

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΥΠΟΥ ΚΛΙΣΕΩΣ**

υπό

**ΧΑΤΖΙΔΗ ΑΓΗ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

2010



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ & ΚΕΝΤΡΟ ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ  
ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.: 8534/1  
Ημερ. Εισ.: 11-08-2010  
Δωρεά: Συγγραφέα  
Ταξιθετικός Κωδικός: ΠΤ – ΜΜ  
2010  
ΧΑΤ

© 2010 Χατζίδης Άγης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Νικόλαος Αράβας  
(Επιβλέπων) Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Πελεκάσης Νίκος  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων  
Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Γιαννακόπουλος Αντώνιος  
Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητή κ. Νικόλαο Αράβα, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές Πελεκάση και Γιαννακόπουλο για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου .Ευχαριστώ τους φίλους μου για την ηθική υποστήριξή τους. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, Ζακλίν και Ιπποκράτη Χατζίδη για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια. Αφιερώνω αυτή την εργασία στην μητέρα μου και στον πατέρα μου.

Άγης Χατζίδης

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελ.

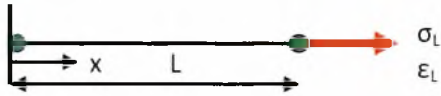
1. Εισαγωγή.....	3
2. Διατύπωση προβλήματος.....	4-5
3. Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων	
3.1. Διατύπωση μεικτού προβλήματος.....	6-10
3.2. Διατύπωση κλασσικού προβλήματος.....	11-14
4. Συγκριτικά γραφήματα αναλυτικής και αριθμητικής λύσης	
4.1. Μετατόπιση $u$ .....	15
4.2. Παραμόρφωση $\epsilon$ .....	15-16
4.3. Τάση $\sigma^{(2)}$ .....	16
5. Δείκτης κατάστασης.....	17-20
6. Error analysis-Ανάλυση σφάλματος	
6.1. Μεικτό πρόβλημα	
6.1.1. Μετατόπιση $u$ .....	21-23
6.1.2. Παραμόρφωση $\epsilon$ .....	23
6.1.3. Τάση $\sigma^{(2)}$ .....	23-24
6.1.4. Γραφήματα σφαλμάτων – $h/l$ και $DOF$ $l=0.1$ .....	24-26
6.1.5. Γραφικές παραστάσεις για $l=0.01$ και $l=0.3$ .....	26-30
6.1.6. Συγκριτικά γραφήματα για διαφορετικά $l$ .....	31-33
6.2. Κλασσικό πρόβλημα	
6.2.1. Μετατόπιση $u$ .....	34-35
6.2.2. Παραμόρφωση $\epsilon$ .....	35
6.2.3. Γραφήματα σφαλμάτων – $h/l$ και $DOF$ $l=0.1$ .....	36
6.2.4. Συγκριτικά γραφήματα.....	37-39
7. Σφάλμα ανά στοιχείο	
7.1. Μαθηματικό μοντέλο υπολογισμού σφάλματος...40-44	
7.2. Συγκριτικά γραφήματα για $l=0.1$ και $l=0.01$ .....	44-45
8. Συμπεράσματα αποτελέσματα.....	46
9. Βιβλιογραφία	

## Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Στην παρούσα διπλωματική θα γίνει μια ειδική ανάλυση ελαστικότητας σε δοκό η οποία υπόκειται σε μονοαξονική φόρτιση. Από την κλασική θεωρία γνωρίζουμε ότι η τάση δίνεται από την σχέση  $\sigma = E\varepsilon$ . Ενώ η σύγχρονη θεωρία τύπου κλίσεως δίνει την τάση από την σχέση  $\sigma = E(\varepsilon - I^2 \varepsilon'')$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση της σύγχρονης θεωρίας τύπου κλίσεως και τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε, επιλύουμε την διαφορική εξίσωση. Τα αποτελέσματα της επίλυσης μας δίνουν την αναλυτική λύση της μετατόπισης  $u$ , της παραμόρφωση  $\varepsilon$  και της τάσης  $\sigma^{(2)}$ . Κατόπιν ακολουθεί ανάλυση για δυο διαφορετικά είδη προβλημάτων, ενός μεικτού με 8 βαθμούς ελευθερίας και ενός κλασσικού με 4 βαθμούς ελευθερίας ανά στοιχείο. Επόμενο στάδιο αποτελεί η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν για το εκάστοτε είδος προβλήματος. Παράλληλα από την σύγκριση συμπεραίνουμε ποια μέθοδος είναι πιο αποτελεσματική για την επίλυση του προβλήματος. Η σύγκριση θα πραγματοποιηθεί με βάση τον δείκτη κατάστασης, το ολικό σφάλμα του στοιχείου καθώς και από το σφάλμα που αντιστοιχεί ανά στοιχείο. Τέλος θα αξιολογήσουμε και θα συμπεράνουμε τα οφέλη από την ανάλυση του προβλήματος και τι είδους βελτίωση θα μπορεί να πραγματοποιηθεί.

## Κεφάλαιο 2 Διατύπωση προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό επιλύουμε την διαφορική εξίσωση που αντιστοιχεί στην μονοαξονική φόρτιση. Το αποτέλεσμα της διαφορικής εξίσωσης αξιοποιείται για τον υπολογισμό και την αναπαράσταση της παραμόρφωσης, μετατόπισης, τάσης κατά το μήκος του στοιχείου μήκους  $L$ . Η διαφορική ανάλυση της μονοαξονικής φόρτισης δεν επηρεάζεται από το είδος του στοιχείου που θα επιλέξουμε για να εξετάσουμε το πρόβλημα. Ως αποτέλεσμα οι σχέσεις που προκύπτουν για το τρικομβικό στοιχείο είναι οι ίδιες και για το δικομβικό στοιχείο.



Για την περίπτωση μονοαξονικής φόρτισης:

Από την εξίσωση ισορροπίας έχουμε:

$$\sigma'(x) + b(x) = 0 \quad (1)^*$$

Από την κινηματική παίρνουμε:  $\varepsilon(x) = u'(x)$  (2)\*

Από την καταστατική εξίσωση καταλήγουμε:  $\sigma(x) = E[u'(x) - l^2 u'''(x)]$  (3)\*

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2)\* στην εξίσωση (3)\* και μετά αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1)\*. Καταλήγουμε στην παρακάτω διαφορική εξίσωση 4<sup>ου</sup> βαθμού

$$[u''(x) - l^2 u''''(x)] + \frac{b(x)}{E} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Με συνοριακές συνθήκες : } \begin{cases} u(0) = u_0 & u'(L) = \varepsilon_L & l^2 E u''(0) = 0 \\ \sigma(L) = E u'(L) - l^2 E u'''(L) \end{cases}$$

Παρατήρηση:

Ο όρος της τάσης είναι  $\sigma(x) = \bar{\tau}(x) + \sigma^{(2)}(x)$ , όπου  $\bar{\tau}(x) = E\varepsilon(x)$  καθώς  $\sigma^{(2)}(x) = -l^2 E u'''(x)$

Η τάσης ζεύγους δίνεται από την σχέση  $\mu(x) = l^2 E u''(x)$

Για την επίλυση του προβλήματος θεωρούμε τα εξής στοιχεία:

$$u_0 = 0, \mu_0 = 0 \quad \text{και} \quad b(x) = 0$$

Επιλύοντας την διαφορική εξίσωση 4<sup>ης</sup> τάξης (1) προκύπτουν οι γενικές λύσεις:



### Μετατόπιση $u$ :

Η μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου μας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$u(x) = \frac{\sigma_L}{E} x + l \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\sinh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}} \quad (2)$$

### Παραμόρφωση $\varepsilon$ :

Ομοίως και η παραμόρφωση για οποιοδήποτε σημείο του στοιχείου μας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma_L}{E} + l \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}} \quad (3)$$

### Τάση $\sigma^{(2)}$ :

Για τον υπολογισμό της τάσης πάνω στο στοιχείο μας θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση:

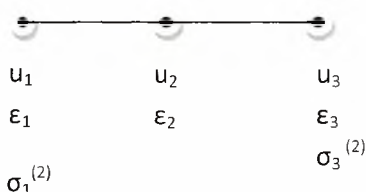
$$\sigma^{(2)}(x) = E \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}} \quad (4)$$

## Κεφάλαιο 3 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

### 3.1 Διατύπωση μεικτού προβλήματος

Στο παρών κεφάλαιο θα αναλύσουμε την περίπτωση του μεικτού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα ένα στοιχείο αποτελείται από τρεις κόμβους με 3,2,3 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο αντίστοιχα.

Σχηματικά το στοιχείο μας είναι:



Ακολουθούμε ανάλυση Galerkin στις παρακάτω εξισώσεις:

$$1) \varepsilon(x) - \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad (5)$$

$$2) \sigma^{(2)}(x) + l^2 E \frac{d\varepsilon^2(x)}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

$$3) \frac{d}{dx} \left[ E \frac{du(x)}{dx} + \sigma^{(2)}(x) \right] + b(x) = 0 \quad (7)$$

Αρχικά έχουμε:

$$\int_0^L \left( \varepsilon - \frac{du}{dx} \right) \sigma^{(2)*} dx = 0 \quad \forall \sigma^{(2)*}(x) \in H^0 \quad (8)$$

$$\int_0^L \left( \sigma^{(2)} + l^2 E \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} \right) \varepsilon^* dx + \left( l^2 E \frac{d\varepsilon}{dx} \Big|_{x=0} - \mu_0 \right) \varepsilon^*(0) = 0 \quad \forall \varepsilon^*(x) \in H^0 \text{ s.t. } \varepsilon^*(L) = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( E \frac{du}{dx} + \sigma^{(2)} \right) + b \right] u^* dx - \left[ E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} + \sigma^{(2)}(L) - \sigma_L \right] u^*(L) = 0$$

$$\forall u^*(x) \in H^0 \text{ s.t. } u^*(0) = 0 \quad (10)$$

Παρατήρηση:

Μια τυχαία συνάρτηση  $f(x)$  είναι τάξης  $H^k$ , εαν η παράγωγος τάξεως  $k$  υπάρχει

και το τετράγωνο της ολοκληρώνεται,  $\int_0^L \left( \frac{d^k f}{dx^k} \right)^2 dx < \infty$ . Επομένως οι συναρτήσεις με

παραγώγους της τάξεως  $k-1$  είναι συνεχής συναρτήσεις.

Αλλά,

$$1^2 E \int_0^L \frac{d^2 \varepsilon}{dx^2} \varepsilon^* dx = 1^2 E \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{d\varepsilon}{dx} \varepsilon^* \right) - \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{d\varepsilon^*}{dx} \right] dx = -1^2 E \frac{d\varepsilon}{dx} \Big|_{x=0} \varepsilon^*(0) - 1^2 E \int_0^L \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{d\varepsilon^*}{dx} dx,$$

και

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[ \frac{d}{dx} \left( E \frac{du}{dx} + \sigma^{(2)} \right) \right] u^* dx &= \int_0^L \left\{ \frac{d}{dx} \left[ \left( E \frac{du}{dx} + \sigma^{(2)} \right) u^* \right] - \left( E \frac{du}{dx} + \sigma^{(2)} \right) \frac{du^*}{dx} \right\} dx = \\ &= \left[ E \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} + \sigma^{(2)}(L) \right] u^*(L) - \int_0^L \left( E \frac{du}{dx} + \sigma^{(2)} \right) \frac{du^*}{dx} dx. \end{aligned}$$

Επομένως, το πρόβλημα μας **(8),(9),(10)** παίρνει την μορφή:

Βρίσκουμε  $u(x) \in H^1$ ,  $\varepsilon(x) \in H^1$  και  $\sigma^{(2)}(x) \in H^0$ , με  $u(0) = u_0$ ,  $\varepsilon(L) = \varepsilon_L$ , και

$$\int_0^L \left( \frac{du}{dx} \sigma^{(2)*} - \varepsilon \sigma^{(2)*} \right) dx = 0 \quad \forall \sigma^{(2)*}(x) \in H^0 \quad (11)$$

$$\int_0^L \left( 1^2 E \frac{d\varepsilon}{dx} \frac{d\varepsilon^*}{dx} - \sigma^{(2)} \varepsilon^* \right) dx = -\mu_0 \varepsilon^*(0) \quad \forall \varepsilon^*(x) \in H^1 \text{ s.t. } \varepsilon^*(L) = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^L \left( E \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} + \sigma^{(2)} \frac{du^*}{dx} \right) dx = \int_0^L b u^* dx + \sigma_L u^*(L) \quad \forall u^*(x) \in H^1 \text{ s.t. } u^*(0) = 0 \quad (13)$$

Πραγματοποιώντας παρεμβολή με την χρήση πεπερασμένων στοιχείων έχουμε,

Μετατόπιση u:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 = [N^u(x)]\{d\},$$

$$u^*(x) = [N^u(x)]\{d^*\} = [d^*][N^u(x)],$$

Παραμόρφωση ε:

$$\varepsilon(x) = N_1(x)\varepsilon_1 + N_2(x)\varepsilon_2 + N_3(x)\varepsilon_3 = [N^\varepsilon(x)]\{d\},$$

$$\varepsilon^*(x) = [N^\varepsilon(x)]\{d^*\} = [d^*][N^\varepsilon(x)],$$

Γάση  $\sigma^{(2)}$ :

$$\sigma^{(2)}(x) = N_1^\sigma(x)\sigma_1^{(2)} + N_3^\sigma(x)\sigma_3^{(2)} = [N^\sigma(x)]\{d\},$$

$$\sigma^{(2)*}(x) = [N^\sigma(x)]\{d^*\} = [d^*][N^\sigma(x)]$$

όπου

$$[d] = [u_1 \quad \varepsilon_1 \quad \sigma_1^{(2)} \quad u_2 \quad \varepsilon_2 \quad u_3 \quad \varepsilon_3 \quad \sigma_3^{(2)}],$$

$$[d^*] = [u_1^* \quad \varepsilon_1^* \quad \sigma_1^{(2)*} \quad u_2^* \quad \varepsilon_2^* \quad u_3^* \quad \varepsilon_3^* \quad \sigma_3^{(2)*}],$$

$$[N^u(x)] = [N_1(x) \quad 0 \quad 0 \quad N_2(x) \quad 0 \quad N_3(x) \quad 0 \quad 0],$$

$$[N^\varepsilon(x)] = [0 \quad N_1(x) \quad 0 \quad 0 \quad N_2(x) \quad 0 \quad N_3(x) \quad 0],$$

$$[N^\sigma(x)] = [0 \quad 0 \quad N_1^\sigma(x) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_3^\sigma(x)],$$

Σημείωση:

Οι παρακάτω εξισώσεις αποτελούν τις συναρτήσεις σχήματος που επιλέξαμε για την συγκεκριμένη ανάλυση.

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \quad N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \quad N_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)},$$

$$N_1^\sigma(x) = \frac{x-x_3}{x_1-x_3}, \quad N_3^\sigma(x) = \frac{x-x_1}{x_3-x_1}.$$

Για ένα στοιχείο,

$$\int_{x_1}^{x_3} \left( \sigma^{(2)*} \frac{du}{dx} - \sigma^{(2)} \varepsilon \right) dx = [d^*] \left[ \int_{x_1}^{x_3} \left( \{N^\sigma\} [B] - \{N^\sigma\} [N^\varepsilon] \right) dx \right] \{d\}, \text{ όπου } [B] = \left[ \frac{dN^u}{dx} \right],$$

$$\int_{x_1}^{x_3} \left( 1^2 E \frac{d\varepsilon^*}{dx} \frac{d\varepsilon}{dx} - \varepsilon^* \sigma^{(2)} \right) dx = [d^*] \left[ \int_{x_1}^{x_3} \left( 1^2 E \{B^\varepsilon\} [B^\varepsilon] - \{N^\varepsilon\} [N^\sigma] \right) dx \right] \{d\}, \text{ όπου } [B^\varepsilon] = \left[ \frac{dN^\varepsilon}{dx} \right],$$

$$\int_{x_1}^{x_3} \left( E \frac{du^*}{dx} \frac{du}{dx} + \frac{du^*}{dx} \sigma^{(2)} \right) dx = [d^*] \left[ \int_{x_1}^{x_3} \left( E \{B\} [B] + \{B\} [N^\sigma] \right) dx \right] \{d\}, \int_{x_1}^{x_3} u^* b dx = [d^*] \int_{x_1}^{x_3} \{N^u\} b dx,$$

Επομένως το μητρώο ακαμψίας για το στοιχείο (i) δίνεται από την παρακάτω σχέση.

$$[k^{(i)}] = \int_{x_1}^{x_2} \left( E \{B\} [B] + 1^2 E \{B^e\} [B^e] + \{B\} [N^\sigma] + \{N^\sigma\} [B] - \{N^\sigma\} [N^e] - \{N^e\} [N^\sigma] \right) dx.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίστηκε με την χρήση της Mathematica , και το τυπικό μητρώο ακαμψίας είναι:

$$[k^{(i)}]_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} \frac{7E}{3h} & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{8E}{3h} & 0 & \frac{1E}{3h} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{71^2E}{3h} & -\frac{h}{6} & 0 & -\frac{81^2E}{3h} & 0 & \frac{11^2E}{3h} & 0 \\ -\frac{5}{6} & -\frac{h}{6} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{h}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{8E}{3h} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{16E}{3h} & 0 & -\frac{8E}{3h} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{81^2E}{3h} & -\frac{h}{3} & 0 & \frac{161^2E}{3h} & 0 & -\frac{81^2E}{3h} & -\frac{h}{3} \\ \frac{1E}{3h} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{8E}{3h} & 0 & \frac{7E}{3h} & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{11^2E}{3h} & 0 & 0 & -\frac{81^2E}{3h} & 0 & \frac{71^2E}{3h} & -\frac{h}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{h}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{h}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι το χαρακτηριστικό μήκος δίνεται από τον όρο  $\frac{1^2E}{h}$ .

Το διάνυσμα φορτίου είναι:  $\{r_u^{(i)}\}_{8 \times 1} = \int_{x_1}^{x_2} \{N^u\} b dx$  για  $b = \text{σταθερό}$   $\{r_u^{(i)}\} = bh \begin{bmatrix} 1/6 \\ 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Παρατήρηση: Ο όρος  $\sigma_L u^*(L)$  επιβιώνει μόνο για το τελευταίο στοιχείο όπου

$$\sigma_L u^*(L) = u_3^* \sigma_L = [d^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [d^*] \{r_u^{\sigma_L}\} \quad \text{με} \quad [r_u^{\sigma_L}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \sigma_L \ 0 \ 0]$$

Ομοίως ο όρος  $-\mu_0 \varepsilon^*(0)$  επιβιώνει στο τελευταίο στοιχείο όπου,

$$-\mu_0 \varepsilon^*(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^* \end{bmatrix} \left\{ r_{\varepsilon}^{\mu_0} \right\}, \quad \text{με} \quad \boxed{\left[ r_{\varepsilon}^{\mu_0} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Επομένως το διάνυσμα του φορτίου είναι :

$$\text{rhs2} = \begin{pmatrix} \frac{bh}{6} \\ -\mu_0 \\ 0 \\ \frac{2bh}{3} \\ 0 \\ \frac{bh}{6} - \sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι εφόσον έχουμε 3,2,3 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, καθώς θα προσθέτουμε και ένα επιπλέον στοιχείο στην ανάλυση τότε το συνολικό μητρώο  $K_M$  έχει διαστάσεις  $8+5(v-1)$  όπου  $v$  είναι ο αριθμός στοιχείων που θέλουμε να εξετάσουμε το πρόβλημα μας.

Αφού έχουμε γράψει τον κώδικα σε Fortran για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος για τυχαίο αριθμό στοιχείων, μπορούμε να παραθέσουμε μερικά αποτελέσματα.

nelem	Element	Μετατόπιση u	Παραμόρφωση ε	Τάση $\sigma^{(2)}$
2	1	0	0.004650050018897733	-0.066658698282043351
		0.001283288612851151	0.005274637498849566	-----
		0.002466508056893828	0.005480580156144122	0.093451963932109111
	2	0.002466508056893828	0.005480580156144122	0.093451963932109111
		0.003780214201802975	0.004687447429887509	-----
		0.005454962729073901	0.01	-0.484215808594617048
3	1	0	0.005038806807606560	0.020466120181715789
		0.000827075156370166	0.004956664014132683	-----
		0.001675744208407898	0.004950167802432224	-0.031359227875927806
	2	0.001675744208407898	0.004950167802432224	-0.031359227875927806
		0.002517402659373351	0.005220302558362022	-----
		0.003323446012526682	0.005332397198879267	0.054117004325776763
	3	0.003323446012526682	0.005332397198879267	0.054117004325776763
		0.004257941424022318	0.005604350954200908	-----
		0.005484956050014686	0.01	-0.6479295089543776704

Πίνακας 1. Αποτελέσματα μεικτού προβλήματος

### 3.2 Διατύπωση κλασσικού προβλήματος

Η διατύπωση του κλασσικού προβλήματος δεν διαφέρει σημαντικά με την διατύπωση του μεικτού προβλήματος. Τα σημεία που διαφέρει η διατύπωση είναι τα εξής: Το κλασσικό πρόβλημα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο και το στοιχείο μας να αποτελείται από 2 κόμβους. Επίσης οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούμε είναι διαφορετικές. Το τελικό μητρώο ακαμψίας για ένα στοιχείο έχει διαστάσεις  $4 \times 4$ .

Από την διατύπωση του προβλήματος τύπου κλίσεως είχαμε καταλήξει στην εξίσωση:

$$E[u''(x) - l^2 u''''(x)] + b(x) = 0,$$

κατόπιν ακολουθούμε την επίλυση της εξίσωσης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Galerkin όπως ακριβώς και στην περίπτωση του μεικτού με συνοριακές συνθήκες  $u(0)=u_0$ ,  $u'(L)=\varepsilon_L$ ,  $\sigma(L)=\sigma_L$  and  $\mu(0)=\mu_0$  όπου

$$\mu(x) = l^2 E u''(x) \quad \text{και} \quad \sigma(x) = E \varepsilon(x) + (-l^2 E u''''(x))$$

Βρίσκουμε μια  $u(x) \in H^4$  έτσι ώστε  $u(0)=u_0$ ,  $u'(L)=\varepsilon_L$ , και

$$\int_0^L [E(u'' - l^2 u''') + b] u^* dx - [E u'(L) - l^2 E u''(L) - \sigma_L] u^*(L) + [l^2 E u''(0) - \mu_0] u'^*(0) = 0$$

$$\forall u^*(x) \in H^1 \text{ s.t. } u^*(0)=0 \quad \text{και} \quad u'^*(L)=0. \quad (14)$$

Όμως

$$\int_0^L u'' u^* dx = \int_0^L [(u' u^*)' - u' u'^*] dx = u'(L) u^*(L) - u'(0) u^*(0) - \int_0^L u' u'^* dx = u'(L) u^*(L) - \int_0^L u' u'^* dx$$

και

$$\begin{aligned} -\int_0^L u'' u^* dx &= -\int_0^L [(u'' u^*)' - u'' u'^*] dx = -u''(L) u^*(L) + u''(0) u^*(0) + \int_0^L u'' u'^* dx = \\ &= -u''(L) u^*(L) + \int_0^L [(u'' u'^*) - u'' u'''] dx = \\ &= -u''(L) u^*(L) + u''(L) u'^*(L) - u''(0) u'^*(0) - \int_0^L u'' u'' dx = \\ &= -u''(L) u^*(L) - u''(0) u'^*(0) - \int_0^L u'' u'' dx \end{aligned}$$

Επομένως, το πρόβλημα (14) γίνεται ως εξής:

Βρίσκουμε μια  $u(x) \in H^2$  έτσι ώστε  $u(0) = u_0$ ,  $u'(L) = \varepsilon_L$ , και

$$\int_0^L E(u'u'' + l^2 u''u''') dx = \int_0^L bu' dx + \sigma_L u'(L) - \mu_0 u''(0)$$

$$\forall u^*(x) \in H^2 \text{ s.t. } u^*(0) = 0 \text{ and } u''(L) = 0. \quad (15)$$

Εισάγουμε την παρεμβολή με χρήση πεπερασμένων στοιχείων.

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_1' + N_3(x)u_2 + N_4(x)u_2' = [N(x)]\{d\},$$

$$u^*(x) = [N(x)]\{d^*\} = [d^*]\{N(x)\},$$

άρα

$$u'(x) = [B(x)]\{d\}, \quad u''(x) = [B(x)]\{d^*\},$$

$$u''(x) = [B_2(x)]\{d\}, \quad u'''(x) = [B_2(x)]\{d^*\},$$

$$\text{Όπου, } [d] = [u_1 \quad u_1' \quad u_2 \quad u_2'], \quad [d^*] = [u_1^* \quad u_1'^* \quad u_2^* \quad u_2'^*]$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4], \quad [B] = \frac{d}{dx}[N], \quad [B_2] = \frac{d^2}{dx^2}[N]$$

Οι συναρτήσεις σχήματος για το κλασσικό πρόβλημα είναι:

$$N_1(x) = \frac{(x_2 - x)^2 [h + 2(x - x_1)]}{h^3}, \quad N_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)^2}{h^2},$$

$$N_3(x) = \frac{(x - x_1)^2 [h + 2(x_2 - x)]}{h^3}, \quad N_4(x) = \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)}{h^2}.$$

$$\text{Για ένα στοιχείο: } \int_{x_1}^{x_2} E(u'u'' + l^2 u''u''') dx = [d^*] \int_{x_1}^{x_2} E(\{B\}[B] + l^2 \{B_2\}[B_2]) dx \{d\},$$

Επομένως το μητρώο ακαμψίας για το στοιχείο (i) δίνεται από την σχέση:

$$[k^{(i)}] = \int_{x_1}^{x_2} E(\{B\}[B] + l^2 \{B_2\}[B_2]) dx.$$



Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίστηκε με την χρήση της Mathematica, και το μητρώο ακαμψίας για ένα στοιχείο δίνεται από τον πίνακα που ακολουθεί.

$$[k^{(i)}]_{4 \times 4} = E \begin{bmatrix} \frac{6}{5h} \left(1 + 10 \frac{l^2}{h^2}\right) & \frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2} & -\frac{6}{5h} \left(1 + 10 \frac{l^2}{h^2}\right) & \frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2} \\ \frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2} & h \left(\frac{2}{15} + 4 \frac{l^2}{h^2}\right) & -\left(\frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2}\right) & h \left(-\frac{1}{30} + 2 \frac{l^2}{h^2}\right) \\ -\frac{6}{5h} \left(1 + 10 \frac{l^2}{h^2}\right) & -\left(\frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2}\right) & \frac{6}{5h} \left(1 + 10 \frac{l^2}{h^2}\right) & -\left(\frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2}\right) \\ \frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2} & h \left(-\frac{1}{30} + 2 \frac{l^2}{h^2}\right) & -\left(\frac{1}{10} + 6 \frac{l^2}{h^2}\right) & h \left(\frac{2}{15} + 4 \frac{l^2}{h^2}\right) \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Το χαρακτηριστικό μήκος είναι ο όρος  $\frac{l^2}{h^2}$ .

Το διάνυσμα φορτίου είναι:

$$\left\{ r^{(i)} \right\}_{4 \times 1} = \int_{x_1}^{x_2} \{N\} b dx \quad \text{για } b = \text{const.} \quad \left\{ r^{(i)} \right\}_{4 \times 1} = \frac{bh}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ h/6 \\ 1 \\ -h/6 \end{bmatrix}$$

Σημείωση ότι ο όρος  $\sigma_L u^*(L)$  επιβιώνει για το τελευταίο στοιχείο όπου,

$$\sigma_L u^*(L) = u_2^* \sigma_L = [d^*] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_L \\ 0 \end{bmatrix} = [d^*] \left\{ r^{(i)} \right\}, \quad \text{με} \quad [r^{(i)}] = [0 \quad 0 \quad \sigma_L \quad 0]$$

Ανάλογα ο όρος  $-\mu_0 u^{*'}(0)$  επιβιώνει για το τελευταίο στοιχείο όπου

$$-\mu_0 u^{*'}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [d^*] \left\{ r^{(i)} \right\}, \quad \text{με} \quad [r^{(i)}] = [0 \quad -\mu_0 \quad 0 \quad 0]$$

Άρα το διάνυσμα φορτίου είναι:  $\text{rhs} = \begin{pmatrix} \frac{bh}{2} \\ \frac{bh^2}{12} - \mu_0 \\ \frac{bh}{2} + \sigma_L \\ -\frac{bh^2}{12} \end{pmatrix}$

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι εφόσον έχουμε 2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο, καθώς θα προσθέτουμε και ένα επιπλέον στοιχείο στην ανάλυση τότε το συνολικό μητρώο  $K_K$  έχει διαστάσεις  $4+2(n-1)$  όπου  $n$  είναι ο αριθμός στοιχείων που θέλουμε να εξετάσουμε το πρόβλημα μας. Εφόσον έχουμε γράψει τον κώδικα σε

Fortran για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος για τυχαίο αριθμό στοιχείων, μπορούμε να παραθέσουμε μερικά αποτελέσματα.

<b>nelem</b>	<b>Element</b>	<b>Μετατόπιση u</b>	<b>Παραμόρφωση ε</b>
2	1	0	0.005363615905398
		0.002776586295432	0.005987496642796
	2	0.002776586295432	0.005987496642796
		0.006502287364191	0.01
3	1	0	0.005357620178056
		0.001811871866006	0.005601436743385
	2	0.001811871866006	0.005601436743385
		0.003821737864311	0.006665339487361
	3	0.003821737864311	0.006665339487361
		0.006497564566041	0.01

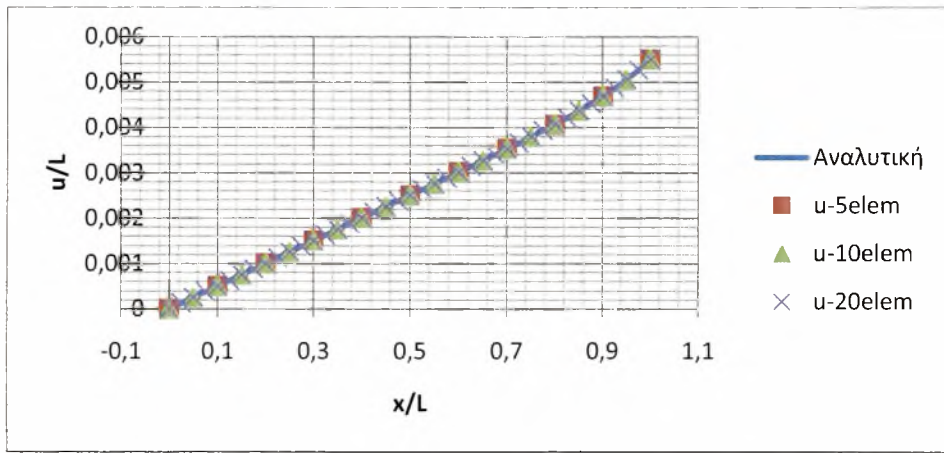
Πίνακας 2. Αποτελέσματα για κλασσικό πρόβλημα

## Κεφάλαιο 4 Συγκριτικά γραφήματα

Στα δυο προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάσαμε τις ακριβείς λύσεις της παραμόρφωσης, μετατόπισης, τάσης καθώς και την επίλυση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε γραφήματα με την ακριβή καθώς και την αριθμητική επίλυση του προβλήματος προκειμένου να διαπιστώσουμε την σύγκλιση που παρουσιάζει η αριθμητική μέθοδος.

### 4.1 Μετατόπιση $u$

Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει την αριθμητική και αναλυτική λύση της μετατόπισης  $u$  για διαφορετικό αριθμό δεδομένων.



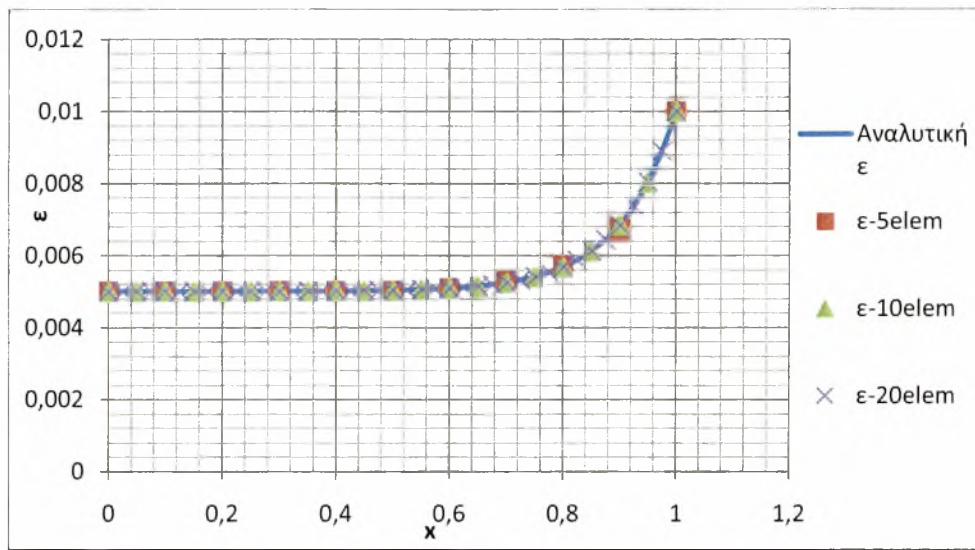
Γράφημα 1. Μετατόπιση  $u$  αναλυτική-αριθμητικές τιμές

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων που εξετάζουμε το πρόβλημα, τα σημεία που αντιστοιχούν στην αριθμητική λύση είναι πάνω στην γραφική παράσταση της αναλυτικής λύσης, η οποία είναι :

$$u(x) = \frac{\sigma_L}{E} x + l(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}) \frac{\sinh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}}.$$

### 4.2 Παραμόρφωση $\varepsilon$

Το γράφημα που ακολουθεί περιέχει την αριθμητική και αναλυτική λύση της παραμόρφωσης  $\varepsilon$ , όπου η ανάλυση έχει γίνει για 5, 10 και 20 στοιχεία.

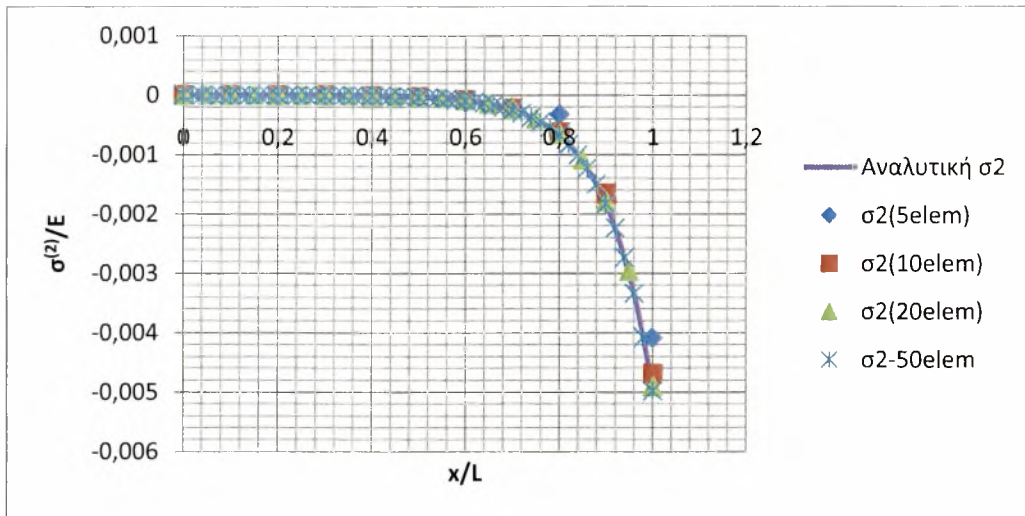


Γράφημα 2. Παραμόρφωση  $\epsilon$  αναλυτική-αριθμητικές τιμές

Ομοίως και στην περίπτωση της παραμόρφωσης  $\epsilon$ , παρατηρούμε ότι η αριθμητική λύση παρουσιάζει σύγκλιση με την ακριβή όταν τουλάχιστον χρησιμοποιούμε 20 στοιχεία για την ανάλυση του προβλήματος μας.

### 4.3 Τάση $\sigma^{(2)}$

Το ακόλουθο γράφημα περιέχει την αριθμητική καθώς και την αναλυτική λύση της τάσης  $\sigma^{(2)}$  για διαφορετικό αριθμό στοιχείων.



Γράφημα 3. Τάση  $\sigma^{(2)}$  αναλυτική-αριθμητικές τιμές

Για την περίπτωση της τάσεως για μικρό αριθμό στοιχείων δεν παρατηρείται καλή σύγκλιση της αριθμητικής λύσης. Ωστόσο όταν ο αριθμός των εξεταζόμενων στοιχείων γίνει 50 τότε πλέον παρατηρείται ταύτιση της αναλυτικής και αριθμητικής λύσης, μειώνοντας έτσι το σφάλμα σημαντικά.

## Κεφάλαιο 5 Δείκτης κατάστασης

Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον δείκτη ανάλυσης (condition number), το πόσο σημαντικό ρόλο παίζει η τιμή του στην μεταβολή των αποτελεσμάτων όταν προηγουμένως έχουμε εμείς μεταβάλει τις συνοριακές συνθήκες ή κάποια τιμή στο μητρώο ακαμψίας.

Για τον υπολογισμό του δείκτη κατάστασης ενός μητρώου θα πρέπει πρώτα να διαπιστώσουμε αν το μητρώο μας είναι κανονικό ή όχι. Ένας πίνακας είναι κανονικός όταν  $AA^T = A^T A$ . Πιο συγκεκριμένα στα δυο είδη προβλημάτων που αντιμετωπίζουμε κλασσικό και μεικτό, οι πίνακες (μητρώα ακαμψίας) είναι συμμετρικοί. Επομένως με βάση την θεωρία της γραμμικής άλγεβρας προκύπτει ότι ο δείκτης κατάστασης δίνεται από την παρακάτω σχέση:  $\delta(K) = \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)}$  (16) όπου  $\lambda_{\max}(K)$  και  $\lambda_{\min}(K)$  είναι η μέγιστη και ελάχιστη ιδιοτιμή του μητρώου  $K$ . Από την στιγμή που έχουμε υπολογίσει τον δείκτη κατάστασης μπορούμε να εκτιμήσουμε την ευαισθησία της λύσης του συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς την μεταβολή των παραμέτρων του μητρώου ακαμψίας και των συνοριακών συνθηκών. Σε γενικά πλαίσια μεγάλος δείκτης κατάστασης δείχνει ότι το μητρώο είναι «κακώς» αντιστρέψιμο καθώς και η ακρίβεια της λύσης του γραμμικού προβλήματος μπορεί να μην είναι και τόσο καλή.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται τα μεγέθη του δείκτη ανάλυσης ανάλογα με τον αριθμό στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση του προβλήματος μας.

Number of elements	Condition Number k1=4x4	Condition Number k1=8x8
1	$2.68 \times 10^2$	$5.38 \times 10^5$
2	$1.76 \times 10^3$	$3.68 \times 10^6$
3	$4.45 \times 10^3$	$1.06 \times 10^7$
4	$8.82 \times 10^3$	$2.14 \times 10^7$
5	$1.55 \times 10^4$	$3.61 \times 10^7$
10	$1.03 \times 10^5$	$1.62 \times 10^8$
20	$7.83 \times 10^5$	$6.74 \times 10^8$
50	$1.2 \times 10^6$	$4.26 \times 10^9$
100	$9.61 \times 10^7$	$1.71 \times 10^{10}$

Πίνακας 3. Condition number-Number of elements για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

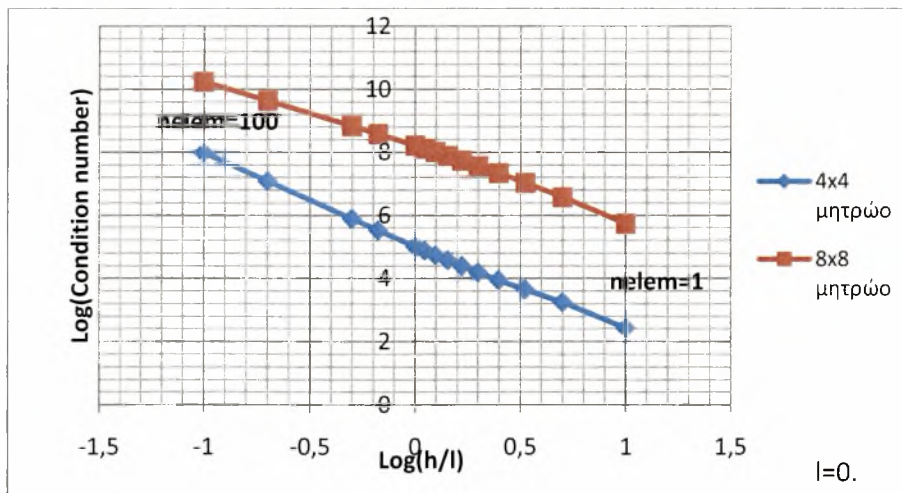
Όπως εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ο δείκτης κατάστασης για το μεικτό πρόβλημα ήδη παίρνει πολύ μεγάλες τιμές για μικρό αριθμό στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα όσο αυξάνεται ο αριθμός στοιχείων ο δείκτης κατάστασης αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό. Αντίθετα στην περίπτωση του κλασσικού προβλήματος ο δείκτης κατάστασης παρουσιάζει πολύ μικρότερες τιμές από αυτές του μεικτού προβλήματος.

Δεδομένα:

Number Of element	Log(h/l)	k1=4x4 log(δ.κατάστασης)	k1=8x8 log(δ.κατάστασης)
1	1	2,428752429	5,730380453
2	0,69897002	3,246004364	6,566231363
3	0,522878766	3,647929205	7,027245112
4	0,39794001	3,945528479	7,332284567
5	0,30103001	4,189579317	7,557634046
6	0,221848756	4,397709179	7,735511561
7	0,154901966	4,579141751	7,882155911
8	0,096910007	4,739765729	8,006840267
9	0,045757487	4,883700284	8,115310356
10	0	5,013968581	8,211341053
15	-0,176091239	5,524991043	8,574646445
20	-0,30103001	5,893549203	8,828618812
50	-0,69897002	7,080497443	9,629145988
100	-1	7,982599926	10,23190112

Πίνακας 4. Δεδομένα για σχηματισμό γραφήματος Log(cond.number)-Log(h/l)

Στο παρακάτω λογαριθμικό διάγραμμα παρουσιάζεται η συσχέτιση του δείκτη κατάστασης με τον λόγο  $h/l$ , όπου  $h_M = x_3 - x_1$  και  $h_K = x_2 - x_1$  για το μεικτό και το κλασσικό πρόβλημα αντίστοιχα.



Γράφημα 4. Log(cond.number)-Log(h/l) για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

Παρατηρήσεις:

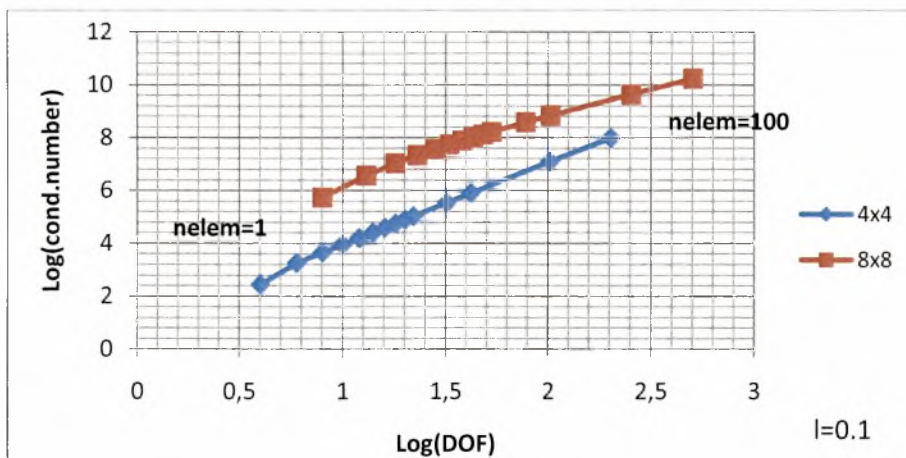
1. Και στις δυο περιπτώσεις ο λογαριθμικός ρυθμός μείωσης του δείκτη κατάστασης είναι περίπου ο ίδιος.
2. Ο δείκτης κατάστασης για το κλασσικό πρόβλημα είναι σταθερά μικρότερος από αυτό του μεικτού προβλήματος και με σχετικά μεγάλο λόγο που αγγίζει το 200.

### Δεδομένα:

Number of element	DOF <sub>4x4</sub>	DOF <sub>8x8</sub>	Log(DOF <sub>4x4</sub> )	Log(DOF <sub>8x8</sub> )	Log(δ.κατ. <sub>4x4</sub> )	Log(δ.κατ. <sub>8x8</sub> )
1	4	8	0,602059991	0,90309	2,428752429	5,730380453
2	6	13	0,77815125	1,113943	3,246004364	6,566231363
3	8	18	0,903089987	1,255273	3,647929205	7,027245112
4	10	23	1	1,361728	3,945528479	7,332284567
5	12	28	1,079181246	1,447158	4,189579317	7,557634046
6	14	33	1,146128036	1,518514	4,397709179	7,735511561
7	16	38	1,204119983	1,579784	4,579141751	7,882155911
8	18	43	1,255272505	1,633468	4,739765729	8,006840267
9	20	48	1,301029996	1,681241	4,883700284	8,115310356
10	22	53	1,342422681	1,724276	5,013968581	8,211341053
15	32	78	1,505149978	1,892095	5,524991043	8,574646445
20	42	103	1,62324929	2,012837	5,893549203	8,828618812
50	102	253	2,008600172	2,403121	7,080497443	9,629145988
100	202	503	2,305351369	2,701568	7,982599926	10,23190112

Πίνακας 5. Δεδομένα για σχηματισμό γραφήματος Log(cond.number)-Log(DOF)

Στο παρακάτω λογαριθμικό διάγραμμα παρουσιάζεται η μεταβολή του δείκτη κατάστασης σε σχέση με τους βαθμούς ελευθερίας του εκάστοτε προβλήματος που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, μεικτού και κλασσικού αντίστοιχα.



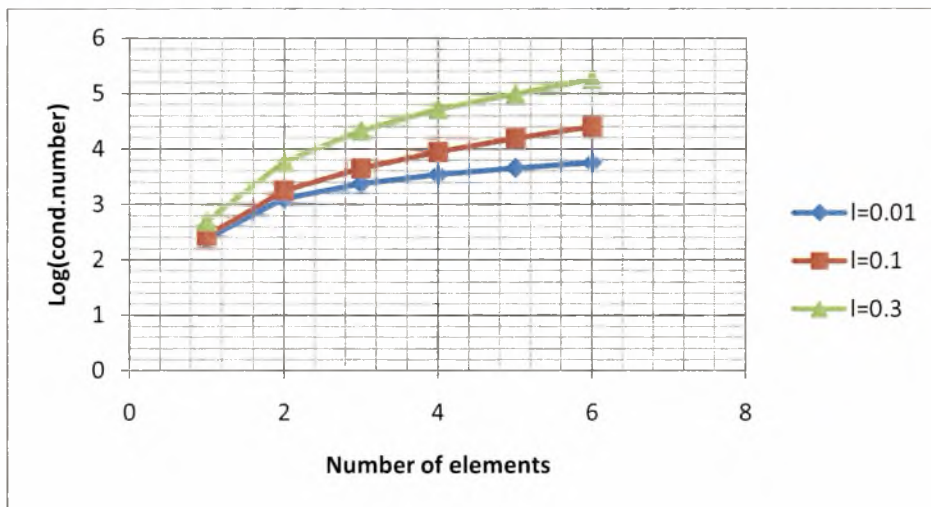
Γράφημα 5. Log(cond.number)-Log(DOF) για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

### Παρατηρήσεις:

Από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι στην περίπτωση του μεικτού προβλήματος η ελάχιστη μεταβολή του μητρώου ακαμψίας ή έστω των συνοριακών συνθηκών έχει ως επόμενο να παίρνουμε ανακριβή αποτελέσματα. Αντιθέτως στην περίπτωση του κλασσικού προβλήματος η αξιοπιστία της λύσης είναι μεγαλύτερη καθώς η παραμικρή αλλαγή στο μητρώο ακαμψίας ή των συνοριακών συνθηκών

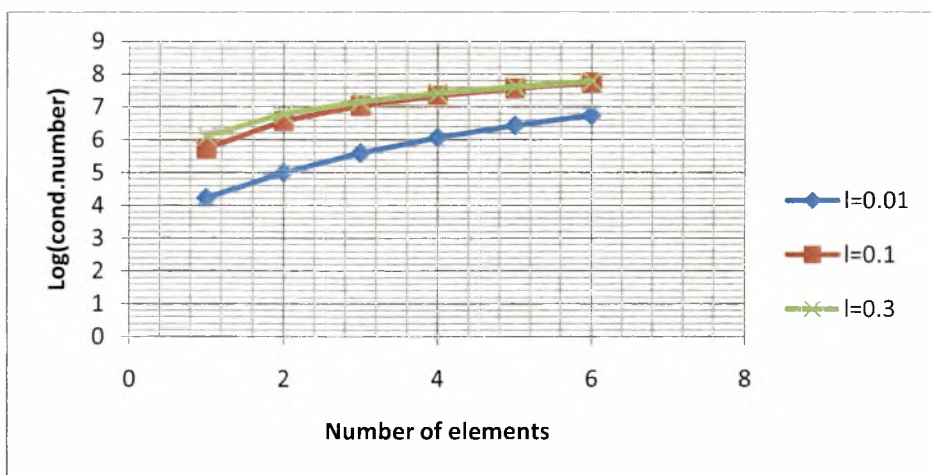
δεν θα επηρεάσουν τόσο τα αποτελέσματα του προβλήματος. Είναι χρήσιμο να γίνει μια γραφική παράσταση της λογαριθμικής τιμής του δείκτη κατάστασης σε σχέση με τον αριθμό στοιχείων που εξετάζεται το πρόβλημα. Τα παρακάτω γραφήματα μας δίνουν την παραπάνω πληροφορία για διαφορετικές τιμές του  $l$ .

Για το κλασικό πρόβλημα δυο κόμβων:



Γράφημα 6. Log(cond.number)-Number of elements

Για το μεικτό πρόβλημα τριών κόμβων:



Γράφημα 7. Log(cond.number)-Number of elements

Τα παραπάνω γραφήματα παρουσιάζουν την βελτίωση του δείκτη κατάστασης σε σχέση με τον αριθμό στοιχείων. Παρατηρούμε ότι με την αύξηση του αριθμού στοιχείων, ο δείκτης κατάστασης αυξάνεται και ο ρυθμός αύξησης εξαρτάται από τον λόγο  $h/l$ .



## Κεφάλαιο 6 Error Analysis Ανάλυση σφάλματος

Η διαδικασία του ελέγχου σφάλματος έχει ως στόχο την εξακρίβωση των αποκλίσεων που μπορεί να παρουσιάζουν τα υπολογιστικά μας αποτελέσματα από την ακριβή λύση του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, παρακάτω θα παρουσιαστεί η διαδικασία υπολογισμού του σφάλματος για κάθε περίπτωση υπολογισμού της παραμόρφωσης  $\epsilon$ , της μετατόπισης  $u$  και της τάσεως  $\sigma^{(2)}$  αντίστοιχα.

Στην γενική περίπτωση υπολογισμού του σφάλματος έχουμε :

$error_{f(x)} = \left( \int_0^L (f(x)_{exact} - f(x)_{arith})^2 dx \right)^{1/2}$  **(17)** όπου  $f(x)_{exact}$  είναι η αναλυτική λύση ενώ η  $f(x)_{arith}$  είναι η αριθμητική λύση με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Παρακάτω θα δούμε τον τρόπο υπολογισμού του σφάλματος της εξίσωσης **(17)** και την μορφή που θα έχει η εκάστοτε  $f(x)$  για το σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης καθώς και τάσης.

### 6.1 Μεικτό πρόβλημα

#### 6.1.1 Μετατόπιση $u$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος θα χρειαστούμε την αναλυτική λύση του προβλήματος και την λύση που προέκυψε από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία.

Ακριβής λύση:

$$u(x) = \frac{\sigma_L}{E} x + l \left( \epsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\sinh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{l}{l}} \quad \text{με } \epsilon_L = 0,01, \sigma_L = 1, l = 0.1, L = 1, E = 200$$

Αριθμητική λύση:

$$u^h(x) = [N^u] \{d\} = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3 \quad \text{(18)}$$

Τα  $u_i$  είναι οι λύσεις που παίρνουμε χρησιμοποιώντας FORTRAN.

Οι συναρτήσεις σχήματος είναι:

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, N_3(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad \text{(19)}$$

Από την σχέση **(17)**,  $f(x)_{exact} = u(x) = \frac{\sigma_L}{E} x + l \left( \epsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\sinh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{l}{l}}$  **(20)** και

$$f(x)_{arith} = u^h(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_3$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις **(18)**, **(19)**, **(20)** έχουμε ότι,

$$error^u = \left( \int_0^L (u_{exact} - u^h)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{Int^u} \quad \text{αναλυτικότερα}$$

$$Int^u = \int_{x_1}^{x_3} (u_{exact} - u_{elem1}^h)^2 dx + \int_{x_3}^{x_5} (u_{exact} - u_{elem2}^h)^2 dx + \int_{x_5}^{x_7} (u_{exact} - u_{elem3}^h)^2 dx + \int_{x_{N-2}}^{x_L} (u_{exact} - u_{elemN}^h)^2 dx$$

Όπου  $x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_L$  είναι οι αποστάσεις των κόμβων ενός στοιχείου.

Προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα αυτά θα γίνει χρήση Gauss 3point Integration.

### Μέθοδος Gauss 3-point Integration

Αν τα άκρα ολοκλήρωσης  $a \neq -1, b \neq 1$  θα πρέπει να μετατραπούν σε  $a = -1$  και  $b = 1$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \quad (21), \text{ όπου } \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i g(x_i) \quad (22)$$

Από την (21),(22) προκύπτει ότι :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} c_1 f\left(\frac{b-a}{2}x_1 + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} c_2 f\left(\frac{b-a}{2}x_2 + \frac{b+a}{2}\right) + \frac{b-a}{2} c_3 f\left(\frac{b-a}{2}x_3 + \frac{b+a}{2}\right)$$

Οι τιμές για τις σταθερές  $c_1, c_2, c_3, x_1, x_2, x_3$  δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

Points	Weighting Factors	Function Arguments
2	$c_1 = 1.000000000$ $c_2 = 1.000000000$	$x_1 = -0.577350269$ $x_2 = 0.577350269$
3	$c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$	$x_1 = -0.774596669$ $x_2 = 0.000000000$ $x_3 = 0.774596669$

Πίνακας 6. Weighting factors and function arguments for Gauss 2 or 3 point Integration

Όπως είδαμε πιο πάνω για κάθε στοιχείο το  $a, b$  θα αλλάζει αφού υπολογίζουμε το σφάλμα στο αντίστοιχο στοιχείο και στο τέλος το αθροίζουμε.

Πιο συγκεκριμένα:

Element	$a$	$b$
1	0	dx(node3)
2	dx(node3)	dx(node5)
3	dx(node5)	dx(node7)
...	....	.....
n-1	dx(2*node-3)	dx(2*node-1)
n	dx(2*node-1)	dx(2*node+1)

Πίνακας 7. Αντιστοίχιση  $a, b$  για εκάστοτε στοιχείο

Από την ανάλυση της μεθόδου Gauss 3-point integration έχουμε  $f(x) = (u_{exact} - u^h)^2$ . Επομένως ακολουθώντας τα βήματα της μεθόδου βρίσκουμε το  $\text{Int} = \int_0^L (u_{exact} - u^h)^2 dx$  συνεπώς το σφάλμα μας είναι  $error^u = \sqrt{\text{Int}^u}$ .

Χρησιμοποιώντας την Fortran εισάγουμε όλες τις παραπάνω σχέσεις έτσι ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα  $error^u$  για διαφορετικό αριθμό στοιχείων  $n_{elem} = 5, 10, 20, 50$ . Παρακάτω θα παρουσιαστούν τα δεδομένα που προκύπτουν και

διάφορες γραφικές παραστάσεις του σφάλματος ως προς το DOF(Dimension of Freedom) και τον λόγο  $h/l$  όπου  $h$  το χαρακτηριστικό μήκος κάθε στοιχείου.

### 6.1.2 Παραμόρφωση $\varepsilon$

Ομοίως και στην περίπτωση της παραμόρφωσης θα χρειαστούμε την αναλυτική λύση καθώς και την αριθμητική για να υπολογίσουμε το σφάλμα.

Αναλυτική λύση:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma_L}{E} + l\left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}\right) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}} \quad (23)$$

Αριθμητική λύση:

$$\varepsilon^h(x) = [N^\varepsilon]\{d\} = N_1(x)\varepsilon_1 + N_2(x)\varepsilon_2 + N_3(x)\varepsilon_3 \quad (24)$$

Τα  $\varepsilon_i$  είναι οι λύσεις που παίρνουμε χρησιμοποιώντας FORTRAN.

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, N_3(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (25)$$

Από την σχέση (1),  $f(x)_{exact} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma_L}{E} + l\left(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}\right) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}}$  και (26)

$$f(x)_{arith} = \varepsilon^h(x) = N_1(x)\varepsilon_1 + N_2(x)\varepsilon_2 + N_3(x)\varepsilon_3$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις (23), (24), (25), (26) έχουμε ότι,

$$error^\varepsilon = \left(\int_0^L (\varepsilon_{exact} - \varepsilon^h)^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{Int^\varepsilon} \text{ αναλυτικότερα}$$

$$Int^\varepsilon = \int_{x_1}^{x_3} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elem1}^h)^2 dx + \int_{x_3}^{x_5} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elem2}^h)^2 dx + \int_{x_5}^{x_7} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elem3}^h)^2 dx + \int_{x_{N-2}}^{x_L} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elemN}^h)^2 dx$$

Όπου  $x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_L$  είναι οι αποστάσεις των κόμβων ενός στοιχείου.

Αξιοποιώντας την μέθοδο Gauss 3-point Integration όπου  $f(x) = (\varepsilon_{exact} - \varepsilon^h)^2$  και με την χρήση της Fortran υπολογίζουμε το  $error^\varepsilon = \sqrt{Int^\varepsilon}$

### 6.1.3 Τάση $\sigma^{(2)}$

Αναλογικά και στην περίπτωση της τάσης  $\sigma^{(2)}$  θα χρειαστούμε την αναλυτική λύση καθώς και την αριθμητική για να υπολογίσουμε το σφάλμα.

Αναλυτική λύση:

$$\sigma^{(2)}(x) = E \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}} \quad (27)$$

Αριθμητική λύση:

$$\sigma^{(2)h}(x) = [N^\sigma]\{d\} = N_1^\sigma(x)\sigma_1 + N_3^\sigma(x)\sigma_3 \quad (28)$$

Τα  $\varepsilon_i$  είναι οι λύσεις που παίρνουμε χρησιμοποιώντας FORTRAN.

Όπου συναρτήσεις σχήματος είναι:

$$N_1^\sigma(x) = \frac{(x-x_3)}{(x_1-x_3)}, N_3^\sigma(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)} \quad (29)$$

Από την σχέση (1),  $f(x)_{exact} = \sigma^{(2)}(x) = E \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{L}{l}}$  (30) και

$$f(x)_{arith} = \sigma^{(2)h}(x) = N_1^\sigma(x)\sigma_1 + N_3^\sigma(x)\sigma_3$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, **(27)**, **(28)**, **(29)**, **(30)** έχουμε ότι,

$$error^\varepsilon = \left( \int_0^L (\sigma^{(2)_{exact}} - \sigma^{(2)h})^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{Int^\sigma} \text{ αναλυτικότερα}$$

$$Int^\sigma = \int_{x_1}^{x_3} (\sigma^{(2)_{exact}} - \sigma^{(2)h}_{elem1})^2 dx + \int_{x_3}^{x_5} (\sigma^{(2)_{exact}} - \sigma^{(2)h}_{elem2})^2 dx + \int_{x_5}^{x_7} (\sigma^{(2)_{exact}} - \sigma^{(2)h}_{elem3})^2 dx + \int_{x_{N-2}}^{x_L} (\sigma^{(2)_{exact}} - \sigma^{(2)h}_{elemN})^2 dx$$

Όπου  $x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_L$  είναι οι αποστάσεις των κόμβων ενός στοιχείου.

Αξιοποιώντας την μέθοδο Gauss 3point Integration όπου :

$$f(x) = (\sigma^{(2)_{exact}} - \sigma^{(2)h})^2 \text{ και με την χρήση της Fortran υπολογίζουμε το } error^\sigma = \sqrt{Int^\sigma}$$

### 6.1.4 Γραφικές παραστάσεις:

Τα δεδομένα που προκύπτουν από την χρήση της Fortran παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

DOF	nelem	Log(h/ l)	Log (Error u)	Log (Error ε)	Log (Error σ <sup>(2)</sup> )	Log (Dof)
28	5	0,301029996	-5,29595309	-4,3600063	-1,528944	1,447158031
53	10	0	-6,18992244	-5,2776035	-2,079727	1,72427587
103	20	-0,301029996	-6,79558131	-6,1539866	-2,6783282	2,012837225
253	50	-0,698970004	-6,53113791	-6,332533	-3,4762797	2,403120521

Πίνακας 8. Αποτελέσματα για σχηματισμό γραφημάτων μεικτού προβλήματος

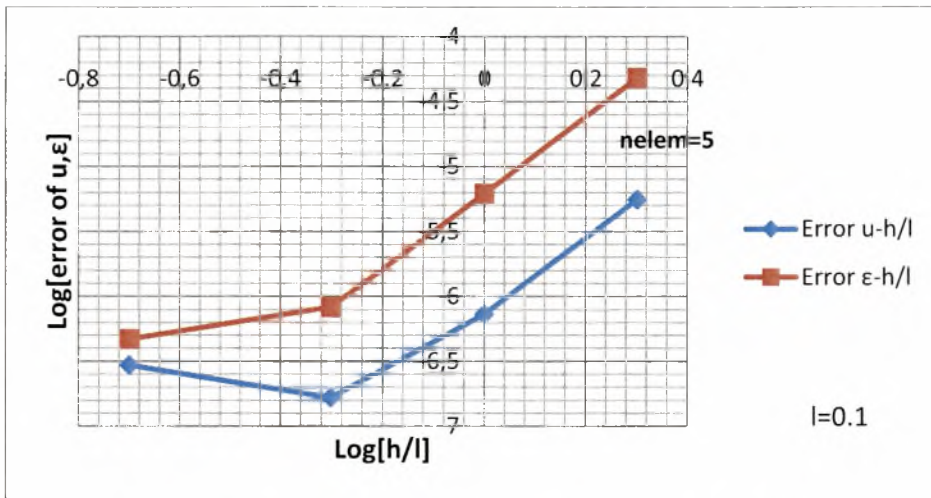
Για την περίπτωση του μεικτού προβλήματος ο συνολικός βαθμός ελευθερίας DOF δίνεται από την σχέση  $DOF = 8 + 5 * (nelem - 1)$ .

Γραφικές των διάφορων σφαλμάτων μετατόπισης  $e^u$ , παραμόρφωσης  $e^\varepsilon$ , τάσης  $e^\sigma$  ως προς  $h/l$  σε λογαριθμικές τιμές.

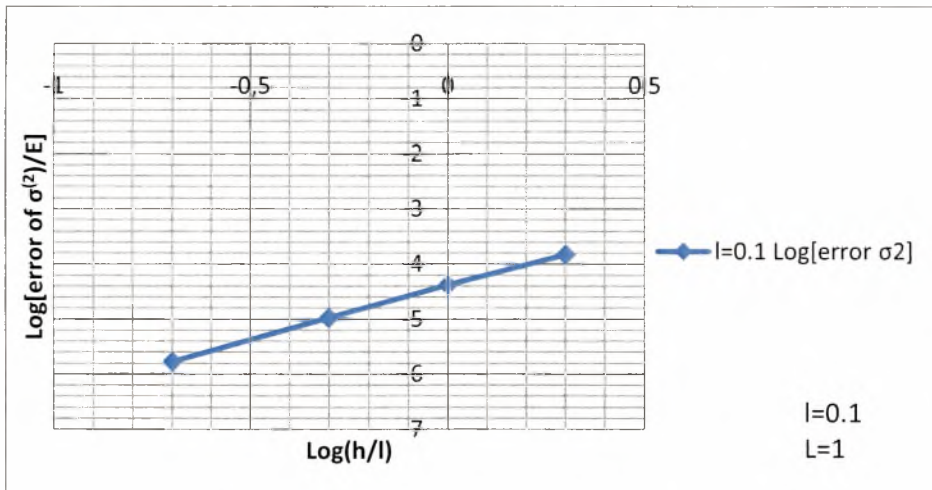
Το ακόλουθο γράφημα περιέχει τρεις γραφικές παραστάσεις:

- Το γράφημα του σφάλματος  $Log(e^u) = Log(\int_0^L (u - u^h)^2 dx)$  ως προς το  $Log(h/l)$
- Το γράφημα είναι το  $Log(e^\varepsilon) = Log(\int_0^L (\varepsilon - \varepsilon^h)^2 dx)$  ως προς το  $Log(h/l)$
- Το γράφημα είναι το  $Log(e^\sigma) = Log(\int_0^L (\sigma^{(2)} - \sigma^{(2)h})^2 dx)$  ως προς το  $Log(h/l)$

Όπου το  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου ( $x_3 - x_1 = h$ )



Γράφημα 8. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς το  $\text{Log}(h/l)$



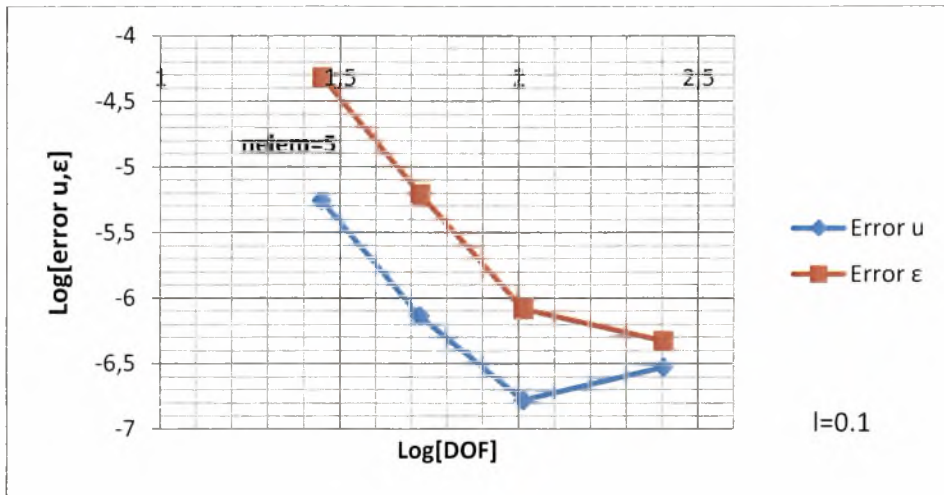
Γράφημα 9. Σφάλμα τάσης ως προς τον  $\text{Log}([h/l])$

Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι με την αύξηση του αριθμού των στοιχείων που εξετάζουμε το πρόβλημα παρατηρείται σταδιακή μείωση του σφάλματος της μετατόπισης  $u$ , της παραμορφώσεως  $\epsilon$  καθώς και της τάσεως  $\sigma^{(2)}$ .

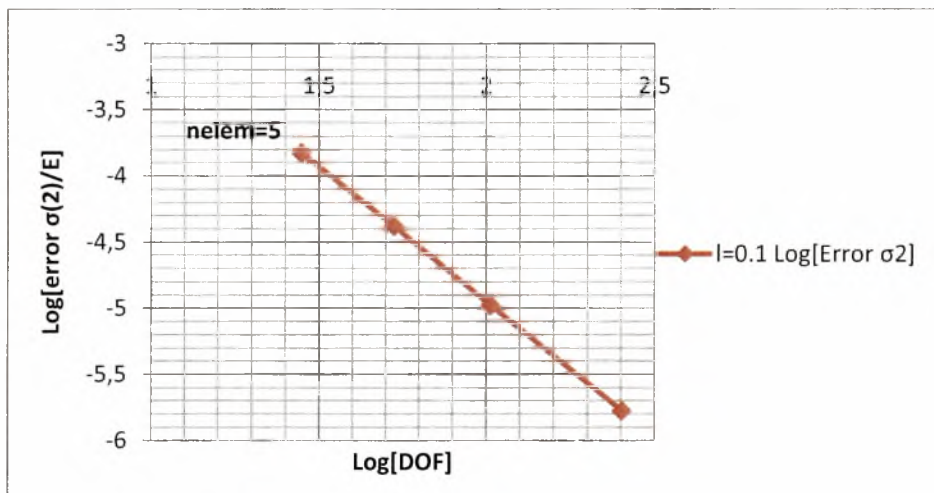
Το ακόλουθο γράφημα περιέχει τρεις γραφικές παραστάσεις:

- Το γράφημα του σφάλματος  $\text{Log}(e^u) = \text{Log}(\int_0^L (u - u^h)^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(\text{DOF})$
- Το γράφημα είναι το  $\text{Log}(e^\epsilon) = \text{Log}(\int_0^L (\epsilon - \epsilon^h)^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(\text{DOF})$
- Το γράφημα είναι το  $\text{Log}(e^\sigma) = \text{Log}(\int_0^L (\sigma^{(2)} - \sigma^{(2)h})^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(\text{DOF})$

Όπου το  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου ( $x_3 - x_1 = h$ )



Γράφημα 10. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς τον Log(DOF)



Γράφημα 11. Σφάλμα τάσης ως προς τον Log(DOF)

Από τα παραπάνω γραφήματα συμπεραίνουμε ότι παρατηρείται σταδιακή μείωση του σφάλματος όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων που εξετάζεται το πρόβλημα. Ωστόσο στην περίπτωση της μετατοπίσεως παρατηρείται μικρή αύξηση η οποία ενδέχεται να είναι μη ακρίβεια πράξεων που προκύπτει από την FORTRAN.

### 6.1.5 Γραφήματα σφάλματος για $l = 0, 01$ και $l = 0, 3$

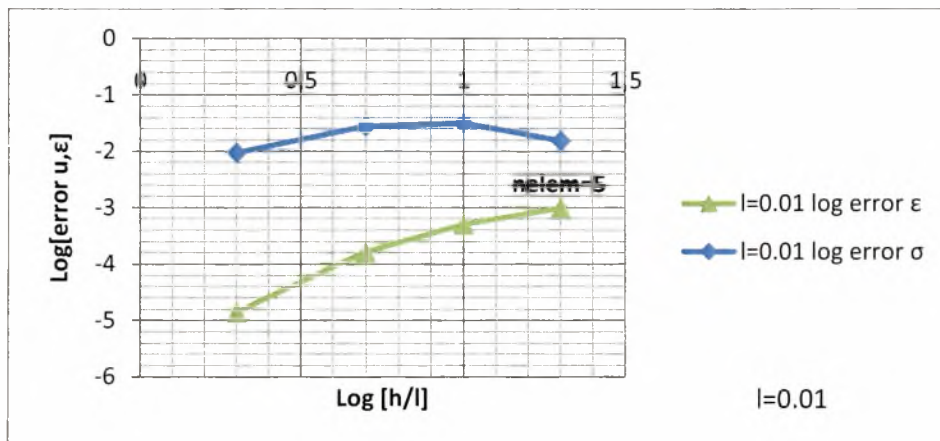
#### 1<sup>η</sup> περίπτωση $l = 0, 01$

Το ακόλουθο γράφημα περιέχει τρεις γραφικές παραστάσεις:

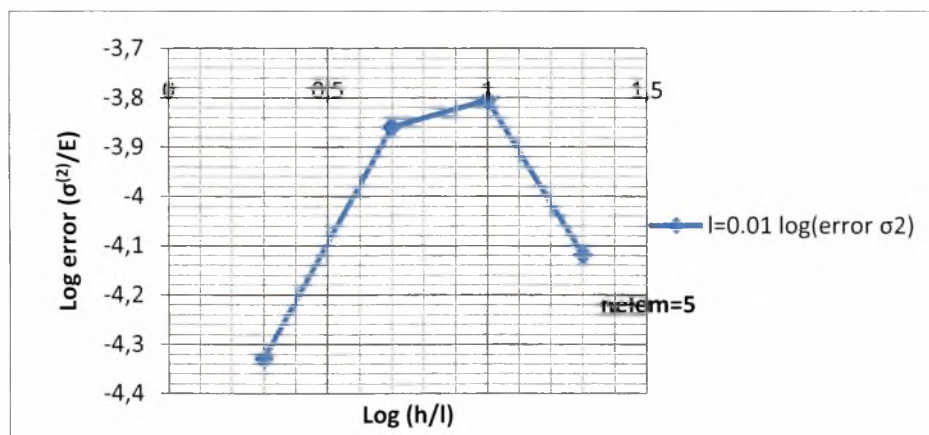
- Το γράφημα του σφάλματος  $\text{Log}(e^u) = \text{Log}(\int_0^L (u - u^h)^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(h/l)$

- Το γράφημα είναι το  $\text{Log}(e^\varepsilon) = \text{Log}(\int_0^L (\varepsilon - \varepsilon^h)^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(h/l)$
- Το γράφημα είναι το  $\text{Log}(e^\sigma) = \text{Log}(\int_0^L (\sigma^{(2)} - \sigma^{(2)h})^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(h/l)$

Όπου το  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου ( $x_3 - x_1 = h$ )



Γράφημα 12. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς τον λόγο  $h/l$

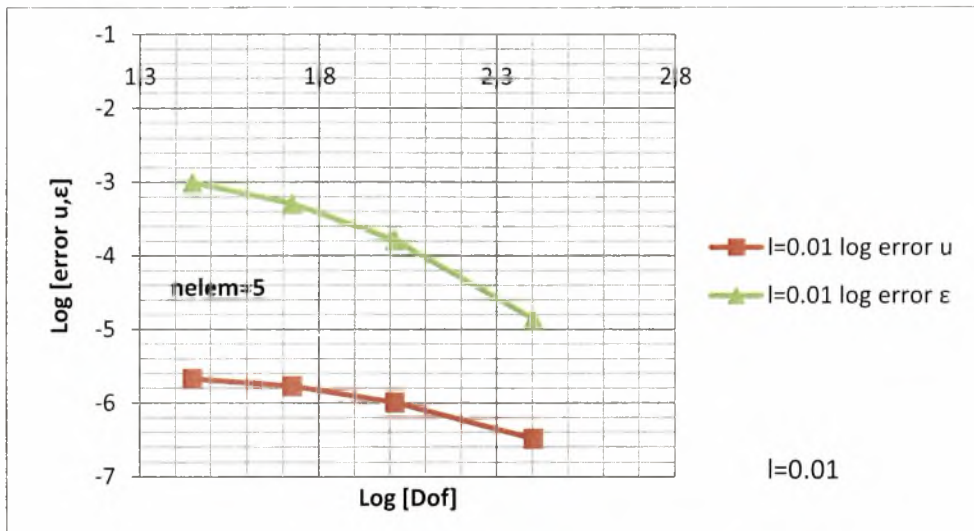


Γράφημα 13. Σφάλμα τάσης ως προς τον λόγο  $h/l$

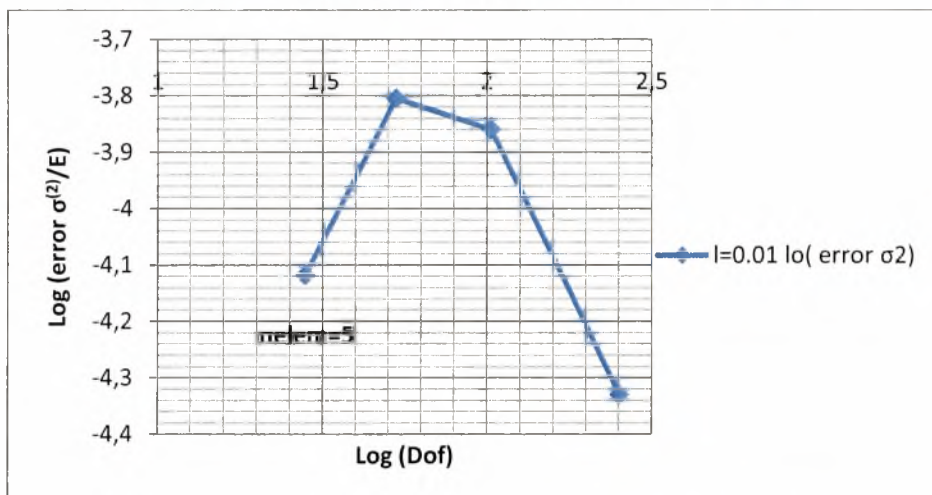
Το ακόλουθο γράφημα περιέχει τρεις γραφικές παραστάσεις:

- Το γράφημα του σφάλματος  $\text{Log}(e^u) = \text{Log}(\int_0^L (u - u^h)^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(\text{DOF})$
- Το γράφημα είναι το  $\text{Log}(e^\varepsilon) = \text{Log}(\int_0^L (\varepsilon - \varepsilon^h)^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(\text{DOF})$
- Το γράφημα είναι το  $\text{Log}(e^\sigma) = \text{Log}(\int_0^L (\sigma^{(2)} - \sigma^{(2)h})^2 dx)$  ως προς το  $\text{Log}(\text{DOF})$

Όπου το  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου ( $x_3 - x_1 = h$ )



Γράφημα 14. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς τον DOF



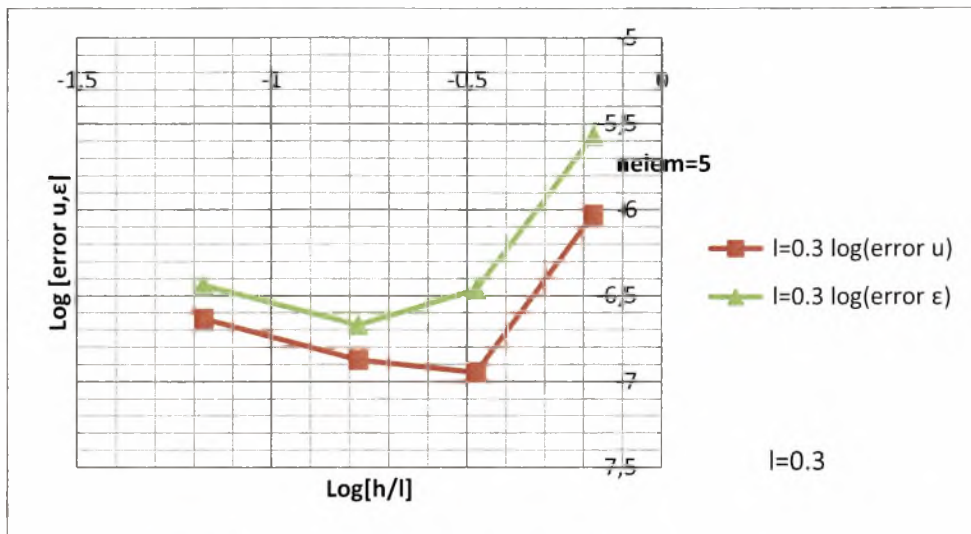
Γράφημα 15. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης, τάσης ως προς τον DOF

Στην περίπτωση του γραφήματος της τάσεως  $\sigma^{(2)}$  ως προς το  $\text{Log}(h/l)$  παρατηρούμε αύξηση του σφάλματος για μικρό αριθμό στοιχείων, βέβαια όταν ο αριθμός στοιχείων γίνει  $nelem=50$  τότε το σφάλμα μας μειώνεται.

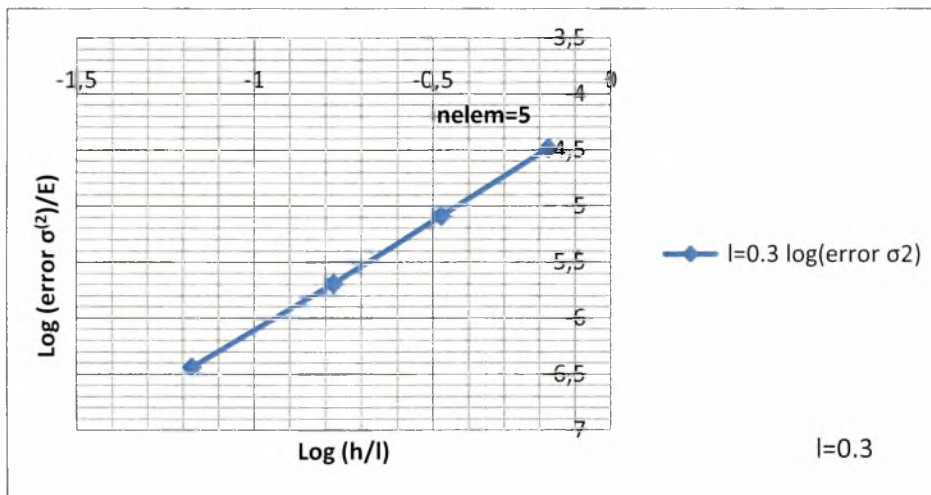
### 2<sup>η</sup> περίπτωση $l = 0.3$

Ομοίως και το παρακάτω γράφημα περιλαμβάνει τρεις γραφικές παραστάσεις, της μετατόπισης  $u$ , παραμόρφωσης  $\epsilon$ , τάσης  $\sigma^{(2)}$ .





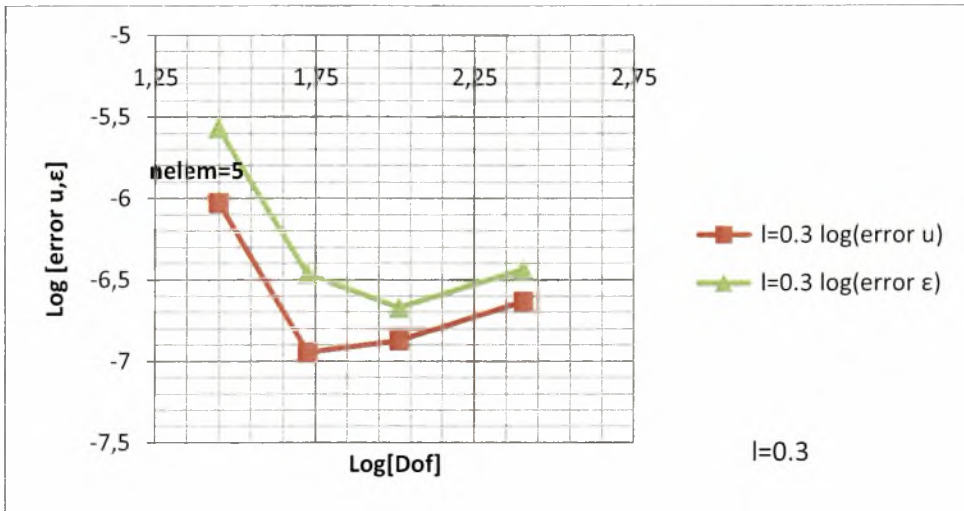
Γράφημα 16. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς τον λόγο h/l



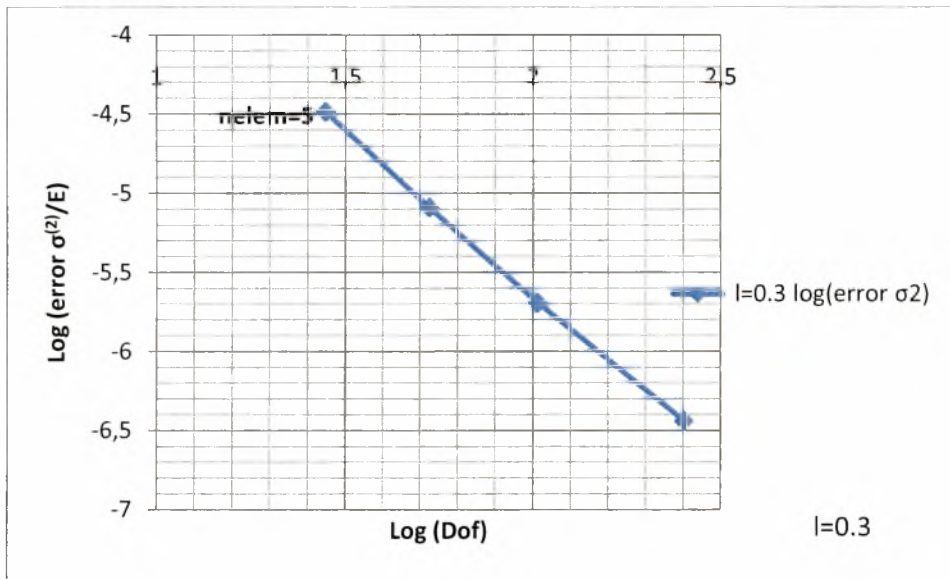
Γράφημα 17. Σφάλμα τάσης ως προς τον λόγο [h/l]/E

Η μη ακρίβεια της λύσεως παρατηρείται και στην περίπτωση όταν  $l = 0.3$ , καθώς παρατηρούμε ότι αρχικά το σφάλμα μας μειώνεται ενώ καθώς αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων αρχίζει και το σφάλμα σταδιακά να αυξάνεται.

Παρακάτω παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις του σφάλματος της μετατόπισης  $u$ , παραμόρφωσης  $\epsilon$  καθώς και τάσεως  $\sigma^{(2)}$ .



Γράφημα 18. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς το Log(DOF)



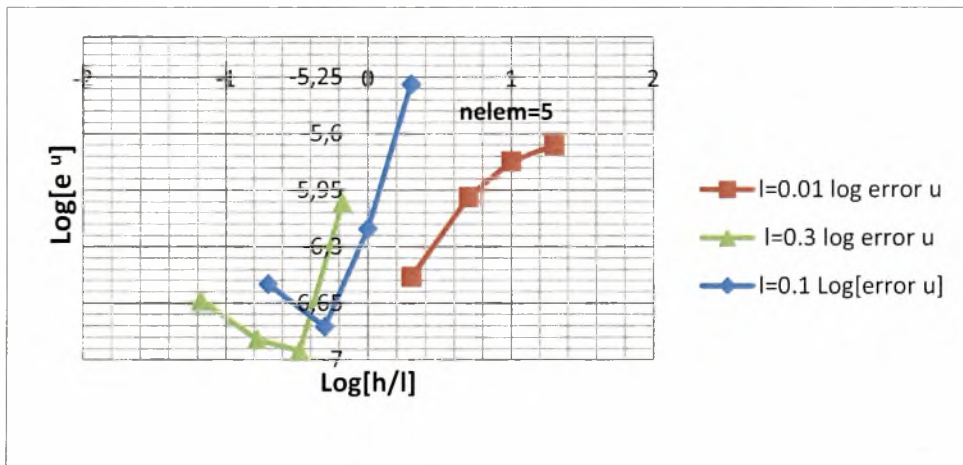
Γράφημα 19. Σφάλμα τάσης ως προς το Log(DOF)

Ομοίως και στην περίπτωση των γραφημάτων  $u, \epsilon, \sigma^{(2)}$  ως προς τον συνολικό βαθμό ελευθερίας παρατηρούμε σταδιακή μείωση του σφάλματος, ενώ παρουσιάζεται και η περίπτωση της στρογγυλοποίησης από την Fortran που οδηγεί σε αύξηση του σφάλματος ενώ ο αριθμός στοιχείων αυξάνεται.

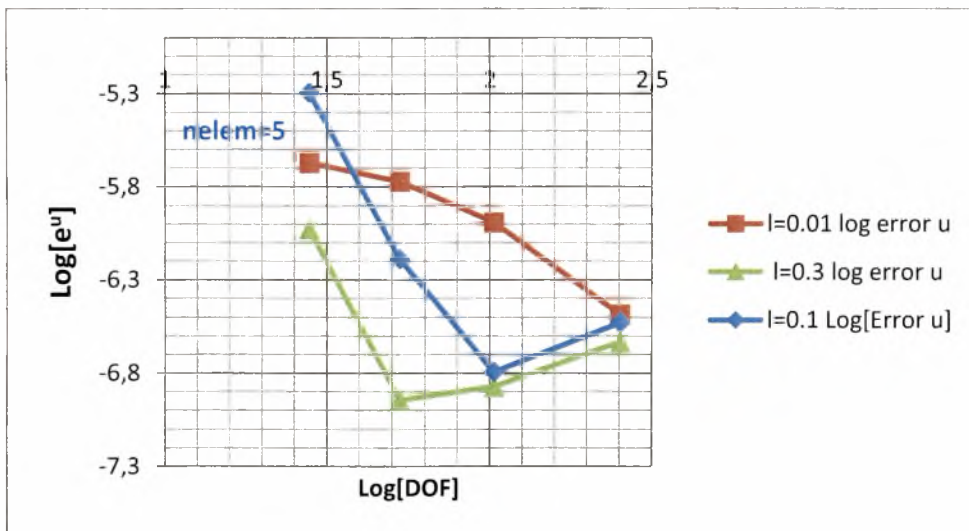
## 6.1.6 Συγκριτικές γραφικές παραστάσεις για διαφορετικά $l$

### 1<sup>ο</sup> Γράφημα: Μετατόπιση $u$

Τα παρακάτω λογαριθμικά γραφήματα δείχνουν το σφάλμα μετατόπισης ως προς τον λόγο  $h/l$  και DOF(dimension of freedom) .



Γράφημα 20. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(e^u)$ - $\text{Log}(h/l)$  για  $l=0.01, 0.1, 0.3$



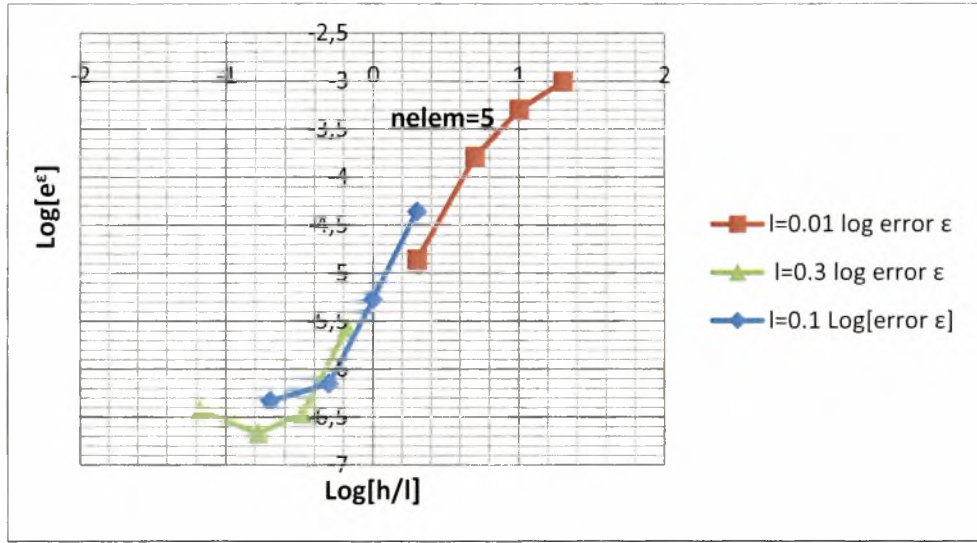
Γράφημα 21. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(e^u)$ - $\text{Log}(\text{DOF})$  για  $l=0.01, 0.1, 0.3$

Στα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε τα εξής σημαντικά στοιχεία:

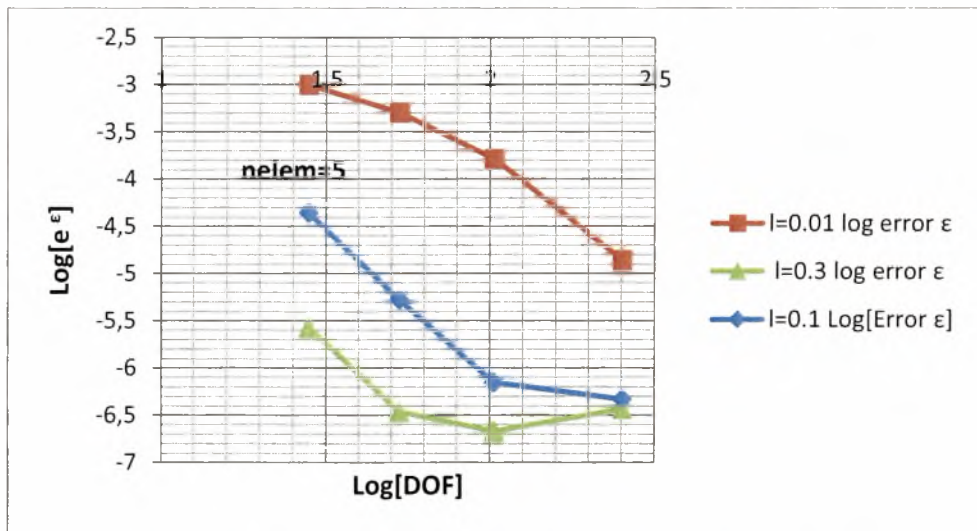
- Μεγάλη τιμή του  $l$  μας δίνει μικρότερο σφάλμα για την μετατόπιση  $u$ .
- Για  $l=0.1$  παρουσιάζεται μια μεταβλητότητα, καθώς για μικρό αριθμό στοιχείων παρουσιάζει μεγαλύτερο σφάλμα σε σύγκριση με  $l=0.01$ .

## 2<sup>ο</sup> Γράφημα: Παραμόρφωση $\epsilon$

Τα παρακάτω λογαριθμικά γραφήματα δείχνουν το σφάλμα παραμόρφωσης ως προς τον λόγο  $h/l$  και DOF(dimension of freedom)



Γράφημα 22. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(\epsilon^u) - \text{Log}(h/l)$  για  $l=0.01, 0.1, 0.3$



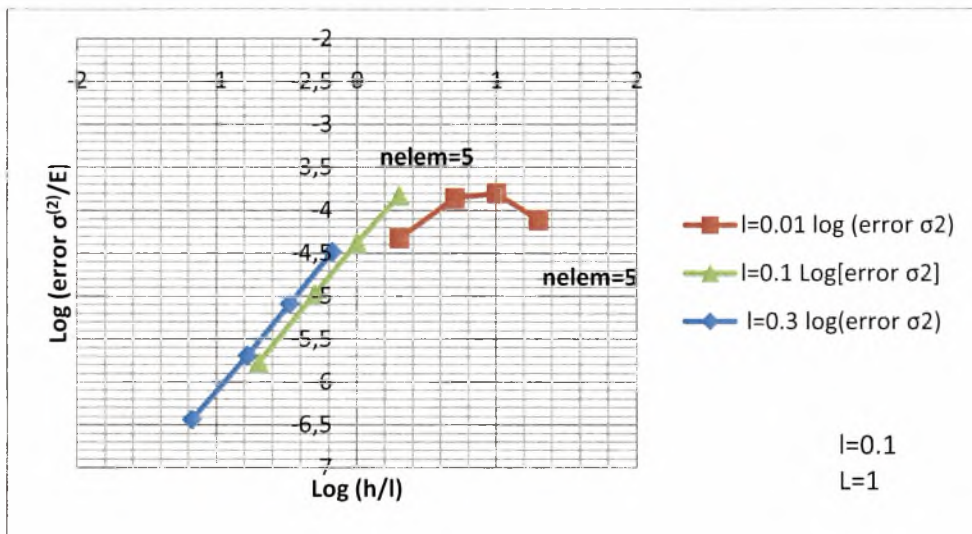
Γράφημα 23. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(\epsilon^e) - \text{Log}(\text{DOF})$  για  $l=0.01, 0.1, 0.3$

Παρατηρώντας τα παραπάνω γραφήματα μπορούμε να σχολιάσουμε τα εξής:

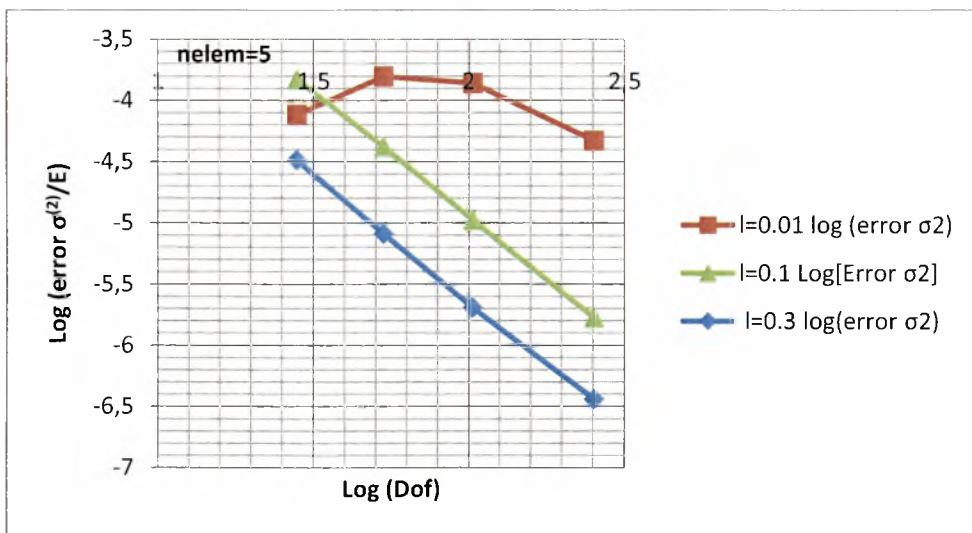
- Ομοίως όπως και στην περίπτωση της μετατόπισης  $u$  για  $l=0.3$  το σφάλμα παραμένει μικρότερο όταν χρησιμοποιείται ο ίδιος αριθμός στοιχείων για διαφορετικά  $l$ .

### 3<sup>ο</sup> Γράφημα: Τάση $\sigma^{(2)}$

Τα παρακάτω λογαριθμικά γραφήματα δείχνουν το σφάλμα της τάσεως  $\sigma^{(2)}$  ως προς τον λόγο  $h/l$  και DOF(dimension of freedom)



Γράφημα 24. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(\sigma^{(2)}/E) - \text{Log}(h/l)$  για  $l=0.01, 0.1, 0.3$



Γράφημα 25. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(\sigma^{(2)}/E) - \text{Log}(\text{DOF})$  για  $l=0.01, 0.1, 0.3$

Από τα παραπάνω γραφήματα μπορούμε να εξάγουμε το εξής συμπέρασμα:

- Ο συνδυασμός της αύξησης του αριθμού των στοιχείων που χρησιμοποιούμε για την επίλυση του προβλήματος με την αύξηση του όρου  $l$  από 0.01 σε 0.1 και τελικά σε 0.3 οδηγεί στην μείωση του σφάλματος τάσεως με σταθερό και γρήγορο ρυθμό.

## 6.2 Κλασσικό πρόβλημα

Η ανάλυση του προβλήματος δεν διαφέρει και πολύ σε αυτήν την περίπτωση του μεικτού προβλήματος, η μόνη διαφορά που παρουσιάζουν είναι ότι το κλασσικό πρόβλημα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας ανά κόμβο σε αντίθεση με το μεικτό που έχει 3 βαθμούς. Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση του κλασσικού  $DOF=2 \cdot n_{elem}$ , ενώ στο μεικτό  $DOF=8+5(n_{elem}-1)$ . Επομένως η ακριβής λύση είναι η ίδια με την περίπτωση του μεικτού προβλήματος.

### 6.2.1 Μετατόπιση $u$

Η ανάλυση για τον υπολογισμό του σφάλματος είναι ακριβώς η ίδια τα μόνα δεδομένα που διαφοροποιούνται είναι τα  $u_i$  που αντιστοιχούν στα αποτελέσματα της αριθμητικής επίλυσης του προβλήματος. Επίσης αλλαγή υπάρχει και στις αποστάσεις των κόμβων καθώς έχουμε 2 κόμβους ανά στοιχείο.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος θα χρειαστούμε την αναλυτική λύση του προβλήματος και την λύση που προέκυψε από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Επομένως όπως ήδη αποδείξαμε στα πρώτα κεφάλαια :

Ακριβής λύση:

$$u(x) = \frac{\sigma_L}{E} x + l \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\sinh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{l}{l}} \quad \text{με } \varepsilon_L = 0,01 \quad \sigma_L = 1 \quad l = 0.1 \quad L = 1 \quad E = 200$$

Αριθμητική λύση:

$$u^h(x) = [N^u] \{d\} = N_1(x)u_1 + N_2(x)u'_1 + N_3(x)u_2 + N_4(x)u'_2 \quad (31)$$

Τα  $u_i$  είναι οι λύσεις που παίρνουμε χρησιμοποιώντας FORTRAN και τα  $u'_i$  είναι τα αντίστοιχα  $\varepsilon_i$ .

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= \frac{(x_2 - x)^2 [h + 2(x - x_1)]}{h^3}, & N_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)^2}{h^2}, \\ N_3(x) &= \frac{(x - x_1)^2 [h + 2(x_2 - x)]}{h^3}, & N_4(x) &= \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)}{h^2}. \end{aligned} \right\} (32)$$

$$\text{Από την σχέση (1), } f(x)_{exact} = u(x) = \frac{\sigma_L}{E} x + l \left( \varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E} \right) \frac{\sinh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{l}{l}} \quad (33) \text{ και}$$

$$f(x)_{arith} = u^h(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u'_1 + N_3(x)u_2 + N_4(x)u'_2$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις (31), (32), (33) έχουμε ότι,  $error^u = \left( \int_0^L (u_{exact} - u^h)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{Int^u}$  αναλυτικότερα

$$\begin{aligned} Int^u &= \int_{x_1}^{x_2} (u_{exact} - u_{elem1}^h)^2 dx + \int_{x_2}^{x_3} (u_{exact} - u_{elem2}^h)^2 dx + \\ &+ \int_{x_3}^{x_4} (u_{exact} - u_{elem3}^h)^2 dx + \int_{x_{N-1}}^{x^L} (u_{exact} - u_{elemN}^h)^2 dx \end{aligned}$$

Όπου  $x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_L$  είναι οι αποστάσεις των κόμβων ενός στοιχείου. Προκειμένου να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα αυτά θα γίνει χρήση Gauss 3point Integration.

## 6.2.2 Παραμόρφωση $\varepsilon$

Ομοίως και στην περίπτωση της παραμόρφωσης θα χρειαστούμε την αναλυτική λύση καθώς και την αριθμητική για να υπολογίσουμε το σφάλμα.

Αναλυτική λύση:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma_L}{E} + l(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{l}{l}} \quad (34)$$

Αριθμητική λύση:

$$\varepsilon^h(x) = [B(x)]\{d\} \quad (35) \quad \text{όπου } [B] = \frac{d}{dx} [N]$$

$$\text{Επομένως } \varepsilon^h(x) = u_1 \frac{dN_1(X)}{dx} + \varepsilon_1 \frac{dN_2(X)}{dx} + u_2 \frac{dN_3(X)}{dx} + \varepsilon_2 \frac{dN_4(X)}{dx}$$

Τα  $\varepsilon_i$  είναι οι λύσεις που παίρνουμε χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα της FORTRAN.

$$N_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, N_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, N_3(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (36)$$

Από την σχέση (1),  $f(x)_{exact} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma_L}{E} + l(\varepsilon_L - \frac{\sigma_L}{E}) \frac{\cosh \frac{x}{l}}{\cosh \frac{l}{l}}$  και

$$f(x)_{arith} = \varepsilon^h(x) = u_1 \frac{dN_1(X)}{dx} + \varepsilon_1 \frac{dN_2(X)}{dx} + u_2 \frac{dN_3(X)}{dx} + \varepsilon_2 \frac{dN_4(X)}{dx}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις(34), (35), (36) έχουμε ότι,

$$error^\varepsilon = (\int_0^L (\varepsilon_{exact} - \varepsilon^h)^2 dx)^{1/2} = \sqrt{Int^\varepsilon} \quad \text{αναλυτικότερα}$$

$$Int^\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elem1}^h)^2 dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elem2}^h)^2 dx + \int_{x_3}^{x_4} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elem3}^h)^2 dx + \int_{x_{N-1}}^{x_L} (\varepsilon_{exact} - \varepsilon_{elemN}^h)^2 dx$$

Όπου  $x_1, x_3, x_5, x_7, \dots, x_{n-2}, x_L$  είναι οι αποστάσεις των κόμβων ενός στοιχείου.

Αξιοποιώντας την μέθοδο Gauss 3point Integration όπου  $f(x) = (\varepsilon_{exact} - \varepsilon^h)^2$  και με την χρήση της Fortran υπολογίζουμε το  $error^\varepsilon = \sqrt{Int^\varepsilon}$

Τα σφάλματα υπολογίζονται με χρήση της μεθόδου Gauss 3-point Integration η οποία έχει ενσωματωθεί στον κώδικα της Fortran που έχει φτιαχτεί για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος. Το σφάλμα υπολογίζετε για κάθε στοιχείο ξεχωριστά και στο τέλος αθροίζονται και παίρνουμε την τετραγωνική τους ρίζα όπως φαίνεται και από την σχέση  $error = \sqrt{Int^\varepsilon}$ .

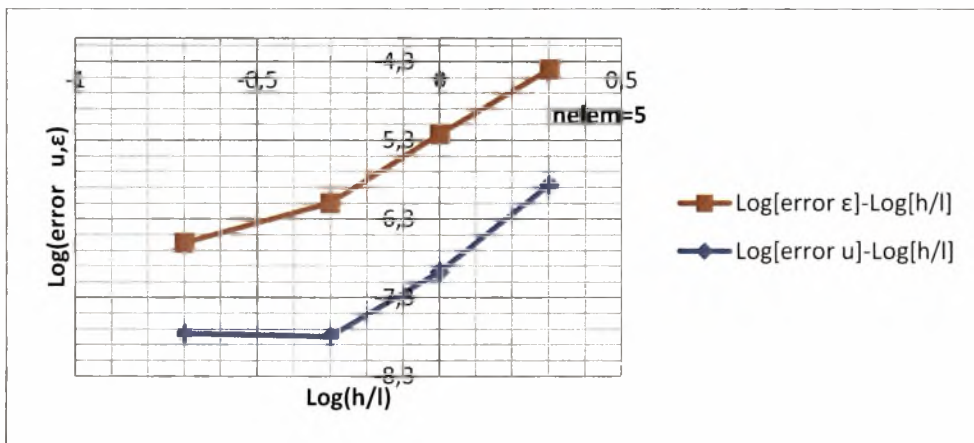
### 6.2.3 Γραφικές παραστάσεις για το κλασσικό πρόβλημα

Τα δεδομένα που προκύπτουν από την χρήση της Fortran παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

nelement	DOF	Log[h/l]	Log[DOF]	Log[error u]	Log[error ε]
5	12	0.30103	1.079181	-5.1257244	-3.399882627
10	22	0	1.342423	-6.3043749	-4.282109099
20	42	-0.30103	1.623249	-7.5447218	-5.178907246
50	102	-0.69897	2.0086	-7.6234735	-6.370272635

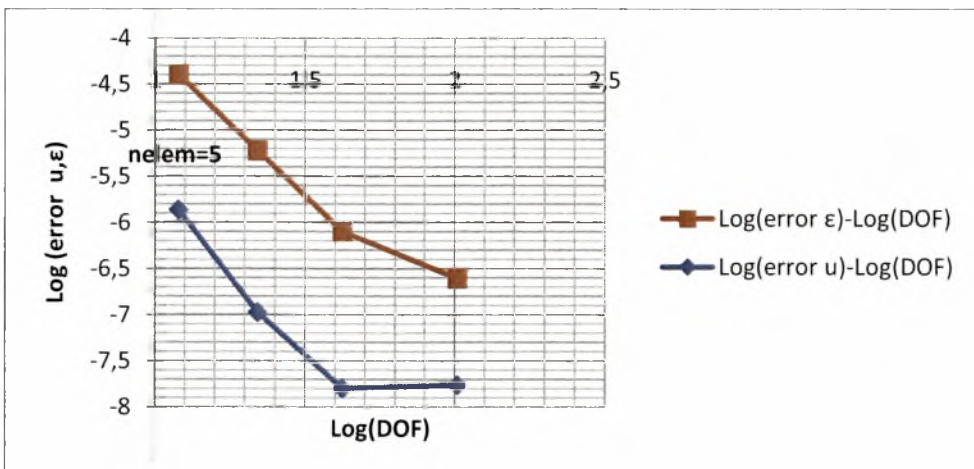
Πίνακας 9. Αποτελέσματα για σχηματισμό γραφημάτων κλασσικού προβλήματος

Το ακόλουθο γράφημα περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του σφάλματος μετατόπισης  $u$  καθώς και της παραμόρφωσης  $\epsilon$  ως προς τον λογάριθμο  $h/l$ . Όπου το  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου ( $x_2 - x_1 = h$ ) και  $l$  το μήκος της μικροδομής.



Γράφημα 26. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης ως προς τον λόγο  $h/l$

Το παρακάτω γράφημα περιλαμβάνει τα αποτελέσματα του σφάλματος μετατόπισης  $u$  καθώς και της παραμόρφωσης  $\epsilon$  ως προς τον λογάριθμο του συνολικού βαθμού ελευθερίας του στοιχείου. Όπου το  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου ( $x_2 - x_1 = h$ ) και  $l$  το μήκος της μικροδομής.



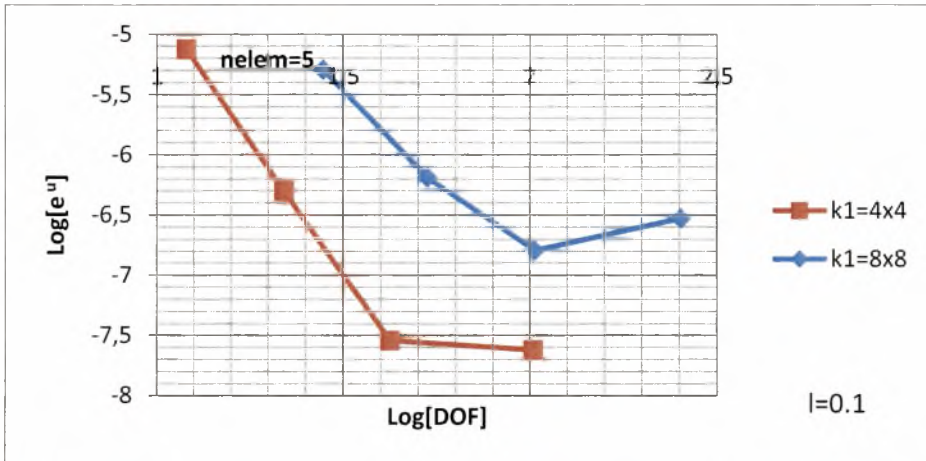
Γράφημα 27. Σφάλμα μετατόπισης, παραμόρφωσης, τάσης ως προς τον λόγο  $h/l$



## 6.2.4 Συγκριτικά γραφήματα

### Γράφημα σφάλματος μετατόπιση $u$ ως προς $\text{Log}(\text{DOF})$

Αποτελέσματα του  $e^u = \int_0^L (u - u^h)^2 dx$  για το μεικτό πρόβλημα και το κλασσικό ως προς τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας.

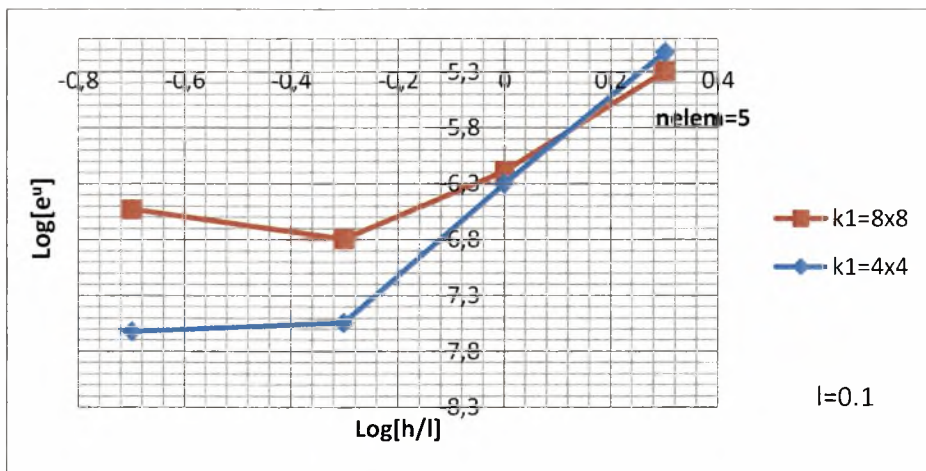


Γράφημα 28. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(e^u)$ - $\text{Log}(\text{DOF})$  για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

Στην περίπτωση που έχουμε γραφήματα η σύγκριση των αποτελεσμάτων διαφέρει καθώς το δικομβικό έχει  $\text{DOF}$  μικρότερο για τον ίδιο αριθμό στοιχείων και για αυτό το λόγο το γράφημα του τρικομβικού στοιχείο έπεται του δικομβικού.

### Γράφημα σφάλματος μετατόπισης $u$ ως προς $\text{Log}(h/l)$

Αποτελέσματα του  $e^u = \int_0^L (u - u^h)^2 dx$  για το μεικτό πρόβλημα και το κλασσικό ως προς το  $\text{log}(h/l)$  όπου  $l=0.1$  και  $h$  είναι το μήκος ενός στοιχείου



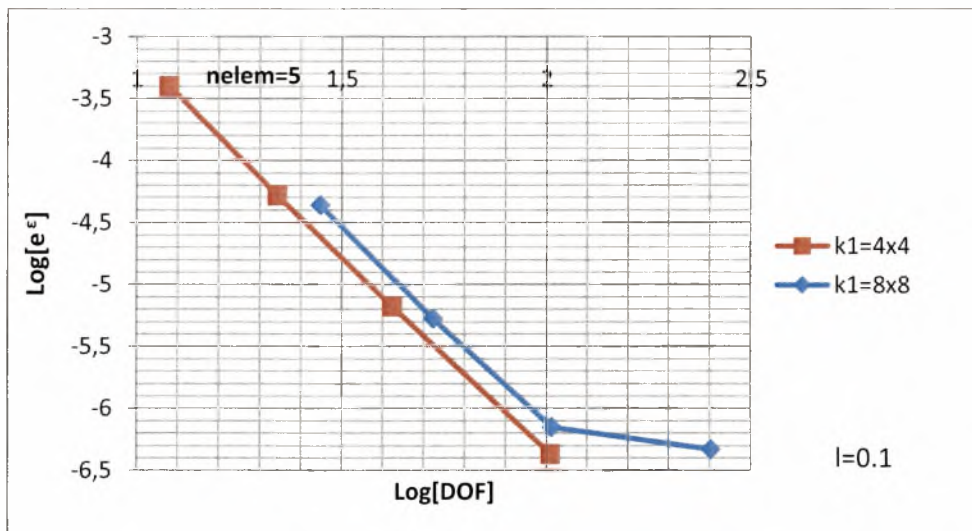
Γράφημα 29. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(e^u)$ - $\text{Log}(h/l)$  για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

### Παρατηρήσεις:

Στο παραπάνω γράφημα αξίζει να σχολιάσουμε ότι, για μικρό αριθμό στοιχείων  $nelem \leq 10$  το σφάλμα του δικομβικού και τρικομβικού στοιχείου είναι περίπου ίδια. Ωστόσο για  $nelem \geq 10$  το δικομβικό στοιχείο παρουσιάζει σφάλμα πολύ μικρότερο από το τρικομβικό καθώς αυτό μειώνεται με μεγαλύτερο ρυθμό ενώ ο αριθμός των στοιχείων αυξάνεται. Ενδεικτικά το σφάλμα του δικομβικού για  $nelem=20$  είναι ίσο με  $error_{4 \times 4} = 2.852845 \times 10^{-8}$  ενώ του τρικομβικού είναι ίσο με  $error_{8 \times 8} = 1.601101 \times 10^{-7}$ . Επομένως παρατηρούμε ότι το δικομβικό σφάλμα είναι 5.6 φορές μικρότερο από το τρικομβικό και όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων που εξετάζουμε το πρόβλημα τόσο μεγαλώνει και ο λόγος των δυο σφαλμάτων.

### Γράφημα σφάλματος παραμόρφωσης $\epsilon$ ως προς $\text{Log}(DOF)$

Αποτελέσματα του  $e^\epsilon = \int_0^L (\epsilon - \epsilon^h)^2 dx$  για το μεικτό πρόβλημα και το κλασσικό ως προς τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας.

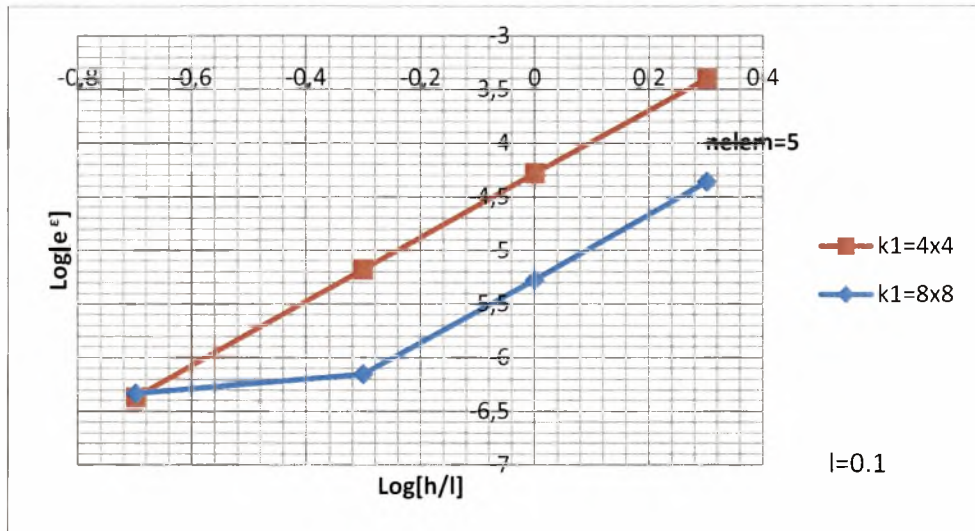


Γράφημα 30. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(e^\epsilon) - \text{Log}(DOF)$  για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα της παραμόρφωσης  $\epsilon$  για το μεικτό πρόβλημα είναι μεγαλύτερο σε σχέση με το κλασσικό πρόβλημα. Η σύγκριση πραγματοποιείται για τον ίδιο συνολικό βαθμό ελευθερίας.

**Γράφημα σφάλματος παραμόρφωσης ε ως προς Log(h/l)**

Αποτελέσματα του  $e^\epsilon = \int_0^L (\epsilon - \epsilon^h)^2 dx$  για το μεικτό πρόβλημα και το κλασσικό ως προς το  $\log(h/l)$



Γράφημα 31. Συγκριτικό γράφημα  $\text{Log}(e^\epsilon)$ - $\text{Log}(h/l)$  για μεικτό και κλασσικό πρόβλημα

Στην περίπτωση της παραμόρφωσης  $\epsilon$  παρατηρούμε ότι και στο δικομβικό υπάρχει σταθερή κλίση μείωσης του σφάλματος ενώ το τρικομβικό παρουσιάζει την σταθερότητα της μείωσης μέχρι το  $nelem=20$ . Το σφάλμα του τρικομβικού σε αυτή την περίπτωση είναι μικρότερο περίπου 9 φορές σε αντίθεση με το δικομβικό. Τελικά για  $nelem=50$  το σφάλμα και στις δυο περιπτώσεις είναι περίπου ίσο με  $error= 4.2 \times 10^{-7}$ .

## Κεφάλαιο 7 Σφάλμα ανά στοιχείο

Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον τρόπο υπολογισμού σφάλματος για το κάθε στοιχείο του προβλήματος μας. Αφού υπολογιστεί το σφάλμα που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο τότε θα μπορούμε να αποφασίσουμε ποια στοιχεία απαιτούν την προσθήκη περισσότερων κόμβων ώστε να μειωθεί το σφάλμα.

### 7.1 Μαθηματικό μοντέλο υπολογισμού σφάλματος

Αρχίζοντας από την σχέση η οποία αποτελεί παραλλαγή της εσωτερικής ενέργειας

$$\delta W^{int} = \int_V (\bar{\sigma}_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{\kappa}_{ijk}) dV$$

διατυπώνουμε την εκτίμηση σφάλματος για κάθε στοιχείο, βασισμένη στην θεωρία που αναπτύχθηκε από τους Zienkiewicz and Zhu (1992). Η εκτίμηση του σφάλματος είναι βασισμένη σε ενεργειακό κανόνα, υποθέτωντας ότι  $\bar{\sigma}_{ij}$  και  $\tilde{\mu}_{ijk}$  προσεγγίζονται πολύ καλά στα σημεία ολοκλήρωσης του στοιχείου. Υποθέτωντας γραμμικές εξισώσεις του τύπου  $\tilde{\mu} = [D]\tilde{k}$  και  $\bar{\sigma} = [C]\epsilon$ , η εκτίμηση του σφάλματος για κάθε στοιχείο  $\Omega^e$  είναι:

$$e = \left[ \int_{\Omega^e} \{\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}^d\}^T [C]^{-1} \{\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}^d\} d\Omega + \{\tilde{\mu}^* - \tilde{\mu}^d\}^T [D]^{-1} \{\tilde{\mu}^* - \tilde{\mu}^d\} d\Omega \right]^{1/2} \quad (37)$$

Όπου  $\bar{\sigma}^d$  και  $\tilde{\mu}^d$  προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Επίσης οι σχέσεις για τα  $\bar{\sigma}^*$  και  $\tilde{\mu}^*$  δίνονται από τις σχέσεις (41), (42).

Για την περίπτωση μονοδιάστατου προβλήματος η εξίσωση (37) απλοποιείται σε :

$$e = \left( \int_0^h \left( \frac{(\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}^d)^2}{E} + \frac{(\mu^* - \mu^d)^2}{l^2 E} \right) dx \right)^{1/2} \quad (38)$$

$$\mu \bar{\sigma}^* = [N_\epsilon] \cdot \{\bar{\sigma}_N^*\}, \mu^* = [N_\epsilon] \cdot \{\mu_N^*\} \quad (39)$$

$$[N_\epsilon] = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Από τις σχέσεις (38), (39), (40) προκύπτει:

$$\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}_N^*(1)N_1(x) + \bar{\sigma}_N^*(2)N_2(x) + \bar{\sigma}_N^*(3)N_3(x) \quad (41)$$

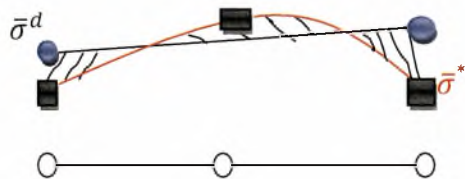
$$\tilde{\mu}^* = \mu_N^*(1)N_1(x) + \mu_N^*(2)N_2(x) + \mu_N^*(3)N_3(x) \quad (42)$$

Η πεπερασμένη λύση για το  $\sigma^d$  και για το  $\mu^d$  προκύπτουν από τις σχέσεις που ακολουθούν:

$$\bar{\sigma}^d = E u' + \sigma^{(2)} = E [N'_u] \{d\} + [N_\sigma] \{d\} = (E [N'_u] + [N_\sigma]) \{d\} \quad (42) \text{ και}$$

$$\bar{\mu}^d = l^2 E \varepsilon' = l^2 [N_\varepsilon] \{d_\varepsilon\} \quad (43) \quad \text{με } \{d_\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Ενώ ο όρος  $\bar{\sigma}^*_N$  αντιστοιχεί στα σημεία που προκύπτουν όταν διαιρέσουμε το δικομβικό στοιχείο  $\sigma^{(2)}$  σε τρικομβικό. Επομένως θα πρέπει να υπάρχει μια εξίσωση που να συνδέει τα στοιχεία αυτά μεταξύ τους.



Επομένως θα πρέπει:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \{N_\varepsilon\} (\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}^d) dx = 0$$

Αναλύοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\{\sigma^*_N\} = [A]^{-1} [B] \{d\} \quad \text{με } A = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \{N_\varepsilon\} [N_\varepsilon] dx \quad \text{και } B = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \{N_\varepsilon\} (E [N'_u] + [N_\sigma]) dx$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\left\{ \sigma^*_N \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} -E \frac{3u_1 - 4u_2 + u_3}{h} + \sigma_1^{(2)} \\ E \frac{u_3 - u_1}{h} + \frac{\sigma_1^{(2)} + \sigma_3^{(2)}}{2} \\ E \frac{u_1 - 4u_2 + 3u_3}{h} + \sigma_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Με ανάλογο τρόπο για το  $\mu^*$  επιλύοντας την  $\int_{\Omega_\varepsilon} \{N_\varepsilon\} (\bar{\mu}^* - \bar{\mu}^d) dx = 0$  από την παραπάνω σχέση προκύπτει  $\{\mu^*_N\} = [A]^{-1} [C] \{d_\varepsilon\}$  όπου  $C = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \{N_\varepsilon\} l^2 E [N_\varepsilon] dx$ .

Επομένως εξισώνοντας τις σχέσεις προκύπτει

$$\left\{ \mu^*_N \right\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} -l^2 E \frac{3\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{h} \\ l^2 E \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{h} \\ l^2 E \frac{\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3}{h} \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος αξιοποιούμε το πρόγραμμα που έχουμε δημιουργήσει στην FORTRAN και χρησιμοποιούμε την μέθοδο Gauss 3 point Integration για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων

Ο υπολογισμός πραγματοποιείται σε 2 βήματα, αρχικά θα υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της διαφοράς τάσεων και κατόπιν του όρου  $\mu$ .

$$e^{\sigma} = \int_0^L (\bar{\sigma}^* - \bar{\sigma}^d)^2 dx \text{ και } e^{\mu} = \int_0^L (\bar{\mu}^* - \bar{\mu}^d)^2 dx$$

Από την θεωρία του Gauss προκύπτει:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right) dt \text{ με } a=x_i \text{ και } b=x_{i+2}$$

Όπου  $f(x) = (\sigma^* - \sigma^d)^2$  και για την περίπτωση του  $\mu$ ,  $f(x) = (\bar{\mu}^* - \bar{\mu}^d)^2$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \left( c_1 f\left(\frac{b-a}{2}t_1 + \frac{b+a}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{b-a}{2}t_2 + \frac{b+a}{2}\right) + c_3 f\left(\frac{b-a}{2}t_3 + \frac{b+a}{2}\right) \right)$$

Οι τιμές  $c_1, c_2, c_3, t_1, t_2, t_3$  δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

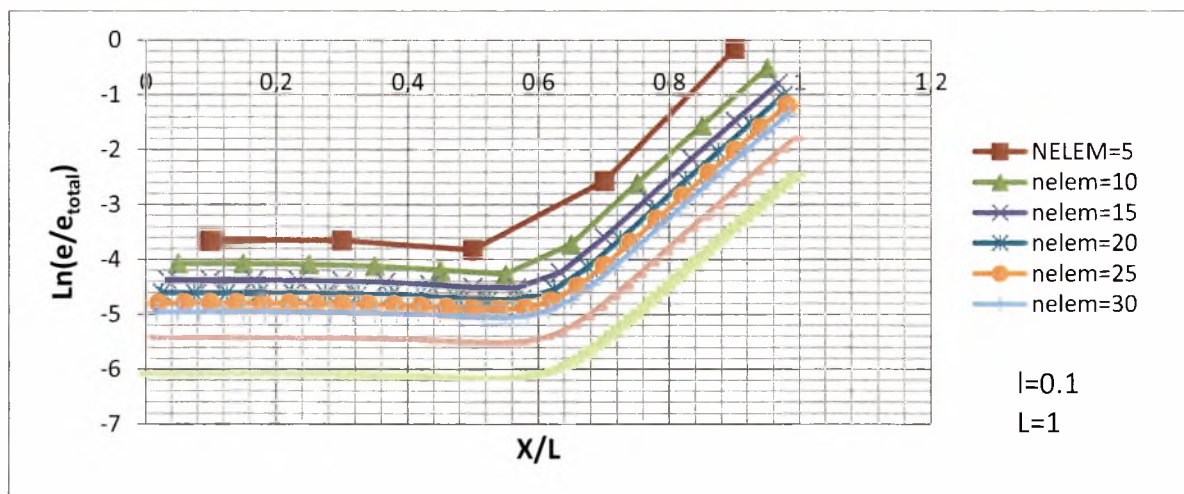
Η διαδικασία αυτή πραγματοποιείται για κάθε στοιχείο ξεχωριστά και στο τέλος τα αποτελέσματα των ολοκληρωμάτων αθροίζονται.

Points	Weighting Factors	Function Arguments
3	$c_1 = 0.555555556$ $c_2 = 0.888888889$ $c_3 = 0.555555556$	$t_1 = -0.774596669$ $t_2 = 0.000000000$ $t_3 = 0.774596669$

Πίνακας 10. Weighting factors and function arguments for Gauss 2 or 3 point Integration

Ανάλογα υπολογίζεται το σφάλμα και των υπόλοιπων στοιχείων.

### Γραφήματα:



Γράφημα 32.  $\ln(e/e_{total}) - X/L$  για διαφορετικό αριθμό στοιχείων και  $l=0.1$

### Από το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε τα εξής:

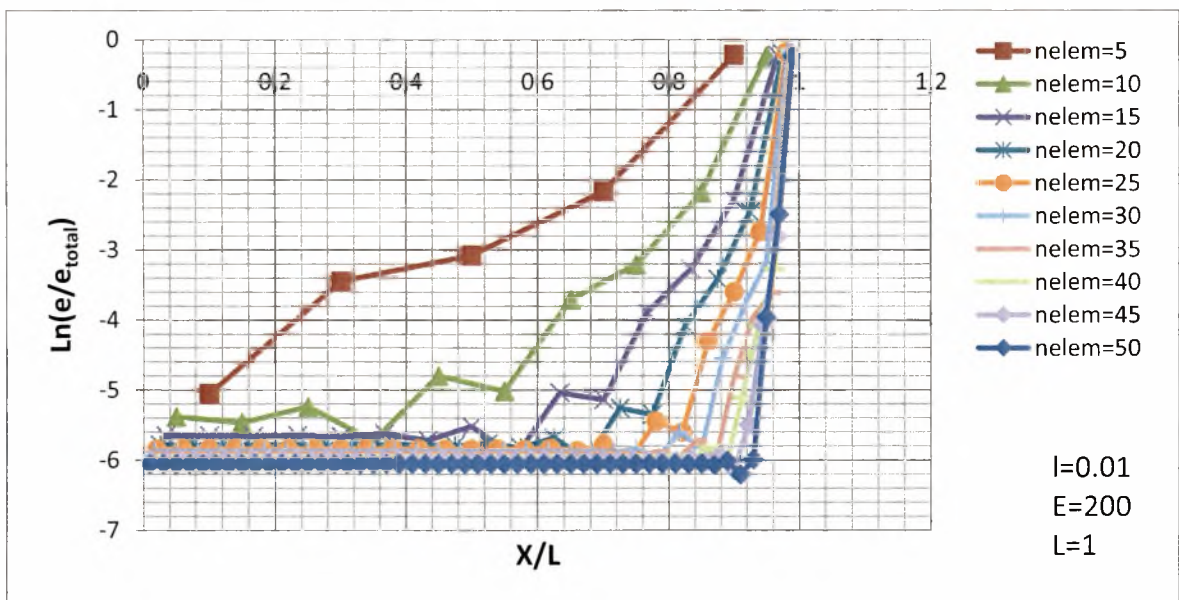
- Όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων παρατηρείται μείωση του σφάλματος ανά στοιχείο

- Το σφάλμα μας παραμένει σταθερό είτε μειώνεται μέχρι τον λόγο  $X/L=0.6$  ανεξαρτήτως του αριθμού στοιχείων που χρησιμοποιούμε.
- Για λόγο  $X/L \geq 0.6$  ή  $x \geq 0.6$  ( $L=1$ ) το σφάλμα μας αρχίζει και μεγαλώνει σταδιακά μέχρι να φτάσουμε και στο τελευταίο στοιχείο.

### Συμπεράσματα:

Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για μικρό αριθμό στοιχείων τα οποία καλύπτουν μέχρι και την μισή απόσταση του ίδιου του στοιχείου δεν απαιτείται αλλαγή του πλέγματος καθώς το αντίστοιχο σφάλμα δεν παρατηρείται να αυξάνεται. Αντίθετα όταν πλέον η ανάλυση προσεγγίζει την άκρη του στοιχείου παρατηρείται μια σταδιακή αύξηση του σφάλματος. Επομένως απαιτείται αλλαγή του πλέγματος στο μήκος όπου παρατηρείται η αύξηση προκειμένου αυτή να αντιμετωπιστεί έτσι ώστε να παίρνουμε καλύτερα αποτελέσματα.

Το γράφημα που ακολουθεί έχει σχεδιασθεί για  $l=0.01$



Γράφημα 33.  $\ln(e/e_{total})$ -  $X/L$  για διαφορετικό αριθμό στοιχείων και  $l=0.01$

### Από το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε τα εξής:

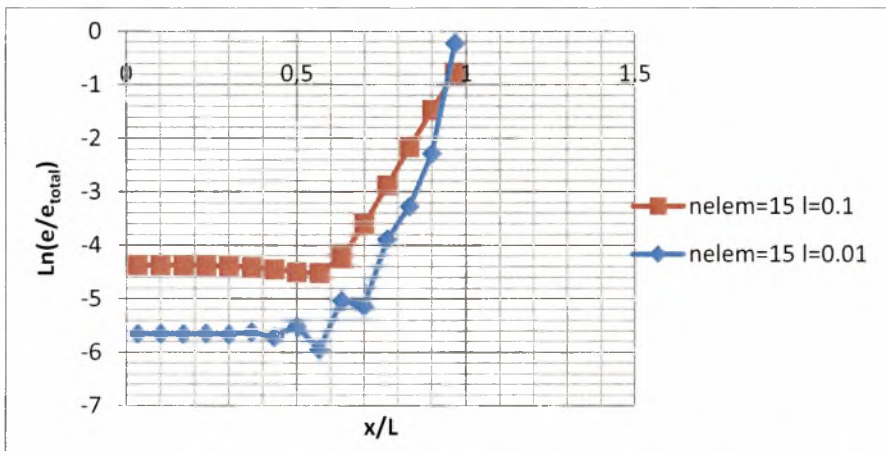
- Υπάρχει μεγάλη διακύμανση στο σφάλμα από στοιχείο σε στοιχείο.
- Παρατηρείται μια ομαλότητα στην διακύμανση του σφάλματος καθώς αυξάνουμε τον αριθμό των στοιχείων.
- Πολύ μεγάλη αύξηση του σφάλματος στα 5 τελευταία στοιχεία ανεξαρτήτως του συνολικού αριθμού στοιχείων που έχουν επιλεγεί.

### Συμπεράσματα:

Ακολουθώντας την ανάλυση του προβλήματος για  $l=0.01$ , συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα μας για μεγάλο αριθμό στοιχείων ( $nelem=50$ ) παραμένει μικρό. Παράλληλα, διαπιστώνουμε ότι στα τελευταία 5-6 στοιχεία του προβλήματος θα πρέπει να γίνει αλλαγή στο πλέγμα που χρησιμοποιείται προκειμένου να μειωθεί το τοπικό σφάλμα σε εκείνη την περιοχή.

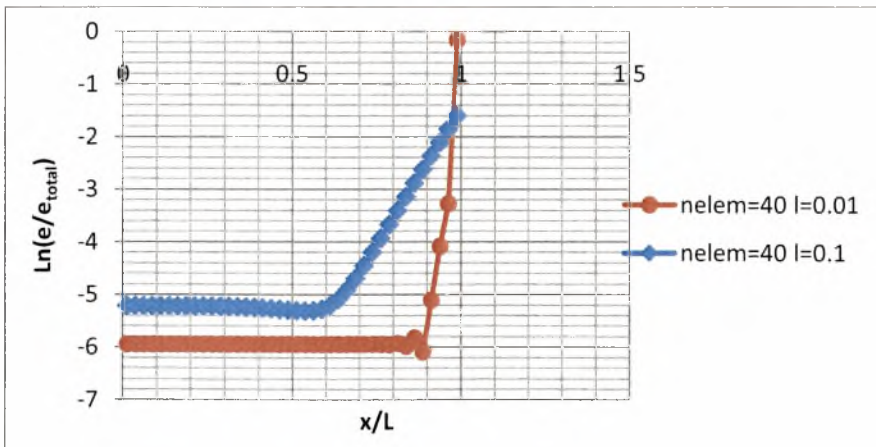
### 7.2 Συγκριτικά γραφήματα για $l = 0.1$ και $l = 0.01$

Το παρακάτω γράφημα παρουσιάζει τον λογάριθμο της τιμής του σφάλματος που προκύπτει από την εφαρμογή του μαθηματικού μοντέλου σε σχέση με τον λόγο  $x/L$ . Πιο συγκεκριμένα το γράφημα αντιστοιχεί στην ανάλυση για συνολικό αριθμό εξεταζόμενων στοιχείων  $nelem=15$ .



Γράφημα 34. Συγκριτικό γράφημα  $\ln(e/e_{total}) - X/L$  για  $l=0.01$  και  $0.1$  με  $nelem=15$

Παρατηρείται ότι το τοπικό σφάλμα για  $l=0.01$  παραμένει πάντα μικρότερο εκτός από το τελευταίο στοιχείο. Παράλληλα παρατηρείται ότι στην περίπτωση του  $l=0.1$  η μεταβολή του σφάλματος γίνεται με ομαλό ρυθμό από στοιχείο σε στοιχείο, ενώ για  $l=0.01$  παρατηρούνται απότομες αλλαγές.



Γράφημα 35. Συγκριτικό γράφημα  $\ln(e/e_{total}) - X/L$  για  $l=0.01$  και  $0.1$  με  $nelem=40$



Στο παραπάνω διάγραμμα χρησιμοποιούμε περισσότερα στοιχεία για την ανάλυση του προβλήματος μας. Από την αύξηση του αριθμού των στοιχείων παρατηρούμε ότι για  $l=0.01$  δεν έχουμε τις απότομες μεταβολές του σφάλματος, αντιθέτως μια σταθερή τιμή για το μεγαλύτερο αριθμό των στοιχείων. Επιπρόσθετα η τοπικό σφάλμα για  $l=0.01$  παραμένει μικρότερο από την περίπτωση όπου  $l=0.1$ . Σημαντική παρατήρηση αποτελεί η απότομη μεταβολή του σφάλματος η οποία παρουσιάζεται στα τελευταία στοιχεία, η οποία έχει άμεση σχέση με την μεταβολή που παρουσιάστηκε στην διατύπωση της κλασικής θεωρίας όπου παρατηρήσαμε αντίστοιχη μεταβολή του σφάλματος για διαφορετικό αριθμό στοιχείων.

## Κεφάλαιο 8 Συμπεράσματα και αποτελέσματα

Η ανάλυση του προβλήματος ελαστικότητας τύπου κλίσεως μας οδήγησε στην εξαγωγή ορισμένων σημαντικών συμπερασμάτων. Τα αποτελέσματα που πήραμε για την τιμή του δείκτη κατάστασης δηλώνουν ότι, ο δείκτης κατάστασης αυξάνεται όταν το μήκος μικροδομής  $l$  αυξάνεται και πλησιάζει την μονάδα. Από την ανάλυση σφάλματος παρατηρείται ότι το σφάλμα μετατόπισης  $u$ , είναι μικρότερο όταν το πρόβλημα εξετάζεται με την χρήση δικομβικού στοιχείου. Αντίστοιχα και στην περίπτωση της παραμόρφωσης τα αποτελέσματα με χρήση του δικομβικού στοιχείου παρουσιάζουν μικρότερο σφάλμα. Επιπρόσθετα, από την ανάλυση του τοπικού σφάλματος στοιχείου συμπεραίνουμε ότι η αύξηση του αριθμού των στοιχείων που χρησιμοποιείται για την εξέταση του προβλήματος οδηγεί στην μείωση του τοπικού σφάλματος. Ωστόσο η μείωση του σφάλματος με την αύξηση του συνολικού αριθμού στοιχείων έχει επίπτωση τις μεγάλες μεταβολές του σφάλματος στα τελευταία εξεταζόμενα στοιχεία του προβλήματος. Η συμπεριφορά αυτή παρατηρείται και στην γραφική παράσταση της αναλυτικής με την αριθμητική λύση της παραμόρφωσης και της τάσης. Η αντιμετώπιση της συμπεριφοράς αυτής απαιτεί την αλλαγή του πλέγματος στα στοιχεία όπου αρχίζει η μεταβολή έτσι ώστε να βελτιωθούν τα αποτελέσματα μας.

## Βιβλιογραφία

1. **N.Aravas,A.Giannakopoulos,E.Amanatidou**,*Finite element models of strain-gradient elasticity:Accuracy and error estimates*.
2. **Autar Kaw,Charlie Barker**, Gauss quadrature rule of integration (<http://numericalmethods.eng.usf.edu>).
3. **Μ.Παπαδρακάκης** ,*Ανάλυση φορέων με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων*,Εκδόσεις Παπασωτηρίου ,2001.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ



004000104667

