

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ  
ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΤΙΚΟΣ ΤΟΜΕΑΣ

---

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΤΙΤΛΟΣ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ  
ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΑΠΟΚΟΛΛΗΣΗΣ ΣΕ  
ΑΝΑΓΚΥΡΩΤΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ ΥΓΡΟΥ**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΝΑΤΣΙΑΒΑΣ ΣΩΤΗΡΙΟΣ**

**ΕΚΠΟΝΗΤΕΣ: ΛΟΥΠΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ  
ΠΑΝΟΥΡΓΙΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ**

**ΒΟΛΟΣ Οκτώβριος 1995**

---



αρ. εισ. .... 20 / 1995

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



004000010961



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»

Αριθ. Εισ.: 2317/1

Ημερ. Εισ.: 29-05-1996

Δωρεά:

Ταξιδετικός Κωδικός: ΠΤ - ΜΜΒ

1995

ΛΟΥ

Την εργασία αυτή αφιερώνουμε στους γονείς μας.

Ευχαριστούμε θερμά τον επίκουρο καθηγητή κ. Σωτήριο Νατσιάβα για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθώς επίσης και για την εξαιρετική συνεργασία κατά την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ΑΝΑΛΥΣΗ.....</b>	<b>5</b>
<b>2.1 Ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο .....</b>	<b>5</b>
<b>2.2 Μελέτη δοκού.....</b>	<b>9</b>
2.2.1 Εισαγωγή - Παραδοχές .....	9
2.2.2 Ελαστική γραμμή .....	14
<b>2.3 Μελέτη πλάκας και κελύφους .....</b>	<b>19</b>
2.3.1 Διαφορικές εξισώσεις για κάμψη κυκλικών πλακών....	19
2.3.2 Εξισώσεις για την κάμψη πλακών σε πολικές συντεταγμένες.....	25
2.3.3 Κυκλικά κυλινδρικά κελύφη φορτισμένα συμμετρικά ως προς τους άξονες τους. ....	32
2.3.4 Κυλινδρικές δεξαμενές με ομοιόμορφο πάχος τοιχώματος .....	38
<b>3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ....</b>	<b>40</b>
<b>3.1 Επίλυση μοντέλου δοκού .....</b>	<b>40</b>
3.1.1 Διάγραμμα δύναμης - ανύψωσης.....	40
3.1.2 Αδιαστατοποιημένο διάγραμμα δύναμης - ανύψωσης	48
3.1.3 Διάγραμμα ροπής - ανύψωσης .....	50
3.1.4 Διάγραμμα δύναμης, αδιάστατης δύναμης και ροπής για την πραγματική δεξαμενή .....	57
<b>3.2 Επίλυση μοντέλου πλάκας και κελύφους .....</b>	<b>60</b>
3.2.1 Κατάστρωση εξισώσεων πλάκας .....	60
3.2.2 Κατάστρωση εξισώσεων κελύφους .....	64

3.2.3 Αντιστοιχία εξισώσεων πλάκας και κελύφους ..... 67

3.2.4 Σύνοψη εξισώσεων μη γραμμικού συστήματος..... 70

**4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ -ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ .....73**

**5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Α) ..... 75**

Επεξήγηση συμβόλων ..... 75

**6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ -ΑΝΑΦΟΡΕΣ..... 77**

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

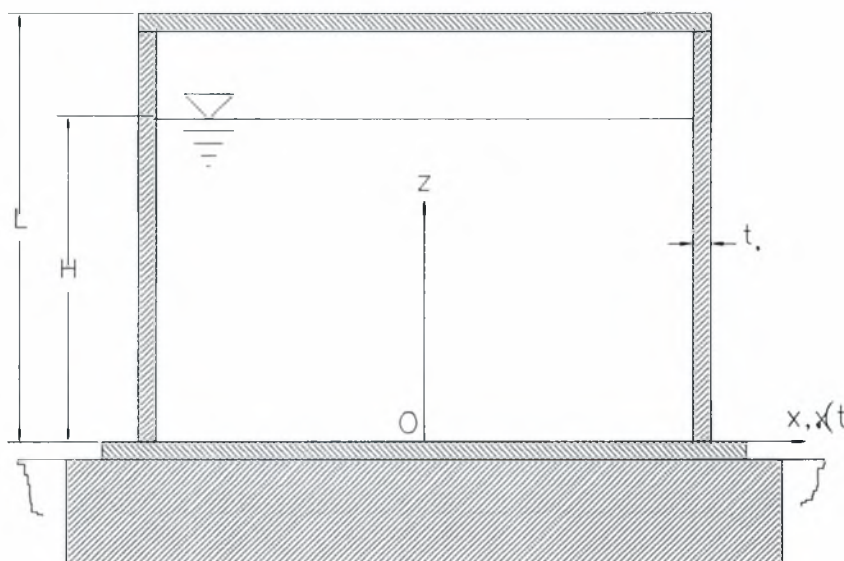
Κυλινδρικές δεξαμενές χρησιμοποιούνται ευρύτατα για την αποθήκευση υγρών (νερού, καυσίμων, κ.λ.π.), σε πολλές βιομηχανικές εφαρμογές. Αυτό οφείλεται στην εύκολη και οικονομική κατασκευή τους καθώς και τον κατασκευαστικά ευνοϊκό τρόπο με τον οποίο δέχονται τις πιέσεις των υγρών περιεχομένων τους κάτω από στατικές συνθήκες φόρτισης. Όμως, κατά τη διάρκεια σεισμικής διέγερσης, αναπτύσσονται υδροδυναμικά φορτία και υψηλές εσωτερικές τάσεις που συχνά οδηγούν σε καταστροφή της δεξαμενής.

Για την πρόβλεψη και αποφυγή τέτοιων καταστροφών αναπτύχθηκε σημαντικό ερευνητικό έργο σε όλη τη διάρκεια των τελευταίων τεσσάρων δεκαετιών. Σαν αποτέλεσμα των ερευνητικών αυτών προσπαθειών είναι πλέον δυνατός ο υπολογισμός των φορτίων και τάσεων που αναπτύσσονται στα τοιχώματα δεξαμενών υγρών κατά τη διάρκεια της σεισμικής διέγερσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις της πράξης τα αναπτυσσόμενα υδροδυναμικά φορτία είναι αρκετά υψηλά, ώστε να προκαλείται αποκόλληση της βάσης της δεξαμενής από τα θεμέλιά της. Το φαινόμενο αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, την εμφάνιση υψηλότερης συγκέντρωσης τάσης στη βάση και επιφέρει ριζικές αλλαγές στην ταλαντωτική συμπεριφορά της μηχανικής διάταξης, που δεν μπορεί να περιγραφεί πλέον με γραμμικά μοντέλα και ανάλυση.

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι ο υπολογισμός του ισοδύναμου ελατηρίου αποκόλλησης στη βάση αναγκύρωτων

δεξαμενών υγρού. Ισοδύναμο ελατήριο αποκόλλησης είναι ένα ισοδύναμο ελατήριο στο κέντρο της βάσης της δεξαμενής το οποίο εκφράζει την αποκόλλησή της. Η αποκόλληση προξενεί απώλεια στιβαρότητας στη βάση της δεξαμενής. Αναγκύρωτες ονομάζονται οι δεξαμενές οι οποίες είναι τοποθετημένες πάνω στη θεμελίωσή τους χωρίς να υπάρχει κάποιος τρόπος σύνδεσης. Για να γίνει ο υπολογισμός του ελατηρίου αποκόλλησης αρκεί να υπολογισθεί η καμπύλη μεταβολής της ροπής που δημιουργείται κατά την ανύψωση της δεξαμενής ως προς αυτή την ανύψωση. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με βάση αποτελέσματα που προκύπτουν από κατάλληλες στατικές αναλύσεις.

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά μιας τέτοιας δεξαμενής γεμισμένης με υγρό φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα:



Σχήμα 1

Για να κατασκευαστεί το διάγραμμα ροπής - ανύψωσης που θα δώσει τα χαρακτηριστικά του ελατηρίου αποκόλλησης αρχικά θα θεωρηθεί ένα ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο δεξαμενής γεμισμένο με

νερό φτιαγμένο από πλαστικό και με κωδική ονομασία IIB2. Γι' αυτό το μοντέλο υπάρχουν τα διαγράμματα ροπής - ανύψωσης για τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού τα οποία θα συγκριθούν με τα αποτελέσματα από τη θεωρητική ανάλυση. Έτσι θα φανεί πόση απόκλιση υπάρχει ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα και τα θεωρητικά αποτελέσματα.

Στη συνέχεια θα γίνει και το διάγραμμα ροπής ανύψωσης για μια πραγματική δεξαμενή παίρνοντας και εδώ τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού. Η δεξαμενή ανήκει στις Χημικές Βιομηχανίες Βορείου Ελλάδος (διάμετρος 5m και ύψος 8m) και είναι γεμισμένη με 98% θειικό οξύ σε νερό το οποίο έχει πυκνότητα  $640\text{kg/m}^3$ .

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, μετά την εισαγωγή, γίνεται αναφορά στις δύο δεξαμενές που θα μελετηθούν από τις οποίες η πρώτη είναι ένα ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο δεξαμενής και η δεύτερη είναι μια πραγματική δεξαμενή. Το μοντέλο είναι γεμισμένο με νερό ενώ η πραγματική δεξαμενή με 98% διαλυμένο θειικό οξύ. Η μελέτη και για τις δύο δεξαμενές θα γίνει για τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρατίθενται οι δύο μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος έτσι ώστε να γίνουν τα διαγράμματα ροπής-ανύψωσης. Ακολουθήθηκαν οι εξής δύο κατευθύνσεις:

α') Στην πρώτη, από όλη τη δεξαμενή λαμβάνεται υπόψη μόνο η βάση της και αγνοείται το κυλινδρικό τοίχωμα. Από τη βάση της δεξαμενής η οποία είναι κυκλική λαμβάνεται μια στοιχειώδη λωρίδα η οποία θα θεωρηθεί ως δοκός. Γι' αυτή τη δοκό μπορεί να εφαρμοστεί η τεχνική θεωρία κάμψης για να υπολογιστεί η ελαστική γραμμή ή βέλος κάμψης  $w(x)$  της δοκού. Η ελαστική γραμμή



προέρχεται από την ανύψωση της δεξαμενής η οποία οφείλεται σ' ένα σεισμό γνωστής έντασης ο οποίος προσωμοιώνεται με μια κατακόρυφη δύναμη  $Q_0$  που ανυψώνει τη δεξαμενή και εφαρμόζεται στο δεξί άκρο της δοκού. Λόγω της ανύψωσης μια ροπή  $M_0$  δημιουργείται στο δεξί άκρο της δοκού η οποία θα θεωρηθεί μηδενική στους υπολογισμούς για την πρώτη μέθοδο. Ένα ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο ασκείται κατά μήκος της επιφάνειας της δοκού το οποίο προέρχεται από τις δυνάμεις του περιεχομένου υγρού της δεξαμενής. Από την τελική σχέση που δίνει το βέλος κάμψης μπορεί να γίνει το διάγραμμα ροπής-ανύψωσης.

β') Στη δεύτερη μέθοδο εκτός από την βάση της δεξαμενής, η οποία θα θεωρηθεί ως πλάκα, θα ληφθεί υπόψη και το κυλινδρικό τοίχωμα το οποίο θα θεωρηθεί ως κέλυφος. Επιπλέον η δημιουργούμενη ροπή  $M_0$  στην ένωση της βάσης της δεξαμενής με το κέλυφος δεν θα θεωρηθεί τώρα μηδενική. Τα βασικά μέρη της μεθοδολογίας που θα ακολουθηθεί εδώ είναι α) κατάστρωση των εξισώσεων της πλάκας, β) κατάστρωση των εξισώσεων του κελύφους και γ) αντιστοιχία εσωτερικών δυνάμεων και φορτίων ανάμεσα στην πλάκα και στο κέλυφος. Έτσι θα προκύψει τελικά ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Αριθμητική επίλυση του συστήματος αυτού προσδιορίζει την επιζητούμενη σχέση μεταξύ της συνισταμένης ροπής και της αποκόλλησης στη βάση της δεξαμενής.

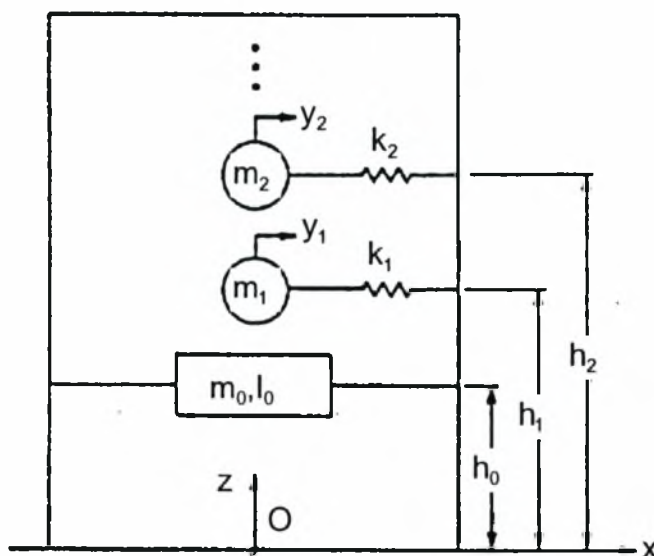
Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας παρατίθενται τα αριθμητικά αποτελέσματα της μελέτης σε μορφή διαγραμμάτων για τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού τόσο για το μοντέλο όσο και για την πραγματική δεξαμενή.

Στο τέταρτο και τελευταίο μέρος ανακεφαλαιώνονται τα σημαντικότερα συμπεράσματα της εργασίας καθώς και οι περιοχές πιθανής μελλοντικής έρευνας στο συγκεκριμένο τεχνικό πρόβλημα.

## 2. ΑΝΑΛΥΣΗ

### 2.1 Ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο

Κάθε κυκλική κυλινδρική δεξαμενή γεμισμένη με υγρό μπορεί να προσωμοιωθεί από το ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο του πιο κάτω σχήματος.



*Σχήμα 2: Ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο*

Το μέρος του υγρού που δεν συμμετέχει στην κυμάτωση θεωρείται σημειακά συγκεντρωμένο σε απόσταση  $h_0$  από τη βάση της δεξαμενής, έχοντας μάζα  $m_0$  και ροπή αδράνειας  $I_0$ , ενώ οι μάζες  $m_s$  που αντιπροσωπεύουν ένα άπειρο αριθμό ταλαντωτών ( $s=1,2,\dots$ ) είναι προσκολλημένες σε ύψος  $h_s$  από τη βάση διαμέσου ενός ελατηρίου

σταθεράς  $k_s$ . Οι μάζες αυτές αντιπροσωπεύουν το μέρος του υγρού που συμμετέχει στην κυμάτωση της επιφάνειας του υγρού.

Το ισοδύναμο μηχανικό μοντέλο της δεξαμενής είναι γεμισμένο με νερό, φτιαγμένο από πλαστικό, με κωδική ονομασία IIb2 και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

Μέτρο Ελαστικότητας	E	$5.07 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$
Λόγος του Poisson	$\nu$	0.3
Πυκνότητα	$\rho_u$	$1000 \frac{Kg}{m^3}$
Ακτίνα κελύφους	R	0.0635 m
Ύψος κελύφους	L	0.2667 m
Πάχος κελύφους	h	$0.762 \cdot 10^{-4} m$
Μάζα στέγης	$m_r$	0.0085 Kg
Ροπή αδράνειας στέγης	$I_r$	$8.6 \cdot 10^{-6} \frac{Kg}{m^2}$
Ροπή αδράνειας θεμελίωσης	$I_t$	$0.037 Kg \cdot m^2$

Τα χαρακτηριστικά του ισοδύναμου μηχανικού μοντέλου δίνονται από τους πιο κάτω τύπους:

$$\frac{m_0}{m_l} = 1 - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{m_l}, \quad \frac{m_s}{m_l} = 2 \frac{\tanh(\mu_s)}{\mu_s (v_s^2 - 1)} \quad (\text{a})$$

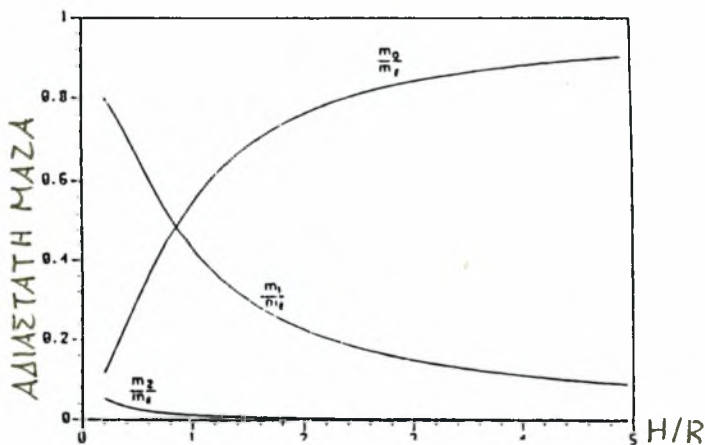
$$\frac{h_0}{H} = \frac{m_l}{m_0} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{H} \right)^2 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{\mu_s \sinh(\mu_s) + 2}{\mu_s^2 (v_s^2 - 1) \cosh(\mu_s)} \right] \right\} \quad (\text{b}_1)$$

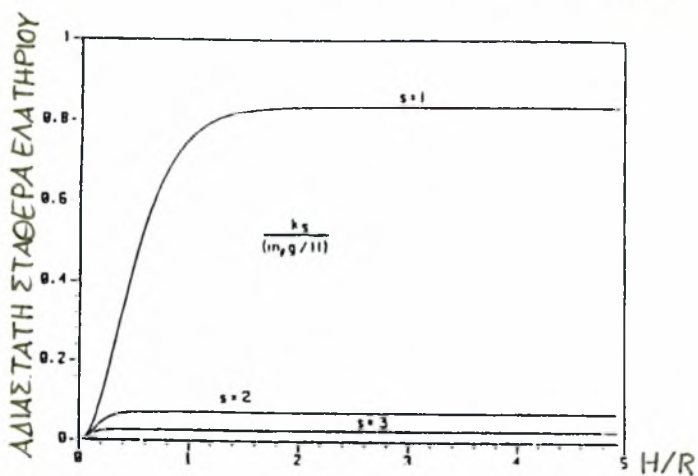
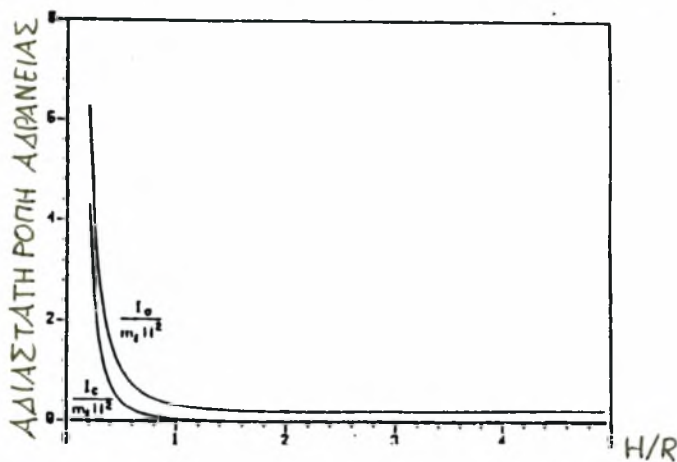
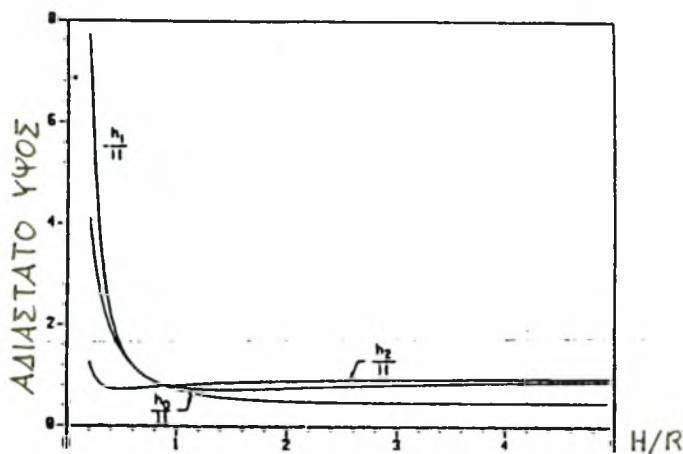
$$\frac{h_s}{H} = 2 \frac{m_l}{m_s} \left[ \frac{\mu_s \sinh(\mu_s) - \cosh(\mu_s) + 2}{\mu_s^2 (v_s^2 - 1) \cosh(\mu_s)} \right] \quad (\text{b}_2)$$

$$\frac{I_0}{m_l H^2} = \frac{1}{3} + \left( \frac{R}{2H} \right)^2 - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \frac{4\mu_s + (\mu_s^2 - 4) \sinh(\mu_s)}{\mu_s^3 (v_s^2 - 1) \cosh(\mu_s)} \right] \quad (\text{c})$$

$$k_s = m_s \omega_s^2 \quad (\text{d})$$

Η μεταβολή των παραμέτρων στους πιο πάνω τύπους μπορεί να εκφραστεί με τα πιο κάτω διαγράμματα:





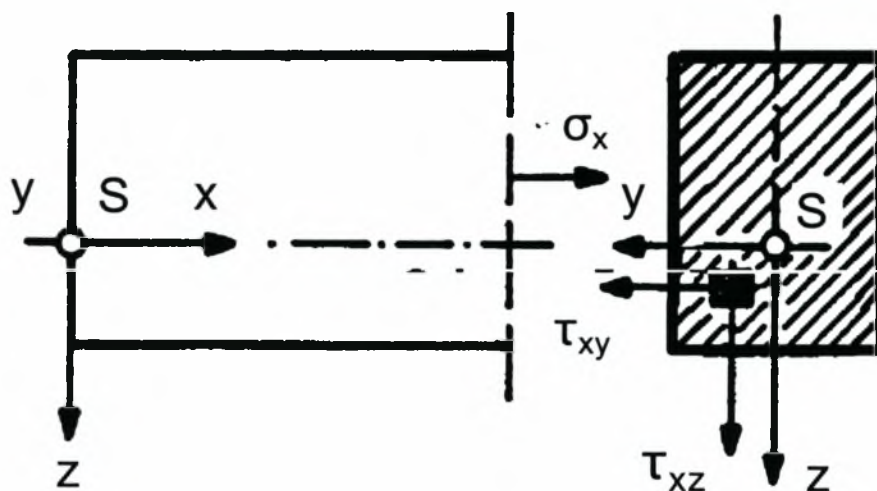
Όπως φαίνεται στα διαγράμματα οι καμπύλες έχουν φθίνουσα μορφή εκτός από την καμπύλη του (α) διαγράμματος για την κανονική μάζα  $m_0$  η οποία έχει αύξουσα μορφή. Το σύμβολο  $I_c$  στο διάγραμμα (c) αντιπροσωπεύει την κεντρική ροπή αδράνειας της συμπαγούς μάζας και δίνεται από τον τύπο  $I_c = I_0 - m_0 h_0^2$ .

## 2.2 Μελέτη δοκού

### 2.2.1 Εισαγωγή - Παραδοχές

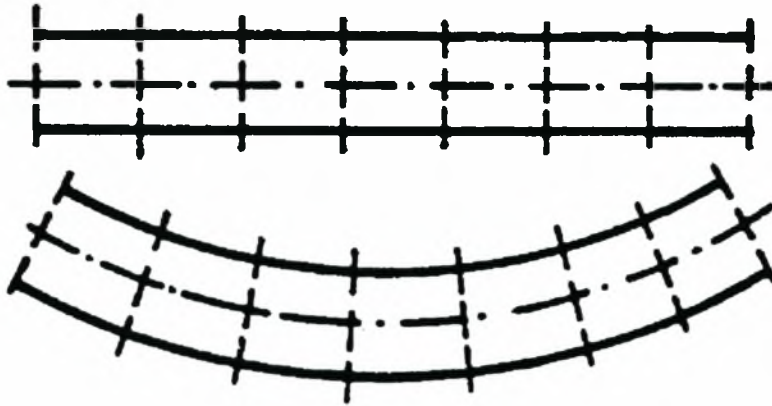
Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο θα ληφθεί υπόψη μόνο η βάση του μοντέλου της δεξαμενής. Από τη βάση θα ληφθεί μια στοιχειώδη λωρίδα η οποία θα θεωρηθεί ως δοκός. Η δοκός αποτελεί δομικό στοιχείο μιας κατασκευής. Σε αντίθεση με τη ράβδο, στην οποία αναπτύσσονται τάσεις κατά μήκος του άξονα της ράβδου, στη δοκό που κάμπτεται από εξωτερικά φορτία, αναπτύσσονται τάσεις και μετατοπίσεις σε τρεις διευθύνσεις. Για τα προβλήματα αυτά χρησιμοποιείται στην πράξη η τεχνική θεωρία κάμψης. Η τεχνική θεωρία κάμψης που θα αναπτυχθεί στη συνέχεια δίνει απλοποιημένες λύσεις οι οποίες για να είναι ικανοποιητικές θα πρέπει να εκπληρούνται οι παρακάτω παραδοχές.

- Η διατομή της δοκού παραμένει αμετάβλητη κατά μήκος του άξονά της.
- Ο άξονας της δοκού (η γραμμή που ενώνει τα γεωμετρικά κέντρα των επιφανειών όλων των διατομών της δοκού) είναι μια ευθεία.
- Το σύστημα συντεταγμένων χρησιμοποιείται όπως στο σχήμα 3



*Σχήμα 3: Σύστημα συντεταγμένων στην κάμψη δοκών*

- Η διατομή της δοκού είναι συμμετρική ως προς τους κύριους άξονες.
- Οι παραμορφώσεις παραμένουν μικρές ως προς το πάχος της δοκού.
- Ισχύει ο νόμος του Hooke (γραμμική σχέση τάσεων-παραμορφώσεων).
- Επίπεδες εγκάρσιες διατομές της δοκού παραμένουν επίπεδες και κάθετες προς τον άξονα παραμόρφωσής τους και κατά τη διάρκεια της κάμψης (Σχήμα 4).



*Σχήμα 4 : Εγκάρσιες διατομές κατά την καταπόνηση*

Στη δοκό αναπτύσσονται εσωτερικές αντιδράσεις  $N$ ,  $Q$  και  $M$ , που συνδέονται με τα εξωτερικά φορτία με τις σχέσεις  $\frac{dQ}{dx} = q$  και

$$\frac{dM}{dx} = Q \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = -q. \text{ Οι εσωτερικές αυτές δυνάμεις με βάση τις}$$

παραπάνω παραδοχές κατανέμονται σε όλη τη διατομή της δοκού. Βάση για τη μελέτη αυτή αποτελεί η στατική ισοδυναμία μεταξύ των εσωτερικών αντιδράσεων και των εσωτερικών τάσεων:

Αξονική δύναμη: 
$$N_x = \int_A \sigma_x dA$$

Διατμητικές δυνάμεις: 
$$Q_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

Καμπτικές ροπές: 
$$M_y = \int_A z \sigma_x dA$$



$$M_z = -\int_A y \sigma_x dA$$

Οι σχέσεις αυτές δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό της κατανομής των τάσεων στην διατομή της δοκού. Η κατανομή των τάσεων στην επιφάνεια της διατομής της δοκού αποτελεί ένα στατικά αόριστο πρόβλημα για τη λύση του οποίου είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη και οι παραμορφώσεις της δοκού.

Πριν διερευνηθεί η λύση του προβλήματος της κάμψης το σύνθετο πρόβλημα της κάμψης θα αναλυθεί σε απλά επί μέρους προβλήματα χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας. Τα προβλήματα αυτά είναι:

#### *Καθαρή κάμψη*

Με τον όρο καθαρή κάμψη ορίζουμε την καταπόνηση που οφείλεται μόνο σε καμπτική ροπή δηλαδή την περίπτωση που ισχύει:

$$N_x = Q_y = Q_z = 0$$

$$M_y \neq 0$$

$$M_z \neq 0$$

Επειδή σύμφωνα με την παραδοχή οι άξονες  $y$  και  $z$  είναι κύριοι άξονες, η κάμψη αυτή μπορεί να χωρισθεί σε δύο υποπεριπτώσεις και μάλιστα:

στην απλή κάμψη ως προς τον  $y$ -άξονα ( $M_y \neq 0, M_z = 0$ ) και

στην απλή κάμψη ως προς τον z- άξονα ( $M_y=0$ ,  $M_z \neq 0$ ).

### *Διάτμηση*

Στην περίπτωση αυτή μηδενίζονται οι ροπές καθώς και η αξονική δύναμη και ισχύει:

$$N_x = M_y = M_z = 0$$

$$Q_y \neq 0$$

$$Q_z \neq 0$$

Όπως στην καθαρή κάμψη έτσι κι εδώ μπορεί να χωρισθεί η καταπόνηση:

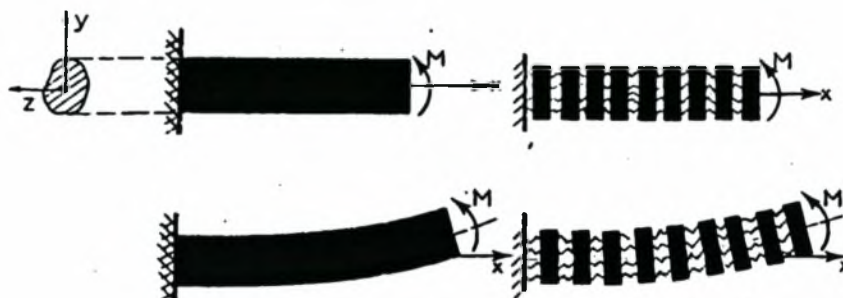
σε διάτμηση στην κατεύθυνση z ( $Q_y=0$ ,  $Q_z \neq 0$ ) και

σε διάτμηση στην κατεύθυνση y ( $Q_y \neq 0$ ,  $Q_z=0$ ).

Για τον προσδιορισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων αναλύονται σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας οι καταπονήσεις μεμονωμένα και μετά παρατίθενται τα αποτελέσματα. Η πιο πάνω θεωρητική ανάλυση είναι από τις σημειώσεις “Αντοχή Υλικών”, Γ. Αθανασιάδη.

## 2.2.2 Ελαστική γραμμή

Θα υπολογιστεί η διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής ή βέλος κάμψης  $w(x)$  της στοιχειώδους λωρίδας της βάσης της δεξαμενής η οποία θα θεωρηθεί ως δοκός. Ο Bernoulli το 1700 ανέπτυξε μια απλή θεωρία για τον προσδιορισμό της ελαστικής γραμμής που στηρίζεται στην υπόθεση ότι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες και κατά την διάρκεια της κάμψης. Με την παραδοχή αυτή δεν λαμβάνονται υπόψη οι παραμορφώσεις εξ' αιτίας των διατμητικών τάσεων. Για να κατανοηθεί καλύτερα το μοντέλο του Bernoulli μπορεί να θεωρηθεί ότι η δοκός αποτελείται από στερεούς δίσκους πάχους  $dx$ , οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με ελατήρια, όπως δείχνει το σχήμα



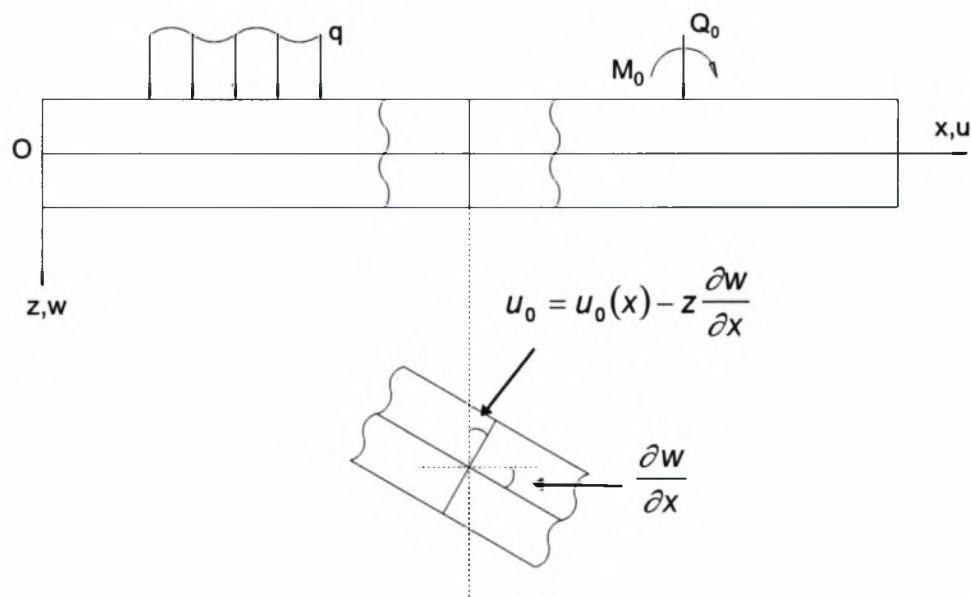
*Σχήμα 5 : Μοντέλο Bernoulli*

Με την επίδραση της ροπής κάμψης η δοκός παραμορφώνεται και ο ευθύγραμμος άξονας της δοκού μετατρέπεται σε καμπύλη, την οποία ονομάζουμε ελαστική γραμμή της δοκού.

Έστω ένα συμπαγές σώμα στο οποίο το μήκος του είναι πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με τις άλλες δύο του διαστάσεις. Όταν αυτό το συμπαγές σώμα μεταφέρει φορτία τα οποία είναι κάθετα

κατά μήκος των αξόνων, τότε καλείται δοκός. Για αυτές τις κατασκευές μερικές θεωρήσεις μπορούν να γίνουν (επιβεβαιώνοντας πειραματικά δεδομένα ή σε σύγκριση με ακριβείς θεωρίες) οι οποίες απλοποιούν την ανάλυση.

Όσον αφορά την γεωμετρία και την φόρτιση οι ροπές δημιουργούνται από φορτία που δρουν κατά μήκος των κυρίων τους αξόνων.



Σχήμα 6

Μπορούν να γίνουν οι εξής θεωρήσεις:

α. Υπάρχει γραμμική ελαστικότητα και το υλικό είναι ομογενές και ισότροπο,

β. Η  $\sigma_x$  είναι η μοναδική μη μηδενική τάση (επικρατέστερη τάση),

γ. Η ελαστική γραμμή είναι πολύ μικρότερη από το πάχος,

δ. Τα επίπεδα τα οποία είναι κανονικά στην ουδέτερη γραμμή πριν από το λυγισμό παραμένουν επίπεδα και κανονικά στην ουδέτερη γραμμή που προκύπτει μετά την παραμόρφωση, δηλαδή:

$$\gamma_{xz} = 0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow u = u_0(x) - z \frac{\partial w}{\partial x}.$$

(Όταν δεν έχουμε εσωτερικές δυνάμεις είναι  $u_0=0$ )

Έτσι αφού:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x} = u'_0 - zw'' \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x = E(u'_0 - zw'')$$

η ροπή συναρτήσει της ελαστικής γραμμής είναι:

$$M = M_y = \int_A \sigma_x z dA = Eu'_0 \int_A z dA - Ew'' \int_A z^2 dA \Rightarrow M = -EI w'' \quad (1)$$

Η ροπή στον άξονα z (αφού  $I_{xy}=0$  στους κεντρικούς άξονες) είναι:

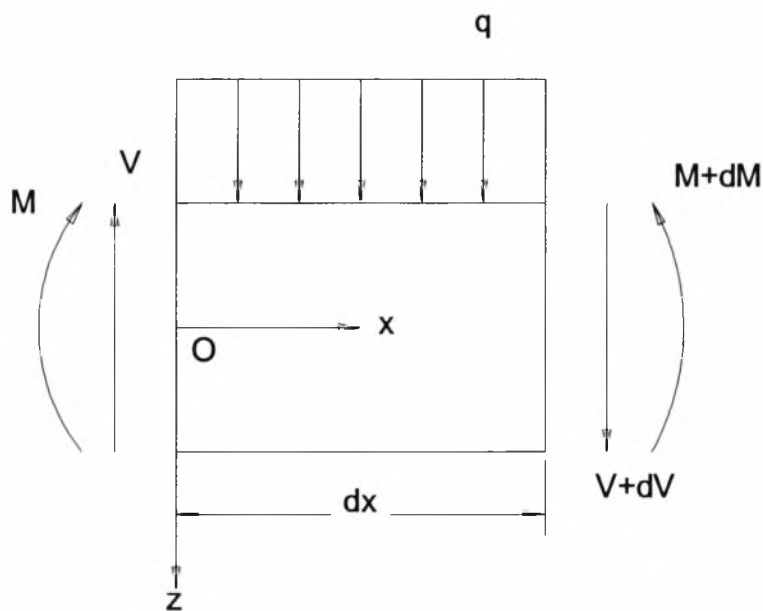
$$M_z = \int_A \sigma_x y dA = -Ew'' \int_A zy dA = 0$$

Για την αξονική δύναμη έχουμε:

$$N = \int_A \sigma_x dA = EAu'_0 \Rightarrow N = EAu'_0 \quad (2)$$

Εαν  $N=0$  συνεπάγεται  $u'_0 = \text{σταθερό} = 0$ .

Θα θεωρηθεί τώρα ένα στοιχειώδες μέρος από τη δοκό, μήκους  $dx$  όπως φαίνεται και στο σχήμα:



Σχήμα 7

Από ισορροπία δυνάμεων και ροπών προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow V + \frac{\partial V}{\partial x} dx + q dx - V = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -q \quad (3)$$

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow (V + dV) dx + q dx \frac{dx}{2} - dM = 0 \Rightarrow V = \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (EI w'')$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (-EI w'') = -q \Rightarrow EI w'''' = q \quad (4)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και σαν σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$w(x)$  : Το βέλος κάμψης στη θέση  $x$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = w'(x)$$

: Η κλίση της ελαστικής γραμμής στη θέση  $x$

$$M(x) = EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -EI(x) w''(x)$$

: Η καμπτική ροπή στη θέση  $x$

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = [EI(x) w''(x)]' \quad (5)$$

: Η διατμητική δύναμη στη θέση  $x$

$$q(x) = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = [EI w''(x)]''$$

: Το εξωτερικό φορτίο στη θέση  $x$ .

Αν το μέτρο δυσκαμψίας της δοκού είναι σταθερό, οι εξισώσεις (5) μπορεί να γραφτούν στην απλοποιημένη μορφή:

$$\theta(x) = w'(x)$$

$$M(x) = -EI w''(x)$$

$$Q(x) = EI w'''(x) \tag{6}$$

$$q(x) = EI w''''(x)$$

Η πιο πάνω θεωρητική ανάλυση βρίσκεται στο βιβλίο "Αντοχή Υλικών", Θ. Κερμανίδη.

## **2.3 Μελέτη πλάκας και κελύφους**

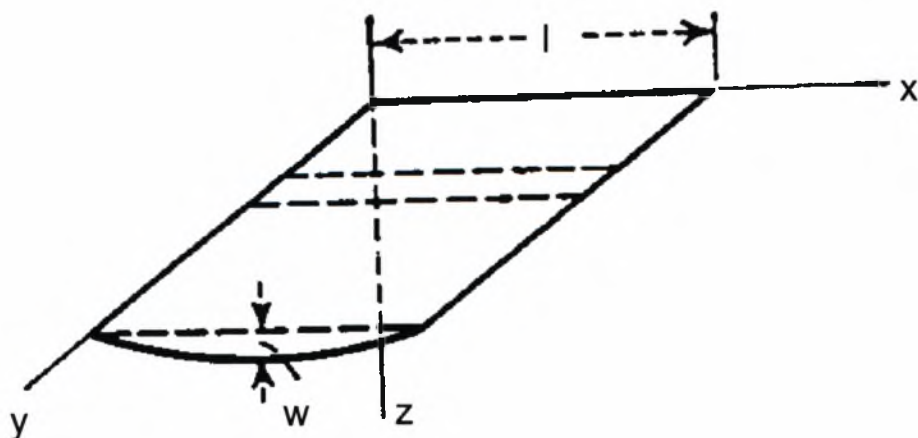
### **2.3.1 Διαφορικές εξισώσεις για κάμψη κυκλικών πλακών**

Στη δεύτερη μέθοδο επίλυσης εκτός από τη βάση της δεξαμενής η οποία θα θεωρηθεί ως πλάκα θα ληφθεί υπόψη και το τοίχωμα της δεξαμενής το οποίο θα θεωρηθεί ως κέλυφος. Οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την κάμψη πλακών καθώς και η χρησιμοποίηση πολικών συντεταγμένων για την επίλυση του προβλήματος φαίνονται αναλυτικά στα δύο επόμενα κεφάλαια.



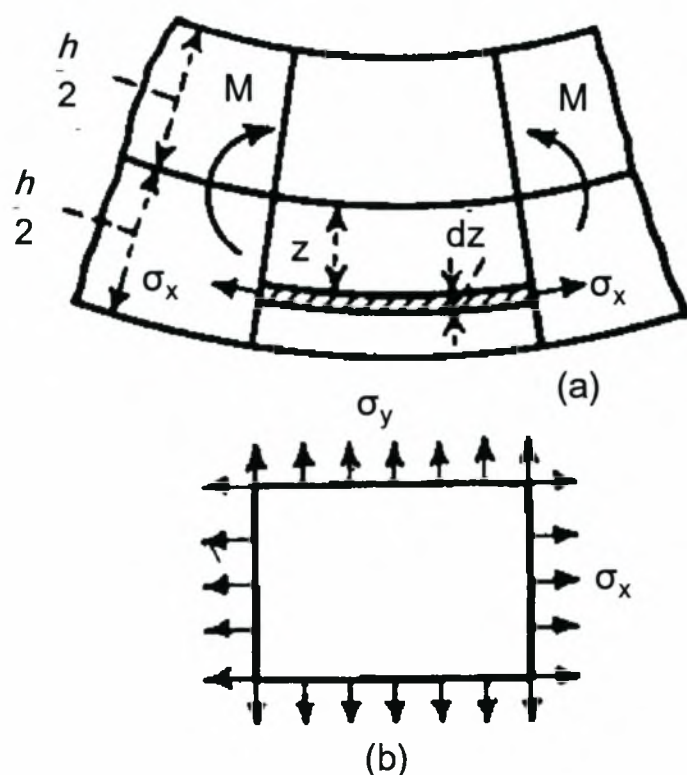
Για τη θεωρία κάμψης πλακών ένα απλό πρόβλημα κάμψης μακρών ορθογωνικών πλακών το οποίο υποβάλλεται σε ένα εγκάρσιο φορτίο που δεν αλλάζει κατά μήκος της πλάκας έχει ως εξής. Η καμπτώμενη επιφάνεια ενός μέρους από αυτή τη πλάκα σε μια θεωρούμενη απόσταση από τα άκρα μπορεί να θεωρηθεί κυλινδρική με τον άξονα του κυλίνδρου παράλληλο στο μήκος της πλάκας. Θα μπορούσε να περιοριστεί η έρευνα για την κάμψη μιας τομής στοιχειώδους λωρίδας της πλάκας σε δύο κάθετα επίπεδα κατά μήκος της πλάκας και μοναδιαίας απόστασης το κάθε ένα. Η ελαστική γραμμή της λωρίδας δίνεται από μία διαφορική εξίσωση, η οποία είναι ίδια με τη διαφορική εξίσωση καμπτόμενης δοκού.

Για να βρεθεί η εξίσωση της ελαστικής γραμμής έστω μια πλάκα ομοιόμορφου πάχους ίσο με  $h$ . Το  $xy$  επίπεδο θα θεωρηθεί σαν μέσο επίπεδο της πλάκας πριν από τη φόρτιση δηλαδή το μέσο επίπεδο ανάμεσα στις όψεις της πλάκας. Έστω ότι ο  $y$  άξονας συμπίπτει με μια από τις επιμήκεις ακμές της πλάκας και έστω ότι θετική είναι η προς τα κάτω κατεύθυνση του  $z$  άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.



Σχήμα 8

Τότε αν το πλάτος της πλάκας συμβολιστεί με  $l$  η στοιχειώδης λωρίδα μπορεί να θεωρηθεί ως δοκός ορθογωνικής διατομής η οποία έχει μήκος  $l$  και πάχος  $h$ . Υπολογίζοντας τις τάσεις σε μία τέτοια δοκό θεωρούμε όπως άλλωστε ισχύει στη θεωρία των δοκών, ότι οι διατομές της δοκού παραμένουν επίπεδες κατά τη διάρκεια του λυγισμού, έτσι ώστε αυτές να υφίστανται μόνο περιστροφή ως προς τους ουδέτερους άξονες. Εάν μη κάθετες δυνάμεις εφαρμοστούν στα άκρα των τομών της δοκού, η ουδέτερη επιφάνεια της δοκού συμπίπτει με τη μέση επιφάνεια της πλάκας και η μοναδιαία παραμόρφωση μιας παράλληλης στον  $x$  άξονα είναι ανάλογη με την απόσταση της  $z$  από τη μέση επιφάνεια. Η καμπύλη της ελαστικής γραμμής είναι ίση με  $-\frac{d^2w}{dx^2}$ , όπου  $w$  η ελαστική γραμμή της δοκού στη  $z$  κατεύθυνση που είναι μικρή σε σχέση με το μήκος της δοκού  $l$ . Η μοναδιαία παραμόρφωση  $\epsilon_x$  σε μια γραμμή απόστασης  $z$  από τη μέση επιφάνεια (σχήμα 9) είναι τότε  $-z \frac{d^2w}{dx^2}$ .



Σχήμα 9

Κάνοντας χρήση του νόμου του Hooke οι μοναδιαίες παραμόρφωσεις  $\varepsilon_x$  και  $\varepsilon_y$  συναρτήσει των κανονικών τάσεων  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$  που δρουν στο στοιχείο φαίνονται διαγραμματισμένα στο σχήμα 9.b και είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \quad (7)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} = 0$$

όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και  $\nu$  είναι ο λόγος του Poisson. Οι ορθές τάσεις στην  $y$  κατεύθυνση πρέπει να είναι

μηδέν για να διαφυλάττουν τη συνέχεια στη πλάκα κατά τη διάρκεια του λυγισμού, από τις οποίες συνεπάγεται από την δεύτερη των εξισώσεων (7) ότι  $\sigma_y = \nu\sigma_x$ . Αντικαθιστώντας αυτή τη τιμή στην πρώτη από τις εξισώσεις (7) βρίσκουμε:

$$\varepsilon_x = \frac{(1 - \nu^2)\sigma_x}{E}$$

και (8)

$$\sigma_x = \frac{E\varepsilon_x}{1 - \nu^2} = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2}$$

Έχοντας την έκφραση για την τάση λυγισμού  $\sigma_x$ , θα βρεθεί με ολοκλήρωση η ροπή κάμψης στη στοιχειώδη λωρίδα:

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ez^2}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} dz = -\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}$$

Θέτοντας :

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = D$$
(9)

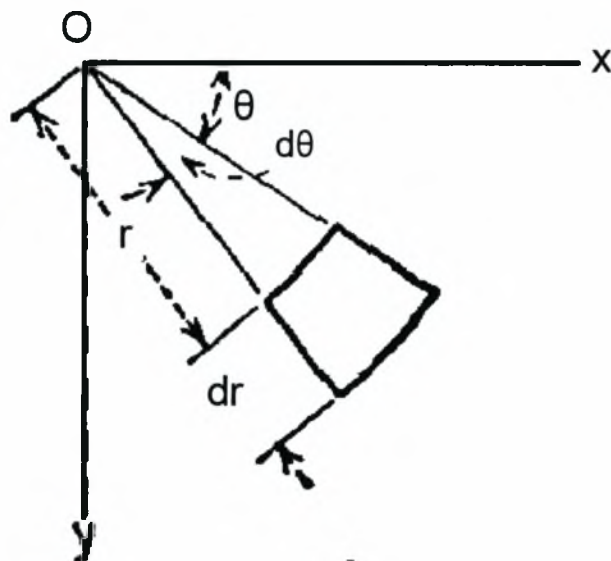
η εξίσωση για την ελαστική γραμμή της καμπύλης σε μια στοιχειώδη λωρίδα γράφεται στην παρακάτω μορφή:

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \quad (10)$$

στην οποία το μέγεθος  $D$  παίρνει τη θέση της ποσότητας  $EI$  για την περίπτωση δοκών. Ο υπολογισμός της ελαστικής γραμμής της πλάκας καταλήγει στην ολοκλήρωση της εξίσωσης (10), η οποία έχει την ίδια μορφή με την διαφορική εξίσωση για την ελαστική γραμμή δοκών. Αν υπάρχει μόνο ένα εγκάρσιο φορτίο που δρα στην πλάκα και οι άκρες είναι ελεύθερες να πλησιάσουν η μια την άλλη καθώς δημιουργείται κάμψη, η έκφραση για την ροπή κάμψης  $M$  μπορεί αμέσως να παραχθεί και η ελαστική γραμμή της καμπύλης βρίσκεται από ολοκλήρωση της εξίσωσης (10). Στην πράξη το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο αφού η πλάκα είναι συνήθως στηριγμένη στα άκρα της τα οποία έτσι δεν μπορούν να κινηθούν. Τέτοια μέθοδος στήριξης ανεβάζει εντατικά τις αντιδράσεις κατά μήκος των άκρων καθώς αρχίζει να δημιουργείται η ελαστική γραμμή. Αυτές οι αντιδράσεις εξαρτώνται από το μέγεθος της ελαστικής γραμμής και αφορούν το μέγεθος της ροπής κάμψης  $M$  που μπαίνει στην εξίσωση (10). Το πρόβλημα καταλήγει στην έρευνα για την κάμψη μιας στοιχειώδης λωρίδας που υποβάλλεται σε ένα εγκάρσιο φορτίο και επίσης σε μια αξονική δύναμη η οποία εξαρτάται από την ελαστική γραμμή της λωρίδας.

### 2.3.2 Εξισώσεις για την κάμψη πλακών σε πολικές συντεταγμένες

Στη γενική περίπτωση κάμψης κυκλικών πλακών είναι βολικό να χρησιμοποιηθούν πολικές συντεταγμένες. Αν τα  $r$  και  $\theta$  παίρνονται όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα, η σχέση ανάμεσα στις πολικές και καρτεσιανές συντεταγμένες δίνεται από τις εξισώσεις:



Σχήμα 10

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (a)$$

από τις οποίες προκύπτουν τα:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \qquad (b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκφράσεις θα βρεθεί η κλίση της ελαστικής γραμμής της επιφάνειας της πλάκας στην x κατεύθυνση ως:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \qquad (c)$$

Μια ίδια έκφραση μπορεί να γραφεί για την κλίση στην y κατεύθυνση. Για να βρεθεί η έκφραση για την καμπυλότητα σε πολικές συντεταγμένες απαιτούνται οι δεύτερες παράγωγοι. Επαναλαμβάνοντας δύο φορές τον χειρισμό που υποδεικνύεται στις εκφράσεις (c), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \qquad (d) \end{aligned}$$

Με την ίδια μέθοδο προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - \quad (e)$$

$$- 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial r} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} -$$

$$- 2 \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (f)$$

Με αυτό τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων προκύπτει:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (g)$$

Επαναλαμβάνοντας αυτό το χειρισμό δύο φορές, η διαφορική εξίσωση:

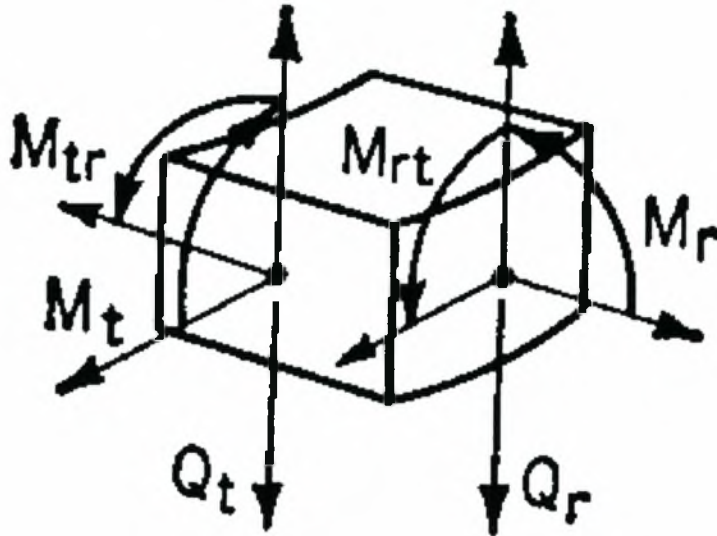
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

για την ελαστική γραμμή της επιφάνειας στο παράπλευρο φορτίο της πλάκας μετασχηματίζεται σε πολικές συντεταγμένες στην ακόλουθη μορφή:

$$\Delta \Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D} \quad (11)$$



Θα θεωρηθεί μια στοιχειώδη τομή της πλάκας από δύο συνεχόμενα αξονικά σχήματα, που να σχηματίζουν μια γωνία  $d\theta$  και από δύο κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας  $r$  και  $r+dr$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 11.



Σχήμα 11

Σημειώνεται η κάμψη και οι ροπές συστροφής που δρουν στο στοιχείο ανά μονάδα μήκους ως  $M_r$ ,  $M_t$  και  $M_{rt}$  και παίρνονται ως θετικές κατευθύνσεις αυτές που φαίνονται στο σχήμα. Για να προκύψουν αυτές οι ροπές από την ελαστική γραμμή  $w$  της πλάκας, θα θεωρηθεί ότι ο  $x$  άξονας συμπίπτει με την ακτίνα  $r$ . Οι ροπές  $M_r$ ,  $M_t$  και  $M_{rt}$  τότε έχουν τις ίδιες τιμές όπως οι ροπές  $M_x$ ,  $M_y$  και  $M_{xy}$  στο ίδιο σημείο, και αντικαθιστώντας  $\theta=0$  στις εκφράσεις (d), (e) και (f), προκύπτουν:

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (12)$$

$$M_t = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$M_r = (1-\nu)D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\theta=0} = (1-\nu)D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

Με ένα παρόμοιο τρόπο από τις σχέσεις:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w)$$

θα βρεθούν οι εκφράσεις για τις διατμητικές δυνάμεις.

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w)$$

$$Q_t = -D \frac{\partial (\Delta w)}{r \partial \theta} \quad (13)$$

όπου το  $\Delta w$  δίνεται από την έκφραση (g).

Στην περίπτωση που τα άκρα είναι πακτωμένα οι οριακές συνθήκες μιας κυκλικής πλάκας ακτίνας  $a$  είναι:

$$(w)_{r=a} = 0 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \quad (h)$$

Στην περίπτωση αρθρωμένου άκρου:

$$(w)_{r=a} = 0 \quad (M_r)_{r=a} = 0 \quad (i)$$

Στην περίπτωση ελεύθερου άκρου:

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad V = \left( Q_r - \frac{\partial M_{rt}}{r \partial \theta} \right)_{r=a} = 0 \quad (j)$$

Μπορεί να εκφραστεί η γενική λύση της εξίσωσης (11) όπως προηγουμένως, σε μορφή αθροίσματος.

$$W = W_0 + W_1$$

στο οποίο το  $W_0$  είναι η μερική λύση της εξίσωσης (11) και το  $W_1$  είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (14)$$

Η ομογενής λύση της τελευταίας εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή της παρακάτω σειράς:

$$W_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (R_m \cos m\theta + R'_m \sin m\theta) \quad (15)$$

της οποίας τα  $R_0, R_1, \dots, R'_1, R'_2, \dots$  είναι συναρτήσεις μόνο της ακτινικής απόστασης  $r$ . Αντικαθιστώντας τις σειρές στην εξίσωση (14),

προκύπτει για κάθε μια από τις συναρτήσεις μια συνήθης διαφορική εξίσωση του πιο κάτω είδους.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2 R_m}{r^2}\right) = 0$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης για  $m > 1$  είναι:

$$R_m = A_m r_m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D r^{-m+2} \quad (l)$$

Για  $m=0$  και  $m=1$  οι λύσεις είναι:

$$R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \log r$$

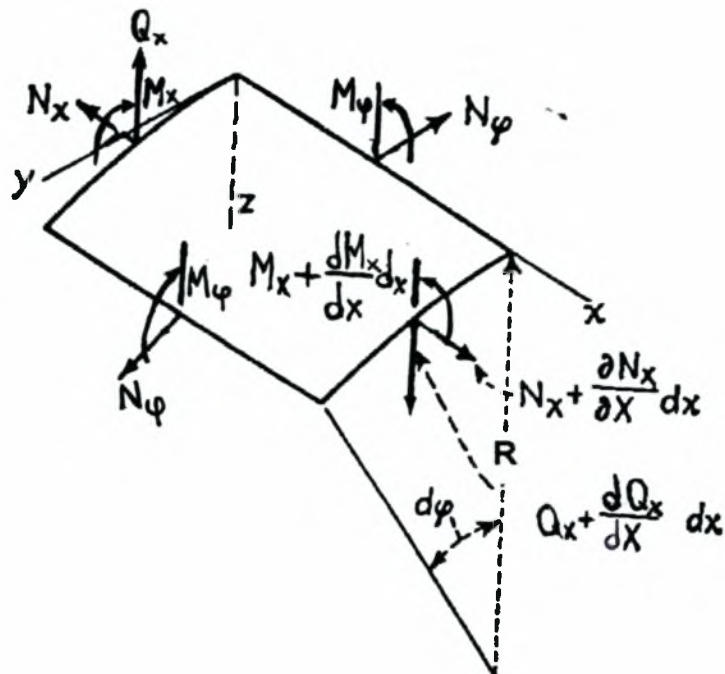
και (m)

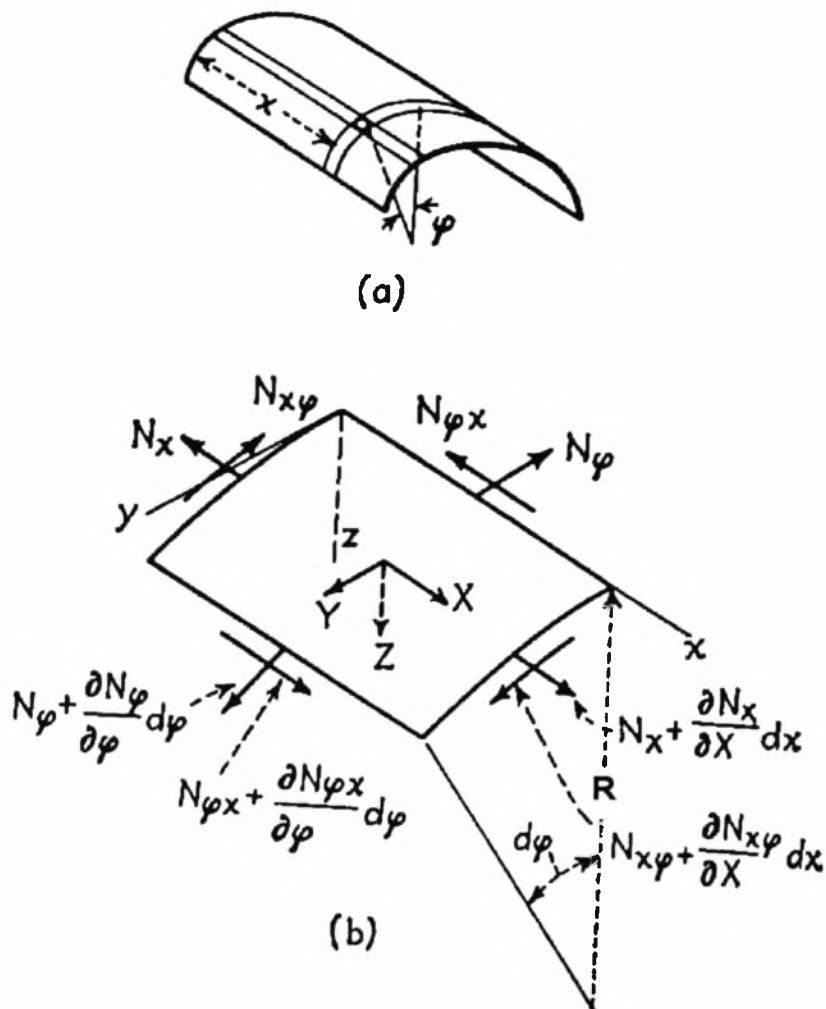
$$R_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \log r$$

Αντίστοιχα ίδιες εκφράσεις μπορούν να γραφτούν για τις συναρτήσεις  $R'_m$ . Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις για τις συναρτήσεις  $R_m$  και  $R'_m$  στις σειρές (15) βρίσκουμε τη γενική λύση της εξίσωσης (14). Οι σταθερές  $A_m, B_m, \dots, D_m$  σε κάθε ειδική περίπτωση πρέπει να λυθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Η λύση  $R_0$ , η οποία είναι ανεξάρτητη από τη γωνία  $\theta$ , αντιπροσωπεύει συμμετρική κάμψη κυκλικών πλακών.

### 2.3.3 Κυκλικά κυλινδρικά κελύφη φορτισμένα συμμετρικά ως προς τους άξονες τους.

Στη δεύτερη μέθοδο επίλυσης, εκτός από τη βάση της δεξαμενής η οποία θα θεωρηθεί ως πλάκα θα ληφθεί υπόψη και το τοίχωμα της δεξαμενής, το οποίο θα θεωρηθεί ως κέλυφος. Στη θεωρία κελύφων συχνά συναντάμε προβλήματα στα οποία ένα κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος υποβάλλεται σε δράση από δυνάμεις που διανέμονται συμμετρικά ως προς τον άξονα του κυλίνδρου. Οι τάσεις που διανέμονται στην κυλινδρική δεξαμενή υποβάλλονται σε δράση δυνάμεων πίεσης και οι τάσεις στις κυλινδρικές δεξαμενές έχουν ένα κάθετο άξονα και υποβάλλονται σε εσωτερική πίεση υγρού, και τάσεις σε κυκλικούς σωλήνες κάτω από ομοιόμορφη εσωτερική πίεση είναι παραδείγματα τέτοιων προβλημάτων. Για να δημιουργηθούν οι εξισώσεις που απαιτούνται για τη λύση αυτών των προβλημάτων έστω ένα στοιχειώδες κομμάτι, όπως φαίνεται στο σχήμα,





Σχήμα 12

για το οποίο μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις ισορροπίας. Συμπεραίνεται από τη συμμετρία ότι οι διατμητικές δυνάμεις μεμβράνης  $N_{x\phi} = N_{\phi x}$  απαλείφονται σ' αυτή τη περίπτωση και αυτές οι δυνάμεις  $N_{\phi}$  είναι σταθερές κατά μήκος της περιφέρειας. Θεωρώντας τις εγκάρσιες διατμητικές δυνάμεις, μπορεί επίσης να υπολογιστεί από τη συμμετρία ότι μόνο οι δυνάμεις  $Q_x$  δεν απαλείφονται. Θεωρώντας τις ροπές που δρουν στο στοιχειώδες κομμάτι στο σχήμα 12 επίσης συμπεραίνεται από τη συμμετρία ότι οι ροπές συστροφής  $M_{x\phi} = M_{\phi x}$  απαλείφονται και ότι οι ροπές λυγισμού  $M_{\phi}$  είναι σταθερές κατά μήκος της περιφέρειας. Κάτω από αυτές τις συνθήκες συμμετρίας τρεις από τις έξι εξισώσεις ισορροπίας του στοιχείου

ταυτόσημα ικανοποιούνται, και πρέπει να θεωρήθούν μόνο οι τρεις εναπομείναντες εξισώσεις, δηλαδή αυτές που βρίσκονται από σχεδίαση των δυνάμεων στους  $x$  και  $z$  άξονες και παίρνοντας τις ροπές των δυνάμεων ως προς το  $y$  άξονα. Θεωρώντας ότι οι εξωτερικές δυνάμεις αποτελούνται μόνο από κανονικές πιέσεις στην επιφάνεια, αυτές οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$\frac{dN_x}{dx} R dx d\phi = 0$$

$$\frac{dQ_x}{dx} R dx d\phi + N_\phi dx d\phi + z R dx d\phi = 0 \quad (a)$$

$$\frac{dM_x}{dx} R dx d\phi - Q_x R dx d\phi = 0$$

Η πρώτη από αυτές δείχνει ότι οι δυνάμεις  $N_x$  είναι σταθερές και παίρνουμε αυτές ίσες με το μηδέν στη παρακάτω ανάλυση μας. Εάν είναι διάφορες του μηδενός, η παραμόρφωση και οι συνεργαζόμενες τάσεις σε τέτοιες σταθερές δυνάμεις μπορούν εύκολα να υπολογιστούν και επιπρόσθετα σε τάσεις και παραμορφώσεις που παράγονται από εγκάρσια φορτία. Οι εναπομείναντες δύο εξισώσεις μπορούν να γραφούν στην παρακάτω απλοποιημένη μορφή:

$$\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{R} N_\phi = -Z \quad (b)$$

$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις περιέχουν τρεις άγνωστες ποσότητες:  $N_\phi$ ,  $Q_x$  και  $M_x$ . Για τη λύση του προβλήματος πρέπει εδώ να θεωρηθούν οι μετατοπίσεις των σημείων στη μέση επιφάνεια του κελύφους.

Από τη συμμετρία συμπεραίνεται ότι η μετατόπιση  $v$  στην περιφερειακή κατεύθυνση απαλείφεται. Έτσι έχουμε μόνο τους όρους  $u$  και  $w$  στις  $x$  και  $z$  κατευθύνσεις. Οι εκφράσεις για τους όρους τότε γίνονται:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad \varepsilon_\phi = -\frac{w}{R} \quad (c)$$

Εδώ εφαρμόζοντας τον νόμο του Hooke προκύπτει:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\phi) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{R} \right) = 0 \quad (d)$$

$$N_\phi = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_x) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( -\frac{w}{R} + \nu \frac{du}{dx} \right)$$

Από την πρώτη από αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{R}$$

και η δεύτερη εξίσωση δίνει:



$$N_{\phi} = -\frac{Eh w}{R} \quad (e)$$

Θεωρώντας τις ροπές λυγισμού, συμπεραίνεται από τη συμμετρία ότι δεν υπάρχει αλλαγή της καμπυλότητας στην περιφερειακή κατεύθυνση. Η καμπυλότητα στην  $x$  κατεύθυνση είναι ίση με  $-\frac{d^2 w}{dx^2}$ . Χρησιμοποιώντας τις ίδιες εξισώσεις όπως στην πλάκα, τότε προκύπτει:

$$M_{\phi} = \nu M_x \quad (f)$$

$$M_x = -D' \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\text{όπου } D' = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^3)}$$

Επιστρέφοντας τώρα στις εξισώσεις (b) και απαλείφοντας τη  $Q_x$  από αυτές τις εξισώσεις προκύπτει:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + \frac{1}{R} N_{\phi} = -Z$$

από το οποίο, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (e) και (f) προκύπτει:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D' \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = Z \quad (16)$$

Όλα τα προβλήματα συμμετρικής παραμόρφωσης κυκλικών κυλινδρικών κελύφων εδώ παράγονται από την ολοκλήρωση της εξίσωσης (16). Η πιο απλή εφαρμογή από αυτές τις εξισώσεις βρίσκεται όταν το πάχος του κελύφους είναι σταθερό. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η εξίσωση (16) γίνεται:

$$D' \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = Z \quad (17)$$

$$\text{Θέτοντας } \beta^4 = \frac{Eh}{4R^2 D'} = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2} \quad (18)$$

Η εξίσωση (17) μπορεί να γραφεί στην απλή μορφή:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{Z}{D'} \quad (19)$$

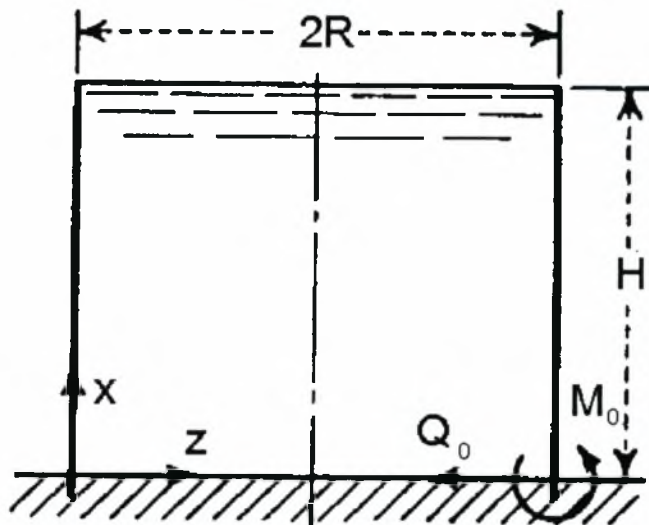
Αυτή η εξίσωση είναι ίδια όπως αυτή που βρίσκεται για μια πρισματική δοκό, καμπτικής στιβαρότητας  $D$ , στηριγμένη από μια συνεχή ελαστική θεμελίωση που υποβάλλεται σε δράση από φορτίο δύναμης  $Z$ . Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$w = e^{\beta x} (c_1' \cos \beta x + c_2' \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c_3' \cos \beta x + c_4' \sin \beta x) + f(x) \quad (20)$$

στην οποία η  $f(x)$  είναι μια μερική λύση της εξίσωσης (19), και  $c_1, c_2, c_3, c_4$  είναι οι σταθερές της ολοκλήρωσης οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν σε κάθε περίπτωση από τις οριακές συνθήκες στα άκρα του κυλίνδρου.

### 2.3.4 Κυλινδρικές δεξαμενές με ομοιόμορφο πάχος τοιχώματος

Εάν μια δεξαμενή υποβάλλεται σε δράση μιας υδροστατικής πίεσης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



Σχήμα 13

οι τάσεις στο τοίχωμα μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας την εξίσωση (19). Αντικαθιστώντας  $\sigma'$  αυτήν την εξίσωση:

$$Z = -\gamma (H - x) \quad (a)$$

όπου  $\gamma$  είναι το βάρος ανά μονάδα όγκου του υγρού, προκύπτει:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\gamma(H - x)}{D'} \quad (b)$$

Μια μερική λύση αυτής της εξίσωσης είναι:

$$W_1 = -\frac{\gamma(H-x)}{4\beta^4 D} = -\frac{\gamma(H-x)R^2}{Eh} \quad (c)$$

Αυτή η έκφραση αντιπροσωπεύει την ακτινική διαστολή για ένα κυλινδρικό κέλυφος σε ελεύθερα άκρα κάτω από τη δράση κυκλικών τάσεων. Αντικαθιστώντας την έκφραση (c) στη θέση της  $f(x)$  της εκφράσεως (21), προκύπτει η ολοκληρωμένη λύση της εξίσωσης (b).

$$w = e^{\beta x}(c'_1 \cos \beta x + c'_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(c'_3 \cos \beta x + c'_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma(H-x)R^2}{Eh} \quad (21)$$

Η πιο πάνω θεωρητική ανάλυση υπάρχει στο βιβλίο "Theory of Plates and shells", S. Timoshenko.

## 3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ - ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 3.1 Επίλυση μοντέλου δοκού

#### 3.1.1 Διάγραμμα δύναμης - ανύψωσης

Για την κατασκευή των διαγραμμάτων ροπής-ανύψωσης με τα οποία ουσιαστικά θα γίνει ο υπολογισμός του ισοδύναμου ελατηρίου αποκόλλησης θα χρησιμοποιηθούν δύο μέθοδοι.

α') Στην πρώτη θα ληφθεί μόνο η κυκλική βάση της δεξαμενής και από αυτήν θα θεωρηθεί μια στοιχειώδη λωρίδα ως δοκός. Επιπλέον η δημιουργούμενη ροπή λόγω ανύψωσης της δεξαμενής θα θεωρηθεί μηδενική.

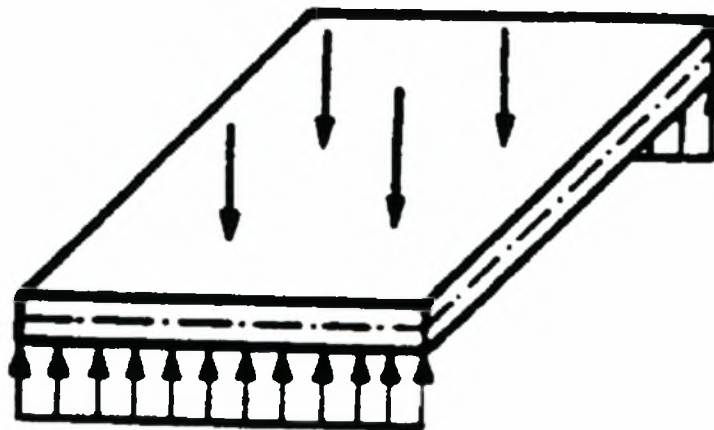
β') Στην δεύτερη εκτός από την βάση της δεξαμενής η οποία θα θεωρηθεί ως πλάκα θα ληφθεί υπόψη και το τοίχωμα της δεξαμενής το οποίο θα θεωρηθεί ως κέλυφος.

Έτσι θα γίνει το διάγραμμα της δύναμης  $Q_0$  που δημιουργεί την ανύψωση της δεξαμενής ως προς την ανύψωση  $\delta$  της δεξαμενής. Στή συνέχεια η δύναμη  $Q_0$  θα μετατραπεί σε ροπή για να προκύψει τελικά ένα διάγραμμα ροπής ως προς την ανύψωση. Έτσι θα συγκριθεί

το διάγραμμα αυτό (θεωρητικό μοντέλο) με κάποιες μετρήσεις που έχουν γίνει και αφορούν το πειραματικό μοντέλο για τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού δεξαμενής.

Για να γίνει το διάγραμμα δύναμης-ανύψωσης θα χρησιμοποιηθεί η τεχνική θεωρία κάμψης και πιο συγκεκριμένα η εξίσωση  $w''''(x) = \frac{q(x)}{EI}$  η οποία και θα ολοκληρωθεί τέσσερις φορές για να προκύψει έτσι το βέλος κάμψης (ελαστική γραμμή) της δοκού. Κατά την ολοκλήρωση θα προκύψουν τέσσερις σταθερές οι οποίες θα υπολογιστούν από τις οριακές συνθήκες. Έτσι έχοντας τη σχέση που δίνει την ελαστική γραμμή μπορεί να γίνει το διάγραμμα δύναμης ανύψωσης.

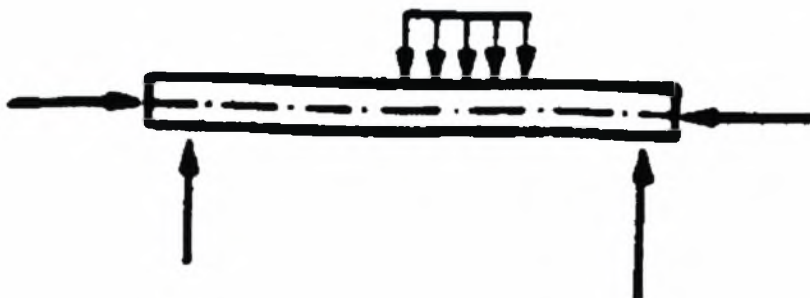
Εδώ θα υποτεθεί ότι κάμπτεται μόνο η βάση της δεξαμενής, η οποία θα θεωρηθεί ως πλάκα.



*Σχήμα 14: Εξιδανικευμένο δομικό στοιχείο "πλάκα"*

Πλάκα χαρακτηρίζεται ένα επίπεδο σώμα το πάχος του οποίου είναι πολύ μικρό συγκριτικά με τις άλλες διαστάσεις του και καταπονείται με δυνάμεις που ενεργούν κάθετα προς το επίπεδό του.

Από την πλάκα θα θεωρηθεί μια στοιχειώδης λωρίδα, η οποία συμπεριφέρεται ως δοκός.



*Σχήμα 15 : Εξιδανικευμένο δομικό στοιχείο "δοκός"*

Δοκός χαρακτηρίζεται ένα σώμα το μήκος του οποίου είναι συγκριτικά πολύ μεγαλύτερο από τις άλλες διαστάσεις του σώματος και καταπονείται με δυνάμεις στην κατεύθυνση του άξονα ή κάθετα προς αυτόν.

Η δοκός είναι ορθογωνικής διατομής με πάχος  $h$  και πλάτος  $b$ . Η ροπή αδράνειας ως προς τον  $x$  άξονα  $I_x$  δίνεται από το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα:

$$I_x = \iint z^2 dA = \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 \frac{b}{2} dz = \frac{b}{2} \int_0^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{b}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_0^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12} \quad (22)$$

Η δοκός καταπονείται από το ομοιόμορφο κατανεμειμένο φορτίο  $q$  το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$q = \rho_v g H + \rho_\delta g h \quad (23)$$

όπου

$\rho_v$  :πυκνότητα υγρού δεξαμενής

$g$  :επιτάχυνση της βαρύτητας ( $g=9.81 \text{ m/s}^2$ )

$H$  :στάθμη υγρού δεξαμενής

$h$  :πάχος δοκού

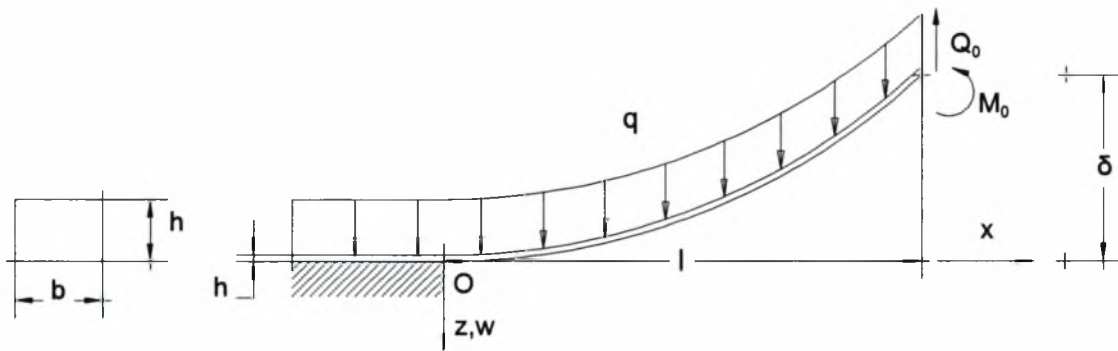
$\rho_\delta$  :πυκνότητα δοκού

Επειδή η στάθμη του υγρού της δεξαμενής  $H$  είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το πάχος της δοκού  $h$ , ο όρος  $\rho_\delta \cdot g \cdot h$  μπορεί να θεωρηθεί μηδενικός, οπότε τελικά το ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο θα δίνεται από τον τύπο:

$$q = \rho_v g H \quad (24)$$

Όσον αφορά την ανύψωση της δοκού, προέρχεται από μία κατακόρυφη δύναμη  $Q_0$ , η οποία εφαρμόζεται στο άκρο της δοκού. Το κέλυφος της δεξαμενής το οποίο είναι συγκολλημένο πάνω στην βάση της δεξαμενής, κατά την ανύψωση δημιουργεί μια ροπή  $M_0$  στο άκρο της δοκού. Έστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (οριζόντιος άξονας  $x$  - κατακόρυφος άξονας  $z$ ) με αρχή το σημείο  $O$ , το οποίο είναι το ακραίο σημείο του πάτου της δεξαμενής που δεν ανυψώνεται.





Σχήμα 16: Στοιχειώδης λωρίδα δοκού

Για να λυθεί η εξίσωση  $w''''(x) = \frac{q(x)}{EI}$  και να προσδιοριστεί η μετατόπιση  $w(x)$  πρέπει να γίνει ολοκλήρωση τέσσερις φορές διαδοχικά, πράγμα που σημαίνει ότι προκύπτουν τέσσερις σταθερές  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Οι υπολογισμοί φαίνονται αναλυτικά πιο κάτω:



$$w''''(x) = \frac{q(x)}{EI} \quad (a)$$

$$w''' = \frac{q}{EI}x + c_1 \quad (b)$$

$$w'' = \frac{q}{EI} \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (c) \quad (25)$$

$$w' = \frac{q}{EI} \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (d)$$

$$w = \frac{q}{EI} \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (e)$$

Οι σταθερές αυτές πρέπει να υπολογιστούν από τις οριακές συνθήκες. Στο σημείο O, δηλαδή στην αρχή των αξόνων δεν υπάρχει ανύψωση της δοκού, άρα η ελαστική γραμμή, η κλίση και η ροπή στο  $x=0$  είναι μηδέν. Αναλυτικά είναι:

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\ w'(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ w''(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow w(x) = \frac{q}{24EI} x^4 + \frac{c_1}{6} x^3 \quad (26)$$

Στο άκρο εφαρμόζονται η δύναμη  $Q_0$  και η ροπή  $M_0$ . Εκεί έχουμε την μέγιστη ανύψωση και η δύναμη και η ροπή εκφράζονται με τη βοήθεια της τρίτης και δεύτερης παραγώγου αντίστοιχα για μήκος  $x=l$  ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} -EIw''(l) = M_0 \Rightarrow \frac{q}{2EI} l^2 + c_1 l = -\frac{M_0}{EI} \\ -EIw'''(l) = -Q_0 \Rightarrow \frac{q}{EI} l + c_1 = \frac{Q_0}{EI} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \pm \frac{\sqrt{Q_0^2 + 2qM_0}}{EI} \quad (27) \\ l = \frac{Q_0 \pm \sqrt{Q_0^2 + 2qM_0}}{q} = \frac{Q_0}{q} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{qM_0}{Q_0^2}} \right] \quad (28) \end{array} \right.$$

$$\text{Τότε } Q(0) = \pm \sqrt{Q_0^2 + 2qM_0} \quad (29)$$

Διακρίνονται τρεις περιπτώσεις:

Αν  $M_0 > 0$ , επιλέγεται μόνο το θετικό πρόσημο (απόρριψη του αρνητικού μήκους  $l < 0$ )

Αν  $M_0 < 0$  (αλλά  $Q_0^2 + 2qM_0 \geq 0$ ), μπορούν να επιλεγούν και τα δύο πρόσημα.

Αν  $M_0 = 0$  τότε οι (27) και (28) γίνονται:

$$c_1 = \frac{Q_0}{EI}$$

$$l = \frac{2Q_0}{q}$$

οπότε η εξίσωση της ελαστικής γραμμής γίνεται:

$$w = \frac{Q_0}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (30)$$

και επίσης η (29) γίνεται:

$$Q(0) = -\frac{ql}{2} = -Q_0$$

Η ανάλυση του προβλήματος θα γίνει χρησιμοποιώντας μηδενική ροπή ( $M_0 = 0$ ). Έτσι η σχέση:

$$w = \frac{Q_0}{Eb} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]$$

για  $x=l$  (όπου  $l$  είναι το μήκος που κάθε φορά ανυψώνεται) η προηγούμενη σχέση γίνεται:

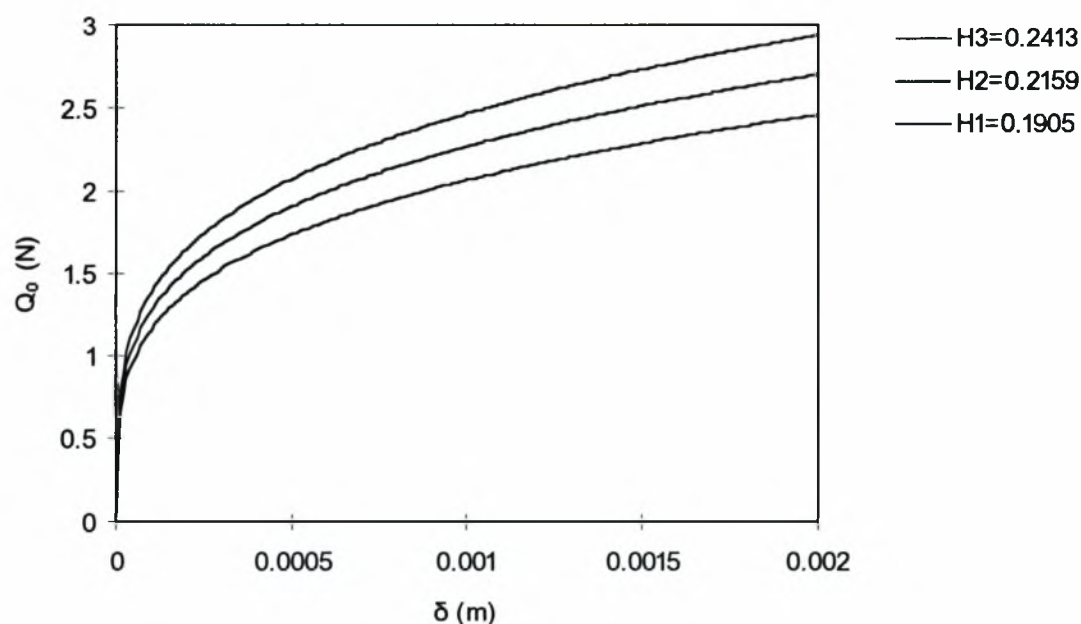
$$w(x = l) = \delta = \frac{Q_0}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3 (1 - 2) = -\frac{Q_0}{Eb} \left(\frac{l}{h}\right)^3$$

$$\text{αλλά } l = \frac{2 Q_0}{q} \text{ οπότε:}$$

$$Q_0 = \left[ -\frac{\delta Eb h^3 q^3}{8} \right]^{\frac{1}{4}} \text{ (A)}$$

Με την βοήθεια του τύπου (A) θα γίνει το διάγραμμα (A) (διάγραμμα δύναμης Q ως προς ανύψωση δ για μια λωρίδα). Σ' αυτό το διάγραμμα τα διάφορα μεγέθη έχουν διαστάσεις. Οι τρεις καμπύλες που φαίνονται στο διάγραμμα εκπροσωπούν τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού για το μοντέλο της δεξαμενής με τιμές  $H_1=0.1905\text{m}$ ,  $H_2=0.2159\text{m}$  και  $H_3=0.2413\text{m}$ .

Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα όσο αυξάνεται η στάθμη του υγρού της δεξαμενής προκύπτει καμπύλη που βρίσκεται πιο ψηλά από τις άλλες. Για μικρές τιμές της δύναμης η ανύψωση είναι μικρή και αυτή η μεταβολή στο διάγραμμα μοιάζει με ευθεία γραμμή. Από ένα όμως σημείο και μετά και καθώς η δύναμη αυξάνεται η ευθεία γίνεται καμπύλη και από εκεί και πέρα ομαλοποιείται σε ευθεία. Στο σημείο της μέγιστης καμπυλότητας εμφανίζεται το φαινόμενο αποκόλλησης της βάσης.



### 3.1.2 Αδιαστατοποιημένο διάγραμμα δύναμης - ανύψωσης

Θα γίνει ένα δεύτερο διάγραμμα (B) στο οποίο η δύναμη  $Q_0$  και ανύψωση  $\delta$  θα είναι αδιάστατα μεγέθη. Ο τρόπος με τον οποίο τα μεγέθη αυτά θα γίνουν αδιάστατα περιγράφεται ως εξής:

$$Q_0 = \left[ -\frac{\delta E b h^3 q^3}{8} \right]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-\frac{\delta E b h^3 q^3}{8}} = q h \sqrt[4]{-\frac{\delta E b}{8 q h}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_0 = q h \sqrt[4]{-\frac{\delta E b}{8 q h}} \Leftrightarrow \frac{Q_0}{q h} = \sqrt[4]{-\frac{\delta E b}{8 q h}} \Leftrightarrow$$

Το πηλίκο  $\frac{Q_0}{q h}$  είναι αδιάστατη δύναμη ως προς το πάχος  $h$

και συμβολίζεται με  $P$ . Έτσι ορίζεται  $P = \frac{Q_0}{q h}$ .

$$P = \sqrt[4]{-\frac{\delta E b}{8 q h}} \Leftrightarrow \frac{P}{\frac{b}{h}} = \frac{\sqrt[4]{-\frac{\delta E b}{8 q h}}}{\frac{b}{h}}$$

Το πηλίκο  $\frac{P}{b/h}$  είναι αδιάστατη δύναμη και συμβολίζεται με  $S$ .

Έτσι ορίζεται  $S = \frac{P}{b/h}$ .

$$S = \left(\frac{b}{h}\right)^{-1} \sqrt[4]{-\frac{\delta E b}{8 q h}} \Leftrightarrow S = \sqrt[4]{-\frac{\delta E b \left(\frac{b}{h}\right)^{-4}}{8 q h}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \sqrt[4]{-\frac{\delta E h^3}{8 q b^3}} \Leftrightarrow S = \sqrt[4]{-\frac{E h^4}{8 q b^3} \frac{\delta}{h}}$$

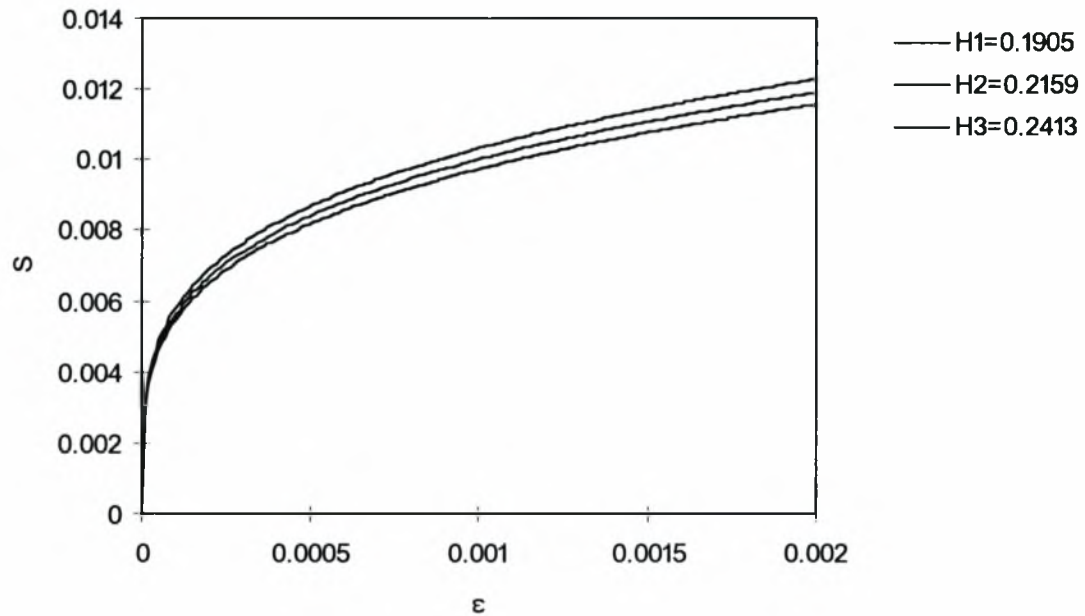
Το πηλίκο  $\frac{\delta}{h}$  είναι ανύψωση ως προς το πάχος  $h$  είναι

δηλαδή αδιάστατο μήκος και συμβολίζεται με  $\varepsilon$ . Έτσι ορίζεται  $\frac{\delta}{h} = \varepsilon$ .

$$S = \sqrt[4]{-\frac{E h^4}{8 q b^3} \varepsilon} \Leftrightarrow S = \left[ -\frac{E h^4}{8 q b^3} \varepsilon \right]^{\frac{1}{4}} \text{ (B)}$$

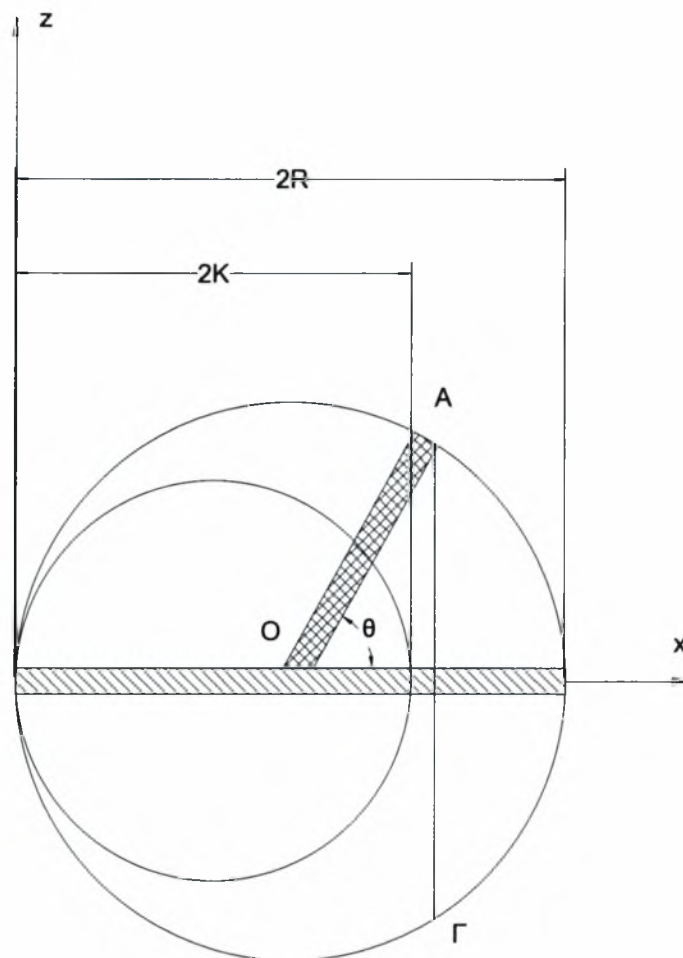
Το διάγραμμα (B) είναι ίδιο με το (A) μόνο που τα μεγέθη είναι αδιάστατα. Οι τρεις καμπύλες που φαίνονται στο διάγραμμα εκπροσωπούν τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού για το μοντέλο της δεξαμενής με τιμές  $H_1=0.1905\text{m}$ ,  $H_2=0.2159\text{m}$  και  $H_3=0.2413\text{m}$ . Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα όσο αυξάνεται η στάθμη του υγρού της δεξαμενής προκύπτει καμπύλη που βρίσκεται πιο χαμηλά από τις

άλλες. Το αδιάστατο διάγραμμα της δύναμης μεταβάλλεται ποιοτικά όπως αυτό της δύναμης.



### 3.1.3 Διάγραμμα ροπής - ανύψωσης

Μέχρι τώρα υπολογίστηκε η δύναμη για μια λωρίδα της κυκλικής βάσης της δεξαμενής η οποία φαίνεται διαγραμματισμένη στο πιο κάτω σχήμα:



Σχήμα 17

Έστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (οριζόντιος άξονας  $x$  - κατακόρυφος άξονας  $z$ ). Έστω σημείο  $O$  πάνω στον άξονα  $x$  από το οποίο εγγράφεται κύκλος ακτίνας  $R$  έτσι ώστε η περιφέρεια αυτού του κύκλου να περνά από την αρχή των αξόνων. Το μέρος εκείνο της δεξαμενής που κάθε φορά παραμένει επίπεδο (δεν ανυψώνεται) προσεγγίζεται με τον κύκλο ακτίνας  $K$ . Η λωρίδα σε τυχαία γωνία  $\theta$  φαίνεται στο σχήμα με διπλή διαγράμμιση. Σ' αυτή τη θέση όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία  $AG$  έχουν την ίδια ανύψωση.



Η δύναμη ανά μονάδα μήκους σε μία τυχαία θέση  $\theta$  που ασκείται στο άκρο της στοιχειώδους οριζόντιας λωρίδας είναι:

$$\begin{aligned} Q_0(\theta) &= \sqrt[4]{\frac{\delta(\theta)}{8} E b h^3 q^3} = \sqrt[4]{\frac{\delta(\theta)}{8} E \frac{b^4}{b^3} h^3 q^3} = b \sqrt[4]{\frac{\delta(\theta)}{8} E h^3 \frac{q^3}{b^3}} = \\ &= b \sqrt[4]{\frac{\delta(\theta)}{8} E h^3 T^3} \Rightarrow Q(\theta) = \frac{Q_0(\theta)}{b} = \sqrt[4]{\frac{\delta(\theta)}{8} E h^3 T^3} \end{aligned} \quad (a)$$

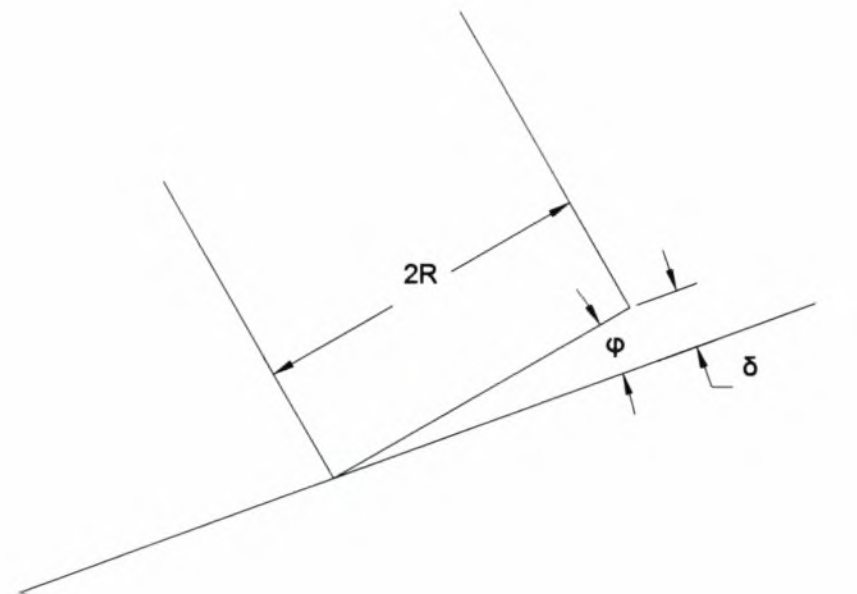
Η δύναμη θα μετατραπεί σε ροπή πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά με την προβολή της τυχαίας λωρίδας OA που είναι  $R \cos \theta$ . Για να βρεθεί η συνολική ροπή που δημιουργείται λόγω ανύψωσης της δεξαμενής θα γίνει ολοκλήρωση κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας  $R$  ως προς  $\theta$ .

Δηλαδή:

$$dM = (Q(\theta) R d\theta) R \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 2 \int_0^{\pi} R^2 \cos \theta Q(\theta) d\theta$$

Η σχέση που συνδέει τη μέγιστη ανύψωση  $\delta$  της δεξαμενής με τη γωνία ανύψωσης  $\varphi$ , από τριγωνομετρία στο πιο κάτω σχήμα,



Σχήμα 18

είναι  $\tan \phi = \frac{\delta}{2R}$ .

Για μικρές όμως γωνίες  $\phi$  μπορεί να θεωρηθεί ότι  $\tan \phi \cong \phi$ ,  
οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται  $\phi = \frac{\delta}{2R}$ . Η ανύψωση  $\delta$  σε τυχαία  
θέση  $\theta$  σε συνάρτηση με την ακτίνα  $R$  της δεξαμενής και τη γωνία  
ανύψωσης  $\phi$  δίνεται από τη σχέση:

$$\delta(\theta) = \frac{\delta}{2R}(R + R \cos \theta) = \frac{\delta}{2}(1 + \cos \theta) = R(1 + \cos \theta)\phi \quad (b)$$

Έτσι τελικά με τη βοήθεια των σχέσεων (a), (b) η ροπή  
δίνεται από τον τύπο:

$$M = 2R^2 \int_0^{\pi} \cos \theta \sqrt[4]{\frac{E}{8} h^3 T^3 R \phi (1 + \cos \theta)} d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 2R^2 \int_0^{\pi} \sqrt[4]{\frac{E}{8} h^3 T^3 R \phi (1 + \cos \theta)} \cos^4 \theta d\theta$$

Τα μεγέθη τα οποία δεν εξαρτώνται από το  $\theta$  είναι σταθερά και μπορούμε να τα βγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι προκύπτει:

$$M = 2R^2 \sqrt[4]{\frac{E}{8} h^3 T^3 \phi R} \int_0^{\pi} \sqrt[4]{(1 + \cos \theta)} \cos^4 \theta d\theta$$

Αλλά

$$2R^2 \int_0^{\pi} [(1 + \cos \theta) \cos^4 \theta]^{\frac{1}{4}} d\theta = 3.4759$$

οπότε η σχέση που δίνει τη συνολική ροπή ως προς τη γωνία ανύψωσης  $\phi$  έχει ως εξής:

$$\Rightarrow M = 3.4759 R^2 \left[ \frac{E}{8} h^3 T^3 R \phi \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\Gamma)$$

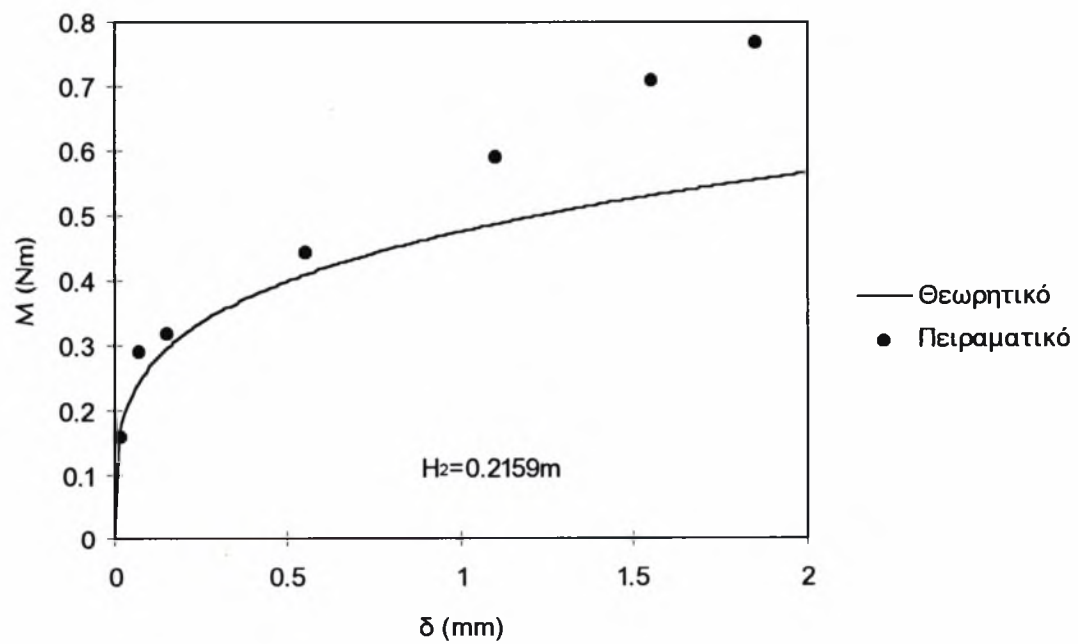
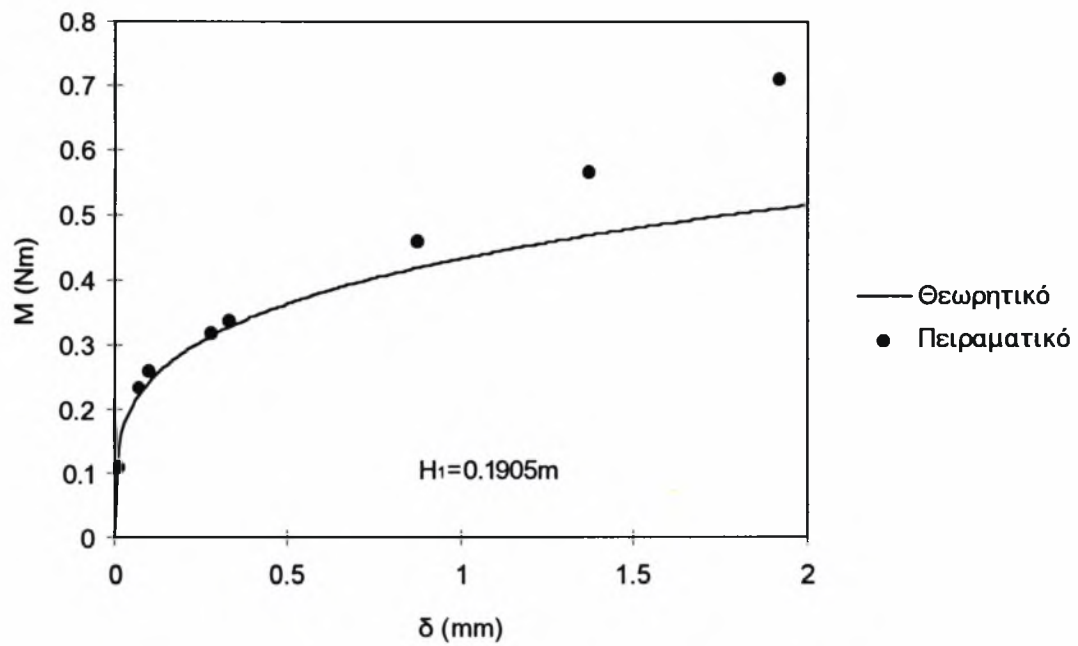
Έτσι προκύπτει μια σχέση που συνδέει τη ροπή που δημιουργείται λόγω ανύψωσης της δεξαμενής, ως προς τη γωνία ανύψωσης  $\phi$ . Επειδή  $\phi = \frac{\delta}{2R}$ , η συνολική ροπή ως προς την ανύψωση  $\delta$  δίνεται από τον τύπο:

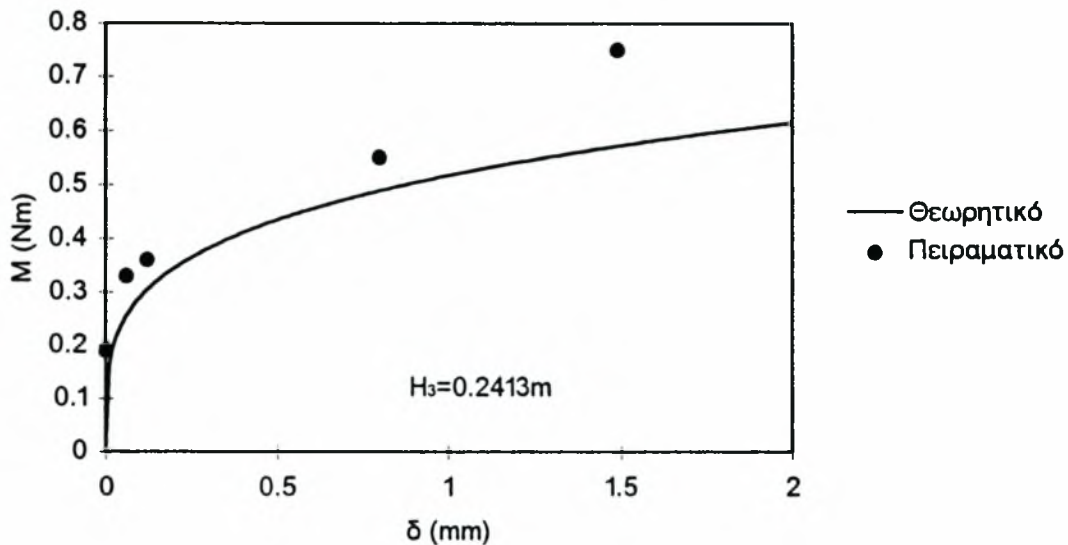
$$M = 3.4759 R^2 \left[ \frac{E}{8} h^3 T^3 R \frac{\delta}{2R} \right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = 3.4759 R^2 \left[ \frac{E}{16} h^3 T^3 \delta \right]^{\frac{1}{4}} (\Delta)$$

Θα γίνει το διάγραμμα της ροπής που δημιουργείται λόγω ανύψωσης της δεξαμενής ως προς αυτή την ανύψωση για τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού του μοντέλου της δεξαμενής με τιμές  $H_1=0.1905\text{m}$ ,  $H_2=0.2159\text{m}$  και  $H_3=0.2413\text{m}$ .

Θα συγκριθεί κάθε ένα από αυτά τα τρία διαγράμματα με τα διαγράμματα που υπάρχουν από τα πειραματικά δεδομένα και τα οποία παριστάνονται στο σχήμα ως τελείες. Από τη σύγκριση μπορεί να φανεί ότι για μικρές τιμές της δύναμης τα δύο διαγράμματα (θεωρητικό - πειραματικό) σχεδόν συμπίπτουν. Από ένα όμως σημείο και μετά και καθώς η δύναμη αυξάνεται τα δύο διαγράμματα παρουσιάζουν απόκλιση μεταξύ τους. Σε γενικές γραμμές φαίνεται ότι υπάρχει η ίδια ποιοτική μεταβολή.





### 3.1.4 Διάγραμμα δύναμης, αδιάστατης δύναμης και ροπής για την πραγματική δεξαμενή

Μέχρι τώρα έγιναν τα διαγράμματα της δύναμης, της αδιάστατης δύναμης και της ροπής ως προς την ανύψωση της δεξαμενής για τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού που αφορούσαν το μοντέλο. Έγινε σύγκριση αυτών των διαγραμμάτων που προέκυψαν από την θεωρητική ανάλυση με τα διαγράμματα από τα πειραματικά δεδομένα.

Τα ίδια διαγράμματα θα γίνουν και για την πραγματική δεξαμενή συγκρινόμενα τώρα ως προς τρεις διαφορετικές σταθερές υγρού. Αυτές είναι οι  $H_1=5.4\text{m}$  η οποία είναι και η στάθμη που φαίνεται στο σχέδιο το οποίο επισυνάπτεται,  $H_2=6\text{m}$  και  $H_3=7\text{m}$ .

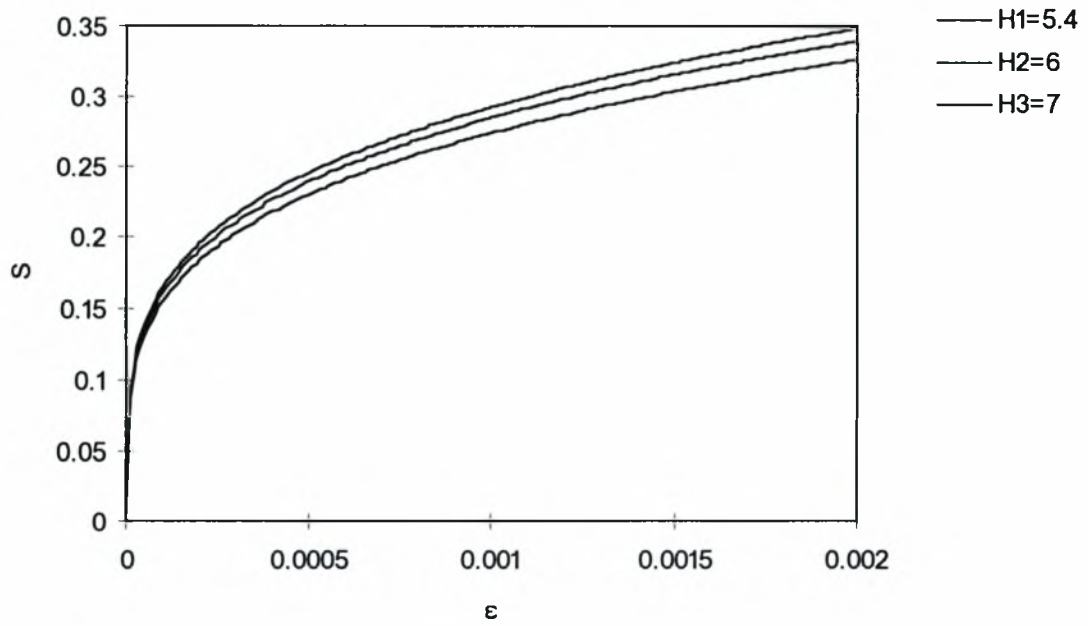
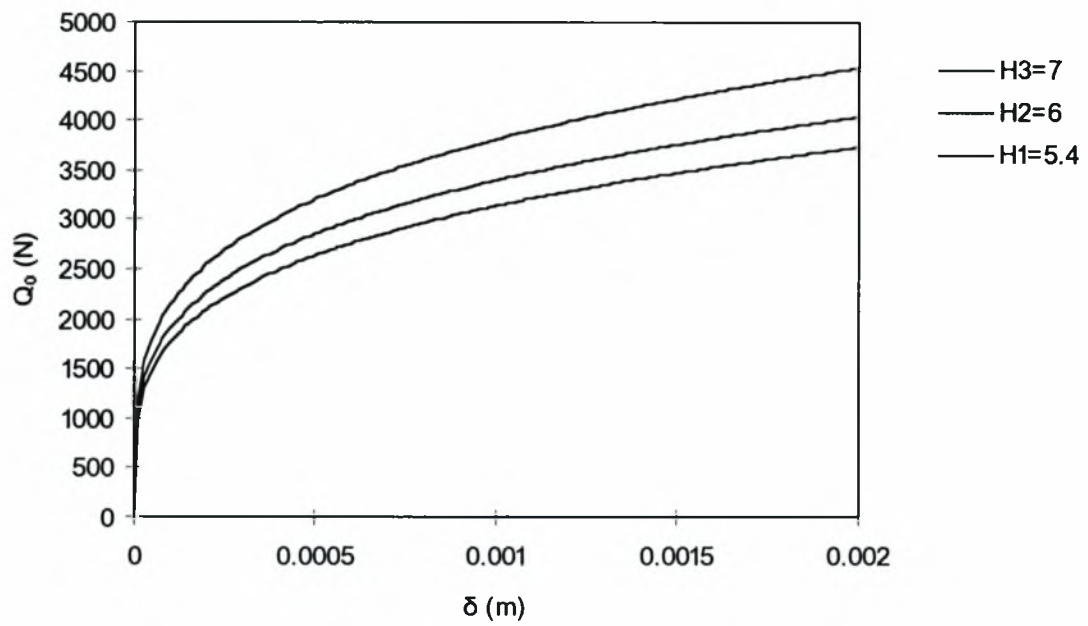
Η δεξαμενή που θα εξεταστεί ανήκει στις Χημικές Βιομηχανίες Βορείου Ελλάδος στη Θεσσαλονίκη. Όσον αφορά την

έδραση της πατάει πάνω σε μια βάση αποτελούμενη από μορφοδοκούς τοποθετημένους κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή αυτό σημαίνει ότι είναι αναγκύρωτη.

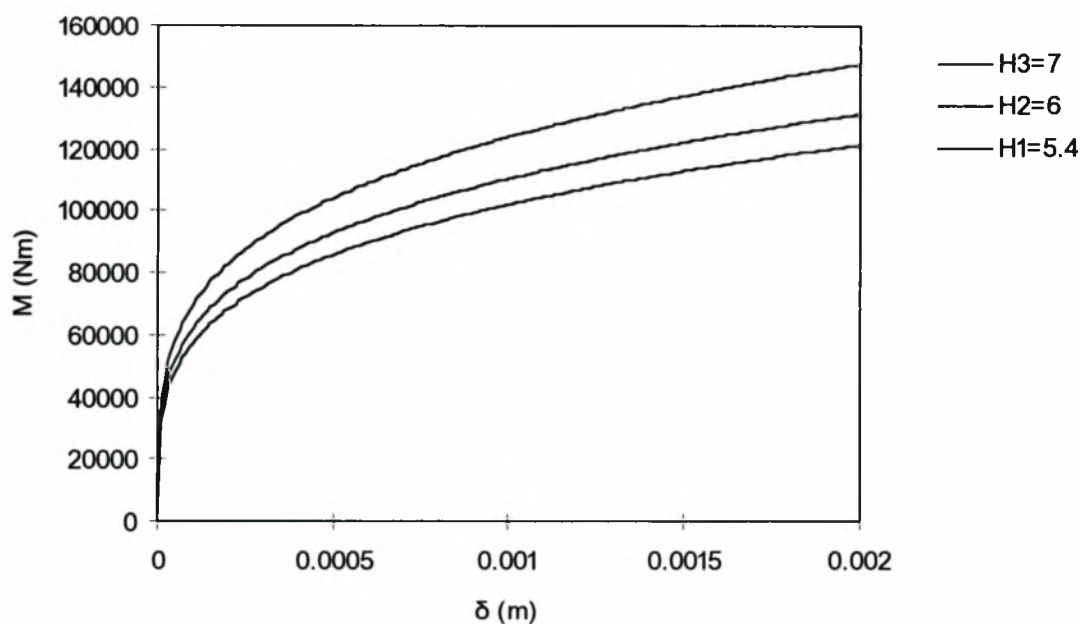
Η θεμελίωση είναι από σκυρόδεμα B225/STI μέσα στην οποία βρίσκονται οι μορφοδοκοί. Το έδαφος στο οποίο βρίσκεται είναι στερεό. Το περιεχόμενο της δεξαμενής είναι 98% θειικό οξύ διαλυμένο σε νερό και έχει πυκνότητα  $640 \text{ Kg/m}^3$ . Ως υλικό κατασκευής χρησιμοποιούνται χαλύβδινες λαμαρίνες θερμής εξέλασης ST37-2, με μέτρο ελαστικότητας  $200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  και λόγο του Poisson  $\nu = 0.3$ . Ο όγκος του περιεχομένου δοχείου είναι  $157.08 \text{ m}^3$ . Το ειδικό βάρος του περιεχομένου δοχείου είναι  $1.83 \text{ Mr/m}^3$ . Το βάρος του περιεχομένου δοχείου είναι  $287.46 \text{ Mr}$ . Το ίδιο βάρος δοχείου είναι  $7413.66 \text{ Kr}$ . Οι διαστάσεις της δεξαμενής είναι διάμετρος  $5\text{m}$  και ύψος  $8\text{m}$ .

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα της δύναμης και της ροπής καθώς αυξάνεται η στάθμη του υγρού οι καμπύλες μετατοπίζονται προς τα επάνω σε αντίθεση με το διάγραμμα της αδιάστατης δύναμης στο οποίο καθώς αυξάνεται η στάθμη του υγρού οι καμπύλες πέφτουν.

Ποιοτικά για μικρές τιμές είτε της δύναμης είτε της ροπής προκύπτουν μικρές τιμές για την ανύψωση και το διάγραμμα σ' αυτή την περιοχή μοιάζει αρκετά με ευθεία. Μετά όμως από αυτό το σημείο το διάγραμμα παρουσιάζει τη μέγιστη καμπυλότητα όπου έχουμε και την αποκόλληση της βάσης της δεξαμενής. Στη συνέχεια η κατάσταση ομαλοποιείται και το διάγραμμα τείνει πάλι να γίνει ευθεία γραμμή.







## 3.2 Επίλυση μοντέλου πλάκας και κελύφους

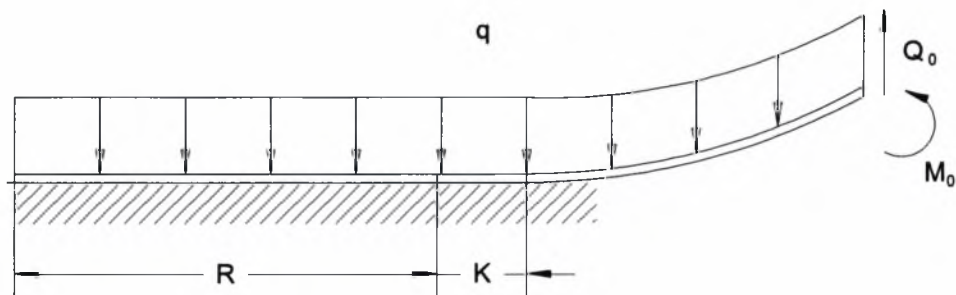
### 3.2.1 Κατάστρωση εξισώσεων πλάκας

Η σύγκριση των διαγραμμάτων της ροπής ως προς την ανύψωση για τις τρεις διαφορετικές στάθμες υγρού του μοντέλου της δεξαμενής με την θεωρητική ανάλυση δείχνει ότι μετά το σημείο όπου γίνεται η αποκόλληση (το σημείο στο οποίο οι καμπύλες έχουν απότομη αλλαγή κατεύθυνσης) υπάρχει απόκλιση ανάμεσα σε πειραματικά δεδομένα και την θεωρία.

Γι' αυτό το λόγο θα γίνει μια καλύτερη προσέγγιση θεωρίας και πειράματος συμπεριλαμβάνοντας υπόψη και το τοίχωμα της δεξαμενής το οποίο θα θεωρηθεί ως κέλυφος.

Αρχικά θα θεωρηθεί μόνο η βάση της δεξαμενής η οποία θα προσεγγιστεί με πλάκα και θα εξαχθούν κάποιες εξισώσεις. Στη συνέχεια θα θεωρηθεί μόνο το τοίχωμα το οποίο θα προσεγγιστεί με κέλυφος και θα εξαχθούν επίσης κάποιες εξισώσεις. Μετά θα θεωρηθεί η πλάκα και το κέλυφος μαζί έτσι ώστε να αντιστοιχιστούν κάποια φορτία και εσωτερικές δυνάμεις παίρνοντας έτσι και από εδώ κάποιες εξισώσεις.

Για την κατάστρωση των εξισώσεων της πλάκας η βάση της δεξαμενής φορτίζεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



*Σχήμα 19*

όπου τα σύμβολα στο σχημα σημαίνουν:

R: ακτίνα δεξαμενής

K: το μέρος εκείνο της δεξαμενής που κάθε φορά παραμένει επίπεδο

q: το ομοιόμορφο καταναμημένο φορτίο

$Q_0$ : η δύναμη που ανασκώνει τη δεξαμενή

$M_0$ : η δημιουργούμενη ροπή στο σημείο σύνδεσης πλάκας και κελύφους κατά το σήκωμα της δεξαμενής.

Μια κυκλική πλάκα ακτίνας  $R$  πιέζεται από ένα ομοιόμορφο φορτίο  $q$  κατά μήκος μιας απόλυτης άκαμπτης θεμελίωσης. Εάν η ροπή  $M_a$  εφαρμόζεται κατά μήκος του άκρου της πλάκας ένα μέρος της πλάκας σχήματος δακτυλιδιού μπορεί να λυγίσει, όπως φαίνεται στην εικόνα δεδομένου ότι ένα μέσο τμήμα ακτίνας  $K$  μπορεί να παραμείνει επίπεδο.

Τέτοιες συνθήκες υπερνικούνται, για παράδειγμα, στην κάμψη της βάσης της πλάκας για κυκλικές κυλινδρικές δεξαμενές γεμισμένες με υγρό. Η ροπή  $M$  αντιπροσωπεύει σ' αυτή την περίπτωση τη δράση του κυλινδρικού τοιχώματος σε μια δεξαμενή, η οποία υφίσταται μια κάμψη στη βάση. Εφαρμόζοντας στο μέρος της βάσης της πλάκας που έχει σχήμα δακτυλιδιού τις γνωστές λύσεις για μία ομοιόμορφη φόρτισμένη κυκλική πλάκα (βλέπε σχέσεις π,κεφ.2.3.2) βρίσκουμε την ελαστική γραμμή.

Η ελαστική γραμμή που δημιουργείται δίνεται από την εξίσωση:

$$w(r) = c_1 + c_2 \lg r + c_3 r^2 + c_4 r^2 \lg r + \frac{qr^4}{64D} \quad (31)$$

και οι τρεις πρώτες παράγωγες αυτής, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στις οριακές συνθήκες, είναι:

$$w' = c_2 \frac{1}{R} + 2c_3 R + 2c_4 R \lg R + c_4 R + \frac{qR^3}{16D} \quad (32)$$

$$w'' = -c_2 \frac{1}{R^2} + 2c_3 + 2c_4 \log R + 3c_4 + 3 \frac{qR^2}{16D} \quad (33)$$

$$w''' = c_2 \frac{2}{R^3} + 2c_4 \frac{1}{R} + 3 \frac{qR}{8D} \quad (34)$$

Από την ελαστική γραμμή της πλάκας χρησιμοποιώντας οριακές συνθήκες προκύπτουν οι εξής τρεις εξισώσεις:

α) Η ελαστική γραμμή στο  $r=K$  είναι μηδέν, δηλαδή  $(w)_{r=K}=0$  οπότε η εξίσωση (31) γίνεται:

$$c_1 + c_2 \log K + c_3 K^2 + c_4 K^2 \log K + \frac{qK^4}{64D} = 0 \quad (35)$$

β) Η κλίση της ελαστικής γραμμής στο  $r=K$  είναι μηδέν, δηλαδή  $\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=K} = 0$  οπότε η εξίσωση (32) γίνεται:

$$c_2 \frac{1}{K} + 2c_3 K + c_4 K (2 \log K + 1) + \frac{qK^3}{16D} = 0 \quad (36)$$

γ) Η ροπή  $M_r$  στο  $r=K$  είναι μηδέν, δηλαδή  $(M_r)_{r=K}=0$ . Η ροπή  $M_r$  δίνεται από την πρώτη των εξισώσεων (12) που είναι η εξής:

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} + \nu \left( \frac{1}{K} \frac{\partial w}{\partial K} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right].$$

Επειδή το πρόβλημα μας είναι αξονοσυμμετρικό η παράγωγος ως προς  $\theta$  είναι μηδέν, δηλαδή:

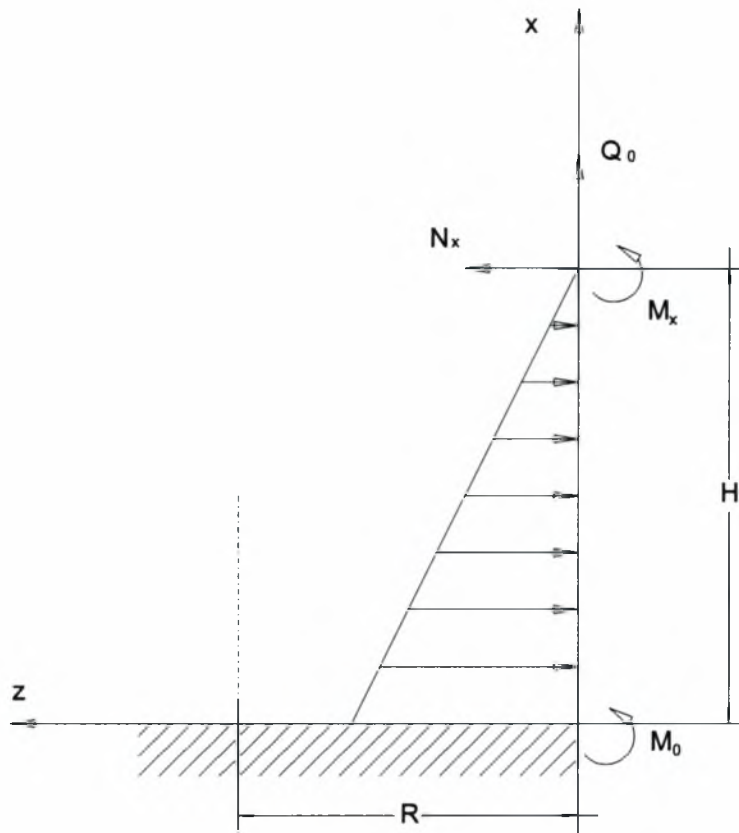
$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial K^2} + \frac{\nu}{K} \frac{\partial w}{\partial K} \right].$$

Οπότε η προηγούμενη εξίσωση με τη βοήθεια των (32), (33) γίνεται:

$$c_2 \frac{\nu - 1}{K^2} + 2c_3 (\nu + 1) + c_4 (3 + 2 \log K + 2\nu \log K + \nu) + \frac{q K^2}{16 D} (3 + \nu) = 0. \quad (37)$$

### 3.2.2 Κατάστρωση εξισώσεων κελύφους

Για την κατάστρωση εξισώσεων του κελύφους θα χρησιμοποιηθεί η θεωρία κυλινδρικών δεξαμενών με ομοιόμορφο πάχος τοιχώματος, που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2.3.3. Το τοίχωμα της δεξαμενής το οποίο θα θεωρηθεί ως κέλυφος φορτίζεται όπως φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 20

όπου τα σύμβολα στο σχήμα σημαίνουν:

$R$  : η ακτίνα της δεξαμενής

$H$  : η στάθμη του υγρού

$M_0$  : η δημιουργούμενη ροπή στο σημείο σύνδεσης πλάκας και κελύφους κατά το σήκωμα της δεξαμενής.

$Q_0$  : η δύναμη που ανασηκώνει τη δεξαμενή

$N_x$  : η οριζόντια δύναμη σε μια τυχαία θέση  $x$

$M_x$  : η ροπή στην τυχαία θέση  $x$

Η ελαστική γραμμή που δημιουργείται ως προς τον  $x$  άξονα δίνεται από την εξίσωση:

$$w_x = e^{\beta x} (c'_1 \cos \beta x + c'_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c'_3 \cos \beta x + c'_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma (H - x) R^2}{Eh} \quad (40)$$

και οι δύο πρώτες μερικές παράγωγοι οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στις οριακές συνθήκες είναι:

$$w'_x = \beta e^{\beta x} (c'_1 \cos \beta x + c'_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (-\beta c'_1 \sin \beta x + \beta c'_2 \cos \beta x) - \beta e^{-\beta x} (c'_3 \cos \beta x + c'_4 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (-\beta c'_3 \sin \beta x + \beta c'_4 \cos \beta x) - \frac{\gamma (H - 1) R^2}{Eh} \quad (41)$$

$$w''_x = 2\beta^2 e^{\beta x} (-c'_1 \sin \beta x + c'_2 \cos \beta x) + 2\beta^2 e^{-\beta x} (c'_3 \sin \beta x - c'_4 \cos \beta x) \quad (42)$$

Στις περισσότερες πρακτικές περιπτώσεις το πάχος του τοιχώματος  $h$  είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες δύο διαστάσεις της δεξαμενής δηλαδή την ακτίνα  $R$  και το βάθος  $H$ , οπότε το κέλυφος μπορεί να θεωρηθεί απείρως μακρύ. Οι σταθερές  $c'_1$  και  $c'_2$  είναι τότε ίσες με μηδέν οπότε η εξίσωση της ελαστικής γραμμής γίνεται:

$$w_k = e^{-\beta x} (c'_3 \cos \beta x + c'_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma (H - x) R^2}{Eh} \quad (43)$$

Οι σταθερές  $c'_3$  και  $c'_4$  μπορούν να βρεθούν από τις συνθήκες στη βάση της δεξαμενής. Θεωρώντας ότι το κατώτερο άκρο του τοιχώματος είναι χτισμένο μέσα σε μια απόλυτη συμπαγής θεμελίωση, η οριακή συνθήκη που δίνει το  $c'_3$  είναι:

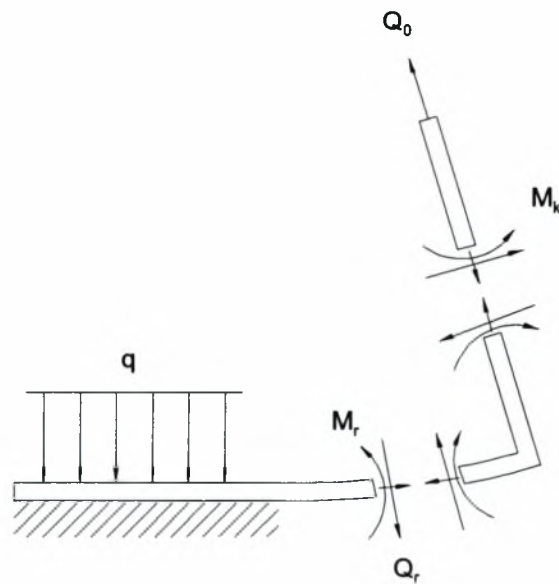
$$(w_k)_{x=0} = c'_3 - \frac{\gamma R^2 H}{Eh} = 0 \Rightarrow c'_3 = \frac{\gamma R^2 H}{Eh} \quad (44)$$

Η σταθερά  $c'_4$  θα βρεθεί από την αντιστοιχία των εσωτερικών δυνάμεων και φορτίων στη γωνία.

### 3.2.3 Αντιστοιχία εξισώσεων πλάκας και κελύφους

Οι υπόλοιπες εξισώσεις που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των αγνώστων θα υπολογιστούν από την αντιστοιχία εσωτερικών δυνάμεων και φορτίων μεταξύ πλάκας και κελύφους. Το άκρο της δεξαμενής που ανασηκώνεται, δηλαδή το σημείο στο οποίο ενώνεται η πλάκα με το κέλυφος δεν παραμορφώνεται. Οπότε από τη γωνία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,





Σχήμα 21

μπορούν να γίνουν οι εξής αντιστοιχίες:

α) Για την αναλυτική έκφραση της δύναμης  $Q_r$ , η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \text{ ισχύει ότι } Q_r = - Q_0$$

Από τη σχέση (g) του κεφαλαίου 2.3.2 το  $\Delta w$  για  $r=R$  είναι:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

Οπότε η δύναμη  $Q_r$  είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη  $Q_0$  που ανασκώνει τη δεξαμενή.

$$-Q_0 = Q_r = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial R} \right).$$

Τελικά προκύπτει η εξίσωση που δίνει το  $Q_0$ , η οποία είναι η:

$$Q_0 = D \left( \frac{4}{R} c_4 + \frac{qR}{2D} \right) \quad (45)$$

β) Οι κλίσεις της πλάκας και του κελύφους (δηλαδή οι πρώτες παράγωγοι των ελαστικών γραμμών) είναι ίσες και αντίθετες, δηλαδή:

$$w'(r = R) = -w'_k(x = 0)$$

οπότε η εξίσωση που προκύπτει από αυτή την αντιστοιχία είναι:

$$c_2 \frac{1}{R} + 2Rc_3 + c_4 R (2 \lg R + 1) + \beta c'_4 - \frac{\beta \gamma R^2 H}{Eh} - \frac{\gamma (H - 1) R^2}{Eh} + \frac{qR^3}{16D} = 0 \quad (46)$$

γ) Οι ροπές του κελύφους και της πλάκας είναι ίσες και αντίθετες, δηλαδή  $M = -M_k$ .

Το  $M_k$  είναι  $M_k = -D' w''_k(x = 0)$ .

Το  $M$  για τη πλάκα δίνεται από την αναλυτική έκφραση:

$$M(r = R) = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial R} \right]$$

οπότε η αντιστοιχία έχει ως εξής:

$$-D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial R^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial R} \right] = D' w''(0) \Rightarrow$$

$$-D \left[ c_2 \frac{\nu - 1}{R^2} + 2c_3(\nu + 1) + c_4(3 + 2 \log R + 2\nu \log R + \nu) + \frac{qR^2}{16D}(3 + \nu) \right] + 2D'\beta^2 c'_4 = 0 \quad (47)$$

### 3.2.4 Σύνοψη εξισώσεων μη γραμμικού συστήματος

Οι τρεις εξισώσεις που προήλθαν από τις οριακές συνθήκες για την πλάκα καθώς και οι τρεις εξισώσεις που προήλθαν από τις αντιστοιχίες δύναμης, ροπής και κλίσης στο σημείο ένωσης πλάκας και κελύφους αποτελούν ένα μη γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων με τους εξής έξι αγνώστους:

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, K, c'_4)$$

Η γενική μορφή του συστήματος είναι η εξής:

$$c_1 + c_2 \log K + c_3 K^2 + c_4 K^2 \log K + \frac{qK^4}{64D} = 0$$

$$c_2 \frac{1}{K} + 2 c_3 K + c_4 K (2 \log K + 1) + \frac{qK^3}{16 D} = 0$$

$$c_2 \frac{\nu - 1}{K^2} + 2 c_3 (\nu + 1) + c_4 (3 + 2 \log K + 2 \nu \log K + \nu) + \frac{qK^2}{16 D} (3 + \nu) = 0$$

$$- D \left( \frac{4}{R} c_4 + \frac{qR}{2 D} \right) + Q_0 = 0$$

$$c_2 \frac{1}{R} + 2 R c_3 + c_4 R (2 \log R + 1) + \beta c'_4 - \frac{\beta \gamma R^2 H}{Eh} - \frac{\gamma (H - 1) R^2}{Eh} + \frac{qR^3}{16 D} = 0$$

$$- D \left[ c_2 \frac{\nu - 1}{R^2} + 2 c_3 (\nu + 1) + c_4 (3 + 2 \log R + 2 \nu \log R + \nu) + \frac{qR^2}{16 D} (3 + \nu) \right] +$$

$$+ 2 D' \beta^2 c'_4 = 0$$

Κάποια από τα σταθερά μεγέθη που εμφανίζονται στις πιο πάνω εξισώσεις μπορούν να δωθούν από αναλυτικές εκφράσεις. Αυτά τα μεγέθη είναι:

- Η καμπτική στιβαρότητα  $D$  της πλάκας η οποία δίνεται

$$\text{από τον τύπο } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

- Η καμπτική στιβαρότητα  $D'$  του κελύφους η οποία

$$\text{δίνεται από τον τύπο } D' = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^3)}$$

- Η σταθερά  $\beta$  η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4R^2D'}}$$

- Το ειδικό βάρος  $\gamma$  το οποίο δίνεται από τον τύπο

$$\gamma = \rho g$$

## 4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στην παρούσα εργασία εξετάστηκε ο υπολογισμός ισοδύναμου ελατηρίου αποκόλλησης σε αναγκύρωτη δεξαμενή υγρού ο οποίος ουσιαστικά γίνεται με την δημιουργία των διαγραμμάτων ροπής - ανύψωσης.

Έτσι η μελέτη επικεντρώθηκε στη δημιουργία ενός διαγράμματος της ροπής που δημιουργείται λόγω ανύψωσης της δεξαμενής ως προς την ανύψωση της. Το διάγραμμα έγινε για ένα μοντέλο δεξαμενής όπου υπήρχε και σύγκριση με κάποια πειραματικά δεδομένα, καθώς και για την πραγματική δεξαμενή. Χρησιμοποιήθηκαν δύο μέθοδοι γι' αυτό το σκοπό από τις οποίες στην πρώτη λήφθηκε υπόψη μόνο η βάση της δεξαμενής ενώ στην δεύτερη συμπεριλήφθηκαν και οι εσωτερικές δυνάμεις ή φορτία που προέρχονταν από το κέλυφος.

Όσον αφορά τη δεύτερη μέθοδο του προβλήματος στην οποία συμπεριλήφθηκαν και τα φορτία από το κέλυφος καταλήγει σε ένα μη γραμμικό σύστημα έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους. Η έρευνα που θα μπορούσε να γίνει στο συγκεκριμένο θέμα είναι η επίλυση αυτού του συστήματος η οποία όπως φαίνεται από τη μορφή των εξισώσεων δεν μπορεί να γίνει σε κλειστή μορφή αλλά με χρήση κάποιων αριθμητικών μεθόδων. Ως προτεινόμενη μέθοδος συνίσταται η μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων Newton-Raphson. Η

μέθοδος αυτή στηρίζεται στη δημιουργία ενός πίνακα του λεγόμενου Ιακωβιανού πίνακα, ο οποίος σαν στοιχεία περιέχει τις μερικές παραγώγους των εξισώσεων του συστήματος ως προς τα άγνωστα. Με τη δημιουργία των μερικών παραγώγων μπορεί να μετατραπεί το μη γραμμικό σύστημα σε γραμμικό έτσι ώστε από εκεί και πέρα η επίλυση του να είναι απλή με τη χρήση κάποιας επαναληπτικής μεθόδου.

Επίσης η μελλοντική έρευνα θα μπορούσε να συνεχιστεί μελετώντας το δυναμικό μέρος της δεξαμενής, έτσι ώστε με τη χρήση πεπερασμένων στοιχείων να προσδιοριστεί η κατανομή των εσωτερικών τάσεων στο κέλυφος και τη βάση της δεξαμενής για δοσμένη εξωτερική φόρτιση. Αυτό θα βοηθήσει στον ασφαλέστερο και οικονομικότερο σχεδιασμό των δεξαμενών υγρού.

## 5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ (Α)

### Επεξήγηση συμβόλων

$x, y, z$	Καρτεσιανές συντεταγμένες
$r, \theta$	Πολικές συντεταγμένες
$L$	Μήκος δοκού
$h$	Πάχος πλάκας ή κελύφους
$b$	Πλάτος πλάκας ή κελύφους
$q$	Ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο
$\gamma$	Ειδικό βάρος
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Κανονικές τάσεις στους $x, y, z$ άξονες αντίστοιχα
$w$	Ελαστική γραμμή
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Μοναδιαίες παραμορφώσεις στους $x, y, z$ άξονες αντίστοιχα
$E$	Μέτρο Ελαστικότητας
$I$	Ροπή αδράνειας
$\nu$	Λόγος του Poisson
$D$	Καμπτική στιβαρότητα πλάκας
$D'$	Καμπτική στιβαρότητα κελύφους



$M_x, M_y, M_z$	Ροπές λυγισμού στους x, y, z άξονες αντίστοιχα
$Q_x, Q_y, Q_z$	Διατμητικές δυνάμεις στους x, y, z άξονες αντίστοιχα
$N_x$	Αξονική δύναμη στον x άξονα
$M_r, M_t, M_{rt}$	Ροπή ακτινική, εφαπτομενική και συστροφής όταν χρησιμοποιούνται πολικές συντεταγμένες
$M_a, M_0$	Ροπή που δημιουργείται από την ανύψωση της δεξαμενής
$Q_r, Q_t$	Ακτινική και εφαπτομενική διατμητική δύναμη
R	Ακτίνα δεξαμενής
K	Το μέρος εκείνο της δεξαμενής το οποίο κάθε φορά παραμένει επίπεδο (δεν ανασηκώνεται)
g	Επιτάχυνση βαρύτητας
$\gamma_{xz}$	Διατμητική παραμόρφωση
$N_x, N_\phi$	Αξονικές δυνάμεις κελύφους
$\theta$	Γωνία λωρίδας σε τυχαία θέση
$\phi$	Γωνία ανύψωσης της δεξαμενής
T	Ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο ανά μονάδα μήκους
$\delta$	Μέγιστη ανύψωση της δεξαμενής

## 6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ - ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Μαρία Ματσικούδη-Ηλιοπούλου, "Αρχές στατικής και εισαγωγή στη θεωρία των παραμορφώσιμων σωμάτων."
- [2] Θ. Κερμανίδης, "Αντοχή υλικών."
- [3] S. Timoshenko, "Theory of plates and shells."
- [4] S. Natsiavas, "An analytical Model for Unanchored Fluid-Filled Tanks Under Base Excitation", Transaction of the ASME/ vol. 55, SEPTEMBER 1988.
- [5] J. E. Shigley, C. R. Mischke, "Mechanical Engineering Design."



Β. ΒΙΒΛΙΟΤΗΚΗ  
ΛΙΑΦΟΡΕΣ

ΛΟΥΠΑΣ Α - ΠΑΝΟΥΡΓΙΑΣ, Α.  
ΣΥΓΓΡΑΦΕΑΣ

Υπολογισμός ποδύναμης ...  
ΤΙΤΛΟΣ

ΑΡ. ΕΚ. 20/1995

Λ Η Ξ Η	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΔΑΝΕΙΖΟΜΕΝΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
ΒΟΛΟΣ : ΚΤΗΡΙΟ Π. ΑΡΕΩΣ  
ΤΗΛ. (0421) 65.659