINV)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION AKMX(NTENS,NTENS),STRESS(NTENS),DQDW1(NTENS,NTENS),
+ DQDW2(NTENS,NTENS),AUXM1(NTENS,NTENS),AUXM2(NTENS,NTENS),
+ AUXM3(NTENS,NTENS),AUXM4(NTENS,NTENS),VEC1(6),
+ AN1(3),AN2(3),AN3(3),QINV(NTENS,NTENS)
C
CALL KCOPY(QINV,AUXM4,NTENS*NTENS)
C*** AUXM4=QINV
C
AUX=3.D0*G*(1.D0+F)/(1.D0-F)
DO 10 I=1,NTENS
DO 10 J=1,NTENS
10   AUXM1(I,J)=1.5D0*AKMX(I,J)+AUX*AUXM4(I,J)
DO 20 I=1,NTENS
DO 20 J=NDI+1,NTENS
20   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,STRESS,VEC1,NTENS,NTENS,1)
CALL KAB(STRESS,VEC1,DPHIDF,NTENS,NDI)
DPHIDF=DPHIDF/(1.D0-F)**2
C
CALL KCOPY(DQDW1,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO 110 I=1,NTENS
DO 110 J=NDI+1,NTENS
110   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,AUXM4,AUXM2,NTENS,NTENS,NTENS)
CALL KCOPY(AUXM4,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO 120 I=1,NTENS
DO 120 J=NDI+1,NTENS
120   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,AUXM2,AUXM3,NTENS,NTENS,NTENS)
DO 130 I=1,NTENS
DO 130 J=1,NTENS
130   AUXM3(I,J)=-AUXM3(I,J)
CALL KCOPY(AUXM3,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO 140 I=1,NTENS
DO 140 J=NDI+1,NTENS
140   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,STRESS,VEC1,NTENS,NTENS,1)
CALL KAB(STRESS,VEC1,DPHIDW1,NTENS,NDI)

```

```

DPHIDW1=DPHIDW1*3.D0*G*F/(1.D0-F)**2
C
CALL KCOPY(DQDW2,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO 210 I=1,NTENS
DO 210 J=NDI+1,NTENS
210   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,AUXM4,AUXM2,NTENS,NTENS,NTENS)
CALL KCOPY(AUXM4,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO 220 I=1,NTENS
DO 220 J=NDI+1,NTENS
220   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,AUXM2,AUXM3,NTENS,NTENS,NTENS)
DO 230 I=1,NTENS
DO 230 J=1,NTENS
230   AUXM3(I,J)=-AUXM3(I,J)
CALL KCOPY(AUXM3,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO 240 I=1,NTENS
DO 240 J=NDI+1,NTENS
240   AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
CALL KMULT(AUXM1,STRESS,VEC1,NTENS,NTENS,1)
CALL KAB(STRESS,VEC1,DPHIDW2,NTENS,NDI)
DPHIDW2=DPHIDW2*3.D0*G*F/(1.D0-F)**2
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KDFDN(DPHIDN1,DPHIDN2,DPHIDN3,AKMX,F,STRESS,DQDN1,
+ DQDN2,DQDN3,AUXM1,AUXM2,AUXM3,AUXM4,NTENS,NDI,G,W1,W2,AN1,AN2,
+ AN3,QINV)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION DPHIDN1(3),DPHIDN2(3),DPHIDN3(3),
+ AKMX(NTENS,NTENS),STRESS(NTENS),DQDN1(NTENS,NTENS,3),
+ DQDN2(NTENS,NTENS,3),DQDN3(NTENS,NTENS,3),
+ AUXM1(NTENS,NTENS),AUXM2(NTENS,NTENS),
+ AUXM3(NTENS,NTENS),AUXM4(NTENS,NTENS),VEC1(6),
+ AN1(3),AN2(3),AN3(3),QINV(NTENS,NTENS)
C
CALL KCOPY(QINV,AUXM4,NTENS*NTENS)
C*** AUXM4=QINV
C
AUX=3.D0*G*F/(1.D0-F)**2
DO 1000 K=1,3
CALL KCOPY(DQDN1(1,1,K),AUXM1,NTENS*NTENS)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
END DO
END DO
CALL KMULT(AUXM1,AUXM4,AUXM2,NTENS,NTENS,NTENS)
CALL KCOPY(AUXM4,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
END DO
END DO
CALL KMULT(AUXM1,AUXM2,AUXM3,NTENS,NTENS,NTENS)
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
AUXM3(I,J)=-AUXM3(I,J)
END DO
END DO
CALL KCOPY(AUXM3,AUXM1,NTENS*NTENS)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS
AUXM1(I,J)=AUXM1(I,J)*2.D0
END DO
END DO
CALL KMULT(AUXM1,STRESS,VEC1,NTENS,NTENS,1)
CALL KAB(STRESS,VEC1,DPHIDN1(K),NTENS,NDI)
DPHIDN1(K)=DPHIDN1(K)*AUX
C
CALL KCOPY(DQDN2(1,1,K),AUXM1,NTENS*NTENS)
DO I=1,NTENS
DO J=NDI+1,NTENS

```

```

      AUXM1 ( I , J ) =AUXM1 ( I , J ) *2 .D0
    END DO
  END DO
  CALL KMULT (AUXM1 ,AUXM4 ,AUXM2 ,NTENS ,NTENS ,NTENS)
  CALL KCOPY (AUXM4 ,AUXM1 ,NTENS*NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=NDI+1 ,NTENS
      AUXM1 ( I , J ) =AUXM1 ( I , J ) *2 .D0
    END DO
  END DO
  CALL KMULT (AUXM1 ,AUXM2 ,AUXM3 ,NTENS ,NTENS ,NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=1 ,NTENS
      AUXM3 ( I , J ) =-AUXM3 ( I , J )
    END DO
  END DO
  CALL KCOPY (AUXM3 ,AUXM1 ,NTENS*NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=NDI+1 ,NTENS
      AUXM1 ( I , J ) =AUXM1 ( I , J ) *2 .D0
    END DO
  END DO
  CALL KMULT (AUXM1 ,STRESS ,VEC1 ,NTENS ,NTENS ,1)
  CALL KAB (STRESS ,VEC1 ,DPHIDN2 ( K ) ,NTENS ,NDI)
  DPHIDN2 ( K ) =DPHIDN2 ( K ) *AUX
C
  CALL KCOPY (DQDN3 ( 1 , 1 , K ) ,AUXM1 ,NTENS*NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=NDI+1 ,NTENS
      AUXM1 ( I , J ) =AUXM1 ( I , J ) *2 .D0
    END DO
  END DO
  CALL KMULT (AUXM1 ,AUXM4 ,AUXM2 ,NTENS ,NTENS ,NTENS)
  CALL KCOPY (AUXM4 ,AUXM1 ,NTENS*NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=NDI+1 ,NTENS
      AUXM1 ( I , J ) =AUXM1 ( I , J ) *2 .D0
    END DO
  END DO
  CALL KMULT (AUXM1 ,AUXM2 ,AUXM3 ,NTENS ,NTENS ,NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=1 ,NTENS
      AUXM3 ( I , J ) =-AUXM3 ( I , J )
    END DO
  END DO
  CALL KCOPY (AUXM3 ,AUXM1 ,NTENS*NTENS)
  DO I=1 ,NTENS
    DO J=NDI+1 ,NTENS
      AUXM1 ( I , J ) =AUXM1 ( I , J ) *2 .D0
    END DO
  END DO
  CALL KMULT (AUXM1 ,STRESS ,VEC1 ,NTENS ,NTENS ,1)
  CALL KAB (STRESS ,VEC1 ,DPHIDN3 ( K ) ,NTENS ,NDI)
  DPHIDN3 ( K ) =DPHIDN3 ( K ) *AUX
1000 CONTINUE
C
  RETURN
  END
C
C*****
C
  SUBROUTINE KPLJAC (DDSDDE ,CEL ,STRESS ,EBAR ,F ,W1 ,W2 ,AN1 ,AN2 ,AN3 ,
+ X ,W ,NGAUS ,S ,P ,Q ,QINV ,AMTLD ,DQDW1 ,DQDW2 ,AIMX ,AJMX ,AKMX ,
+ AMX ,CMX ,AN ,QMX ,AUXM1 ,AUXM2 ,AUXM3 ,AUXM4 ,OMEGA ,
+ NTENS ,NDI ,ANU ,G ,AK ,EXPO ,E0 ,SIG0 ,FN ,EN ,SN ,IOUT ,IWR)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H ,O-Z)
C
  DIMENSION DDSDDE (NTENS ,NTENS) ,STRESS (1) ,OMEGA (3 ,3)
C
  DIMENSION X (1) ,W (1) ,
+ S (NTENS ,NTENS) ,P (NTENS ,NTENS) ,Q (NTENS ,NTENS) ,QINV (NTENS ,NTENS) ,
+ AN1 (3) ,AN2 (3) ,AN3 (3) ,CEL (NTENS ,NTENS) ,AMTLD (NTENS ,NTENS) ,
+ DQDW1 (NTENS ,NTENS) ,DQDW2 (NTENS ,NTENS) ,
+ AIMX (NTENS ,NTENS) ,AJMX (NTENS ,NTENS) ,AKMX (NTENS ,NTENS) ,
+ AMX (NTENS ,NTENS) ,CMX (NTENS ,NTENS) ,AN (NTENS) ,QMX (NTENS ,NTENS) ,
+ AUXM1 (NTENS ,NTENS) ,AUXM2 (NTENS ,NTENS) ,AUXM3 (NTENS ,NTENS) ,
+ AUXM4 (NTENS ,NTENS)

```



```

C
  DIMENSION V1(6),V2(6),V3(6),SCR4(4,4)
C
  COMMON/KHARD/HC
C
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*)
+ '*** CALCULATION OF PLASTIC TANGENT MATRIX (zpljac)'
C
  PI=4.D0*DATAN(1.D0)
  CALL KESH_Q(Q,ANU,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
  CALL KINV(Q,QINV,NTENS,SCR4)
  DO I=1,NTENS
    DO J=NDI+1,NTENS
      QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
    ENDDO
  ENDDO
  DO I=NDI+1,NTENS
    DO J=1,NTENS
      QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
    ENDDO
  ENDDO
C
  Z1=2.D0*G
  Z2=3.D0*AK
  Z3=F/(1.D0-F)
  DO I=1,NTENS
    DO J=1,NTENS
      CEL(I,J)=AKMX(I,J)/Z1+AJMX(I,J)/Z2+QINV(I,J)*Z3
    ENDDO
  ENDDO
  CALL KCOPY(CEL,AUXM1,NTENS*NTENS)
  CALL KINV(AUXM1,CEL,NTENS,SCR4)
  DO I=1,NTENS
    DO J=NDI+1,NTENS
      CEL(I,J)=CEL(I,J)/2.D0
    ENDDO
  ENDDO
  DO I=NDI+1,NTENS
    DO J=1,NTENS
      CEL(I,J)=CEL(I,J)/2.D0
    ENDDO
  ENDDO
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'CEL'
    DO I=1,NTENS
      WRITE(IOUT,1001) (CEL(I,J),J=1,NTENS)
    ENDDO
  END IF
C
C  FIND N
  CALL KFINDN(AN,STRESS,F,AMTLD,AUXM1,NTENS,NDI)
C
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'AN'
  IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,1001) (AN(I),I=1,NTENS)
C
C  FIND DQ/DW1, DQ/DW2
  POISSON=0.5D0
  CALL KDQ(DQDW1,DQDW2,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'DQDW1'
    DO I=1,NTENS
      WRITE(IOUT,1001) (DQDW1(I,J),J=1,NTENS)
    ENDDO
    WRITE(IOUT,*) 'DQDW2'
    DO I=1,NTENS
      WRITE(IOUT,1001) (DQDW2(I,J),J=1,NTENS)
    ENDDO
  END IF
C
C  FIND DPHI/DF, DPHI/DW1, DPHI/DW2
C
  CALL KESH_Q(Q,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
  CALL KINV(Q,QINV,NTENS,SCR4)
  DO I=1,NTENS
    DO J=NDI+1,NTENS
      QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0

```

```

ENDDO
ENDDO
DO I=NDI+1,NTENS
DO J=1,NTENS
    QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
ENDDO
ENDDO
CALL KDFP(DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,AKMX,F,STRESS,DQDW1,DQDW2,
+ AUXM1,AUXM2,AUXM3,AUXM4,NTENS,NDI,G,W1,W2,AN1,AN2,AN3,QINV)
C
C FIND DPHI/DEBAR
CALL KYCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
DPHIDEP=-2.D0*YIELD*H
C
IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,DPHIDEP'
    WRITE(IOUT,1001) DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,DPHIDEP
END IF
C
C FIND A, C
CALL KAC(AMX,CMX,F,W1,W2,AN1,AN2,AN3,S,P,AUXM1,AUXM2,
+ X,W,NGAUS,NTENS,NDI,AIMX)
C
C FIND HH, H1, H2, H3, GG, G1, G2
GG=0.D0
DO I=1,NDI
    GG=GG+AN(I)
ENDDO
C
CALL KCOPY(AN,V1,NTENS)
DO I=NDI+1,NTENS
    V1(I)=V1(I)*2.D0
END DO
CALL KMULT(AMX,V1,V2,NTENS,NTENS,1)
C
V3(1)=AN3(1)**2-AN1(1)**2
V3(2)=AN3(2)**2-AN1(2)**2
V3(3)=AN3(3)**2-AN1(3)**2
V3(4)=AN3(1)*AN3(2)-AN1(1)*AN1(2)
CALL KAB(V3,V2,G1,NTENS,NDI)
V3(1)=AN3(1)**2-AN2(1)**2
V3(2)=AN3(2)**2-AN2(2)**2
V3(3)=AN3(3)**2-AN2(3)**2
V3(4)=AN3(1)*AN3(2)-AN2(1)*AN2(2)
CALL KAB(V3,V2,G2,NTENS,NDI)
C
HH=GG*(1.D0-F)
H1=G1*W1
H2=G2*W2
CALL KYCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
CALL KAB(STRESS,AN,SUM,NTENS,NDI)
H3=SUM/((1.D0-F)*YIELD)
ANUCL=0.D0
IF (FN.NE.0.D0)
+ ANUCL=(FN/(SN*DSQRT(2.D0*PI)))*DEXP(-0.5D0*((EBAR-EN)/SN)**2)
HH=HH+ANUCL*H3
C
C FIND OMEGA
OM=0.D0
WTOL=1.D-2
THETA=DATAN2(AN1(2),AN1(1))
IF (DABS(W1-W2).GE.WTOL) THEN
    T12=CMX(4,1)*AN(1)+CMX(4,2)*AN(2)+CMX(4,3)*AN(3)+
+ 2.D0*CMX(4,4)*AN(4)
    B21=(W2*W2+W1*W1)/(W2*W2-W1*W1)
    V3(1)=-DSIN(2.D0*THETA)
    V3(2)=-V3(1)
    V3(3)=0.D0
    V3(4)=DCOS(2.D0*THETA)
    CALL KAB(V3,V2,AUX,NTENS,NDI)
    OM=-T12-0.5D0*B21*AUX
END IF
CALL KINITIA(OMEGA,3*3)
OMEGA(1,2)=-OM
OMEGA(2,1)=OM
C
IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'A'

```

```

DO I=1,NTENS
  WRITE(IOUT,1001) (AMX(I,J),J=1,NTENS)
ENDDO
WRITE(IOUT,*) 'C'
DO I=1,NTENS
  WRITE(IOUT,1001) (CMX(I,J),J=1,NTENS)
ENDDO
WRITE(IOUT,*) 'OMEGA'
DO I=1,3
  WRITE(IOUT,1001) (OMEGA(I,J),J=1,3)
ENDDO
WRITE(IOUT,*) 'HH, H1, H2, H3'
WRITE(IOUT,1001) HH,H1,H2,H3
WRITE(IOUT,*) 'GG, G1, G2'
WRITE(IOUT,1001) GG,G1,G2
END IF
C
C FIND AL
  HC=- (DPHIDF*HH+DPHIDW1*H1+DPHIDW2*H2+DPHIDEP*H3)
C
CALL KCOPY(AN,V2,NTENS)
DO I=NDI+1,NTENS
  V2(I)=V2(I)*2.D0
ENDDO
CALL KMULT(CEL,V2,V1,NTENS,NTENS,1)
C*** V1=C^(e1):N=N:C^(e1)
CALL KAB(AN,V1,AL,NTENS,NDI)
AL=HC+AL
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'HC, AL'
  WRITE(IOUT,1001) HC,AL
END IF
C
W3=OMEGA(2,1)
V2(1)=2.D0*STRESS(4)*W3
V2(2)=-V2(1)
V2(3)=0.D0
V2(4)=(STRESS(2)-STRESS(1))*W3
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'S.OM-OM.S'
  WRITE(IOUT,1001) (V2(I),I=1,NTENS)
END IF
C
DO I=1,NTENS
  V3(I)=(V1(I)-V2(I))/AL
ENDDO
C
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
  DDSDE(I,J)=CEL(I,J)-V3(I)*V1(J)
ENDDO
ENDDO
C
IF (IWR.NE.0) THEN
  WRITE(IOUT,*) 'PLASTIC DDSDE'
  DO I=1,NTENS
    WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
  ENDDO
END IF
C
RETURN
1001 FORMAT(1P8E13.5)
1002 FORMAT(10I5)
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KKPLJAC(DDSDE, CEL, STRESS, EBAR, F, W1, W2, AN1, AN2, AN3,
+ X, W, NGAUS, S, P, Q, QINV, AMTLD, DQDW1, DQDW2, AIMX, AJMX, AKMX,
+ AMX, CMX, AN, QMX, AUXM1, AUXM2, AUXM3, AUXM4, OMEGA,
+ NTENS, NDI, ANU, G, AK, EXPO, E0, SIG0, IOU, IWR,
+ CELT, ANT, HHT, H1T, H2T, H3T, OMEGAT, STRESST)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION DDSDE(NTENS,NTENS), STRESS(1), OMEGA(3,3), OMEGAT(3,3)

```

```

    DIMENSION X(1),W(1),
+ S (NTENS,NTENS),P (NTENS,NTENS),Q (NTENS,NTENS),QINV (NTENS,NTENS),
+ AN1 (3),AN2 (3),AN3 (3),CEL (NTENS,NTENS),AMTLD (NTENS,NTENS),
+ DQDW1 (NTENS,NTENS),DQDW2 (NTENS,NTENS),
+ AIMX (NTENS,NTENS),AJMX (NTENS,NTENS),AKMX (NTENS,NTENS),
+ AMX (NTENS,NTENS),CMX (NTENS,NTENS),AN (NTENS),QMX (NTENS,NTENS),
+ AUXM1 (NTENS,NTENS),AUXM2 (NTENS,NTENS),AUXM3 (NTENS,NTENS),
+ AUXM4 (NTENS,NTENS),CELT (NTENS,NTENS),ANT (NTENS),STRESST (NTENS)
C
    DIMENSION V1(6),V2(6),V3(6),DETENS(3,3),DE(6),V1T(6),SCR4(4,4)
C
    IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*)
+ '*** CALCULATION OF PLASTIC JACOBIAN (kkpljac)'
C
C
C
C
    FIND N AT T+DT
    CALL KFINDN(AN,STRESS,F,AMTLD,AUXM1,NTENS,NDI)
C
    IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,*) 'AN AT T+DT'
    IF (IWR.NE.0) WRITE(IOUT,1001) (AN(I),I=1,NTENS)
C
C
    FIND DQ/DW1, DQ/DW2 AT T+DT
    POISSON=0.5D0
    CALL KDQ(DQDW1,DQDW2,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
C
    IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DQDW1 AT T+DT'
        DO I=1,NTENS
            WRITE(IOUT,1001) (DQDW1(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
        WRITE(IOUT,*) 'DQDW2 AT T+DT'
        DO I=1,NTENS
            WRITE(IOUT,1001) (DQDW2(I,J),J=1,NTENS)
        ENDDO
    END IF
C
C
    FIND DPHI/DF, DPHI/DW1, DPHI/DW2 AT T+DT
C
    POISSON=0.5D0
    CALL KESH_Q(Q,POISSON,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
    CALL KINV(Q,QINV,NTENS,SCR4)
    DO I=1,NTENS
        DO J=NDI+1,NTENS
            QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
        ENDDO
    ENDDO
    DO I=NDI+1,NTENS
        DO J=1,NTENS
            QINV(I,J)=QINV(I,J)/2.D0
        ENDDO
    ENDDO
    CALL KDFP(DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,AKMX,F,STRESS,DQDW1,DQDW2,
+ AUXM1,AUXM2,AUXM3,AUXM4,NTENS,NDI,G,W1,W2,AN1,AN2,AN3,QINV)
C
C
    FIND DPHI/DEBAR AT T+DT
    CALL KYCURVE(YIELD,H,EBAR,EXPO,E0,SIG0)
    DPHIDEP=-2.D0*YIELD*H
C
    IF (IWR.NE.0) THEN
        WRITE(IOUT,*) 'DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,DPHIDEP AT T+DT'
        WRITE(IOUT,1001) DPHIDF,DPHIDW1,DPHIDW2,DPHIDEP
    END IF
C
C
    FIND AL
    HC=- (DPHIDF*HHT+DPHIDW1*H1T+DPHIDW2*H2T+DPHIDEP*H3T)
C
    CALL KCOPY(ANT,V2,NTENS)
    DO I=NDI+1,NTENS
        V2(I)=V2(I)*2.D0
    ENDDO
    CALL KMULT(CELT,V2,V1T,NTENS,NTENS,1)
C*** V1T=CELT:NT=NT:CT
C
    CALL KCOPY(AN,V2,NTENS)
    DO I=NDI+1,NTENS
        V2(I)=V2(I)*2.D0
    ENDDO
    CALL KMULT(CELT,V2,V1,NTENS,NTENS,1)

```

```

C*** V1=CELT:N=N:CELT
C
  CALL KAB(AN,V1T,AL,NTENS,NDI)
  AL=HC+AL
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'HC, AL'
    WRITE(IOUT,1001) HC,AL
  END IF
C
  W3=OMEGAT(2,1)
  V2(1)=2.D0*STRESST(4)*W3
  V2(2)=-V2(1)
  V2(3)=0.D0
  V2(4)=(STRESST(2)-STRESST(1))*W3
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'S.OM-OM.S'
    WRITE(IOUT,1001) (V2(I),I=1,NTENS)
  END IF
C
  DO I=1,NTENS
    V3(I)=(V1T(I)-V2(I))/AL
  ENDDO
C
  DO I=1,NTENS
  DO J=1,NTENS
    DDSDE(I,J)=CELT(I,J)-V3(I)*V1(J)
  ENDDO
  ENDDO
C
  IF (IWR.NE.0) THEN
    WRITE(IOUT,*) 'PLASTIC DDSDE FROM KKPLJAC'
    DO I=1,NTENS
      WRITE(IOUT,1001) (DDSDE(I,J),J=1,NTENS)
    ENDDO
  END IF
C
  RETURN
1001 FORMAT(1P8E13.5)
1002 FORMAT(10I5)
END
C
C*****
C
  SUBROUTINE KESH_S(S,ANU,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
  DIMENSION X(1),W(1),S(NTENS,NTENS),AN1(3),AN2(3),AN3(3),Q(3,3),
+ SS(6,6)
C
  DIMENSION QMX(4,4),AUXM1(4,4),AUXM2(4,4)
C
  DIMENSION AJMX(4,4),AKMX(4,4)
  COMMON/KNICK/AJMX,AKMX
C
  CALL KINITIA(S,NTENS*NTENS)
  CALL KINITIA(SS,6*6)
C
  C1=1.D0
  A1=C1/W1
  B1=C1/W2
  PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
  CALL KORDER(A,B,C,IA,IB,IC,A1,B1,C1)
C
  CALL KIAB(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,B,C,
+ IA,IB,IC,X,W,NGAUS)
C
  QQ=3.D0/(8.D0*PI*(1.D0-ANU))
  R=(1.D0-2.D0*ANU)/(8.D0*PI*(1.D0-ANU))
C
  SS(1,1)=QQ*A*A*AI11+R*AI1
  SS(2,2)=QQ*B*B*AI22+R*AI2
  SS(3,3)=QQ*C*C*AI33+R*AI3
C
  SS(1,2)=QQ*B*B*AI12-R*AI1
  SS(1,3)=QQ*C*C*AI13-R*AI1
  SS(2,1)=QQ*A*A*AI12-R*AI2

```

```

SS (2,3)=QQ*C*C*AI23-R*AI2
SS (3,1)=QQ*A*A*AI13-R*AI3
SS (3,2)=QQ*B*B*AI23-R*AI3
C
SS (4,4)=0.5D0*QQ*(A*A+B*B)*AI12+0.5D0*R*(AI1+AI2)
SS (5,5)=0.5D0*QQ*(A*A+C*C)*AI13+0.5D0*R*(AI1+AI3)
SS (6,6)=0.5D0*QQ*(B*B+C*C)*AI23+0.5D0*R*(AI2+AI3)
C
CALL KARRANGE(S,SS,A1,B1,C1,NTENS)
C
C*** ROTATION
C
DO I=1,3
  Q(I,1)=AN1(I)
  Q(I,2)=AN2(I)
  Q(I,3)=AN3(I)
END DO
C
CALL KINITIA(QMX,NTENS*NTENS)
DO I=1,3
DO J=1,3
  QMX(I,J)=Q(I,J)**2
END DO
END DO
C
QMX(1,4)=Q(1,1)*Q(1,2)
QMX(2,4)=Q(2,1)*Q(2,2)
QMX(3,4)=Q(3,1)*Q(3,2)
C
QMX(4,1)=Q(1,1)*Q(2,1)
QMX(4,2)=Q(1,2)*Q(2,2)
QMX(4,3)=Q(1,3)*Q(2,3)
C
QMX(4,4)=Q(1,1)*Q(2,2)
QMX55=Q(1,2)*Q(2,1)
C
CALL KCOPY(QMX,AUXM1,NTENS*NTENS)
AUXM1(1,4)=2.D0*AUXM1(1,4)
AUXM1(2,4)=2.D0*AUXM1(2,4)
AUXM1(4,4)=AUXM1(4,4)+QMX55
CALL KMULT(AUXM1,S,AUXM2,NTENS,NTENS,NTENS)
CALL KTRANSPOSE(AUXM1,S,NTENS,NTENS)
CALL KMULT(AUXM2,S,AUXM1,NTENS,NTENS,NTENS)
CALL KCOPY(AUXM1,S,NTENS*NTENS)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KESH_PI(P,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION X(1),W(1),P(NTENS,NTENS),AN1(3),AN2(3),AN3(3),Q(3,3)
C
DIMENSION QMX(4,4)
C
DIMENSION AJMX(4,4),AKMX(4,4)
COMMON/KNICK/AJMX,AKMX
C
CALL KINITIA(P,NTENS*NTENS)
C
C1=1.D0
A1=C1/W1
B1=C1/W2
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
IF (DABS(A1-B1).LT.0.01D0.AND.DABS(B1-C1).LT.0.01D0) RETURN
C
CALL KORDER(A,B,C,IA,IB,IC,A1,B1,C1)
C
CALL KIAB(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,B,C,
+ IA,IB,IC,X,W,NGAUS)
C
IF (A1.GE.B1.AND.B1.GE.C1) P(4,4)=(AI2-AI1)/(8.D0*PI)
IF (A1.GE.C1.AND.C1.GE.B1) P(4,4)=(AI3-AI1)/(8.D0*PI)
IF (C1.GE.A1.AND.A1.GE.B1) P(4,4)=(AI3-AI2)/(8.D0*PI)

```



```

IF (B1.GE.A1.AND.A1.GE.C1) P(4,4)=(AI1-AI2)/(8.D0*PI)
IF (B1.GE.C1.AND.C1.GE.A1) P(4,4)=(AI1-AI3)/(8.D0*PI)
IF (C1.GE.B1.AND.B1.GE.A1) P(4,4)=(AI2-AI3)/(8.D0*PI)
C
C*** ROTATION
C
DO I=1,3
  Q(I,1)=AN1(I)
  Q(I,2)=AN2(I)
  Q(I,3)=AN3(I)
END DO
C
CALL KINITIA(QMX,NTENS*NTENS)
DO I=1,3
DO J=1,3
  QMX(I,J)=Q(I,J)**2
END DO
END DO
C
QMX(1,4)=Q(1,1)*Q(1,2)
QMX(2,4)=Q(2,1)*Q(2,2)
QMX(3,4)=Q(3,1)*Q(3,2)
C
QMX(4,1)=Q(1,1)*Q(2,1)
QMX(4,2)=Q(1,2)*Q(2,2)
QMX(4,3)=Q(1,3)*Q(2,3)
C
QMX(4,4)=Q(1,1)*Q(2,2)
QMX55=Q(1,2)*Q(2,1)
C
A4=P(4,4)
P(4,1)=2.D0*A4*QMX(1,4)*(QMX(4,4)-QMX55)
P(4,2)=2.D0*A4*QMX(2,4)*(QMX(4,4)-QMX55)
P(4,3)=0.D0
P(4,4)=A4*(QMX(4,4)-QMX55)*(QMX(4,4)+QMX55)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KESH_Q(Q,ANU,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION Q(NTENS,NTENS),AN1(3),AN2(3),AN3(3),X(1),W(1),QQ(3,3),
+ SS(6,6)
C
DIMENSION QMX(4,4),AUXM1(4,4),AUXM2(4,4)
C
DIMENSION AJMX(4,4),AKMX(4,4)
COMMON/KNICK/AJMX,AKMX
C
CALL KINITIA(Q,NTENS*NTENS)
CALL KINITIA(SS,6*6)
C
C1=1.D0
A1=C1/W1
B1=C1/W2
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
CALL KORDER(A,B,C,IA,IB,IC,A1,B1,C1)
C
CALL KIAB(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,B,C,
+ IA,IB,IC,X,W,NGAUS)
C
SS(1,1)=(G/(2.D0*PI*(1.D0-ANU)))*(4.D0*PI-0.5D0*AI1-
+ 1.5D0*A*A*AI11)
SS(2,2)=(G/(2.D0*PI*(1.D0-ANU)))*(4.D0*PI-0.5D0*AI2-
+ 1.5D0*B*B*AI22)
SS(3,3)=(G/(2.D0*PI*(1.D0-ANU)))*(4.D0*PI-0.5D0*AI3-
+ 1.5D0*C*C*AI33)
C
SS(1,2)=(G/(8.D0*PI*(1.D0-ANU)))*(16.D0*PI*ANU+(1.D0-4.D0*ANU)*
+ (AI1+AI2)-3.D0*(A*A+B*B)*AI12)
SS(1,3)=(G/(8.D0*PI*(1.D0-ANU)))*(16.D0*PI*ANU+(1.D0-4.D0*ANU)*
+ (AI1+AI3)-3.D0*(A*A+C*C)*AI13)
SS(2,3)=(G/(8.D0*PI*(1.D0-ANU)))*(16.D0*PI*ANU+(1.D0-4.D0*ANU)*

```

```

+ (AI2+AI3)-3.D0*(B*B+C*C)*AI23)
C
SS(2,1)=SS(1,2)
SS(3,1)=SS(1,3)
SS(3,2)=SS(2,3)
C
SS(4,4)=G-(G/(8.D0*PI*(1.D0-ANU)))*((1.D0-2.D0*ANU)*(AI1+AI2)+
+ 3.D0*(A*A+B*B)*AI12)
SS(5,5)=G-(G/(8.D0*PI*(1.D0-ANU)))*((1.D0-2.D0*ANU)*(AI1+AI3)+
+ 3.D0*(A*A+C*C)*AI13)
SS(6,6)=G-(G/(8.D0*PI*(1.D0-ANU)))*((1.D0-2.D0*ANU)*(AI2+AI3)+
+ 3.D0*(B*B+C*C)*AI23)
C
CALL KARRANGE(Q,SS,A1,B1,C1,NTENS)
C
C*** ROTATION
C
DO I=1,3
  QQ(I,1)=AN1(I)
  QQ(I,2)=AN2(I)
  QQ(I,3)=AN3(I)
END DO
C
CALL KINITIA(QMX,NTENS*NTENS)
DO I=1,3
DO J=1,3
  QMX(I,J)=QQ(I,J)**2
END DO
END DO
C
QMX(1,4)=2.D0*QQ(1,1)*QQ(1,2)
QMX(2,4)=2.D0*QQ(2,1)*QQ(2,2)
QMX(3,4)=2.D0*QQ(3,1)*QQ(3,2)
C
QMX(4,1)=QQ(1,1)*QQ(2,1)
QMX(4,2)=QQ(1,2)*QQ(2,2)
QMX(4,3)=QQ(1,3)*QQ(2,3)
C
QMX(4,4)=QQ(1,1)*QQ(2,2)+QQ(1,2)*QQ(2,1)
C
CALL KTRANPOSE(QMX,AUXM1,NTENS,NTENS)
CALL KMULT(QMX,Q,AUXM2,NTENS,NTENS,NTENS)
CALL KMULT(AUXM2,AUXM1,Q,NTENS,NTENS,NTENS)
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KDQ(DQDW1,DQDW2,ANU,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,
+ G)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION DQDW1(NTENS,NTENS),DQDW2(NTENS,NTENS),
+ AN1(3),AN2(3),AN3(3),X(1),W(1)
C
DIMENSION AUXM1(4,4)
C
CALL KESH_Q(AUXM1,ANU,W1,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
C
DW1=0.005D0
IF (W1.EQ.W2.AND.DABS(W1-1.D0).GT.0.05)
+ DW1=1.1D0*(W1-1.D0/(0.01D0+(1.D0/W1)))
W12=W1-DW1
CALL KESH_Q(DQDW1,ANU,W12,W2,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
DO I=1,NTENS
DO J=1,NTENS
  DQDW1(I,J)=(DQDW1(I,J)-AUXM1(I,J))/(-DW1)
END DO
END DO
C
DW2=0.005
IF (W1.EQ.W2.AND.DABS(W1-1.D0).GT.0.05)
+ DW2=1.1D0*(-W2+1.D0/((1.D0/W2)-0.01D0))
W22=W2+DW2
CALL KESH_Q(DQDW2,ANU,W1,W22,AN1,AN2,AN3,X,W,NGAUS,NTENS,G)
DO I=1,NTENS

```

```

DO J=1,NTENS
  DQDW2 ( I, J) = (DQDW2 ( I, J) -AUXM1 ( I, J) ) /DW2
END DO
END DO
C
RETURN
1001 format (1p6e12.4)
1002 format (i6)
2001 format (2i4)
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KDQDN (DQDN1, DQDN2, DQDN3, ANU, W1, W2, AN1, AN2, AN3, X, W,
+ NGAUS, NTENS, G)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
C
DIMENSION DQDN1 (NTENS, NTENS, 3), DQDN2 (NTENS, NTENS, 3),
+ DQDN3 (NTENS, NTENS, 3), AN1 (3), AN2 (3), AN3 (3), X (1), W (1),
+ BN1 (3), BN2 (3), BN3 (3)
C
DIMENSION AUXM1 (4, 4), AUXM2 (4, 4)
C
CALL KESH_Q (AUXM1, ANU, W1, W2, AN1, AN2, AN3, X, W, NGAUS, NTENS, G)
write (7, *)
write (7, *) ' auxm1 in kdqdn1'
do i=1, ntens
  write (7, 1001) (auxm1 (i, j), j=1, ntens)
end do
C
DO I=1, 3
  CALL KCOPY (AN1, BN1, 3)
  BN1 (I) = 1.01D0 * AN1 (I)
  IF (DABS (BN1 (I)) .LT. 1.D-6) BN1 (I) = 0.005D0
  DN = BN1 (I) - AN1 (I)
  CALL KESH_Q (AUXM2, ANU, W1, W2, BN1, AN2, AN3, X, W, NGAUS, NTENS, G)
  write (7, *)
  write (7, *) ' auxm2 in kdqdn1'
  do ii=1, ntens
    write (7, 1001) (auxm2 (ii, j), j=1, ntens)
  end do
  DO K=1, NTENS
  DO L=1, NTENS
    DQDN1 (K, L, I) = (AUXM2 (K, L) - AUXM1 (K, L)) / DN
  END DO
  END DO
END DO
C
DO I=1, 3
  CALL KCOPY (AN2, BN2, 3)
  BN2 (I) = 1.01D0 * AN2 (I)
  IF (DABS (BN2 (I)) .LT. 1.D-6) BN2 (I) = 0.005D0
  DN = BN2 (I) - AN2 (I)
  CALL KESH_Q (AUXM2, ANU, W1, W2, AN1, BN2, AN3, X, W, NGAUS, NTENS, G)
  DO K=1, NTENS
  DO L=1, NTENS
    DQDN2 (K, L, I) = (AUXM2 (K, L) - AUXM1 (K, L)) / DN
  END DO
  END DO
END DO
C
DO I=1, 3
  CALL KCOPY (AN3, BN3, 3)
  BN3 (I) = 1.01D0 * AN3 (I)
  DN = BN3 (I) - AN3 (I)
  IF (DABS (BN3 (I)) .LT. 1.D-6) BN3 (I) = 0.005D0
  CALL KESH_Q (AUXM2, ANU, W1, W2, AN1, AN2, BN3, X, W, NGAUS, NTENS, G)
  DO K=1, NTENS
  DO L=1, NTENS
    DQDN3 (K, L, I) = (AUXM2 (K, L) - AUXM1 (K, L)) / DN
  END DO
  END DO
END DO
C
RETURN
1001 format (1p6e12.4)
1002 format (i6)

```

2001 format (2i4)

END

```
C
C*****
C
  SUBROUTINE KIAB(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,B,C,
+ IA,IB,IC,X,W,NGAUS)
C
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
  DIMENSION X(1),W(1)
C
  PI=4.D0*DATAN(1.D0)
C
  IF (DABS(A-B).GE.0.01D0.AND.DABS(B-C).GE.0.01D0) THEN
C
    CALL KABC(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,B,C,
+ X,W,NGAUS)
    RETURN
  END IF
C
C
C
  IF (DABS(A-B).LT.0.01D0.AND.DABS(B-C).LT.0.01D0) THEN
C
  IF (IA.EQ.1) THEN
    CALL KAAA(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,1.D0)
    CALL KAAC(AI1Y,AI2Y,AI3Y,AI11Y,AI22Y,AI33Y,AI12Y,AI13Y,
+ AI23Y,1.D0,0.99D0)
    CALL KACC(AI1Z,AI2Z,AI3Z,AI11Z,AI22Z,AI33Z,AI12Z,AI13Z,
+ AI23Z,1.D0,0.99D0)
    SH1=(C-0.99D0)/0.01D0
    SH2=(B-C)/0.01
    SH3=(1.D0-B)/0.01D0
    AI1=SH1*AI1+SH2*AI1Y+SH3*AI1Z
    AI2=SH1*AI2+SH2*AI2Y+SH3*AI2Z
    AI3=SH1*AI3+SH2*AI3Y+SH3*AI3Z
    AI11=SH1*AI11+SH2*AI11Y+SH3*AI11Z
    AI22=SH1*AI22+SH2*AI22Y+SH3*AI22Z
    AI33=SH1*AI33+SH2*AI33Y+SH3*AI33Z
    AI12=SH1*AI12+SH2*AI12Y+SH3*AI12Z
    AI13=SH1*AI13+SH2*AI13Y+SH3*AI13Z
    AI23=SH1*AI23+SH2*AI23Y+SH3*AI23Z
    RETURN
  END IF
C
  IF (IB.EQ.1) THEN
    CALL KAAA(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,1.D0)
    CALL KACC(AI1Y,AI2Y,AI3Y,AI11Y,AI22Y,AI33Y,AI12Y,AI13Y,
+ AI23Y,1.01D0,1.D0)
    CALL KABC(AI1Z,AI2Z,AI3Z,AI11Z,AI22Z,AI33Z,AI12Z,AI13Z,AI23Z,
+ 1.01D0,1.D0,0.99D0,X,W,NGAUS)
    CALL KAAC(AI1X,AI2X,AI3X,AI11X,AI22X,AI33X,AI12X,AI13X,AI23X,
+ 1.D0,0.99D0)
    SH1=(C-0.99D0)*(1.01D0-A)/0.0001D0
    SH2=(C-0.99D0)*(A-1.D0)/0.0001D0
    SH3=(1.D0-C)*(A-1.D0)/0.0001D0
    SH4=(1.D0-C)*(1.01D0-A)/0.0001D0
    AI1=SH1*AI1+SH2*AI1Y+SH3*AI1Z+SH4*AI1X
    AI2=SH1*AI2+SH2*AI2Y+SH3*AI2Z+SH4*AI2X
    AI3=SH1*AI3+SH2*AI3Y+SH3*AI3Z+SH4*AI3X
    AI11=SH1*AI11+SH2*AI11Y+SH3*AI11Z+SH4*AI11X
    AI22=SH1*AI22+SH2*AI22Y+SH3*AI22Z+SH4*AI22X
    AI33=SH1*AI33+SH2*AI33Y+SH3*AI33Z+SH4*AI33X
    AI12=SH1*AI12+SH2*AI12Y+SH3*AI12Z+SH4*AI12X
    AI13=SH1*AI13+SH2*AI13Y+SH3*AI13Z+SH4*AI13X
    AI23=SH1*AI23+SH2*AI23Y+SH3*AI23Z+SH4*AI23X
    RETURN
  END IF
C
  IF (IC.EQ.1) THEN
    CALL KAAA(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,1.D0)
    CALL KACC(AI1Y,AI2Y,AI3Y,AI11Y,AI22Y,AI33Y,AI12Y,AI13Y,
+ AI23Y,1.01D0,1.D0)
    CALL KAAC(AI1Z,AI2Z,AI3Z,AI11Z,AI22Z,AI33Z,AI12Z,AI13Z,AI23Z,
+ 1.01D0,1.D0)
    SH1=(1.01D0-A)/0.01D0
    SH2=(A-B)/0.01D0
```

```

SH3=(B-1.D0)/0.01D0
AI1=SH1*AI1+SH2*AI1Y+SH3*AI1Z
AI2=SH1*AI2+SH2*AI2Y+SH3*AI2Z
AI3=SH1*AI3+SH2*AI3Y+SH3*AI3Z
AI11=SH1*AI11+SH2*AI11Y+SH3*AI11Z
AI22=SH1*AI22+SH2*AI22Y+SH3*AI22Z
AI33=SH1*AI33+SH2*AI33Y+SH3*AI33Z
AI12=SH1*AI12+SH2*AI12Y+SH3*AI12Z
AI13=SH1*AI13+SH2*AI13Y+SH3*AI13Z
AI23=SH1*AI23+SH2*AI23Y+SH3*AI23Z
RETURN
END IF
END IF

C
C
C
C
IF (DABS(A-B).LT.0.01D0.AND.DABS(B-C).GE.0.01D0) THEN

CALL KAAC(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,C)
CALL KABC(AI1Z,AI2Z,AI3Z,AI11Z,AI22Z,AI33Z,AI12Z,AI13Z,AI23Z,
+ B+0.01D0,B,C,X,W,NGAUS)
XI=(A-B)/0.01D0
AI1=XI*AI1Z+(1.D0-XI)*AI1
AI2=XI*AI2Z+(1.D0-XI)*AI2
AI3=XI*AI3Z+(1.D0-XI)*AI3
AI11=XI*AI11Z+(1.D0-XI)*AI11
AI22=XI*AI22Z+(1.D0-XI)*AI22
AI33=XI*AI33Z+(1.D0-XI)*AI33
AI12=XI*AI12Z+(1.D0-XI)*AI12
AI13=XI*AI13Z+(1.D0-XI)*AI13
AI23=XI*AI23Z+(1.D0-XI)*AI23
RETURN
END IF

C
C
C
C
IF (DABS(A-B).GE.0.01D0.AND.DABS(B-C).LT.0.01D0) THEN

CALL KACC(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,C)
CALL KABC(AI1Z,AI2Z,AI3Z,AI11Z,AI22Z,AI33Z,AI12Z,AI13Z,AI23Z,
+ A,C+0.01D0,C,X,W,NGAUS)
XI=(B-C)/0.01D0
AI1=XI*AI1Z+(1.D0-XI)*AI1
AI2=XI*AI2Z+(1.D0-XI)*AI2
AI3=XI*AI3Z+(1.D0-XI)*AI3
AI11=XI*AI11Z+(1.D0-XI)*AI11
AI22=XI*AI22Z+(1.D0-XI)*AI22
AI33=XI*AI33Z+(1.D0-XI)*AI33
AI12=XI*AI12Z+(1.D0-XI)*AI12
AI13=XI*AI13Z+(1.D0-XI)*AI13
AI23=XI*AI23Z+(1.D0-XI)*AI23
RETURN
END IF

C
RETURN
END

C
C*****
C
SUBROUTINE KABC(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,B,C,
+ X,W,NGAUS)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION X(1),W(1)
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
TH=DASIN(DSQRT(1.D0-C*C/(A*A)))
AK=DSQRT((A*A-B*B)/(A*A-C*C))
C
SUM1=0.D0
SUM2=0.D0
AA=0.D0
BB=TH
AUX1=(BB-AA)/2.D0
AUX2=(BB+AA)/2.D0
DO I=1,NGAUS
PHI=AUX1*X(I)+AUX2

```

```

SUM1=SUM1+W(I)/DSQRT(1.D0-(AK*DSIN(PHI))**2)
SUM2=SUM2+W(I)*DSQRT(1.D0-(AK*DSIN(PHI))**2)
END DO
F=SUM1*AUX1
E=SUM2*AUX1
C
AI1=4.D0*PI*A*B*C*(F-E)/((A*A-B*B)*DSQRT(A*A-C*C))
AI3=4.D0*PI*A*B*C*(B*DSQRT(A*A-C*C)/(A*C)-E)/
+ (B*B-C*C)*DSQRT(A*A-C*C)
AI2=4.D0*PI-AI1-AI3
AI12=(AI2-AI1)/(3.D0*(A*A-B*B))
AI13=(AI3-AI1)/(3.D0*(A*A-C*C))
AI23=(AI3-AI2)/(3.D0*(B*B-C*C))
AI11=4.D0*PI/(3.D0*A*A)-AI12-AI13
AI22=4.D0*PI/(3.D0*B*B)-AI12-AI23
AI33=4.D0*PI/(3.D0*C*C)-AI13-AI23
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KAAC(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,C)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
AI1=2.D0*PI*A*A*C/((A*A-C*C)**1.5D0)*
+ (DACOS(C/A)-(C/A)*DSQRT(1.D0-C*C/(A*A)))
AI2=AI1
AI3=4.D0*PI-2.D0*AI1
AI13=(AI3-AI1)/(3.D0*(A*A-C*C))
AI23=AI13
AI12=PI/(3.D0*A*A)-AI13/4
AI11=3.D0*AI12
AI22=AI11
AI33=4.D0*PI/(3.D0*C*C)-AI13-AI23
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KACC(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A,C)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
Z=A/C
DACOSH=DLOG(Z+DSQRT(Z*Z-1.D0))
AI2=2.D0*PI*A*C*C/((A*A-C*C)**1.5D0)*
+ ((A/C)*DSQRT(A*A/(C*C)-1.D0)-DACOSH)
AI3=AI2
AI1=4.D0*PI-2.D0*AI2
AI13=(AI2-AI1)/(3.D0*(A*A-C*C))
AI12=AI13
AI23=PI/(3.D0*C*C)-AI12/4
AI22=3.D0*AI23
AI33=AI22
AI11=4.D0*PI/(3.D0*A*A)-AI12-AI13
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KAAA(AI1,AI2,AI3,AI11,AI22,AI33,AI12,AI13,AI23,A)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
AI1=4.D0*PI/3.D0
AI2=AI1
AI3=AI1
AI11=4.D0*PI/(5.D0*A*A)
AI22=AI11
AI33=AI11
AI12=AI11/3.D0

```



```

AI13=AI12
AI23=AI12
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KORDER(A,B,C,IA,IB,IC,A1,B1,C1)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
IA=0
IB=0
IC=0
C
IF (A1.GE.B1.AND.B1.GE.C1) THEN
  A=A1
  B=B1
  C=C1
  IC=1
  RETURN
END IF
IF (A1.GE.C1.AND.C1.GE.B1) THEN
  A=A1
  B=C1
  C=B1
  IB=1
  RETURN
END IF
IF (C1.GE.A1.AND.A1.GE.B1) THEN
  A=C1
  B=A1
  C=B1
  IA=1
  RETURN
END IF
IF (B1.GE.A1.AND.A1.GE.C1) THEN
  A=B1
  B=A1
  C=C1
  IC=1
  RETURN
END IF
IF (B1.GE.C1.AND.C1.GE.A1) THEN
  A=B1
  B=C1
  C=A1
  IB=1
  RETURN
END IF
IF (C1.GE.B1.AND.B1.GE.A1) THEN
  A=C1
  B=B1
  C=A1
  IA=1
  RETURN
END IF
C
RETURN
END
C
C*****
C
SUBROUTINE KARRANGE(Q,SS,A1,B1,C1,NTENS)
C
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
DIMENSION Q(NTENS,NTENS),SS(6,6)
C
IF (A1.GE.B1.AND.B1.GE.C1) THEN
  DO I=1,NTENS
    DO J=1,NTENS
      Q(I,J)=SS(I,J)
    END DO
  END DO
END IF
C

```

```

IF (A1.GE.C1.AND.C1.GE.B1) THEN
  Q(1,1)=SS(1,1)
  Q(1,2)=SS(1,3)
  Q(1,3)=SS(1,2)
  Q(2,1)=SS(3,1)
  Q(2,2)=SS(3,3)
  Q(2,3)=SS(3,2)
  Q(3,1)=SS(2,1)
  Q(3,2)=SS(2,3)
  Q(3,3)=SS(2,2)
  Q(4,4)=SS(5,5)
END IF

```

C

```

IF (C1.GE.A1.AND.A1.GE.B1) THEN
  Q(1,1)=SS(2,2)
  Q(1,2)=SS(2,3)
  Q(1,3)=SS(2,1)
  Q(2,1)=SS(3,2)
  Q(2,2)=SS(3,3)
  Q(2,3)=SS(3,1)
  Q(3,1)=SS(1,2)
  Q(3,2)=SS(1,3)
  Q(3,3)=SS(1,1)
  Q(4,4)=SS(6,6)
END IF

```

C

```

IF (B1.GE.A1.AND.A1.GE.C1) THEN
  Q(1,1)=SS(2,2)
  Q(1,2)=SS(2,1)
  Q(1,3)=SS(2,3)
  Q(2,1)=SS(1,2)
  Q(2,2)=SS(1,1)
  Q(2,3)=SS(1,3)
  Q(3,1)=SS(3,2)
  Q(3,2)=SS(3,1)
  Q(3,3)=SS(3,3)
  Q(4,4)=SS(4,4)
END IF

```

C

```

IF (B1.GE.C1.AND.C1.GE.A1) THEN
  Q(1,1)=SS(3,3)
  Q(1,2)=SS(3,1)
  Q(1,3)=SS(3,2)
  Q(2,1)=SS(1,3)
  Q(2,2)=SS(1,1)
  Q(2,3)=SS(1,2)
  Q(3,1)=SS(2,3)
  Q(3,2)=SS(2,1)
  Q(3,3)=SS(2,2)
  Q(4,4)=SS(5,5)
END IF

```

C

```

IF (C1.GE.B1.AND.B1.GE.A1) THEN
  Q(1,1)=SS(3,3)
  Q(1,2)=SS(3,2)
  Q(1,3)=SS(3,1)
  Q(2,1)=SS(2,3)
  Q(2,2)=SS(2,2)
  Q(2,3)=SS(2,1)
  Q(3,1)=SS(1,3)
  Q(3,2)=SS(1,2)
  Q(3,3)=SS(1,1)
  Q(4,4)=SS(6,6)
END IF

```

C

```

RETURN
END

```

C

C*****

C

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION FLGAMA(W)

```

C

```

C CALCULATES THE LOG(BASE E) GAMMA(W) FOR W REAL AND
C GAMMA(W) POSITIVE. USES STIRLING'S APPROXIMATION.
C ACCURATE TO ABOUT 12 SIGNIFICANT PLACES.

```

C

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
PI=4.D0*DATAN(1.D0)

```

```

X=W
M=0
FK=-1.D0
IF(X-.5D0)10,20,20
C
C W LESS THAN .5
C
10 M=1
XPI=X*PI
X=1.D0-X
20 FK=FK+1.D0
IF(X+FK-6.D0)20,20,30
30 Z=X+FK
ZZ=Z*Z
C
C LOG GAMMA(Z), Z GREATER 6.
C
Y=(Z-.5D0)*DLOG(Z)-Z+.9189385332047D0+(((((-4146.D0/ZZ+1820.D0)/ZZ
1-1287.D0)/ZZ+1716.D0)/ZZ-6006.D0)/ZZ+180180.D0)/Z/2162160.D0
IF(FK)60,60,40
40 IK=IDINT(FK)
DO 50 I=1,IK
FK=FK-1.D0
50 Y=Y-DLOG(X+FK)
60 IF(M)70,110,70
70 P=PI/DSIN(XPI)
IF(P)80,80,100
80 WRITE(6,90)W
90 FORMAT(2X,'GAMMA(',1PE12.5,') IS NEGATIVE')
Y=0.D0
GO TO 110
100 Y=DLOG(P)-Y
110 FLGAMA=Y
RETURN
END

```

```

C
C*****
C

```

```

SUBROUTINE JACOBI(ALF,BTA,NN,X,A)
C
C CALCULATES THE ZEROS X(I) OF THE NN-TH ORDER
C JACOBI POLYNOMIAL PN(ALF,BTA) FOR THE SEGMENT (-1,1).
C THE LARGEST ZERO WILL BE STORED IN X(1). ALSO
C CALCULATES THE CORRESPONDING COEFFICIENTS A(I)
C OF THE NN-TH ORDER GAUSS-JACOBI QUADRATURE FORMULA
C OF DEGREE 2*NN-1.

```

```

C
C      1      ALF      BTA      NN
C INTEGRAL (1-X) (1+X) F(X) DX = SUM A(I)*F(X(I))
C      -1      I=1

```

```

C REFERENCE: "GAUSSIAN QUADRATURE FORMULAS", A. H. STROUD AND
C DON SECREST, PRENTICE-HALL, INC., 1966

```

```

C IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C DIMENSION X(1),A(1),B(1000),C(1000)

```

```

C DEFINE ERROR TOLERANCE EPS ON THE X(I)
C DEFINE THE SUM OF ALF PLUS BTA AS APB

```

```

C EPS=10.D0**(-9)
C APB=ALF+BTA

```

```

C COMPUTE THE COEFFICIENTS B(N) AND C(N) FOR THE
C RECURSION RELATION OF THE P(N)'S

```

```

C P(N) = (X - B(N))*P(N-1) - C(N)*P(N-2)

```

```

C
DO 5 I=2,NN
XI=FLOAT(I)
ABI=APB+2.D0*XI
B(I)=(BTA*BTA-ALF*ALF)/((ABI)*(ABI-2.D0))
IF(I.EQ.2)THEN
CNUM=4.D0*(ALF+1.D0)*(BTA+1.D0)
CDEN=(APB+3.D0)*(APB+2.D0)*(APB+2.D0)
ELSE
CNUM=4.D0*(XI-1.D0)*(ALF+XI-1.D0)*(BTA+XI-1.D0)*(APB+XI-1.D0)
CDEN=(ABI-1.D0)*(ABI-2.D0)*(ABI-2.D0)*(ABI-3.D0)

```

```

ENDIF
C(I)=CNUM/CDEN
5 CONTINUE
C
C BEGIN COMPUTATION OF ZEROS OF JACOBI POLYNOMIAL
C THE SECTIONS BELOW LABELED LARGEST ZERO THROUGH
C LAST ZERO COMPUTE THE INITIAL APPROXIMATIONS TO
C THE ROOTS. THE CALL TO ROOT IMPROVES UPON THIS
C INITIAL APPROXIMATION.
C
    FN=FLOAT(NN)
    BETA=DEXP(FLGAMA(ALF+1.D0)+FLGAMA(BTA+1.D0)-FLGAMA(APB+2.D0))
    CC=2.D0** (APB+1.D0)*BETA
    DO 10 J=2,NN
    CC=CC*C(J)
10 CONTINUE
    DO 120 I=1,NN
    IF(I-1)120,20,30
C
C LARGEST ZERO
C
20 AN=ALF/FN
   BN=BTA/FN
   R1=(1.D0+ALF)*(2.78D0/(4.D0+FN*FN)+.768D0*AN/FN)
   R2=1.D0+1.48D0*AN+.96D0*BN+.452D0*AN*AN+.83D0*AN*BN
   XT=1.D0-R1/R2
   GO TO 110
30 IF(I-2)120,40,50
C
C SECOND ZERO
C
40 R1=(4.1D0+ALF)/((1.D0+ALF)*(1.D0+.156D0*ALF))
   R2=1.D0+.06D0*(FN-8.D0)*(1.D0+.12D0*ALF)/FN
   R3=1.D0+.012*BTA*(1.D0+.25D0*DABS(ALF))/FN
   RATIO=R1*R2*R3
   XT=XT-RATIO*(1.D0-XT)
   GO TO 110
50 IF(I-3)120,60,70
C
C THIRD ZERO
C
60 R1=(1.67D0+.28D0*ALF)/(1.D0+.37D0*ALF)
   R2=1.D0+.22D0*(FN-8.D0)/FN
   R3=1.D0+8.D0*BTA/((6.28D0+BTA)*FN*FN)
   RATIO=R1*R2*R3
   XT=XT-RATIO*(X(1)-XT)
   GO TO 110
70 IF(NN-I-1)100,90,80
C
C MIDDLE ZEROS
C
80 XT=3.D0*X(I-1)-3.D0*X(I-2)+X(I-3)
   GO TO 110
C
C SECOND TO LAST ZERO
C
90 R1=(1.D0+.235D0*BTA)/(.766D0+.119D0*BTA)
   R2=1.D0/(1.D0+.639D0*(FN-4.D0)/(1.D0+.71D0*(FN-4.D0)))
   R3=1.D0/(1.D0+20.D0*ALF/((7.5D0+ALF)*FN*FN))
   RATIO=R1*R2*R3
   XT=XT+RATIO*(XT-X(I-2))
   GO TO 110
C
C LAST ZERO
C
100 R1=(1.D0+.37D0*BTA)/(1.67D0+.28D0*BTA)
    R2=1.D0/(1.D0+.22D0*(FN-8.D0)/FN)
    R3=1.D0/(1.D0+8.D0*ALF/((6.28D0+ALF)*FN*FN))
    RATIO=R1*R2*R3
    XT=XT+RATIO*(XT-X(I-2))
C
110 CALL ROOT(XT,NN,ALF,BTA,DPN,PN1,B,C,EPS)
    X(I)=XT
    A(I)=CC/(DPN*PN1)
120 CONTINUE
    RETURN
    END
C

```

```

C*****
C
      SUBROUTINE RECUR (PN,DPN,PN1,X,NN,ALF,BTA,B,C)
C
C CALCULATES P(N) BASED UPON RECURSION RELATION
C
C  $P(N) = (X - B(N)) * P(N-1) - C(N) * P(N-2)$ 
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION B(1),C(1)
      P1=1.D0
      P=X+(ALF-BTA)/(ALF+BTA+2.D0)
      DP1=0.D0
      DP=1.D0
      DO 10 J=2,NN
      Q=(X-B(J))*P-C(J)*P1
      DQ=(X-B(J))*DP+P-C(J)*DP1
      P1=P
      P=Q
      DP1=DP
      DP=DQ
10 CONTINUE
      PN=P
      DPN=DP
      PN1=P1
      RETURN
      END
C
C*****
C
      SUBROUTINE ROOT (X,NN,ALF,BTA,DPN,PN1,B,C,EPS)
C
C IMPROVES UPON THE APPROXIMATE ROOT X
C IN ADDITION WE ALSO OBTAIN
C DPN = DERIVATIVE OF P(N) AT X
C PN1 = VALUE OF P(N-1) AT X
C
C NEWTON-RAPHSON METHOD IS USED
C
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
      DIMENSION B(1),C(1)
      ITER=0
10 ITER=ITER+1
      CALL RECUR(P,DP,PN1,X,NN,ALF,BTA,B,C)
      D=P/DP
      X=X-D
      IF(DABS(D)-EPS)30,30,20
20 IF(ITER-10)10,30,30
30 DPN=DP
      RETURN
      END
C
C*****
C
      SUBROUTINE MPC (UE,A,JDOF,MDOF,N,JTYPE,X,U,UNIT,MAXDOF,
+ LMPC,KSTEP,KINC,TIME,NT,NF,TEMP,FIELD,LTRAN,TRAN)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
C
      DIMENSION A(N),JDOF(N),X(6,N),U(MAXDOF,N),UNIT(MAXDOF,N),
+ TIME(2),TEMP(NT,N),FIELD(NF,NT,N),LTRAN(N),TRAN(3,3,N)
C
      RR=1214.2D0
      JDOF(1)=JTYPE
      JDOF(2)=1
      A(1)=1.D0
C
      E=300.D0
      ANU=0.3D0
      G=E/(2.D0*(1.D0+ANU))
      AK=3.D0-4.D0*ANU
      PI=4.D0*DATAN(1.D0)
      SIF=TIME(2)
C
      X1=X(1,1)
      X2=X(2,1)
      R=DSQRT(X1*X1+X2*X2)

```

```

TH=DATAN2 (X2,X1)
IF (TH.LT.0.D0) TH=TH+PI
THG=TH*180.D0/PI

C
IF (JTYPE.EQ.1) THEN
  AUX=(1.D0/(2.D0*G))*DSQRT(0.5D0*R/PI)*DCOS(TH/2.D0)*
+   (AK-1.D0+2.D0*(DSIN(TH/2.D0)**2))
  UE=SIF*AUX-SIF*(1.D0-2.D0*ANU)/G*DSQRT(0.5D0*RR/PI)
  A(2)=-AUX
END IF

C
IF (JTYPE.EQ.2) THEN
  AUX=(1.D0/(2.D0*G))*DSQRT(0.5D0*R/PI)*DSIN(TH/2.D0)*
+   (AK+1.D0-2.D0*(DCOS(TH/2.D0)**2))
  UE=SIF*AUX
  A(2)=-AUX
END IF

C
C   WRITE(7,*) 'R,TH,SIF,UE,A(1),A(2) '
C   WRITE(7,1001) R,TH,SIF,UE,A(1),A(2)
C   WRITE(7,1001) R,TH,SIF,UE,A(1),A(2)
C
RETURN

C
1001 FORMAT(1P6E12.4)
1002 FORMAT(6I5)
END

```



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074519

