

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**Διπλωματική Εργασία**

**" Μελέτη της διέλασης μετάλλων:  
Γραμμές ολισθήσεως,  
Πεπερασμένα στοιχεία, Οριακή ανάλυση "**

**Φοιτητής: Κολιοκότας Σπύρος**

**Επιβλέπων: Δρ. Αράβας Νικόλαος**

**Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας**

**2004**



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 3937/1

Ημερ. Εισ.: 30-09-2004

Δωρεά: Συγγραφέας

Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜΒ

2004

ΚΟΛ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ**

**Διπλωματική Εργασία**

**" Μελέτη της διέλασης μετάλλων:  
Γραμμές ολισθήσεως,  
Πεπερασμένα στοιχεία, Οριακή ανάλυση"**

**Φοιτητής: Κολιοκότας Σπύρος**

**Επιβλέπων: Δρ. Αράβας Νικόλαος**

**Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας**

**2004**

© 2004 Σπύρος Κολιοκότας

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

**Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων) Δρ. Νικόλαος Αράβας  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Γρηγόρης Χαϊδεμενόπουλος  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γεώργιος Πετρόπουλος  
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Με το πέρας της διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της συγκεκριμένης εργασίας, Καθηγητή κ. Ν. Αράβα για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του κατά την διάρκεια της συνεργασίας μας. Αποτελεί ιδιαίτερη τιμή για εμένα η εμπιστοσύνη που μου έδειξε στην ανάληψη του θέματος. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, τον Καθηγητή κ. Γ. Χαϊδεμενόπουλο και τον Επικ. Καθηγητή κ. Γ. Πετρόπουλο.

Επίσης είμαι ευγνώμων σε όλους τους φοιτητές και υποψήφιους διδάκτορες του εργαστηρίου μηχανικής και αντοχής υλικών για την βοήθεια και την συμπαράσταση τους, καθώς και για το ωραίο κλίμα που είχαν δημιουργήσει στο εργαστήριο. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τους φοιτητές Κ. Ανδρεαδάκη και Α. Παναγώτα με τους οποίους είχα μια ξεχωριστή συνεργασία κατά την διάρκεια των σπουδών μου, για την βοήθειά τους, την ηθική τους υποστήριξη, αλλά πάνω από όλα για την πραγματική τους φιλία.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω μέσα από την καρδιά μου, τους γονείς μου για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Το ελάχιστο που θα μπορούσα να κάνω είναι να τους αφιερώσω αυτή την εργασία.

Σπύρος Κολιοκότας

*Στους Γονείς μου*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### **Κεφάλαιο 1 - Διέλαση**

1.1 Γενικά.....	1
1.2 Παράγοντες που επηρεάζουν την διέλαση.....	3
1.3 Μέθοδοι μελέτης διέλασης.....	4

### **Κεφάλαιο 2 - Επίπεδη παραμόρφωση**

2.1 Περιγραφή.....	6
2.2 Πεδία γραμμών ολισθήσεως.....	7
2.3 Μοντέλο-Γεωμετρία.....	9
2.4 Υπολογισμός οδηγούσας δύναμης διελάσεως.....	11
2.5 Προσομοίωση διέλασης με πεπερασμένα στοιχεία.....	22
2.5.1 Μοντέλο- Γεωμετρία.....	22
2.5.2 Αποτελέσματα.....	24
2.5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων.....	30

### **Κεφάλαιο 3 - Αξονοσυμμετρική διέλαση**

3.1 Περιγραφή.....	31
3.2 Οριακή ανάλυση.....	31
3.3 Σφαιρικό πεδίο ταχυτήτων.....	33
3.3.1 Παρουσίαση πεδίου.....	33
3.3.2 Υπολογισμός κάτω φράγματος.....	34
3.3.3 Υπολογισμός άνω φράγματος.....	37
3.4 Τριγωνικό πεδίο ταχυτήτων.....	42
3.4.1 Παρουσίαση πεδίου.....	42
3.4.2 Υπολογισμός κινηματικά αποδεκτού πεδίου ταχυτήτων.....	43
3.4.3 Υπολογισμός άνω φράγματος.....	46
3.5 Σύγκριση σφαιρικού – τριγωνικού πεδίου.....	53
3.6 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.....	58
3.6.1 Μοντέλο- Γεωμετρία.....	58
3.6.2 Αποτελέσματα.....	59
3.6.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων.....	64

### **Κεφάλαιο 4 - Σύγκριση επίπεδης παραμόρφωσης – αξονοσυμμετρικής διέλασης.....65**

<b>Παράρτημα 1 - Κώδικας ABAQUS για επίπεδη παραμόρφωση.....</b>	<b>69</b>
<b>Παράρτημα 2 - Κώδικας ABAQUS για αξονοσυμμετρική διέλαση.....</b>	<b>72</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>75</b>



# Κατάλογος Σχημάτων

## Κεφάλαιο 1

Σχήμα 1.1 : Βασικά στοιχεία διέλασης.....	1
Σχήμα 1.2 : Προϊόντα διέλασης .....	2
Σχήμα 1.3 : Μέθοδοι διέλασης.....	3

## Κεφάλαιο 2

Σχήμα 2.1 : Γεωμετρία του προβλήματος της επίπεδης παραμόρφωσης.....	6
Σχήμα 2.2 : Καμπύλη $\sigma$ - $\epsilon$ για απολύτως στερεό, τέλεια πλαστικό υλικό.....	7
Σχήμα 2.3 : Γραμμές ολίσθησης.....	9
Σχήμα 2.4 : Πλέγμα της περιοχής CDFEC.....	15
Σχήμα 2.5 : Διαφορικό τμήμα της πλευράς FEB.....	17
Σχήμα 2.6 : Ισορροπία στο τρίγωνο ABC.....	17
Σχήμα 2.7 : Πλαστική ζώνη.....	19
Σχήμα 2.8 : Διάγραμμα $q$ -μείωση διατομής .....	20
Σχήμα 2.9 : Διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής .....	20
Σχήμα 2.10: Κάναβος .....	23
Σχήμα 2.11: Διάγραμμα $P$ - $u/H$ .....	24
Σχήμα 2.12: Διάγραμμα $q$ -απόλυτη απόσταση.....	25
Σχήμα 2.13: Πλαστική ζώνη.....	26
Σχήμα 2.14: Διάγραμμα $\sigma_{22}$ - $\chi/H$ .....	27
Σχήμα 2.15: Διάγραμμα $\bar{\epsilon}^p$ -απόλυτη απόσταση (κατά μήκος του άξονα συμμετρίας).....	28
Σχήμα 2.16: Διάγραμμα $\bar{\epsilon}^p$ -απόλυτη απόσταση (κατά μήκος της ίνας επαφής).....	29

## Κεφάλαιο 3

Σχήμα 3.1 : Γεωμετρία αξονοσυμμετρικής διέλασης.....	31
Σχήμα 3.2 : Σφαιρικό πεδίο.....	33
Σχήμα 3.3 : $\Sigma$ . $\Sigma$ επιφάνειας $\Gamma_1$ .....	34
Σχήμα 3.4 : $\Sigma$ . $\Sigma$ επιφάνειας $\Gamma_2$ .....	35
Σχήμα 3.5 : Διάγραμμα $P_L$ - μείωση διατομής.....	36
Σχήμα 3.6 : $\Sigma$ . $\Sigma$ επιφάνειας $\Gamma_1$ (για τον υπολογισμό της ασυνέχειας ταχυτήτων) .....	38
Σχήμα 3.7 : $\Sigma$ . $\Sigma$ επιφάνειας $\Gamma_2$ (για τον υπολογισμό της ασυνέχειας ταχυτήτων).....	39
Σχήμα 3.8 : Διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής.....	40
Σχήμα 3.9: Διάγραμμα $P$ -γωνία.....	41
Σχήμα 3.10: Παρουσίαση τριγωνικού πεδίου.....	42
Σχήμα 3.11: Παρουσίαση τριγωνικού πεδίου.....	43
Σχήμα 3.12: Διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής.....	51
Σχήμα 3.13: Διάγραμμα $P$ -γωνία.....	52
Σχήμα 3.14: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής (για γωνία $10^0$ ).....	53
Σχήμα 3.15: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής (για γωνία $20^0$ ).....	54
Σχήμα 3.16: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής (για γωνία $30^0$ ).....	54
Σχήμα 3.17: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -μείωση διατομής (για γωνία $40^0$ ).....	55
Σχήμα 3.18: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -γωνία (μείωση διατομής 10%).....	56
Σχήμα 3.19: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -γωνία (μείωση διατομής 20%).....	56
Σχήμα 3.20: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -γωνία (μείωση διατομής 30%).....	57
Σχήμα 3.21: Συγκριτικό διάγραμμα $P$ -γωνία (μείωση διατομής 40%).....	57
Σχήμα 3.22: Κάναβος.....	58
Σχήμα 3.23: Διάγραμμα $P$ - $u/ R_0$ .....	59

Σχήμα 3.24: Διάγραμμα q-απόλυτη απόσταση.....	60
Σχήμα 3.25: Πλαστική ζώνη.....	61
Σχήμα 3.26: Διάγραμμα $\bar{\varepsilon}^p$ -απόλυτη απόσταση (κατά μήκος του άξονα συμμετρίας).....	62
Σχήμα 3.27: Διάγραμμα $\bar{\varepsilon}^p$ -απόλυτη απόσταση (κατά μήκος της ίνας επαφής).....	62
Σχήμα 3.28: Διάγραμμα $\sigma_{22}$ - $R_0/H$ .....	63

#### **Κεφάλαιο 4**

Σχήμα 4.1 : Συγκριτικό διάγραμμα P-μετατόπιση.....	66
Σχήμα 4.2 : Συγκριτικό διάγραμμα q-απόλυτη απόσταση.....	66
Σχήμα 4.3 : Συγκριτικό διάγραμμα $\sigma_{22}$ - $\chi$ (απόσταση από τον άξονα συμμετρίας).....	67
Σχήμα 4.4 : Συγκριτικό διάγραμμα $\bar{\varepsilon}^p$ -απόλυτη απόσταση.....	68

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα εξεταστεί η κατεργασία της διέλασης. Η ανάλυση της κατεργασίας θα γίνει με τη μέθοδο των γραμμών ολίσθησης για την περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης και με την οριακή ανάλυση για την περίπτωση της αξονοσυμμετρικής διέλασης. Το πρόβλημα της διέλασης θα εξεταστεί επίσης και με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και για τις δυο περιπτώσεις.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και περιέχει γενικές πληροφορίες για την κατεργασία της διέλασης. Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται τα στοιχεία της διέλασης, οι παράγοντες που την επηρεάζουν αλλά και διάφοροι τρόποι μελέτης της κατεργασίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται και αναλύεται το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης. Η ανάλυση γίνεται με πεδία ολίσθησης αλλά και με χρήση πεπερασμένων στοιχείων, ενώ παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά την άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση. Το πρόβλημα εξετάζεται με την θεωρία της οριακής ανάλυσης για δυο πεδία, αλλά και με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Παρουσιάζονται επίσης συγκριτικά διαγράμματα που αφορούν τα δυο πεδία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μια σύγκριση των αποτελεσμάτων της επίπεδης παραμόρφωσης και της αξονοσυμμετρικής διέλασης.

Τέλος, στα παραρτήματα υπάρχουν όλοι οι κώδικες των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν.

# Κεφάλαιο 1

## Διέλαση

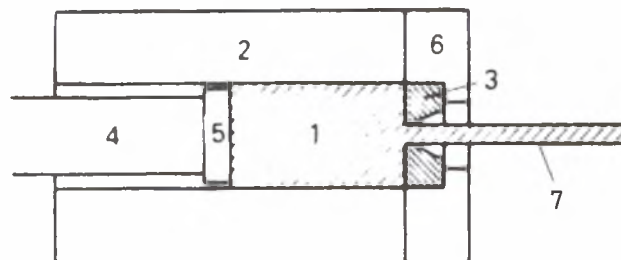
### 1.1 Γενικά

Διέλαση είναι μια κατεργασία διαμόρφωσης των μετάλλων. Κατά τη διεργασία αυτή τα τελικά προϊόντα δημιουργούνται μέσω της δυναμικής ροής του υλικού (πρώτη ύλη) από μια μήτρα υπό την επίδραση δύναμης συμπίεσεως. Τα προϊόντα έχουν συγκεκριμένη και ομοιόμορφη διατομή και μπορεί να είναι μεταλλικές ράβδοι, σωλήνες, «προφίλ» διάφορων διατομών, σύρματα και άλλα.

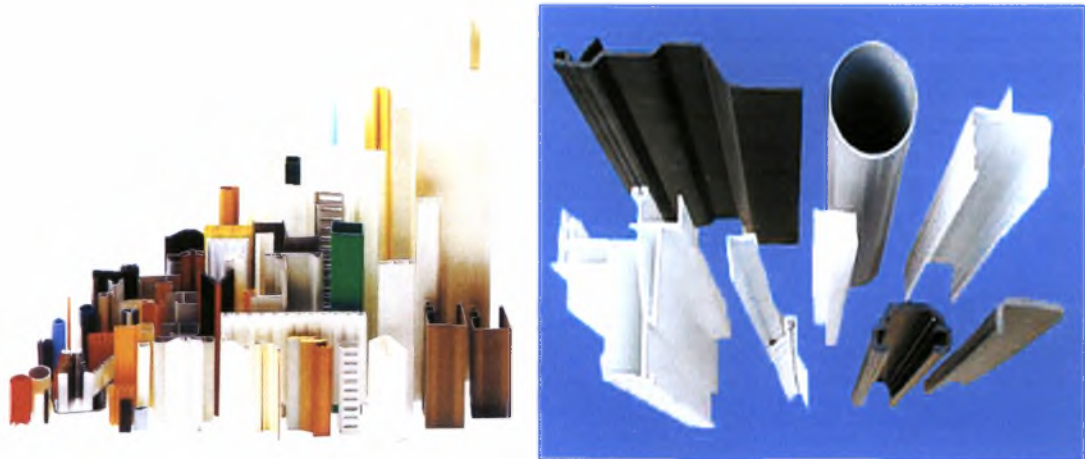
Η παραγωγή προϊόντων με τη μέθοδο αυτή είναι σχετικά απλή. Η μπιγιέτα εισάγεται στο μεταλλικό θάλαμο (χιτώνιο) της πρέσας υπό την πίεση του εμβόλου. Το μεταλλικό υλικό ρέει δυναμικά μέσα στη μήτρα, η οποία στηρίζεται στον μεταλλικό δακτύλιο.

Στο σχήμα 1.1 απεικονίζονται τα βασικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στη διέλαση, ενώ στο σχήμα 1.2 διάφορα προϊόντα της κατεργασίας.

- 1-Μπιγιέτα
- 2-Χιτώνιο
- 3-Μήτρα
- 4-Έμβολο
- 5-Πλάκα ώθησης
- 6-Υποστήριξη μήτρας
- 7- Προϊόν



Σχήμα1.1

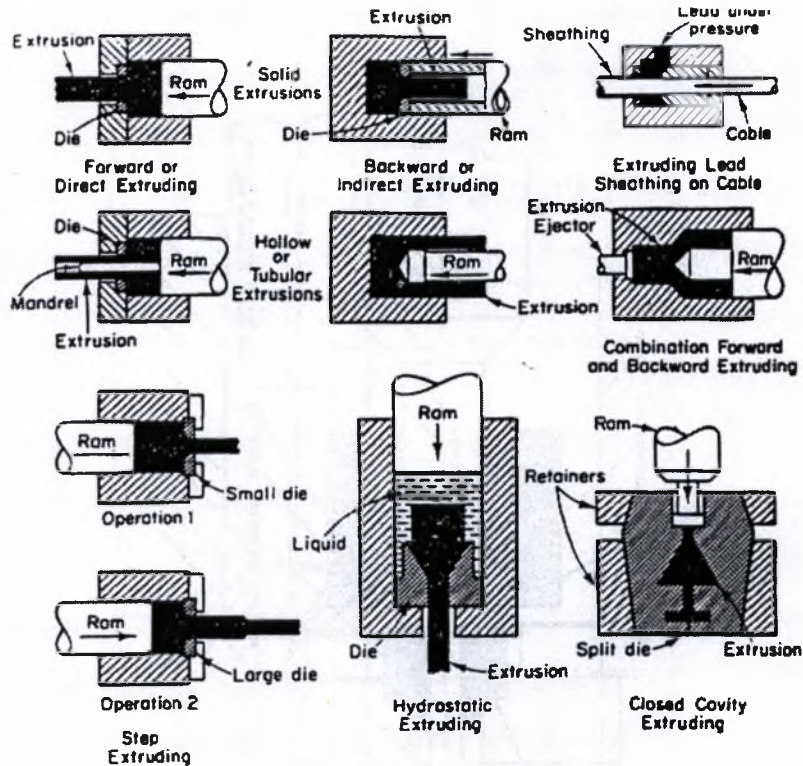


Σχήμα 1.2

Οι μέθοδοι διέλασης είναι αρκετές και διακρίνονται μεταξύ τους με βάση ορισμένα χαρακτηριστικά όπως:

- Η κίνηση του προϊόντος σε σχέση με την κίνηση του εμβόλου- Άμεση, έμμεση ή μικτή διέλαση.
- Η θερμοκρασία της κατεργασίας- Ψυχρή και θερμή διέλαση.
- Ο προσανατολισμός του άξονα της πρέσας διέλασης - Οριζόντια ή κατακόρυφη διέλαση.
- Ο τρόπος κίνησης του εμβόλου – Υδραυλικό ή μηχανικό.
- Ο τρόπος εφαρμογής της δύναμης στην μπιγιέτα – συμβατική ή υδραυλική διέλαση.

Στο σχήμα 1.3 παρουσιάζονται οι διάφορες μέθοδοι διέλασης.



Σχήμα 1.3

## 1.2 Παράγοντες που επηρεάζουν την διέλαση.

Κατά τη διέλαση λαμβάνουν χώρα μεγάλες πλαστικές παραμορφώσεις. Οι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την κατεργασία είναι η θερμοκρασία, η ταχύτητα παραμόρφωσης, η δομή και η χημική σύσταση του κατεργαζόμενου υλικού. Οι προαναφερθέντες παράγοντες επηρεάζουν σημαντικά την πλαστικότητα των μετάλλων. Με το όρο πλαστικότητα εννοούμε την ικανότητα των μεταλλικών υλικών να παραμορφώνονται πλαστικά (δηλαδή να αλλάζουν το σχήμα, τη μορφή και τις γεωμετρικές τους διαστάσεις) υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων χωρίς να χάνουν τη δομική και κρυσταλλική τους ακεραιότητα.

- **Επίδραση της θερμοκρασίας.**

Η θερμοκρασία είναι ο σημαντικότερος παράγοντας που επηρεάζει την πλαστικότητα. Οι υψηλές θερμοκρασίες έχουν ως αποτέλεσμα την αύξηση της ικανότητας για παραμόρφωση. Η αιτία είναι πως μέσω της θέρμανσης τα υλικά προσροφούν ένα ποσό θερμότητας το οποίο στο επίπεδο της κρυσταλλικής κυψελίδας

επιφέρει ταλαντώσεις των ατόμων γύρω από τη θέση ισορροπίας τους, με αποτέλεσμα τα κρυσταλλικά επίπεδα να ολισθαίνουν μεταξύ τους υπό την επίδραση μικρότερων εξωτερικών δυνάμεων. Υπάρχει όμως περίπτωση να μειωθεί η πλαστικότητα μέσω της αύξησης της θερμοκρασίας. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν αυξηθεί το μέγεθος του κρυσταλλικού κόκκου.

- **Επίδραση της ταχύτητας παραμόρφωσης.**

Η επίδραση της ταχύτητας παραμόρφωσης στην πλαστικότητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τη φύση του μεταλλικού υλικού. Η μεταβολή της ταχύτητας μπορεί να επιφέρει αύξηση της πλαστικότητας για ένα θερμοκρασιακό περιβάλλον ή μείωση για ένα άλλο. Επίσης είναι δυνατόν να μην επηρεάζεται σε κανένα βαθμό η πλαστικότητα του υλικού. Η ταχύτητα παραμόρφωσης επηρεάζει την παραγωγή διδυμίων και την ανακρυστάλλωση. Όταν η ταχύτητα της ανακρυστάλλωσης είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της παραγωγής διδυμίων τότε παρατηρείται αύξηση της πλαστικότητας, ενώ όταν επικρατεί η παραγωγή διδυμίων παρατηρείται μείωση.

- **Επίδραση της δομής και της χημική σύστασης.**

Η πλαστικότητα των καθαρών μετάλλων είναι μεγαλύτερη από εκείνη των κραμάτων. Αυτό συμβαίνει διότι η ύπαρξη ξένων ατόμων στη δομή του μετάλλου δυσκολεύει την κίνηση των γραμμοαταξιών, οπότε το μεταλλικό υλικό παραμορφώνεται δυσκολότερα. Επίσης τα μονοφασικά κράματα είναι πλαστικότερα (παραμορφώνονται ευκολότερα, έχουν μεγαλύτερη πλαστικότητα) από τα πολυφασικά. Η λεπτόκοκκη δομή ενός μεταλλικού υλικού βελτιώνει την ικανότητα του για μορφοποίηση. Τέλος, όσο περισσότερα είναι τα επίπεδα ολίσθησης τόσο αυξάνεται η ικανότητα για μορφοποίηση.

### 1.3 Μέθοδοι μελέτης διέλασης

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της διέλασης είναι η οριακή ανάλυση, η ανάλυση με γραμμές ολισθήσεως και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.

Για πειραματικές μελέτες χρησιμοποιούνται οι λεγόμενες «οπτοπλαστικές» μέθοδοι, οι οποίες κατατάσσονται με βάση το υλικό που χρησιμοποιείται κατά το

πείραμα. Τα υλικά αυτά μπορεί να είναι κερί, πλαστελίνη, ή μέταλλα που παραμορφώνονται εύκολα σε θερμοκρασία ίση ή μεγαλύτερη από αυτή του δωματίου. Οι παραπάνω μέθοδοι κατατάσσονται με βάση την τεχνική που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία σημείων αναφοράς στη μπιγιέτα. Συνεπώς έχουμε:

- Μέθοδος δίσκου (disc method). Δίσκοι όμοιοι μεταξύ τους αλλά οπτικά διακριτοί τοποθετούνται σε στρώματα ώστε να αποτελέσουν μια μπιγιέτα.
- Μέθοδος δείκτη (indicator method). Πάνω στην επιφάνεια της μπιγιέτας τοποθετούνται «καρφιά», η μετατόπιση των οποίων οδηγεί σε χρήσιμα συμπεράσματα. Η μέθοδος αυτή δεν δίνει καμία πληροφορία για το εσωτερικό της μπιγιέτας.
- Μέθοδος διαμήκους πλέγματος (longitudinal grid method). Η μπιγιέτα χωρίζεται σε δυο τμήματα κατά μήκος του επιμήκη άξονά της. Οι προκύπτουσες επιφάνειες μαρκάρονται με πλέγμα. Κατόπιν, τα δυο τμήματα ενώνονται σε ένα.



## Κεφάλαιο 2

### Επίπεδη παραμόρφωση

#### 2.1 Περιγραφή

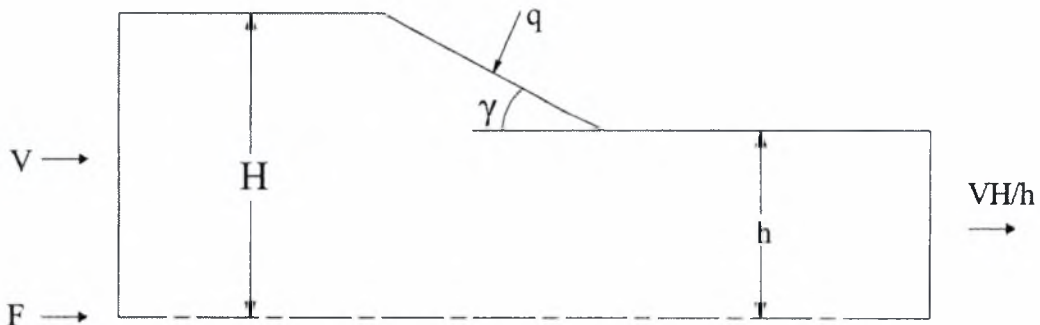
Η διέλαση μιας μπιγιέτας ορθογωνικής διατομής με σκοπό τη μείωση του ύψους της αποτελεί ουσιαστικά ένα πρόβλημα επίπεδης παραμορφώσεως ( $\epsilon_{33}=0$ , αφού δεν υπάρχει αλλαγή των διαστάσεων κάθετα στο επίπεδο της σελίδας).

Οι κύριες ανεξάρτητες παράμετροι της διεργασίας είναι:

- Το ποσοστό μείωσης της διατομής,  $r=(H-h)/H$  %.
- Η γωνία της μήτρας
- Ο συντελεστής τριβής (μεταξύ μήτρας και κατεργαζόμενου υλικού)
- Οι ιδιότητες του υλικού

Η ανάλυση αυτού του προβλήματος θα γίνει με δυο διαφορετικές μεθόδους, γεγονός που θα επιτρέψει την εξαγωγή συγκριτικών αποτελεσμάτων. Αρχικά η ανάλυση θα γίνει με τη μέθοδο των γραμμών ολισθήσεως και έπειτα με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων.

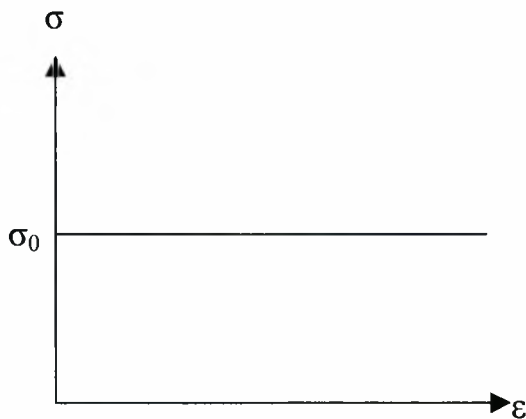
Στο σχήμα 2.1 παρουσιάζεται η γεωμετρία του προβλήματος.



Σχήμα 2.1

## 2.2 Πεδία γραμμών ολισθήσεως.

Το δοκίμιο που χρησιμοποιείται αποτελεί ένα απολύτως-στερεό (rigid) τέλεια πλαστικό σώμα (perfectly plastic) (στερεό-πλαστικό μη κρατυνόμενο). Ένα τέτοιο σώμα δεν είναι δυνατόν να παραμορφωθεί ελαστικά (δηλ. είναι απαραμόρφωτο εάν δεν έχει επέλθει πλαστική διαρροή). Κάτω από το όριο διαρροής συμπεριφέρεται ως απολύτως στερεό. Φορτιζόμενο το υλικό, μόλις φθάσει το όριο διαρροής αρχίζει να διαρρέει και συνεχίζει να παραμορφώνεται πλαστικά, απεριόριστα υπό σταθερό όριο διαρροής και υπό μηδενική μεταβολή όγκου, εκτός αν επενεργήσει πάνω του κατάλληλος εξωτερικός παράγοντας, για να σταματήσει η πλαστική ροή. Η αντίστοιχη καμπύλη τάσεως-παραμορφώσεως σε μονοαξονικό εφελκυσμό είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2 .



Σχήμα 2.2

Στην περίπτωση αυτή η συνολική παραμόρφωση ισούται με την πλαστική παραμόρφωση, δηλαδή  $\epsilon = \epsilon^p$ . Το σώμα διαρρέει πλαστικά σύμφωνα με το θεώρημα διαρροής του von Mises και ακολουθεί το νόμο «συντηρημένης πλαστικής διαρροής» (καθετότητα του  $\epsilon^p$  στην επιφάνεια διαρροής), δηλαδή

$$\Phi(\sigma) = \sigma_e - \sigma_0 = 0 \text{ και } \dot{\epsilon} = \frac{3\dot{\epsilon}}{2\sigma_0} \mathbf{s}$$

Όπου  $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  είναι η ισοδύναμη τάση κατά von Mises και  $\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}$  ο ρυθμός της ισοδύναμης πλαστικής παραμορφώσεως.

Για ένα τέτοιο υλικό η ανάλυση μπορεί να γίνει με την μέθοδο των γραμμών ολισθήσεως. Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη του προβλήματος με τη

μέθοδο των γραμμών ολισθήσεως καλό θα ήτανε να αναφέρουμε τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά τους.

Μερικές ιδιότητες των γραμμών ολισθήσεως είναι :

1) Κατά μήκος των α- και β- γραμμών ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{p - 2\tau_0\theta = \sigma\alpha\theta.} \text{ στις χαρακτηριστικές } \frac{dy}{dx} = \tan \theta \text{ (}\alpha\text{-γραμμές)} \quad (\text{i})$$

$$\boxed{p + 2\tau_0\theta = \sigma\alpha\theta.} \text{ στις χαρακτηριστικές } \frac{dy}{dx} = \tan \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (}\beta\text{-γραμμές)} \quad (\text{ii})$$

$$\boxed{dv_a - v_\beta d\theta = 0} \text{ στις χαρακτηριστικές } \frac{dy}{dx} = \tan \theta \text{ (}\alpha\text{-γραμμές)} \quad (\text{iii})$$

$$\boxed{dv_\beta + v_a d\theta = 0} \text{ στις χαρακτηριστικές } \frac{dy}{dx} = \tan \left( \theta + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (}\beta\text{-γραμμές)} \quad (\text{iv})$$

Οι εξισώσεις (i)-(ii) είναι γνωστές στη βιβλιογραφία ως «εξισώσεις Hencky», ενώ οι (iii)-(iv) ως «εξισώσεις Geiringer» .

2) Το 1<sup>0</sup> θεώρημα του Hencky: Η γωνία που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες σε δυο δεδομένες χαρακτηριστικές της μιας οικογενείας (α- ή β-) στα σημεία τομής τους με μια χαρακτηριστική της άλλης οικογένειας (β- ή α-) είναι σταθερή και δεν εξαρτάται από την επιλογή της χαρακτηριστικής της δεύτερης οικογενείας (το ίδιο ισχύει και για την τιμή της υδροστατικής πίεσης p). Δηλαδή, όταν περνάμε από μια α-γραμμή σε μια άλλη α-γραμμή κατά μήκος μιας β-γραμμής, τα p και θ μεταβάλλονται κατά σταθερή ποσότητα. Το ίδιο ισχύει και όταν περνάμε από μια β-γραμμή σε μια άλλη β-γραμμή κατά μήκος μιας α-γραμμής.

3) Εάν είναι γνωστή η γεωμετρία των γραμμών ολισθήσεως και η τιμή p σε ένα σημείο του πεδίου, τότε το p μπορεί να υπολογιστεί οπουδήποτε στο πεδίο.

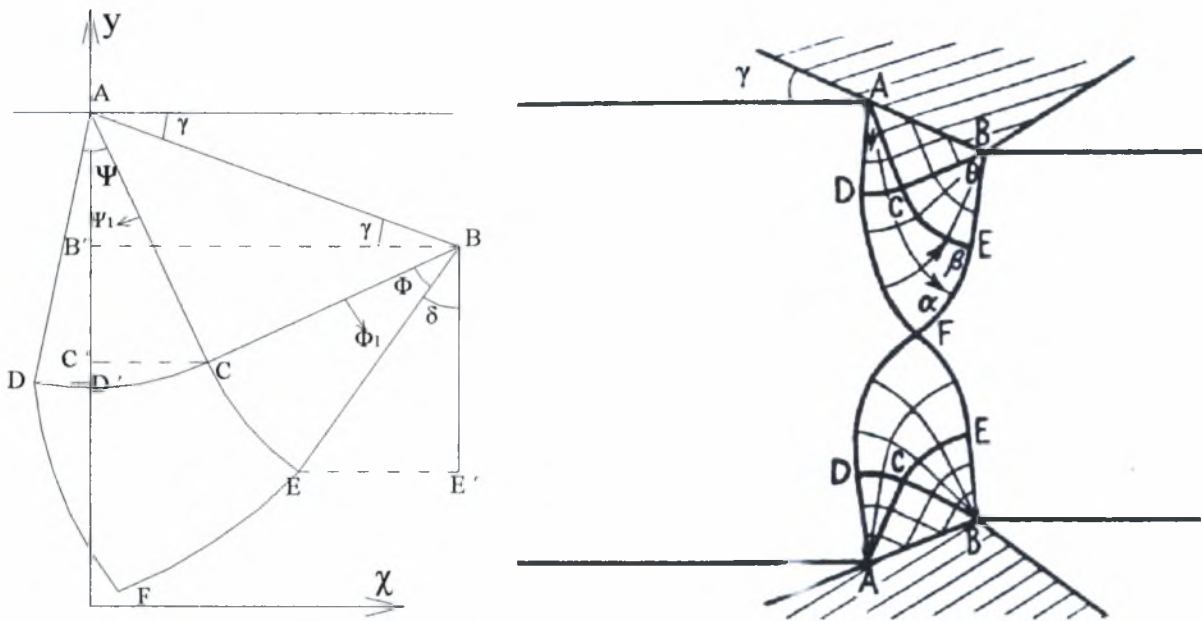
4) Εάν ένα τμήμα μιας γραμμής ολισθήσεως είναι ευθύγραμμο, τότε οι ποσότητες p,

$$\theta, \xi, \eta \text{ (όπου } \xi = \frac{p}{2\tau_0} - \theta = \text{σταθερό, κατά μήκος των } \alpha\text{-γραμμών και } \eta = \frac{p}{2\tau_0} + \theta = \text{σταθερό,}$$

κατά μήκος των β-γραμμών) καθώς και ο τανυστής των τάσεων  $\sigma$  παίρνουν σταθερές τιμές πάνω στο ευθύγραμμο αυτό τμήμα.

5) Εάν ένα τμήμα μιας γραμμής ολισθήσεως είναι ευθύγραμμο, τότε όλα τα αντίστοιχα τμήματα των γραμμών ολισθήσεως της ίδιας οικογενείας που «αποκόπτονται» από τις γραμμές ολισθήσεως της άλλης οικογένειας είναι επίσης ευθύγραμμο και έχουν το ίδιο μήκος.

### 2.3 Μοντέλο-γεωμετρία



Σχήμα 2.3

Το μεταλλικό δοκίμιο που θα κατεργαστούμε είναι ορθογωνικό με τις εξής διαστάσεις: ύψος  $H$  και πάχος κάθετο στο επίπεδο της σελίδας  $B$ . Με το πέρας της κατεργασίας το δοκίμιο θα έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες και διαστάσεις: ύψος  $h$  και πάχος  $B$ . Υποθέτουμε ότι η μήτρα έχει επίπεδες και άκαμπτες πλευρές που σχηματίζουν γωνία  $\gamma$  με τον άξονα συμμετρίας και ότι δεν υπάρχει τριβή έτσι ώστε οι γραμμές ολίσθησης να συναντούν τις πλευρές σε γωνία  $45^\circ$ . Αναζητούμε τη διαμόρφωση στη σταθερή κατάσταση στην οποία το ύψος της επίπεδης επιφάνειας ξεκινά με μια τιμή  $H$  και ελαττώνεται σε μια τιμή  $h$ . Αυτό γίνεται πέζοντας την επιφάνεια δια μέσου της μήτρας υπό την επίδραση μιας δύναμης κατά μήκος του κεντρικού άξονα. Υπάρχει προφανώς μια σταθερή κατάσταση στην οποία η επιφάνεια περνά συμμετρικά δια μέσου της μήτρας, ενώ η περιοχή παραμένει απαραμόρφωτη έως ότου περάσει τη μήτρα. Ως αρχική γραμμή ολίσθησης επιλέγεται αυτή που περνά από το σημείο  $A$  και συναντά το τοίχωμα σχηματίζοντας γωνία  $45^\circ$ , δηλαδή τη γραμμή  $AC$ , όπου το  $C$  είναι η τομή με τη γραμμή ολίσθησης που περνά από το  $B$  και τέμνει το τοίχωμα επίσης με γωνία  $45^\circ$ . Η περιοχή των γραμμών ολίσθησης ορίζεται μοναδικά εσωτερικά του  $ABC$ . Τώρα τα  $A$  και  $B$  πρέπει σαφώς να είναι μοναδικά για τον καταμερισμό της έντασης. Αυτό το γεγονός καθιστά ικανή την περιοχή να συνεχίζεται γύρω από τα  $A$  και  $B$  έτσι ώστε να συντάξουμε τις περιοχές  $ACD$  και

BCE, ενώ με τις γραμμές ολίσθησης CD και CE ορίζεται η περιοχή CDEF. Αφού η πλαστική ζώνη εκτείνεται μέσα στην περιοχή αυτή, το σημείο F πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας έτσι ώστε να είναι κοινό και στις δύο πλαστικές ζώνες. Επιπλέον, δεν υπάρχει λόγος να υποθέσουμε πως η τάση είναι ασυνεχής, με αποτέλεσμα η γραμμή ολίσθησης που περνά από το σημείο F να πρέπει να σχηματίζει γωνία  $45^0$  με τον άξονα συμμετρίας. Με αυτόν τον περιορισμό πλέον μπορεί να ορισθούν και οι γωνίες CAD και CBE που ως τώρα ήταν απροσδιόριστες.

Η ταχύτητα του εμβόλου, δηλαδή η ταχύτητα με την οποία θα εισχωρεί το δοκίμιο μας μέσα στην μήτρα, έχει τιμή V. Επειδή η ροή του υλικού είναι σταθερή και δε μειώνεται η μάζα και αφού θεωρούμε το παραμορφωμένο σώμα ασυμπιεστο (δηλ. ο όγκος του παραμένει σταθερός) η ταχύτητα εξόδου του μετάλλου θα είναι  $VH/h$ .

Η κανονική συνισταμένη της ταχύτητας είναι ως εκ τούτου γνωστή στις γραμμές ολίσθησης ADF και BEF, έτσι η λύση μπορεί να ξεκινήσει στην περιοχή CDEF. Αυτή η λύση θα μας δώσει τις κανονικές συνιστώσες στις πλευρές AC και BC ορίζοντας την ταχύτητα στο ABC. Η υπολογιζόμενη ταχύτητα στο ABC δεν θα βρεθεί να είναι εφαιπτόμενη κατά μήκος της μήτρας. Γι' αυτή τη συνοριακή συνθήκη προκειμένου να πληρούμε τους όρους η γραμμή ολίσθησης στο AC πρέπει να επιλέγεται σωστά, οπότε με αυτό τον τρόπο οι συνοριακές συνθήκες της ταχύτητας επιβάλλουν περιορισμούς στην περιοχή των γραμμών ολίσθησης.

Σε αυτή την περίπτωση είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε με μια άμεση ανάλυση χωρίς περιορισμούς ότι όλες οι συνθήκες ικανοποιούνται όταν το AC είναι ευθεία γραμμή. Όταν συμβαίνει αυτό οι γραμμές ολίσθησης στο ABC είναι ευθείες ενώ αυτές στα ριπίδια ACD και BCE είναι ευθείες και ομόκεντρα κυκλικά τόξα. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις Geiringer η συνισταμένη ταχύτητα κατά μήκος μιας οποιασδήποτε ευθείας είναι σταθερή και η αλλαγή μιας συνιστώσας κατά την μετάβαση από μια ευθεία γραμμή ολίσθησης σε μια άλλη είναι επίσης σταθερή. Ωστόσο αφού το υλικό αριστερά του ADF είναι απαραμόρφωτο κάθε συνιστώσα της ταχύτητας στο AD είναι παντού ίδια. Η κανονική συνισταμένη είναι ως εκ τούτου σταθερή σε κάθε γραμμή ολίσθησης που περνά από το A και ιδιαιτέρως στην AC. Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε κατανομή της ταχύτητας κατά μήκος του CD. Έτσι η ταχύτητα στο ABC είναι ομοιόμορφη. Ωστόσο, αφού οι εξισώσεις Geiringer υποδηλώνουν μηδενική αλλαγή ταχύτητας και αφού η ταχύτητα εισόδου στην ADF θεωρείται ίση με την ταχύτητα εξόδου στο BEF μπορούμε να βγάλουμε το

συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει απώλεια υλικού κατά μήκος της AB. Συνεπώς, αν η AC είναι ευθεία, η ταχύτητα στο ABC θα είναι εφαπτόμενη στην μήτρα. Υπάρχει ασυνέχεια της ταχύτητας της τάξεως του  $\frac{rV}{\sqrt{2}}$  κατά μήκος των ADF και BEF. Η φορά που έχουν τα στοιχεία που υπόκεινται σε διάτμηση όταν περνούν από την ασυνέχεια αναγκάζει το ADF να είναι μια α-γραμμή, έτσι ώστε ο ρυθμός πλαστικού έργου να είναι θετικός.

Η μέγιστη μείωση της διατομής για την οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί το συγκεκριμένο πεδίο γραμμών ολίσθησης είναι  $r = 1 - \frac{h}{H} = \frac{2 \sin \gamma}{1 + 2 \sin \gamma}$ . Η μείωση αυτή αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία  $\theta = \gamma$  και  $\psi = 0$ . Για τις συγκεκριμένες γωνίες τα σημεία F και E συμπίπτουν.

## 2.4 Υπολογισμός οδηγούσας δύναμης διελάσεως

Καθώς το έμβολο της μηχανής διελάσεως ασκεί μια δύναμη F στο κάτω μέρος του δοκιμίου για να διέλθει αυτό μέσα από την μήτρα, αντίστοιχα ασκείται και μια πίεση (q) από τη μήτρα πάνω στο κατεργαζόμενο κομμάτι.

Επιθυμούμε τον υπολογισμό των δυνάμεων αυτών με την μέθοδο των γραμμών ολισθήσεως. Ο υπολογισμός αυτός θα γίνει για διάφορες τιμές της γωνίας της μήτρας αλλά και της μείωσης της διατομής του δοκιμίου, έτσι ώστε να βγάλουμε ποικίλα και χρήσιμα συμπεράσματα βασιζόμενοι στα αποτελέσματα που θα πάρουμε.

Στον άξονα συμμετρίας το  $\sigma_{xy}$ , δηλαδή οι  $x$ - $y$  κατευθύνσεις είναι κύριες πάνω στον άξονα συμμετρίας με αποτέλεσμα οι γραμμές ολισθήσεως να σχηματίζουν τοπικά γωνία  $45^0$  με το άξονα  $x$ .

Για το σχήμα 2.3 που παρουσιάσαμε παραπάνω ισχύει:

$$\text{στο σημείο F} \quad : \quad \Theta_F = -\frac{\pi}{4} \quad (2.1)$$

$$\text{στο τρίγωνο ABC} \quad : \quad \Theta = -\gamma - \frac{\pi}{4} \quad (2.2)$$

$$\text{στο τμήμα AB} \quad : \quad \Theta = -\gamma - \frac{\pi}{4} - \Psi \quad (2.3)$$

Κεφάλαιο 2<sup>0</sup> - Επίπεδη παραμόρφωση

$$\text{στο τμήμα BE} \quad : \Theta = -\gamma - \frac{\pi}{4} + \Phi \quad (2.4)$$

$$\text{Κατά μήκος του τόξου CD ισχύει: } \Theta = -\gamma - \frac{\pi}{4} - \Psi_1 \quad (2.5)$$

όπου  $0 \leq \Psi_1 \leq \Psi$

$$\text{ενώ κατά μήκος του CE} : \Theta = -\gamma - \frac{\pi}{4} + \Phi_1 \quad (2.6)$$

όπου  $0 \leq \Phi_1 \leq \Phi$

(Από τις δυο τελευταίες σχέσεις μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε τις τιμές των γωνιών  $\theta$  σε όλους τους κόμβους των τόξων CD και CE ).

Αν λάβουμε υπόψη μας το 1<sup>0</sup> θεώρημα του Hencky παρατηρούμε πως ισχύει:

$$\Theta_C - \Theta_D = \Theta_E - \Theta_F \Rightarrow \left(-\gamma - \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\gamma - \frac{\pi}{4} - \Psi\right) = \left(-\gamma - \frac{\pi}{4} + \Phi\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Phi = \Psi + \gamma \quad (2.7)$$

Από τη γεωμετρία του προβλήματος μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων: C,D,E. Αυτό θα το επιτύχουμε αφού πρώτα υπολογίσουμε τα μήκη όλων των πλευρών.

Από το σχήμα 2.3 έχουμε:

$AB' = H - h$ , επειδή όμως  $H - h = rH$  έχουμε

$$AB' = rH \quad (2.8)$$

$$\sin(\gamma) = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AB'}{\sin(\gamma)} \Rightarrow AB = \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.9)$$

$$AC = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)AB \Rightarrow AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.10)$$

$$AC' = AC \cos(\Psi') \text{ , όπου } \Psi' = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \gamma = \frac{\pi}{4} - \gamma \Rightarrow$$

$$AC' = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.11)$$

Στο ριπίδιο ADC ισχύει :

AD=AC, οπότε:

$$AD = AC = \frac{r}{\sqrt{2}} \frac{H}{\sin(\gamma)} \quad (2.12)$$

$$AD' = AC \cos(\Psi - \Psi') \Rightarrow$$

$$AD' = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \Psi - \gamma\right) \frac{r}{\sqrt{2}} \frac{H}{\sin(\gamma)} \quad (2.13)$$

Επειδή το τρίγωνο ACD είναι ισοσκελές ισχύει AC=BC και λόγω του ριπίδιου BCE, BC=BE, οπότε:

$$BE = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)}, \text{ όμως } BE' = BE \cos(\delta), \text{ όπου } \delta = \frac{\pi}{2} - \Phi - \left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) \Rightarrow$$

$$BE' = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \Phi\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.14)$$

Παρακάτω ακολουθεί ο υπολογισμός της θέσεως των εξωτερικών κόμβων του πλέγματος CDEF.

Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες  $X_A = 0, Y_A = H$ .

Από το σχήμα 2.3 έχουμε:

$$AC' = H - Y'_C \Rightarrow Y'_C H - AC', \text{ επειδή όμως } Y'_C = Y_C \Rightarrow$$

$$Y_C = H - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.15)$$

$$CC' = X_C, \text{ όμως } CC' = \sin(\Psi') AC \Rightarrow$$

$$X_C = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.16)$$

$$AD' = H - Y'_D \text{ και επειδή } Y'_D = Y_D \Rightarrow$$

$$Y_D = H - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \Psi - \gamma\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.17)$$

$$DD' = -X_D, \text{ όπου } DD' = AD \sin(\Psi - \Psi') \Rightarrow$$



$$X_D = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \Psi - \gamma\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.18)$$

Από τις συντεταγμένες  $X_D$ ,  $Y_D$  μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες όλων των σημείων της πλευράς CD καθώς η γωνία  $\Psi_1$  θα παίρνει τιμές από μηδέν έως  $\Psi$ .

Επίσης  $BB' = X_B$  όμως  $BB' = \cos(\gamma)AB \Rightarrow$

$$X_B = \cos(\gamma) \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.19)$$

ενώ από το σχήμα 2.3 φαίνεται πως  $Y_B = h$

$$BE' = \sqrt{(X'_E - X_B)^2 + (Y'_E - Y_B)^2} \Rightarrow$$

$$(BE')^2 = (Y'_E - h)^2 \Rightarrow$$

$$Y'_E = h - BE', \text{ επειδή } Y'_E = Y_E \text{ και } h = (1-r)H \Rightarrow$$

$$Y_E = (1-r)H - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \Phi\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.20)$$

$$EE' = XE' - XE, \text{ επειδή } XE' = XB \text{ και } EE' = \sin(\delta)BE \Rightarrow$$

$$X_E = \cos(\gamma) \frac{rH}{\sin(\gamma)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \Phi\right) \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.21)$$

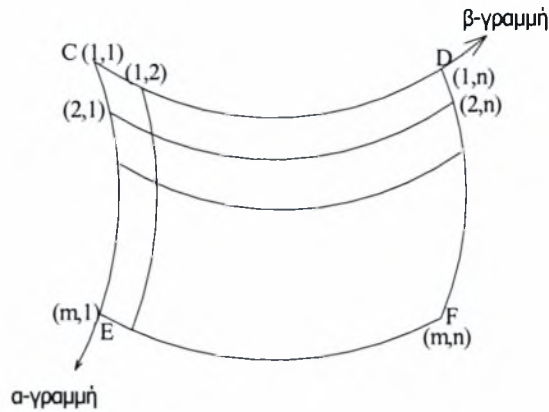
ή

$$X_E = \left[ \cos(\gamma) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \gamma - \Phi\right) \right] \frac{rH}{\sin(\gamma)} \quad (2.22)$$

Από τις συντεταγμένες  $X_E$ ,  $Y_E$  είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες όλων των σημείων της πλευράς CE καθώς η γωνία  $\Phi_1$  θα παίρνει τιμές μεταξύ του μηδέν και του  $\Phi$ .

Απαραίτητος είναι ο υπολογισμός των γωνιών  $\Theta$  που σχηματίζουν οι γραμμές ολισθήσεως με τον άξονα  $x$ . Στο σχήμα 2.4 που ακολουθεί μπορούμε να διακρίνουμε τις  $\alpha$  και  $\beta$ -γραμμές καθώς και τις γωνίες  $\theta(n,m)$  που σχηματίζονται. Το πλέγμα αποτελείται από  $n \cdot m$  κόμβους και

$(n-1) \cdot (m-1)$  στοιχεία (ο ακριβής αριθμός των στοιχείων και των κόμβων επιλέγεται ανάλογα με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που επιθυμούμε).



Σχήμα 2.4

Για να υπολογίσουμε τις τιμές των κλίσεων  $\Theta$  του δικτύου θεωρούμε ότι τα τμήματα CE και CD ανήκουν σε μια  $\alpha$ - και μια  $\beta$ -γραμμή αντιστοίχως. Οι CE και CD διαιρούνται σε μικρά τμήματα που ορίζονται από τα σημεία  $(1,1), (2,1), \dots, (m,1)$  και  $(1,1), (1,2), \dots, (1,n)$  όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Οι γραμμές ολισθήσεως που διέρχονται από τα «βασικά» σημεία ορίζουν ένα πλήρες δίκτυο των γραμμών ολισθήσεως στην περιοχή CEFD. Ο κόμβος  $(m,n)$  είναι το σημείο τομής των γραμμών ολισθήσεως που διέρχονται από τα σημεία  $(m,1)$  και  $(1,n)$ . Κατά μήκος των CE και CD οι τιμές  $\Theta_{m,1}$  και  $\Theta_{1,n}$  της γωνίας  $\theta$  είναι γνωστές και προκύπτουν από την κλίση των δεδομένων γραμμών ολισθήσεως CE και CD ως προς τον  $x$ -άξονα. Συγκεκριμένα όπως αποδείξαμε παραπάνω  $\Theta_C = -\pi/4 - \gamma$ , οπότε για το δεδομένο δίκτυο έχουμε  $\Theta(1,1) = -\pi/4 - \gamma$ . Επίσης στα τόξα CD και CE ισχύει

$\Theta = -\gamma - \pi/4 - \Psi_1$  και  $\Theta = -\gamma - \pi/4 - \Phi_1$  αντίστοιχα με αποτέλεσμα να μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις τιμές των κλίσεων  $\theta$  πάνω στα τόξα αυτά, δηλαδή να υπολογίσουμε τα  $\theta(1,n)$  και  $\theta(m,1)$  καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των γωνιών  $\Psi_1$  και  $\Phi_1$ . Χρησιμοποιώντας το 1<sup>0</sup> θεώρημα του Hencky είναι εύκολο πλέον να υπολογίσουμε την τιμή της κλίσεως  $\theta$  σε οποιοδήποτε σημείο  $(m,n)$  του δικτύου από τη σχέση

$$\Theta_{m,n} = \Theta_{1,n} - \Theta_{1,1} + \Theta_{m,1} \quad (\text{η σχέση αυτή ισχύει όταν } m,n \geq 2)$$

Αφού υπολογίσθηκαν οι σχέσεις που θα μας δώσουν τις τιμές των γωνιών  $\Theta$  είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στον υπολογισμό της θέσεως  $(X_{m,n}, Y_{m,n})$  των εσωτερικών κόμβων του πεδίου DCEF.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως από τις συντεταγμένες του D και του E μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες όλων των σημείων των τμημάτων CD

## Κεφάλαιο 2<sup>0</sup> - Επίπεδη παραμόρφωση

και CE καθώς οι γωνίες  $\Psi_1$  και  $\Phi_1$  μεταβάλλονται. Δηλαδή, είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι θέσεις  $X(1,n)$ ,  $Y(1,n)$ ,  $X(m,1)$  και  $Y(m,1)$ .

Ο υπολογισμός της θέσεως  $(X_{m,n}, Y_{m,n})$  των κόμβων του πεδίου θα γίνει με αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων  $dY/dX = \tan\theta$  και  $dY/dX = -\cot\theta$  κατά μήκος των  $\alpha$ - και  $\beta$ - γραμμών αντιστοίχως. Οι εξισώσεις αυτές γράφονται διαδοχικά ως εξισώσεις διαφορών σε κάθε κόμβο  $(m,n)$  ως εξής:

$$\frac{Y_{m,n} - Y_{m-1,n}}{X_{m,n} - X_{m-1,n}} = \tan \frac{\Theta_{m,n} + \Theta_{m-1,n}}{2} \quad \text{και} \quad \frac{Y_{m,n} - Y_{m,n-1}}{X_{m,n} - X_{m,n-1}} = -\cot \frac{\Theta_{m,n} + \Theta_{m,n-1}}{2} \quad (2.23)$$

(οι παραπάνω σχέσεις αυτές ισχύουν μόνο για  $m,n \geq 2$ )

Η λύση των παραπάνω σχέσεων δίνει της συντεταγμένες  $X_{m,n}, Y_{m,n}$ .

$$Y_{m,n} = \frac{B}{A+B} (Y_{m-1,n} - AX_{m-1,n}) + \frac{A}{A+B} (Y_{m,n-1} + BX_{m,n-1}) \quad (2.24)$$

και

$$X_{m,n} = -\frac{1}{A+B} (Y_{m-1,n} - AX_{m-1,n}) + \frac{1}{A+B} (Y_{m,n-1} + BX_{m,n-1}) \quad (2.25)$$

$$\text{όπου } A = \tan \frac{\Theta_{m,n} + \Theta_{m-1,n}}{2} \quad \text{και} \quad B = -\cot \frac{\Theta_{m,n} + \Theta_{m,n-1}}{2} \quad (2.26)$$

Αφού υπολογίσθηκαν οι τιμές της θέσεως και της κλίσεως όλων των κόμβων προχωρούμε πλέον στον υπολογισμό της αντίδρασης  $q$  που ασκεί η μήτρα στο κομμάτι, καθώς και της οδηγούσας τάσης  $P$ , δηλαδή την οδηγούσα δύναμη  $F$  προς την επιφάνεια του εμβόλου της πρέσας.

Ο υπολογισμός αυτών των δυο παραμέτρων γίνεται με σχετική ευκολία αν λάβουμε υπόψη μας τη συνθήκη ότι, η συνολική αξονική δύναμη στην πλευρά FEB ισούται με το μηδέν.

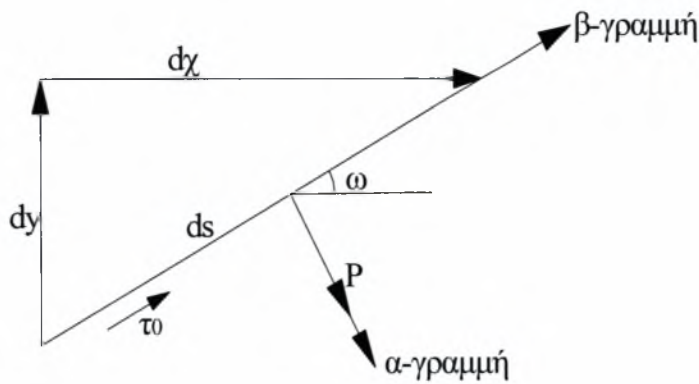
Μαθηματικά τώρα η παραπάνω συνθήκη, με βάση και το σχήμα 2.5 μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$dF_x = P \sin \omega ds + \tau_0 \cos \omega ds \Rightarrow$$

$$dF_x = PdY + \tau_0 dX$$

με αποτέλεσμα η συνολική δύναμη να δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα κατά το μήκος της FEB :

$$F_x = \int_{FEB} (PdY + \tau_0 dX) = 0 \quad (2.27)$$



Σχήμα 2.5

Η πλευρά FEB αποτελεί μια β-γραμμή οπότε σύμφωνα με το 1<sup>0</sup> θεώρημα του Hencky θα ισχύει η σχέση

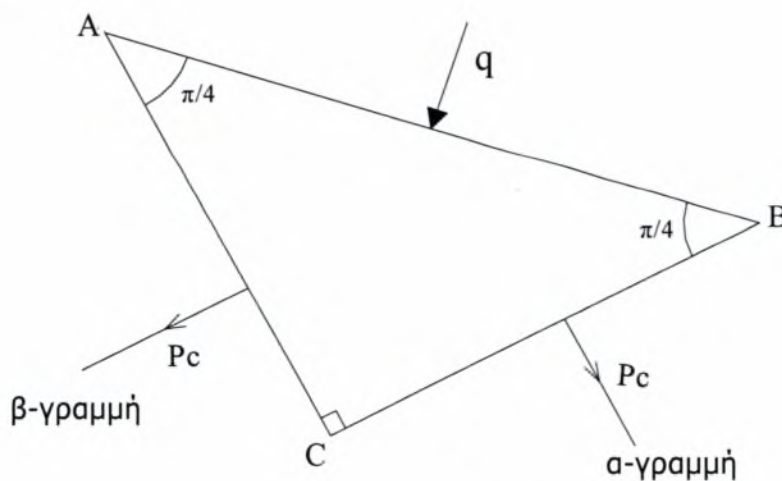
$$P + 2\tau_0\Theta = P_F + 2\tau_0\Theta_F \quad (2.28)$$

Συνεπώς, με συνδυασμό των σχέσεων αυτών η υδροστατική πίεση στο σημείο F που αποτελεί και τον «κύριο» άγνωστο παίρνει την τιμή

$$P_F = \left( \frac{\pi}{2} - \frac{c}{h} + \frac{2}{h} \int_{FEB} \Theta dY \right) \tau_0, \text{ όπου } c = X_B - X_F \quad (2.29)$$

Με βάση το σχήμα 2.6 η πίεση q δίνεται από τη σχέση  $q = \tau_0 - P_C$ , αφού

$$\text{λόγω ισορροπίας ισχύει: } q_{AB} = 2\left(\tau_0 \frac{AB}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} - P_C \frac{AB}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.30)$$



Σχήμα 2.6

Επίσης στην πλευρά FE η οποία αποτελεί μια β-γραμμή με βάση το 1<sup>0</sup> θεώρημα του Hencky θα ισχύει:

$P_E + 2\tau_0\Theta_E = P_F + 2\tau_0\Theta_F$ . Επομένως, με αντικατάσταση των γωνιών  $\Theta_F$  και  $\Theta_E$  από τις σχέσεις (2.1) και (2.6) έχουμε:

$$P_E = P_F - 2\tau_0\Psi \quad (2.31)$$

Ενώ στην πλευρά EC η οποία αποτελεί μια α-γραμμή, ισχύει:

$P_E - 2\tau_0\Theta_E = P_C - 2\tau_0\Theta_C$ , οπότε με αντικατάσταση των γωνιών  $\Theta_C$  και  $\Theta_E$  από τη σχέση (2.6) προκύπτει:

$$P_C = P_F - 2\tau_0(\Psi + \Phi) \quad (2.32)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.30) και (2.32) η πίεση q να δίνεται από τη σχέση:

$$q = -P_F + 2\tau_0\left(\Psi + \Phi + \frac{1}{2}\right) \quad (2.33)$$

Αφού υπολογίσαμε το q, αυτό που απομένει τώρα είναι ο υπολογισμός της πίεσης του εμβόλου προς το κομμάτι.

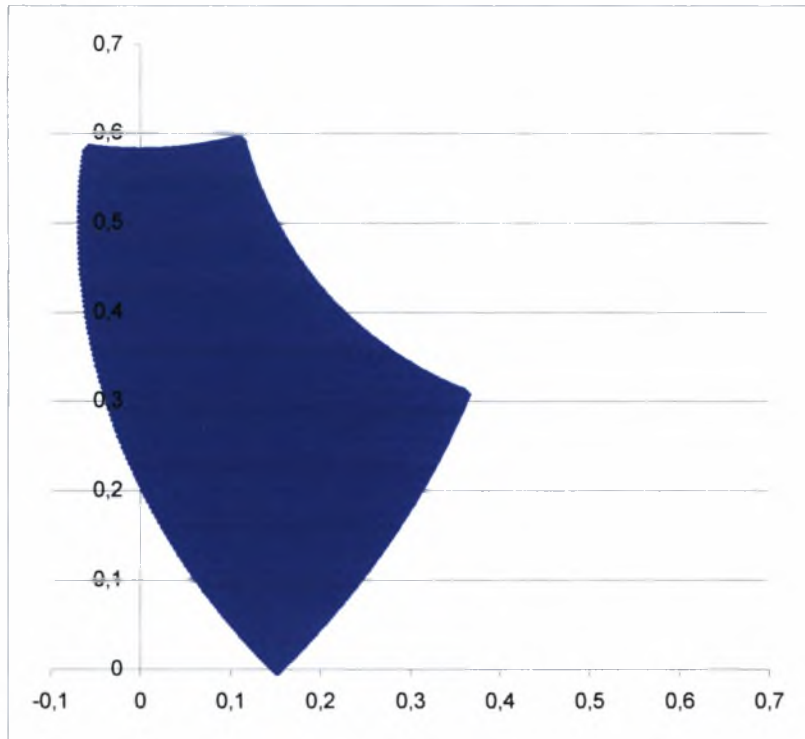
Με βάση το σχήμα 2.1 και λόγω της ισορροπίας ισχύει:

$F = qAB \sin \gamma B = q(H - h)B$ , με αποτέλεσμα η πίεση που ασκούμε να είναι

$$P = \frac{F}{HB} \Rightarrow P = qr \quad (2.34)$$

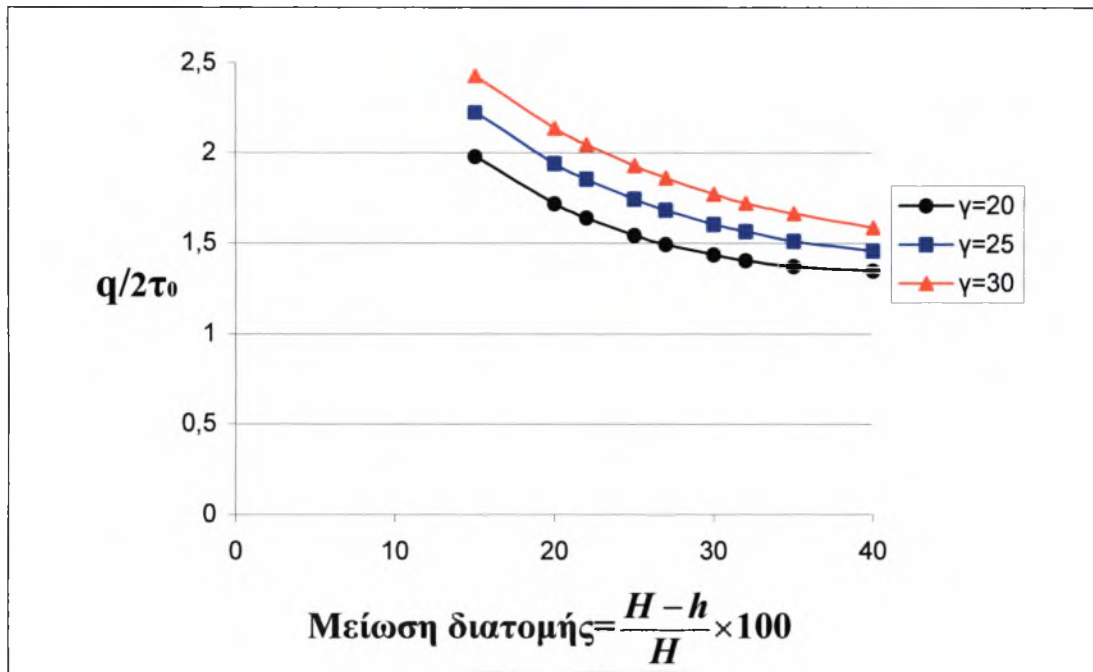
Ο υπολογισμός της αντίδρασης της μήτρας, της οδηγούσας τάσης αλλά και των θέσεων των κόμβων της περιοχής DCEF θα γίνει αριθμητικά με την χρήση ενός προγράμματος σε γλώσσα FORTRAN.

Παρακάτω ακολουθεί ένα γράφημα στο οποίο παρουσιάζεται η κατανομή των συντεταγμένων X,Y των σημείων της περιοχής DCEF σε ένα ορθοκανονικό σύστημα, όταν το σημείο F βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας.

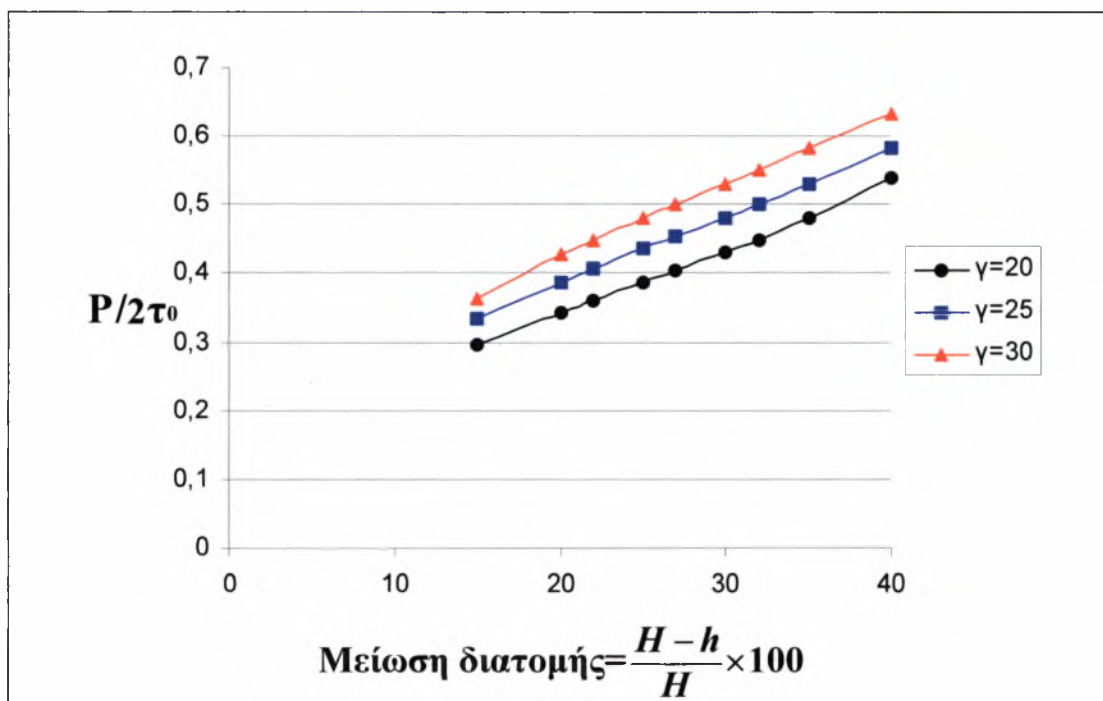


Σχήμα 2.7

Επίσης, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των πιέσεων P και q (τα μεγέθη παρουσιάζονται σε αδιάστατη μορφή με το διπλάσιο του ορίου διαρροής του υλικού σε διάτμηση  $\tau_0$ , όπου  $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ ) με τη μείωση της διατομής. Τα διαγράμματα αυτά έγιναν για διάφορες τιμές της γωνίας που σχηματίζουν τα τοιχώματα της μήτρα με τον  $\chi$ -άξονα.



Σχήμα 2.8



Σχήμα 2.9

Όπως παρατηρούμε από το σχήμα 2.8 η μείωση της διατομής συνεπάγεται και μείωση της αντίδρασης της μήτρας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι όσο πιο μικρή είναι η μείωση που επιζητούμε τόσο πιο μικρό μήκος ( $AB=(H-h)/\sin\gamma$ ) έχουν και τα τοιχώματα της μήτρας που αντιστέκονται στην πίεση του εμβόλου μας. Επίσης παρατηρούμε πως για την ίδια μείωση η αντίδραση  $q$  αυξάνεται καθώς μεγαλώνει η

## Κεφάλαιο 2<sup>0</sup> - Επίπεδη παραμόρφωση

γωνία  $\gamma$ , γεγονός που οφείλεται και αυτό στο ότι όσο μεγαλώνει η γωνία τόσο μειώνεται το μήκος του τοιχώματος.

Πρέπει να τονίσουμε πως όταν η μείωση της διατομής είναι πολύ μικρή, η αντίδραση  $q$  γίνεται πολύ μεγάλη, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα. Η μεγάλη τιμή αυτή της  $q$  έχει ως αποτέλεσμα η επιφάνεια του ελάσματος που βρίσκεται μπροστά από την μήτρα να πλαστικοποιείται, όπως θα συνέβαινε αν η μήτρα είχε εσοχές και δεν ήταν λεία.

Όσον αφορά την πίεση που ασκούμε μέσω του εμβόλου, παρατηρούμε πως αυξάνει όσο μειώνεται η διατομή και μεγαλώνει η γωνία  $\gamma$ . Αυτό θεωρείται απολύτως λογικό αφού καθώς μειώνεται η διατομή αυξάνεται το μήκος των τοιχωμάτων της μήτρας που αντιστέκονται στην κίνηση του δοκιμίου. Όταν όμως αυξάνεται η γωνία  $\gamma$  αυξάνεται και η πίεση των τοιχωμάτων της μήτρας.



## 2.5 Προσομοίωση διέλασης με πεπερασμένα στοιχεία

### 2.5.1 Μοντέλο - Γεωμετρία

Αποσκοπώντας στην επαλήθευση αλλά και στη σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου των γραμμών ολισθήσεως θα μελετήσουμε το πρόβλημα της διέλασης και με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

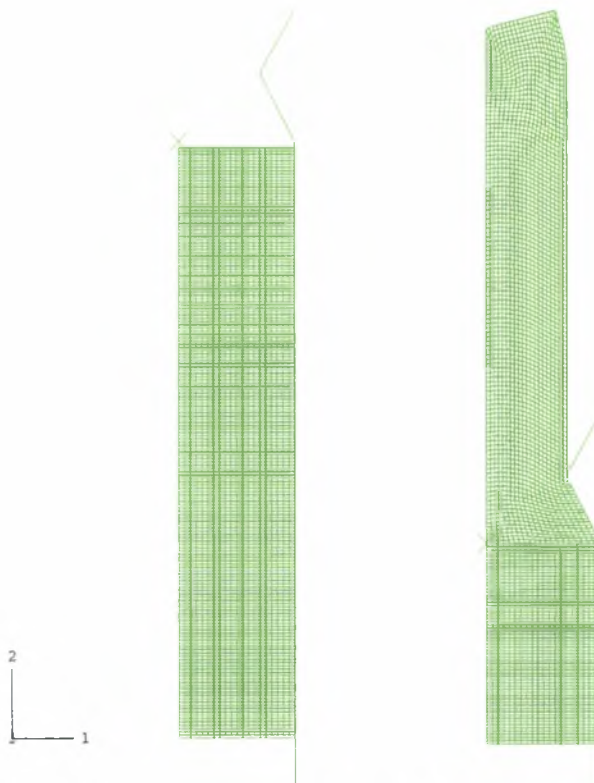
Προκειμένου να αναλύσουμε το πρόβλημα της διέλασης με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, γίνεται χρήση του υπολογιστικού πακέτου ABAQUS. Το πακέτο αυτό αποτελεί ουσιαστικά ένα πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων με σκοπό την επίλυση διαφόρων προβλημάτων. Επίσης, παρέχει τη δυνατότητα χρησιμοποίησης καταστατικών μοντέλων τα οποία ορίζονται από τον χρήστη. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω υπορουτίνας γραμμένης σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN, η οποία συνεργάζεται με το πακέτο μετά από τις κατάλληλες ρυθμίσεις. Το πακέτο έχει ενσωματωμένα και ορισμένα καταστατικά μοντέλα, που χρησιμοποιούνται συχνά στην πράξη (για παράδειγμα von Mises).

Το υλικό του μοντέλου είναι τέλεια πλαστικό (ελαστοπλαστικό μη κρατυνόμενο), ενώ οι καταστατικές παράμετροι του υλικού είναι  $\sigma_0/E=1/300$  και  $\nu=0,3$ , όπου  $\sigma_0$  είναι το όριο διαρροής του υλικού,  $E$  το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  το μέτρο Poisson.

Η μπιγιέτα έχει διαστάσεις: ύψος  $H$ , μήκος  $l=4,5H$ , ενώ μετά το πέρας της κατεργασίας το προϊόν έχει ύψος  $h=0,7H$  και μεγαλύτερο μήκος.

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων θα μελετήσουμε την περίπτωση στην οποία η γωνία της μήτρα είναι  $30^\circ$  και η μείωση της διατομής είναι 30%. Αφού έχουμε συμμετρία, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε μόνο μια ημιτομή της μπιγιέτας και της μήτρας, κάτι που γίνεται με στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης, με οχτώ κόμβους και 9 σταθμούς ολοκλήρωσης (CPE8H). Το σύνολο των στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν είναι 3600 ( $20 \times 180$ ), ενώ το σύνολο των κόμβων 14801.

Στο σχήμα 2.10 βλέπουμε το απαραμόρφωτο αλλά και παραμορφωμένο πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων. Η φορά της διέλασης είναι από κάτω προς τα πάνω, δηλαδή θεωρούμε πως το έμβολο της πρέσας διέλασης ασκεί δύναμη στο κάτω μέρος του πλέγματος. Αυτό επιτυγχάνεται με την επιβολή κατάλληλων κινηματικών και συνοριακών συνθηκών.



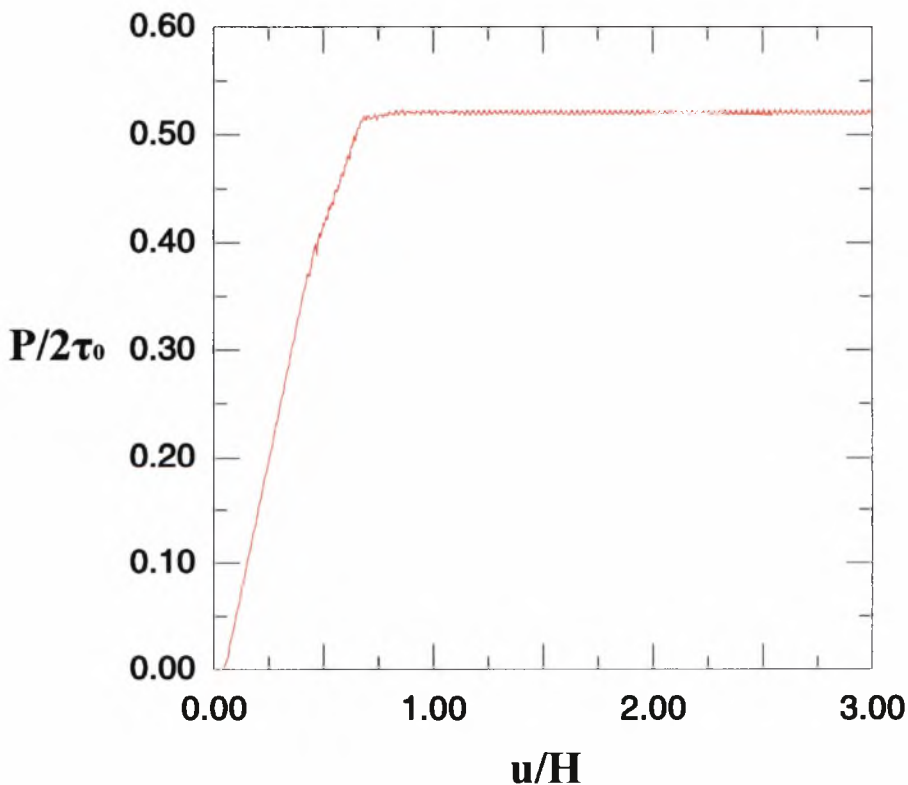
Σχήμα 2.10

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι η μπιγιέτα, κατά την έξοδο από τη μήτρα, υφίσταται ελαστική επανάκτηση (παραμορφώσεις αποφόρτισης), γεγονός που κατέχει σημαντικό ρόλο στην κατανομή των παραμενουσών τάσεων.

### 2.5.2 Αποτελέσματα

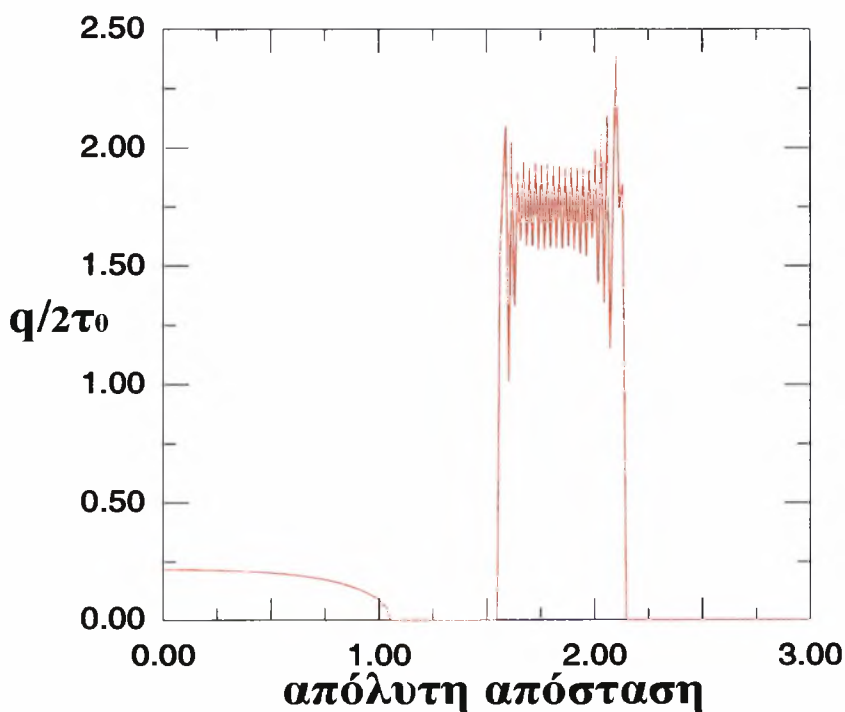
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται αφορούν μόνιμη κατάσταση (steady state) της κατεργασίας. Ως τέτοια θεωρούμε την κατάσταση κατά την οποία ένα σημαντικό μέρος της μπιγιέτας (στην συγκεκριμένη ανάλυση τα 2/3 της μπιγιέτας) έχει εξέλθει από τη μήτρα και η εντατική κατάσταση δεν μεταβάλλεται στο μέρος αυτό κατά μήκος της μπιγιέτας (με εξαίρεση το μέρος που είναι κοντά στην «αρχή» της μπιγιέτας)

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα, τόσο σε θεωρητική όσο και πρακτική άποψη, αποτελεί η οδηγούσα τάση της διέλασης. Εδώ παρουσιάζεται κανονικοποιημένη με το διπλάσιο του ορίου διαρροής σε διάτμηση ( $2\tau_0$ ) και σε συνάρτηση με την μετατόπιση  $u$  του εμβόλου της πρέσας. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 2.11 η οδηγούσα τάση αυξάνεται έως ότου αποκτήσει μια σταθερή (κατά μέσο όρο) τιμή μετά την έξοδο της μπιγιέτας από την μήτρα, δηλαδή όταν πλέον έχουμε φτάσει σε μια μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 2.11

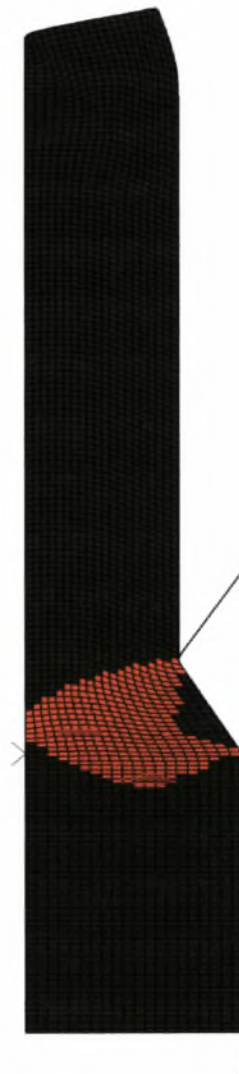
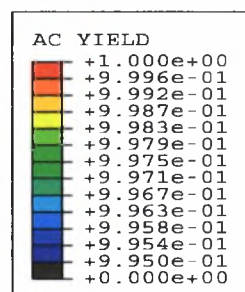
Μετά την ανάλυση που έγινε μπορούμε να βγάλουμε ασφαλή συμπεράσματα για την αντίδραση της μήτρας πάνω στην μπιγιέτα. Η κατανομή της πίεσης της μήτρας κατά μήκος της ίνας επαφής μπιγιέτας-μήτρας φαίνεται στο σχήμα 2.12, καθώς επίσης και η οδηγούσα τάση παρουσιάζεται κανονικοποιημένη με το διπλάσιο του ορίου διαρροής σε διάτμηση. Όπως βλέπουμε, από τη μήτρα ασκείται μια σταθερή (κατά μέσο όρο) τιμή στην περιοχή που επέρχεται μείωση της διατομής. Το γεγονός αυτό θεωρείται λογικό από τη στιγμή που η ανάλυση έγινε με την παραδοχή ότι δεν υπάρχει τριβή, αφού τα τοιχώματα της μήτρας είναι λεία. Όπως παρατηρούμε πως η αντίδραση παίρνει πολύ μεγαλύτερη τιμή στις δυο άκρες της μήτρας, γεγονός που οφείλεται στην απότομη αλλαγή της κλίσης της μήτρας στα σημεία αυτά. Στην αρχή το μέρος της μπιγιέτας που εφάπτεται στο έμβολο παραμορφώνεται ελαστικά. Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι η τιμή της πίεσης στην αρχή δεν είναι μηδενική.



Σχήμα 2.12

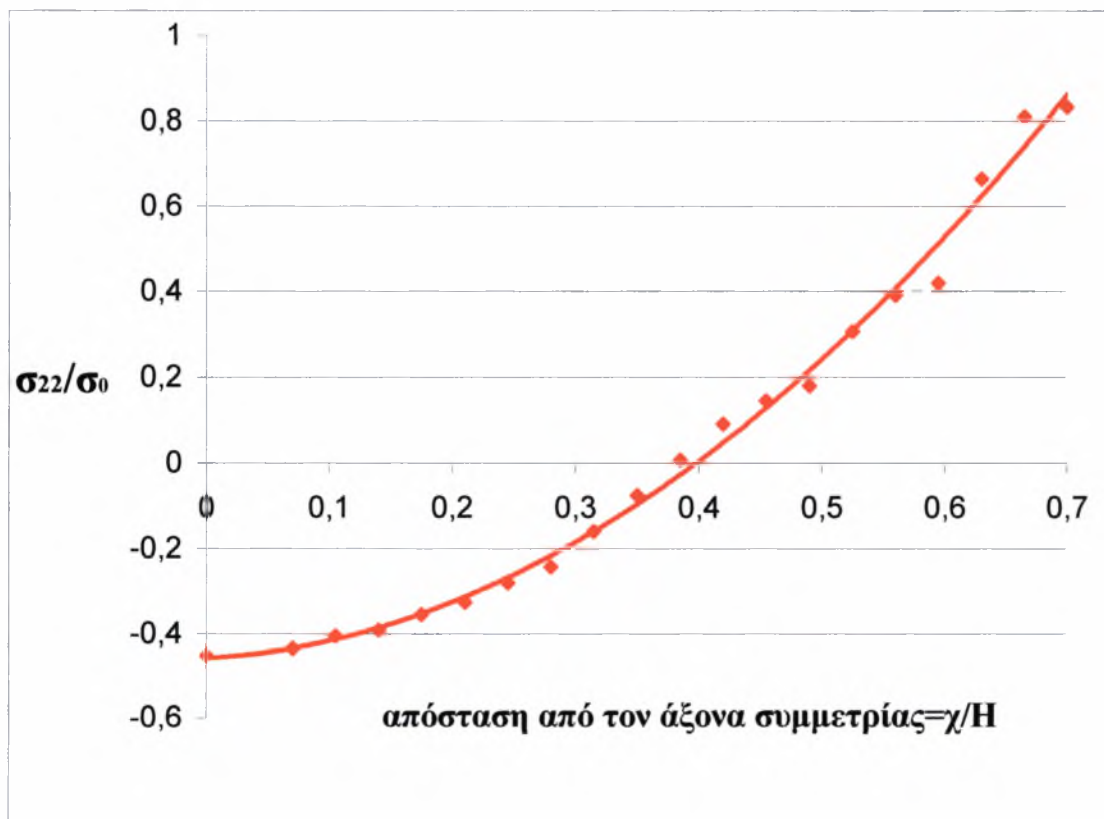
## Κεφάλαιο2<sup>0</sup> - Επίπεδη παραμόρφωση

Στο σχήμα 2.13 φαίνεται ποια στοιχεία παραμορφώνονται πλαστικά και ποια όχι. Με κόκκινο χρώμα είναι τα στοιχεία που βρίσκονται στην πλαστική περιοχή. Παρατηρούμε πως σχηματίζεται ένα «τρίγωνο» από πεπερασμένα στοιχεία ανάμεσα στα στοιχεία που πλαστικοποιούνται και στις πλευρές της μήτρας, γεγονός που υποδηλώνει πως ένα μέρος της μπιγιέτας περνά από τη μήτρα σαν στερεό σώμα. Το τρίγωνο αυτό είναι το ίδιο που παρουσιάστηκε κατά την ανάλυση με τη μέθοδο των πεδίων ολισθήσεως.



Σχήμα 2.13

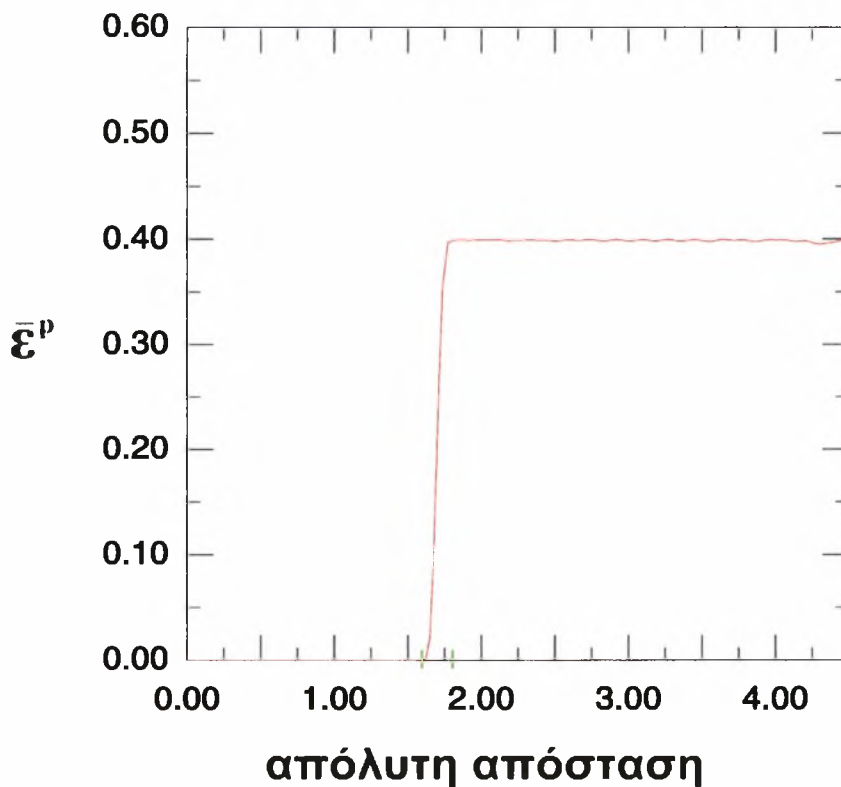
Παρακάτω εξετάζεται ένα βασικό αποτέλεσμα, από το οποίο προκύπτουν συμπεράσματα σχετικά με την ορθότητα του μοντέλου. Αυτό είναι οι παραμένουσες τάσεις  $\sigma_{22}$  σε μια τυχαία διατομή του προϊόντος. Στο σχήμα απεικονίζονται οι παραπάνω τάσεις αδιαστατοποιημένες με  $\sigma_0$ . Παρατηρώντας το σχήμα 2.14 βλέπουμε πως η  $\sigma_{22}$  παραμένει θλιπτική (αρνητικό πρόσημο) κοντά στον άξονα συμμετρίας και αλλάζει πρόσημο κοντά στην επιφάνεια του προϊόντος. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι σε μόνιμη κατάσταση και σε τομή του πεδίου των παραμενουσών τάσεων θα πρέπει η κατανομή των τάσεων να είναι τέτοια ώστε να μην μεταδίδεται η αξονική δύναμη. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:  $\int_0^h \sigma_{22} dx = 0$ . Ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος δίνει μηδενική τιμή, οπότε έχουμε μια πρώτη ένδειξη ότι το μοντέλο είναι ορθό.



Σχήμα 2.14

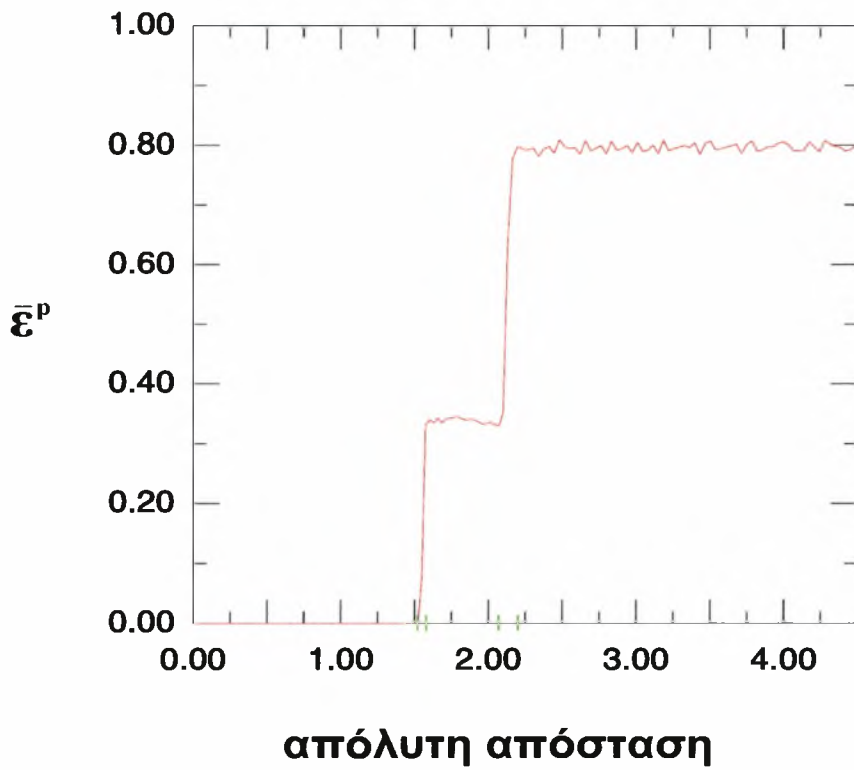
(Με τις τελείες συμβολίζονται οι τιμές από το ABAQUS ενώ η καμπύλη αποτελεί μια πολυωνυμική συνάρτηση 2<sup>ου</sup> βαθμού που προσεγγίζει τις παραπάνω τιμές)

Επίσης, παρουσιάζεται η κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης  $\bar{\epsilon}^p$  κατά μήκος του άξονα συμμετρίας σχήμα 2.15 αλλά και κατά μήκος της ίνας επαφής της μπιγιέτας με τη μήτρα στο σχήμα 2.16. Στα διαγράμματα αυτά είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε και τη ζώνη παραμόρφωσης η οποία εκτείνεται ανάμεσα στις πράσινες γραμμές. Όπως είδαμε και στο σχήμα 2.13 με τη ζώνη παραμόρφωσης παρατηρούμε και στο σχήμα 2.15 πως πάνω στον άξονα συμμετρίας πλαστικοποιούνται περισσότερα από ένα στοιχεία, γεγονός που δεν ίσχυε στην ανάλυση με την μέθοδο των γραμμών ολίσθησης στην οποία θεωρήσαμε πως μόνο ένα σημείο της πλαστικής ζώνης βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας.



Σχήμα 2.15

Ενώ στο σχήμα 2.16 παρατηρούμε πως οι πλαστικές ζώνες που σχηματίζονται αντιστοιχούν στα ριπίδια ACD και BCE που παρουσιάστηκαν στην ανάλυση των γραμμών ολίσθησης.



Σχήμα 2.16





### 2.5.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Η τιμή της οδηγούσας πίεσης (κανονικοποιημένη με  $2\tau_0$ ) για μείωση 30% και γωνία  $30^\circ$  με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι  $P_1 = \frac{F}{HB2\tau_0} = 0.52395$  ενώ

η μέση πίεση στη μήτρα  $Q_1 = \frac{q}{2\tau_0} = 1.75$ . Με τη μέθοδο των γραμμών ολισθήσεως οι

αντίστοιχες τιμές είναι  $P_2 = \frac{F}{HB2\tau_0} = 0.5312$  και  $Q_2 = \frac{q}{2\tau_0} = 1.771$ . Άρα η διαφορά των

αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων είναι:

$$\Delta P = \frac{P_2 - P_1}{P_2} = 1.365\% \quad \text{και} \quad \Delta Q = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1.186\% .$$

Όπως παρατηρούμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τις δυο μεθόδους είναι σχεδόν παρόμοια. Η σημαντική διαφορά των δυο μεθόδων βρίσκεται στο ότι με τα πεπερασμένα στοιχεία μπορεί να υπολογιστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η πλαστική ζώνη και ότι στην ανάλυση δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, αλλά βέβαια πρέπει να τονίσουμε πως ο υπολογισμός με τα πεπερασμένα στοιχεία είναι χρονοβόρος.

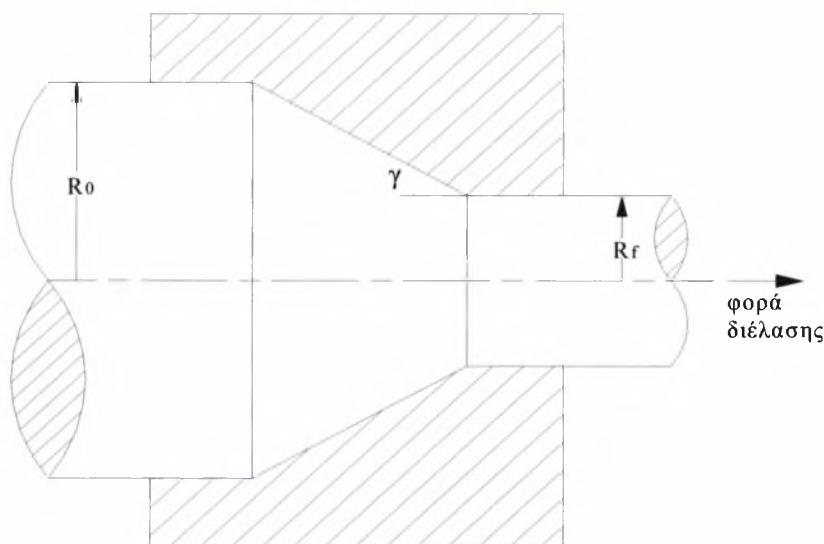
Πολύ σημαντικό ακόμα είναι ότι με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων μπορούμε να υπολογίσουμε κάποιες παραμέτρους που έχουν μεγάλη σημασία για τη διέλαση όπως: οι παραμένουσες τάσεις και η ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, κάτι που δεν μπορεί να γίνει με τα πεδία ολισθήσεως.

## Κεφάλαιο 3

### Αξονοσυμμετρική διέλαση

#### 3.1 Περιγραφή

Κατά την άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση μια κυλινδρική μπιγιέτα τοποθετείται στον «κύλινδρο» της πρέσας διέλασης και στη συνέχεια πιέζεται ώστε να περάσει μέσα από μια κωνική μήτρα. Το τελικό προϊόν είναι μια συμπαγής ράβδος, μειωμένης διατομής και αυξημένων μηχανικών ιδιοτήτων. Στο σχήμα 3.1 φαίνεται η γεωμετρία του προβλήματος. Η ανάλυση του προβλήματος της αξονοσυμμετρικής διελάσεως θα γίνει αναλυτικά με τη θεωρία της οριακής ανάλυσης (πλαστική ανάλυση) και αριθμητικά με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.1

#### 3.2 Οριακή ανάλυση

Μια ποικιλία από μαθηματικά μοντέλα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της πλαστικής παραμόρφωσης κατά τη διάρκεια μιας κατεργασίας διαμόρφωσης μετάλλων όπως η διέλαση. Μια από αυτές τις μεθόδους είναι η οριακή ανάλυση που «τοποθετεί» την υπολογιζόμενη απαιτούμενη δύναμη μεταξύ ενός κάτω και άνω ορίου. Η ανάλυση των άνω και κάτω ορίων έχει ως σκοπό η πραγματική δύναμη που απαιτείται να είναι μικρότερη από αυτή που προβλέπεται από το άνω όριο και μεγαλύτερη από το κάτω όριο. Υπολογίζοντας έτσι το ελάχιστο άνω όριο και το

ανώτερο κάτω όριο βρισκόμαστε πιο κοντά στην τιμή της πραγματικής δύναμης που απαιτείται. Με τα κάτω και άνω όρια μπορούμε να καθορίσουμε τέτοιες ποσότητες, όπως: οι απαιτούμενες δυνάμεις, διάφοροι περιορισμοί της κατεργασίας καθώς και επίσης η πρόβλεψη και παρεμπόδιση κάποιων ατελειών.

Βασικό στην αντιμετώπιση των λύσεων του κάτω και άνω ορίου είναι η κατανομή του μεταλλικού υλικού μέσα στις ζώνες. Για κάθε μια από τις ζώνες ορίζεται ένα πεδίο ταχυτήτων (για τον υπολογισμό του άνω φράγματος) και ένα πεδίο τάσεων (για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος). Η σωστότερη επιλογή των πεδίων οδηγεί τις υπολογιζόμενες τιμές πιο κοντά στην πραγματική.

Για τη μελέτη του προβλήματος της αξονοσυμμετρικής διελάσεως με την θεωρία της οριακής ανάλυσης θα χρησιμοποιηθεί ένα σφαιρικό πεδίο για τον υπολογισμό του κάτω φράγματος, ενώ ο υπολογισμός του άνω φράγματος θα πραγματοποιηθεί για δυο πεδία ταχυτήτων, ένα σφαιρικό και ένα τριγωνικό, τα αποτελέσματα των οποίων θα συγκριθούν και θα συνδυαστούν έτσι ώστε να βγάλουμε σημαντικά και ασφαλή αποτελέσματα.

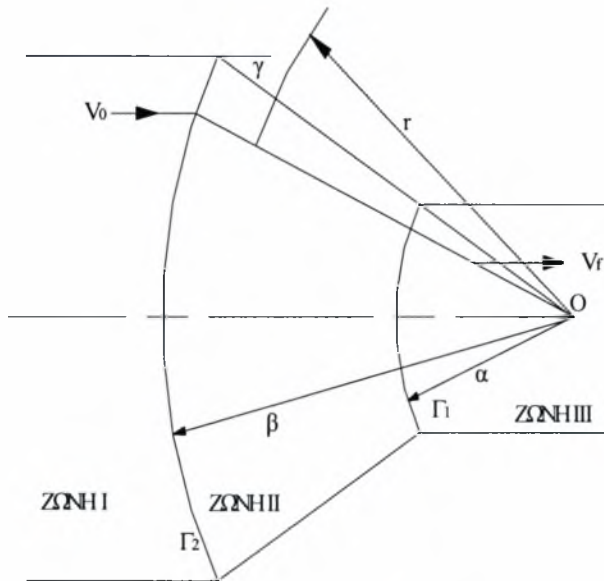
Η μπιγιέτα έχει αρχικά ακτίνα  $R_0$  και εισέρχεται στην κωνική μήτρα με ταχύτητα  $V_0$ , ενώ το προϊόν της κατεργασίας έχει ακτίνα  $R_f$  ( $R_f < R_0$ ) και ταχύτητα εξόδου  $V_f = V_0(R_0/R_f)^2$ . Η μείωση της διατομής της μπιγιέτας δίνεται από τη σχέση

$$r = \left[ 1 - \left( \frac{R_f}{R_0} \right)^2 \right] \times 100. \text{ Η κωνική μήτρα έχει επίπεδες, άκαμπτες και λείες πλευρές που}$$

σχηματίζουν γωνία  $\gamma$  με τον άξονα συμμετρίας.

### 3.3 Σφαιρικό πεδίο.

#### 3.3.1 Παρουσίαση πεδίου



Σχήμα 3.2

Το καλούπι χωρίζεται σε τρεις περιοχές στις οποίες τα πεδία ταχυτήτων είναι συνεχή. Στις περιοχές I και III οι ταχύτητες είναι ομοιόμορφες και έχουν μια μόνο αξονική συνιστώσα  $V_0$  και  $V_f$  αντίστοιχα. Στην περιοχή I το υλικό είναι απαραμόρφωτο. Στην περιοχή αυτή βρίσκεται το μέρος της μπιγιέτας που χωρίζεται από τη ζώνη παραμόρφωσης μέσω της επιφάνειας  $\Gamma_2$ . Η επιφάνεια  $\Gamma_2$  είναι σφαιρική με ακτίνα  $R_0$  και κέντρο την κορυφή της κωνικής μήτρας (δηλ. το σημείο O). Η περιοχή II είναι η ζώνη παραμόρφωσης η οποία ορίζεται από τις επιφάνειες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  και από το τοίχωμα της μήτρας. Η επιφάνεια  $\Gamma_1$  είναι και αυτή σφαιρική με ακτίνα  $R_f$ , κέντρο το σημείο O και διαχωρίζει τη ζώνη παραμόρφωσης από την περιοχή III στην οποία βρίσκεται το παραμορφωμένο υλικό. Στην περιοχή II η ταχύτητα έχει κατεύθυνση προς την κορυφή της κωνικής μήτρας.

Με την οριακή ανάλυση θα επιδιώξουμε τον υπολογισμό του φορτίου διέλασης P. Θα υπολογιστεί ένα άνω και ένα κάτω φράγμα, των οποίων οι τιμές αποτελούν τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή αντίστοιχα που μπορεί να πάρει το φορτίο κατάρρευσης. Η ανάλυση θα γίνει με χρήση σφαιρικών συντεταγμένων, άρα και των αντίστοιχων σχέσεων ισοροπίας.

### 3.3.2 Υπολογισμός κάτω φράγματος.

Στην περιοχή II ασκούνται σημαντικές δυνάμεις στο μεταλλικό υλικό με αποτέλεσμα τη μείωση της διατομής της μπιγιέτας. Παρατηρούμε πως δεν ασκούνται διατμητικές τάσεις ( $\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{r\phi} = 0$ ).

Στην περιοχή αυτή χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας για σφαιρικές συντεταγμένες ισχύει:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{r\theta} \cot \theta) = 0 \Rightarrow \text{επειδή } \sigma_\theta = \sigma_\phi$$

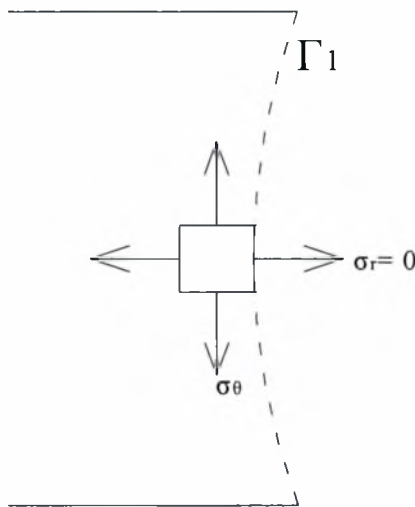
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{το όριο διαρροής δίνεται από τη σχέση } \sigma_0 = \sigma_r - \sigma_\theta \quad (3.2)$$

οπότε

$$\sigma_r = -2\sigma_0 \ln r + c \quad (3.3)$$

αν λάβουμε υπόψη τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια  $\Gamma_1$  (σχήμα 3.3) έχουμε:



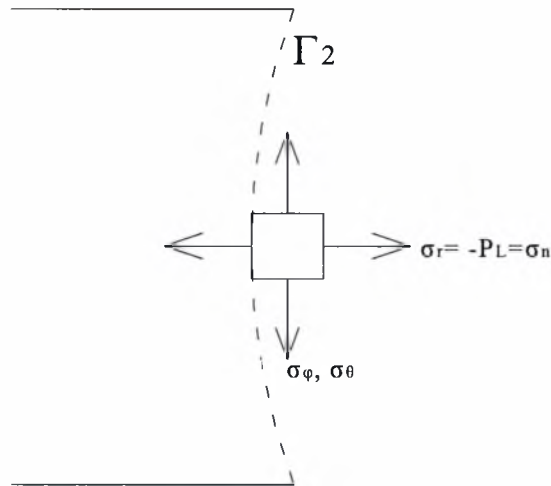
Σχήμα 3.3

$$c = 2\sigma_0 \ln a \sigma_0$$

$$\text{οπότε } \sigma_r = -2\sigma_0 \ln r + 2 \ln a \Rightarrow$$

$$\sigma_r = 2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (3.4)$$

ενώ από τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια  $\Gamma_2$  (σχήμα 3.4) σε συνδυασμό με τη σχέση (3.4) προκύπτει:



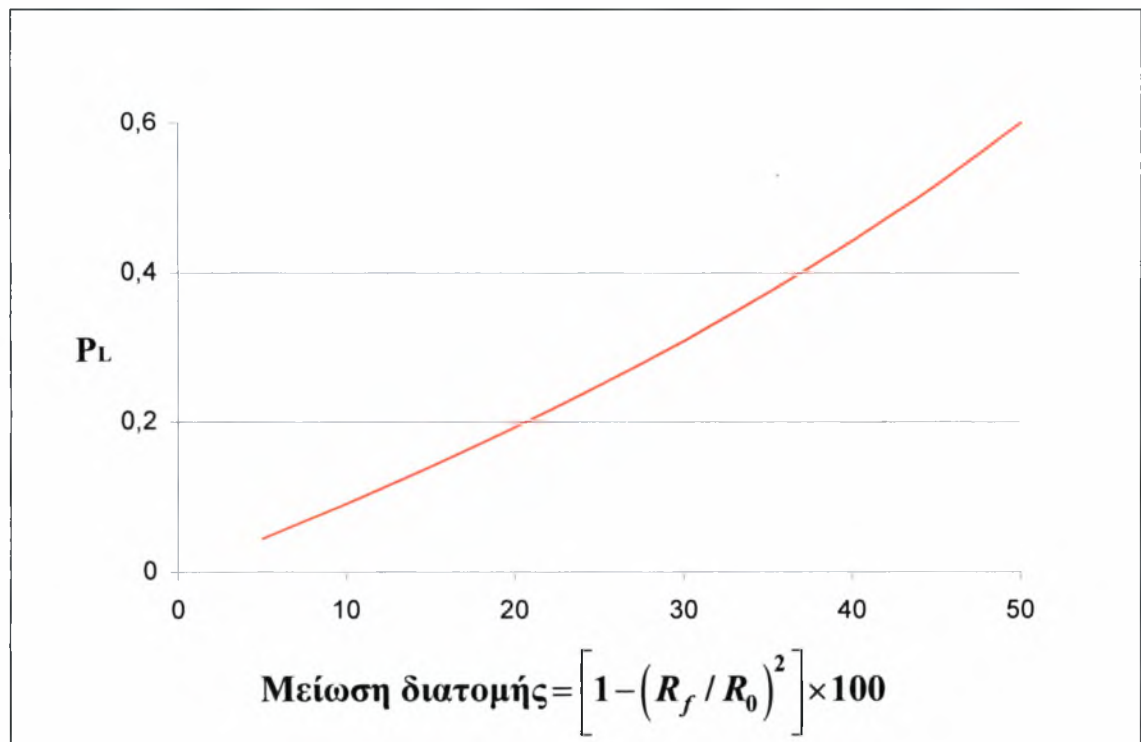
Σχήμα 3.4

$$P_L = 2\sigma_0 \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (3.5)$$

$$\text{ή } P_L = 2\sigma_0 \ln\left(\frac{D_0}{D_f}\right) \quad (3.6)$$

όπου  $P_L$  το κάτω όριο  $D_0$  και  $D_f$  η διάμετρος της μπιγιέτας και του προϊόντος αντίστοιχα. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε το ίδιο ποσοστό μείωσης με αυτό της επίπεδης παραμορφώσεως, δηλαδή 30% η ακτίνα του τελικού προϊόντος είναι:  $R_f = \sqrt{0.7} R_0$ . Η τιμή του κάτω φράγματος αν το αδιαστατοποιήσουμε με το διπλάσιο του ορίου διαρροής σε διάτμηση είναι:  $\frac{P_L}{2\tau_0} = 0.30899$ .

Από την σχέση (3.6) διαπιστώνουμε πως το κάτω όριο είναι ανεξάρτητο της γωνίας  $\gamma$ , αλλά εξαρτάται από τους γεωμετρικούς παράγοντες του προβλήματος και συγκεκριμένα από το πηλίκο  $\frac{D_0}{D_f}$ . Αυτό είναι εμφανές και στο σχήμα 3.5 στο οποίο παρουσιάζεται το κάτω όριο σε σχέση με τη μείωση της διατομής. Παρατηρούμε πως η τιμή του κάτω φράγματος αυξάνεται καθώς μειώνεται η διατομή.



Σχήμα 3.5

### 3.3.3 Υπολογισμός άνω φράγματος.

Στην περιοχή II ισχύει:

$$u_{\theta} = u_{\phi} = 0 \quad (3.7)$$

επίσης

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_{\phi} + \dot{\epsilon}_{\theta} = 0 \quad (3.8)$$

Από τις εξισώσεις ισορροπίας για σφαιρικές συντεταγμένες καταλήγουμε στα εξής:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \dot{\epsilon}_{\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u_r}{r} \\ \dot{\epsilon}_{\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial u_{\phi}}{\partial \phi} + u_r \sin \theta + u_{\theta} \cos \theta \right) = \frac{u_r}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

οπότε με βάση τα παραπάνω η σχέση (3.8) γίνεται:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} = 0, \text{ η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι:}$$

$$u_r = \frac{c}{r^2} \quad (3.10)$$

όπου το c υπολογίζεται από τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια  $\Gamma_2$

$$u_r = V_0 \Rightarrow \frac{c}{\beta^2} V_0 \Rightarrow c = \beta^2 V_0 \cos \theta$$

$$\text{οπότε: } u_r = \frac{\beta^2}{r^2} V_0 \cos \theta \quad (3.11)$$

με αντικατάσταση του  $u_r$  στις σχέσεις (3.9), προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -2 V_0 \frac{\beta^2}{r^3} \cos \theta \\ \dot{\epsilon}_{\theta} &= \dot{\epsilon}_{\phi} = V_0 \frac{\beta^2}{r^3} \cos \theta \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} V_0 \frac{\beta^2}{r^3} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$



### Κεφάλαιο 3<sup>0</sup> - Άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση

Ο ανά μονάδα όγκου ρυθμός πλαστικού έργου δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{W}^P = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P} \quad (3.13)$$

άρα  $\dot{W}^P = \sigma_0 \sqrt{(\dot{\epsilon}_r)^2 + 2(\dot{\epsilon}_\theta)^2 + 2(\dot{\epsilon}_{r,\theta})^2} \Rightarrow$

$$\dot{W}^P = \sigma_0 V_0 \frac{\beta^2}{r^3} \sqrt{\frac{11(\cos \theta)^2 + 1}{3}} \quad (3.14)$$

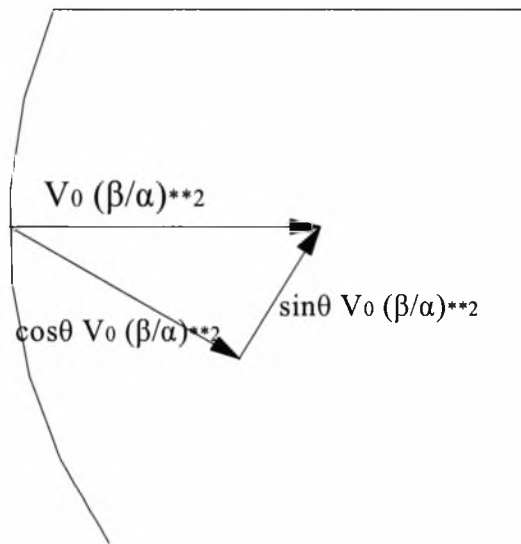
αυτό έχει ως αποτέλεσμα, ο ρυθμός πλαστικού έργου να προκύπτει από τη σχέση:

$$\dot{W}_i = \int_{Vd} \dot{W}^P dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=\alpha}^{\beta} \int_{\theta=0}^{\gamma} \frac{\sigma_0 b^2 V_0}{r^3} \sqrt{\frac{11 \cos^2 \theta + 1}{3}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \quad (3.15)$$

Απώλεια ενέργειας παρουσιάζεται στις επιφάνειες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  που οφείλεται στις ασυνέχειες ταχυτήτων που παρουσιάζονται.

Η ισχύς που καταναλώνεται λόγω της ασυνέχειας ταχυτήτων ισούται με:  $\int_{Sd} \tau_0 |\Delta V| ds$

Στην επιφάνεια  $\Gamma_1$  βάσει του σχήματος 3.6 έχουμε :



Σχήμα 3.6

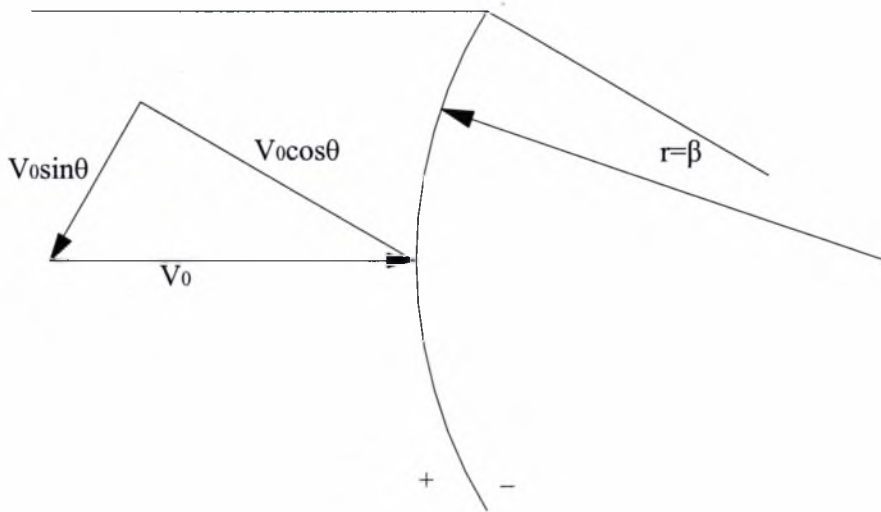
$$\dot{W}_{s1}^P = \int_{Sd} \tau_0 |(\Delta V_r)_{\Gamma_1}| ds \quad (3.16)$$

$$\text{όπου } (\Delta V_r)_{\Gamma_1} = V_0 (\beta^2/\alpha^2) |\sin\theta| \quad (3.17)$$

οπότε:

$$\dot{W}_{s1}^P = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\gamma} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} V_0 (\beta^2/\alpha^2) |\sin\theta| \alpha^2 \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.18)$$

ενώ στην επιφάνεια  $\Gamma_2$  βάσει του σχήματος 3.7 συνάγεται το εξής:



Σχήμα 3.7

$$\dot{W}_{s2}^P = \int_{Sd} \tau_0 |(\Delta V_t)_{\Gamma_2}| ds \quad (3.19)$$

$$\text{όπου } (\Delta V_t)_{\Gamma_2} = V_0 |\sin \theta| \quad (3.20)$$

οπότε:

$$\dot{W}_{s2}^P = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\gamma} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} V_0 |\sin \theta| \beta^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.21)$$

Ο συνολικός ρυθμός πλαστικού έργου θα είναι:

$$\dot{W}_{TOTAL}^P = \int_V \dot{W}^P + \int_{Sd} \tau_0 |\Delta V| ds \text{ ή } \dot{W}_{TOTAL}^P = \dot{W}_i + \dot{W}_{s1}^P + \dot{W}_{s2}^P \Rightarrow$$

$$\dot{W}_{TOTAL}^P = 2\pi \sigma_0 V_0 \beta^2 \left[ \int_a^{\beta} \frac{1}{r} dr \int_{\theta=0}^{\gamma} \frac{\sqrt{11(\cos \theta)^2 + 1}}{3} \sin \theta d\theta + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\theta=0}^{\gamma} (\sin \theta)^2 d\theta \right] \quad (3.22)$$

Η ισχύς της  $P_u$  (έργο εμπόλου) πρέπει να ισούται με το συνολικό ρυθμό πλαστικού έργου στο σώμα άρα:

$$P_u \text{ Απιστονιού } V_0 = \dot{W}_{TOTAL}^P \Rightarrow$$

$$P_u = \frac{\dot{W}_{TOTAL}^P}{\beta^2 (\sin \gamma)^2 V_0} \quad (3.23)$$

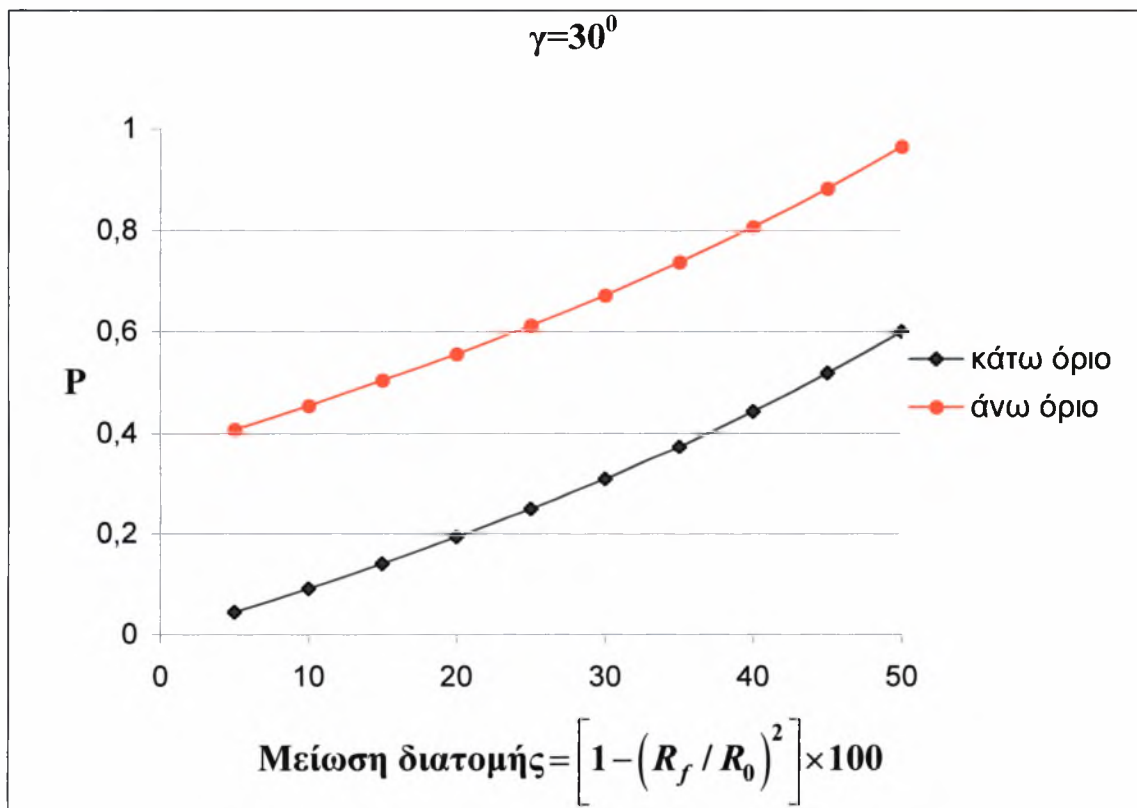
Από τη σχέση (3.23) μπορεί να υπολογιστεί το άνω όριο για οποιαδήποτε μείωση της διατομής και για διάφορες γωνίες της μήτρας.

Κεφάλαιο 3<sup>0</sup> - Άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση

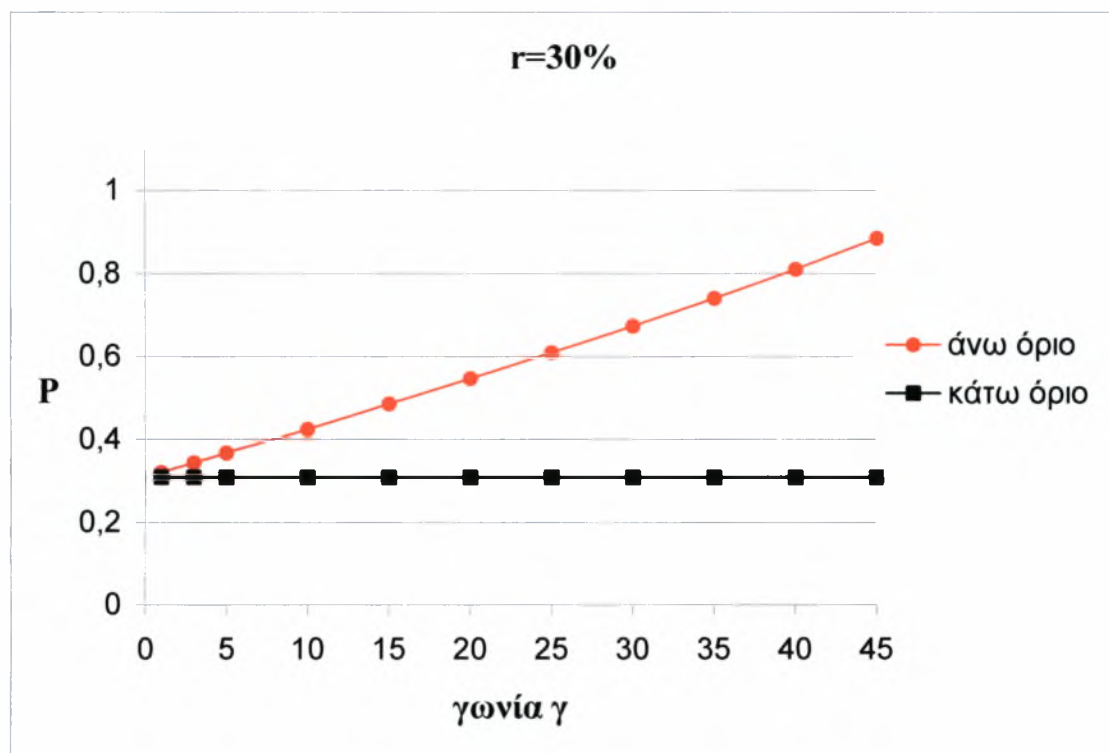
Αν αντικαταστήσουμε τις τιμές  $\gamma=30^0$  και  $(\beta/\alpha)=(D_i/D_f)=1/\sqrt{0.7}$  (μείωση 30%) η τιμή του άνω φράγματος (αδιαστατοποιημένο με  $2\tau_0$ ) θα είναι:  $\frac{P_u}{2\tau_0}=0.673$

Η τιμή της απαιτούμενης δύναμης για την πραγμάτωση της διελάσεως θα βρίσκεται μεταξύ του κάτω και του άνω φράγματος, δηλαδή  $P_L \leq P \leq P_u$  ή  $0.30899 \leq P \leq 0.673$ . Παρατηρούμε πως τα δυο φράγματα για τα συγκεκριμένα δεδομένα έχουν σημαντική διαφορά μεταξύ τους.

Στα σχήματα 3.8 και 3.9 παρουσιάζονται οι τιμές του άνω και κάτω φράγματος (κανονικοποιημένες με  $2\tau_0$ ) για γωνία  $30^0$  και μείωση διατομής 30% αντίστοιχα. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.8 η τιμή του άνω ορίου αυξάνεται καθώς μειώνεται η διατομή του προϊόντος, έχοντας όμως μια σχεδόν σταθερή διαφορά από το κάτω όριο. Αντίθετα, στο γράφημα 3.9 παρατηρούμε πως η τιμή αυξάνεται καθώς μεγαλώνει η γωνία της μήτρας. Μπορούμε να διακρίνουμε πως για μικρές γωνίες οι τιμές άνω και κάτω φράγματος πλησιάζουν η μια την άλλη.



Σχήμα 3.8

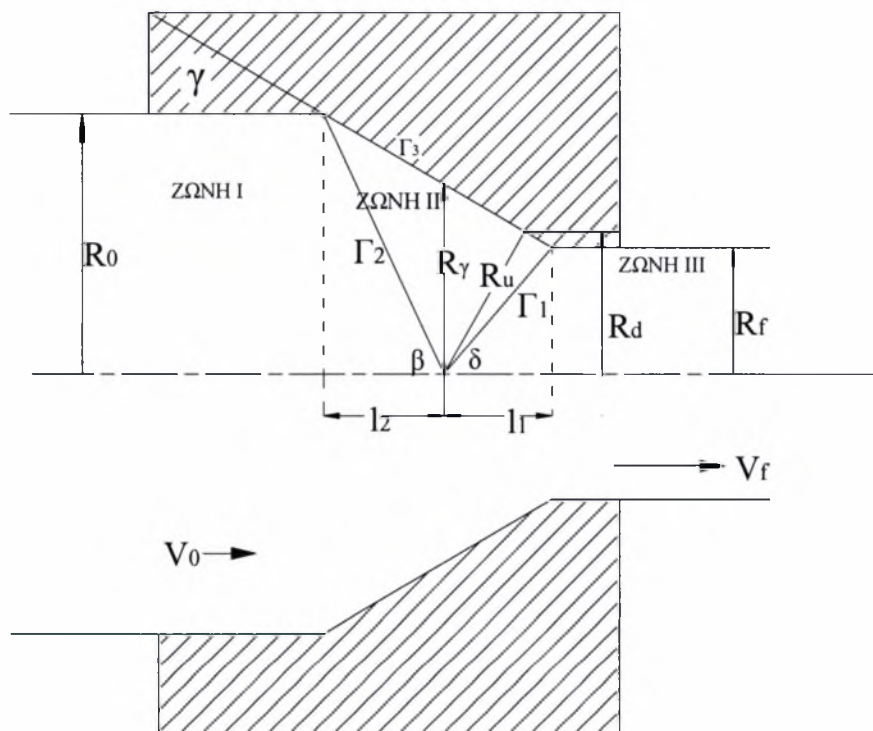


Σχήμα 3.9

### 3.4 Τριγωνικό πεδίο ταχυτήτων.

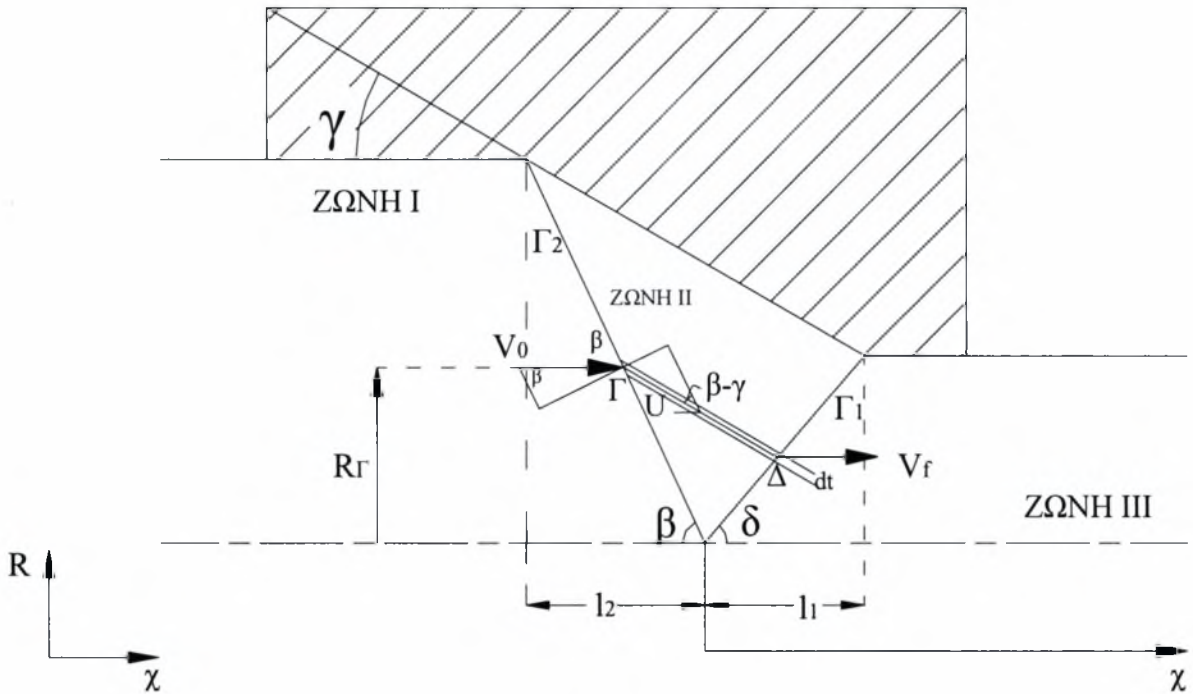
#### 3.4.1 Παρουσίαση πεδίου

Στο τριγωνικό πεδίο ταχυτήτων ασυνέχειες εμφανίζονται στις κωνικές επιφάνειες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ , οι οποίες ενώνονται στον άξονα συμμετρίας. Η θέση του σημείου τομής τους πάνω στον άξονα συμμετρίας προς το παρόν ορίζεται αυθαίρετα. Όταν υπολογισθεί η συνολική δύναμη της κατεργασίας, τότε αυτή θα ελαχιστοποιηθεί με βάση το  $l_2$ . Οι ζώνες I και III κινούνται πάνω στον άξονα συμμετρίας σαν στερεά σώματα με ταχύτητες  $V_0$  και  $V_f$  αντίστοιχα. Σημαντικές αλλαγές της διεύθυνσης εμφανίζονται στις επιφάνειες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  με αποτέλεσμα στην περιοχή II η κίνηση να είναι παράλληλη στην επιφάνεια της μήτρας. Πλαστικές παραμορφώσεις παρουσιάζονται μόνο στην περιοχή II (ζώνη παραμόρφωσης).



Σχήμα 3.10

3.4.2 Υπολογισμός κινηματικά αποδεκτού πεδίου ταχυτήτων



Σχήμα 3.11

Από τη γεωμετρία του σχήματος 3.11 έχουμε:

$$\tan \beta = -\frac{R_\Gamma}{X_\Gamma} \Rightarrow R_\Gamma = -X_\Gamma \tan \beta \quad \text{ή} \quad X_\Gamma = -\frac{R_\Gamma}{\tan \beta} \quad (3.24)$$

για κάθε σημείο της  $\Gamma\Delta$  ισχύει:

$$R = R_\Gamma - (X - X_\Gamma) \tan \gamma$$

αντικαθιστώντας το  $X_\Gamma$  από τη σχέση (3.24) προκύπτει:

$$R_\Gamma = \frac{R + X \tan \gamma}{\left(1 - \frac{\tan \gamma}{\tan \beta}\right)} \quad (3.25)$$

Για λόγους συνέχειας του υλικού οι κάθετες συνιστώσες των ταχυτήτων  $V_0$  και  $V_f$  στην επιφάνεια  $\Gamma_2$  πρέπει να είναι ίσες.

Δηλαδή πρέπει να ισχύει:  $V_n = U_n$

$$\text{ή} \quad U_\Gamma \sin(\beta - \gamma) = V_0 \sin \beta$$

με αποτέλεσμα η ταχύτητα στο σημείο  $\Gamma$  να δίνεται από τη σχέση:

$$U_\Gamma = V_0 \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma)} \quad (3.26)$$

Στην περιοχή II το υλικό ρέει διαμέσου ενός στοιχειώδους κυλίνδρου πάχους  $dt$ , όπου το πάχος δεν αλλάζει καθόλου μέσα στην περιοχή II. Για να υπάρχει σταθερή ροή του υλικού στη ζώνη παραμόρφωσης πρέπει:

$$\dot{V} = 2\pi R dt U = 2\pi R_{\Gamma} dt U_{\Gamma} \quad (3.27)$$

κατά συνέπεια η ταχύτητα του υλικού κατά μήκος του  $\Gamma\Delta$  να είναι:

$$U = \frac{U_{\Gamma} R_{\Gamma}}{R}$$

αντικαθιστώντας το  $R_{\Gamma}$  και το  $U_{\Gamma}$  από τις σχέσεις (3.25) και (3.26)

$$U = V_0 \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma)} \frac{1 + (X/R) \tan \gamma}{1 - (\tan \gamma / \tan \beta)} \quad (3.28)$$

επειδή όμως:

$$\frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\sin(\beta - \gamma) \cos \gamma} = \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\cos \gamma (\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta)} = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{1}{1 - (\tan \gamma / \tan \beta)}$$

η σχέση (3.28) γίνεται:

$$U = \frac{V_0}{\cos \gamma} \frac{1 + (X/R) \tan \gamma}{[1 - (\tan \gamma / \tan \beta)]^2} \quad (3.29)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος 3.10 ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$R_0 = l_2 \tan \beta$$

$$R_0 - R_{\gamma} = l_2 \tan \gamma$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{\tan \gamma}{\tan \beta} = \frac{R_0 - R_{\gamma}}{R_0} \Rightarrow \frac{R_{\gamma}}{R_0} = 1 - \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} \quad (3.30)$$

επίσης

$$R_f = l_1 \tan \delta$$

$$R_{\gamma} - R_f = l_1 \tan \gamma$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\frac{\tan \gamma}{\tan \delta} = \frac{R_{\gamma} - R_f}{R_f} \Rightarrow \frac{R_{\gamma}}{R_f} = 1 + \frac{\tan \gamma}{\tan \delta} \quad (3.31)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (3.29) και (3.30) δίνει την τιμή της ταχύτητας  $U$ .

$$U = \frac{V_0}{\cos \gamma} \left(1 + \frac{X}{R} \tan \gamma\right) \left(\frac{R_0}{R_{\gamma}}\right)^2 \quad (3.32)$$

$$\text{ή επειδή } V_f = V_0 \left( \frac{R_0}{R_f} \right)^2 \quad (3.33)$$

$$U = \frac{V_f}{\cos \gamma} \left( 1 + \frac{x}{R} \tan \gamma \right) \left( \frac{R_f}{R_\gamma} \right)^2 \quad (3.34)$$

Αναλύοντας την ταχύτητα  $U$  στις συνιστώσες  $U_x$  και  $U_R$  με βάση και τη γεωμετρία του σχήματος 3.11 έχουμε:

$$U_R = -U \sin \gamma \quad \text{και} \quad U_x = U \cos \gamma \quad (3.35)$$

και με αντικατάσταση της  $U$  από τη σχέση (3.32) υπολογίζεται η ακριβής τιμή τους.

$$U_R = -K \tan \gamma \left( 1 + \frac{x}{R} \tan \gamma \right) \quad (3.36)$$

και

$$U_x = K \left( 1 + \frac{x}{R} \tan \gamma \right) \quad (3.37)$$

$$\text{όπου ο σταθερός συντελεστής } K = V_f \left( \frac{R_f}{R_\gamma} \right)^2 = V_0 \left( \frac{R_0}{R_\gamma} \right)^2 \quad (3.38)$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων  $\epsilon$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{RR} &= \frac{\partial u_R}{\partial R} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_R \right) = \frac{u_R}{R} \\ \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \dot{\epsilon}_{xR} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_R}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

αντικαθιστώντας τις συνιστώσες  $u_R, u_x$  στις παραπάνω σχέσεις συνάγεται:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{RR} &= \frac{Kx \tan^2 \gamma}{R^2} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} &= -\frac{K \tan \gamma}{R} \left( 1 + \frac{x}{R} \tan \gamma \right) \\ \dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{K \tan \gamma}{R} \\ \dot{\epsilon}_{xR} &= -\frac{1}{2} K \frac{\tan \gamma}{R} \left( \tan \gamma + \frac{x}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$



### 3.4.3 Υπολογισμός άνω φράγματος

Για να υπολογιστεί το άνω όριο πρέπει να υπολογίσουμε την κατανάλωση ενέργειας (δηλαδή την ενέργεια που καταναλώνεται λόγω της ασυνέχειας ταχυτήτων, αλλά και την εσωτερική ενέργεια παραμόρφωσης) Απώλεια ενέργειας παρουσιάζεται στις επιφάνειες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$ .

Στην επιφάνεια  $\Gamma_1$  οι απώλειες δίνονται από την σχέση:

$$\dot{W}_{s1} = \int_{\Gamma_1} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} |\Delta U| ds \quad (3.41)$$

όπου  $|\Delta U|$  η ασυνέχεια ταχυτήτων κατά μήκος του  $\Gamma_1$  και όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.11 δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} (\Delta U_t)_{\Gamma_1} &= V_f \cos \delta - U_\Delta \cos(\gamma + \delta) = V_f \cos \delta - \frac{V_f}{\cos \gamma} \frac{R_f}{R_\gamma} \cos(\gamma + \delta) \Rightarrow \\ (\Delta U_t)_{\Gamma_1} &= V_f \cos \delta \left[ 1 - \frac{R_f \cos(\gamma + \delta)}{R_\gamma \cos \gamma \cos \delta} \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

με αντικατάσταση του κλάσματος  $\frac{R_f}{R_\gamma}$  από τη σχέση (3.31)

$$(\Delta U_t)_{\Gamma_1} = V_f \cos \delta \left[ 1 - \frac{\tan \delta}{\tan \gamma + \tan \delta} \frac{\cos(\gamma + \delta)}{\cos \gamma \cos \delta} \right] \quad (3.43)$$

χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\cos(\gamma + \delta) = \cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta$$

και

$$\tan \gamma + \tan \delta = \frac{\sin(\gamma + \delta)}{\cos \gamma \cos \delta}$$

η σχέση (3.43) παίρνει την μορφή

$$(\Delta U_t)_{\Gamma_1} = V_f \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)} \quad (3.44)$$

η αντικατάσταση του όρου  $(\Delta U_t)_{\Gamma_1}$  στη σχέση (3.41) δίνει:

$$\dot{W}_{s1} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \pi R_f \sqrt{R_f^2 + l_1^2} |(\Delta U_t)_{\Gamma_1}| \quad (3.45)$$

$$\text{όπου } \sqrt{R_f^2 + l_1^2} = \sqrt{R_f^2 + \left(\frac{R_f}{\tan \delta}\right)^2} = R_f \sqrt{1 + \cot^2 \delta} = \frac{R_f}{\sin \delta}$$

$$\text{άρα } \dot{W}_{s1} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \pi R_f \frac{R_f}{\sin \delta} V_f \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 V_f R_f^2 \frac{\sin \gamma}{\sin \delta \sin(\gamma + \delta)} \quad (3.46)$$

$$\dot{W}_{s1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 V_0 R_0^2 \frac{\sin \gamma}{\sin \delta \sin(\gamma + \delta)} \quad (3.47)$$

Οι ασυνέχειες ταχυτήτων κατά μήκος του  $\Gamma_2$  όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.11 δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} (\Delta U_t)_{\Gamma_2} &= U_\Gamma \cos(\beta - \gamma) - V_0 \cos \beta = V_0 \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma)} \cos(\beta - \gamma) - V_0 \cos \beta \Rightarrow \\ (\Delta U_t)_{\Gamma_2} &= V_0 \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Στην επιφάνεια  $\Gamma_2$  οι απώλειες προκύπτουν από τη σχέση:

$$\dot{W}_{s2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \pi R_0 \sqrt{R_0^2 + l_2^2} |(\Delta U_t)_{\Gamma_2}| \quad (3.49)$$

$$\text{όπου } \sqrt{R_0^2 + l_2^2} = \sqrt{R_0^2 + \left(\frac{R_0}{\tan \beta}\right)^2} = R_0 \sqrt{1 + \cot^2 \beta} = \frac{R_0}{\sin \beta}$$

$$\text{άρα } \dot{W}_{s2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \pi R_0 \frac{R_0}{\sin \beta} V_0 \frac{\sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 V_0 R_0^2 \frac{\sin \gamma}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)} \quad (3.50)$$

Ο ρυθμός του πλαστικού έργου υπολογίζεται ως εξής:

$$\dot{W}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int_V \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} dV \quad (3.51)$$

ή

$$\begin{aligned} \dot{W}_i &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left[ \int_0^{R_f} \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} 2\pi R dx dR \right. \\ &\left. + \int_{R_f}^{R_0} \int_{x_2}^{x_{d/e}} \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} 2\pi R dx dR \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

όπου τα όρια ολοκλήρωσης με βάση την γεωμετρία του προβλήματος υπολογίζονται ως εξής:

$$\text{Στην επιφάνεια } \Gamma_2: x_2 = -\frac{l_2 R}{R_0} = -R \cot \beta$$

$$\text{Στην επιφάνεια } \Gamma_1: x_1 = \frac{l_1 R}{R_f} = R \cot \delta$$

Κεφάλαιο3<sup>0</sup> - Άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση

Στη μήτρα:  $x_{die} = -l_2 + \frac{l_1 + l_2}{R_0 - R_f} (R_0 - R)$ , χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$R_0 = R_f + l_2 \tan \alpha \text{ και } l_1 + l_2 = \frac{R_0 - R_f}{\tan \gamma} \text{ έχουμε:}$$

$$x_{die} = (R_f - R) \cot \gamma$$

Με αντικατάσταση των  $\mathcal{E}_{ij}^p$  από τις σχέσεις (3.40) ο όρος  $\sqrt{\frac{1}{2} \dot{\mathcal{E}}_{ij}^p \dot{\mathcal{E}}_{ij}^p}$  ισούται με :

$$\sqrt{\frac{1}{2} \dot{\mathcal{E}}_{ij}^p \dot{\mathcal{E}}_{ij}^p} = \frac{1}{2} K \tan \gamma \frac{1}{R} \sqrt{C \left(\frac{x}{R}\right)^2 + B \frac{x}{R} + A} \quad (3.53)$$

$$\text{όπου } A=4 + \tan^2 \gamma, B=6 \tan \gamma, C=1 + 4 \tan^2 \gamma \quad (3.54)$$

Για ευκολία εισάγονται οι όροι  $h_1$  και  $h_2$  όπου:

$$h_1 = \int_0^{R_f} \int_{x_2}^{x_1} \sqrt{C \left(\frac{x}{R}\right)^2 + B \frac{x}{R} + A} dx dR = \int_0^{R_f} \int_{-R \cot \beta}^{R \cot \delta} \sqrt{C \left(\frac{x}{R}\right)^2 + B \frac{x}{R} + A} dx dR \quad (3.55)$$

$$h_2 = \int_{R_f}^{R_0} \int_{x_2}^{x_{die}} \sqrt{C \left(\frac{x}{R}\right)^2 + B \frac{x}{R} + A} dx dR = \int_{R_f}^{R_0} \int_{-R \cot \beta}^{(R_f - R) \cot \gamma} \sqrt{C \left(\frac{x}{R}\right)^2 + B \frac{x}{R} + A} dx dR \quad (3.56)$$

με αποτέλεσμα ο ρυθμός του πλαστικού έργου να δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{W}_i = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 K \tan \gamma (h_1 + h_2) \quad (3.57)$$

Για τον υπολογισμό των  $h_1$  και  $h_2$  χρησιμοποιούμε τον όρο  $\eta = x/R$  ( $dx = R d\eta$ ) στο εσωτερικό ολοκλήρωμα. Κατά συνέπεια οι σχέσεις (3.55) και (3.56) γίνονται:

$$h_1 = \int_0^{R_f} \int_{-\cot \beta}^{\cot \delta} \sqrt{C(\eta)^2 + B\eta + A} d\eta R dR \quad (3.58)$$

$$h_2 = \int_{R_f}^{R_0} \int_{-\cot \beta}^{(R_f - R) \cot \gamma} \sqrt{C(\eta)^2 + B\eta + A} d\eta R dR \quad (3.59)$$

$$\text{άρα } h_1 = \frac{1}{2} R_f^2 \int_{-\cot \beta}^{\cot \delta} \sqrt{C(\eta)^2 + B\eta + A} d\eta$$

Επειδή  $R dR = d\left(\frac{1}{2} R^2\right)$  το εξωτερικό ολοκλήρωμα του  $h_2$  μπορεί να ολοκληρωθεί κατά μέλη. Οπότε:

Κεφάλαιο 3<sup>0</sup> - Άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση

$$h_2 = \left[ \frac{1}{2} R^2 \int_{-\cot \beta}^{(R_\gamma/R_0)-1 \cot \gamma} \sqrt{C(\eta)^2 + B\eta + A} d\eta \right]_{R_f}^{R_0} - \int_{R_f}^{R_0} \frac{1}{2} R^2 \sqrt{C \left[ \left( \frac{R_\gamma}{R} - 1 \right) \cot \gamma \right]^2 + B \left( \frac{R_\gamma}{R} - 1 \right) \cot \gamma + A \left( \frac{[(R_\gamma/R)-1] \cot \gamma}{dR} \right)} dR \Rightarrow$$

$$h_2 = \frac{1}{2} R_0^2 \int_{-\cot \beta}^{(R_\gamma/R_0)-1 \cot \gamma} \sqrt{C(\eta)^2 + B\eta + A} d\eta - \frac{1}{2} R_f^2 \int_{-\cot \beta}^{(R_\gamma/R_f)-1 \cot \gamma} \sqrt{C(\eta)^2 + B\eta + A} d\eta$$

$$+ \frac{1}{2} R_\gamma \cot \gamma \int_{R_f}^{R_0} \sqrt{\left[ C \left( \frac{R_\gamma}{R} - 1 \right)^2 \cot^2 \gamma + B \left( \frac{R_\gamma}{R} - 1 \right) \cot \gamma + A \right]} dR \quad (3.60)$$

Βάσει των σχέσεων (3.30) και (3.31) ισχύει:

$[(R_\gamma/R_f)-1] \cot \gamma = \cot \delta$  και  $[(R_\gamma/R_0)-1] \cot \gamma = -\cot \beta$  με αποτέλεσμα το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.60) να είναι μηδέν και το δεύτερο να ισούται με  $-h_1$ .

Οπότε:

$$\dot{W}_i = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 K R_\gamma \int_{R_f}^{R_0} \sqrt{\left[ C \left( \frac{R_\gamma}{R} - 1 \right)^2 \cot^2 \gamma + B \left( \frac{R_\gamma}{R} - 1 \right) \cot \gamma + A \right]} dR \quad (3.61)$$

Προκειμένου να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα ορίζουμε το  $\xi = (R/R_d)$ , όπου  $R_d = R_\gamma \cos^2 \gamma$  και αντικαθιστούμε τα A, B, C με αποτέλεσμα το  $\dot{W}_i$  να δίνεται από την σχέση

$$\dot{W}_i = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 K R_\gamma^2 \cot \gamma \int_{(R_f/R_d)}^{(R_0/R_d)} \frac{1}{\xi} \sqrt{[4 \tan^2 \gamma + (1 - \xi)^2]} d\xi \quad (3.62)$$

υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα:

$$F(Z) = \int \frac{1}{\xi} \sqrt{[4 \tan^2 \gamma + (1 - \xi)^2]} d\xi = \sqrt{[4 \tan^2 \gamma + (1 - Z)^2]} - 2 \tan \gamma + \operatorname{arcsh} \left( \frac{1 - Z}{2 \tan \gamma} \right)$$

$$+ \sqrt{(4 \tan^2 \gamma + 1)} \left[ \operatorname{arcsh}(2 \tan \gamma) - \operatorname{arcsh} \left( \frac{4 \tan^2 \gamma + 1 - Z}{2Z \tan \gamma} \right) \right] \quad (3.63)$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$\dot{W}_i = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 K R_\gamma^2 \cot \gamma \left[ F \left( \frac{R_0}{R_d} \right) - F \left( \frac{R_f}{R_d} \right) \right]$$

ή με αντικατάσταση του K

$$\dot{W}_i = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sigma_0 V_0 R_0^2 \cot \gamma \left[ F \left( \frac{R_0}{R_d} \right) - F \left( \frac{R_f}{R_d} \right) \right] \quad (3.64)$$

Ο συνολικός ρυθμός πλαστικού έργου θα είναι:

$$\dot{W}_{TOTAL}^P = \dot{W}_i + \dot{W}_{s1}^P + \dot{W}_{s2}^P \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_{TOTAL}^p &= \pi \sigma_0 V_0 R_0^2 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sin \gamma}{\sin \delta \sin(\gamma + \delta)} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sin \gamma}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cot \gamma \left[ F\left(\frac{R_0}{R_d}\right) - F\left(\frac{R_f}{R_d}\right) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Η ισχύς της  $P_u$  (έργο εμβόλου) πρέπει να ισούται με το συνολικό ρυθμό πλαστικού έργου στο σώμα άρα:

$$P_u \text{ Απιστονιού } V_0 = P_u \pi R_0^2 V_0 = \dot{W}_{TOTAL}^p$$

Οπότε η πίεση του εμβόλου θα δίνεται από τη σχέση

$$P_u = \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \frac{\sin \gamma}{\sin \delta \sin(\gamma + \delta)} + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)} + \cot \gamma \left[ F\left(\frac{R_0}{R_d}\right) - F\left(\frac{R_f}{R_d}\right) \right] \right] \quad (3.66)$$

Σκοπός είναι να υπολογιστεί το ελάχιστο άνω όριο. Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω γεωμετρικές σχέσεις το κάτω όριο αποτελεί πλέον μια συνάρτηση του  $R_d$ .

$$\frac{1}{\sin \beta \sin(\delta + \gamma)} = \frac{l_1^2 + R_f^2}{R_f R_\gamma \cos \gamma} = \frac{(R_f - R_d \sec^2 \gamma)^2 \cot^2 \gamma + R_f^2}{R_f R_d \sec^2 \gamma \cos \gamma}$$

και

$$\frac{1}{\sin \beta \sin(\beta - \gamma)} = \frac{l_2^2 + R_0^2}{R_0 R_\gamma \cos \gamma} = \frac{(R_d \sec^2 \gamma - R_0)^2 \cot^2 \gamma + R_0^2}{R_f R_d \sec^2 \gamma \cos \gamma}$$

Η πίεση του εμβόλου γίνεται

$$\begin{aligned} P_u(R_d) &= \sigma_0 \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \tan \gamma \frac{(R_f - R_d \sec^2 \gamma)^2 \cot^2 \gamma + R_f^2}{R_f R_d \sec^2 \gamma} \right. \\ &+ \left. \tan \gamma \frac{(R_d \sec^2 \gamma - R_0)^2 \cot^2 \gamma + R_0^2}{R_f R_d \sec^2 \gamma} + \cot \gamma \left[ F\left(\frac{R_0}{R_d}\right) - F\left(\frac{R_f}{R_d}\right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

Επομένως, το ελάχιστο άνω όριο είναι το ελάχιστο της συνάρτησης  $P_u(R_d)$ , άρα αρκεί να βρούμε την τιμή του  $R_d$  για την οποία η πίεση του εμβόλου παίρνει την

ελάχιστή της τιμή, δηλαδή την τιμή του  $R_d$  για την οποία  $\frac{dP_u(R_d)}{dR_d} = 0$

Για ευκολία στους υπολογισμούς λύνουμε την εξίσωση  $\frac{\sqrt{3} R_d}{\cot \gamma} \frac{dP_u(R_d)}{dR_d} = 0$ , όπου

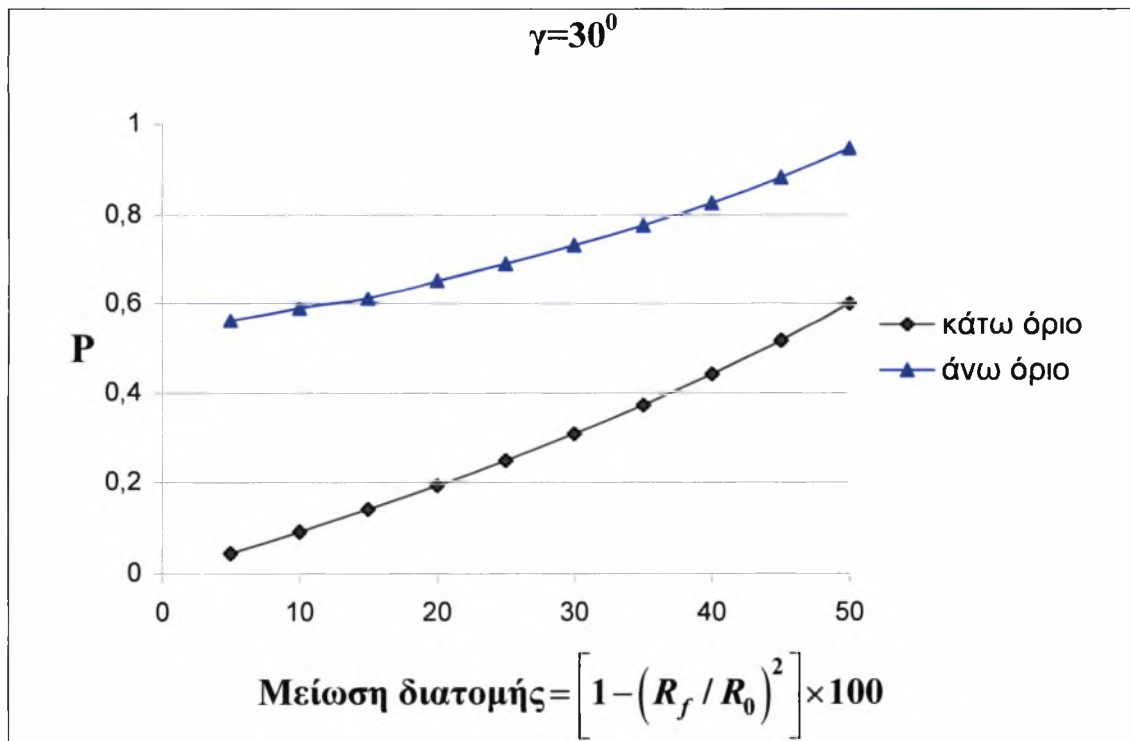
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3} R_d}{\cot \gamma} \frac{dP_u(R_d)}{dR_d} &= \frac{R_f}{R_d} + \frac{R_0}{R_d} - \left( \frac{R_d}{R_f} + \frac{R_d}{R_0} \right) \sec^2 \gamma \\ &+ \sqrt{4 \tan^2 \gamma + \left(1 - \frac{R_0}{R_d}\right)^2} - \sqrt{4 \tan^2 \gamma + \left(1 - \frac{R_f}{R_d}\right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Με την επαναληπτική μέθοδο Newton υπολογίζεται η ρίζα της εξίσωσης (3.68) και με την αντικατάστασή της στη σχέση (3.65) υπολογίζεται η ελάχιστη τιμή του άνω φράγματος.

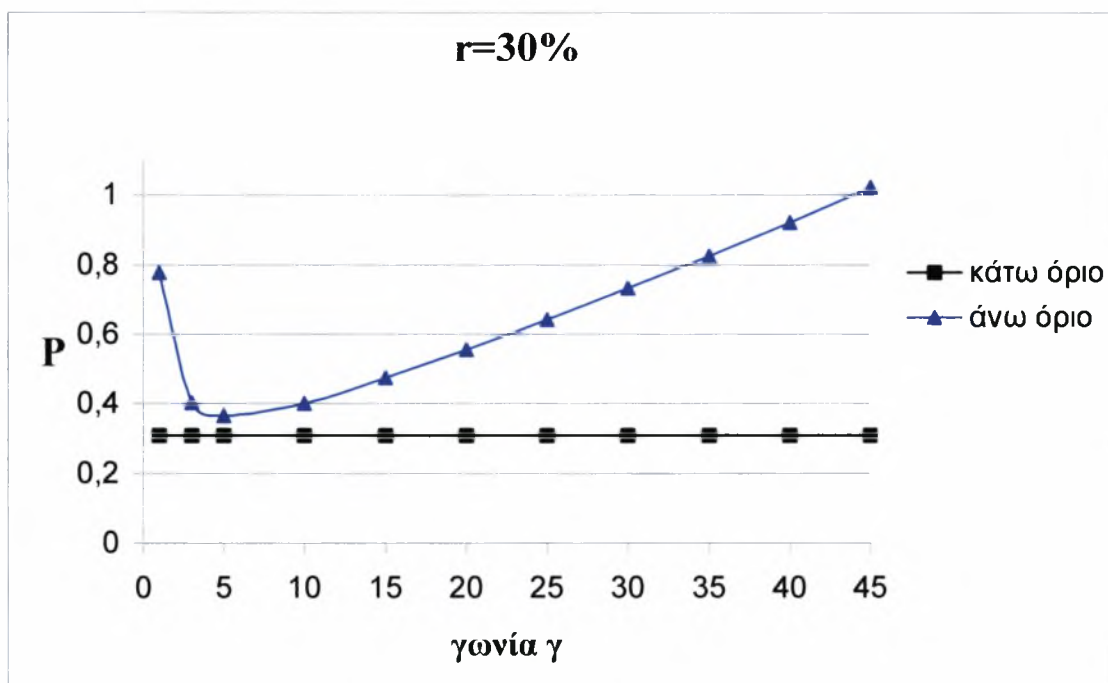
Για τις τιμές  $\gamma=30^{\circ}$  και για μείωση διατομής 30% η τιμή του άνω φράγματος (αδιαστατοποιμένο με  $2\tau_0$ ) θα είναι:  $\frac{P_u}{2\tau_0}=0.7312$

Η τιμή της απαιτούμενης δύναμης για την πραγμάτωση της διελάσεως θα βρίσκεται μεταξύ του κάτω και του άνω φράγματος, δηλαδή  $P_L \leq P \leq P_u$  ή  $0.30899 \leq P \leq 0.7312$ . Παρατηρούμε πως και στην περίπτωση του τριγωνικού πεδίου η διαφορά του άνω και του κάτω ορίου για τα συγκεκριμένα δεδομένα είναι σημαντική.

Στα σχήματα 3.12 και 3.13 παρουσιάζεται η τιμή του άνω φράγματος για γωνία  $30^{\circ}$  και μείωση διατομής 30% αντίστοιχα. Στα ίδια διαγράμματα βρίσκεται και η τιμή του κάτω ορίου. Στο σχήμα 3.12 παρατηρούμε πως η τιμή του άνω φράγματος αυξάνεται με τη μείωση της διατομής, χωρίς όμως να προσεγγίζει το κάτω φράγμα για καμία τιμή της μειώσεως. Ενώ από στο σχήμα 3.13 βλέπουμε ότι οι τιμές που παίρνει το άνω όριο σχηματίζουν μια καμπύλη που αποκτά κάποιο ελάχιστο για μια συγκεκριμένη τιμή της γωνίας. Όπως παρατηρούμε για μικρές γωνίες η διαφορά μεταξύ άνω και κάτω ορίου μειώνεται (οι τιμές είναι αδιαστατοποιημένες με  $2\tau_0$ ).



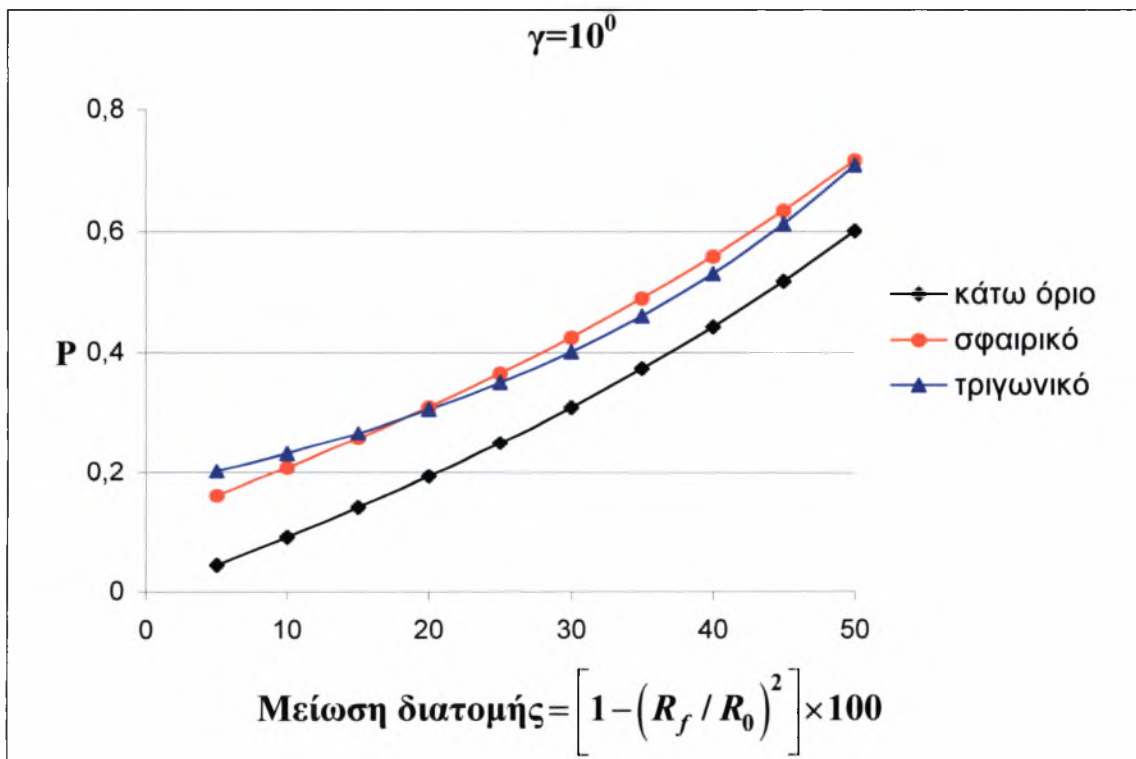
Σχήμα 3.12



Σχήμα 3.13

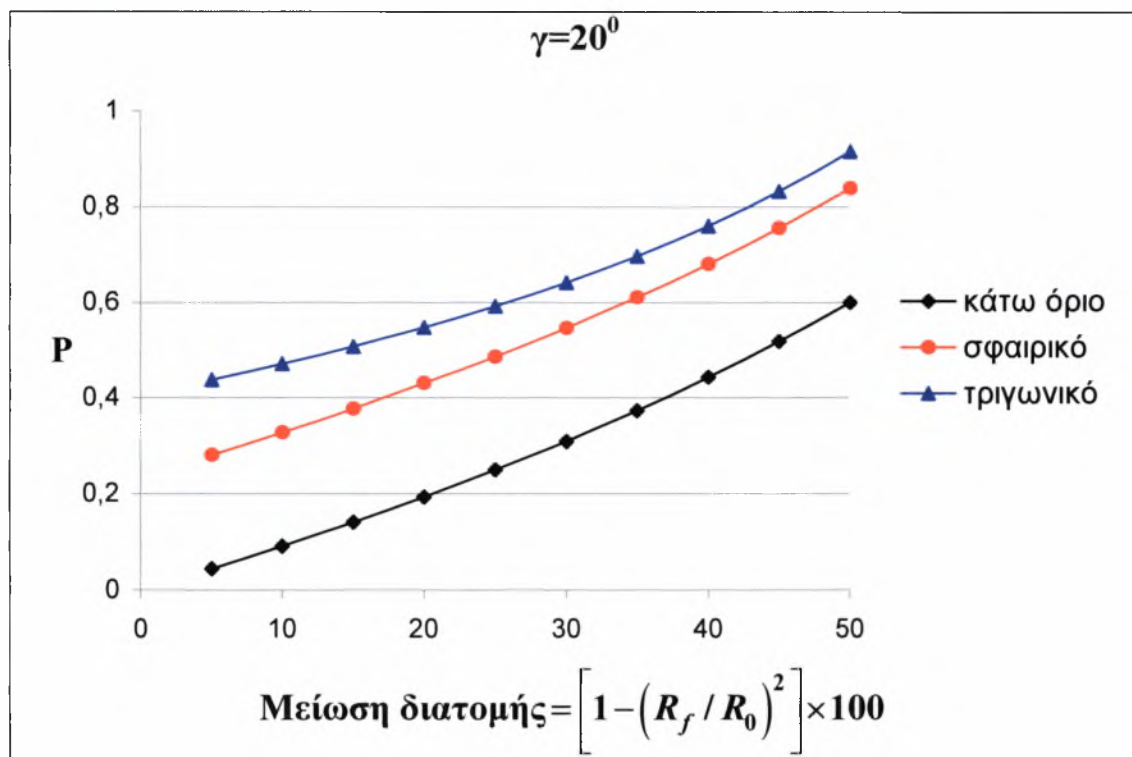
### 3.5 Σύγκριση σφαιρικού και τριγωνικού πεδίου.

Παρακάτω ακολουθούν διαγράμματα στα οποία παρουσιάζονται οι τιμές του άνω φράγματος για το τριγωνικό αλλά και το σφαιρικό πεδίο καθώς επίσης και οι τιμές του κάτω φράγματος που υπολογίστηκε νωρίτερα. Τα διαγράμματα έγιναν για διάφορες τιμές της γωνίας των τοιχωμάτων της μήτρας και της μείωσης της διατομής. Παρατηρούμε πως όσο μειώνεται η γωνία η διαφορά της τιμής του άνω και του κάτω ορίου μειώνεται αισθητά. Όσον αφορά τα δυο πεδία διαπιστώνουμε πως για ορισμένες τιμές της μείωσης και της γωνίας είναι προτιμότερο το τριγωνικό και για κάποιες άλλες το σφαιρικό. Συγκεκριμένα παρατηρούμε πως οι τιμές άνω φράγματος για το σφαιρικό πεδίο είναι πλησιέστερες στο κάτω φράγμα όταν παρουσιάζεται μικρή μείωση της διατομής και όταν έχουμε μεγάλες γωνίες. Αντιθέτως το τριγωνικό υπερτερεί μόνο σε περιπτώσεις μικρών γωνιών και μεγάλων μειώσεων. Οι τιμές των ορίων είναι κανονικοποιημένες με  $2\tau_0$ .

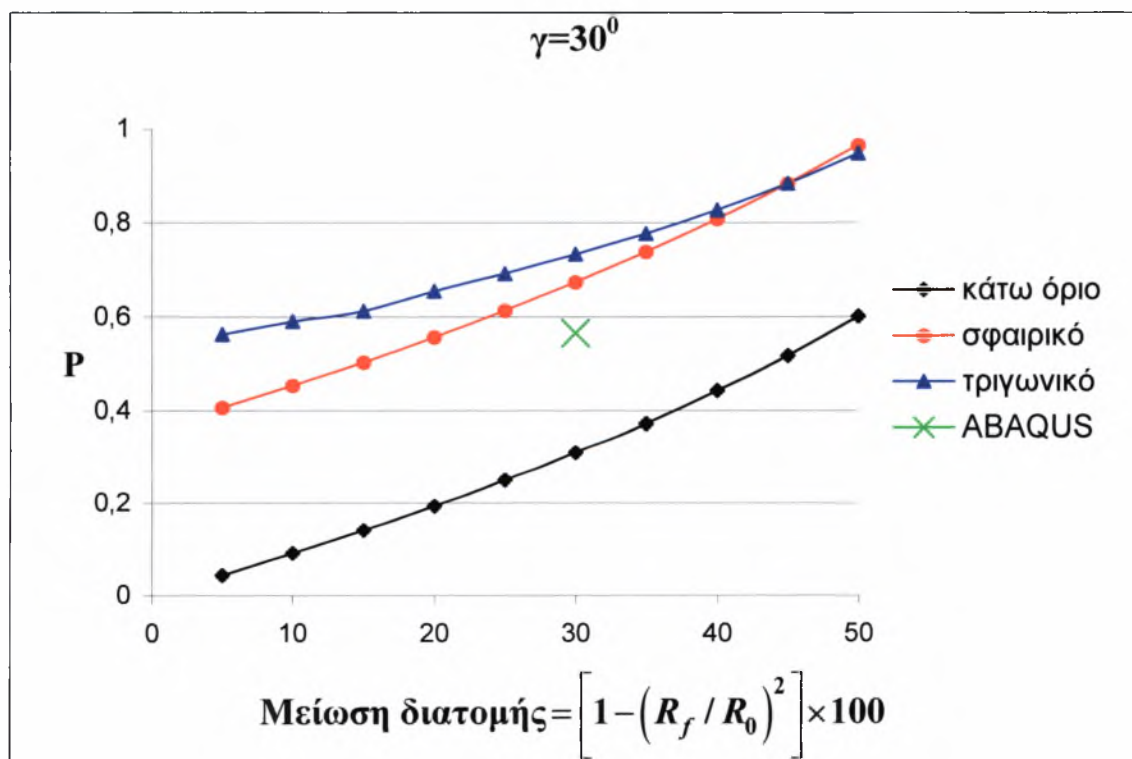


Σχήμα 3.14



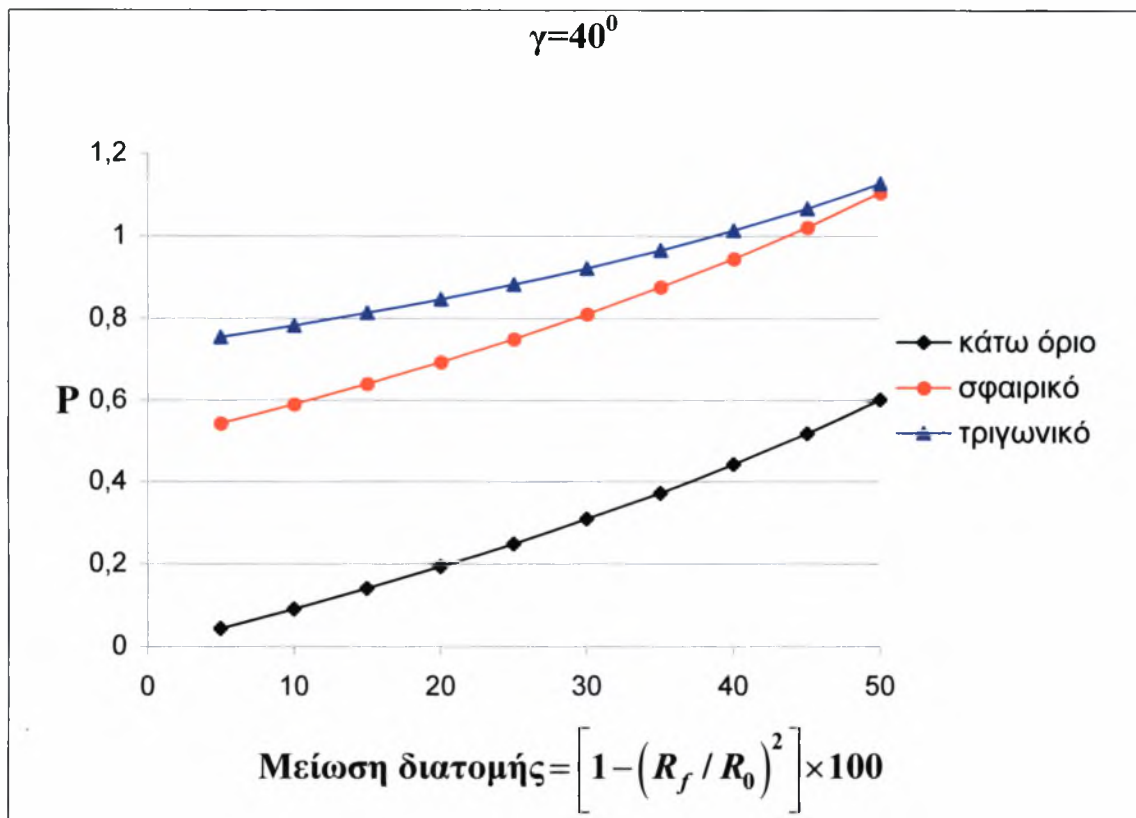


Σχήμα 3.15

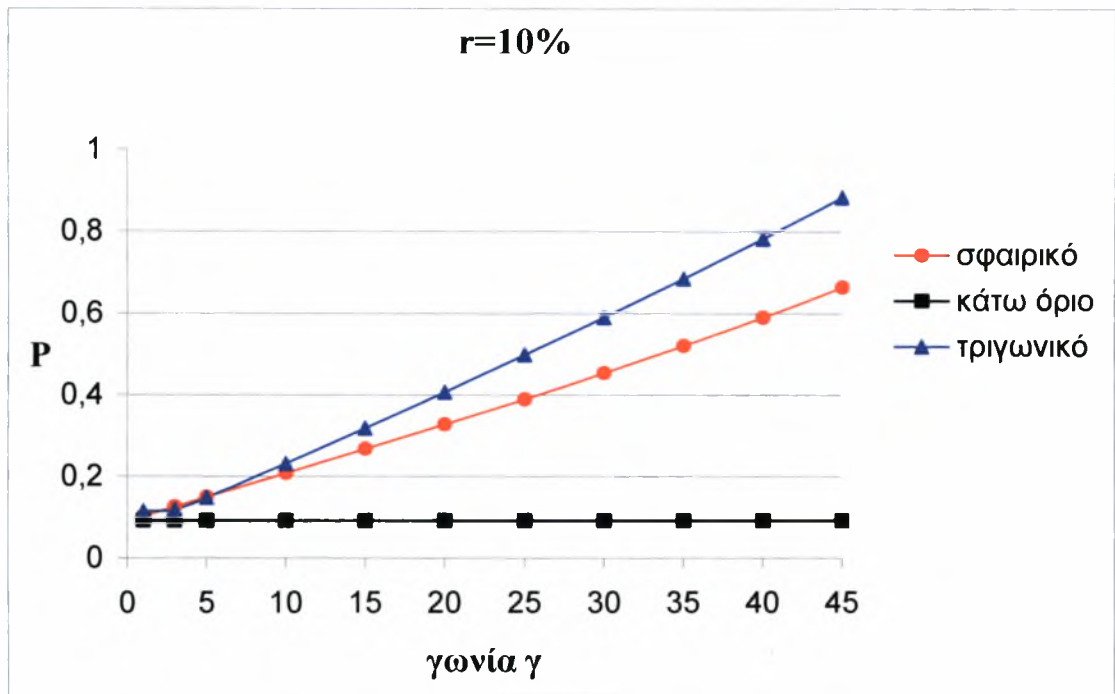


Σχήμα 3.16

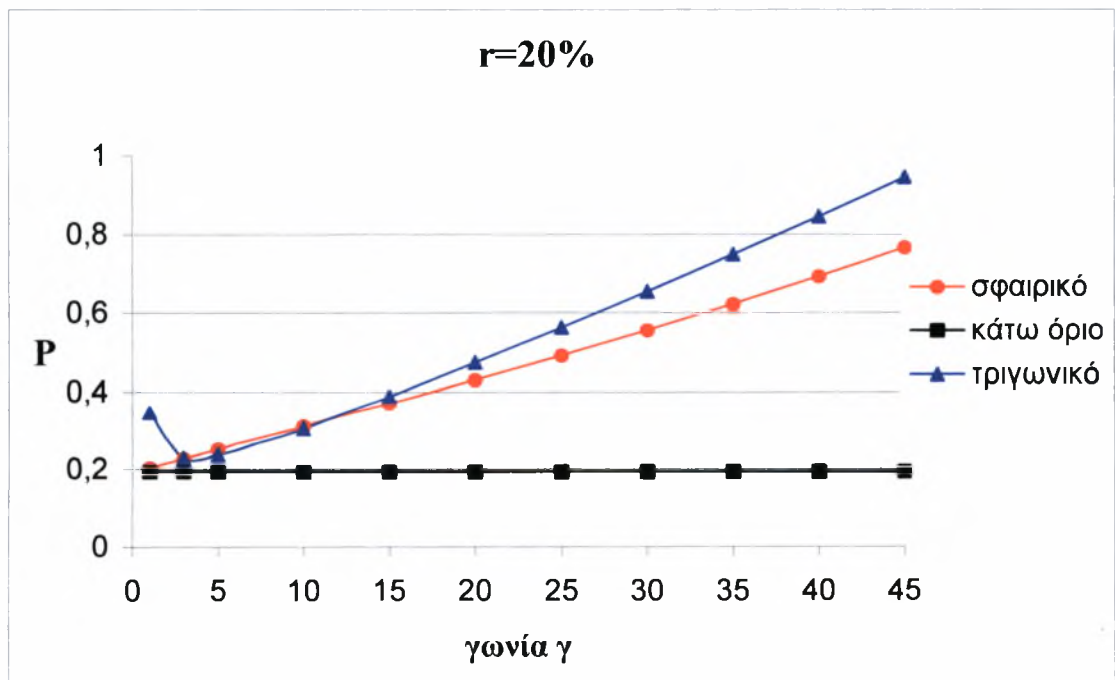
(Με το πράσινο σημείο παρουσιάζεται η τιμή που υπολογίστηκε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.)



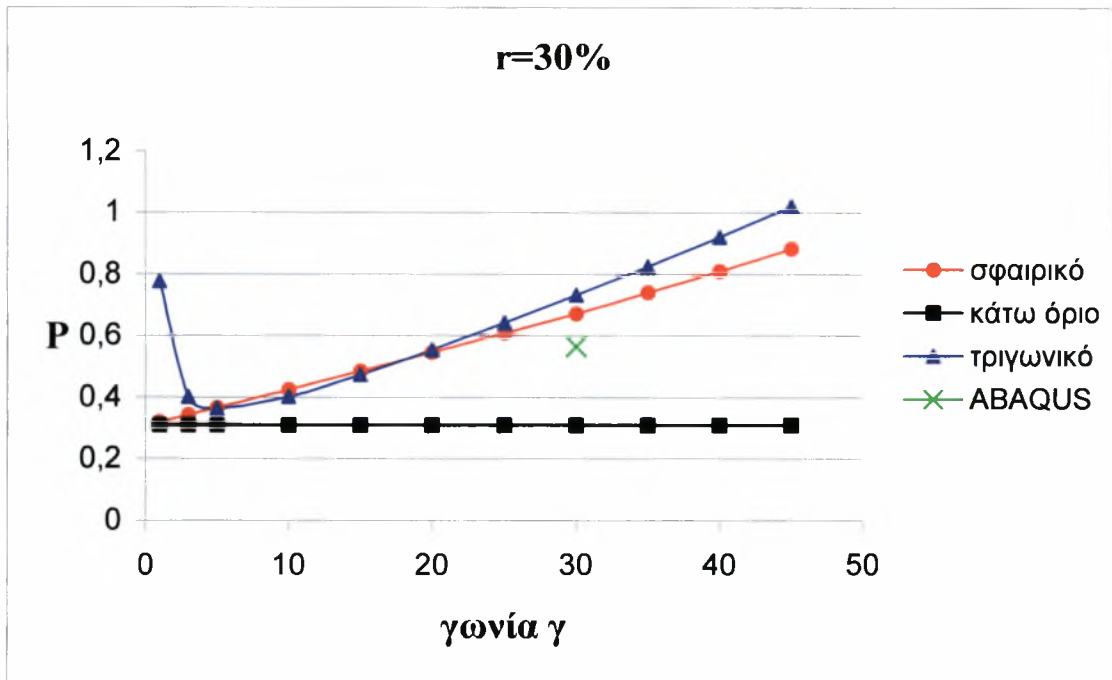
Σχήμα 3.17



Σχήμα 3.18

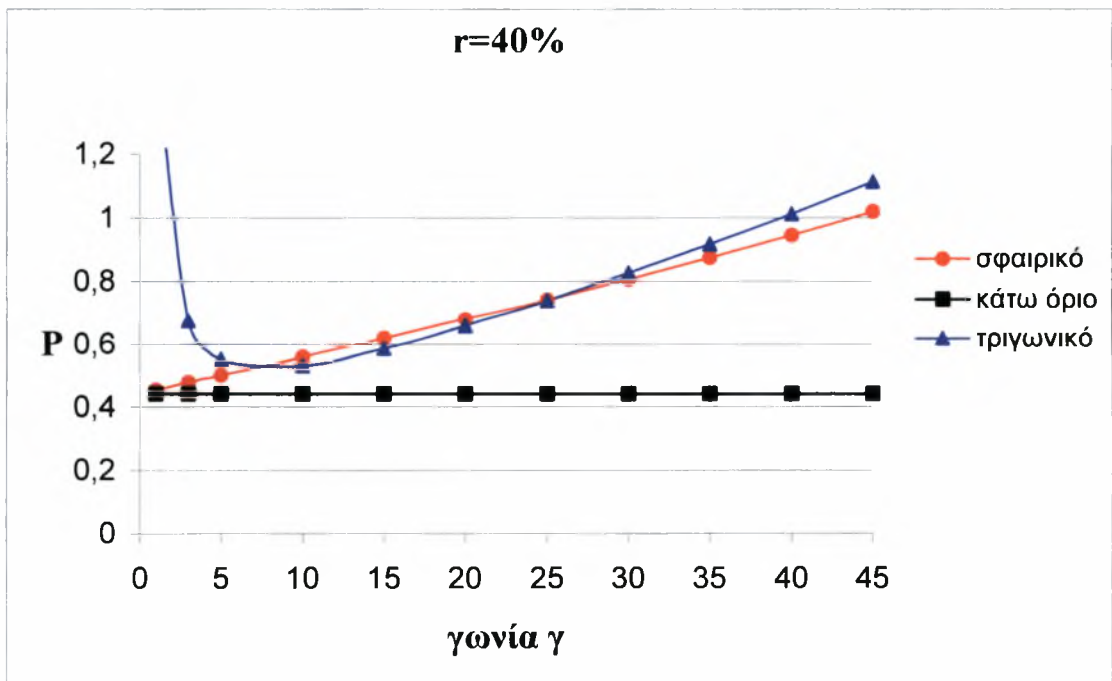


Σχήμα 3.19



Σχήμα 3.20

(Με το πράσινο σημείο παρουσιάζεται η τιμή που υπολογίστηκε με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.)



Σχήμα 3.21

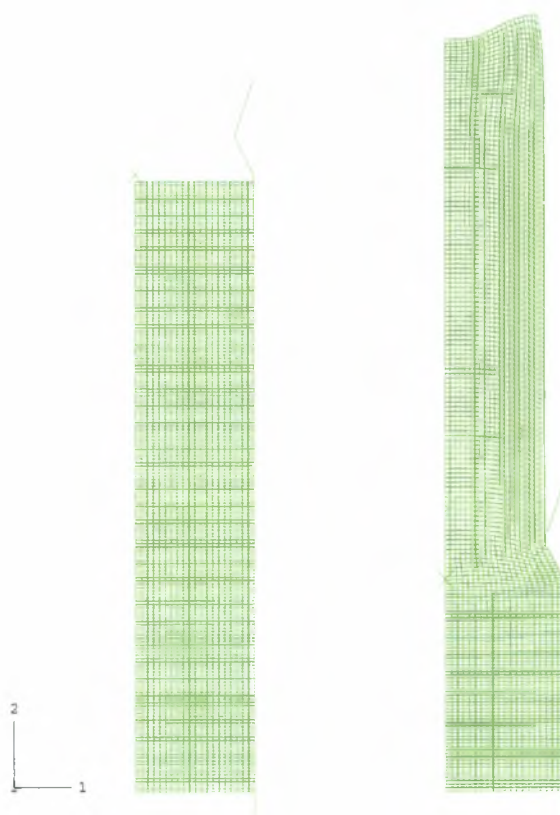
### 3.6 Ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία

#### 3.6.1 Μοντέλο – Γεωμετρία

Το πρόβλημα είναι αξονοσυμμετρικό και επομένως μπορούμε να αναπαραστήσουμε την κατεργασία σε μια ημιτομή σε δυο διαστάσεις κάτι που γίνεται με αξονοσυμμετρικά στοιχεία με οχτώ κόμβους και 9 σταθμούς ολοκλήρωσης (CAX8H). Ο αριθμός των στοιχείων και των κόμβων του πλέγματος είναι ίδιος με αυτόν της επίπεδης παραμόρφωσης, δηλαδή έχουμε συνολικά 3600 στοιχεία και 14801 κόμβους. Το υλικό είναι ελαστικό τέλεια πλαστικό, ενώ οι καταστατικές του παράμετροι είναι  $\sigma_0/E=1/300$  και  $\nu=0,3$ .

Η ανάλυση γίνεται για την ίδια μείωση διατομής με αυτήν της επίπεδης παραμόρφωσης, άρα για μείωση 30%. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ακτίνα του τελικού προϊόντος να είναι:  $R_f = \sqrt{0.7} R_0$ , ενώ η γωνία της μήτρας με τον άξονα συμμετρίας είναι 30 μοίρες.

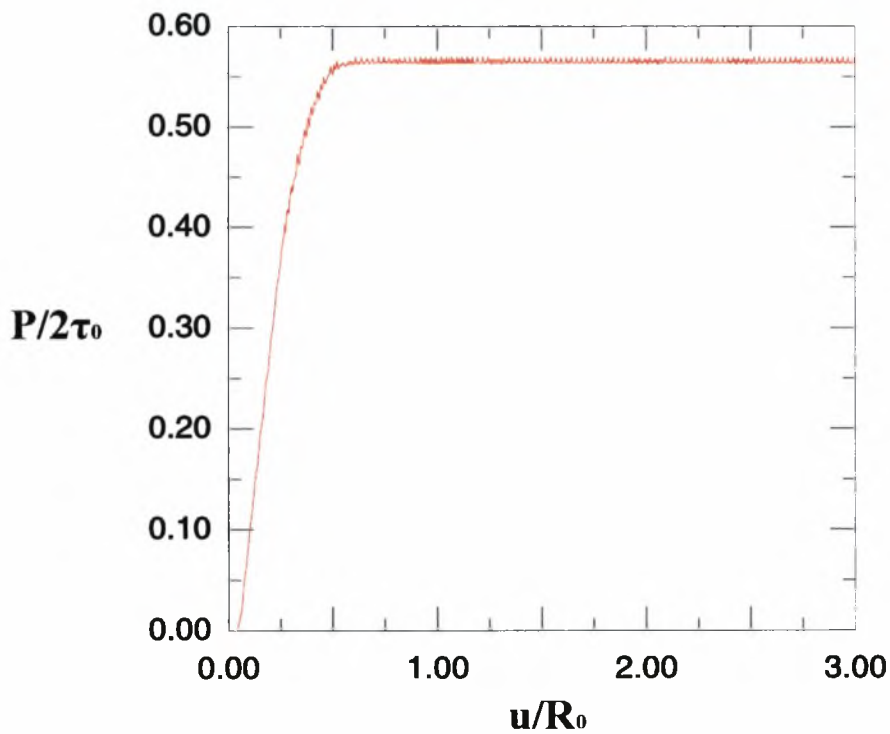
Στο σχήμα 3.22 που ακολουθεί παρουσιάζεται το απαραμόρφωτο και το παραμορφωμένο πλέγμα των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 3.22

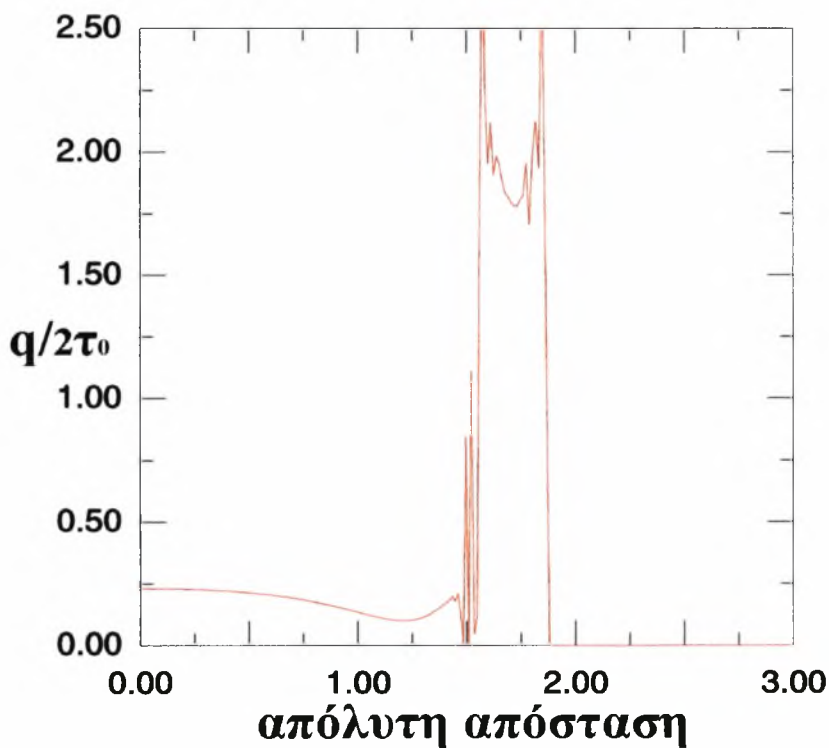
### 3.6.2 Αποτελέσματα

Στο σχήμα 3.23 παρουσιάζεται η οδηγούσα τάση σε συνάρτηση με την μετατόπιση του εμβόλου κανονικοποιημένη με  $2\tau_0$ . Παρατηρούμε ότι η τάση αυξάνεται έως ότου αποκτήσει μια σταθερή (κατά μέσο όρο) τιμή μετά την έξοδο της μπιγιέτας από την μήτρα, όπως άλλωστε συμβαίνει και στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης



Σχήμα 3.23

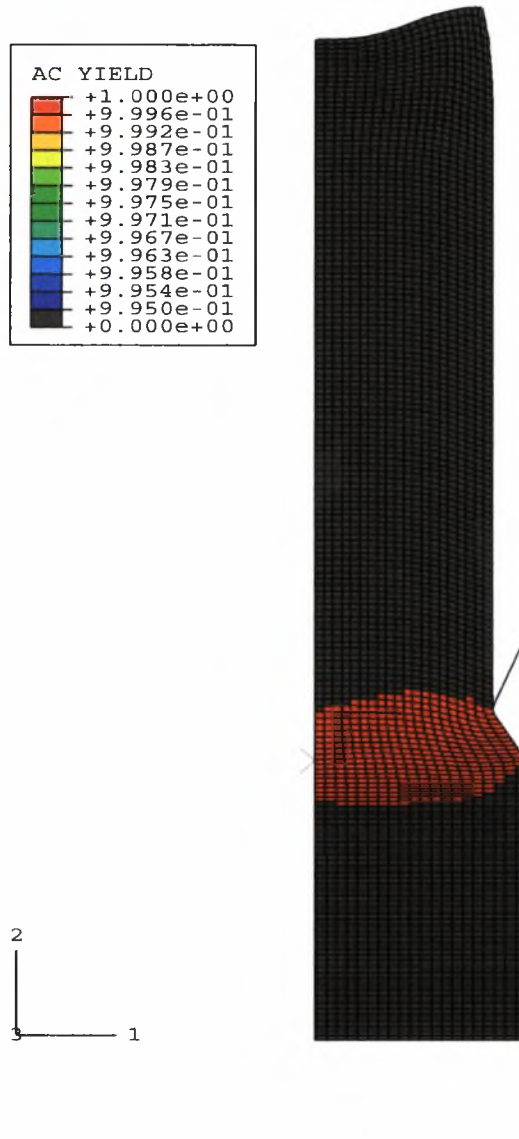
Στο σχήμα 3.24 παρουσιάζεται η κατανομή της πίεσης της μήτρας κατά μήκος της ίνας επαφής. Η πίεση παρουσιάζεται κανονικοποιημένη με  $2\tau_0$ . Παρατηρούμε ότι από την μήτρα ασκείται μια σχεδόν σταθερή τιμή στην περιοχή που επέρχεται μείωση της διατομής. Στην αρχή η τιμή της πίεσεως είναι διάφορη του μηδενός αφού το κάτω μέρος της μπιγιέτας παραμορφώνεται ελαστικά. Τέλος, παρατηρούμε πως η πίεση παίρνει πολύ μεγαλύτερη τιμή στις δυο άκρες της μήτρας, γεγονός που οφείλεται στην αλλαγή της κλίσης του τοιχώματος.



Σχήμα 3.24

### Κεφάλαιο3<sup>0</sup> - Άμεση αξονοσυμμετρική διέλαση

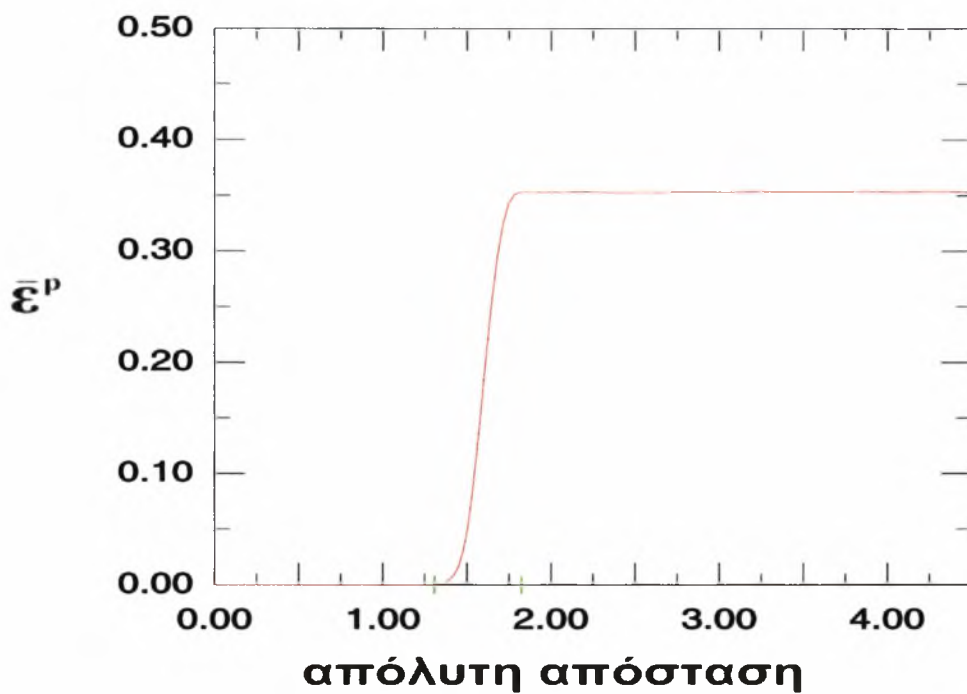
Στο σχήμα 3.25 φαίνονται ποια στοιχεία παραμορφώνονται πλαστικά και ποια όχι. Σε αντίθεση με τη διέλαση ορθογωνικής μπιγιέτας στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα όλα τα στοιχεία εισέρχονται στην πλαστική ζώνη εντός της γεωμετρικής περιοχής της μείωσης.



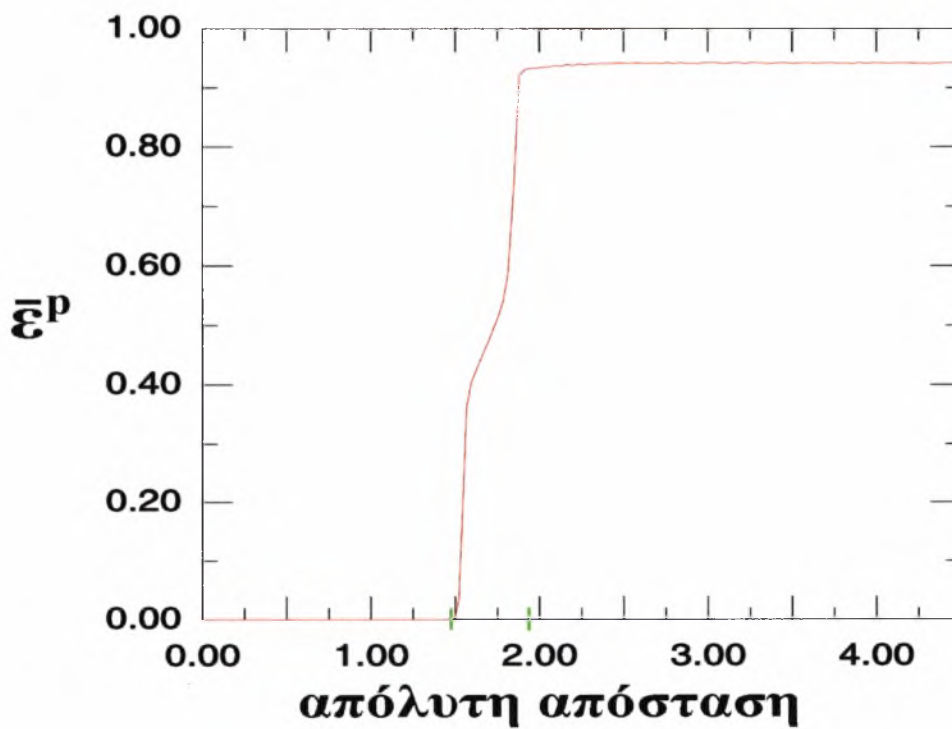
Σχήμα 3.25

Η κατανομή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης  $\bar{\epsilon}^p$  κατά μήκος του άξονα συμμετρίας φαίνεται στο σχήμα 3.26, ενώ κατά μήκος της ίνας επαφής της μπιγιέτας με τη μήτρα φαίνεται στο σχήμα 3.27. Στο διάγραμμα αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε και τη ζώνη παραμόρφωσης η οποία εκτείνεται ανάμεσα στις πράσινες γραμμές.





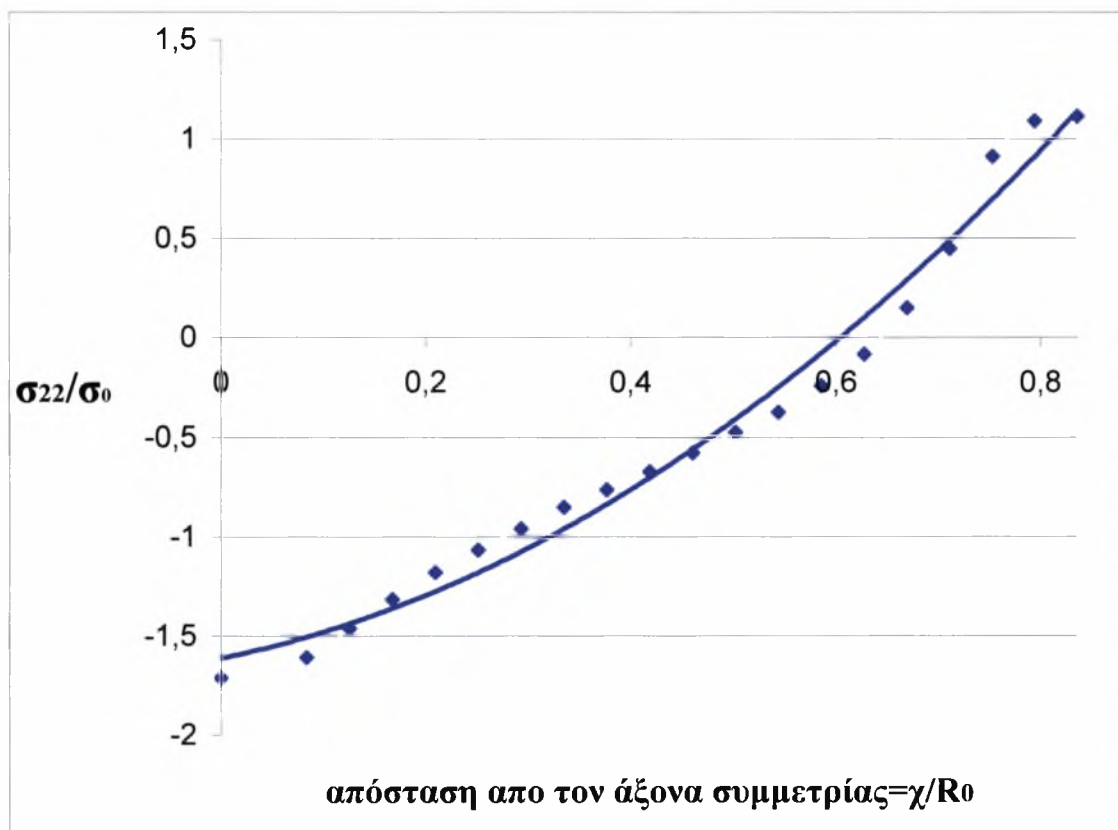
Σχήμα 3.26



Σχήμα 3.27

Τέλος παρουσιάζονται οι παραμένουσες τάσεις  $\sigma_{22}$  σε μια τυχαία διατομή του προϊόντος (σχήμα 3.28). Παρατηρώντας το σχήμα βλέπουμε πως η  $\sigma_{22}$  παραμένει θλιπτική (αρνητικό πρόσημο) για το μεγαλύτερο μέρος της απόστασης από τον άξονα συμμετρίας. Το πρόσημο αλλάζει κοντά στην επιφάνεια του προϊόντος. Σε μόνιμη κατάσταση η κατανομή των τάσεων πρέπει να είναι τέτοια ώστε με μην μεταδίδεται αξονική δύναμη. Εάν δηλαδή  $r$  η ακτίνα του προϊόντος, θα πρέπει να ισχύει:

$$\int_0^R r \sigma_{22} dr = 0.$$



Σχήμα 3.28

(Με τις τελείες συμβολίζονται οι τιμές από το ABAQUS ενώ η καμπύλη αποτελεί μια πολυωνμική συνάρτηση 2<sup>ου</sup> βαθμού που προσεγγίζει τις παραπάνω τιμές)

### 3.6.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων

Η τιμή της οδηγούσας τάσης (κανονικοποιημένη με  $2\tau_0$ ) για μείωση διατομής 30% και γωνία  $30^0$  με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων βρέθηκε  $\frac{P}{2\tau_0}=0.565$ .

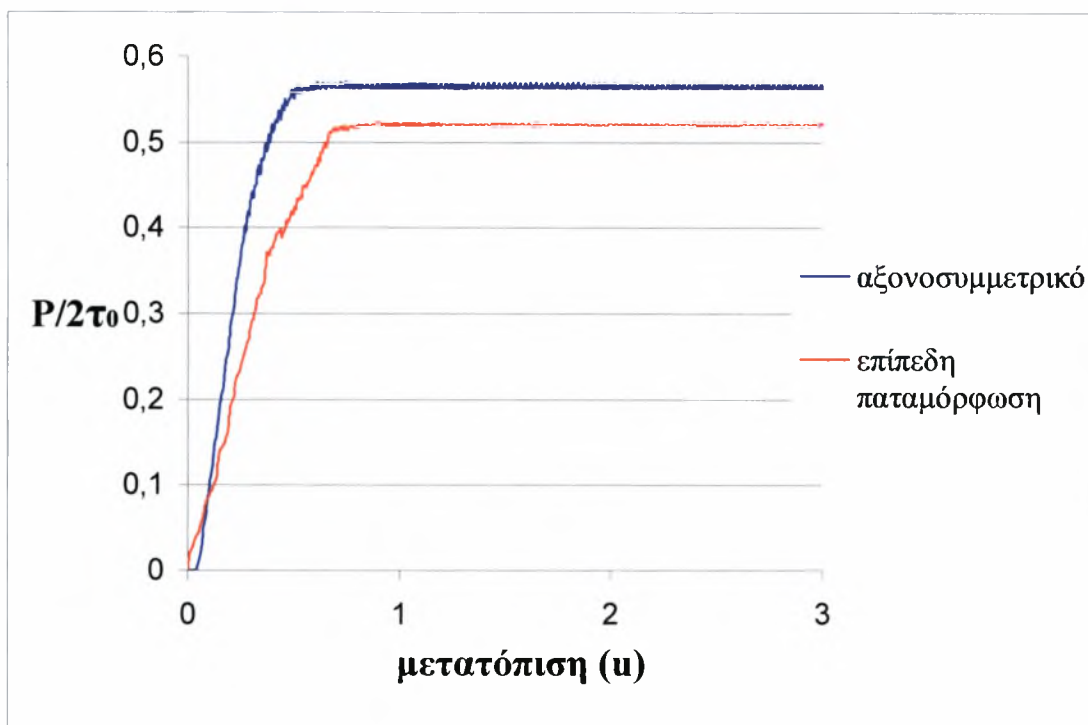
Παρατηρούμε πως η τιμή αυτή βρίσκεται μεταξύ του άνω και κάτω ορίου που υπολογίστηκε για τα δυο πεδία, αφού  $0.30899 \leq 0.565 \leq 0.673$  (για το σφαιρικό) και  $0.30899 \leq 0.565 \leq 0.7312$  (για το τριγωνικό). Αυτό φαίνεται και στα σχήματα 3.16 και 3.20. Επομένως, οι τιμές που υπολογίσθηκαν όντως αποτελούν άνω και κάτω όρια. Επίσης παρατηρούμε πως η τιμή αυτή βρίσκεται πιο κοντά στα άνω όρια. Ίσως η ανάλυση με χρήση ενός διαφορετικού πεδίου να μπορέσει να δώσει καλύτερα αποτελέσματα γιατί όπως βλέπουμε οι τιμές διαφέρουν αρκετά μεταξύ τους για τα συγκεκριμένα δεδομένα. Όμως είδαμε πως οι τιμές των άνω και κάτω ορίων έχουν μικρή διαφορά για μικρές γωνίες, οπότε είναι σίγουρο πως σε μια τέτοια περίπτωση η τιμή που υπολογίζεται με τα πεπερασμένα στοιχεία θα βρίσκεται πολύ κοντά στα κάτω και άνω όρια.

## Κεφάλαιο 4

### Σύγκριση επίπεδης παραμόρφωσης- άμεσης αξονοσυμμετρικής διέλασης

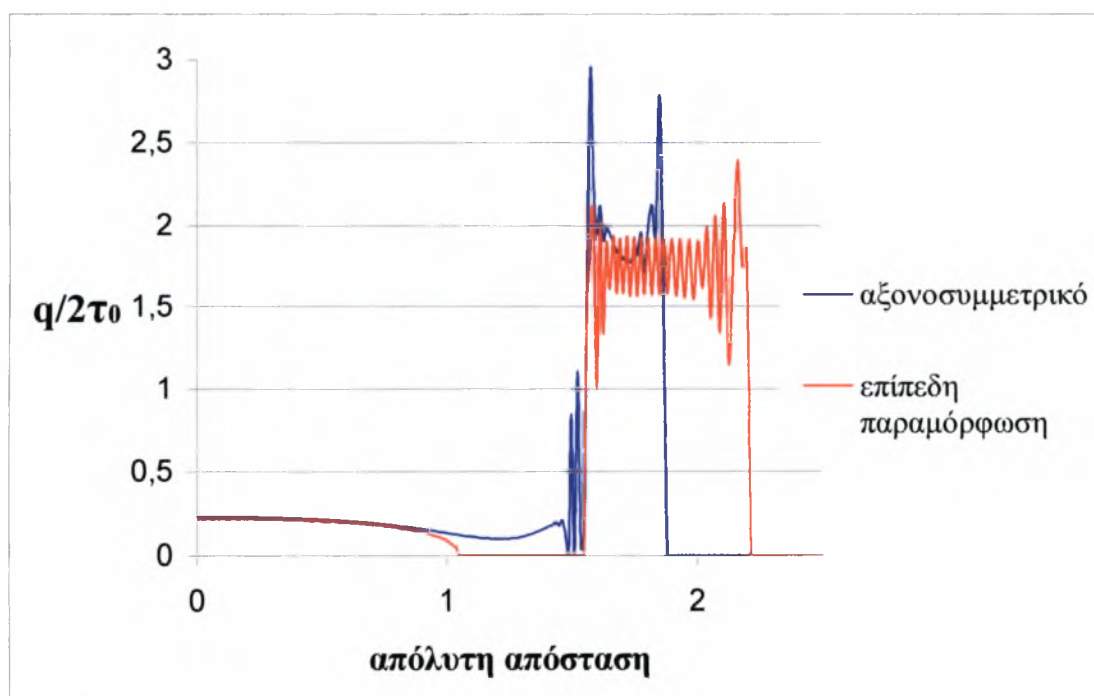
Αφού έγινε μια ολοκληρωμένη ανάλυση της επίπεδης παραμόρφωσης και του αξονοσυμμετρικού προβλήματος, χρήσιμο θα ήταν να γίνει μια σύγκριση των αποτελεσμάτων.

Μεγάλη σημασία θα είχε να συγκρίνουμε την τιμή της οδηγούσας τάσης που υπολογίστηκε για κάθε μια από τις περιπτώσεις. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.1 η σταθερή τιμή της τάσης στην περίπτωση της άμεσης αξονοσυμμετρικής διέλασης είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή της επίπεδης παραμόρφωσης. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η επιφάνεια της μήτρας που αντιστέκεται στην κίνηση της μπιγιέτας είναι αρκετά μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της επίπεδης παραμόρφωσης, με αποτέλεσμα να υπάρχει μεγαλύτερος περιορισμός στην ροή του υλικού. Όπως γνωρίζουμε ο ρυθμός του πλαστικού έργου της κατεργασίας προκύπτει από το γινόμενο της οδηγούσας δύναμης με την ταχύτητα της μπιγιέτας. Στην περίπτωση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος έχουμε μεγαλύτερες πλαστικές παραμορφώσεις, οπότε και μεγαλύτερο ρυθμό πλαστικού έργου σε σχέση με το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης. Κατά συνέπεια, η παρατήρηση ότι η οδηγούσα τάση είναι μεγαλύτερη επιβεβαιώνει τα παραπάνω. Το γεγονός ότι οι δυο πίες δεν αποκτούν τη σταθερή τους τιμή για την ίδια μετατόπιση οφείλεται στο ότι στο αξονοσυμμετρικό πρόβλημα η μήτρα έχει μικρότερο μήκος.



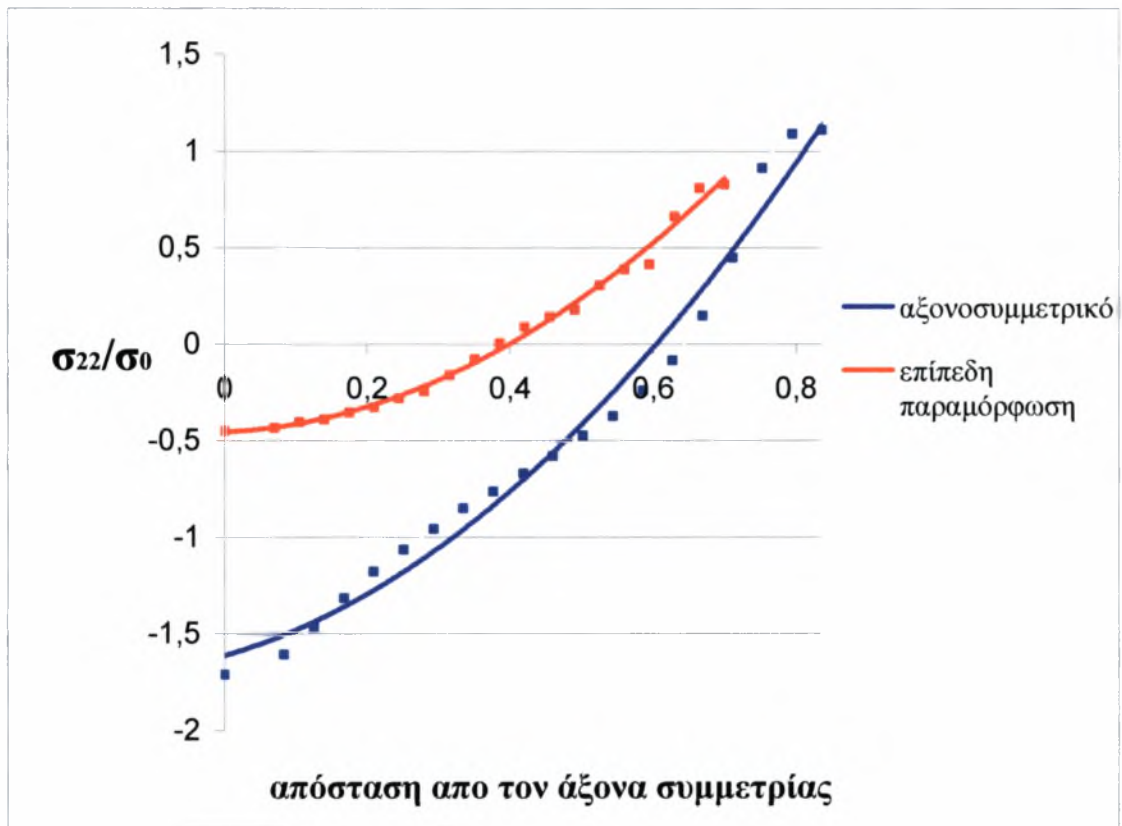
Σχήμα 4.1

Επίσης μπορούμε να δούμε στο σχήμα 4.2 ότι η αντίδραση της μήτρας είναι λίγο μεγαλύτερη στην περίπτωση του αξονοσυμμετρικού προβλήματος.



Σχήμα 4.2

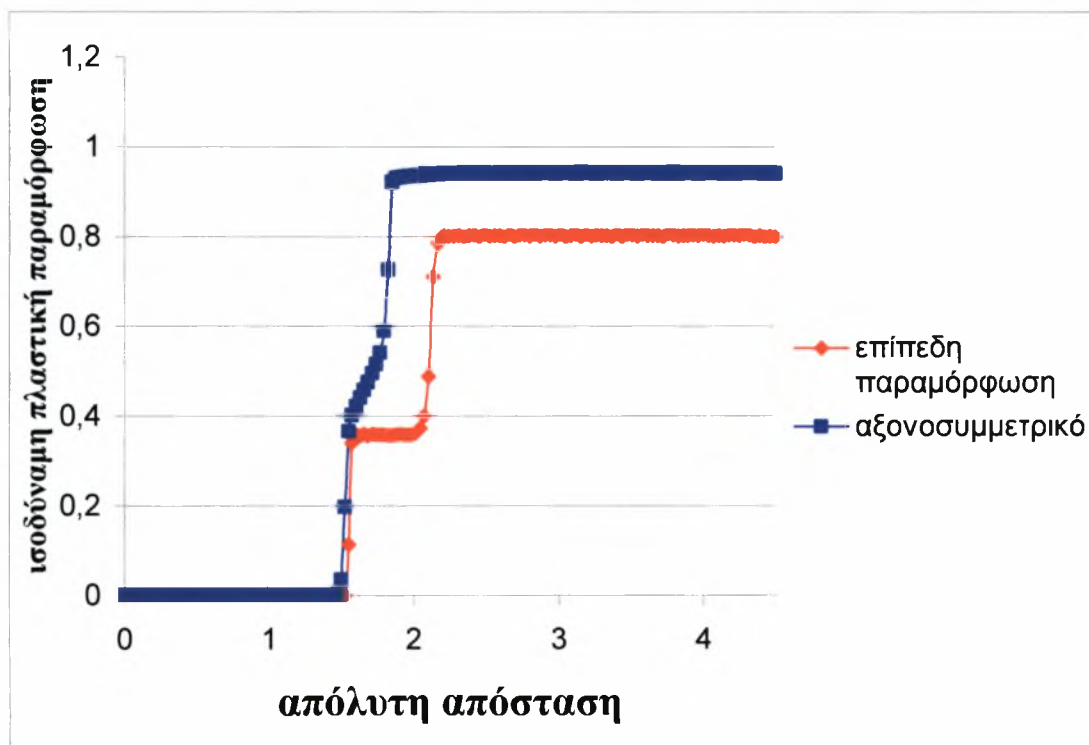
Στο σχήμα 4.3 συγκρίνονται οι παραμένουσες τάσεις που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια της αξονοσυμμετρικής διέλασης με τις αντίστοιχες της επίπεδης παραμόρφωσης. Παρατηρούμε πως οι παραμένουσες στο αξονοσύμμετρικό πρόβλημα είναι αρκετά μεγαλύτερες, αφού υπάρχει μεγαλύτερος περιορισμός στην περίπτωση αυτή.



Σχήμα 4.3

Όπως αναφέραμε και κατά την ανάλυση των προβλημάτων ισχύει  $\frac{h}{H} = 0.7$  στην επίπεδη παραμόρφωση και  $\frac{R_f}{R_0} = \sqrt{0.7}$  στην αξονοσυμμετρική διέλαση. Αυτό δικαιολογεί το γεγονός ότι τα δύο διαγράμματα δεν σταματούν στο ίδιο σημείο.

Από το συγκριτικό διάγραμμα που ακολουθεί (σχήμα 4.4) συμπεραίνουμε πως περισσότερα στοιχεία παραμορφώνονται πλαστικά στην περίπτωση της άμεσης αξονοσυμμετρικής διέλασης κατά μήκος της ίνας επαφής μήτρα-μπιγιέτα. Επίσης, παρατηρούμε πως η τιμή της ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της αξονοσυμμετρικής διελάσεως.



Σχήμα 4.4

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ΚΩΔΙΚΑΣ ΑΒΑQUS ΓΙΑ ΕΠΙΠΕΔΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ



```

*HEADING
EXTRUSION
*RESTART,WRITE,FREQ=100
*NODE
  1, 0., -4.55
  41, 1., -4.55
14761, 0., -0.05
14801, 1., -0.05
*NODE
100000, 0., 0.
*NGEN,NSET=BOTTOM
1,41
*NGEN,NSET=TOP
14761,14801
*NFILL
BOTTOM, TOP, 360, 41
*NSET,NSET=LEFT, GENERATE
1, 14761, 41
*NSET,NSET=RIGHT, GENERATE
41, 14801, 41
**
*NODE,NSET=STIX
200000, 0., 0.
**
*ELEMENT,TYPE=CPE8H,ELSET=ALL
1,1,3,85,83,2,44,84,42
*ELGEN,ELSET=ALLE
1,180,82,20,20,2,1
**
**
*MATERIAL,NAME=METAL
*ELASTIC
300.,0.3
*PLASTIC
1.,0.
*SOLID SECTION,ELSET=ALLE,MATERIAL=METAL
**
**
*SURFACE,TYPE=SEGMENTS,NAME=RIGID,FILLET RADIUS=0.05
START, 1. , -5.
LINE, 1. , 0.
LINE, 0.7, 0.51961524
LINE, 1. , 1.
*RIGID BODY,ANALYTICAL SURFACE=RIGID,REF NODE=100000
**
*ELSET,ELSET=CONTACT,GENERATE
20, 3600, 20
*SURFACE,NAME=OUT,TYPE=ELEMENT
CONTACT
**

```

```

*CONTACT PAIR,INTERACTION=ONE
OUT, RIGID
*SURFACE INTERACTION,NAME=ONE
**FRICTION,TAUMAX=0.577
** 0.1
**
**
*BOUNDARY
LEFT,1,1
100000,1,6
200000,1,1
200000,3,6
**
*EQUATION
2
BOTTOM,2,1.,200000,2,-1.
**
*STEP,INC=3000,NLGEOM
*STATIC
0.005,3.,,0.005
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
5.D-3
*BOUNDARY
STIX,2,2,3.
**
*OUTPUT,FIELD,FREQUENCY=1,VARIABLE=PRESELECT
*ELEMENT OUTPUT
S,PE
*NODE OUTPUT
U
*OUTPUT,HISTORY,FREQUENCY=1
*NODE OUTPUT,NSET=STIX
RF2, U2
*NODE FILE,FREQUENCY=1,NSET=STIX
RF
*END STEP

```

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΚΩΔΙΚΑΣ ABAQUS ΓΙΑ ΑΞΟΝΟΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΔΙΕΛΑΣΗ

```

*HEADING
EXTRUSION
*RESTART,WRITE,FREQ=100
*NODE
  1, 0., -4.55
  41, 1., -4.55
14761, 0., -0.05
14801, 1., -0.05
*NODE
100000, 0., 0.
*NGEN,NSET=BOTTOM
1,41
*NGEN,NSET=TOP
14761,14801
*NFILL
BOTTOM, TOP, 360, 41
*NSET,NSET=LEFT, GENERATE
1, 14761, 41
*NSET,NSET=RIGHT, GENERATE
41, 14801, 41
**
*NODE,NSET=STIX
200000, 0., 0.
**
*ELEMENT,TYPE=CAX8H,ELSET=ALL
1,1,3,85,83,2,44,84,42
*ELGEN,ELSET=ALLE
1,180,82,20,20,2,1
**
**
*MATERIAL,NAME=METAL
*ELASTIC
300.,0.3
*PLASTIC
1.,0.
*SOLID SECTION,ELSET=ALLE,MATERIAL=METAL
**
**
*SURFACE,TYPE=SEGMENTS,NAME=RIGID,FILLET RADIUS=0.05
START, 1. , -5.
LINE, 1. , 0.
LINE, 0.8366, 0.283017102
LINE, 1. , 0.7
*RIGID BODY,ANALYTICAL SURFACE=RIGID,REF NODE=100000
**
*ELSET,ELSET=CONTACT,GENERATE
20, 3600, 20
*SURFACE,NAME=OUT,TYPE=ELEMENT
CONTACT

```

```

**
*CONTACT PAIR,INTERACTION=ONE
  OUT, RIGID
*SURFACE INTERACTION,NAME=ONE
**FRICTION,TAUMAX=0.577
** 0.1
**
**
*BOUNDARY
  LEFT,1,1
    100000,1,6
    200000,1,1
    200000,3,6
**
*EQUATION
  2
  BOTTOM,2,1.,200000,2,-1.
**
*STEP,INC=3000,NLGEOM
*STATIC
  0.005,3.,,0.005
*CONTROLS,PARAMETERS=FIELD,FIELD=DISPLACEMENT
  5.D-3
*BOUNDARY
  STIX,2,2,3.
**
*EL PRINT,ELSET=CONTACT,POSITION=CENTROIDAL,FREQUENCY=200
  PE
**
**
*OUTPUT,FIELD,FREQUENCY=1,VARIABLE=PRESELECT
*ELEMENT OUTPUT
  S,PE
*NODE OUTPUT
  U
*OUTPUT,HISTORY,FREQUENCY=1
*NODE OUTPUT,NSET=STIX
  RF2, U2
*NODE FILE,FREQUENCY=1,NSET=STIX
  RF
*END STEP

```

## **Βιβλιογραφία**

- Betzalel Avitzur. Limit Analysis of Flow Thru Conical Converging Dies.
- R.Hill. The mathematical theory of elastoplasticity.
- Ν.Δ. Νικόλαος Χασιώτης. Πανεπιστημιακές παραδόσεις (1999-2000)  
Εργαλειομηχανές και Τεχνολογία Διαμορφώσεων.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000074014

