

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΣΕ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΖΑΧΟΥ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2023

© 2023 Ευαγγελία Ζάχου

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής Δρ. Λάμπρος Κούτας
(Κύριος Επιβλέπων) Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής Δρ. Παναγιώτης Γουργιώτης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής Δρ. Χρήστος Παπακωνσταντίνου
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, κ. Παναγιώτη Γουργιώτη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Πρέπει να διευκρινιστεί σε αυτό το σημείο ότι η επίβλεψη σε όλη την διάρκεια την εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας έγινε από τον κ. Π. Γουργιώτη ο οποίος ήταν αναπληρωτής Καθηγητής στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Λόγω της πρόσφατης αποχώρησης του από το Π.Θ. ορίστηκε για τυπικούς λόγους ως κύριος επιβλέπων ο κ. Λ. Κούτας, Επίκουρος Καθηγητής στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Επίσης, είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της διπλωματικής εργασίας μου, Καθηγητές κ. Λάμπρο Κούτα και κ. Χρήστο Παπακωνσταντίνου για την προσεκτική ανάγνωση της εργασίας μου και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους.

Ευχαριστώ τους φίλους, τις φίλες μου και τους συγγενείς μου για την ηθική υποστήριξή τους και την κατανόησή τους ιδιαίτερα κατά τη διάρκεια των τελευταίων μηνών της προσπάθειάς μου. Πάνω απ' όλα, είμαι ευγνώμων στους γονείς μου, και στον αδερφό μου για την ολόψυχη αγάπη και υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών.

Ευαγγελία Ζάχου

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΩΝ ΡΩΓΜΩΝ ΣΕ ΙΣΟΤΡΟΠΑ ΥΛΙΚΑ

Ευαγγελία Ζάχου

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2023

Επιβλέπων Καθηγητής: Λάμπρος Κούτας, Επίκουρος Καθηγητής

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετάει προβλήματα με ρωγμές σε ισότροπα υλικά αναλύοντάς τα με την συνοριακή μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Μελετήθηκαν δύο σενάρια από τα οποία το ένα ήταν η ρωγμή να βρίσκεται σε ένα επίπεδο με άπειρο μήκος πλευρών ώστε να μένουν ανεπηρέαστοι οι υπολογισμοί από κάποιο σύνορο και το δεύτερο σενάριο αφορούσε την ύπαρξη της ρωγμής κάθετη στην ελεύθερη πλευρά ενός επιπέδου ενώ υπόκειται σε εφελκυστικές τάσεις. Χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των διανεμημένων εξαρμώσεων και διασπώντας το πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα τα οποία επιλύθηκαν με το πρόγραμμα Mathematica υπολογίστηκαν μεγέθη όπως η συνάρτηση τάσης, η πυκνότητα της εξάρμωσης, οι τάσεις ορθές και διατμητικές, το άνοιγμα της ρωγμής και ο συντελεστής έντασης τάσης. Στόχος της εργασίας είναι η κατανόηση της συμπεριφοράς μιας ρωγμής και του πεδίου των τάσεων καθώς αυτή βρίσκεται κοντά σε ένα σύνορο.

Λέξεις Κλειδιά: Θεωρία θραύσης, ρωγμή, ισότροπο υλικό, τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων, Διάνυσμα *Burger's*, Συντελεστής έντασης τάσης.

SURFACE CRACK PROBLEMS IN ISOTROPIC MATERIALS

Evangelia Zachou

University of Thessaly, Department of Civil Engineering, 2023

Supervisor: Lampros Koutas, Assistant Professor

Abstract

This thesis studies problems with cracks in isotropic materials by analyzing them with the boundary method of integral equations. Two scenarios were studied, one of which was that the crack was located in a plane with infinite side length so that the calculations were unaffected by a boundary and the second scenario involved the existence of the crack perpendicular to the free side of a plane while subjected to tensile stresses. The method of distributed dependencies was used and by splitting the problem into two subproblems which were solved with Mathematica program, quantities such as stress function, density of the dependency, normal and shear stresses, crack opening and stress intensity factor were calculated. The aim of the work is to understand the behavior of a crack and the stress field as it is near a boundary.

Keywords: Fracture theory, isotropic material, technique of distributed dislocation, vector burger's, Stress intensity factor

Πίνακας περιεχομένων

Κεφάλαιο 1	Εισαγωγή	11
1.1	Υπόβαθρο	11
1.2	Σκοπός της διπλωματικής εργασίας	13
1.3	Οργάνωση διπλωματικής εργασίας	13
Κεφάλαιο 2	Θεωρία των θραύσεων	15
2.1	Θραύση	15
2.2	Τύποι θραύσης	16
2.3	Ιστορική εξέλιξη	16
2.4	Σημασία της γνώσης της θεωρίας των θραύσεων	17
2.5	Ισότροπο υλικό	20
2.6	Ρωγμή και τύποι ανάπτυξης ρωγμών	20
2.6.1	Τύπος I (Tensile Mode)	20
2.6.2	Τύπος II (Sliding Mode)	21
2.6.3	Τύπος III (Tearing Mode)	21
2.7	Τρόποι προσέγγισης την θεωρίας θραύσης	21
2.7.1	Το κριτήριο της ενέργειας	22
2.7.2	Συντελεστής έντασης τάσης K_{Ic}	22
Κεφάλαιο 3	Θεωρία των εξαρμώσεων	24
3.1	Έννοιες	24
3.1.1	Κρυσταλλική δομή – Κρυσταλλικές ατέλειες	24
3.1.2	Εξάρμωση	25
3.1.3	Διάνυσμα Burgers	25
3.2	Εισαγωγή στην τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων	27
Κεφάλαιο 4	Τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων	31
4.1	Ρωγμή σε άπειρο χωρίο	31

4.1.1	Υπόβαθρο - Θεωρία	31
4.1.2	Ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση	33
4.1.3	Ακριβής αντιστροφή	33
4.2	Προγραμματισμός του προβλήματος	35
4.2.1	Αριθμητική λύση προβλήματος.	35
4.3	Ρωγμή σε ημιεπίπεδο για φόρτιση τύπου I	39
4.3.1	Υπόβαθρο – θεωρία	39
Κεφάλαιο 5	Πίνακες - Διαγράμματα – Συμπεράσματα	44
5.1	Ρωγμή σε άπειρο χωρίο	44
5.1.1	Γραφικές παραστάσεις	45
5.1.2	Διαγράμματα Τάσεων	48
5.1.3	Συντελεστής έντασης τάσης (Stress Intensity Factor)	51
5.2	Ρωγμή σε ημιεπίπεδο	51
5.2.1	Γραφικές παραστάσεις	51
5.2.2	Διαγράμματα Τάσεων	55
5.2.3	Συντελεστής έντασης τάσης	61
Κεφάλαιο 6	Συμπεράσματα και Προτάσεις για Περαιτέρω Έρευνα	63
	Βιβλιογραφία	65
	Παράρτημα Α	67
	Α. Κώδικας Mathematica	67
	Α.1 Ρωγμή σε άπειρο χωρίο	67
	Α.2 Ρωγμή σε ημιεπίπεδο	71

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1 Συμπεριφορά πυκνότητας στα άκρα της ρωγμής.	35
Πίνακας 4.2 Τύποι τετραγωνου Gauss-Chebyshev για πυρήνες Cauchy.	35
Πίνακας 4.3 Τύποι του Krenk για τα σημεία στα άκρα της ρωγμής.	38
Πίνακας 4.4 Τύποι του Krenk για σημεία κατά μήκος της γραμμής.	38

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 5.1.1	Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) - s_i$.	45
Σχήμα 5.1.2	Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) \cdot w_i - s_i$.	46
Σχήμα 5.1.3	Γραφική παράσταση $u_y(i) - s_i$.	47
Σχήμα 5.1.4	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xx} .	48
Σχήμα 5.1.5	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{yy} .	49
Σχήμα 5.1.6	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xy} .	50
Σχήμα 5.2.1	Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) - s_i$.	51
Σχήμα 5.2.2	Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) \cdot w_i - s_i$.	52
Σχήμα 5.2.3	Γραφική παράσταση $u_y(i) - s_i$.	53
Σχήμα 5.2.4.α	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xx} για $c=10$.	54
Σχήμα 5.2.4.β	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xx} για $c=1.1$.	55
Σχήμα 5.2.5.α	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{yy} για $c=10$.	56
Σχήμα 5.2.5.β	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{yy} για $c=1.1$.	57
Σχήμα 5.2.6.α	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xy} για $c=10$.	58
Σχήμα 5.2.6.β	Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xy} για $c=1.1$.	59
Σχήμα 5.2.7.α	Γραφική παράσταση του συντελεστή έντασης τάσης για το άκρο $t=+1$ για διάφορες τιμές του c .	60
Σχήμα 5.2.7.β	Γραφική παράσταση του συντελεστή έντασης τάσης για το άκρο $t=-1$ για διάφορες τιμές του c .	61

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

1.1 Υπόβαθρο

Η θραύση και γενικότερα η αστοχία αποτελεί ένα πρόβλημα που αντιμετωπίζεται από παλαιότερα σε όλους τους τομείς από τους μηχανικούς στην κατασκευή κτιρίων, γεφυρών, λιμανιών, στην αεροδυναμική, την κατασκευή πλοίων καθώς και πολλών άλλων τομέων [1]. Ο όρος αστοχία περιγράφει την κατάσταση κατά την οποία η κατασκευή ή τα υλικά που την αποτελούν, δεν είναι σε θέση πλέον να “λειτουργούν”, δηλαδή, να φέρουν φορτία, εξαιτίας της απώλειας αντοχής, της λειτουργικότητας και της αρτιότητας που είχαν αρχικά. Όταν μελετάται η αστοχία, μελετάται η φυσική και μηχανική συμπεριφορά των υλικών, η παραμόρφωσή τους μέχρι την αστοχία υπό διάφορες φορτίσεις και τάσεις.

Οι αιτίες που οδηγούν στην δομική αστοχία σχετίζονται με τα εξής [1]:

- Την χρήση υλικών χαμηλής ποιότητας με ακατάλληλες προδιαγραφές για την κατασκευή και τις συνθήκες, καθώς και ο ελλιπής έλεγχος της ποιότητας των υλικών.
- Την εφαρμογή καινοτόμων και νέων στην αγορά υλικών, τα οποία δεν έχουν δοκιμαστεί και μελετηθεί εκτεταμένα πριν την χρήση τους με συνέπεια η εφαρμογή τους σε συνεργασία με άλλα υλικά να έχει διαφορετικά αποτελέσματα από τα αναμενόμενα.
- Τα λάθη κατά τον σχεδιασμό είτε από αμέλεια είτε λόγω έλλειψης εμπειρίας από τους μηχανικούς όπως είναι οι εσφαλμένοι υπολογισμοί, η χρήση λανθασμένου συνδυασμού φορτίων ή οι ανακριβείς λεπτομέρειες.
- Τα σφάλματα κατά την διάρκεια ανέγερσης της κατασκευής που μπορεί να σχετίζονται με τη αμέλεια του επιβλέποντα είτε λόγω έλλειψης εμπειρίας και εκπαίδευσης του, είτε λόγω άγνοιας.

- Οι περιβαλλοντικές καταστροφές, για παράδειγμα, σεισμοί, τυφώνες και πλημμύρες. Οι δυνάμεις, οι καταπονήσεις και οι παραμορφώσεις που ασκούν αυτά τα στοιχεία είναι τεράστιες που σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούν να αποβούν καταστροφικές για τις κατασκευές και επικίνδυνες για τον άνθρωπο.
- Με το πέρασμα των χρόνων και ταυτόχρονα η έκθεση στις φυσικές συνθήκες επέρχεται φθορά, γήρανση και κόπωση που οδηγεί σε μείωση της αντοχής των υλικών και εν τέλει στην αστοχία τους.

Οι παραπάνω αιτίες επιφέρουν ανεπιθύμητες επιπτώσεις που αφορούν πολλούς τομείς και είναι:

- Οι υλικές ζημιές στην ίδια την κατασκευή ή και σε άλλες γειτονικές κατασκευές.
- Η έκθεση πολλών ανθρώπων σε κίνδυνο και χειρότερα ο τραυματισμός τους ή η απώλεια ζωών.
- Η οικονομική επιβάρυνση για την αποκατάσταση των ζημιών που προκλήθηκαν.
- Η περιβαλλοντική επιβάρυνση.

Για να αποφευχθούν και να προληφθούν λοιπόν τα παραπάνω προβλήματα, είναι σημαντικό να συνυπολογίζονται με προσοχή οι παράγοντες που οδηγούν σε αστοχία, τόσο κατά την ανάλυση και τον σχεδιασμό όσο και κατά την διάρκεια της κατασκευής. Συνεπώς, είναι αξιόλογο να χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι σχεδιασμού με ακρίβεια και υλικά ποιοτικά και μελετημένα εκτενώς, να υπάρχει έλεγχος κατά την κατασκευή και τήρηση των κανόνων.

Στις μέρες μας, η μελέτη της θραύσης των κατασκευών έχει εξελιχθεί σε μεγάλο βαθμό καθώς υπάρχει ραγδαία τεχνολογική ανάπτυξη με αποτέλεσμα νέα υπολογιστικά εργαλεία, ενώ παράλληλα ανακαλύπτονται νέα υλικά, καθώς και μεθοδολογίες δοκιμών. Συνεπώς, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι μηχανικοί για την ανάλυση της αντοχής και της ευστάθειας των κατασκευών, για την προσομοίωση και τα πειράματα, έχουν εκσυγχρονιστεί κάνοντας τους υπολογισμούς πιο ακριβείς και γρήγορους καθώς χρησιμοποιούνται νεότεροι κανονισμοί και ηλεκτρονικοί υπολογιστές με ολοένα και πιο αναβαθμισμένα προγράμματα.

1.2 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Στόχος των μηχανικών είναι να δημιουργήσουν ασφαλέστερες κατασκευές με ταυτόχρονη, όσο το δυνατόν, μικρότερη οικονομική και περιβαλλοντική επιβάρυνση. Η μελέτη της συμπεριφοράς των υλικών υπό διάφορες φορτίσεις, συντοριακές συνθήκες και συνθήκες λειτουργίας είναι ιδιαίτερα βοηθητική για να προβλεφθούν οι παραπάνω επιπτώσεις και να προκύψουν ασφαλέστερες και αξιόπιστες κατασκευές που θα ανταποκρίνονται στις διάφορες φορτίσεις και λειτουργίες.

Είναι γνωστό ότι κατά την φόρτιση, γύρω από την ρωγή αναπτύσσονται τάσεις οι οποίες στις κορυφές της ρωγμής, δηλαδή στις άκρες της, τείνει να γίνει άπειρη. Αυτό είναι φυσικά αδύνατο, συνεπώς δεν είναι δυνατόν να περιγραφεί η κατάσταση γύρω από μια ρωγή με τρόπο αναλυτικό και πρέπει να χρησιμοποιηθεί κάποιος αριθμητικός τρόπος επίλυσης [2].

Για το λόγο αυτό, στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να μελετηθεί η συμπεριφορά των ρωγμών σε όλο το μήκος της καθώς και στα άκρα της όσο αυτές αναπτύσσονται σε ένα ισότροπο υλικό μέσα σε ένα άπειρο χωρίο καθώς και κάθετα κοντά σε μια ελεύθερη επιφάνεια. Για την επίλυση αυτών των προβλημάτων έγινε χρήση του προγράμματος Mathematica με την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων και συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν στις δύο περιπτώσεις.

1.3 Οργάνωση διπλωματικής εργασίας

Η εργασία χωρίζεται σε πέντε ενότητες που καταλαμβάνουν τα Κεφάλαιο 2 έως 6. Πιο Συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 2 της παρουσιάζεται η θεωρία των θραύσεων στην μηχανική και πως εξελίσσεται στα ισότροπα υλικά. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μια σύντομη ιστορική εξέλιξη, η σημασία της γνώσης και μελέτης της θεωρίας των θραύσεων από τους μηχανικούς. Επίσης, αναλύονται έννοιες που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια όπως, οι τύποι ανάπτυξης των ρωγμών, ο συντελεστής έντασης τάσης, το ισότροπο υλικό και οι τρόποι προσέγγισης της θεωρίας.

Στο Κεφάλαιο 1 περιγράφεται την θεωρία των εξαρμώσεων, δηλαδή η δημιουργία τους. Αναλύονται, η έννοια των εξαρμώσεων, της κρυσταλλικής δομής και των κρυσταλλικών

ατελειών καθώς και του διανύσματος Burger's. Ακόμη, παρουσιάζεται ο τρόπος διάσπασης του προβλήματος σε δύο υποπροβλήματα για την επίλυσή τους.

Στο **Σφάλμα! Το αρχείο προέλευσης της αναφοράς δεν βρέθηκε.** περιγράφεται η μέθοδος των διανεμημένων εξαρμώσεων. Αναλύεται το θεωρητικό υπόβαθρο που χρειάζεται για να επιλυθεί μετέπειτα το πρόβλημα. Παραθέτονται οι εξισώσεις που χρειάζονται για την επίλυση της ρωγμής σε άπειρο χωρίο και σε ημιεπίπεδο και τα βήματα που ακολουθήθηκαν για τον προγραμματισμό του προβλήματος.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της επίλυσης, τα διαγράμματα και τα συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αφορούν την σύγκριση των αποτελεσμάτων των τάσεων (ορθές και διατμητικές), τον τρόπο ανοίγματος της ρωγμής στις δύο περιπτώσεις και την συμπεριφορά του συντελεστή έντασης τάσης K_I στα άκρα της ρωγμής.

Στο Κεφάλαιο 6 συνοψίζονται τα συμπεράσματα της μελέτης και προτείνονται κάποια θέματα για περεταίρω μελέτη.

Τέλος, ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε και για τα δύο προβλήματα παραθέτεται στο παράρτημα.

Κεφάλαιο 2 Θεωρία των θραύσεων

2.1 Θραύση

Ο όρος θραύση αναφέρεται στην αστοχία ή πιο συγκεκριμένα στον διαχωρισμό που συμβαίνει σε ένα υλικό σε δύο ή περισσότερα τμήματα, όταν με την επιβαλλόμενη φόρτιση φτάσει τη μέγιστη αντοχή του [2], [3]. Αποτελεί μια μέθοδο που δείχνει πότε η κατασκευή χάνει την αντοχή της και την σταθερότητά της υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης και καταπόνησης. Γενικά, οι κατασκευές σχεδιάζονται ώστε να έχουν αποθέματα αντοχής και να γίνεται ανακατανομή της έντασης σε περίπτωση αστοχίας κάποιου τμήματος της κατασκευής [5].

Η θραύση των υλικών που υποβάλλονται σε καταπονήσεις συνήθως ακολουθεί δύο στάδια τα οποία είναι:

1. Αρχικά, η δημιουργία μιας ρωγμής
2. Και στη συνέχεια η διάδοση των ρωγμών, που οδηγεί τελικά στην θραύση.

Στην πραγματικότητα, όπως υποστήριξε και ο Griffith, η αντοχή που έχει ένα υλικό είναι αρκετά μικρότερη από την θεωρητική που υπολογίζεται, γεγονός που συμβαίνει λόγω της υπόθεσης ενός τέλει υλικού για τους θεωρητικούς υπολογισμούς [4]. Συνεπώς, οι ατέλειες που υπάρχουν στα υλικά από την κατασκευή τους, ή οι μικρορωγμές παίζουν σημαντικό ρόλο στα όρια αστοχίας τους, καθώς επηρεάζουν την δημιουργία την διάδοση των ρωγμών κατά την φόρτιση με αποτέλεσμα το μειωμένο όριο θραύσης [4].

2.2 Τύποι θραύσης

Υπάρχουν δύο τρόποι θραύσης που εξαρτώνται από την πλαστικότητα των υλικών, δηλαδή τον τρόπο που παραμορφώνονται και είναι οι εξής [5]:

- Η ψαθυρή θραύση, κατά την οποία το υλικό μετά την ελαστική περιοχή έχει ελάχιστη ή και καθόλου ανάπτυξη πλαστικής παραμόρφωσης καθώς και μικρή απορρόφηση ενέργειας. Σε αυτού του είδους την θραύση η ρωγμή διαδίδεται ραγδαία με διεύθυνση σχεδόν κάθετα στην επιβαλλόμενη εφελκυστική δύναμη ενώ δεν υπάρχει παραμόρφωση πριν την αστοχία. Τέτοια υλικά είναι το γυαλί, τα κεραμικά, το άοπλο σκυρόδεμα, τα πολυμερή, ο μόλυβδος και άλλα [3].
- Η όλκιμη θραύση, κατά την οποία μετά την ελαστική περιοχή υπάρχει σημαντική πλαστική παραμόρφωση και απορρόφηση ενέργειας, δηλαδή το στοιχείο μετά την δημιουργία των ρωγμών παραμορφώνεται σημαντικά πριν οδηγηθεί στην θραύση. Η όλη διαδικασία την διάδοσης των ρωγμών σε αυτή την περίπτωση είναι πιο αργή σε σχέση με τα ψαθυρά υλικά δηλαδή, δεν υπάρχει γρήγορη διάδοση της ρωγμής. Τέτοια υλικά είναι τα περισσότερα μέταλλα αλλά και κράματα [3].

2.3 Ιστορική εξέλιξη

Στο βιβλίο του Anderson [1], γίνεται μια αναδρομή στην ιστορική εξέλιξη της θεωρίας των θραύσεων, περιγράφοντας διάφορα παραδείγματα αστοχιών από το παρελθόν σε μηχανολογικές κατασκευές και συστήματα.

Από τα αρχαία χρόνια, στην Αίγυπτο, την Ρώμη καθώς και άλλες περιοχές σε όλο τον κόσμο υπάρχουν κατασκευές που έχουν αντέξει χιλιάδες χρόνια με κάποιες πιο πρόσφατες να χρησιμοποιούνται ακόμη που αποδεικνύει την ανθεκτικότητά τους στο χρόνο παρά τα μέσα, τα υλικά και τις τεχνολογίες που ήταν διαθέσιμες τότε. Οι κατασκευές εκείνες ήταν κατασκευασμένες κυρίως για να φέρουν φορτία θλίψης καθώς τα κύρια υλικά που χρησιμοποιούνταν ήταν τούβλα και κονίαμα.

Χαρακτηριστική περίοδος υπήρξε η βιομηχανική επανάσταση η οποία άλλαξε τον τρόπο σχεδιασμού, την μαζική παραγωγή μετάλλου, και εν τέλει τον τρόπο κατασκευής. Τα παραπάνω είχαν σαν αποτέλεσμα να προκύψουν νέα προβλήματα αστοχιών σε εφελκυσμό τα οποία ήταν λογικό να εμφανιστούν καθώς άρχισαν να κατασκευάζονται έργα που έφεραν εφελκυστικά φορτία.

Συνεχίζοντας, στον Β΄ Παγκόσμιο πόλεμο με μια ψαθυρή θραύση στα πλοία στα οποία είχε εφαρμοστεί η τότε καινοτόμος μέθοδος δημιουργίας με συγκόλληση έχοντας όμως ανεπιθύμητες συνέπειες που οδήγησαν σε θραύση με αποτέλεσμα την αλλαγή του τρόπου σχεδιασμού [1].

Στην συνέχεια, περιγράφει μία ψαθυρή αστοχία λόγω αμέλειας κατά τον σχεδιασμό σε πετρελαιοφόρο του Κουρδιστάν όπου οι θερμικές τάσεις που προκλήθηκαν από το κρύο νερό με το ζεστό πετρέλαιο οδήγησαν σε θραύση η οποία ξεκίνησε από μια ανεπάρκεια στις συγκολλήσεις κατά την κατασκευή του πλοίου, και πιο συγκεκριμένα από μια ακατάλληλα συγκολλημένη καρίνα υδροσυλλεκτών [1].

Έπειτα, συνεχίζει χρησιμοποιώντας το παράδειγμα της μεταφοράς φυσικού αερίου χρησιμοποιώντας σωληνώσεις πολυαιθυλενίου (PE) στις οποίες για την συντήρηση τους χρησιμοποιούνταν μια τεχνική σύσφιγξης με σφικτήρες (Pinch clamping) η οποία έδινε την δυνατότητα στους τεχνικούς να γίνεται συντήρηση στο σύστημα χωρίς να διακόπτεται όλη η ροή του αερίου παρά μόνο σε τοπικά σημεία γεγονός το οποίο δημιούργησε ελαττώματα στον σωλήνα, που οδήγησαν σε ρωγμές και με την πάροδο του χρόνου προκάλεσε διαρροές και βλάβες [1].

Τέλος, αναφέρει την έκρηξη του διαστημικού λεωφορείου Challenger το 1986 η οποία προήλθε από την αστοχία της στεγανοποίησης του δακτυλίου O, επηρεασμένη από το κρύο και φτάνοντας στα τελευταία χρόνια, η καταστροφή του διαστημικού λεωφορείου Columbia το 2003 που προήλθε από αφρώδη μόνωση που προκάλεσε ζημιά στο φτερό κατά την εκτόξευση, οδηγώντας σε αστοχία κατά την επανείσοδο του [1].

Παρατηρείται λοιπόν ότι με το πέρασμα των χρόνων και ύστερα από σημαντικές αστοχίες και θραύσεις που έχουν συμβεί σε διάφορους τομείς των κατασκευών είχε σαν αποτέλεσμα να μελετηθεί εκτενώς ο λόγος που συνέβησαν αυτές καθώς και η μηχανική των θραύσεων των κατασκευών οδηγώντας εν τέλει στην συνεχή βελτίωση των υλικών και της ασφάλειας των κατασκευών [1].

2.4 Σημασία της γνώσης της θεωρίας των θραύσεων

Η θεωρία των θραύσεων αποτελεί ένα κλάδο της μηχανικής που εστιάζει την προσοχή του στην συμπεριφορά των υλικών και κατασκευών όταν ασκούνται σε αυτά δυνάμεις που είναι δυνατόν να επιφέρουν ρωγμές ή και θραύση χρησιμοποιώντας μεθόδους ανάλυσης και

πειραματικών διατάξεων από την μηχανική των στερεών για την εύρεση αυτής της δύναμης και της αντίστασης του υλικού αντίστοιχα [2]. Η γνώση της βοήθησε και βοηθάει τους μηχανικούς να καθορίσουν κρίσιμες τιμές, παραμέτρους αστοχίας και γενικά να δημιουργήσουν διατάξεις και μεθόδους που θα στοχεύουν στην πρόληψη της αστοχίας.

Στην θεωρία αυτή, παρέχεται ένα σύνολο γνώσεων και μελετάται αναλυτικά και διεξοδικά η δημιουργία, η ανάπτυξη και η σταθεροποίηση των ρωγμών σε δομικά υλικά όπως είναι το σκυρόδεμα, ο χάλυβας, το γυαλί καθώς και σύνθετα υλικά, ενώ παράλληλα αναλύονται οι συνθήκες κατά τις οποίες μια ρωγμή θα αναπτυχθεί και θα επέλθει τελικά η θραύση του υλικού. Η θεωρία της θραύσης προσφέρει μεγαλύτερη ασφάλεια και ανθεκτικότητα στις κατασκευές, βελτιωμένο σχεδιασμό έναντι αστοχίας της κατασκευής και των υλικών που την αποτελούν πράγμα το οποίο είναι το ζητούμενο από τους μηχανικούς.

Αιτίες που οδηγούν σε θραύση μπορεί να είναι:

- Οι ατέλειες και τα ελαττώματα που περιέχονται στα υλικά από την φύση τους ή από την κατασκευή τους, τα οποία μπορεί να είναι ρωγμές, κενά και inclusions και σε αυτά τα σημεία υπάρχει συγκέντρωση τάσεων.
- Η άσκηση φορτίσεων και φορτίων μεγαλύτερα από τα επιτρεπόμενα, δηλαδή αυτά του σχεδιασμού της κατασκευής, η λανθασμένη κατανομή τους και η κόπωση που υπάρχει στις κατασκευές λόγω επαναλαμβανόμενων φορτίσεων μπορούν να οδηγήσουν στην ανάπτυξη ρωγμών στα υλικά και εν συνεχεία σε αστοχία.
- Με το πέρασμα του χρόνου, και την επίδραση των καιρικών φαινομένων όπως οι μεγάλες διακυμάνσεις των θερμοκρασιών, η υγρασία, η διάβρωση παράδειγμα κατασκευές που βρίσκονται κοντά σε παραθαλάσσιες περιοχές, η χημική έκθεση επιδρούν στην αντοχή των υλικών μειώνοντας την αντοχή τους και οφελούν την ανάπτυξη ρωγμών.
- Τα λάθη κατά τον σχεδιασμό, δηλαδή η έλλειψη γνώσεων, ή λανθασμένοι υπολογισμοί και συνδυασμός φορτίσεων και συνθηκών, καθώς και οι ελλείψεις κατά την ανέγερση της κατασκευής μπορούν να αποτελέσουν σημαντικό παράγοντα ώστε να αναπτυχθούν ρωγμές.

Με γνώμονα όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η γνώση της θεωρίας των θραύσεων παίζει καθοριστικό ρόλο στην αποφυγή των αστοχιών, στην βελτίωση των μέτρων προστασίας για την αποφυγή παρόμοιων καταστάσεων στο μέλλον. Με την γνώση της

μηχανικής των θραύσεων αντιμετωπίζονται ζητήματα όπως ελαττώματα σχεδιασμού, κατασκευής, ιδιότητες υλικών και πρακτικές διαχείρισης που μπορούν να συμβάλουν σε αστοχίες σε συστήματα μηχανικής.

Η κατανόηση της αστοχίας των κατασκευών και των υλικών καθώς και η μελέτη της μηχανικής θραύσης έχει μεγάλη σημασία για τους μηχανικούς για τους εξής λόγους:

1. Γνωρίζοντας την συμπεριφορά των υλικών στην αστοχία τους μπορούν να σχεδιαστούν και να κατασκευαστούν κτίρια και που προσφέρουν μεγαλύτερη ασφάλεια για την κατασκευή και τον άνθρωπο καθώς μελετώνται και βελτιώνονται οι αδυναμίες τους και μειώνεται η πιθανότητα για τραυματισμούς.
2. Η κατανόηση της μηχανικής αστοχίας μπορεί να προσφερθεί μεγαλύτερη ανθεκτικότητα στην κατασκευή, μειώνοντας τις υλικές ζημιές σε περίπτωση αστοχίας και τις περιβαλλοντικές επιπτώσεις, αυξάνοντας παράλληλα τον χρόνο ζωής της και προσφέροντας οικολογία.
3. Η αστοχία μιας κατασκευής μπορεί να φέρει σημαντικές οικονομικές απώλειες λόγω των ζημιών που θα προκληθούν, του κόστους επισκευής της καθώς και δυσφήμιση στον κατασκευαστή της. Η γνώση λοιπόν της μηχανικής αστοχίας μπορεί να μας προστατέψει από όλα τα παραπάνω.
4. Η συνεχή έρευνα σε όλο τον κόσμο για καινοτόμα υλικά, η εύρεση αυτών των υλικών που θα ανταποκρίνονται σε όλα τα παραπάνω είναι αποτέλεσμα της γνώσης της μηχανικής αστοχίας, της κατανόησης των υλικών στην αστοχία που παράλληλα με την ανάγκη για εξέλιξη των κατασκευών οδηγεί στην εύρεση αυτών των υλικών που μπορούν να βελτιώσουν την ασφάλεια, την αντοχή και την απόδοση των κατασκευών.

Συνοπτικά από όλα τα παραπάνω για κάθε νέα κατασκευή και μελέτη που γίνεται υπάρχει η δυνατότητα ενός σχεδιασμού ορθότερου με περισσότερη ασφάλεια καθώς υπάρχει η δυνατότητα για τον μηχανικό να προβλέψει τις αδυναμίες μιας κατασκευής και να τις μειώσει σε μεγάλο βαθμό.

2.5 Ισότροπο υλικό

Ισότροπο υλικό ονομάζεται το υλικό που έχει τις ίδιες ιδιότητες (φυσικές και χημικές) σε κάθε σημείο του υλικού, ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που φορτίζεται [6],[7]. Μερικά υλικά που έχουν αυτές τις ιδιότητες είναι το γυαλί, τα πλαστικά, τα μέταλλα.

2.6 Ρωγμή και τύποι ανάπτυξης ρωγμών

Ρωγμή είναι μια σχισμή υπό ακανόνιστη μορφή που εμφανίζεται σε ένα στερεό με την επιβολή ορισμένων δυνάμεων που υπερβαίνουν το όριο αντοχής του υλικού. Η έναρξη της θραύσης συμβαίνει όταν αναπτυχθεί ένας αριθμός ατελειών ή ασυνεχειών μετατόπισης μέσα στο υλικό [8]. Οι ρωγμές αυτές μπορεί να υπάρχουν από τον κατασκευαστή του υλικού ή κατά την διάρκεια της βιομηχανικής επεξεργασίας τους, είτε λόγω επίδρασης του περιβάλλοντος, ή και από την καταπόνηση της κατασκευής από διάφορα φορτία [1]. Η ύπαρξη των ρωγμών στα στερεά οδηγεί σε συγκέντρωση τάσεων σε εκείνα τα σημεία και με ιδιαίτερα μεγάλες τιμές που τείνουν στο άπειρο στις κορυφές της ρωγμής με αποτέλεσμα η αντοχή των κατασκευών να διαφέρει από την θεωρητική που υπολογίστηκε με την θεώρηση τέλειου σώματος [1] [5]. Η θεωρητική αντοχή του είναι ουσιαστικά αυτή που χρειάζεται για να “σπάσουν” οι δεσμοί των ατόμων. Συνεπώς, η ύπαρξη της ρωγμής σε υλικά αποτελεί σημαντικό κριτήριο για την συμπεριφορά των στερεών σε διάφορες καταπονήσεις.

Οι ρωγμές μπορούν να αναπτυχθούν με τρεις διαφορετικούς τρόπους ανάλογα με τον τρόπο που ασκείται η φόρτιση. Ο καθένας έχει διαφορετική επίδραση στην ρωγμή, όμως τα εμπειρικά στοιχεία δείχνουν ότι συνήθως αντιμετωπίζουν φόρτιση τύπου I καθώς το στοιχείο όποια και να είναι η αρχική καταπόνηση περιστρέφεται και οδηγείται σε φόρτιση τύπου I [5].

2.6.1 Τύπος I (Tensile Mode)

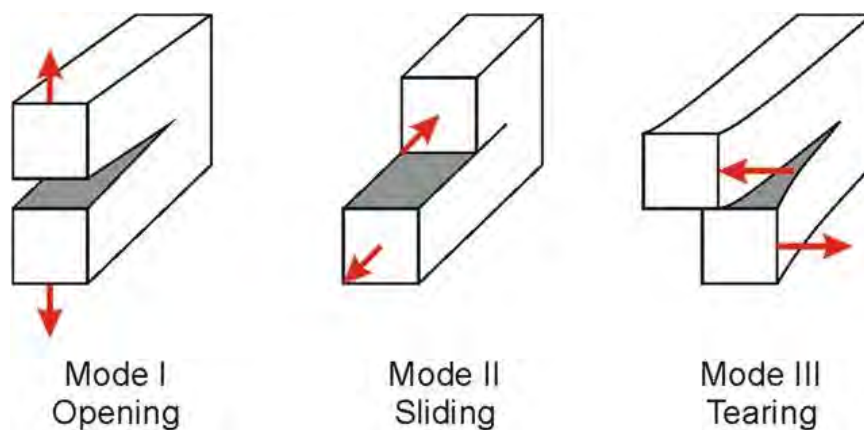
Ο τύπος φόρτισης I φαίνεται στην Εικόνα 2.1 (α) και λέγεται διαφορετικά εφελκυστικός ή τύπος ανοίγματος καθώς ασκείται εφελκυστική τάση κάθετη στη ρωγμή ανοίγοντας την εγκοπή και εμφανίζεται συχνότερα προκαλώντας τις περισσότερες βλάβες [2], [9].

2.6.2 Τύπος II (Sliding Mode)

Ο τύπος II που ονομάζεται και διατμητικός τύπος ή τύπος ολίσθησης αντιστοιχεί σε διάτμηση παράλληλα του επιπέδου που ασκείται η φόρτιση και κάθετα της επιφάνειας της ρωγμής λόγω διατμητικών τάσεων εντός του επιπέδου όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1 (β), [2], [9].

2.6.3 Τύπος III (Tearing Mode)

Ο τύπος λειτουργίας III είναι ο τρόπος λειτουργίας αποσχισμού καθώς δίνει την εικόνα όπως για παράδειγμα σχίζεται ένα χαρτί. Οφείλεται σε διατμητικές τάσεις παράλληλα του επιπέδου και της επιφάνειας της ρωγμής ενώ φαίνεται στην Εικόνα 2.1 (γ), [2] , [9].



Εικόνα 2.1 Τύποι ανάπτυξης ρωγμής [10].

2.7 Τρόποι προσέγγισης την θεωρία θραύσης

Υπάρχουν δύο τρόποι να προσεγγίσει κανείς την θεωρία της θραύσης οι οποίοι είναι οι εξής [1], [5]:

- Το κριτήριο της ενέργειας
- Ο συντελεστής έντασης τάσης

2.7.1 Το κριτήριο της ενέργειας

Η θεωρία αυτή αναφέρει ότι στο σώμα αποθηκεύεται ενέργεια η οποία όταν υπερβεί την ενέργεια που αντιστοιχεί στην αντοχή του υλικού οι ρωγμές διαδίδονται και μπορεί να επέλθει θραύση [1]. Ο ρυθμός απελευθέρωσης της ενέργειας που αντιστοιχεί στο σημείο της θραύσης αποτελεί ένα κριτήριο που μετριέται η αντοχή σε θραύση και ορίζεται από τον τύπο [1]:

$$G = \frac{\alpha \pi \sigma^2}{E} \quad (2.1)$$

Ο τύπος αφορά ρωγμή μήκους $2a$, σε ένα άπειρο υλικό με μέτρο ελαστικότητας E , που ασκείται μια απομακρυσμένη εφελκυστική τάση σ και μετριέται σε ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας. Φυσικά, το μέγεθος αυτό εκφράζει την συνολική δυναμική ενέργεια του σώματος που μειώνεται καθώς η επιφάνεια θραύσης αυξάνεται αφού διαδίδονται περισσότερες ρωγμές [11].

Για ένα συγκεκριμένο υλικό με μια συγκεκριμένη γεωμετρία υπάρχει μια κρίσιμη τιμή του ρυθμού απελευθέρωσης ενέργειας η οποία αντιστοιχεί σε μια κρίσιμη τιμή τάσης που οδηγεί σε αστοχία οπότε, ο κρίσιμος ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας G_c δείχνει την αντίσταση του υλικού στην θραύση [1].

2.7.2 Συντελεστής έντασης τάσης K_{Ic}

Στο βιβλίο του Hills et al. [5], περιγράφεται ότι στο άκρο της ρωγμής υπάρχει μια περιοχή όπου οι συνθήκες είναι μη γραμμικές ελαστικές και το πεδίο τάσης που είναι ιδιόμορφο σε αυτά τα σημεία έχει σημαντικό αντίκτυπο στη διάδοση της ρωγμής που μπορεί να ποικίλλει σημαντικά με βάση τη μικρομηχανική απόκριση του υλικού [5]. Ο συντελεστής έντασης τάσης αποτελεί ένα καθοριστικό κριτήριο αστοχίας ενός γραμμικού ελαστικού υλικού σε θραύση καθώς προσδιορίζει τα πεδία των τάσεων, της παραμόρφωσης και της μετατόπισης στα σημεία αυτά καθώς και σε μια περιοχή γύρω από την ρωγμή όταν ασκείται κάποια απομακρυσμένη φόρτιση [5], [22]. Εφόσον, αυτή η περιοχή, που αποτελεί την “ζώνη διεργασίας”, είναι μικρότερη από την περιοχή όπου χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα έντασης τάσης K_{Ic} , μπορεί να ειπωθεί ότι ο ρυθμός με τον οποίο αναπτύσσεται η ρωγμή μπορεί να συνδεθεί αποκλειστικά με τον παράγοντα έντασης τάσης K_{Ic} [5].

Στην πραγματικότητα σε συνθήκες κυκλικής φόρτισης ο παράγοντας έντασης τάσης είναι το καθοριστικό μέγεθος που ελέγχει τον ρυθμό με τον οποίο αναπτύσσονται οι ρωγμές

[5]. Ο συντελεστής έντασης τάσης αλλάζει τύπο ανάλογα με τον τρόπο διάνοιξης της ρωγμής τύπου I, II ή III. Στην παρούσα εργασία αναλύεται ο τύπος φόρτισης I, οπότε θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος που αντιστοιχεί στην φόρτιση I.

Να επισημανθεί εδώ ότι ο Irwin, σημείωσε ότι κατά την δημιουργία των ρωγμών, υπάρχει ενέργεια παραμόρφωσης η οποία απελευθερώνεται όταν ο συντελεστής έντασης τάσης φτάσει την κρίσιμη τιμή και η ενέργεια αυτή ισούται με την ενέργεια που απαιτείται για να αντιστραφεί η διαδικασία και να κλείσει η ρωγμή [5]. Σε επίπεδη εντάση ο ρυθμός απελευθέρωσης ενέργειας συνδέεται με τον συντελεστή έντασης τάσης και το είδος του υλικού μέσω του τύπου 2.2:

$$G = \frac{\kappa+1}{2\mu} K_I^2 \quad (2.2)$$

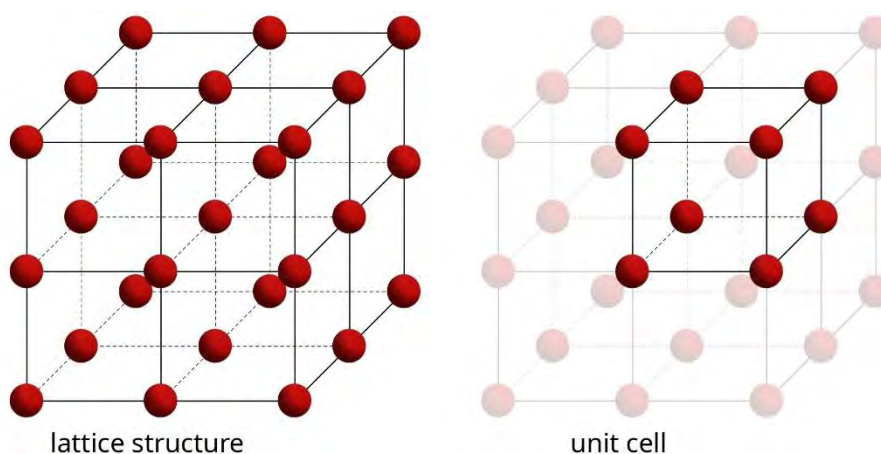
Συνεπώς, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή που για κάποιο συγκεκριμένο μήκος ρωγμής οδηγεί σε θραύση, καθώς και το αντίστροφο ένα κρίσιμο μήκος ρωγμής για δεδομένη τάση που επέρχεται η θραύση.

Κεφάλαιο 3 Θεωρία των εξαρμώσεων

3.1 Έννοιες

3.1.1 Κρυσταλλική δομή – Κρυσταλλικές ατέλειες

Κρυσταλλική δομή ονομάζεται μια διάταξη μονάδων όπως ατόμων, μορίων ή ιόντων που γίνεται σε μια άπειρη, επαναλαμβανόμενη, ταξινομημένη, συμμετρική, μικροσκοπική δομή στον τρισδιάστατο χώρο δημιουργώντας ένα πλέγμα, που εκτείνεται προς όλες τις διευθύνσεις [12], [13], [14]. Αποτέλεσμα των παραπάνω είναι να κατασκευάζεται ένα σύνολο σημείων με συγκεκριμένο μοτίβο που έχει τις ίδιες γεωμετρικές ιδιότητες σε όλο του το σύνολο [15]. Κρυσταλλικά υλικά αποτελούν όλα τα μέταλλα και τα κράματα, αρκετά κεραμικά και λίγα πολυμερή. Είναι γνωστό ότι κανένα υλικό δεν είναι τέλειο, δηλαδή οι κρύσταλλοι που το αποτελούν έχουν μεγάλο αριθμό ατελειών [12]. Σε ένα τέλειο κρυσταλλικό πλέγμα, η δύναμη που οδηγεί στην διάσπαση των ατόμων μεταξύ τους είναι η θεωρητική τιμή της δύναμης που θα οδηγήσει στην δημιουργία μιας ρωγμής.



Εικόνα 3.1 Κρυσταλλική δομή [16].

3.1.2 Εξάρμωση

Η εξάρμωση (dislocation) είναι μια κρυσταλλική γραμμική ατέλεια καθώς αφορά την διακοπή του κρυσταλλικού πλέγματος κατά μήκος μιας γραμμής που ξεχωρίζει το επίπεδο σε δύο επίπεδα που το καθένα έχει τέλεια κρυσταλλική δομή, όμως έχει μετακινηθεί το ένα σε σχέση με το άλλο [17], [5]. Η εξάρμωση είναι ο μηχανισμός που επιτρέπει στα άτομα να κινούνται μεταξύ τους ολισθαίνοντας ομοιόμορφα και καθορίζει το τμήμα του υλικού που ολισθαίνει σε σχέση με το άλλο [17].

Για να χαρακτηριστεί μια εξάρμωση χρησιμοποιείται το διάνυσμα Burgers το οποίο δείχνει την κατεύθυνση και την μετατόπιση που έχει υποβληθεί μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται απέναντι στην ρωγμή [5]. Το αποτέλεσμα των παραπάνω όταν υπάρχει αρκετός αριθμός εξαρμώσεων είναι να υποστεί πλαστική παραμόρφωση το υλικό το οποίο ανάλογα με τον τρόπο διάταξης των εξαρμώσεων έχει σαν αποτέλεσμα να καθοριστούν πολλές από τις ιδιότητες των υλικών [17].

Οι ατέλειες της κρυσταλλικής δομής σύμφωνα με την γεωμετρική δομή και το μέγεθός τους κατατάσσονται στις παρακάτω τέσσερις κατηγορίες [12]:

- Σημειακές
- Γραμμικές
- Επιφανειακές
- Χωρικές

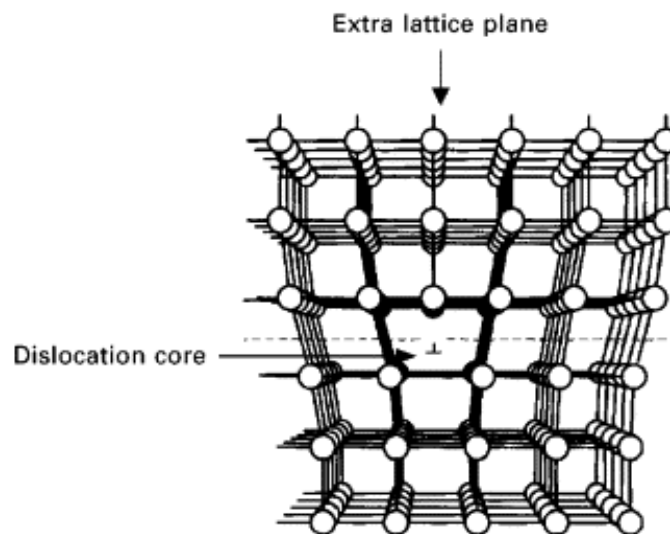
Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στις γραμμικές ατέλειες οι οποίες ονομάζονται και καταναγκασμοί καθώς θα αναλυθεί το πρόβλημα στο επίπεδο και δημιουργούνται σε μια γραμμή στο κρυσταλλικό πλέγμα επηρεάζοντας την αντοχή και την αστοχία των υλικών [12].

3.1.3 Διάνυσμα Burgers

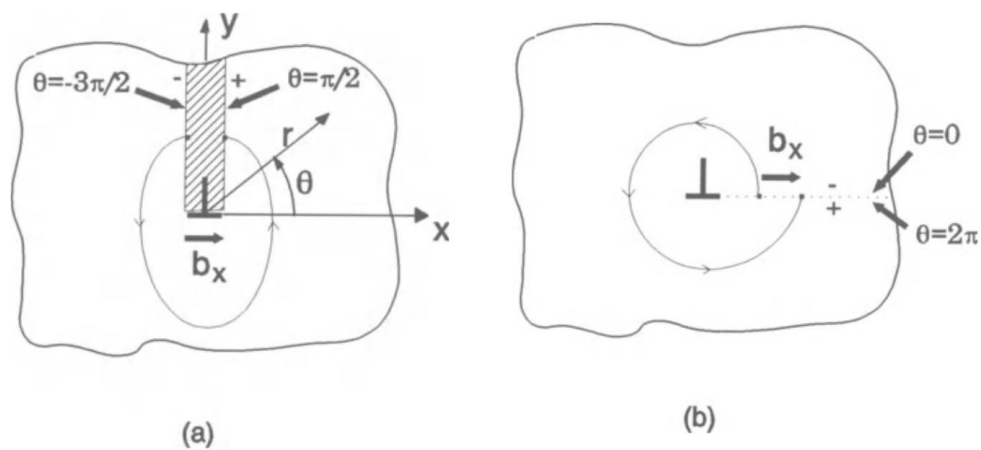
Το διάνυσμα Burgers αποτελεί ένα διάνυσμα που εξαρτάται από το κρυσταλλικό πλέγμα και δείχνει το μέγεθος και την κατεύθυνση της παραμόρφωσης δύο σημείων του απαραμόρφωτου πλέγματος σε σχέση με την εξάρμωση όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.2. [18], [19], [20]. Το πλάτος του διανύσματος αυτού υπολογίζει την μικρότερη απόσταση καθώς είναι μοναδιαίο ανάμεσα σε δύο ίδια σημεία ένα στο απαραμόρφωτο τμήμα του πλέγματος και ένα σε αυτό που έχει υποστεί παραμόρφωση από την παρουσία μιας ατέλειας [18], [19], [20].

Το διάνυσμα burgers μπορεί να είναι τοποθετημένο είτε κάθετα είτε παράλληλα στην εγκοπή έχοντας τις εξής δύο περιπτώσεις [5]:

- Το διάνυσμα να είναι κάθετο κατά μήκος της τομής, εισάγοντας με αυτόν τον τρόπο μια λωρίδα όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3 (α) και η εξάρμωση ονομάζεται climb dislocation.
- Το διάνυσμα να είναι παράλληλο κατά μήκος της εγκοπής, εμφανίζοντας έτσι διατμητικές μετατοπίσεις όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3 (β) και η εξάρμωση σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται glide dislocation.



Εικόνα 3.2. Διάνυσμα Burger's [21].



Εικόνα 3.3. Glide και climb διανύσματα Burger's [5]

3.2 Εισαγωγή στην τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων

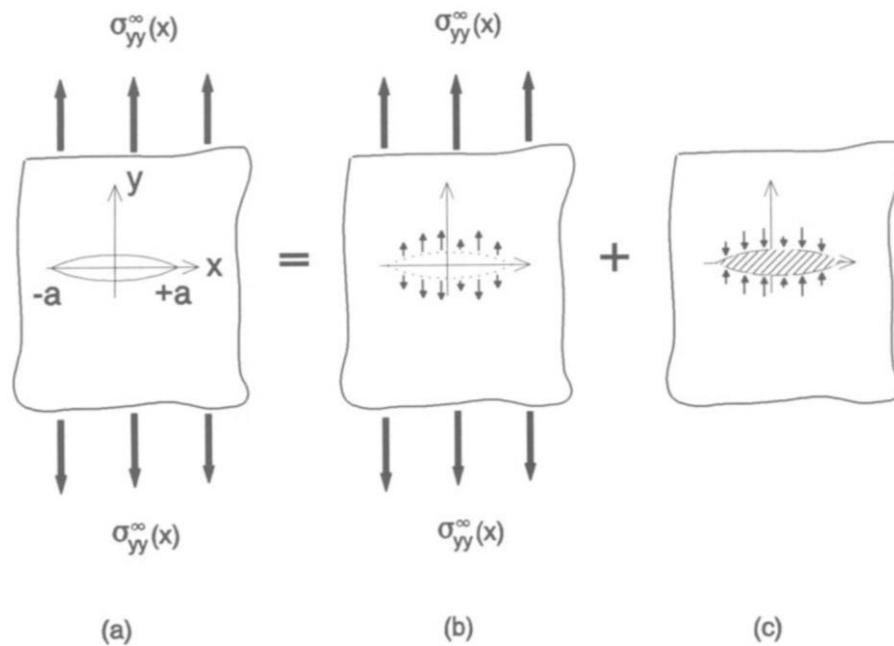
Η τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων (Distributed Dislocation Technique - DDT) περιλαμβάνει την θεώρηση τέλειων στερεών σωμάτων στα οποία εισάγεται κάποια ρωγμή με διάφορες συνοριακές συνθήκες και καταπονήσεις και αναλύεται το πρόβλημα αυτό.

Για την επίλυση του προβλήματος με την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων αρχικά, θα πρέπει να αναλυθεί σε δύο ξεχωριστά προβλήματα και στην συνέχεια με την υπέρθεση των λύσεων αυτών θα προκύψει η τελική λύση. Αυτά τα δύο προβλήματα αφορούν:

1. Αρχικά, τον υπολογισμό των τάσεων κατά μήκος της ρωγμής που προκύπτουν στο υλικό σε ένα μη ρηγματωμένο σώμα όταν σε αυτό εφαρμόζεται απομακρυσμένη εφελκυστική φόρτιση και,
2. Στην συνέχεια, τον υπολογισμό των τάσεων που προκύπτουν στο σώμα με την ύπαρξη ρωγμής χωρίς την επιβολή απομακρυσμένης φόρτισης, παρά μόνο με την εφαρμογή ίσων και αντίθετων δυνάμεων του αρχικού προβλήματος που δημιουργούνται έχοντας εισάγει το υλικό όπως περιγράφεται στην συνέχεια.

Οπότε, συνοπτικά θα έχουμε με την αρχή της υπέρθεσης των δύο λύσεων την εξίσωση 3.1:

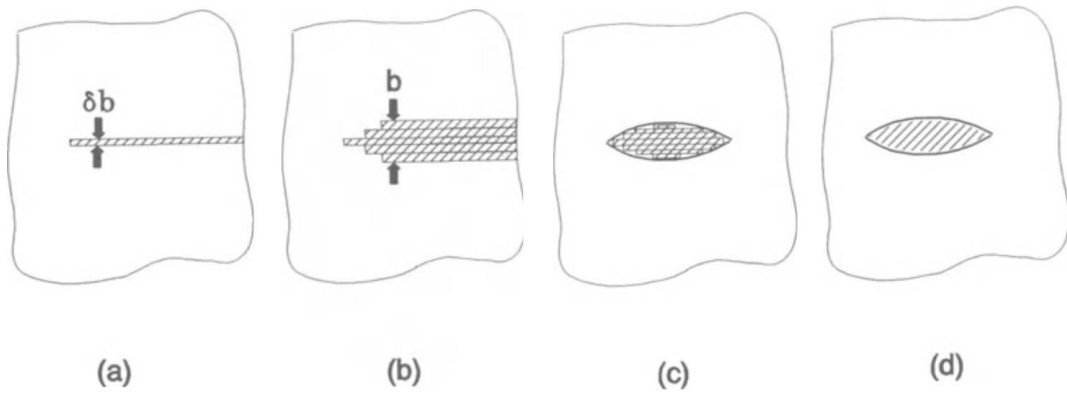
$$\sigma_{ij}(x, y) = \tilde{\sigma}_{ij}(x, y) + \bar{\sigma}_{ij}(x, y) \quad (3.1)$$



Εικόνα 3.4 Διάσπαση του προβλήματος σε δύο υπο-προβλήματα [5].

Η μέθοδος που ακολουθείται για τον σχηματισμό αυτών των “διορθωτικών τάσεων” είναι πρώτα η δημιουργία μιας λεπτής εγκοπής και έπειτα τοποθετείται κάποιο “υλικό” σε όλο το μήκος της ώστε να ανοίξει η ρωγμή όπως φαίνεται στην εικόνα 3.5.a [5]. Το συγκεκριμένο υλικό μπορούμε να φανταστούμε ότι αποτελείται από πολύ λεπτές λωρίδες, που έχουν μήκος, στο κέντρο του ανοίγματος, όσο το μήκος της ρωγμής και καθώς απομακρυνόμαστε προς τα άκρα το μήκος τους μικραίνει έως ότου δημιουργηθεί η γεωμετρία που επιθυμείται όπως φαίνεται και στην εικόνα 3.5.d [5].

Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί ότι αυτή η μέθοδος αποτελεί απλά ένα μαθηματικό “τέχνασμα” όσο αναφορά το υλικό που τοποθετείται, ώστε να δημιουργηθούν οι διορθωτικές τάσεις καθώς στην πραγματικότητα η ρωγμή είναι άδεια [5]. Η κάθε λωρίδα σταθερού πάχους που περιεγράφηκε προηγουμένως ουσιαστικά αποτελεί μια εξάρμωση με διάνυσμα burgers b .



Εικόνα 3.5. Δημιουργία εξαρμώσεων [5].

Για να μπορέσουν να υπολογιστούν τα πεδία τάσεων και παραμορφώσεων έγινε χρήση της τασικής συνάρτησης Airy. Με βάση αυτή την τεχνική αναζητείται μια άγνωστη συνάρτηση ϕ που να ικανοποιεί την διαρμονική εξίσωση:

$$\frac{\theta^4 \phi}{\theta x^4} + 2 \frac{\theta^4 \phi}{\theta x^2 \theta y^2} + \frac{\theta^4 \phi}{\theta y^4} = 0 \quad (3.4)$$

η κατάλληλη λύση της εξίσωσης 3.4 είναι η λύση του Westergaard [2].

Έπειτα, με κατάλληλες παραγωγίσεις της τασικής συνάρτησης υπολογίζονται οι τάσεις και με συνδυασμό του νόμου του Hooke υπολογίζονται οι παραμορφώσεις και τέλος με την ολοκλήρωση υπολογίζονται οι μετατοπίσεις.

Για μια μεμονωμένη εξάρμωση προκύπτει ότι οι τάσεις υπολογίζονται από τους τύπους 3.5:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x \left[-\frac{y}{r^4} (2x^2 + y^2) \right] + b_y \left[+\frac{x}{r^4} (x^2 - y^2) \right] \right\} \\ \sigma_{yy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x \left[+\frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) \right] + b_y \left[+\frac{x}{r^4} (x^2 + 3y^2) \right] \right\} \\ \sigma_{xy}(x, y) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \left\{ b_x \left[+\frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) \right] + b_y \left[+\frac{y}{r^4} (x^2 - y^2) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Οι συνοριακές συνθήκες που θα υπάρχουν πρέπει να ικανοποιούνται στην επιφάνεια της ρωγμής. Γι' αυτό προκύπτει από τα δύο προβλήματα ότι:

- Από το πρόβλημα 1, οι τάσεις που θα προκύψουν κατά μήκος της ρωγμής θα ισούνται με τις εφελκυστικές τάσεις καθώς δεν έχουμε κάποια άλλη φόρτιση ή ρωγμή.
- Από το πρόβλημα 2, οι διατμητικές τάσεις στην επιφάνεια της ρωγμής θα είναι μηδενικές καθώς η φόρτιση που εφαρμόζεται είναι κάθετη στην ρωγμή που έχουμε οπότε προκύπτουν μόνο ορθές τάσεις.

Οι ορθές και διατμητικές τάσεις στα σημεία κατά μήκος της γραμμής θα είναι:

1. $N(x) \equiv \sigma_{yy}(x, 0) = \sigma_{yy}^{\infty}(x, 0) + \bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = 0, \quad |x| < a$
2. $S(x) \equiv \sigma_{yy}(x, 0) = \bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = 0, \quad |x| < a$ (3.6)
3. $\bar{\sigma}_{yy}, \bar{\sigma}_{xy}, \bar{\sigma}_{xx} \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } x, y \rightarrow \pm\infty$

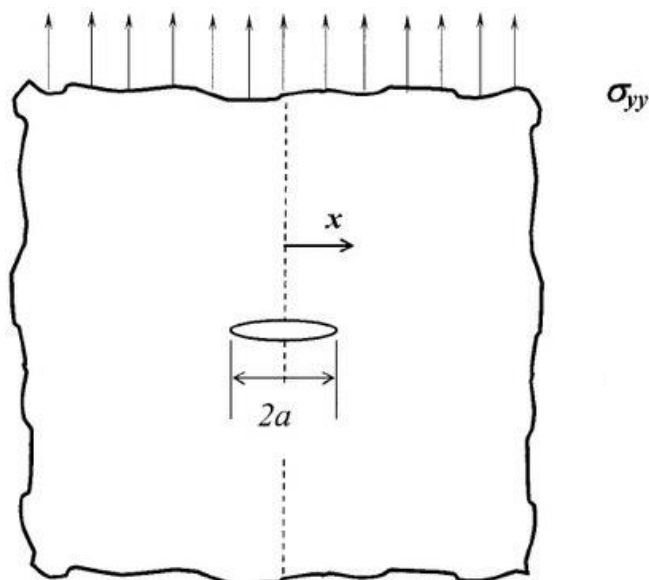
Κεφάλαιο 4 Τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσουμε την τεχνική των διανεμημένων εξαρμώσεων και τα βήματα που ακολουθήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος.

4.1 Ρωγμή σε άπειρο χωρίο

4.1.1 Υπόβαθρο - Θεωρία

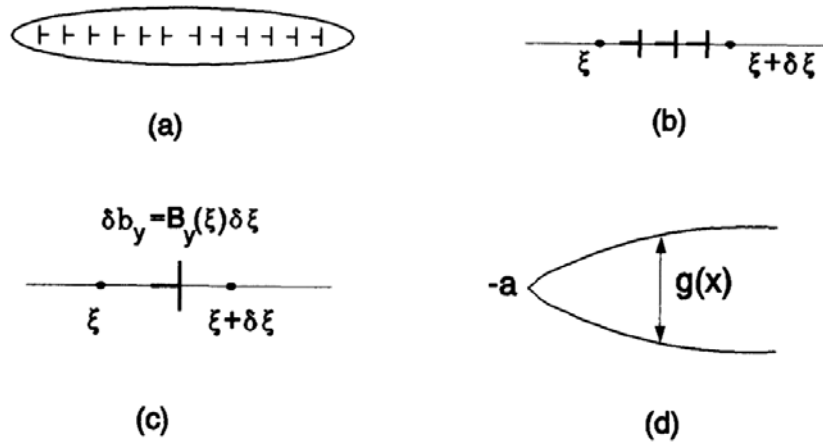
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθεί το απλούστερο πρόβλημα, δηλαδή αυτό της ρωγμής σε ένα άπειρο χωρίο ώστε τα αποτελέσματά μας να παραμένουν ανεπηρέαστα από συνοριακές συνθήκες. Έστω λοιπόν ένα υλικό με άπειρη επιφάνεια, στο οποίο υπάρχει μια ρωγμή μήκους $2a$ και εφαρμόζεται μια εφελκυστική τάση, $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$, η οποία είναι κάθετη στη ρωγμή, όπως απεικονίζεται στην εικόνα 4.1.



Εικόνα 4.1 Ρωγμή σε άπειρο χωρίο [23].

Αρχικά, θεωρείται ένα απειροελάχιστο στοιχείο ρωγμής σε μια εξάρμωση ανόδου (climb dislocation) όπως φαίνεται στην εικόνα 4.2.b. Ένα σύνολο αυτών των μικρών στοιχείων

αποτελεί μια εξάρμωση με διάνυσμα Burgers $\delta b_y \equiv B_y(\xi)\delta\xi$ (Εικόνα 4.2.c), με $B_y(\xi)$ να δείχνει την πυκνότητα των εξαρμώσεων στο συγκεκριμένο σημείο, δηλαδή το ξ .



Εικόνα 4.2. Διάνυσμα Burger [5].

Ο τύπος που υπολογίζει τις τάσεις σε ένα σημείο για μία μόνο εξάρμωση κατά μήκος της γραμμής της ρωγμής δίνεται στην εξίσωση 4.1:

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \frac{\delta b_y(\xi)}{x-\xi} = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \frac{B_y(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (4.1)$$

Για να υπολογιστούν οι τάσεις για όλο το μήκος της εξάρμωσης κατά μήκος της ρωγμής, δηλαδή για $y=0$, χρησιμοποιείται η εξίσωση 4.2:

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, 0) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{B_y(\xi)}{x-\xi} d\xi \quad (4.2)$$

Με $B_y(\xi)$ εκφράζει την πυκνότητα εξάρμωσης και ισούται με:

$$B_y(\xi) = \frac{db_y(\xi)}{d\xi} \quad (4.3)$$

Ο τύπος που συνδέει τις δύο ποσότητες είναι ο εξής:

$$g(x) = - \int_{-\alpha}^x B_y(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

Ή διαφορετικά με την χρήση και του τύπου της πυκνότητας της ρωγμής προκύπτει:

$$B_y(\xi) = - \frac{dg(\xi)}{d\xi} \quad (4.5)$$

Από το δεύτερο μέλος της εξίσωσης προκύπτει η κλίση των επιφανειών της ρωγμής σε κάθε σημείο της, και όπως παρατηρείται γενικά θα είναι μηδέν στο κέντρο της ρωγμής ενώ θα τείνει στο άπειρο καθώς πλησιάζουμε στα άκρα. Συνεπώς, η πυκνότητα της εξάρμωσης έχει άμεση σχέση με το άνοιγμα της ρωγμής.

4.1.2 Ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση

Στις εξισώσεις υπολογισμού των τάσεων για μία μόνο εξάρμωση 3.5 με αντικατάσταση του $b_x = 0$ καθώς εδώ μελετάται μόνο η διεύθυνση y στην οποία το διάνυσμα b_y είναι κάθετο, και ελέγχοντας τις συνοριακές συνθήκες με $b_x = 0$ παρατηρείται ότι επαληθεύονται. Στη συνέχεια, με την πρώτη συνοριακή συνθήκη των εξισώσεων 3.6 που υπολογίζει τις ορθές τάσεις και την 4.2 προκύπτει η εξίσωση:

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu} \sigma_{yy}^\infty(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} B_y(\xi) \frac{1}{x-\xi} d\xi, \quad |x| < \alpha \quad (4.6)$$

Στην εξίσωση φαίνεται ότι για τις περιπτώσεις όπου:

- $x = \xi$ ο όρος $\frac{1}{x-\xi}$ απειρίζεται και όταν,
- $\xi \rightarrow \pm \alpha$ η πυκνότητα απειρίζεται,

αποτελώντας ένας ιδιόμορφο σημείο γι' αυτό η εξίσωση 4.6 λέγεται ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση.

Πριν την επίλυση του προβλήματος είναι σημαντικό να γίνει μετασχηματισμός των άκρων του ολοκληρώματος για ένα διάστημα από $[-1, 1]$ για ευκολία στους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$2\xi = (b-a)s + (b+a) \quad (4.7.\alpha)$$

$$2x = (b-a)t + (b+a) \quad (4.7.\beta)$$

Στις εξισώσεις 4.7.α και 4.7.β για $b = -a$ προκύπτει $s = \frac{\xi}{a}$ και $t = \frac{x}{a}$. Αντικαθιστώντας τα στην ολοκληρωτική εξίσωση 4.6 γίνεται:

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu} \sigma_{yy}^\infty(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} B_y(\xi) \frac{1}{t-s} ds, \quad |t| < 1 \quad (4.8)$$

Με

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu} \sigma_{yy}^\infty(t) = F(t) \quad (4.9)$$

4.1.3 Ακριβής αντιστροφή

Το δεξιό τμήμα της ολοκληρωτικής εξίσωσης, δηλαδή αυτό που αφορά το $B_y(s)$ ονομάζεται μετασχηματισμός Hilbert του $B_y(s)$ [5]. Η μορφή του $B_y(s)$ αλλάζει για κάθε άκρο της ρωγμής από $[-1, +1]$ με τον τύπο:

$$B_y(s) = w(s) \cdot \varphi_y(s) \quad (4.10)$$

Όπου,

$w(s)$ η θεμελιώδης λύση, δηλαδή εκφράζει την συμπεριφορά στα άκρα της ρωγμής και ισούται με:

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)}} \quad (4.11)$$

$\varphi_y(s)$ μια ομαλή πολυωνυμική συνάρτηση που αποτελεί την άγνωστη συνάρτηση τάσης που αναζητούμε.

Με την αντιστροφή της 4.9 θα προκύψει:

$$B_y(t) = -\frac{w(t)}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{F(s)}{w(s)(t-s)} ds + Cw(t) \quad (4.12)$$

Όπου C μια αυθαίρετη σταθερά.

Τα άκρα των ρωγμών πρέπει να είναι ενωμένα, δηλαδή στην εξίσωση 4.6 να ισχύει $g(-\alpha)=g(+\alpha)=0$ το οποίο σημαίνει ότι καθώς κινούμαστε από το ένα άκρο του ανοίγματος στο άλλο, δεν πρέπει να υπάρχει καθαρή εξάρμωση. Άρα, προκύπτει και η επιπλέον συνοριακή συνθήκη που χρειάζεται για την επίλυση του προβλήματος:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} B_y(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} B_y(s) ds = 0 \quad (4.13)$$

Από τον πίνακα 1.1, για τον τύπο φόρτισης Ι, σε καρτεσιανές συντεταγμένες συμπεραίνουμε ότι το άνοιγμα της ρωγμής, εξαρτάται από τον συντελεστή έντασης τάσης και προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{dg(r)}{dr} = \frac{\kappa+1}{2\mu} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (4.14)$$

Ο συντελεστής έντασης τάσης υπολογίζεται από τον τύπο:

$$K_I(\pm 1) = \pm \sqrt{\pi \alpha} \frac{2\mu}{\kappa+1} \varphi_y(\pm 1) \quad (4.15)$$

Και οι τάσεις για κάθε σημείο της επιφάνειας υπολογίζονται από τους τύπους:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} B_y(\xi) \frac{x-\xi}{r^4} [(x-\xi)^2 - y^2] d\xi \quad (4.16.\alpha)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} B_y(\xi) \frac{x-\xi}{r^4} [(x-\xi)^2 + 3y^2] d\xi + \sigma_{yy}^\infty(x) \quad (4.16.\beta)$$

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-\alpha}^{+\alpha} B_y(\xi) \frac{y}{r^4} [(x-\xi)^2 - y^2] d\xi \quad (4.16.\gamma)$$

Όπου,

$$r^2 = (x - \xi)^2 + y^2 \quad (4.17)$$

4.2 Προγραμματισμός του προβλήματος

4.2.1 Αριθμητική λύση προβλήματος.

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Mathematica 12.1. Αρχικά, ως επισημανθεί ότι η συνάρτηση $B_\gamma(s)$ είναι ιδιόμορφη στα άκρα της ρωγμής για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όμως γενικά η συνάρτηση $B_\gamma(s)$ μπορεί στα άκρα της ρωγμής να έχει τους εξής συνδυασμούς που φαίνονται στον πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1. Συμπεριφορά πυκνότητας στα άκρα της ρωγμής [5].

$-1 \setminus +1$	Singular	Bounded
Singular	I	II
Bounded	III	IV

Πίνακας 4.2. Τύποι τετραγωνίου Gauss-Chebyshev για πυρήνες Cauchy [5].

Case	$\omega(s)$	s_i	t_k	n	W_i
<i>I</i>	$(1 - s^2)^{-1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{k}{N}\right)$	1	$\frac{1}{N}$
<i>II</i>	$(1 - s)^{+1/2}(1 + s)^{-1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{2i}{2N+1}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2N+1}\right)$	0	$\frac{2(1-s_i)}{2N+1}$
<i>III</i>	$(1 - s)^{-1/2}(1 + s)^{+1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N+1}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{2k}{2N+1}\right)$	0	$\frac{2(1+s_i)}{2N+1}$
<i>IV</i>	$(1 - s^2)^{+1/2}$	$\cos\left(\pi \frac{i}{N+1}\right)$	$\cos\left(\pi \frac{2k-1}{2(N+1)}\right)$	-1	$\frac{(1-s_i^2)}{N+1}$

Στο πρόβλημα που περιγράφεται εδώ είναι η πρώτη περίπτωση, όπου $n=1$.

Στον πίνακα 4.2 περιγράφονται οι τύποι που ισχύουν για κάθε ιδιόμορφη ή μη περίπτωση των μεγεθών, θεμελιώδους συνάρτησης, σημεία ολοκλήρωσης (integration points), σημεία ταξιοθεσίας (collocation points), του αριθμού n .

Ο τύπος υπολογισμού της πυκνότητας είναι:

$$B(s) = w(s) \cdot \varphi(s) \quad (4.18)$$

Όπου,

$w(s)$ η θεμελιώδης λύση, όπως φαίνεται και στον πίνακα 4.3 για $n=1$ ισούται με:

$$w(s) = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)}} \quad (4.19)$$

$\varphi(s)$ είναι μια ορισμένη συνάρτηση που αποτελεί την άγνωστη συνάρτηση τάσης που αναζητείται.

Η γενική μέθοδος που ακολουθείται είναι η χρήση αριθμητικών τύπων τετραγωνισμού Gauss – Chebyshev για την αναγωγή των εξισώσεων του τύπου 4.11 σε ένα σύνολο $N - n$ αλγεβρικών εξισώσεων που μετά την διακριτοποίηση έχουν την μορφή:

$$F(t_k) = \sum_{i=1}^N W_i \cdot \frac{\varphi(s_i)}{t_k - s_i}, \quad k = 1 \dots N - n \quad (4.20)$$

W_i είναι οι συναρτήσεις βάρους ανάλογα με την περίπτωση των συνθηκών που επικρατούν στα άκρα.

s_i είναι τα σημεία ολοκλήρωσης (integration points) που δίνονται από τον τύπο:

$$s_i = \cos\left(\pi \cdot \frac{2i-1}{2N}\right), \quad i = 1 \dots N \quad (4.21)$$

Όπου N είναι το σύνολο των διακριτών σημείων ολοκλήρωσης.

t_i είναι τα σημεία ταξιδείας (collocation points) που δίνονται από τον τύπο:

$$t_i = \cos\left(\pi \cdot \frac{k}{N}\right), \quad k = 1 \dots N - 1 \quad (4.22)$$

4.2.1.1 Υπολογισμός της άγνωστης συνάρτησης $\varphi_y(s_i)$

Στα προβλήματα ρωγμών που αντιμετωπίζονται σε αυτό το κεφάλαιο, αναμένεται μια λύση που είναι ιδιόμορφη στα άκρα, καθώς $n = 1$ και από την εξίσωση 4.8 με την αντικατάσταση της διακριτοποιημένης $F(t)$ από την εξίσωση 4.20, προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$-\frac{\kappa+1}{2\mu} \cdot \sigma_{yy}^\infty(t_k) = \sum_{i=1}^N W_i \cdot \frac{\varphi_y(s_i)}{t_k - s_i}, \quad k = 1 \dots N - n \quad (4.23)$$

Το ολοκλήρωμα πλευρικής συνθήκης μπορεί να διακριτοποιηθεί από την εξίσωση 4.13 δίνοντας:

$$\pi \sum_{i=1}^N W_i \cdot \varphi_y(s_i) = 0 \quad (4.24)$$

Αρχικά, επιλέγεται ένας αριθμός N αρκετά μεγάλος ώστε να υπάρχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, με $N=50$ και εισάγονται τα δεδομένα στο πρόγραμμα, δηλαδή $\kappa=3-4\nu$ που ισχύει για επίπεδη παραμόρφωση, οι 4.21, 4.22, η συνάρτηση βάρους, η θεμελιώδης συνάρτηση, και οι εξισώσεις 4.23 και 4.24. Δημιουργείται ένα σύστημα με τις εξισώσεις 4.23 και 4.24 και επιλύεται το σύστημα που δημιουργείται, δηλαδή ένας πίνακας 50×50 , προκύπτοντας η άγνωστη συνάρτηση $\varphi_y(s_i)$ συναρτήσει των ν , σ και μ , όπου ν ο λόγος

Poisson, με το μέτρο διάτμησης και $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$ η εφελκυστική τάση που εφαρμόζουμε αρχικά στο στοιχείο.

Στην συνέχεια, γίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $\varphi_y(s_i)$ με τα αντίστοιχα s_i , κάνοντας πρώτα την κατάλληλη αδιαστατοποίηση, δηλαδή διαιρώντας τα $\varphi_y(s_i)$ με $\sigma_{yy}^{\infty}(x) \cdot \frac{\kappa+1}{2\cdot\mu}$.

Επίσης, έγινε το διάγραμμα με τα $\varphi(s) \cdot w(i)$ και s_i που αναπαριστά τα σημεία της πυκνότητας της ρωγμής. Ομοίως, για αυτό το διάγραμμα έγινε την κατάλληλη αδιαστατοποίηση, δηλαδή διαιρώντας τα $\varphi_y(s_i) \cdot w(i)$ με $\sigma_{yy}^{\infty}(x) \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}$.

Στην συνέχεια, από τον τύπο που δίνει το άνοιγμα της ρωγμής 4.4 πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2}$ για να υπολογιστεί μόνο το πάνω μέρος του ανοίγματος της ρωγμής (αφού είναι συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα) και κατάλληλη αλλαγή του ξ ώστε να υπάρχει στο ολοκλήρωμα το διάστημα $[-1, x]$:

$$u_y(x) = -\frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^x B(z) dz \quad (4.25)$$

Παράλληλα, με γραμμική παρεμβολή όσο αναφορά τα σημεία που βρίσκονται ενδιάμεσα στα σημεία ολοκλήρωσης και δεν περιλαμβάνονται λόγω του περιορισμένου αριθμού σημείων δημιουργείται η γραφική παράσταση των σημείων του ανοίγματος της ρωγμής.

Όσο αναφορά τον υπολογισμό των τάσεων, χρησιμοποιούνται οι τύποι 4.16 στους οποίους έγινε μετασχηματισμός θέτοντας και αντικαθιστώντας $\xi = z \cdot a$, $y = Y \cdot a$, $x = X \cdot a$ ώστε να είναι αδιάστατα τα μεγέθη. Με υπολογισμό και αντικατάσταση των παραπάνω στις εξισώσεις 4.16, με διαίρεση και των δύο μελών όλων των εξισώσεων με την αρχική εφελκυστική τάση $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$ καθώς και με τις απλοποιήσεις που γίνανε λόγω του $B_y(s)$ προέκυψαν οι τύποι:

$$\sigma_{xx}(X, Y) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{+1} B(z) \cdot \frac{X-z}{[(X-z)^2+Y^2]^2} \cdot [(X-z)^2 - Y^2] dz \quad (4.26.\alpha)$$

$$\sigma_{yy}(X, Y) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{+1} B(z) \cdot \frac{X-z}{[(X-z)^2+Y^2]^2} \cdot [(X-z)^2 + 3(Y)^2] dz + 1 \quad (4.26.\beta)$$

$$\sigma_{xy}(X, Y) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^{+1} B(z) \cdot \frac{Y}{[(X-z)^2+Y^2]^2} \cdot [(X-z)^2 - Y^2] dz \quad (4.26.\gamma)$$

Ας διευκρινιστεί σε αυτό το σημείο ότι στον υπολογισμό των τάσεων $\sigma_{yy}(X, Y)$ υπάρχει το +1 λόγω της προσθήκης της αρχικής εφελκυστικής τάσης ώστε να προκύψουν οι τελικές τάσεις του προβλήματος. Επίσης, για τον υπολογισμό των τάσεων χρησιμοποιείται ένα εύρος για τον οριζόντιο άξονα από -2 έως +2 και για τον κατακόρυφο άξονα από 0,03 έως +2. Στον

κατακόρυφο άξονα ξεκινάει από το 0,03 λόγω της δυσκολίας του προγράμματος να λάβει υπόψιν του το σημείο της γραμμής της ρωγμής, δηλαδή το $y=0$.

Τέλος, για τα άκρα της ρωγμής υπολογίζεται ο παράγοντας έντασης τάσης. Η τιμή της συνάρτησης $\varphi_y(s_i)$ στα άκρα υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$\varphi(+1) = M_E(+1) \cdot \sum_{i=1}^N \Phi_E(+1) \cdot \varphi(s_i) \quad (4.27.\alpha)$$

$$\varphi(-1) = M_E(-1) \cdot \sum_{i=1}^N \Phi_E(-1) \cdot \varphi(s_{N+1+i}) \quad (4.27.\beta)$$

με κατάλληλη αδιαστατοποίηση όπως πριν, δηλαδή διαιρώντας τα $\varphi_y(s_i)$ με $\sigma_{yy}^\infty(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$.

Με τις σταθερές $M_E(\pm 1)$ και τις συναρτήσεις $\Phi_E(\pm 1)$ να λαμβάνονται από τον πίνακα 4.3 για $n = 1$ στην προκειμένη περίπτωση:

$$M_E(\pm 1) = \frac{1}{N} \quad (4.28)$$

$$\Phi_E(\pm 1) = \frac{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi(2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi\right]} \quad (4.29)$$

Οι τιμές για τον συντελεστή έντασης τάσεις λαμβάνονται από τον τύπο 4.15:

$$K_I(\pm 1) = \pm \sqrt{\pi a} \frac{2\mu}{\kappa+1} \varphi_y(\pm 1) \quad (4.30)$$

Πίνακας 4.3 Τύποι του Krenk για τα σημεία στα άκρα της ρωγμής [5].

Case	$M_E(+1)$	$\Phi_E(+1)$	$M_E(-1)$	$\Phi_E(-1)$
I	$\frac{1}{N}$	$\frac{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi(2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi\right]}$	$\frac{1}{N}$	$\frac{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi(2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{2i-1}{4N}\pi\right]}$
II	1	$\frac{\sin\left[\frac{i\pi}{2N+1}(2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{i\pi}{2N+1}\right]}$	$\frac{2}{2N+1}$	$\cot\left[\frac{2i-1}{2N+1}\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{2i-1}{2N+1}N\pi\right]$
III	$\frac{2}{2N+1}$	$\cot\left[\frac{2i-1}{2N+1}\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{2i-1}{2N+1}N\pi\right]$	1	$\frac{\sin\left[\frac{i\pi}{2N+1}(2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{i\pi}{2N+1}\right]}$
IV	1	$\cot\left[\frac{i}{N+1}\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{i}{N+1}N\pi\right]$	1	$\cot\left[\frac{i}{N+1}\frac{\pi}{2}\right] \sin\left[\frac{i}{N+1}N\pi\right]$

Πίνακας 4.4. Τύποι του Krenk για σημεία κατά μήκος της γραμμής [5].

Case	M_I	$\Phi_I(s)$	γ
I	$\frac{2}{N}$	$\cos\left[\frac{2i-1}{2N}j\pi\right] \cos[j\gamma]$	$\arccos(s)$
II	$\frac{4}{2N+1}$	$\sin\left[\frac{i\pi}{2N+1}\right] \sin\left[\frac{i\pi}{2N+1}(2j+1)\right] \frac{\sin[2(j+1)\gamma]}{\sin\gamma}$	$\arccos\left(\sqrt{\frac{1+s}{2}}\right)$
III	$\frac{4}{2N+1}$	$\cos\left[\frac{2i-1}{2N+1}\frac{\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{2i-1}{2N+1}\frac{\pi}{2}(2j+1)\right] \sqrt{\frac{2}{1+s}} \cos((2j+1)\gamma)$	$\arccos\left(\sqrt{\frac{1+s}{2}}\right)$
IV	$\frac{2}{N+1}$	$\sin\left[\frac{i\pi}{N+1}\right] \sin\left[\frac{i\pi}{N+1}(j+1)\right] \frac{\sin[(j+1)\gamma]}{\sin\gamma}$	$\arccos(s)$

4.3 Ρωγμή σε ημιεπίπεδο για φόρτιση τύπου I

4.3.1 Υπόβαθρο – θεωρία

Οι ρωγμές έχουν την τάση να εμφανίζονται κοντά σε περιοχές όπου υπάρχει συγκέντρωση τάσεων και όχι σε ένα άπειρο χωρίο αλλά σε περιοχές όπου η τάση είναι ομοιόμορφη όπως κοντά σε ένα ελεύθερο σύνορο [5]. Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση μελετάται μια ρωγμή μήκους $2a$ σε ένα ημιάπειρο επίπεδο. Η διεύθυνση της ρωγμής είναι κάθετη στο σύνορο και η απόσταση του κέντρου της ρωγμής είναι d από την ελεύθερη επιφάνεια όπως φαίνεται στην εικόνα 4.3. Η φόρτιση που ασκείται είναι απομακρυσμένη εφελκυστική τάση κάθετη στη ρωγμή $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$. Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να διευκρινιστεί ότι η παρούσα εργασία ασχολείται μόνο με τις εξαρμώσεις στην διεύθυνση y .

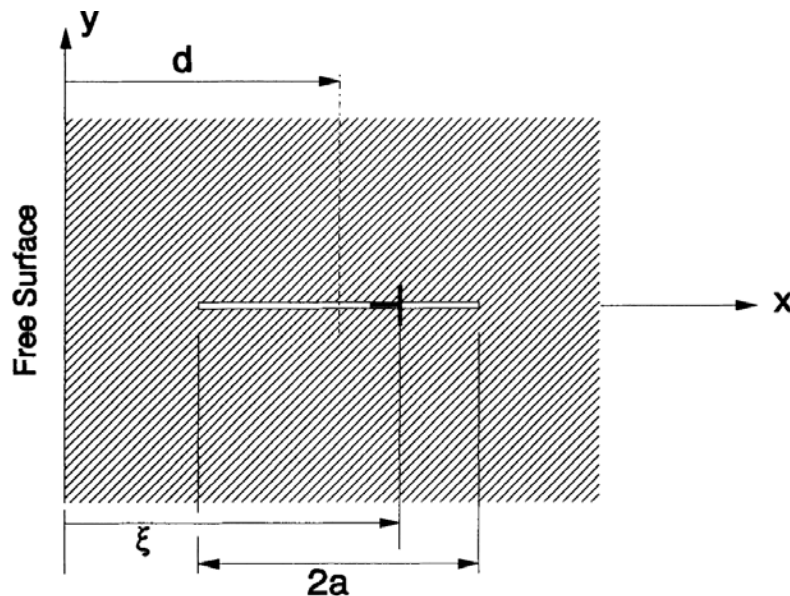
Οι ορθές και οι διατμητικές τάσεις σε αυτή την περίπτωση υπολογίζονται από τους τύπους:

$$N(x) = \widetilde{\sigma}_{yy}(x) + \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{d-a}^{d+a} B_y(\xi) \left[\frac{1}{x-\xi} + K'(x; \xi) \right] d\xi \quad (4.31)$$

$$S(x) = \widetilde{\sigma}_{xy}(x) + \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{d-a}^{d+a} B_x(\xi) \left[\frac{1}{x-\xi} + K'(x; \xi) \right] d\xi \quad (4.32)$$

Για τις επιφάνειες της ρωγμής ισχύει ο ίδιος περιορισμός όπου δεν πρέπει να υπάρχει πρόσφυση οπότε:

$$N(x)=S(x)=0 \quad \text{για} \quad d-a < x < d+a \quad (4.33)$$



Εικόνα 4.3 Ρωγμή σε ημιεπίπεδο [5].

Διατηρώντας μόνο την b_y , η πυκνότητα τώρα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$B_y(s) = \frac{\varphi_y(s)}{\sqrt{1-s^2}} \quad (4.34)$$

4.3.1.1 Υπολογισμός της άγνωστης συνάρτησης $\varphi_y(s_i)$

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για την επίλυση αυτού το προβλήματος είναι η ίδια, μόνο που σε αυτό το πρόβλημα θέτεται ότι $d = a \cdot c$, όπου c δείχνει πόσο μακριά είναι η ρωγμή από την ελεύθερη επιφάνεια. Το c παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 1, καθώς για τιμή 1 σημαίνει ότι το άκρο της ρωγμής συμπίπτει με την ελεύθερη επιφάνεια, πράγμα που δεν μελετάται στην παρούσα εργασία.

Οι τύποι για την πυκνότητα, τα σημεία ολοκλήρωσης και ταξιθεσίας είναι οι ίδιοι, με την διαφορά ότι το διάστημα ολοκλήρωσης κανονικοποιείται μέσω των εξισώσεων 4.7 ώστε να υπάρχει διάστημα ολοκλήρωσης $[-1, +1]$ με τους τύπους $s = \frac{(\xi-d)}{a}$ και $t = \frac{(x-d)}{a}$ και οι 4.31 και 4.33 δίνουν την ολοκληρωτική εξίσωση που είναι:

$$-\frac{\kappa+1}{2\cdot\mu} \cdot \tilde{\sigma}_{yy}(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_y(s_i) \cdot \left[\frac{1}{t_k-s_i} + a \cdot K'(t_k, s_i) \right], \quad k = 1 \dots N-1 \quad (4.32)$$

Όπου,

$\tilde{\sigma}_{yy}(t)$ είναι οι εξωτερικές εφελκυστικές τάσεις που ασκήθηκαν και

$K'(t_k, s_i)$ είναι το κανονικό τμήμα του πυρήνα $K(x;\xi)$ και υπολογίζεται ως:

$$K'(x, \xi) = -\frac{1}{x+\xi} - \frac{2\xi}{(x+\xi)^2} + \frac{4\xi^2}{(x+\xi)^3} \quad (4.33)$$

Το $K(x, \xi)$ αποτελεί την συνάρτηση επιρροής που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$K(x, \xi) = \frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x+\xi} - \frac{2\xi}{(x+\xi)^2} + \frac{4\xi^2}{(x+\xi)^3} \quad (4.34)$$

Η εξίσωση 4.34 περιέχει έναν ιδιόμορφο όρο, τον $\frac{1}{x-\xi}$ και το υπόλοιπο μέρος αποτελεί το κανονικό τμήμα του πυρήνα, το $K'(x, \xi)$.

Το ολοκλήρωμα συνοριακής συνθήκης διακριτοποιείται δίνοντας:

$$\frac{\pi}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_y(s_i) = 0 \quad (4.35)$$

Αρχικά, θεωρείται ένας αριθμός N αρκετά μεγάλος ώστε να υπάρχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Στην περίπτωση αυτού του προβλήματος θεωρείται $N=20$ λόγω αδυναμίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή να υπολογίσει τις τάσεις για μεγαλύτερο N εισάγονται τα δεδομένα στο πρόγραμμα, δηλαδή $\kappa=3-4n$ που ισχύει για επίπεδη

παραμόρφωση, οι 4.21, 4.22, η συνάρτηση βάρους, η θεμελιώδης συνάρτηση, και οι εξισώσεις 4.34 και 4.35. Δημιουργείται ένα σύστημα με τις εξισώσεις 4.34 και 4.35 και επιλύεται το σύστημα που δημιουργείται, δηλαδή ένας πίνακας 20×0 , προκύπτοντας η άγνωστη συνάρτηση $\varphi_y(s_i)$ συναρτήσει των c , ν , σ και μ , όπου $c = d/\alpha$ και δείχνει πόσο μακριά είναι η ρωγμή από την επιφάνεια, ν ο λόγος Poisson, μ το μέτρο διάτμησης και $\sigma_{yy}^\infty(x)$ η εφελκυστική τάση που εφαρμόζουμε αρχικά στο στοιχείο.

Στην συνέχεια, γίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $\varphi_y(s_i)$ με τα αντίστοιχα s_i , για διάφορες τιμές του c από 1,01 έως 4, κάνοντας πρώτα την κατάλληλη αδιαστατοποίηση, δηλαδή διαιρώντας τα $\varphi_y(s_i)$ με $\sigma_{yy}^\infty(x) \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}$.

Επίσης, έγινε το διάγραμμα με τα $\varphi(s) \cdot w(i)$ και s_i , για διάφορες τιμές του c από 1,01 έως 4, που αναπαριστά τα σημεία της πυκνότητας της ρωγμής. Ομοίως, για αυτό το διάγραμμα έγινε την κατάλληλη αδιαστατοποίηση, δηλαδή διαιρώντας τα $\varphi_y(s_i) \cdot w(i)$ με $\sigma_{yy}^\infty(x) \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}$.

Στην συνέχεια, από την εξίσωση 4.25 υπολογίζοντας με γραμμική παρεμβολή όπως έγινε και για την ρωγμή στο άπειρο χωρίο δημιουργείται η γραφική παράσταση των σημείων του ανοίγματος της ρωγμής μόνο για το πάνω μέρος της (αφού είναι συμμετρική ως προς τον οριζόντιο άξονα) και για διάφορες τιμές του c ομοίως με πριν από 1,01 έως 4.

Όσο αναφορά τις τάσεις υπολογίζονται από τους εξής τύπους:

$$\bar{\sigma}_{xx}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \{b_x(\xi) \cdot G_{xxx}(x, y; \xi) + b_y(\xi) \cdot G_{yxx}(x, y; \xi)\} \quad (4.37.\alpha)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \{b_x(\xi) \cdot G_{xyy}(x, y; \xi) + b_y(\xi) \cdot G_{yyy}(x, y; \xi)\} \quad (4.37.\beta)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \{b_x(\xi) \cdot G_{xxy}(x, y; \xi) + b_y(\xi) \cdot G_{yxy}(x, y; \xi)\} \quad (4.37.\gamma)$$

Τα μεγέθη G_{ijk} , ονομάζονται συναρτήσεις επιρροής και δίνονται από τους τύπους:

$$G_{xxx} = y \left\{ -\frac{1}{r_1^2} - \frac{2x_1^2}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2x_2^2}{r_2^4} - \frac{4\xi x_2}{r_2^4} + \frac{4\xi^2}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^3}{r_2^6} - \frac{16\xi^2 x_2^2}{r_2^6} \right\} \quad (4.38.\alpha)$$

$$G_{xyy} = y \left\{ -\frac{1}{r_1^2} - \frac{2x_1^2}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2x_2^2}{r_2^4} + \frac{12\xi x_2}{r_2^4} - \frac{4\xi^2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^3}{r_2^6} + \frac{16\xi^2 x_2^2}{r_2^6} \right\} \quad (4.38.\beta)$$

$$G_{xxy} = -\frac{x_1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4} + \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{2\xi}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^2}{r_2^4} - \frac{12\xi^2 x_2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^4}{r_2^6} + \frac{16\xi^2 x_2^3}{r_2^6} \quad (4.38.\gamma)$$

$$G_{yxx} = -\frac{x_1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4} + \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{2\xi}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} - \frac{8\xi x_2^2}{r_2^4} + \frac{12\xi^2 x_2}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^4}{r_2^6} - \frac{16\xi^2 x_2^3}{r_2^6} \quad (4.38.\delta)$$

$$G_{yyy} = +\frac{3x_1}{r_1^2} - \frac{2x_1^3}{r_1^4} - \frac{3x_2}{r_2^2} - \frac{2\xi}{r_2^2} + \frac{2x_2^3}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^2}{r_2^4} - \frac{12\xi^2 x_2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^4}{r_2^6} + \frac{16\xi^2 x_2^3}{r_2^6} \quad (4.38.\epsilon)$$

$$G_{yxy} = y \left\{ -\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2x_2^2}{r_2^4} - \frac{4\xi x_2}{r_2^4} + \frac{4\xi^2}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^3}{r_2^6} - \frac{16\xi^2 x_2^2}{r_2^6} \right\} \quad (4.38.\zeta)$$

Με $x_1 = x - \xi$, $x_2 = x + \xi$, $r^2 = x^2 + y^2$, $r_1^2 = x_1^2 + y^2$ και $r_2^2 = x_2^2 + y^2$

Από τους τύπους των τάσεων διατηρήθηκε μόνο το $b_y(\xi)$ καθώς μελετάται η ρωγμή όπου το διάνυσμα burgers είναι κάθετο στην ρωγμή και αντικαθιστώντας το με τον τύπο $b_y(x, y) = \int_{-a}^{+a} B_y(\xi) d\xi$, οι τάσεις γίνονται:

$$\bar{\sigma}_{xx}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-a}^{+a} B_y(\xi) \cdot G_{yxx}(x, y; \xi) d\xi \quad (4.39.\alpha)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-a}^{+a} B_y(\xi) G_{yy}(x, y; \xi) d\xi \quad (4.39.\beta)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-a}^{+a} B_y(\xi) G_{xy}(x, y; \xi) d\xi \quad (4.39.\gamma)$$

Άρα και από τις συναρτήσεις επιρροής χρησιμοποιήθηκαν μόνο οι τύποι G_{yxx} , G_{yy} , G_{xy} .

Ομοίως, έγινε και εδώ κανονικοποίηση θέτοντας και αντικαθιστώντας $\xi = z \cdot a$, $y = Y \cdot a$, $x = X \cdot a$ ώστε να έχουμε αδιάστατα μεγέθη και οι απαιτούμενες απλοποιήσεις οι τάσεις παίρνουν την τελική τους μορφή:

$$\bar{\sigma}_{xx}(X, Y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-1}^{+1} a \cdot B_y(z) \cdot G_{yxx}(X, Y; z) dz \quad (4.40.\alpha)$$

$$\bar{\sigma}_{yy}(X, Y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-1}^{+1} a \cdot B_y(z) G_{yy}(X, Y; z) dz + 1 \quad (4.40.\beta)$$

$$\bar{\sigma}_{xy}(X, Y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-1}^{+1} a \cdot B_y(z) G_{xy}(X, Y; z) dz \quad (4.40.\gamma)$$

Οι τάσεις θα είναι και αυτές μεγέθη που εξαρτώνται από το c , γι' αυτό υπολογίστηκαν για δύο διαφορετικά c , μία τιμή κοντά στο 1, που δείχνει την ρωγμή κοντά στην επιφάνεια και μια τιμή του c αρκετά μεγάλη ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι όπως η περίπτωση σε άπειρο χωρίο.

Τέλος, για τα άκρα της ρωγμής υπολογίστηκε ο παράγοντας έντασης τάσης. Η τιμή της $\varphi_y(s_i)$ στα άκρα υπολογίζεται από τους τύπους:

$$\varphi(+1) = M_E(+1) \cdot \sum_{i=1}^N \Phi_E(+1) \cdot \varphi(s_i) \quad (4.41.\alpha)$$

$$\varphi(-1) = M_E(-1) \cdot \sum_{i=1}^N \Phi_E(-1) \cdot \varphi(s_{N+1+i}) \quad (4.41.\beta)$$

με κατάλληλη αδιαστατοποίηση όπως πριν, δηλαδή διαιρώντας τα $\varphi_y(s_i)$ με $\sigma_{yy}^\infty(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$.

Με τις σταθερές $M_E(\pm 1)$ και τις συναρτήσεις $\Phi_E(\pm 1)$ να λαμβάνονται από τον πίνακα 4.3 για $n = 1$ στην προκειμένη περίπτωση:

$$M_E(\pm 1) = \frac{1}{N} \quad (4.42)$$

$$\Phi_E(\pm 1) = \frac{\sin[\frac{2i-1}{4N}\pi(2N-1)]}{\sin[\frac{2i-1}{4N}\pi]} \quad (4.43)$$

Οι τιμές για τον συντελεστή έντασης τάσεις λήφθηκαν από τον τύπο 4.30:

$$K_I(\pm 1) = \pm \sqrt{\pi \alpha} \frac{2\mu}{\kappa+1} \varphi_y(\pm 1) \quad (4.44)$$

Για $\alpha=1$ καθώς είναι επιθυμητή η τιμή στο άκρο της ρωγμής, και ομοίως πολλαπλασιάζοντας τα $\varphi_y(s_i)$ με $\frac{\kappa+1}{2\mu}$.

Κεφάλαιο 5 Πίνακες - Διαγράμματα – Συμπεράσματα

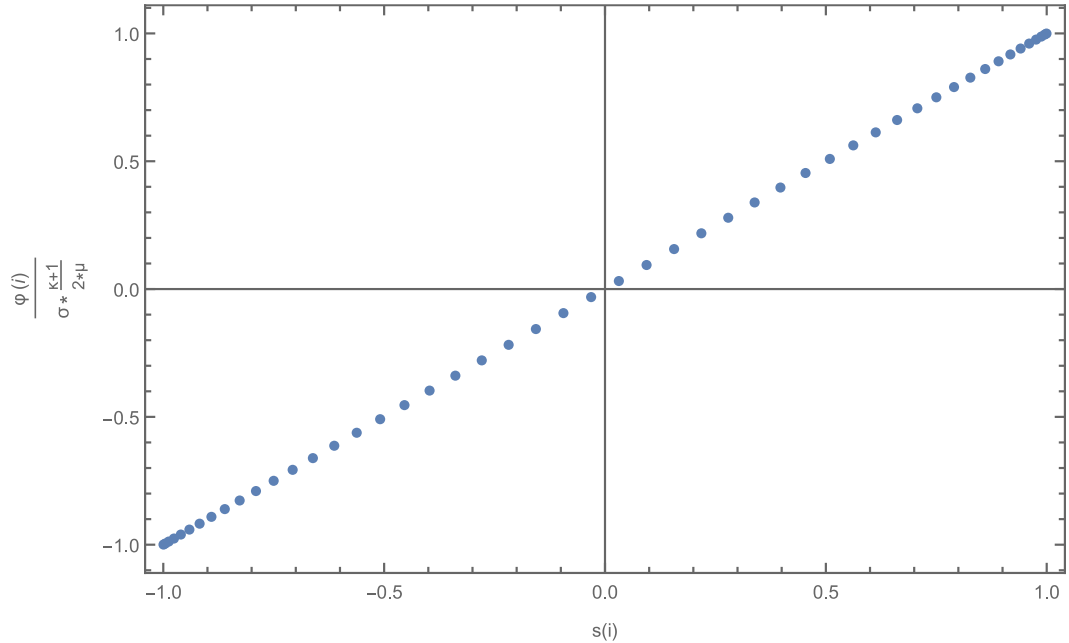
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα διαγράμματα, τα αριθμητικά αποτελέσματα και η σύγκριση των αποτελεσμάτων των διαγραμμάτων από την εφαρμογή της μεθόδου των διανεμημένων εξαρμώσεων για την επίλυση των προβλημάτων σε άπειρο και ημιεπίπεδο χωρίο.

5.1 Ρωγμή σε άπειρο χωρίο

Στις γραφικές παραστάσεις και στα σχήματα τάσεων που ακολουθούν, είναι υπολογισμένο μόνο το πάνω μισό της ρωγμής λόγω συμμετρίας ώστε να είναι πιο γρήγορα και εύκολα υπολογίσιμα τα γραφήματα και τα σχήματα από το πρόγραμμα. Ας τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι σε όλα τα σχήματα των τάσεων ο κατακόρυφος άξονας δεν ξεκινάει από το χείλος της ρωγμής αλλά σε απόσταση 0,05 καθώς το χείλος της ρωγμής αποτελεί ένα ιδιόμορφο σημείο το οποίο επηρεάζει τα αποτελέσματα των υπολογισμών των διαγραμμάτων τάσεων. Με την επίλυση του ομογενούς συστήματος προκύπτουν τα άγνωστα $\varphi_y(s_i)$. Η λύση συνέκλινε με N=50 σημεία ταξιθεσίας (collocation points).

5.1.1 Γραφικές παραστάσεις

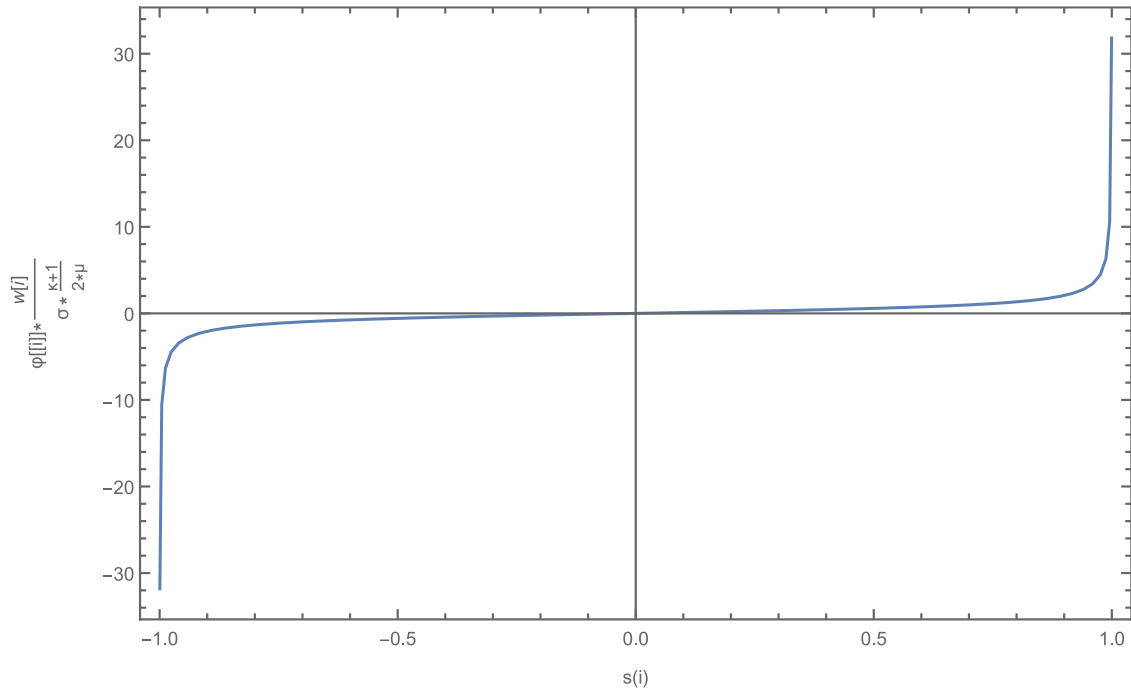
5.1.1.1 Γραφική παράσταση της άγνωστης συνάρτησης $\varphi_y(s_i)$ με τα s_i



Σχήμα 5.1.1: Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) - s_i$.

Το s_i έχει τιμές από $[-1,+1]$, είναι δηλαδή κατά μήκος του ανοίγματος της ρωγμής καθώς και το $\varphi_y(s_i)$ παίρνει τιμές στο ίδιο διάστημα αφού έχει γίνει η αδιαστατοποίηση κατά τον υπολογισμό του με διαίρεση $\sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{(\kappa+1)}{2\mu}$. Παρατηρείται ο τρόπος που συμπεριφέρεται η συνάρτηση κατά μήκος της ρωγμής είναι γραμμικός. Μηδενίζεται στο κέντρο της ρωγμής και φτάνει τις μέγιστες τιμές της στα άκρα. Υπάρχει αντισυμμετρία ως προς τον y άξονα, δηλαδή, η συνάρτηση $\varphi_y(s_i)$ έχει ίση και αντίθετη τιμή για την ίδια απόσταση δεξιά και αριστερά από το κέντρο της ρωγμής. Αυτό φαίνεται λογικό καθώς υπάρχει συμμετρία στην φόρτιση, την ρωγμή αλλά και ομοιομορφία στο υλικό.

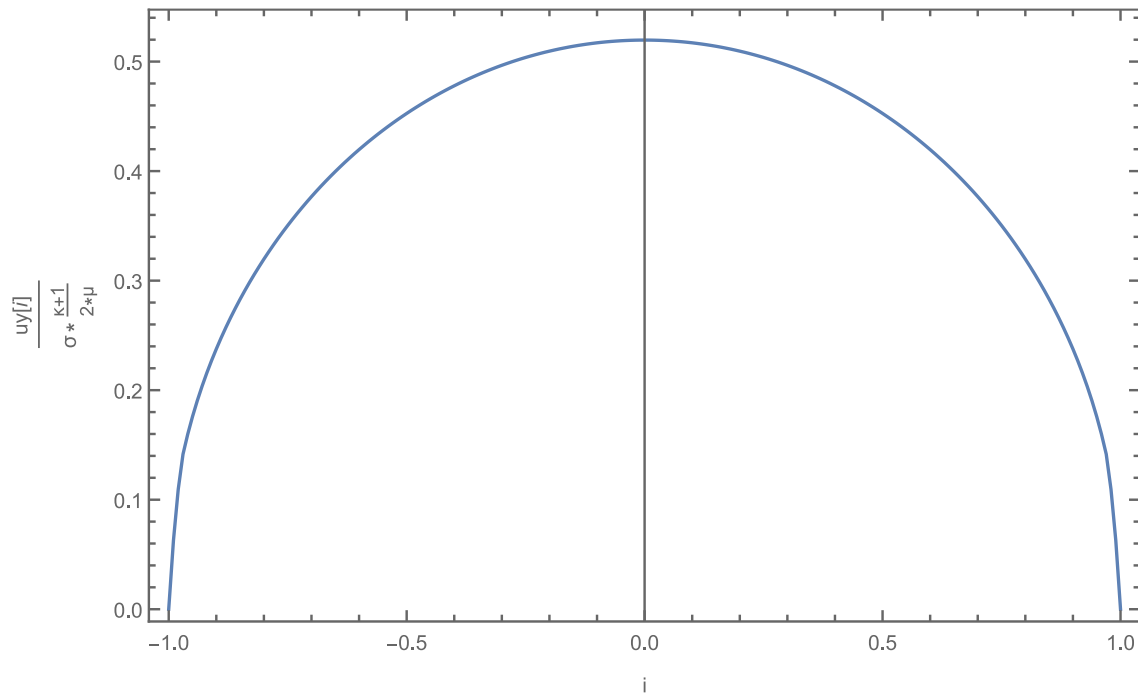
5.1.1.2 Γραφική παράσταση της πυκνότητας κατά μήκος της ρωγμής



Σχήμα 5.1.2: Γραφική παράσταση $\phi_y(s_i) \cdot w_i - s_i$.

Στο σχήμα 5.1.2 φαίνεται πως μεταβάλλεται η πυκνότητα κατά μήκος της ρωγμής και παρατηρείται ότι αυξάνεται απότομα στα άκρα ενώ όσο προχωράει προς το κέντρο μειώνεται πιο ομαλά ενώ στο κέντρο της μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει γιατί στα άκρα της ρωγμής οι τάσεις είναι ιδιόμορφες καθώς τείνουν στο άπειρο. Η μέγιστη τιμή της πυκνότητας είναι στα άκρα και φτάνει τα $31.8205 \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$ ενώ η ελάχιστη όπως φαίνεται να είναι 0 και βρίσκεται στο κέντρο των αξόνων. Η κλίση της γραφικής παράστασης δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $\phi_y(s)$ ως προς κάθε σημείο του μήκους της ρωγμής, συνεπώς οι μικρές κλίσεις δείχνουν ότι η πυκνότητα μεταβάλλεται με πιο αργό ρυθμό, ενώ όσο προχωράμε προς τα άκρα έχουμε απότομη κλίση που εκφράζει ταχύτερες μεταβολές της πυκνότητας.

5.1.1.1 Γραφική παράσταση του ανοίγματος της ρωγμής



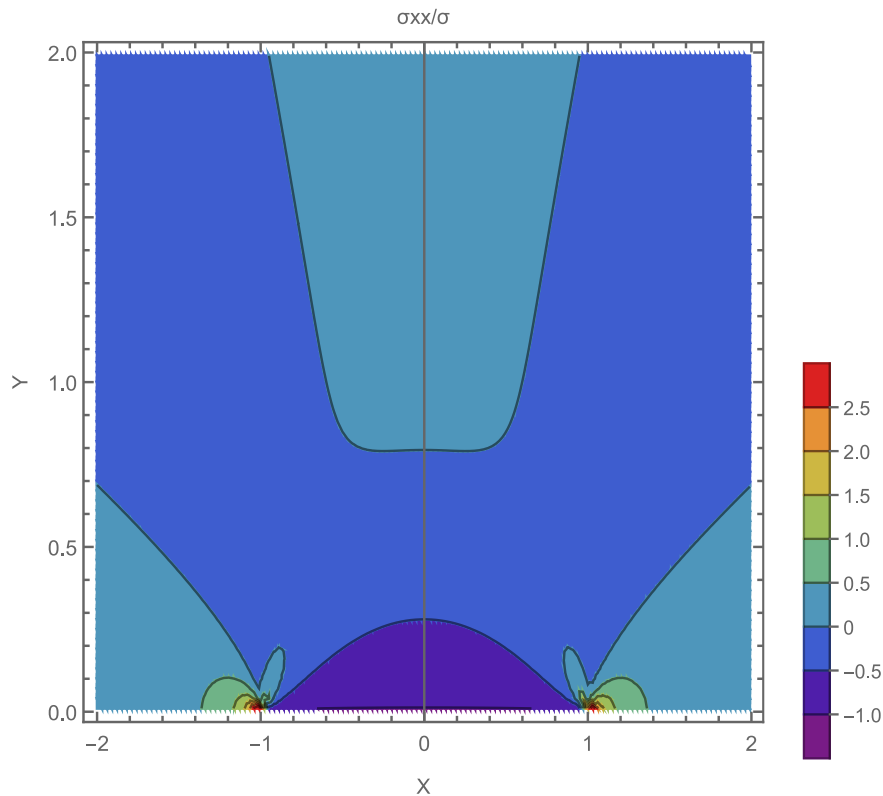
Σχήμα 5.1.3: Γραφική παράσταση $u_y(i) - s_i$.

Στο σχήμα 5.1.3 φαίνεται το άνοιγμα της ρωγμής για όλο το μήκος της, όπου στα άκρα είναι μηδενικό ενώ όσο προχωράμε προς το κέντρο έχει το μέγιστο άνοιγμα. Η μέγιστη τιμή του ανοίγματος είναι $0.52 \cdot \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$. Παρατηρείται ότι το άνοιγμα της ρωγμής εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού και την εξωτερική απομακρυσμένη τάση που εφαρμόζεται.

5.1.2 Διαγράμματα Τάσεων

Σε όλα τα διαγράμματα τάσεων που ακολουθούν οι τάσεις είναι διαιρεμένες με την αρχική εφελκυστική τάση $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$ οπότε είναι αδιασταστοποιημένες.

5.1.2.1 Γραφική παράσταση του διαγράμματος τάσης σ_{xx} της ρωγμής



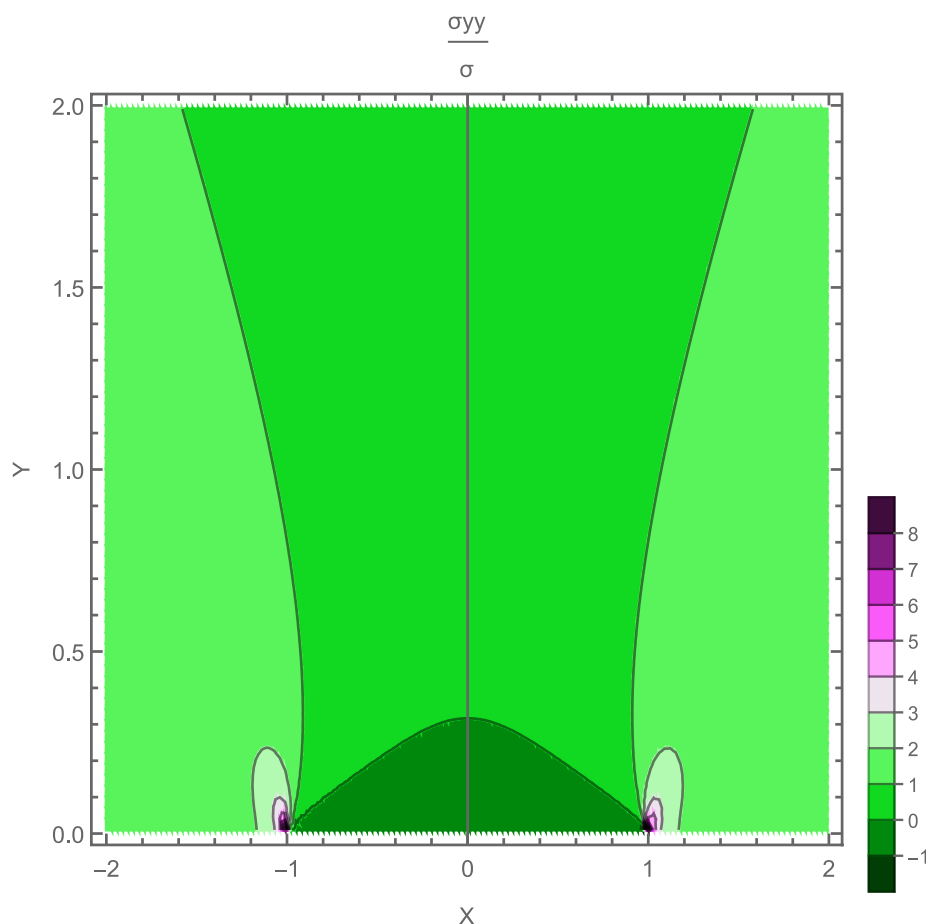
Σχήμα 5.1.4. Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xx} .

Στο σχήμα 5.1.4 παρουσιάζεται η μεταβολή των ορθών τάσεων σ_{xx} κατά μήκος της ρωγμής και όσο απομακρυνόμαστε από αυτή για ένα συνολικό εύρος $4a$. Το διάγραμμα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα $y-y'$ καθώς είμαστε σε άπειρο επίπεδο και οι τάσεις δεν επηρεάζονται από κάποιο σύνορο.

Παρατηρείται ότι οι τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής ($x=\pm 1$) αυξάνονται απότομα και απειρίζονται στο άκρο της. Όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα έξω οι τάσεις μειώνονται σταδιακά μηδενίζονται. Προς το κέντρο της ρωγμής, φαίνεται οι τάσεις επίσης να μειώνονται και να σταθεροποιούνται σε μια χαμηλή τιμή σε σχέση αυτή των κορυφών της ρωγμής κοντά στην τιμή 1.

Παρατηρείται ακόμη ότι οι τάσεις κοντά στο κέντρο της ρωγμής και καθώς απομακρυνόμαστε από τον άξονα της ρωγμής οι τάσεις μειώνονται κι άλλο και σχεδόν μηδενίζονται.

5.1.2.2 Γραφική παράσταση του διαγράμματος τάσης σ_{yy} της ρωγμής



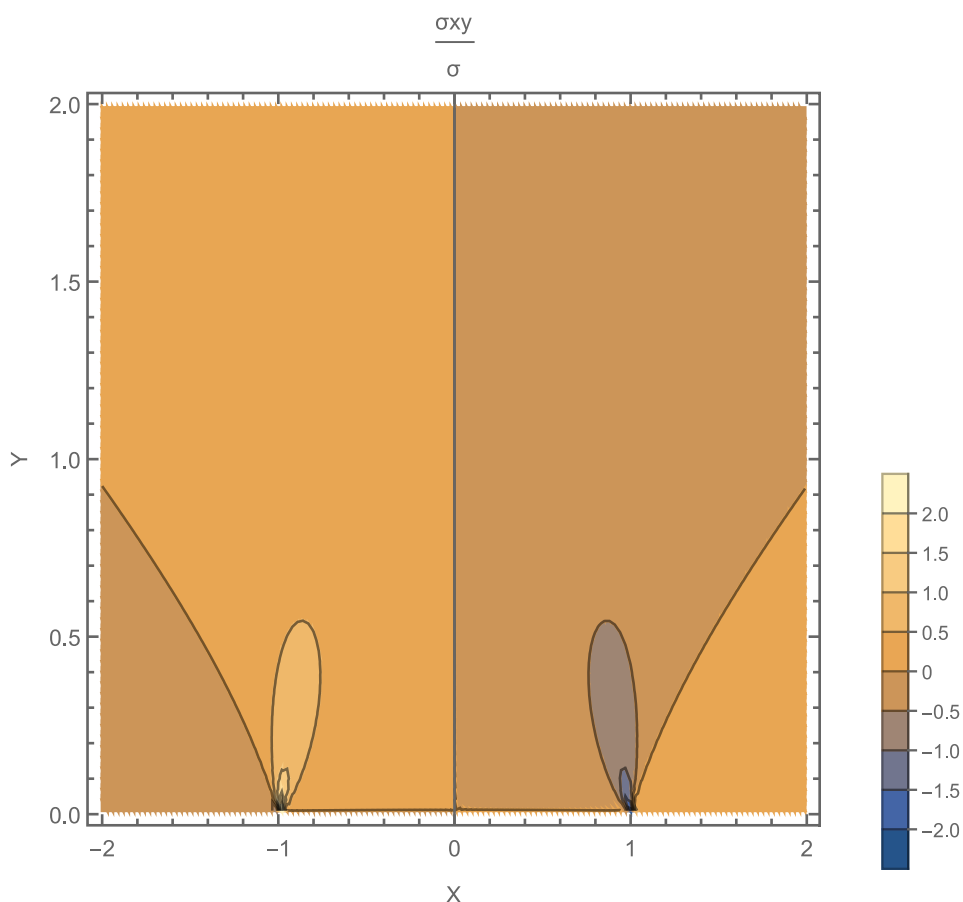
Σχήμα 5.1.5: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{yy} .

Στο σχήμα 5.1.5 παρουσιάζονται η μεταβολή των τάσεων σ_{yy} κατά μήκος της ρωγμής και όσο απομακρυνόμαστε από αυτή για ένα εύρος $4a$.

Παρατηρείται ότι οι τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής αυξάνονται πολύ ραγδαία και απειρίζονται ενώ όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα έξω από την ρωγμή οι τάσεις μειώνονται και σταθεροποιούνται σε μια χαμηλή τιμή κοντά στο 1. Προς το κέντρο της ρωγμής, φαίνεται οι τάσεις να είναι και εκεί χαμηλότερες από τις κορυφές της ρωγμής με τιμές κοντά στο 0,026. Παρατηρείται ακόμη ότι οι τάσεις στο εσωτερικό των ρωγμών με την απομάκρυνση από την επιφάνεια της ρωγμής προς τον άξονα y η τάση σταθεροποιείται κοντά στο 1.

Τέλος, φαίνεται ότι η τιμή της σ_{yy} είναι εμφανώς πολύ μεγαλύτερη από τις τιμές της σ_{xx} περίπου 3,2 φορές το οποίο φαίνεται λογικό καθώς παράλληλα στον άξονα y ασκείται η εξωτερική φόρτιση $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$. Επομένως, οι ορθές τάσεις σ_{yy} θα έχουν υψηλότερη συγκέντρωση τάσεων από τις ορθές τάσεις σ_{xx} .

5.1.2.3 Γραφική παράσταση του διαγράμματος τάσης σ_{xy} της ρωγμής



Σχήμα 5.1.6: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xy} .

Στο σχήμα 5.1.6 παρουσιάζονται η μεταβολή των διατμητικών τάσεων σ_{xy} κατά μήκος της ρωγμής και όσο απομακρυνόμαστε από αυτή για ένα εύρος 4α.

Παρατηρείται, ότι οι διατμητικές τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής αυξάνονται απότομα και απειρίζονται. Επίσης, αυξάνονται σε διαφορετική κατεύθυνση από τις άλλες δύο ορθές τάσεις, δηλαδή η τιμή αλλάζει σε κατεύθυνση παράλληλα με τον κατακόρυφο άξονα και όχι προς της κατεύθυνση του οριζόντιου άξονα. Όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα έξω από την ρωγμή οι τάσεις μειώνονται και σταθεροποιούνται σε τιμή κοντά στο 0.

Προς το κέντρο της ρωγμής, ομοίως οι τάσεις μειώνονται και σταθεροποιούνται σε τιμή κοντά στο 0.

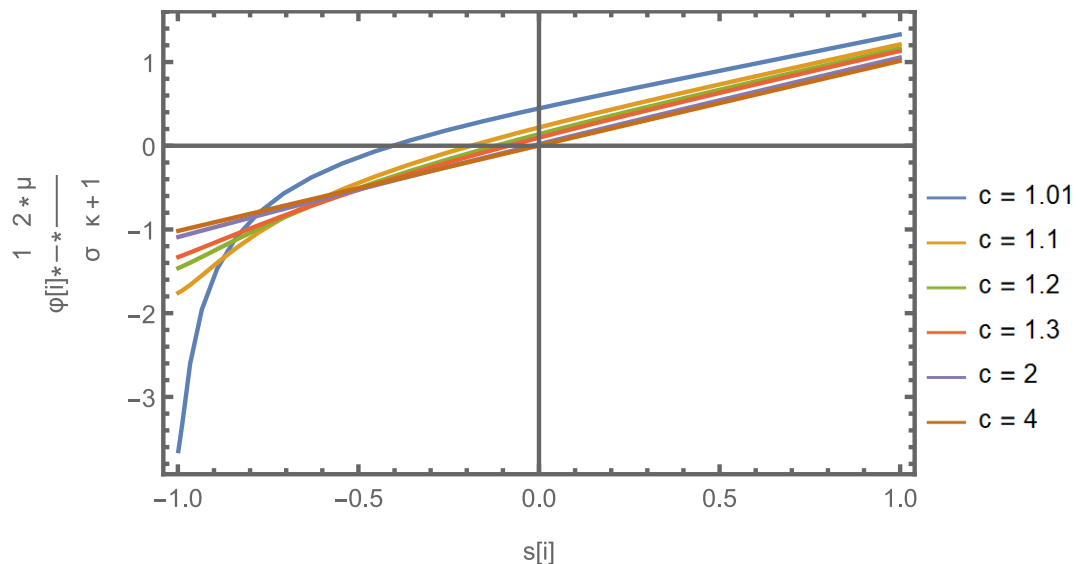
5.1.3 Συντελεστής έντασης τάσης (Stress Intensity Factor)

Η τιμή που προέκυψε για τον συντελεστή έντασης τάσης, ομοίως πολλαπλασιάζοντας τα $\varphi_y(s_i)$ με $\frac{\kappa+1}{2\mu}$ βγήκε ότι για ρωγμή με $\alpha=1$ είναι $K_I = 1.7725$ που συμπίπτει με την αναλυτική λύση της θεωρίας θραύσεων $K_I = \sqrt{\pi a}$. Παρατηρείται ότι ο συντελεστής έντασης τάσης εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης τάσης στα άκρα και την γεωμετρία της ρωγμής.

5.2 Ρωγμή σε ημιεπίπεδο

5.2.1 Γραφικές παραστάσεις

5.2.1.1 Γραφική παράσταση της άγνωστης συνάρτησης $\varphi_y(s_i)$ με τα s_i

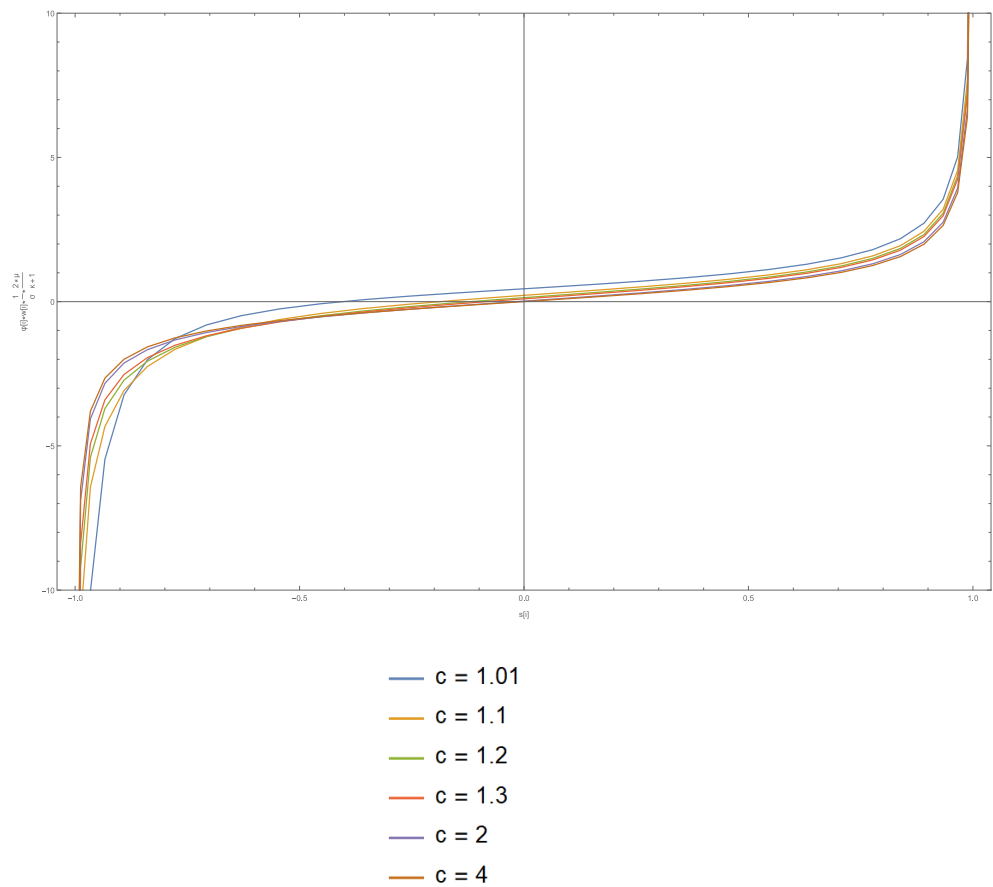


Σχήμα 5.2.1: Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) - s_i$ για διάφορες τιμές του c .

Στο σχήμα 5.2.1 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της άγνωστης συνάρτησης $\varphi_y(s_i)$ με τα αντίστοιχα s_i που παίρνει τιμές από $[-1, +1]$, είναι δηλαδή κατά μήκος του

ανοίγματος της ρωγμής. Η γραφική παράσταση παρουσιάζει τον τρόπο που συμπεριφέρεται η συνάρτηση κατά μήκος της ρωγμής για διάφορες τιμές του c . Η μπλε γραμμή αντιστοιχεί στο μικρότερο c , δηλαδή $c=1.01$ άρα η ρωγμή είναι πιο κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια και παρατηρείται ότι από το $s=+1$ όπου η $\varphi_y(s_i)$ παίρνει την μέγιστη θετική τιμή της $1,33 \cdot \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$, η γραμμή είναι σχεδόν ευθύγραμμη και περνάει πάνω από την αρχή των αξόνων περίπου στο $0,52 \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$ έως περίπου στην τιμή $s=-0,383$ όπου η $\varphi_y(s_i)$ πλησιάζει το 0 και στην συνέχεια αλλάζει σταδιακά κατεύθυνση και γίνεται καμπύλη γραμμή με την κλίση της να αυξάνεται έως ότου φτάσει στο άκρο -1 με μια \max τιμή $-3,63 \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$. Καθώς το c αυξάνεται, για κάθε επόμενη τιμή του έως να γίνει 2 η γραμμή πλησιάζει όλο και περισσότερο το κέντρο των αξόνων και την τιμή $+1 \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$ στο άκρο $s=+1$, τέμνοντάς το $(0,0)$ για $c=4$. Ακόμη, η κλίση των ευθειών μειώνεται έως την περίπτωση του $c=4$, όπου η ευθεία ταυτίζεται με την περίπτωση του ίδιου γραφήματος στο άπειρο χωρίο, όπου υπάρχει συμμετρία και η μέγιστη τιμή της $\varphi_y(s_i)$ για $s=\pm 1$ είναι ± 1 .

5.2.1.2 Γραφική παράσταση της πυκνότητας

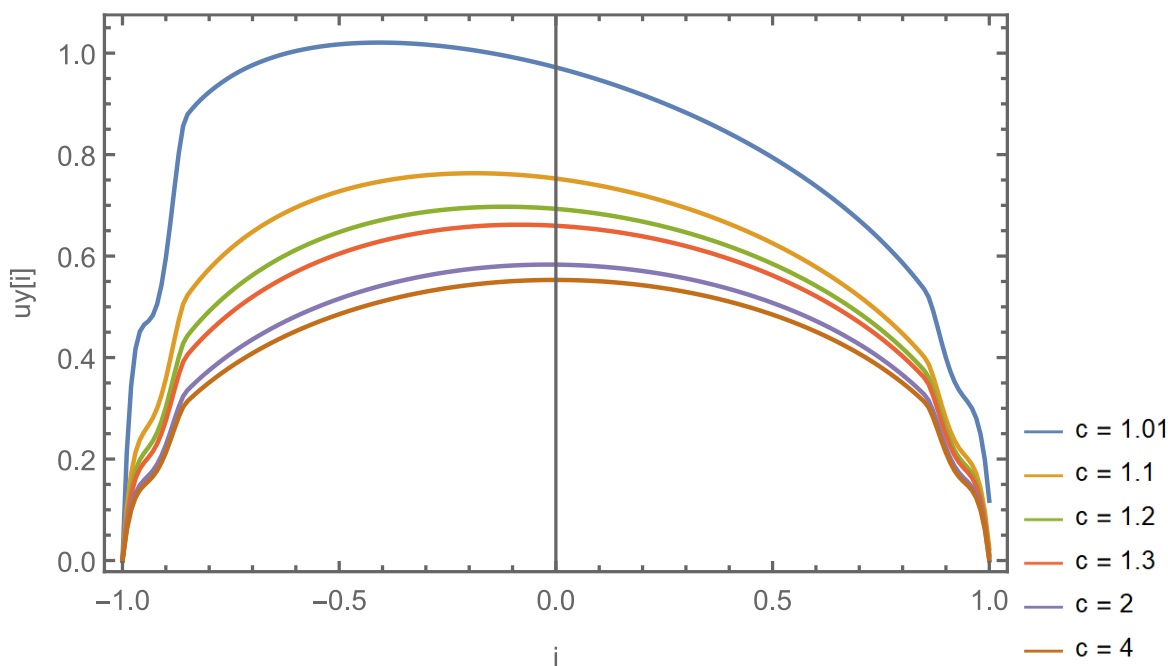


Σχήμα 5.2.2: Γραφική παράσταση $\varphi_y(s_i) \cdot w_i - s_i$ για διάφορες τιμές του c .

Στο σχήμα 5.2.2 φαίνεται η πυκνότητα η οποία δείχνει πως μεταβάλλεται η πυκνότητα κατά μήκος της ρωγμής. Γενικά, παρατηρείται ότι η μορφή των γραμμών είναι η ίδια, δηλαδή ότι αυξάνεται απότομα και γίνεται σχεδόν κάθετη στα άκρα ενώ όσο προχωράει προς το κέντρο η κλίση μειώνεται. Ομοίως με την γραφική παράσταση 5.2.1 η μπλε γραμμή που αντιστοιχεί στο μικρότερο $c=1.01$ (η ρωγμή είναι πιο κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια) παίρνει την μέγιστη τιμή για $s=+1$ $B_y=16.92 \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$ και για $s=-1$ $B_y=-46.27 \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$ και τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στην τιμή 0.52 και στον οριζόντιο στην τιμή περίπου στην τιμή $s=-0.383$ η πυκνότητα πλησιάζει το 0. Για τιμές έως $c=2$ οι γραμμές ξεκινούν πάνω από την αρχή των αξόνων και καθώς το c αυξάνεται πλησιάζουν το κέντρο των αξόνων. Αυτό συμβαίνει λόγω της ύπαρξης του συνόρου στο ένα άκρο και επηρεάζει την συγκέντρωση τάσεων και την συμμετρία που είχε πριν η ρωγμή. Επίσης, φαίνεται ότι καθώς το c αυξάνεται η απότομη μεταβολή της πυκνότητας στα άκρα γίνεται πιο κοντά στις κορυφές της ρωγμής στην δεξιά πλευρά όπως και στην αριστερή πλευρά. Τέλος, για $c=4$ η γραμμή πλησιάζει την περίπτωση

της ρωγμής σε άπειρο χωρίο, όπου παρουσιάζει συμμετρία, τέμνοντας τους άξονες στην αρχή των αξόνων και έχοντας την μέγιστη τιμή στα άκρα με τιμή κοντά στο $13 * \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$.

5.2.1.3 Γραφική παράσταση του ανοίγματος της ρωγμής



Σχήμα 5.2.3. Γραφική παράσταση ανοίγματος της ρωγμής για διάφορες τιμές του c .

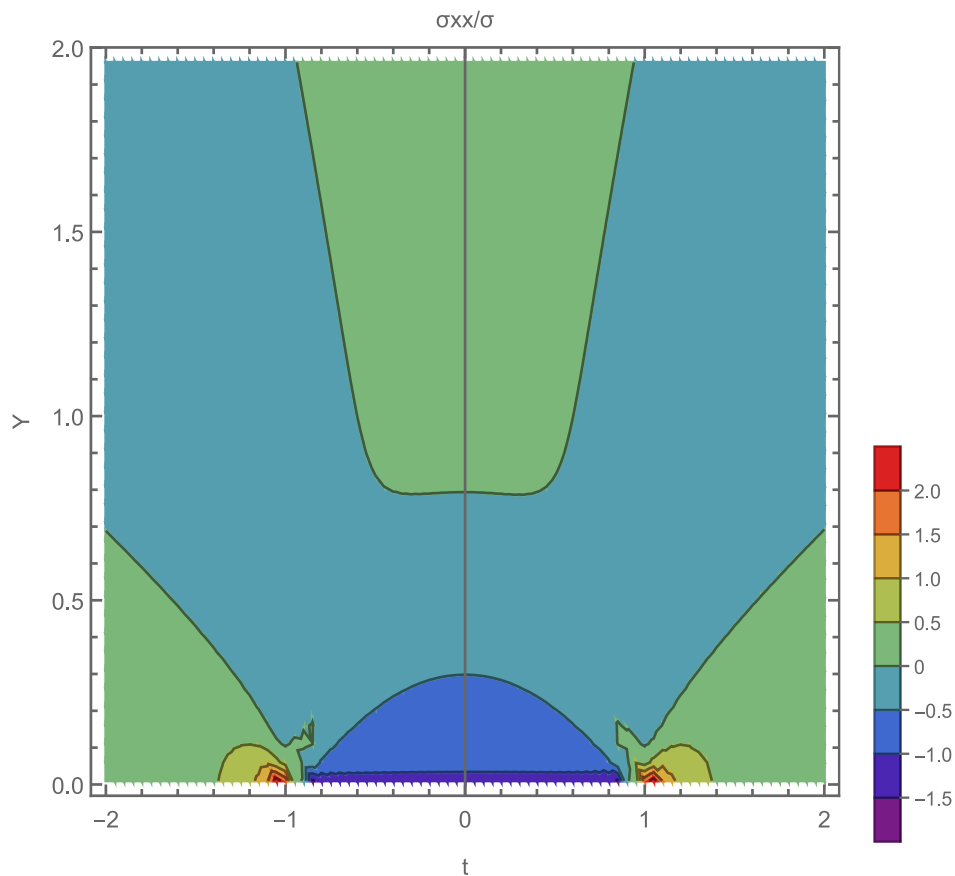
Στην γραφική παράσταση του σχήματος 5.2.3 φαίνεται το άνοιγμα της ρωγμής για όλο το μήκος της για διάφορες τιμές του c από 1.01 έως 4. Παρατηρείται, ότι για την μικρότερη τιμή του $c = 1.01$, το άνοιγμα της ρωγμής είναι μεγαλύτερο προς την πλευρά που βρίσκεται κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια, δηλαδή για $i = -0.41$ παίρνοντας τιμή $u_y = 1,021 * \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$. Το σχήμα της ρωγμής που προέκυψε διαφέρει έχοντας ιδιαίτερο σχήμα από τις άλλες περιπτώσεις που η ρωγμή είναι όλο και πιο μακριά από το ελεύθερο όριο το οποίο μπορεί να δικαιολογηθεί εξαιτίας της πολύ μικρής απόστασης από το σύνορο δημιουργώντας κάποιο πρόβλημα με το πρόγραμμα, ή και λόγω της χρήσης μόνο 20 σημείων ταξιοθεσίας για τον υπολογισμό τους μειώνοντας την ακρίβεια. Καθώς αυξάνονται τα c το μέγιστο άνοιγμα της ρωγμής μετατοπίζεται προς το κέντρο των αξόνων. Ενώ, για τιμή $c = 4$ η καμπύλη συμπίπτει με αυτή της καμπύλης του άπειρου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα 5.1.3 δηλαδή είναι

συμμετρική με μέγιστο άνοιγμα στο μέσο της ρωγμής με τιμή $u_y = 0,55 \cdot \sigma_{yy}^{\infty}(x) \frac{\kappa+1}{2\mu}$. Σε κάθε περίπτωση στα άκρα της ρωγμής οι γραμμές καταλήγουν στο 0, αφού η ρωγμή κλείνει.

5.2.2 Διαγράμματα Τάσεων

Σε όλα τα διαγράμματα τάσεων που ακολουθούν οι τάσεις είναι αδιαστατοποιημένες έχοντας διαιρέσει με την αρχική εφελκυστική τάση $\sigma_{yy}^{\infty}(x)$.

5.2.2.1 Διαγράμματα Τάσεων σ_{xx} για $c=10$

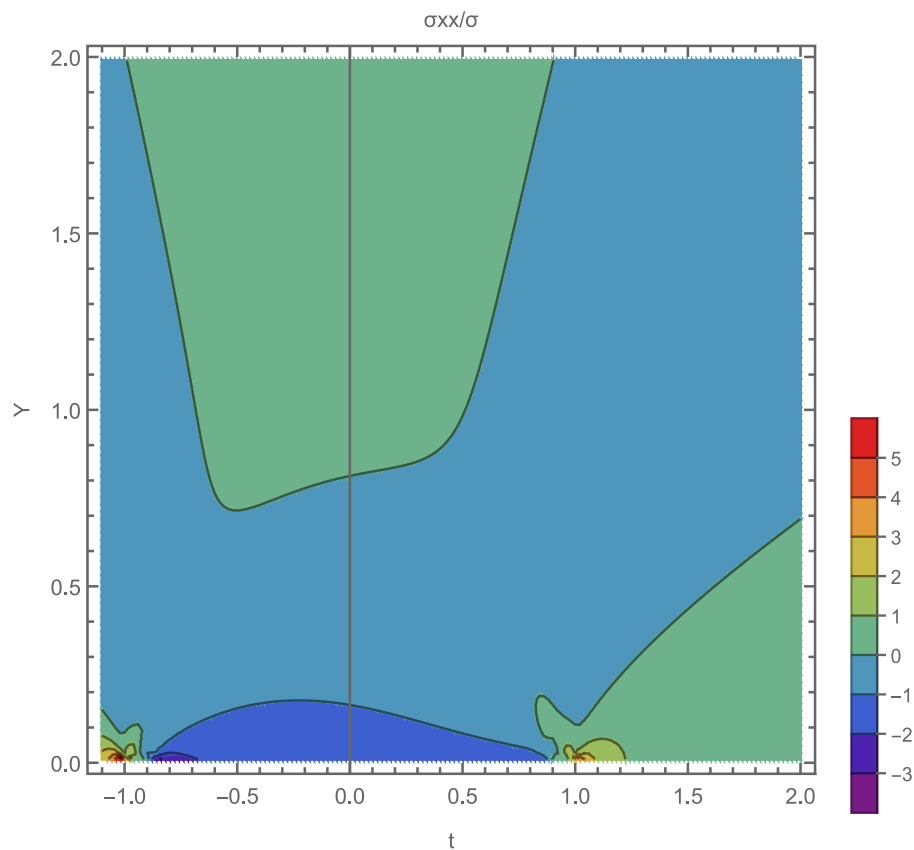


Σχήμα 5.2.4.α: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xx} για $c=10$.

Στο σχήμα 5.2.4.α παρουσιάζεται η μεταβολή των ορθών τάσεων για $c=10$ που δείχνει την ρωγμή σε μια απόσταση μακριά από το σύνορο του επιπέδου για ένα συνολικό εύρος 4α. Παρατηρούμε ότι το σχήμα 5.2.4.α είναι συμμετρικό και μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με το σχήμα 5.1.4. Παρατηρείται ότι οι τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής ($x=\pm 1$) αυξάνονται απότομα και απειρίζονται ενώ όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα έξω οι τάσεις μειώνονται

σταδιακά και σταθεροποιούνται σε μια χαμηλότερη τιμή κοντά στο 0. Προς το κέντρο της ρωγμής, φαίνεται οι τάσεις επίσης να μειώνονται και να σταθεροποιούνται και αυτές σε μια χαμηλή τιμή σε σχέση αυτή των κορυφών της ρωγμής κοντά στην τιμή 1. Παρατηρείται ακόμη ότι οι τάσεις στο εσωτερικό των ρωγμών με την απομάκρυνση από την επιφάνεια της ρωγμής προς τον άξονα y οι τάσεις μειώνονται κι άλλο και σχεδόν μηδενίζονται.

5.2.2.1 Διαγράμματα Τάσεων σ_{xx} για $c=1.1$

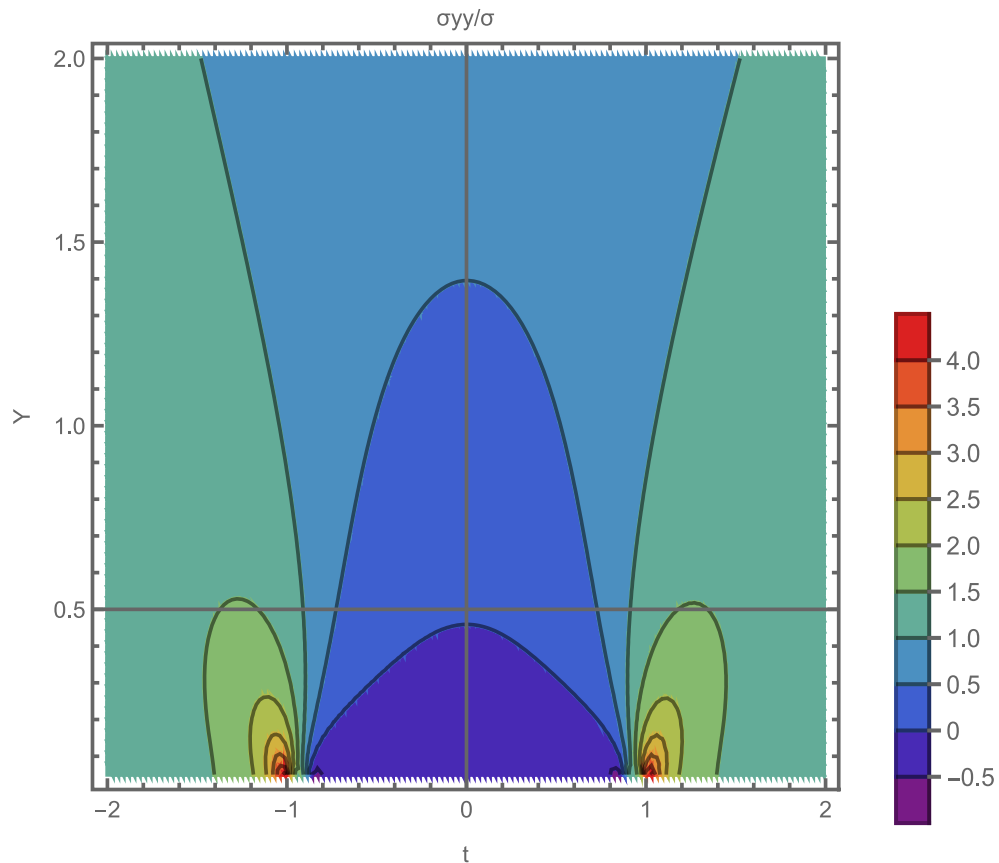


Σχήμα 5.2.4.β: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xx} για $c=1.1$.

Στο σχήμα 5.2.5 που έχει δημιουργηθεί για $c=1.1$ φαίνεται ότι δεν υπάρχει συμμετρία καθώς οι τάσεις επηρεάζονται από το σύνορο που υπάρχει στην αριστερή πλευρά της ρωγμής. Επίσης, παρατηρείται ότι οι τάσεις για $t=+1.0$ αυξάνονται απότομα και απειρίζονται και στην συνέχεια μέχρι $t=2.0$ μειώνονται και σταθεροποιούνται με χαμηλότερη τιμή κοντά στο 0. Αντίθετα, για $t=-1.0$ και έως $t=-1.1$ ομοίως αυξάνονται απότομα και απειρίζονται έχοντας γύρω από την κορυφή τιμές μεγαλύτερες από το άκρο $t=+1$. Όσο προχωράμε προς το κέντρο της ρωγμής οι τάσεις μειώνονται και σταθεροποιούνται σε μια χαμηλότερη τιμή κοντά στο -

1. Τέλος, για το διάστημα από την επιφάνεια της ρωγμής προς το $y=+2$ οι τάσεις μειώνονται και σταθεροποιούνται κοντά στην τιμή 0.

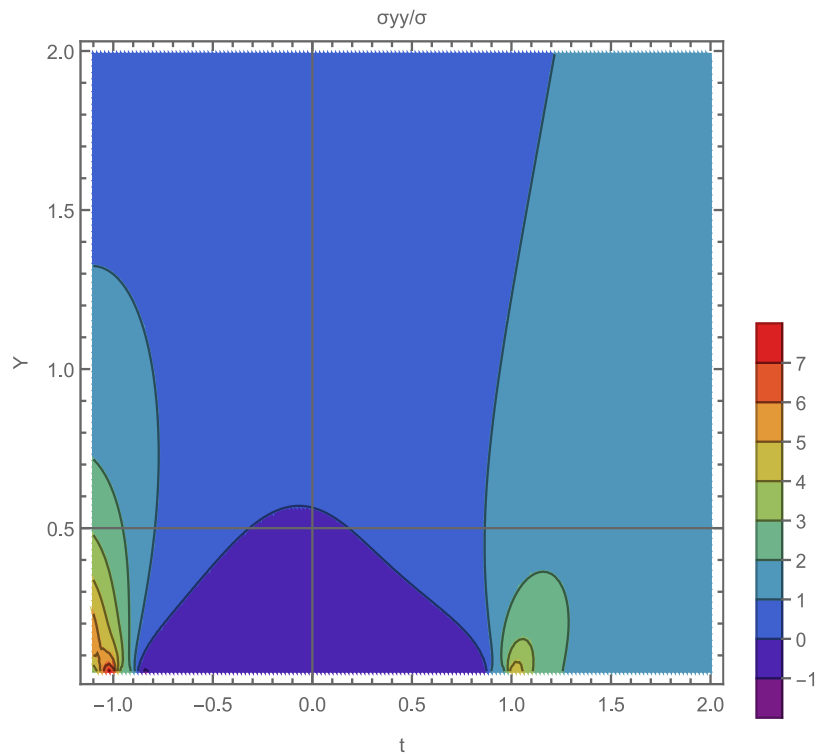
5.2.2.1 Διαγράμματα Τάσεων σ_{yy} για $c=10$.



Σχήμα 5.2.5.α: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{yy} για $c=10$.

Στο σχήμα 5.2.5.α παρουσιάζεται η μεταβολή των ορθών τάσεων για $c=10$ που δείχνει την ρωγμή σε μια απόσταση μακριά από το σύνορο του επιπέδου για ένα συνολικό εύρος 4α. Παρατηρούμε ότι το σχήμα 5.2.5.α είναι συμμετρικό και μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με το σχήμα 5.1.5. Παρατηρείται ότι οι τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής ($t=\pm 1$) αυξάνονται απότομα και απειρίζονται ενώ όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα έξω οι τάσεις μειώνονται σταδιακά και σταθεροποιούνται σε μια χαμηλότερη τιμή κοντά στο 1. Προς το κέντρο της ρωγμής, φαίνεται οι τάσεις επίσης να μειώνονται και να σταθεροποιούνται και αυτές σε μια χαμηλή τιμή σε σχέση αυτή των κορυφών της ρωγμής περίπου 0,065. Παρατηρείται ακόμη ότι οι τάσεις στο εσωτερικό των ρωγμών με την απομάκρυνση από την επιφάνεια της ρωγμής προς τον άξονα y οι τάσεις αυξάνονται σταδιακά και φτάνουν την τιμή 1.

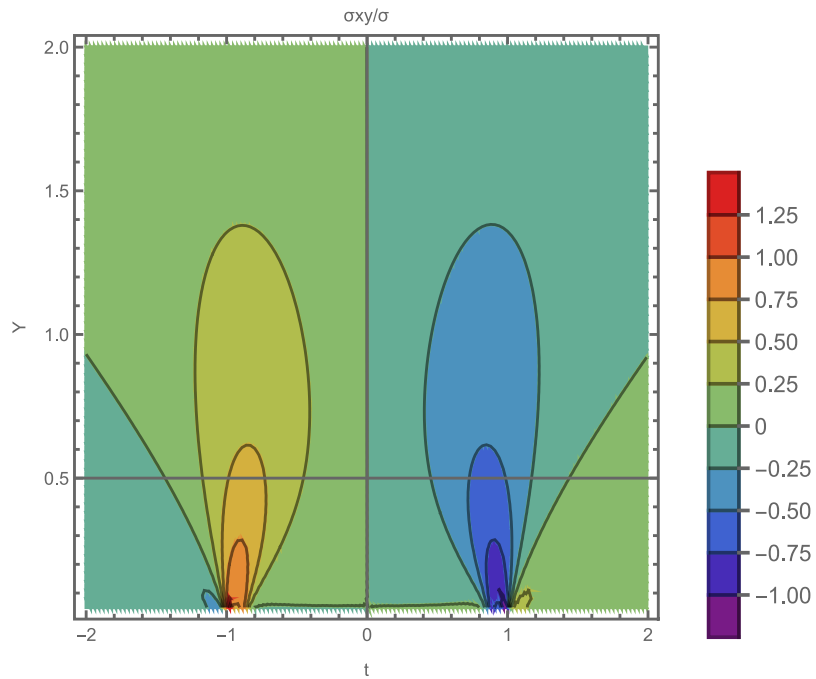
5.2.2.2 Διαγράμματα Τάσεων σ_{yy} για $c=1.1$



Σχήμα 5.2.5.β: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{yy} για $c=1.1$.

Στο σχήμα 5.2.5.β που έχει δημιουργηθεί για $c=1.1$ φαίνεται ότι δεν υπάρχει συμμετρία καθώς οι τάσεις επηρεάζονται από το σύνορο που υπάρχει στην αριστερή πλευρά της ρωγμής. Επίσης, παρατηρείται ότι οι τάσεις για $t=1.0$ αυξάνονται απότομα και απειρίζονται και στην συνέχεια μέχρι $t=2.0$ μειώνονται και σταθεροποιούνται με χαμηλότερη τιμή κοντά στο 1,0. Αντίθετα, για $t=-1.0$ και έως $t=-1.1$ ομοίως αυξάνονται απότομα και απειρίζονται έχοντας μεγαλύτερες τιμές γύρω από το άκρο σε σχέση με το $t=+1$ και διατηρώντας την αυξημένη τιμή της για μεγαλύτερη έκταση. Προς το κέντρο της ρωγμής οι τάσεις μειώνονται και σταθεροποιούνται σε μια χαμηλότερη τιμή κοντά στο -0,37. Τέλος, για το διάστημα από την επιφάνεια της ρωγμής προς το $y=+2$ οι τάσεις αυξάνονται και σταθεροποιούνται κοντά στην τιμή 1. Στην ελεύθερη επιφάνεια οι τάσεις μειώνονται καθώς απομακρύνεται από το (-1.1,0) και σταθεροποιούνται κοντά στο 1.

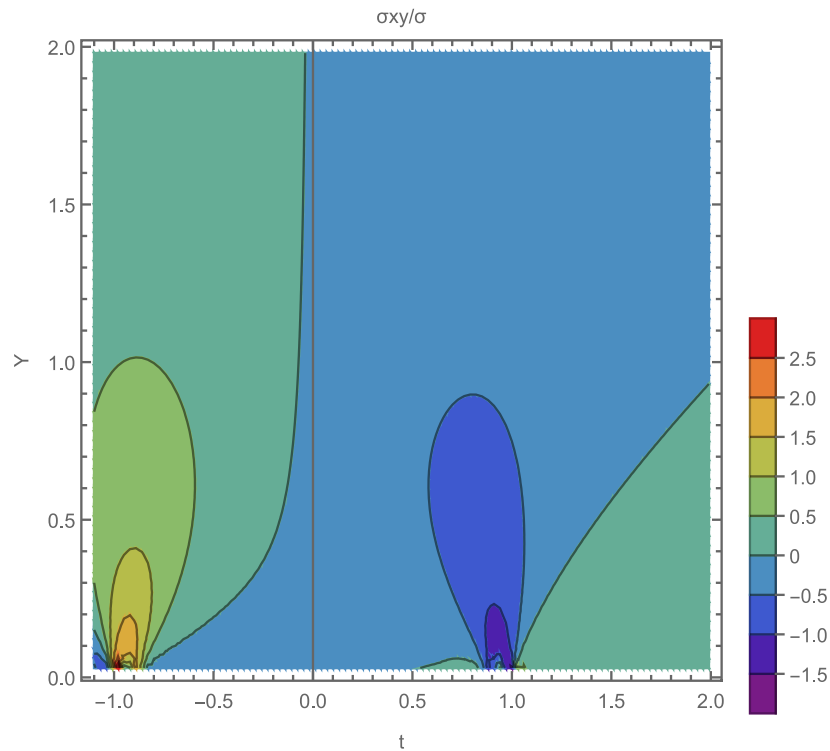
5.2.2.1 Διαγράμματα Τάσεων σ_{xy} για $c=10$



Σχήμα 5.2.6.α: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xy} για $c=10$.

Στο σχήμα 5.2.6.α παρουσιάζεται η μεταβολή των διατμητικών τάσεων για $c=10$ που δείχνει την ρωγμή σε μια απόσταση μακριά από το σύνορο του επιπέδου για ένα συνολικό εύρος 4α. Παρατηρείται ότι το σχήμα 5.2.6.α είναι συμμετρικό και μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με το σχήμα 5.1.6. Παρατηρείται ότι οι τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής ($x=\pm 1$) αυξάνονται απότομα και απειρίζονται με την τιμή να αλλάζει σε κατεύθυνση παράλληλα με τον κατακόρυφο άξονα και όχι όπως οι ορθές τάσεις προς της κατεύθυνση του οριζόντιου άξονα. Όσο απομακρυνόμαστε από τα άκρα έξω οι τάσεις μειώνονται σταδιακά και σταθεροποιούνται κοντά στο 0. Προς το κέντρο της ρωγμής, φαίνεται οι τάσεις επίσης να μειώνονται και να μηδενίζονται. Παρατηρείται ακόμη ότι οι τάσεις στο εσωτερικό της με την απομάκρυνση από την επιφάνεια της ρωγμής προς τον κατακόρυφο άξονα οι τάσεις αυξάνονται ελάχιστα σταδιακά και φτάνουν την τιμή 0.

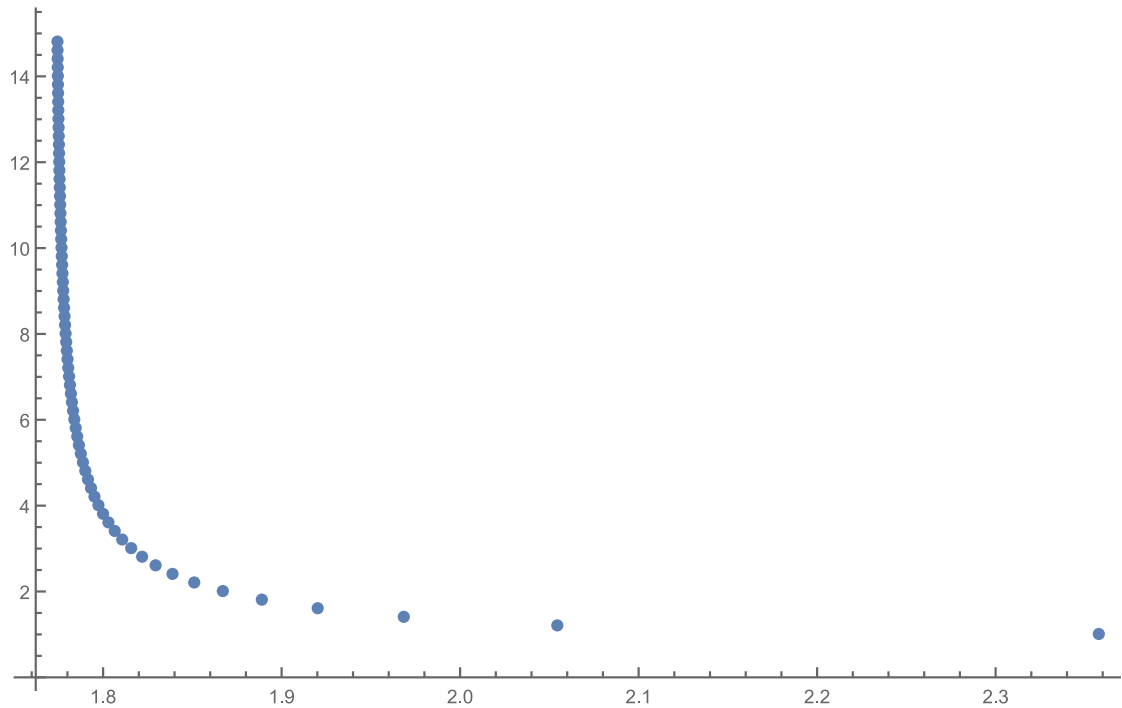
5.2.2.1 Διαγράμματα Τάσεων σ_{xy} για $c=1.1$



Σχήμα 5.2.6.β: Γραφική παράσταση τάσεων σ_{xy} για $c=1.1$.

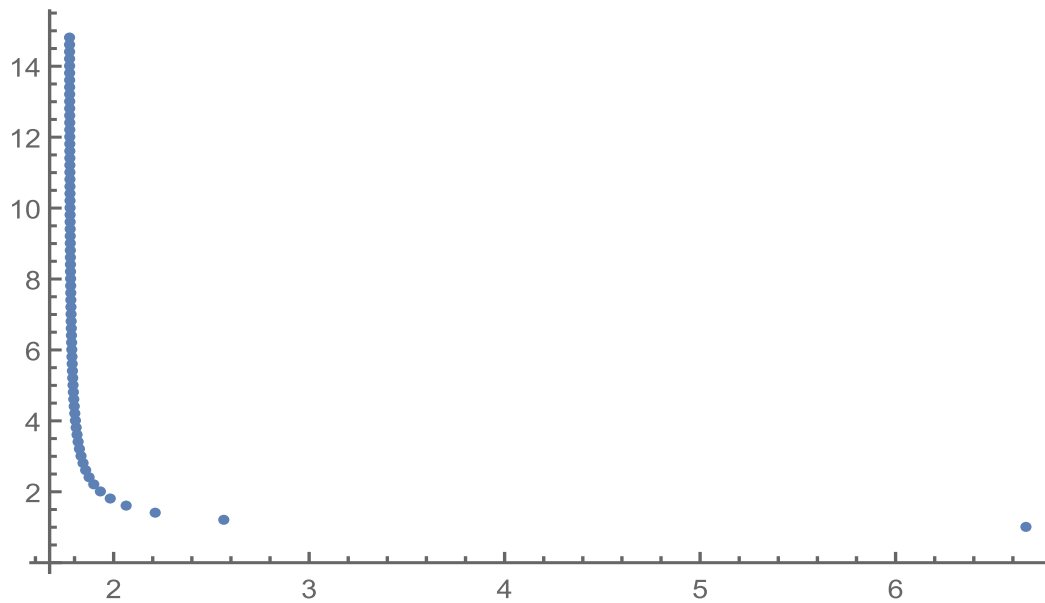
Στο σχήμα 5.2.6.β παρουσιάζεται η μεταβολή των διατμητικών τάσεων για $c=1.1$ που δείχνει την ρωγμή σε μια απόσταση μακριά από το σύνορο του επιπέδου για ένα συνολικό εύρος 3.1α. Παρατηρείται ότι το σχήμα 5.2.6.β δεν υπάρχει συμμετρία. Επίσης οι τάσεις γύρω από τα άκρα της ρωγμής ($t=\pm 1$) αυξάνονται απότομα και απειρίζονται για το άκρο $t=\pm 1$. Με την τιμή να αλλάζει σε κατεύθυνση παράλληλα με τον κατακόρυφο άξονα και όχι όπως οι ορθές τάσεις προς της κατεύθυνση του οριζόντιου άξονα. Όσο απομακρυνόμαστε από το άκρο $t=+1$ οι τάσεις μειώνονται σταδιακά και εν τέλει μηδενίζονται. Αντίθετα, στο άκρο $t=-1$ οι τάσεις έχουν μεγαλύτερη τιμή απ' ότι στο άκρο $t=+1$. Προς το κέντρο της ρωγμής, φαίνεται οι τάσεις επίσης να μειώνονται και να κυμαίνονται από 0,07 έως 0,03. Παρατηρείται ακόμη ότι κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια οι τάσεις στον άξονα y μειώνονται σταδιακά με αργό ρυθμό και να μηδενίζονται μετά το $Y=10$, στο εσωτερικό της ρωγμής με την απομάκρυνση από την επιφάνεια της προς τον κατακόρυφο άξονα οι τάσεις μειώνονται σταδιακά και μηδενίζουν μετά την τιμή $Y=4$.

5.2.3 Συντελεστής έντασης τάσης



Σχήμα 5.2.7.α. Γραφική παράσταση του συντελεστή έντασης τάσης για $t=+1$ για διάφορες τιμές του c .

Στο σχήμα 5.2.7.α παριστάνονται τιμές του συντελεστή έντασης τάσης στο άκρο $t=+1$, για διάφορες τιμές του c . Παρατηρείται, ότι για μικρές τιμές του c ο συντελεστής έντασης τάσης τείνει στο 2.36 ενώ, καθώς αυξάνεται αφού περίπου μετά την τιμή 10, η νοητή καμπύλη που δημιουργούν τα σημεία του σχήματος 5.3.7.α γίνεται ευθεία τείνοντας στο 1,77 όπου αντιστοιχεί στον συντελεστή έντασης τάσεων σε ρωγμή σε άπειρο χωρίο.



Σχήμα 5.2.7.β: Γραφική παράσταση του συντελεστή έντασης τάσης για $t=-1$ για διάφορες τιμές του c .

Στο σχήμα 5.2.7.β παριστάνονται τιμές του συντελεστή έντασης τάσης στο άκρο $t=-1$, για διάφορες τιμές του c . Παρατηρείται, ότι για μικρές τιμές του c ο συντελεστής έντασης τάσης τείνει στο 6,67 ενώ, καθώς αυξάνεται αφού περίπου μετά την τιμή $c=6$, η νοητή καμπύλη που δημιουργούν τα σημεία του σχήματος 5.3.7.β γίνεται ευθεία τείνοντας στο 1,77.

Κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα και Προτάσεις για Περαιτέρω Έρευνα

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία μελετήσαμε την συμπεριφορά μιας ρωγμής θαμμένη σε ένα στερεό σε άπειρο χωρίο και μιας ρωγμής κοντά σε ένα ελεύθερο σύνορο. Τα συμπεράσματα της μελέτης αυτής παρατίθενται στην συνέχεια:

- Παρατηρείται ότι τα σημεία συγκέντρωσης τάσεων είναι οι κορυφές της ρωγμής και σε αυτά τα σημεία οι τάσεις έχουν ακραίες τιμές σε σχέση με την υπόλοιπη επιφάνεια, συναρτήσει της αρχικής ασκούμενης εφελκυστικής τάσης.
- Η παρουσία της ρωγμής σε συνδυασμό με το σύνορο κοντά της, οδηγεί σε υψηλότερα επίπεδα τάσεων και στις δύο άκρες της ρωγμής αλλά και κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια. Αυτό οφείλεται στον περιορισμό που υπάρχει από το σύνορο όσο αναφορά την ανάπτυξη της ρωγμής και έτσι αυξάνει τις τιμές της τάσης στην περιοχή αυτή.
- Η παρουσία του συνόρου επηρεάζει περισσότερο την κατανομή των τάσεων του άκρου της ρωγμής που βρίσκεται κοντά στο σύνορο.
- Η απουσία του συνόρου δείχνει ότι η κατανομή των τάσεων σε αυτήν περίπτωση είναι αποκλειστικά από την ίδια την ρωγμή και όχι από την αλληλεπίδραση με κάποιο όριο.
- Καθώς η ρωγμή απομακρύνεται από το ελεύθερο σύνορο, η συγκέντρωση τάσεων κοντά στις κορυφές της ρωγμής μπορεί να είναι λιγότερο εκτεταμένη και με μικρότερες τιμές σε σύγκριση με την περίπτωση που η ρωγμή βρίσκεται κοντά στο όριο. Η κατανομή τάσεων παρουσιάζει ένα πιο ομοιόμορφο ή ομαλά μεταβαλλόμενο μοτίβο.
- Γενικά, στα δύο διαγράμματα των ορθών τάσεων σ_{xx} και σ_{yy} αλλά και των διατμητικών σ_{xy} παρατηρούνται μεγαλύτερες τιμές τάσεων στο άκρο της ρωγμής που βρίσκεται κοντά στο σύνορο από το άκρο που βρίσκεται στην άλλη πλευρά.

- Επίσης, στα δύο διαγράμματα των ορθών τάσεων σ_{xx} και σ_{yy} που στο ένα υπάρχει ελεύθερο σύνορο και το άλλο είναι στο άπειρο χωρίο επίσης παρατηρούνται μεγαλύτερες τιμές τάσεων και στα δύο άκρα στο διάγραμμα των σ_{yy} από το σ_{xx} .
- Ο συντελεστής έντασης τάσης έχει γενικά τιμές μεγαλύτερες όσο η ρωγμή πλησιάζει περισσότερο την ελεύθερη επιφάνεια.
- Ο συντελεστής έντασης τάσης για το άκρο που είναι κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια είναι μεγαλύτερος από το απέναντι άκρο.
- Η μέγιστη τιμή του ανοίγματος της ρωγμής όσο πλησιάζει την ελεύθερη επιφάνεια μετατοπίζεται προς το σύνορο και αυξάνεται.

Μερικά από τα ερωτήματα που μέινανε αναπάντητα και θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω εργασίας είναι η περίπτωση που η ρωγμή να έχει τις ίδιες συνοριακές συνθήκες αλλά να είναι υπό γωνία προς την ελεύθερη επιφάνεια.

Βιβλιογραφία

- [1] Anderson T.L., Fracture Mechanics, Published by Taylor & Francis Group, 2005.
- [2] Wikipedia, Fracture mechanics, Last updated at: 10 May 2023, Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Fracture_mechanics, [online], Accessed at: 25 May 2023.
- [3] Βουθούνης Π., Αντοχή των υλικών: Μηχανική του παραμορφώσιμου σώματος, Αθήνα, Εκδόσεις Ανδρομάχη Βουθούνη, 2019.
- [4] Χαριτίδης Κ.Α., Δομή και μηχανικές ιδιότητες υλικών, Αθήνα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, 2013.
- [5] Hills D.A., Kelly D.N. Dai, Korsunsky A.M., Solution of Crack Problems, 1996, Published by Kluwer Academic Publishers.
- [6] Τσαμασφύρος Γ., Μηχανική παραμορφώσιμων σωμάτων Ι, Αθήνα, Εκδόσεις Συμμετρία, 1990.
- [7] Wikipedia, Isotropy, Last updated at: 30 April 2023, Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Isotropy>, [online], Accessed at: 25 May 2023.
- [8] Wikipedia, Fracture mechanics, Last updated at: 15 May 2023, Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fracture>, [online], Accessed at: 25 May 2023.
- [9] Bob McGinty, Fracture Mechanics, Available at: <https://www.fracturemechanics.org/modes123.html>, [online], Accessed at: 27 May 2023.
- [10] Eva Preiß, Fracture Toughness of Freestanding Metallic Thin Films Studied by Bulge Testing, Erlangen, Published by FAU University Press, 2018, [Online], Available at: https://www.researchgate.net/publication/326697240_Fracture_Toughness_of_Freestanding_Metallic_Thin_Films_Studied_by_Bulge_Testing/figures?lo=1.
- [11] Wikipedia, Energy release rate (fracture mechanics), Last updated at: 8 May 2023, [Online], Available at: [https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_release_rate_\(fracture_mechanics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_release_rate_(fracture_mechanics)), Accessed at: 27 May 2023.
- [12] Τριανταφύλλου Α., Δοκικά υλικά, Πάτρα, Ιδιωτική έκδοση, 2013.
- [13] Wikipedia, Crystal, Last updated at: 4 April 2023, [Online], Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal>, Accessed at: 27 May 2023.

- [14] Wikipedia, Crystal, Last updated at: 4 April 2023, [Online], Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Crystal_structure, Accessed at: 15 May 2023.
- [15] Νεος Π., Δομή Κρυστάλλου και Διάδοση Ηλεκτρονίου σε Κρυσταλλικό Πλέγμα, Αθήνα, Διπλωματική εργασία, 2021.
- [16] tec-science, Lattice structure of metals, [Online], Available at: <https://www.tec-science.com/material-science/structure-of-metals/lattice-structure-of-metals/>, Accessed at: 03 June 2023.
- [17] Wikipedia, Dislocation, Last edited at: 26 January 2023, [Online], Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Dislocation>, Accessed at: 18 May 2023.
- [18] Wikipedia, Burger's vector, Last edited at: 5 May 2023, [Online], Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Burgers_vector, Accessed at: 18 May 2023.
- [19] University of Cambridge, Burgers vector, [Online], Available at: <https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/dislocations/burgers.php>, Accessed at: 20 May 2023.
- [20] Princeton university, Bergers vector, b, [Online], Available at: <https://www.princeton.edu/~maelabs/mae324/glos324/burgersvector.html>, Accessed at: 20 May 2023.
- [21] Glaessgen E. H., Saether E., Hochhalter J.D., Yamakov V., Modeling Near Crack Tip Plasticity From Nano to Micro Scales, AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, January 2010, [Online], Available at: <https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/edge-dislocation>.
- [22] Wikipedia, Stress intensity factor, Last edited at: 8 May 2023, [Online], Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Stress_intensity_factor, Accessed at: 28 May 2023.
- [23] Ravi Chandran K.S., Barsoum I., Determination of stress intensity factor solutions for cracks in finite-width functionally graded materials, International Journal of Fracture, 2023, [Online], Available at: https://www.researchgate.net/publication/225258605_Determination_of_stress_intensity_factor_solutions_for_cracks_in_finite-width_functionally_graded_materials/figures?lo=1&utm_source=google&utm_medium=organic.

Παράρτημα Α

Α. Κώδικας Mathematica

Α.1 Ρωγμή σε άπειρο χωρίο

```
N = 50;  
κ = 3 - 4 * ν; (* Όπου κ η σταθερά Koloson και ν ο λόγος Poisson,  
για επίπεδη παραμόρφωση έχουμε κ=3-4ν *)  
W[i_] =  $\frac{1}{N}$ ; (* Συνάρτηση βάρους  $W_i = \frac{1}{N}$  για n=1 από πίνακα *)  
s[i_] := Cos[ $\pi * \frac{(2 * i - 1)}{(2 * N)}$ ] (* Integrations Points (Σημεία ολοκλήρωσης),  
[συνημίτονο] *)  
s1=Cos[ $\pi * \frac{(2 * i - 1)}{(2 * N)}$ ], i=.....N *)  
[συνημίτονο]  
t[k_] := Cos[ $\pi * \frac{k}{N}$ ] (* Collocation Points,  $t_k = \text{Cos}[\pi * \frac{k}{N}]$ , i=.....N-1 *)  
[συνημίτονο] [συνημίτονο]  
w[i_] :=  $\frac{1}{\sqrt{1 - s[i]^2}}$  (* Θεμελιώδης συνάρτηση από Πίνακα για n=1 *)  
(* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΓΝΩΣΤΩΝ  $\phi(s) \rightarrow \phi$  είναι η συνάρτηση τάσης *)  
Tb11 = ParallelTable[W[i] *  $\frac{1}{(t[k] - s[i])}$ , {k, 1, N - 1}, {i, 1, N}] // N ;  
[παράλληλος πίνακας] [αριθμητική τιμή]  
(* Πίνακας συντελεστών εξίσωσης,  $W_i * \sum_{i=1}^N (\frac{1}{t_k - s_i})$ , k=1...N-1, i=1...N *)  
[αριθμητική τιμή]  
Tb1s0 = ParallelTable[ $\frac{\pi}{N}$ , N] // N;  
[παράλληλος πίνακας] [αριθμητική τιμή]  
(* Πίνακας συντελεστών εξίσωσης ->  $W_i * \pi * \sum_{i=1}^N \phi_y(s_i) = 0$ , k=1...N-1, i=1...N *)  
[αριθμητική τιμή]  
Tb110 = AppendTo[Tb11, Tb1s0];  
[επισύναψη στα τέλος]  
(* Τελικός πίνακας συντελεστών εξίσωσης διαστάσεων NxN,  
W[i] *  $\sum_{i=1}^N (\frac{1}{(t[k] - s[i])})$  και , k=1...N-1, i=1...N και  $(\frac{\pi}{N}) * \sum_{i=1}^N \phi[s[i]]$  *)  
[αριθμητική τιμή]  
Tb1φ = ParallelTable[φ[i], {i, 1, N}];  
[παράλληλος πίνακας]  
(* Πίνακας των αγνώστων συναρτήσεων τάσης φ[i], i=1...N *)  
Tb11σ = ParallelTable[ $-\frac{\kappa + 1}{2 * \mu} * \sigma$ , {k, 1, N - 1}] // N; (* Πίνακας της φόρτισης Tb11σ,  
[παράλληλος πίνακας] [αριθμητική τιμή]  
 $-\frac{\kappa + 1}{2 * \mu} * \sigma_{yy}(t_k)$ , k=1...N-1 *) (* Όπου μ ο συντελεστής ακαμψίας *)  
Tb10 = ParallelTable[0];  
[παράλληλος πίνακας]  
Tb11σ0 = AppendTo[Tb11σ, Tb10] // N;  
[επισύναψη στο τέλος] [αριθμητική τιμή]
```

```

(* Τελικός πίνακας της φόρτισης σο, Tbl1so *)
φ = Inverse[Tbl1φ].Tbl1so // Chop
αντιστροφή μήτρας στρογγυλοποίηση μικρών αριθμών σε 0

(* Λύση: Αντίστροφος πίνακας NxN των συντελεστών x Τον
πίνακα των αγνώστων συναρτήσεων τάσης φ *)

ListPlot[ParallelTable[{s[i],  $\frac{\phi[[i]]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}}$ }, {i, 1, N}] // N, PlotRange → All,
διάγραμμα... παράλληλος πίνακας ... εύρος διαγρ... όλη

Frame → True, FrameLabel → {"s(i)", " $\frac{\phi(i)}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}}$ "}]
κορνίζα αληθής ετικέτα κορνίζας

(* Αναπαράσταση των σημείων που αντιστοιχεί
για κάθε s(i) ένα φ(i) με αδιαστατοποίηση των φ(i) *)

ListLinePlot[ParallelTable[{s[i], φ[[i]] *  $\frac{w[i]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}}$ }, {i, 1, N}] // N,
γραμμικό διάγρ... παράλληλος πίνακας αριθμητική τιμή

PlotRange → All, Frame → True, FrameLabel → {"s(i)", " $\phi[[i]] * \frac{w[i]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}}$ "}]
εύρος διαγρ... όλα κορνίζα αληθής ετικέτα κορνίζας

(* έχω διαιρέσει την συνάρτηση τάσης φ με  $\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}$  για να μην έχω μέσα τα σ, ν και μ *)
(* έχω διαιρέσει τα φ*w με  $\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}$  για να μην έχω μέσα τα σ, ν και μ *)
(* Παράσταση με τα σημεία της πυκνότητας της ρωγμής *)

B[i_] := w[i] *  $\frac{\phi[[i]]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}}$ ;

BB = Interpolation[ParallelTable[{s[i], B[i]}, {i, 1, N}]] // Quiet;
παρεμβολή παράλληλος πίνακας λήσυχη αξιολόγηση έκφρασης

(* Η πυκνότητα δίνεται από τον τύπο: By[ξ]=w(s)*φ(s) με  $w = \frac{1}{\sqrt{1-s(i)^2}}$  *)

(* Έχω διαιρέσει τα φ με  $\sigma * \frac{\kappa+1}{2+\mu}$  για να μην έχω μέσα τα σ, ν και μ *)
(* Επειδή εμείς έχουμε N σημεία,
τα υπόλοιπα σημεία που θέλουμε τα υπολογίζει με γραμμική παρεμβολή *)

uy[x_] :=  $\frac{-1}{2}$  NIntegrate[BB[z], {z, -1, x}] (* Από σχέση  $g(x) = -\int_a^x By(\xi) d\xi = 2*uy$ ,
προσέγγιση ολοκληρώματος

με 1/2 μπροστά γιατί θέλουμε την απόσταση από το μέσο στο ένα άκρο *)

```

(* Γραφική παράσταση με τα σημεία του ανοίγματος της ρωγμής *)

ListLinePlot[Quiet[Table[{i, uy[i]}, {i, -1, 1, 0.01}]] // N,
γραμμικό διάγρ... ήσυχη πίνακας τιμών αριθμητική τιμή

PlotRange → All, Frame → True, FrameLabel → {"i", " $\frac{uy[i]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2*\mu}}$ "},
εύρος διαγρ... όλα κορνίζα αλη... ετικέτα κορνίζας

(* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ *)

(* Θέτω $\xi = z * a$,

$y = Y * a$ και $x = X * a$ ώστε να είναι αδιαστατοποιημένα τα X και Y και να έχουμε το z από -1 έως 1 και μην έχουμε από -a έως a *)

sxx[X_, Y_] := $\left(\frac{1}{\pi}\right) * NIntegrate[a * BB[z] * \left(\frac{X * a - z * a}{((X * a - z * a)^2 + (Y * a)^2)^2}\right) *$
προσέγγιση ολοκληρώματος

$\left((X * a - z * a)^2 - (Y * a)^2\right), \{z, -1, 1\}, WorkingPrecision \rightarrow 20, MaxRecursion \rightarrow 20] //$
λειτουργική ακρίβεια μέγιστο επίπεδο αναδρομής

N // Quiet(* sxx(x,y) * $\left[\frac{\kappa+1}{2*\mu}\right] = \frac{\kappa+1}{2*\mu} * \left[\frac{1}{\pi} * \frac{2*\mu}{\kappa+1} * \int_{-a}^a B(\xi) * \left(\frac{x-\xi}{((x-\xi)^2+y^2)^2}\right) * ((x-\xi)^2 - (y)^2) d\xi\right] *$
αρ... ήσυχη αξιολόγηση έκφρασης

(* έκανα αντικατάσταση το $x = X * a$, $y = Y * a$ και $\xi = z * a$ για να γίνει αδιαστατοποίηση*)

syy[X_, Y_] :=

$\left(\frac{1}{\pi}\right) * NIntegrate[a * BB[z] * \left(\frac{X * a - z * a}{((X * a - z * a)^2 + (Y * a)^2)^2}\right) * ((X * a - z * a)^2 + 3 (Y * a)^2),$
προσέγγιση ολοκληρώματος

$\{z, -1, 1\}, WorkingPrecision \rightarrow 20, MaxRecursion \rightarrow 20] + 1 // N // Quiet$
λειτουργική ακρίβεια μέγιστο επίπεδο αναδρομής αρι... ήσυχη αξιολόγηση έκφρασης

(* syy(x,y) * $\left[\frac{\kappa+1}{2*\mu}\right] = \frac{\kappa+1}{2*\mu} * \left[\frac{1}{\pi} * \frac{2*\mu}{\kappa+1} * \int_{-a}^a B(\xi) * \left(\frac{x-\xi}{((x-\xi)^2+y^2)^2}\right) * ((x-\xi)^2 + 3 (y)^2) d\xi\right] + \sigma \sigma *$

sxy[X_, Y_] :=

$\left(\frac{1}{\pi}\right) * NIntegrate[a * BB[z] * \left(\frac{a * Y}{((X * a - z * a)^2 + (Y * a)^2)^2}\right) * ((X * a - z * a)^2 - (Y * a)^2),$
προσέγγιση ολοκληρώματος

$\{z, -1, 1\}, WorkingPrecision \rightarrow 20, MaxRecursion \rightarrow 20] // N // Quiet$
λειτουργική ακρίβεια μέγιστο επίπεδο αναδρομής αρι... ήσυχη αξιολόγηση έκφρασης

(* sxy(x,y) = $\frac{1}{\pi} * \frac{2*\mu}{\kappa+1} * \int_{-a}^a B(\xi) * \left(\frac{y}{((x-\xi)^2+y^2)^2}\right) * ((x-\xi)^2 - (y)^2) d\xi *$

(* Διάγραμμα τάσεων sxx *)

ListContourPlot[

διάγραμμα ισοϋψων από παράταξη

Flatten[ParallelTable[{X, Y, sxx[X, Y]}, {X, -2, 2, 0.03}, {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1],

ισοπέδ... παράλληλος πίνακας

PlotLegends → Automatic, PlotRange → All, ColorFunction → "Rainbow",

υπομνήματα δια... αυτόματο εύρος διαγρ... όλα συνάρτηση χρώματος

Axes → True, FrameLabel → {"X", "Y", "sxx/σ"}]

επιλογ... αλη... ετικέτα κορνίζας

(* είναι το 1/2 του διαγράμματος γιατί είναι συμμετρικό *)

(* Διάγραμμα τάσεων σyy *)

ListContourPlot[

Διάγραμμα ισοϋψών από παράταξη

Flatten[ParallelTable[{X, Y, σyy[X, Y]}, {X, -2, 2, 0.03}, {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1],

ισοπέδ... Παράλληλος πίνακας

PlotLegends → Automatic, PlotRange → All, ColorFunction → "GreenPinkTones",

υπομνήματα δια... αυτόματο Εύρος διαγρ... όλα συνάρτηση χρώματος

Axes → True, FrameLabel → {"X", "Y", " $\frac{\sigma_{yy}}{\sigma}$ "}

επιλογ... αλη... ετικέτα κορνίζας

(* είναι το 1/2 του διαγράμματος γιατί είναι συμμετρικό *)

(* Διάγραμμα τάσεων σxy *)

ListContourPlot[

Διάγραμμα ισοϋψών από παράταξη

Flatten[ParallelTable[{X, Y, σxy[X, Y]}, {X, -2, 2, 0.03}, {Y, 0.01, 2, 0.03}], 1],

ισοπέδ... Παράλληλος πίνακας

PlotLegends → Automatic, PlotRange → All, Axes → True, FrameLabel → {"X", "Y", "σxy/σ"}]

υπομνήματα δια... αυτόματο Εύρος διαγρ... όλα επιλογ... αλη... ετικέτα κορνίζας

(* είναι το 1/2 του διαγράμματος γιατί είναι συμμετρικό *)

(* Υπολογισμός των τιμών της συνάρτησης τάσης $\Phi[i]$ στα άκρα $s = \pm 1$ *)

$M_E = \frac{1}{N}$; (* Σταθερά. Είναι η ίδια και για 1 και για -1 από πίνακα *)

a = 1;

$\Phi_E[i_] := \frac{\sin\left[\frac{2i-1}{4N} \cdot \pi \cdot (2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{2i-1}{4N} \cdot \pi\right]} // N$

αριθμητική τιμή

(* Συνάρτηση $\Phi_E[-1] = \Phi_E[+1] = \text{Table}\left[\frac{\sin\left[\frac{2i-1}{4N} \cdot \pi \cdot (2N-1)\right]}{\sin\left[\frac{2i-1}{4N} \cdot \pi\right]}, \{i, 1, N\}\right]$ από πίνακα για $n=1$ *)

πίνακας τιμών

(* Η τιμή της συνάρτησης τάσης $\Phi(s)$ στα άκρα της ρωγμής δίνεται από τους τύπους *)

$f1[i_] := M_E \cdot \text{Sum}\left[\Phi_E[i] \cdot \frac{\Phi[[i]]}{\sigma \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}}, \{i, 1, N\}\right] // N$

άθροιση

αριθμητική τιμή

(* $\Phi[+1] = M_E[+1] \cdot \sum_{i=1}^N \Phi_E[+1] \cdot \Phi[s[N+1-i]]$ *)

$f2[i_] := M_E \cdot \text{Sum}\left[\Phi_E[i] \cdot \frac{\Phi[[N+1-i]]}{\sigma \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}}, \{i, 1, N\}\right] // N$

άθροιση

αριθμητική τιμή

(* $\Phi[-1] = M_E[-1] \cdot \sum_{i=1}^N \Phi_E[-1] \cdot \Phi[s[N+1-i]]$ *)

αριθμητική τιμή

(* Η τιμή του παράγοντα έντασης τάσης $K_I(\pm 1)$ στα άκρα

της ρωγμής δίνεται από τον τύπο $K_I(\pm 1) = \left[\pm \sqrt{\rho i \cdot a} \cdot \frac{2\mu}{\kappa+1} \cdot \Phi_y(\pm 1)\right] \cdot$

$KI1 = \left(\sqrt{\pi \cdot a} \cdot \frac{2\mu}{\kappa+1} \cdot f1[i]\right) \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}$ (* Έχω πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη με $\frac{\kappa+1}{2\mu}$ για

να μην έχω μέσα στο αποτέλεσμα μ και ν: $K_I(\pm 1) \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu} = \left[\pm \sqrt{\rho i \cdot a} \cdot \frac{2\mu}{\kappa+1} \cdot \Phi_y(\pm 1)\right] \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}$ *)

$KI2 = \left(-\sqrt{\pi \cdot a} \cdot \frac{2\mu}{\kappa+1} \cdot f2[i]\right) \cdot \frac{\kappa+1}{2\mu}$

A.2 Ρωγμή σε ημιεπίπεδο

```

N = 20;
f[c_] := Module[{i, k, K, w, s, t},
  (* εικόνα *)
  κ := 3 - 4 ν; (* Όπου κ η σταθερά Kolosov και ν ο λόγος Poisson,
  για επίπεδη παραμόρφωση έχουμε κ=3-4ν *)
  d := a * c;
  w[i_] := 1 / (sqrt(1 - s[i]^2)); (* Θεμελιώδης συνάρτηση από Πίνακα 2.2 *)
  s[i_] := Cos[π * ((2 * i - 1) / (2 * N))]; (* Integrations Points (Σημεία ολοκλήρωσης),
  (* συννημίτονο *)
  si = Cos[π * ((2 * i - 1) / (2 * N))], i = 1...N, Εξίσωση (2.37) *)
  (* συννημίτονο *)
  t[k_] := Cos[π * (k / N)]; (* Collocation Points,
  (* συννημίτονο *)
  tk = Cos[π * (k / N)], k = 1...N, Εξίσωση (2.38) *)
  (* συννημίτονο *)
  K[k_, i_] := (1/a) * (1 / (t[k] - s[i])) + (1/a) *
    (- (1 / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)) - (2 * (s[i] + d/a)) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^2 +
    (4 * (s[i] + d/a)^2) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^3);
  (* Συνάρτηση επιρροής K(x,ξ), 2.49 *)
  (* K1[k_, i_] :=
    (1/a) * (- (1 / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)) - (2 * (s[i] + d/a)) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^2 +
    (4 * (s[i] + d/a)^2) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^3) // N // MatrixForm *)
  (* μορφή μήτρας *)
  K11 := Table[(1/a) * (- (1 / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)) -
    (2 * (s[i] + d/a)) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^2 +
    (4 * (s[i] + d/a)^2) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^3), {k, 1, N - 1}, {i, 1, N}] // N;
  (* πίνακας τιμών *)
  (* Το κανονικό τμήμα του πυρήνα K(x,ξ), 2.56 K'[x_, ξ_] :=
    - (1 / (x + ξ)) - (2 * ξ) / (x + ξ)^2 + (4 * ξ^2) / (x + ξ)^3 *)
  (* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΓΝΩΣΤΩΝ φ(s) *)
  Tbl1 := Table[(1/N) * (1 / (t[k] - s[i])) + a * (1/a) * (- (1 / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)) -
    (2 * (s[i] + d/a)) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^2 + (4 * (s[i] + d/a)^2) / (s[i] + t[k] + (2 * d) / a)^3), {k, 1, N - 1}, {i, 1, N}] // N;
  (* πίνακας τιμών *)
  (* αριθμητική τιμή *)
  (* Πίνακας συντελεστών εξίσωσης (2.36), W[i] * Σ_{k=1}^N (1 / (t[k] - s[i])),
  k =
  1...N-1, i=1...N *)
  (* αριθμητική τιμή *)
  Tbls0 = Table[π / N, {i, 1, N}] // N;
  (* πίνακας τιμών *)
  (* αριθμητική τιμή *)
  (* Πίνακας συντελεστών εξίσωσης (2.36),
  W[i] * Σ_{k=1}^N (1 / (t[k] - s[i])), k=1...N-1, i=1...N *)
  (* αριθμητική τιμή *)
  Tbl10 := AppendTo[Tbl1, Tbls0] // N;
  (* επισύναψη στο τέλος *)
  (* αριθμητική τιμή *)
  (* Τελικός πίνακας συντελεστών εξίσωσης (2.36) NxN,

```

```

W[i]*Sum[1/(t[k]-s[i]), {k, 1, N-1}], {i, 1, N} και (π/N)*Sum[φ[s[i]], {i, 1, N}] *)
|_αριθμητική τιμή |_αριθμητική τιμή

Tblφ := Table[φ[i], {i, 1, N}] // N ;
|_πίνακας τιμών |_αριθμητική τιμή

(* Πίνακας των αγνώστων συναρτήσεων φ[i], i=1...N *)
Tbl1σ := Table[-((κ+1)/(2*μ))*σ, {κ, 1, N-1}] // N;
|_πίνακας τιμών |_αριθμητική τιμή

(* Πίνακας της φόρτισης Tbl1σ/(σ*b), κ=1...N-1 *)
Tbl0 := Table[0];
|_πίνακας τιμών

Tbl1σ0 := AppendTo[Tbl1σ, Tbl0] // N ;
|_επισύναψη στο τέλος |_αριθμητική τιμή

(* Τελικός πίνακας της φόρτισης σ0, Tbl1σ0/(σ*b) *)
φ = Inverse[Tbl10].Tbl1σ0 // Chop // N]
|_αντιστροφή μήτρας |_στρόγγυλο |_αριθμητική τιμή

(* Λύση:
Αντίστροφος πίνακας NxN των συντελεστών x Τον πίνακα των αγνώστων (φ*σ*b) *)
s[i_] := Cos[π*(2*i-1)/(2*N)];
|_συνημίτονο

ListLinePlot[
|_γραμμικό διάγραμμα από παράταξη

ParallelTable[{s[i], f[c][[i]]*1/σ*2*μ/(κ+1)}, {c, {1.01, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 4}}, {i, 1, N}],
|_παράλληλος πίνακας

PlotRange -> All, Frame -> True, FrameLabel -> {"s[i]", "φ[i]*1/σ*2*μ/(κ+1)"},
|_εύρος διαγράμματος |_όλα |_κορνίζα |_αλη |_ετικέτα κορνίζας

PlotLegends -> Table["c = " <> ToString[c], {c, {1.01, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 4}}]
|_υπομνήματα διαγράμματος |_πίνακας τιμών |_εκτυπωμένη μορφή συμβολοσειράς

(* έχω διαιρέσει την συνάρτηση τάσης φ με σ*2*μ/(κ+1) για να μην έχω μέσα τα σ, ν και μ *)
(* Αναπαράσταση των σημείων που αντιστοιχεί
για κάθε s(i) ένα φ(i) με αδιαστατοποίηση των φ(i) *)
(* Παράσταση με τα σημεία της πυκνότητας της ρωγμής, κλίση *)
w[i_] := 1/(sqrt(1-s[i]^2));

ListLinePlot[ParallelTable[{s[i], f[c][[i]]*w[i]*1/σ*2*μ/(κ+1)},
|_γραμμικό διάγραμμα |_παράλληλος πίνακας

{c, {1.01, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 4}}, {i, 1, N}], PlotRange -> All,
|_εύρος διαγράμματος |_όλα

Frame -> True, FrameLabel -> {"s[i]", "φ[i]*w[i]*1/σ*2*μ/(κ+1)"},
|_κορνίζα |_αλη |_ετικέτα κορνίζας

PlotLegends -> Table["c = " <> ToString[c], {c, {1.01, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 4}}]
|_υπομνήματα διαγράμματος |_πίνακας τιμών |_εκτυπωμένη μορφή συμβολοσειράς

(* έχω διαιρέσει τα φ*w με σ*2*μ/(κ+1) για να μην έχω μέσα τα σ, ν και μ *)
(* Παράσταση με τα σημεία της πυκνότητας της ρωγμής *)
B[i_, c_] := w[i]*f[c][[i]]/(σ*2*μ/(κ+1)); (* εξίσωση 2.57 *)

BB[c_] := Interpolation[Table[{s[i], w[i]*f[c][[i]]/(σ*2*μ/(κ+1))}, {i, 1, N}]] // Quiet;
|_παρεμβολή |_πίνακας τιμών |_σ*2*μ/(κ+1) |_ήσυχη αξιολόγηση έκφρασης

```



```

(* Η πυκνότητα δίνεται από τον τύπο: By[ξ]=w(s)*φ(s) με  $w=\frac{1}{\sqrt{1-s(i)^2}}$  *)
(* Έχω διαιρέσει τα φ με  $\sigma \frac{\kappa+1}{2+\mu}$  για να μην έχω μέσα τα σ, ν και μ *)
(* Επειδή εμείς έχουμε Ν σημεία,
τα υπόλοιπα σημεία που θέλουμε τα υπολογίζει με γραμμική παρεμβολή *)
uy[x_, c_] :=  $\frac{-1}{2}$  NIntegrate[BB[c][z], {z, -1, x}] // Quiet;
(* Από σχέση (2.11)  $g(x) = -\int_a^x By(\xi) d\xi = 2*uy$ ,
με 1/2 μπροστά γιατί θέλουμε την απόσταση από το μέσο στο ένα άκρο *)
ListLinePlot[ParallelTable[{i, uy[i, c]}, {c, {1.01, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 4}},
{ i, -1, 1, 0.01}], PlotRange -> All, Frame -> True, FrameLabel -> {"i", "uy[i]"},
PlotLegends -> Table["c = " <> ToString[c], {c, {1.01, 1.1, 1.2, 1.3, 2, 4}}]]
(* Γραφική παράσταση με τα σημεία του ανοίγματος της ρωγμής *)
(* ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΑΣΕΩΝ *)
r1 =  $\sqrt{x1^2 + y^2}$ ;
r2 =  $\sqrt{x2^2 + y^2}$ ;
x1 = x - (z * a + d);
x2 = x + (z * a + d);
x = t * a + d;
y = Y * a;
ξ = z * a + d;
d = a * c;
a = 1;
Gyxx[c_, t_, Y_] = - (x1 / r1^2) + (2 * x1^3) / r1^4 + x2 / r2^2 - (2 * ξ) / r2^2 - (2 * x2^3) / r2^4 -
(8 * ξ * x2^2) / r2^4 + (12 * ξ^2 * x2) / r2^4 + (16 * ξ * x2^4) / r2^6 - (16 * ξ^2 * x2^3) / r2^6;
Gyyy[c_, t_, Y_] = (3 * x1) / r1^2 - (2 * x1^3) / r1^4 - (3 * x2) / r2^2 -
(2 * (ξ)) / r2^2 + (2 * x2^3) / r2^4 + (16 * (ξ) * x2^2) / r2^4 -
(12 * (ξ)^2 * x2) / r2^4 - (16 * (ξ) * x2^4) / r2^6 + (16 * (ξ)^2 * x2^3) / r2^6;
Gxy[c_, t_, Y_] = y * (- (1 / r1^2) + (2 * x1^2) / r1^4 + 1 / r2^2 - (2 * x2^2) / r2^4 -
(4 * (ξ) * x2) / r2^4 + (4 * (ξ)^2) / r2^4 + (16 * (ξ) * x2^3) / r2^6 - (16 * (ξ)^2 * x2^2) / r2^6);
sxx[c_, t_, Y_] := (1 / π) * NIntegrate[BB[c][z] * Gyxx[c, t, Y], {z, -1, 1}] // N
syy[c_, t_, Y_] := (1 / π) * NIntegrate[BB[c][z] * Gyyy[c, t, Y], {z, -1, 1}] + 1 // N
sxy[c_, t_, Y_] := (1 / π) * NIntegrate[BB[c][z] * Gxy[c, t, Y], {z, -1, 1}] // N
ListContourPlot[Flatten[
ParallelTable[{t, Y, sxx[1.1, t, Y]}, {t, -1.1, 2, 0.03}, {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1],
PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All, ColorFunction -> "Rainbow",
Axes -> True, FrameLabel -> {"t", "Y", "sxx/σ"}]
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, sxx[1.1, t, Y]}, {t, -1.1, 2, 0.03},

```

Διάγραμμα Ισοψών Ισοπέδ Παράλληλος Πίνακας

```
{Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σxx/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σxx[10, t, Y]}, {t, -2, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.01, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σxx/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σxx[4, t, Y]}, {t, -2, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.01, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σxx/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σyy[1.1, t, Y]}, {t, -1.1, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σyy/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σyy[4, t, Y]}, {t, -2, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σyy/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σyy[10, t, Y]}, {t, -2, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σyy/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σxy[10, t, Y]}, {t, -2, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σxy/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σxy[1.1, t, Y]}, {t, -1.1, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σxy/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
ListContourPlot[Flatten[ParallelTable[{t, Y, σxy[1.1, t, Y]}, {t, -1.1, 2, 0.03},  
    |διάγραμμα ισοψών...|ισοπέδ...|παράλληλος πίνακας  
    {Y, 0.05, 2, 0.03}], 1], PlotLegends → Automatic, PlotRange → All,  
    |υπομνήματα δια...|αυτόματο |εύρος διαγρ...|όλα  
    ColorFunction → "Rainbow", Axes -> True, FrameLabel → {"t", "Y", "σxy/σ"}]  
    |συνάρτηση χρώματος |επιλογ...|αλη...|ετικέτα κορνίζας  
(* Υπολογισμος των τιμών της συνάρτησης τάσης φ[[i]] στα άκρα s=+-1 *)
```


$M_E = \frac{1}{N}$; (* Σταθερά. Είναι η ίδια και για 1 και για -1 από πίνακα 2.3 *)

$a = 1$;

$\Phi_E[i_] := \frac{\text{Sin}\left[\frac{2i-1}{4N} * \pi * (2N-1)\right]}{\text{Sin}\left[\frac{2i-1}{4N} * \pi\right]} // N$ [αριθμητική τιμή]

(* Συνάρτηση $\Phi_E[-1] = \Phi_E[+1] = \text{Table}\left[\frac{\text{Sin}\left[\frac{2i-1}{4N} * \pi * (2N-1)\right]}{\text{Sin}\left[\frac{2i-1}{4N} * \pi\right]}, \{i, 1, N\}\right]$ από πίνακα 2.3 για $n=1$ *)

(* Η τιμή της συνάρτησης τάσης $\phi(s)$ στα άκρα της ρωγμής δίνεται από τους τύπους *)

$f1[i_] := M_E * \text{Sum}\left[\Phi_E[i] * \frac{f[c][[i]]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2*\mu}}, \{i, 1, N\}\right] // N$ [αριθμητική τιμή]

(* $\phi[+1] = M_E[+1] * \sum_{i=1}^N \Phi_E[+1] * \phi[s[i]]$ *)

$f2[i_] := M_E * \text{Sum}\left[\Phi_E[i] * \frac{f[c][[N+1-i]]}{\sigma * \frac{\kappa+1}{2*\mu}}, \{i, 1, N\}\right] // N$ [αριθμητική τιμή]

(* $\phi[-1] = M_E[-1] * \sum_{i=1}^N \Phi_E[-1] * \phi[s[N+1-i]]$ *)

$KI1 = \text{Table}\left[\left(\sqrt{\pi * a} * \frac{2 * \mu}{\kappa + 1} * f1[i]\right) * \frac{\kappa + 1}{2 * \mu}, \{c, 1.01, 5, 0.1\}\right]$ [πίνακας τιμών]

(* Η τιμή του παράγοντα έντασης τάσης $K_I(\pm 1)$ στα άκρα

της ρωγμής δίνεται από τον τύπο $K_I(\pm 1) = \left[\pm \sqrt{\pi i * a} * \frac{2\mu}{\kappa+1} * \phi_y(\pm 1)\right] *$

(* Έχω πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη με $\frac{\kappa+1}{2*\mu}$ για να μην έχω μέσα στο

αποτέλεσμα μ και ν: $K_I(\pm 1) * \frac{\kappa+1}{2*\mu} = \left[\pm \sqrt{\pi i * a} * \frac{2\mu}{\kappa+1} * \phi_y(\pm 1)\right] * \frac{\kappa+1}{2*\mu} *$

$\text{ListPlot}\left[\text{ParallelTable}\left[\left\{\left(\sqrt{\pi * a} * \frac{2 * \mu}{\kappa + 1} * f1[i]\right) * \frac{\kappa + 1}{2 * \mu}, c\right\}, \{c, 1.01, 5, 0.1\}\right],$ [διάγραμμα] [παράλληλος πίνακας]

$\text{PlotLegends} \rightarrow \text{Automatic}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{"KI1"}, \text{"c"}\}$

[υπομνήματα δια...] [αυτόματο] [εύρος διαγρ...] [όλα] [επιλογ...] [αλη...] [ετικέτα κορνίζας]

$KI2 = \text{Table}\left[\left(\sqrt{\pi * a} * \frac{2 * \mu}{\kappa + 1} * f2[i]\right) * \frac{\kappa + 1}{2 * \mu}, \{c, 1.01, 5, 0.1\}\right]$ [πίνακας τιμών]

(* Η τιμή του παράγοντα έντασης τάσης $K_I(\pm 1)$ στα άκρα

της ρωγμής δίνεται από τον τύπο $K_I(\pm 1) = \left[\pm \sqrt{\pi i * a} * \frac{2\mu}{\kappa+1} * \phi_y(\pm 1)\right] *$

(* Έχω πολλαπλασιάσει και τα δύο μέλη με $\frac{\kappa+1}{2*\mu}$ για να μην έχω μέσα στο

αποτέλεσμα μ και ν: $K_I(\pm 1) * \frac{\kappa+1}{2*\mu} = \left[\pm \sqrt{\pi i * a} * \frac{2\mu}{\kappa+1} * \phi_y(\pm 1)\right] * \frac{\kappa+1}{2*\mu} *$

$\text{ListPlot}\left[\text{ParallelTable}\left[\left\{\left(\sqrt{\pi * a} * \frac{2 * \mu}{\kappa + 1} * f2[i]\right) * \frac{\kappa + 1}{2 * \mu}, c\right\}, \{c, 1.01, 5, 0.1\}\right],$ [διάγραμμα] [παράλληλος πίνακας]

$\text{PlotLegends} \rightarrow \text{Automatic}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}, \text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{\text{"KI2"}, \text{"c"}\}$

[υπομνήματα δια...] [αυτόματο] [εύρος διαγρ...] [όλα] [επιλογ...] [αλη...] [ετικέτα κορνίζας]