

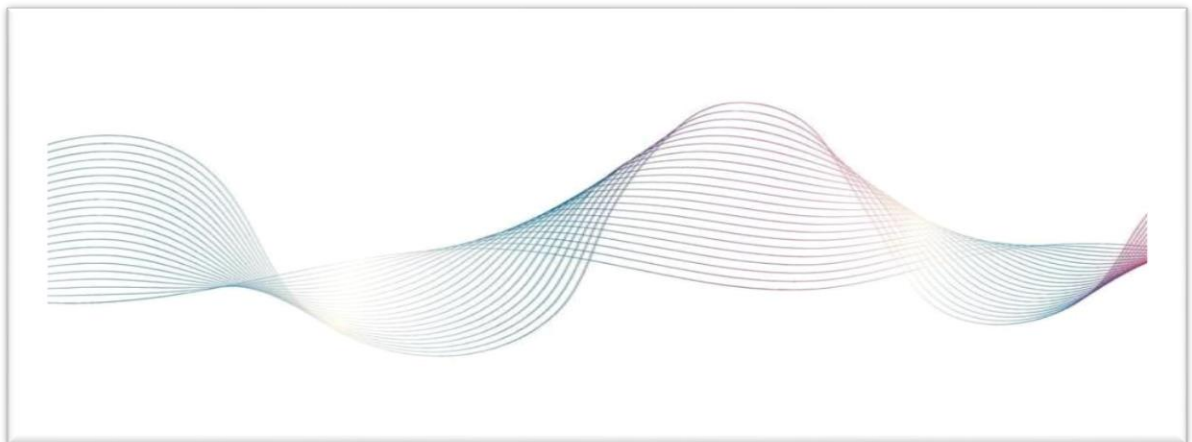


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Διπλωματική Εργασία

**ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΥΜΑΤΩΝ ΒΛΟΧΗ
ΣΕ ΔΟΚΟΥΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΔΟΜΗ**

ΣΒΕΡΩΝΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Διπλώματος Πολιτικού Μηχανικού

ΒΟΛΟΣ 2023

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Δεύτερος εξεταστής Δρ.Χρήστος Παπακωνσταντίνου

(Επιβλέπων) Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Πρώτος εξεταστής Δρ.Παναγιώτης Γουργιώτης

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Τρίτος εξεταστής Δρ.Λάμπρος Κούτας

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο
Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο πέρας των προπτυχιακών μου σπουδών στο τμήμα Πολιτικών Μηχανικών και ολοκληρώνοντας την διπλωματική εργασία μου, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς όλους όσους με στήριξαν στη διάρκεια αυτών των χρόνων, καθώς και σε όσους ήταν δίπλα μου κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής .

Την επίβλεψη της εργασίας καθ'όλη τη διάρκεια εκπόνησης της την είχε ο κ.Παγαγιώτης Γουργιώτης ο οποίος διετέλεσε Αναπληρωτής καθηγητής στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Λόγω της πρόσφατης αποχώρησης του απο το Πανεπιστήμιο επιβλέπων για τυπικούς λόγους ορίστηκε ο κ.Παπακωνσταντίνου Χρήστος ο οποίος είναι Επίκουρος Καθηγητής στο τμήμα. Εκφράζω λοιπόν τις θερμές μου ευχαρηστίες και στους δύο για την στήριξη και την βοήθεια που προσέφεραν.

Επιπρόσθετα θα ήθελά να ευχαριστήσω το τρίτο μέλος της εξεταστικής επιτροπής κ.Κούτα Λάμπρο Επίκουρο Καθηγητή του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών. Εκτιμώ την προσοχή που δείξαν και οι τρεις στην ανάγνωση της εργασίας αυτής , τον προσεκτικό έλεγχο καθώς και τις πολύ βοηθητικές παρατηρήσεις τους.

Τέλος θελώ να εκφράσω τις βαθύτερες ευχαριστίες μου στα άτομα που συμπορεύτηκαν μαζί μου όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών και με τα οποία μοιράστηκα στιγμές που θα με συντροφεύουν για όλη μου τη ζωή , καθώς και την οικογένειά μου που με στήριξε καθοριστικά στην όλη προσπάθειά μου αυτή.

Δημήτριος Σβερώνης

ΜΕΛΕΤΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΚΥΜΑΤΩΝ BLOCH ΣΕ ΔΟΚΟΥΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΔΟΜΗ

Σβερώνης Δημήτριος

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, 2023

Επιβλέπων Καθηγητής : Γουργιώτης Παναγιώτης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτέλεσε η μελέτη της συμπεριφοράς ενός δομικού στοιχείου (δοκού) με περιοδική δομή, ως μέσον διάδοσης κυμάτων Bloch. Ειδικότερα αναλύθηκε το φαινόμενο της «οιονεί περιοδικότητας» του φαινομένου Bloch καθώς και της μαθηματικής του συνθήκης. Στη συνέχεια προσπαθήσαμε μέσω των απαραίτητων εξισώσεων να μορφώσουμε ένα μοντέλο δοκού, με δύο υλικά. Η δουλειά αυτή έγινε με τη βοήθεια του προγράμματος Wolfram Mathematica. Σκοπός της εργασίας ήταν να φτάσουμε στην εξαγωγή των απαραίτητων καμπυλών που περιγράφουν την συμπεριφορά της δοκού και να συγκρίνουμε τις καμπύλες ανάλογα με το τι ιδιότητες έχουμε στα 2 υλικά μας. Εν τέλει συμπερασματικά καταλήξαμε στο ότι όταν αφενός τα δύο υλικά είναι το ίδιο, δηλαδή συμπεριφέρονται ως ένα ισότροπο υλικό, οι καμπύλες μας τέμνονται με αποτέλεσμα οποιαδήποτε συχνότητα κυματισμού κι αν στείλουμε το δοκάρι μας θα διεγερθεί. Αντιθέτως όταν τετραπλασιάσαμε την εγκάρσια διατομή του ενός υλικού ως προς το άλλο παρατηρήσαμε δυο σημαντικά κενά μεταξύ των καμπυλών, πράγμα που σημαίνει ότι σε αυτές τις συχνότητες κυματισμού το δοκάρι μας δεν διεγείρεται. Πρόκειται για ένα ενδιαφέρον αντικείμενο μελέτης το οποίο παρ'όλες τις δυσκολίες τους λόγω της πολυπλοκότητας που έχει μπορεί να παίξει μετέπειτα σημαντικό ρόλο στον χώρο της μηχανικής και συγκεκριμένα στον κόσμο των κατασκευών ενός πολιτικού μηχανικού.

STUDY OF BLOCH WAVE PROPAGATION AND DISPERSION IN PERIODICALLY STRUCTURED BEAMS

Sveronis Dimitrios

University of Thessaly, Department of Civil Engineering, 2023

Supervisor : Gourgiotis Panagiotis, Associate Professor

Abstract

The subject of this paper was the study of the behaviour of a structural element (beam) with a periodic structure, as a medium for Bloch wave propagation. In particular, the phenomenon of "quasi-periodicity" of the Bloch effect and its mathematical condition were analysed. This work was done with the help of the program Wolfram Mathematica . The aim of the work was to reach to the derivation of the necessary curves describing the behavior of the beam and to compare the curves depending on what properties we have in our 2 materials . In the end we concluded that when on the one hand the two materials are the same, i.e. they behave as an isotropic material , our curves intersect with the result that no matter what frequency of waves we send our beam will be vibrated. On the contrary when we quadrupled the cross section of one material with respect to the other we observed two significant gaps between the curves, which means that at these wave frequencies our beam is not stimulated. This is an interesting object of study which, despite all their difficulties due to their complexity, may later play an important role in the field of engineering and in particular in the construction world of a civil engineer.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στα υλικά με περιοδική δομή	11
1.1 Χρήση της θεωρίας Bloch-Floquet σε προβλήματα διασποράς.....	11
1.2 Εφαρμογή και χρησιμότητα περιοδικών υλικών.....	13
Κεφάλαιο 2: Εξισώσεις-Θεωρία δοκού.....	14
2.1 Ελαστική θεωρία κάμψης δοκού	14
2.2 Κυματική και εξίσωση διασποράς	17
Κεφάλαιο 3: Ανάλυση του προβλήματος	20
3.1 Αποτύπωση παραμέτρων δοκού	20
3.2 Ανάπτυξη και αποτύπωση εξισώσεων του προβλήματος.....	21
Κεφάλαιο 4 : Εύρεση ριζών της εξίσωσης : $\det[\text{MAT}]=0$ και εξαγωγή καμπυλών	26
4.1 Εξίσωση $\det[\text{MAT}]=0$	26
4.2 Εύρεση ριζών.....	27
4.3 Εξαγωγή καμπυλών και δοκιμές παραμέτρων N,M,Z,ν	29
1 ^η Παραμετροποίηση $M=N=Z=1$	29
2 ^η Παραμετροποίηση $M=2, N=Z=1$	31
3 ^η Παραμετροποίηση $M=4, N=Z=1$	32
4 ^η Παραμετροποίηση $N=2, M=Z=1$	34
5 ^η Παραμετροποίηση $N=4, M=Z=1$	35
6 ^η Παραμετροποίηση $Z=2, M=N=1$	36
7 ^η Παραμετροποίηση $Z=4, M=N=1$	36
Κεφάλαιο 5 : Συνοπτικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις επί των αποτελεσμάτων.....	39
Βιβλιογραφία	40
Παράρτημα	41

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα.....	11
ΣΧΗΜΑ 1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΑ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΟΥ ΥΛΙΚΟΥ	11
Σχήμα 2 απεικονιση ενος τυπικου φαινομενου <i>bloch</i>	12
Σχήμα 3 κομματι δοκου που υποκειται σε καμψη	14
Σχήμα 4 Γραφικη απεικονιση φασματος	18
Σχήμα 5 γραφικη απεικονιση της καμπυλης διασπορας	19
Σχήμα 6 τυπικο παραδειγμα περιοδικης δομης με δυο υλικα	23
Διάγραμμα 1 $M=N=Z=1$	30
Διάγραμμα 2 $M=2, N=Z=1$	32
Διάγραμμα 3 $M=4, N=Z=1$	33
Διάγραμμα 4 $N=2, M=Z=1$	34
Διάγραμμα 5 $N=4, M=Z=1$	35
Διάγραμμα 6 $Z=2, M=N=1$	36
Διάγραμμα 7 $Z=4, M=N=1$	37

Κατάλογος Πινάκων

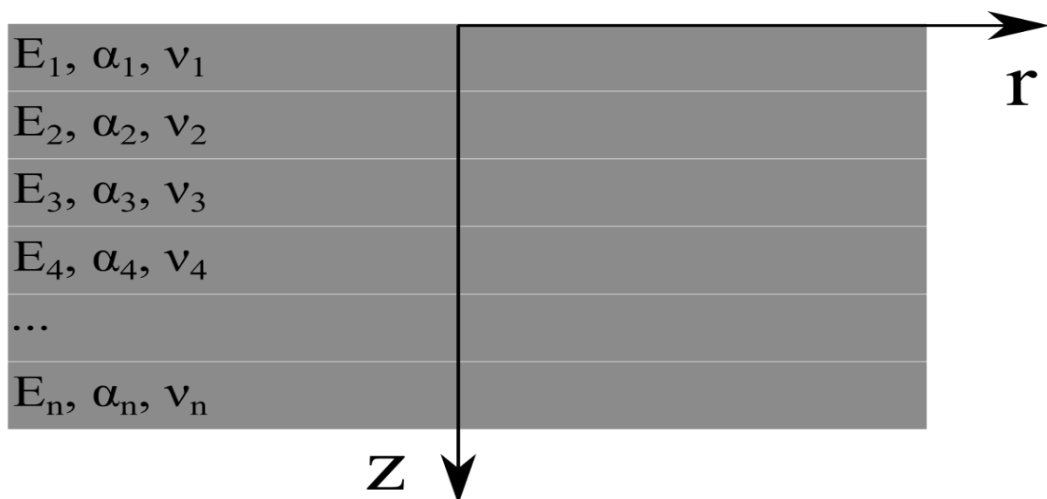
Πίνακας 1 $M=N=Z=1$	30
Πίνακας 2 $M=2, N=Z=1$	31
Πίνακας 3 $M=4, N=Z=1$	32
Πίνακας 4 $N=2, M=Z=1$	34
Πίνακας 5 $N=4, M=Z=1$	35
Πίνακας 6 $Z=2, M=N=1$	36
Πίνακας 7 $Z=4, M=N=1$	37

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή στα υλικά με περιοδική δομή

1.1 Χρήση της θεωρίας Bloch-Floquet σε προβλήματα διασποράς

Πριν ασχοληθούμε με το ζήτημα της δοκού που μελετήσαμε, ας αναφερθούμε λίγο στα υλικά αυτά που με την περιοδική δομή τους δημιουργούν τις πολλαπλές ανακλάσεις των κυματισμών. Τα υλικά αυτά υπάγονται στην κατηγορία των μη ομογενών υλικών, είναι υλικά με διαβαθμισμένες ιδιότητες των οποίων η κατασκευή τους δεν είναι διαδεδομένη εμπορικά. Αποτελούν προϊόν μελέτης για φαινόμενα όπως η απόσβεση ή η μεγέθυνση κυμάτων τα οποία χρησιμοποιούν τα υλικά αυτά ως μέσο διάδοσης. Αυτό το φαινόμενο-συμπεριφορά δομικών στοιχείων με περιοδική δομή πραγματεύεται και η συγκεκριμένη εργασία. Ας ασχοληθούμε όμως λίγο με τα συγκεκριμένα υλικά και την χρησιμότητά τους στη μηχανική.

Όπως προαναφέραμε είναι υλικά που ανήκουν στην κατηγορία των λειτουργικά διαβαθμισμένων υλικών (FGM). Χαρακτηρίζονται απ την μεταβολή της σύνθεσης τους (όπως στη δική μας περίπτωση, περιοδική σύνθεση) που επιφέρει αλλαγές στις ιδιότητες του ίδιου του υλικού. Όπως καταλαβαίνουμε πρόκειται για υλικά συγκεκριμένης διαθεσιμότητας και υλικά που η κατασκευή τους προορίζεται για συγκεκριμένες τεχνικές εφαρμογές (π.χ. εφαρμογές βιοιατρικής,αεροναυπηγική).

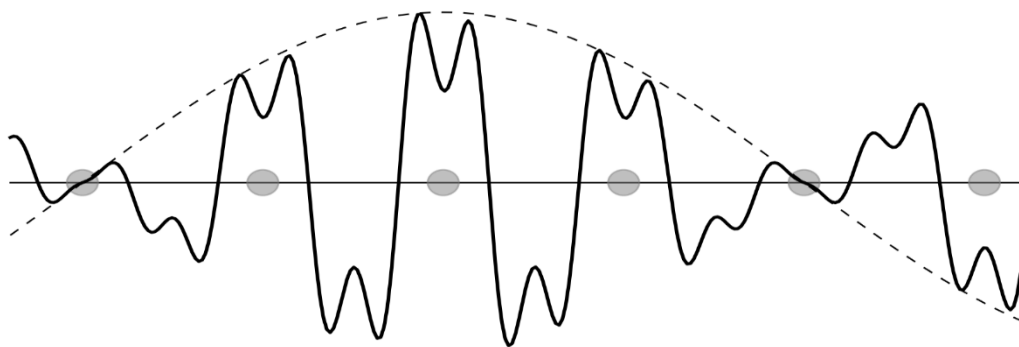


ΣΧΗΜΑ 1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΑ ΔΙΑΒΑΘΜΙΣΜΕΝΟΥ ΥΛΙΚΟΥ

Στην δική μας περίπτωση όπως προαναφέραμε, πραγματευόμαστε υλικά δομικών στοιχείων (μία δοκός) τα οποία λόγω της περιοδικής δομής τους βοηθούν στην απόσβεση κυμάτων που τα χρησιμοποιούν ως μέσο διάδοσης. Μας βοηθούν στην επιλεκτική ανάκλαση μιας συχνότητας κυματισμού καθώς επίσης παρατηρούνται φαινόμενα όπως χάσματα ζώνης και αρνητικός δείκτης διάθλασης. Έχοντας λοιπόν τη δυνατότητα αυτή, είμαστε σε θέση πραγματοποιώντας μια τεχνική μελέτη, να ορίσουμε τις συχνότητες των κυματισμών τις οποίες θα αποσβάνονται καθώς και τις συχνότητες των κυματισμών που θα διαδίδονται κανονικά μέσα στο μέσο της μελέτης μας. Μιλώντας για τη διάδοση του κύματος σε περιοδικής δομής υλικά θα πρέπει να αναφέρουμε ακόμη ότι οι ιδιότητες “φιλτραρίσματος” εξαρτώνται αποκλειστικά από τον δομικό σχεδιασμό και την περιοδικότητα του ίδιου του υλικού. Αυτό σημαίνει ότι τα χαρακτηριστικά της διασποράς που έχουμε παραμένουν σταθερά εκτός αν έχω διαταραχή της συνολικής δομής ή της περιοδικότητας.

Μία χαρακτηριστική μέθοδος μελέτης της διασποράς σε περιοδικής δομής υλικά είναι η θεωρία Bloch-Floquet την οποία και θα αναλύσουμε εκτενώς σε επόμενο κεφάλαιο.

Πρόκειται για ένα θεώρημα που μας επιτρέπει την υπολογιστική απλοποίηση μέσω της μοντελοποίησης ενός κελιού που αντιπροσωπεύει το μεγάλο μήκος του στοιχείου που μελετάμε. Ουσιαστικά χρησιμοποιούμε την εξίσωση Bloch-Floquet για να μετατρέψουμε ένα περιοδικό φαινόμενο σε οιονεί περιοδικό. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συνδέσουμε την συνάρτηση ενός σωματιδίου του κυματισμού μέσα στο υλικό, με οποιαδήποτε κυματική συνάρτηση σωματιδίου μέσα στο ίδιο υλικό με την προϋπόθεση να έχουν τις ίδιες η σχεδόν ίδιες περιόδους (περιοδικό ή οιονεί περιοδικό φαινόμενο). Η θεωρία Bloch-Floquet αναπτύχθηκε πρώτα από τον μαθηματικό Gaston Floquet και εν συνεχεία εμπλουτίστηκε από τον φυσικό Felix Bloch. Αποτελεί μία θεωρία που αναφέρεται σε κρυσταλλικές περιοδικές δομές και βρίσκει εφαρμογή στην κβαντομηχανική και στην ηλεκτρονική.



ΣΧΗΜΑ 2 ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΕΝΟΣ ΤΥΠΙΚΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ BLOCH

1.2 Εφαρμογή και χρησιμότητα περιοδικών υλικών

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, τα υλικά με αυτή τους την δομή (περιοδική) μας βοηθάνε να χειριστούμε κάποιους κυματισμούς σε τεχνικές εφαρμογές. Ένας μεγάλος κλάδος χρήσης αυτής της θεωρίας έχει εφαρμογή στην βιοιατρική και στην ηλεκτρονική γενικότερα. Τέτοιες λειτουργίες όμως θα βρούμε και στον χώρο της μηχανικής και πιο συγκεκριμένα στο αντικείμενο μας, στην μηχανική των δομικών υλικών με την οποία ασχολείται και η παρούσα εργασία. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να δούμε εκτενώς τη συμπεριφορά ενός δοκαριού με περιοδική δομή υλικών, απέναντι σε κύματα Bloch τα οποία διαδίδονται κατα μήκος της. Σκοπός μας είναι να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για διαφορετικές συχνότητες κυματισμών που διαδίδονται στη δοκό. Η θεωρία αυτή βρίσκει εφαρμογή σε ειδικευμένες μεθόδους αντισεισμικών κατασκευών και σχεδιασμού.

Για παράδειγμα η χρήση ενός αντηχείου του οποίου η κατασκευή βασίζεται στη θεωρία Bloch-Floquet θα βοηθήσει στο να μειωθούν-εξασθενίσουν επιφανειακά σεισμικά κύματα τα οποία θα προκαλούσαν μια σειρά από βλάβες και ίσως και κατάρρευση σε μία κατασκευή. Το ίδιο θα παρατηρήσουμε και στην κατασκευή ενός θεμελίου με περιοδική δομή. Έχουμε τη δυνατότητα να αποσβέσουμε σεισμικές δονήσεις (κύματα) τα οποία θα μεταφέρονταν μέσω της θεμελίωσης σε υπερκείμενα δομικά στοιχεία και θα προκαλούσαν καταπονήσεις και επικίνδυνες μετακινήσεις στην κατασκευή μας. Κατασκευές υψηλής σπουδαιότητας λόγω της χρήσης τους όπως μια πυρηνική μονάδα παραγωγής ενέργειας, είναι απαραίτητο στο να διασφαλίζονται ολόένα και περισσότερο με την πάροδο των χρόνων απέναντι σε σεισμικές διεγέρσεις γι αυτό και μελέτες της μηχανικής όπως αυτή που πραγματευόμαστε καλούνται να δώσουν λύσεις και ξεπερνάνε με τον καιρό το πειραματικό τους στάδιο.

Κεφάλαιο 2: Εξισώσεις-Θεωρία δοκού

Ξεκινώντας το κεφάλαιο των εξισώσεων που χρειαζόμαστε για την ανάλυση της διάδοσης των κυμάτων στα περιοδικά υλικά, θα χρειαστεί να διακρίνουμε την θεωρία μας σε 2 κατηγορίες τις οποίες θα συνδυάσουμε.

- Κυματική
- Ελαστική θεωρία (μονοεπίπεδη κάμψη δοκού)

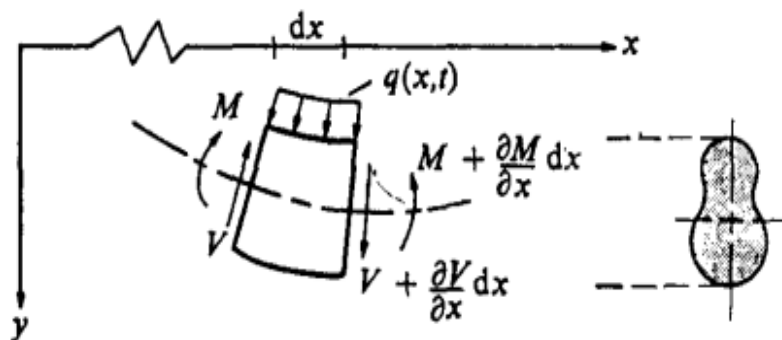
2.1 Ελαστική θεωρία κάμψης δοκού

Το στοιχείο στο οποίο θα εργαστούμε είναι μία δοκός απείρου μήκους. Ο κυματισμός καθώς διαδίδεται μέσω της δοκού της προκαλεί μια κίνηση (ταλάντωση) και ως αυτού του φαινομένου παρατηρείται στη δοκό καμπτική καταπόνηση. Απο τη θεωρία ελαστικότητας έχουμε ότι η καμπυλότητα K ενός γραμμικού ελαστικού υλικού ισούται με το πηλίκο

$$K = \frac{M}{EI}$$

Όπου I η ροπή αδράνειας του στοιχείου και E το μέτρο ελαστικότητάς του υλικού του. Η βασική εξίσωση καμπτικής ροπής-καμπυλότητας μπορεί να γραφτεί και ως

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M}{EI} \quad (2.1.1)$$



ΣΧΗΜΑ 3 ΚΟΜΜΑΤΙ ΔΟΚΟΥ ΠΟΥ ΥΠΟΚΕΙΤΑΙ ΣΕ ΚΑΜΨΗ

Σβερώνης Δημήτριος

Όπου την μετακίνηση y του σχήματος εμείς στην εργασία μας την βρίσκουμε ως w .

Στην εξίσωση της ροπής κάμψης παίρνουμε την παραδοχή των μικρών μετακινήσεων και των μικρών κλίσεων της δοκού. Στη συνέχεια γράφουμε την εξίσωση κίνησης της παλώμενης δοκού στην κατακόρυφη διεύθυνση.

$$-V + \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + q dx = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1.2)$$

Στην εξίσωση A είναι το εμβαδό διατομής της δοκού και ρ η πυκνότητα του υλικού ανά μονάδα όγκου. Τροποποιούμε λοιπόν την 2.1.2 και έχουμε την μορφή της αυτή

$$\frac{\partial V}{\partial x} + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1.3)$$

Αγνοώντας την επιρροή της στροφικής αδράνειας της δοκού, η εξίσωση της ροπής είναι η βασική εξίσωση ροπής ελαστικής κάμψης που ξέρουμε από τη στατική και συνδέει την τέμνουσα V της διατομής με την ροπή M της.

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.1.4)$$

Από τις εξισώσεις 2.1.3 και 2.1.4 και αγνοώντας την υψηλής τάξης επιρροή του φορτίου q στη ροπή, έχουμε τη σχέση

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.1.5)$$

Από τη σύνθεση των σχέσεων 2.1.1 και 2.1.5 έχω:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2.1.6)$$

Η 2.1.6 λοιπόν είναι η βασική εξίσωση της εγκάρσιας κίνησης μιας δοκού ή χορδής. Σε περίπτωση μηδενικού φορτίου q και έστω ότι έχουμε ένα ομογενές υλικό στη δοκό μας, τότε για να έχω το μέτρο ελαστικότητας E του υλικού μου σταθερό, καθώς και σταθερή διατομή για να έχω επίσης σταθερή ροπή αδράνειας I η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται τελικώς σ' αυτή τη μορφή.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.7)$$

με

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A}$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση 4^{ης} τάξης αποτελεί την βασική εξίσωση κίνησης του δοκαριού μας στην οποία και θα βασιστούμε.

Μιλώντας ως συνέχεια των προηγούμενων, για μια εξαναγκασμένη κίνηση της δοκού θα ξεκινήσουμε κάνοντας τη θεώρηση μιας ημίαιρου δοκού η οποία διεγείρεται σε μια αρμονική κίνηση. Εξετάζοντας την συνοριακή της συνθήκη έχω, ότι η εγκάρσια μετατόπιση της δοκού στο άκρο της σύμφωνα και με την εξίσωση της αρμονικής διέγερσης είναι η εξής :

$$y(0, t) = w_0 e^{-i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1.8)$$

Ο δεύτερος όρος-συνθήκη εξάγεται από το γεγονός ότι το άκρο της δοκού μας είναι ελεύθερο να στραφεί επομένως η ροπή σ' εκείνο το σημείο είναι 0. Επομένως απ' την εξίσωση της κάμψης που είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου (2.1.1) προκύπτει ο παραπάνω δεύτερος όρος. Θεωρώντας μια λύση για την 2.1.8 της μορφής

$$w(x, t) = W(x) e^{-i\omega t} \quad (2.1.9)$$

Αντικαθιστώντας την 2.1.9 στην 2.1.7 έχω ότι

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \gamma^4 W = 0 \quad (2.1.10)$$

Όπου γ ο κυματαριθμός

Η 2.1.10 λοιπόν έχει ως λύση την εξίσωση της μορφής :

$$W = Ae^{i\gamma x} + Be^{-i\gamma x} + Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x} \quad (2.1.11)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι και η εξίσωση των κυμάτων τα οποία εισέρχονται στη δοκό.

2.2 Κυματική και εξίσωση διασποράς

Ας ξεκινήσουμε μιλώντας για τη διάδοση ενός αρμονικού κύματος. Για λόγους ευκολίας χρησιμοποιούμε το παράδειγμα μιας δοκού απείρου μήκους. Για την περιγραφή της κίνησης της έχω την εξίσωση 2.1.7 που αναφέραμε πιο πάνω. Ας θέσουμε ως βάση την εξίσωση της διάδοσης των αρμονικών κυμάτων.

$$w = Ae^{i(\gamma x - \omega t)} \quad (2.2.1)$$

Όπου γ ο κυματαριθμός και ω η κυκλική συχνότητα της κίνησης. Αν αντικαταστήσουμε λοιπόν την εξίσωση 2.2.1 στην εξίσωση 2.1.7 προκύπτει η εξής σχέση:

$$\gamma^4 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} \quad (2.2.2)$$

ή

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \quad , \quad \gamma = \pm i \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}$$

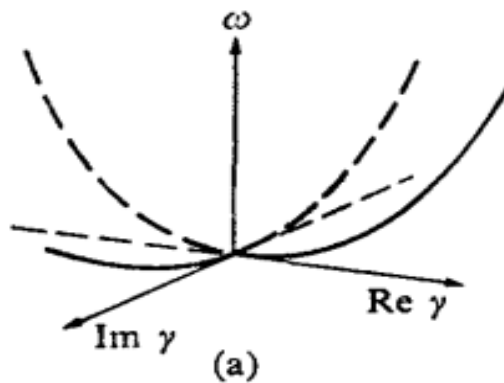
Σβερώνης Δημήτριος

Έχω από τη θεωρία της κυματικής ότι, η ταχύτητα φάσης c (ταχύτητα κυματισμού) συνδέεται με την κυκλική συχνότητα ω μέσω της σχέσης $\omega = \gamma c$.

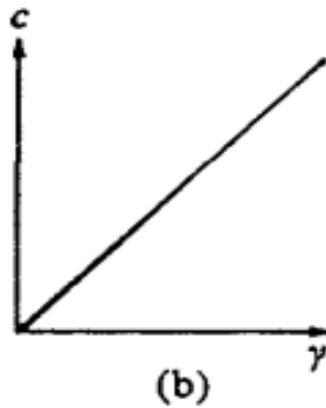
Αν αντικαταστήσω λοιπόν την σχέση αυτή στην 2.2.2 εξίσωση προκύπτει η μορφή

$$c = \pm a\gamma \quad (2.2.1)$$

Η γραφική απεικόνιση της 2.2.2 μας δείνει το λεγόμενο **Συχνοτικό Φάσμα** ή αλλιώς **Φάσμα της Συχνότητας**. Όπως μας δείχνει όμως η 2.2.2 έχουμε μια καμπύλη στον πραγματικό χώρο και μία στον φανταστικό. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα που αποικονίζουν *a)* Το φάσμα της συχνότητας μέσω των καμπυλών της 2.2.2, *b)* Η καμπύλη διασποράς μέσω της σχέσης 2.2.3 (μόνο το θετικό της κομμάτι).



ΣΧΗΜΑ 4 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΦΑΣΜΑΤΟΣ



ΣΧΗΜΑ 5 ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Από τα διαγράμματα που είδαμε. Παρατηρούμε ότι έχουμε αρνητικές και θετικές πραγματικές ρίζες. Από την εξίσωση του διαδιδόμενου κύματος είναι εύκολο να αντιληφθεί κανείς ότι οι θετικές ρίζες αντιστοιχούν σε κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά στη δοκό μας ενώ οι αρνητικές σε κύματα που διαδίδονται προς τα αριστερά της.

Όσον αφορά τις φανταστικές ρίζες της εξίσωσης του κυματαριθμού γ περιγράφουν μη διαδιδόμενα κύματα, τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν στην κυματική ως δονήσεις καθώς στο φαινόμενο της διάδοσης, φανταστικές ρίζες στον κυματαριθμό δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτές.

Τέλος αυτό που παρατηρούμε στο διάγραμμα της διασποράς, είναι ότι έχω συνεχή αύξηση της ταχύτητας του κυματισμού (ταχύτητα φάσης) όσο αυξάνω τον κυματαριθμό ή μειώνοντας το μήκος κύματος (*Εξίσωση κυματαριθμού $\gamma = 2\pi/\lambda$ όπου λ το μήκος κύματος*). Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται εφόσον έχουμε αγνοήσει τη συνεισφορά της στροφικής αδράνειας της δοκού καθώς και την ύπαρξη φαινομένου διάτμησης στη δοκό κατά τον κυματισμό)

Συνοψίζοντας, σ αυτό το κεφάλαιο της εργασίας, μιλήσαμε για τις εξισώσεις της κυματικής και της ελαστικής θεωρίας που θα βασιστούμε στη μελέτη μας καθώς και για βασικές έννοιες που θα πρέπει να έχουμε διασαφηνίσει όπως η καμπύλη διασποράς και το φάσμα συχνοτήτων ενός κυματισμού. Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε εκτενώς με την περίπτωση της δοκού που ασχολούμαστε και θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε συμπεράσματα μέσω υπολογιστικής ανάλυσης.

Κεφάλαιο 3: Ανάλυση του προβλήματος

3.1 Αποτύπωση παραμέτρων δοκού

Η δοκός που θα μελετήσουμε έχει άπειρο μήκος και διέπεται από τις εξισώσεις που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για τον υπολογισμό σχέσεων, εξισώσεων και την τελική εξαγωγή των διαγραμμάτων θα χρησιμοποιηθεί λογισμικό υπολογιστικής ανάλυσης. Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε στην διαδικασία είναι το *Wolfram Mathematica*.

Σαν πρώτο βήμα θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε σχηματικά τη δοκό. Η δομή της αποτελείται από δύο υλικά. Αυτά τα υλικά είναι τοποθετημένα διαδοχικά κατά μήκος της δοκού. Ας ονομάσουμε λοιπόν υλικό με δείκτη **0** το πρώτο υλικό και υλικό με δείκτη **1** το δεύτερο. Για την μελέτη μας υποθέσαμε ότι τα πάχη των δύο υλικών είναι ίσα.

Αρχικά ονομάζουμε το πάχος του υλικού **0** ως Δ_1 και το πάχος του υλικού **1** ως Δ_2 . Το άθροισμα των δύο παχών των στρωμάτων το συμβολίζουμε με Δ .

Άρα έχω

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta \quad (3.1.1)$$

Για να μπορέσουμε να κάνουμε δοκιμές όσον αφορά τα υλικά, θα χρησιμοποιήσουμε παραμέτρους που συνδέουν σημαντικά στοιχεία του. Χρησιμοποιήσαμε 4 παραμέτρους για αυτό το σκοπό. Η πρώτη παράμετρος συμβολίζεται με ν και αναφέρεται στην σχέση 3.1.1

$$1. \Delta_1 = \nu\Delta \quad , \quad \Delta_2 = (1 - \nu)\Delta$$

Η δεύτερη παράμετρος συμβολίζεται με \mathbf{N} και συσχετίζει τα μέτρα ελαστικότητας των δύο υλικών

$$2. E_1 = \mathbf{N}E_0$$

Η Τρίτη παράμετρος που εισάγουμε συμβολίζεται με \mathbf{M} και συσχετίζει τις ροπές αδρανείας των δύο υλικών

$$3. J_1 = \mathbf{M}J_0$$

Η τέταρτη και τελευταία παράμετρος συμβολίζεται με \mathbf{Z} και συσχετίζει τα εμβαδά της εγκάρσιας διατομής της δοκού στα στρώματα των δύο υλικών

$$4. A_1 = ZA_0$$

Από το προηγούμενο κεφάλαιο, είδαμε στην εξίσωση εγκάρσιας κίνησης της δοκού λόγω της κυματικής διέγερσης, τον όρο που συμβολίσαμε με \mathbf{a} και ισούνται με : $a_i = \sqrt{\frac{E_i J_i}{\rho A_i}}$. Έτσι και εδώ έχουμε δύο διαφορετικά \mathbf{a} ένα για κάθε υλικό.

Τέλος εισάγουμε και τον κυματαριθμό γ ξεχωριστά για τα δύο υλικά

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{\omega}{\alpha_i}}$$

3.2 Ανάπτυξη και αποτύπωση εξισώσεων του προβλήματος

Εφόσον μας απασχολεί η μετακίνηση κατακόρυφα της δοκού, ας ασχοληθούμε με την εξίσωση κίνησης της εγκάρσια. Αρχικά ονομάσαμε την κατακόρυφη μετακίνηση της δοκού $\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$. Όπως είδαμε όμως απ'τη σχέση 2.1.9 μπορούμε να ασχοληθούμε υπολογιστικά μόνο με άγνωστο τη θέση στη δοκό \mathbf{x} . Ονομάσαμε λοιπόν την μετακίνηση με άγνωστο μόνο τη θέση, ως $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ και την για κάθε ένα από τα δύο υλικά ξεχωριστά. Στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε την σχέση 2.1.10 η οποία είναι ακόμη μία εξίσωση που αφορά το $\mathbf{W}(\mathbf{x})$. Χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση της ροπής κάμψης της δοκού η οποία ισούται με τη σχέση 2.1.1 με θετικό όμως πρόσημο για κάθε υλικό ξεχωριστά. Θα χρειαστούμε επίσης την σχέση της τέμνουσας \mathbf{Q} του κάθε υλικού που ισούται με την πρώτη παράγωγο της ροπής \mathbf{M} σε κάθε σημείο του δοκαριού.

- $w_0(x, t) = W_0(x)e^{-i\omega t}$
- $w_1(x, t) = W_1(x)e^{-i\omega t}$
- $W_1 = a_1 e^{i\gamma_1 x} + b_1 e^{-i\gamma_1 x} + c_1 e^{\gamma_1 x} + d_1 e^{-\gamma_1 x}$

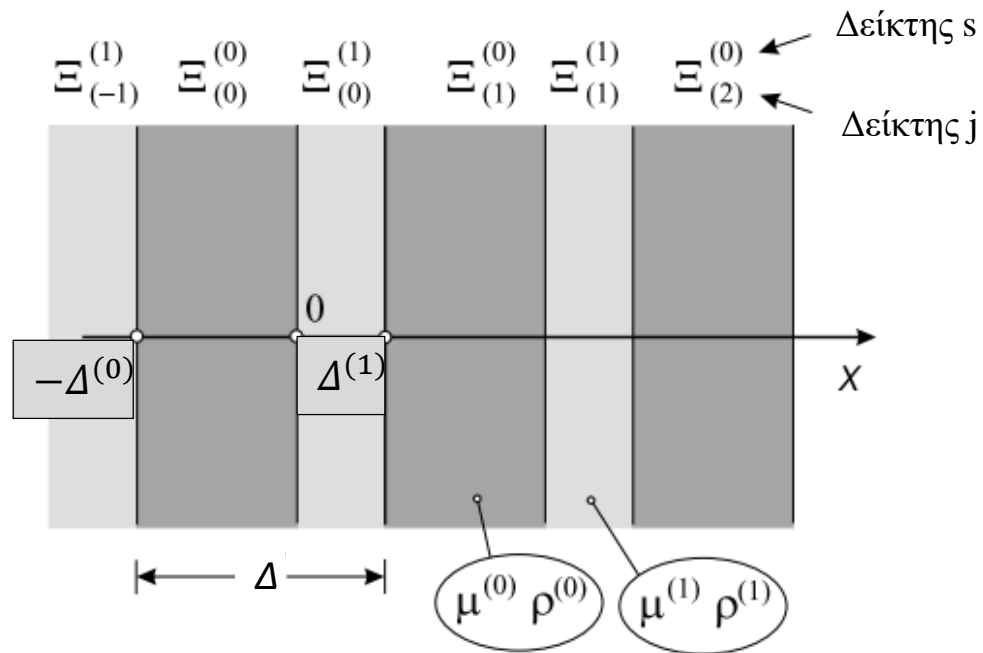
- $W_2 = a_2 e^{i\gamma_2 x} + b_2 e^{-i\gamma_2 x} + c_2 e^{\gamma_2 x} + d_2 e^{-\gamma_2 x}$
- $M_0(x) = E_0 J_0 W_0''(x)$
- $M_1(x) = E_1 J_1 W_1''(x)$
- $Q_0(x) = M_0'(x)$
- $Q_1(x) = M_1'(x)$

Συνεχίζοντας λοιπόν την διαδικασία της αποτύπωσης όλων των εξισώσεων που χρειαζόμαστε στην εργασία μας, θα αναφερθούμε στις βασικές εξισώσεις που απαρτίζουν το σύστημα του προβλήματός μας. Όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια η βασική εξίσωση του εισερχόμενου κυματισμού είναι η 2.1.11 ($W_1 = a_1 e^{i\gamma_1 x} + b_1 e^{-i\gamma_1 x} + c_1 e^{\gamma_1 x} + d_1 e^{-\gamma_1 x}$) για το υλικό 1 και αντίστοιχα ($W_2 = a_2 e^{i\gamma_2 x} + b_2 e^{-i\gamma_2 x} + c_2 e^{\gamma_2 x} + d_2 e^{-\gamma_2 x}$) για το υλικό 2. Όπως βλέπουμε οι άγνωστοι στις 2 εξισώσεις κίνησης της δοκού μας είναι οι συντελεστές. Έχουμε 4 λοιπόν συντελεστές για κάθε υλικό, άρα στο σύνολο 8 αγνώστους, γι αυτό και το σύστημα που θέλουμε να μορφώσουμε και να επιλύσουμε είναι ένα σύστημα 8×8 . Έχουμε λοιπόν ως αρχικό στόχο να βρούμε 8 διαφορετικές εξισώσεις για να μπορέσουμε να μορφώσουμε το σύστημά μας.

Αρχικά για τις εξισώσεις θα θέσουμε κάποιες αρχές και προϋποθέσεις στις διεπιφάνειες των υλικών. Στους υπολογισμούς μας θα ασχοληθούμε με ένα συγκεκριμένο μπλοκ, το οποίο αποτελείται από τα δυο υλικά και έχει πάχος Δ .

- Στην πρώτη εξίσωση έχουμε την συνθήκη των ίσων ροπών στη διεπιφάνεια , στο σημείο $\mathbf{0}$.
- Στη δεύτερη εξίσωση έχουμε την ισότητα των τεμνουσών στη διεπιφάνεια , στο σημείο $\mathbf{0}$.
- Στην τρίτη εξίσωση έχουμε τη συνθήκη των ίσων κλίσεων στη διεπιφάνεια , στο σημείο $\mathbf{0}$ (κλίση θυμίζουμε ότι είναι η πρώτη παράγωγος της μετακίνησης).
- Στην τέταρτη εξίσωση έχουμε την παραδοχή των ίσων μετακινήσεων στη διεπιφάνεια, στο σημείο $\mathbf{0}$.

Για τις επόμενες 4 εξισώσεις που χρειαζόμαστε, θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη **Bloch**. Η συνθήκη όπως αναλύσαμε, συνδέει μεγέθη της δοκού σε θέσεις που απέχουν απόσταση Δ . Όπως είπαμε εμείς θέλουμε να εργαστούμε σε ένα συγκεκριμένο μπλοκ των 2 υλικών και εφόσον αναφερόμαστε στη θέση 0 εργασόμαστε στο μπλοκ 0 όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα



ΣΧΗΜΑ 6 ΤΥΠΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ ΜΕ ΔΥΟ ΥΛΙΚΑ

Όπως είπαμε λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη **Bloch** για να συνδέσουμε τα ίδια μεγέθη των 4^{ov} εξισώσεων που αναφέρθηκαν ήδη για να συμπληρώσω τις υπόλοιπες 4 εξισώσεις του συστήματος μας. Θέλουμε στην εξίσωση μας να αναφερόμαστε στο μπλοκ 0. Έχουμε αναφέρει ότι το πάχος του υλικού 0 το συμβολίζουμε με Δ_1 και το πάχος του υλικού 1 με Δ_2 . Η συνθήκη **Bloch** (οωνεί περιοδικότητα) μας συνδέει μετακινήσεις οι οποίες απέχουν απόσταση ίση με ένα μπλοκ. Μπλοκ εννοούμε φυσικά το συνολικό πάχος των στρώσεων των υλικών το οποίο λόγω της περιοδικότητας της δομής μας επαναλαμβάνεται. Στη δική μας περίπτωση έχουμε αναφέρει ότι ένα μπλοκ ισούται σε πάχος με Δ . Τα πάχη των

Σβερώνης Δημήτριος

υλικών μας όπως είπαμε τα θεωρούμε από την αρχή του προβλήματος ίσα για λόγους διευκόλυνσης.

Εφόσον λοιπόν κάνουμε τη θεώρηση ότι οι μετακινήσεις που έχουμε ικανοποιούν τη συνθήκη **Bloch**, γι αυτό ισχύει η παρακάτω εξίσωση

$$w_{j+1}^S(x + \Delta) = e^{ih\Delta} w_j^S(x) \quad (3.2.1)$$

(Συνθήκη Bloch)

Στην εξίσωση με S συμβολίζουμε το υλικό μας, με j τον αριθμό του μπλοκ στο οποίο αναφερόμαστε, με Δ το συνολικό πάχος ενός μπλοκ και με h την παράμετρο **Bloch**. Στη δική μας περίπτωση λοιπόν για τη μόρφωση των τεσσάρων τελευταίων εξισώσεων του συστήματος θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω συνθήκη στο μπλοκ 0. Οι τέσσερις εξισώσεις που δημιουργούνται είναι οι εξής

- Στην πέμπτη συνολικά εξίσωση έχουμε τη συνθήκη Bloch για την συσχέτιση των μετακινήσεων των 2 υλικών
- Στην έκτη συνολικά εξίσωση έχουμε τη συνθήκη Bloch για τη συσχέτιση των ροπών των 2 υλικών
- Στην έβδομη συνολικά εξίσωση έχουμε τη συνθήκη Bloch για τη συσχέτιση των τεμνουσών των 2 υλικών
- Στην όγδοη συνολικά εξίσωση έχουμε τη συνθήκη Bloch για τη συσχέτιση των κλίσεων των 2 υλικών

Παρακάτω βλέπουμε αναλυτικά τις 8 εξισώσεις του συστήματός μας που θα χρησιμοποιήσουμε για την εύρεση των τελικών λύσεων της εξίσωσης μας (Εξίσωση 2.1.11)

1. $M_0(0) = M_1(0)$
2. $Q_0(0) = Q_1(0)$
3. $W_0'(0) = W_1'(0)$
4. $W_0(0) = W_1(0)$
5. $W_1(\Delta_2) = e^{hi(\Delta_1+\Delta_2)}W_0(-\Delta_1)$
6. $M_1(\Delta_2) = e^{hi(\Delta_1+\Delta_2)}M_0(-\Delta_1)$
7. $Q_1(\Delta_2) = e^{hi(\Delta_1+\Delta_2)}Q_0(-\Delta_1)$
8. $W_1'(\Delta_2) = e^{hi(\Delta_1+\Delta_2)}W_0'(-\Delta_1)$

Συνεχίζοντας αφού έχουμε και τις 8 εξισώσεις, θα μορφώσουμε το σύστημά μας σε μορφή πίνακα. Δημιουργούμε λοιπόν τον πίνακα μας που είναι της τάξης 8×8 και τον ονομάζουμε MAT στο πρόγραμμα.

Χρησιμοποιώντας την εντολή **CoefficientArrays** στο πρόγραμμα μπροστά από ένα σύνολο στο οποίο έχουμε { Πολυώνυμα , Μεταβλητές } έχουμε την δυνατότητα να πάρουμε πίνακες συντελεστών των μεταβλητών που υπάρχουν στα πολυώνυμα. Στην περίπτωσή μας λοιπόν, εμείς στην θέση των Πολυωνύμων βάλουμε το σύνολο **G** των 8 εξισώσεων και στην θέση των Μεταβλητών βάλουμε τους συντελεστές-αγνώστους **a₀, b₀, c₀, d₀, a₁, b₁, c₁, d₁** του συστήματος.

Για να πάρουμε τους συντελεστές με μορφή πίνακα κάνουμε χρήση της εντολής **MatrixForm** του προγράμματος.

Σαν διευκόλυνση και απλοποίηση των μαθηματικών στοιχείων του πίνακα, χρησιμοποιήσαμε την εντολή **FullSimplify** για να πετύχουμε τις οποιεσδήποτε παραγοντοποιήσεις και πράξεις και να έχουμε πιο απλά αριθμητικά αποτελέσματα. Παράλληλα ορίσαμε τις σταθερές που εμφανίζονται στις πράξεις μας να είναι θετικές ($J_0 > 0, E_0 > 0, \rho > 0, A_0 > 0, \Delta > 0, \Omega > 0$).

Αυτός λοιπόν είναι ο τελικός πίνακας MAT του συστήματος που θα χρειαστεί να λύσουμε ώστε να πάρουμε τις τιμές των μεταβλητών-συντελεστών **a₀, b₀, c₀, d₀, a₁, b₁, c₁, d₁**

Κεφάλαιο 4 : Εύρεση ριζών της εξίσωσης : $\det[MAT]=0$ και εξαγωγή καμπυλών

4.1 Εξίσωση $\det[MAT]=0$

Πριν αναφερθούμε στην ορίζουσα του πίνακα, θα χρειαστεί να αναφέρουμε δύο αντικαταστάσεις αριθμητικές που έγιναν με σκοπό την απλοποίηση των όρων του πίνακα.

Πρώτα ως ω το πηλίκο $\Omega \frac{a_0}{\Delta^2}$. Αυτό το κάναμε διότι στα διαγράμματα τελικώς θέλω να σχηματιστεί στον ένα άξονα της καμπύλης μας το γινόμενο $\omega \Delta a_0$. Η δεύτερη αντικατάσταση που κάναμε είναι ότι ορίσαμε την παράμετρο **Bloch** (h) ως το πηλίκο $\frac{H}{\Delta}$ κι αυτό γιατί στον οριζόντιο άξονα των διαγραμμάτων μας τελικώς θέλουμε το γινόμενο Δh .

Για όλους τους συντελεστές $a_j^S, b_j^S, c_j^S, d_j^S$ όπου S το υλικό και j το μπλοκ της δοκού ισχύει η οιονεί περιοδικότητα εκτός από τους 8 συντελεστές του μπλοκ 0. Γι αυτούς τους συντελεστές θα εφαρμόσουμε τη συνέχεια μετατόπισης και κλίσης στις διεπαφές. Εργαζόμαστε στις δυο διεπαφές μεταξύ των υλικών 0 και 1 στο μπλοκ 0 και μεταξύ των υλικών 0 και 1 στη διεπαφή του μπλοκ 0 και του μπλοκ 1.

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη **Bloch** (εξίσωση 3.1.2) μαζί με την αρχή των ίσων μετακινήσεων και κλίσεων στις διεπαφές που προείπαμε , παράγεται το σύστημα

$$MAT\{a_0^0, a_0^1, b_0^0, b_0^1, c_0^0, c_0^1, d_0^0, d_0^1\}^T = 0 \quad (4.1.1)$$

Όπου **MAT** ο πίνακας του συστήματος που εργαζόμαστε

Μαθηματικώς λοιπόν η μοναδική συνθήκη που χρειάζεται για να έχει το σύστημα της εξίσωσης 4.1.1 μία μη τετριμμένη λύση είναι ο πίνακας **MAT** να είναι μοναδικός. Αυτό στα μαθηματικά μεταφράζεται με το να έχουμε την ορίζουσα του πίνακα ίση με το 0.

$$Det[MAT] = 0 \quad (4.1.2)$$

Αυτή θα είναι και η εξίσωση στην οποία θα εργαστούμε. Οι ρίζες της θέλουμε να μας αποτυπώσουν στο τέλος της διαδικασίας τις καμπύλες $\omega\Delta\alpha_0 - \Delta h$, μέσω των οποίων θα εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την συμπεριφορά της δοκού περιοδικής δομής που έχουμε δημιουργήσει, σε διάφορες τιμές συχνοτήτων ω κυματικών διεγέρσεων καθώς και σε διάφορες παραμέτρους των ίδιων των υλικών τις οποίες θα διαφοροποιούμε στα δεδομένα της επίλυσης.

Η παραπάνω διαδικασία θα παρουσιαστεί με τη μορφή εντολών στο πρόγραμμα που εργαζόμαστε, μέχρι το σημείο που έχουμε περιγράψει. Αρχικώς για λόγους ευκολίας και απλοποίησης δημιουργήσαμε συμβολικά μία νέα ορίζουσα στην οποία θα δουλέψουμε την $\mathit{ddet}[\mathbf{H},\mathbf{\Omega}]$. Αυτό το κάναμε διότι θέλουμε στις ρίζες που θα βρούμε οι δύο μεταβλητές μας να είναι στην ουσία το \mathbf{H} που έχουμε αναφέρει πιο πάνω και το $\mathbf{\Omega}$.

4.2 Εύρεση ριζών

Ξεκινώντας με τη διαδικασία χρησιμοποιούμε την εντολή του *πίνακα τιμών* για να τοποθετήσουμε μια περιοχή που θα ψάξει για ρίζες το πρόγραμμα. Οι δύο μας μεταβλητές όπως είπαμε είναι το \mathbf{H} το οποίο αναφέρεται στον οριζόντιο άξονα του διαγράμματος που θέλουμε να εξάγουμε και το $\mathbf{\Omega}$ το οποίο αφορά τον κατακόρυφο άξονα. (Θυμίζουμε $\mathbf{\Omega} = \frac{\omega\Delta^2}{\alpha_0}$ και $\mathbf{H} = h\Delta$).

Ορίζουμε λοιπόν την περιοχή που θέλουμε να ψάξει το πρόγραμμα για τις ρίζες. Εμείς ορίζουμε τιμές στο \mathbf{H} και θέλουμε το πρόγραμμα να μας αποδώσει τιμές στο $\mathbf{\Omega}$. Έτσι πρωταρχικά ορίζουμε την περιοχή και το βήμα με το οποίο σαρώνει το πρόγραμμα, για τις τιμές του $\mathbf{\Omega}$. Το σύνολο που τα περιέχει το ονομάζουμε *step*.

$$\{i, 70, 150, 0.3\}$$

Στο σύνολο αυτό έστω i ονομάζουμε τον άγνωστο που ψάχνουμε για τιμές. Το πρώτο νούμερο είναι το νούμερο της αρχής της περιοχής ανίχνευσης και το δεύτερο το νούμερο-κέντρο τέλος ανίχνευσης. Τέλος το τρίτο νούμερο αποτελεί το βήμα, με το οποίο το πρόγραμμα εργάζεται μέσα στους αριθμούς.

Εδώ είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ότι για καλύτερη και πιο σαφή εικόνα αποτελεσμάτων, θα χρειαστούμε σε κάθε διάγραμμα που θα εξάγουμε 4 διαφορετικές καμπύλες. Γι αυτό το λόγο

Σβερώνης Δημήτριος

καταλαβαίνουμε ότι χρειάστηκαν πολλά σύνολα ανίχνευσης για το H μέχρι την εξαγωγή όλων των απαραίτητων καμπυλών.

Όσον αφορά τη μεταβλητή H την οποία ουσιαστικά θα ορίζουμε μέσω συνόλων έτσι ώστε το πρόγραμμα να μας δίνει τα αντίστοιχα Ω , εργαστήκαμε με τον ίδιο τρόπο όπως και για τα Ω μόνο που στο σύνολο ανίχνευσης, σαν όρια έχουμε την περιοχή 0-π και ως βήμα χρησιμοποιήσαμε το 0,1. Ως λειτουργική ακρίβεια στα αποτελέσματα έχουμε θέσει τα 30 δεκαδικά ψηφία στο πρόγραμμα.

Το επόμενο βήμα είναι ο πίνακας των Ω που βγάλαμε σαν αποτέλεσμα της λύσης της εξίσωσης της ορίζουσας.

Σε κάθε ομάδα Ω που εμφανίζεται στον πίνακα, έχουμε στην ουσία 4 διαφορετικούς αριθμούς, οι οποίοι λόγω της περιοχής που έχουμε ορίσει στο πρόγραμμα να ανιχνεύσει κυμαίνονται μέσα στα όρια της. Αν φυσικά αλλάξουμε την περιοχή ανίχνευσης θα έχουμε διαφορετικά αποτελέσματα. Η ουσία σ αυτό το βήμα είναι να καταλάβουμε ότι, όταν ορίζουμε περιοχή στα Ω πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί για το μέσον του πεδίου της. Για παράδειγμα σε μία περίπτωση εμείς είχαμε το πεδίο από 70 μέχρι 150. Για αυτό το πεδίο, το πρόγραμμα μας έδωσε το μεγαλύτερο πλήθος των αποτελεσμάτων κοντά στο 100 και στο 115! Που πράγματι βρίσκονται σχετικά προς το μέσον του πεδίου μας.

Κάτι ακόμα που θα πρέπει να παρατηρήσουμε είναι ότι τα διαφορετικά νούμερα που μας έβγαλε σ' αυτή την ομάδα Ω απέχουν αρκετά μεταξύ τους σαν αριθμοί. Αυτό συμβαίνει διότι όπως είπαμε και πιο πάνω, οι καμπύλες που θέλουμε να μορφώσουμε με τα Ω αυτά είναι 4. Άρα καταλαβαίνουμε ότι το κάθε ένα από αυτά τα νούμερα, αντιπροσωπεύει και διαφορετική καμπύλη.

Είναι ευκόλος αντιληπτό ότι συνολικά το πλήθος αυτών των πινάκων για να σχηματιστούν επαρκώς όλες οι καμπύλες θα είναι μεγάλο. Παράλληλα για μπορέσουμε να εμφανίσουμε όσο το δυνατόν ακριβέστερα μια καμπύλη χρειάστηκε σαν διαδικασία να δοκιμάσουμε για κάθε παραμετροποίηση (παραμέτροι μεγεθών αρχικά N, M, Z, v) πολλά διαφορετικά όρια ανίχνευσης. Υπήρχαν φορές που στην προσπάθεια αυτή, δεν μπορούσαμε να εντοπίσουμε τα 4 διαφορετικά Ω των 4^{ov} καμπυλών, και οι δοκιμές ήταν πολλές, άλλωτε με μικρά πεδία (περιοχές) ανίχνευσης, άλλωτε με διευρυμένα όρια και μεγάλα πεδία. Μια σημείωση σ' αυτό το ζήτημα είναι ότι όσο αυξάνω τα όρια του πεδίου ανίχνευσης ελαχιστοποιώ και την "πυκνότητα" της στοίχισης των αριθμών-αποτελεσμάτων που παίρνω.

Για παράδειγμα, βάζοντας ένα αρχικό πεδίο ανίχνευσης (70,100) θα πάρω ένα μικρό πιθανώς πλήθος αποτελεσμάτων αλλά ελαχιστοποιώ τις πιθανότητες να μου έχουν διαφύγει νούμερα ενδιάμεσα απο τις καμπύλες. Αν πάλι δοκιμάσω με ένα πολύ μεγαλύτερο πεδίο όπως (40,160) είναι σχεδόν βέβαιο ότι μπορεί κάποια νούμερα να μην εμφανισθούν στα αποτελέσματα, διότι το πρόγραμμα προσπαθεί να μας δώσει ένα παρόμοιο πλήθος αριθμών σε κάθε περίπτωση, ενώ τα όρια στα οποία έχει να ψάξει είναι διευρυμένα.

4.3 Εξαγωγή καμπυλών και δοκιμές παραμέτρων N, M, Z, ν

Στην αρχή της μόρφωσης του προβλήματος που πραγματευόμαστε, στο πρόγραμμα, είχαμε ορίσει τις 4 παραμέτρους οι οποίες συσχετίζουν σημαντικές ιδιότητες των 2 υλικών της δοκού μας. Είχαμε αναφέρει χαρακτηριστικά ότι η παράμετρος N συσχετίζει τα μέτρα ελαστικότητας των δύο υλικών, η παράμετρος M συσχετίζει τις ροπές αδράνειας των δύο υλικών, η παράμετρος Z συσχετίζει τα εμβαδά εγκάρσιας διατομής των υλικών ενώ το ν το χρειαστήκαμε για να συσχετίσουμε τα πάχη των δύο υλικών. Όσον αφορά τα πάχη, επιλέξαμε για απλοποιητικούς λόγους να τα κρατήσουμε ίσα μεταξύ τους, γι αυτό το λόγο στη σχέση που τα συνδέει, ορίζουμε την παράμετρο ν ίση με 0,5 και δεν τη μεταβάλλουμε στις ακόλουθες δοκιμές μας. Στις υπόλοιπες 3 παραμέτρους θα μεταβάλλουμε τις τιμές τους. Στην κάθε δοκιμή αλλάζουμε μόνο μία παράμετρο κρατώντας τις υπόλοιπες στην τιμή 1. Οι τιμές που χρησιμοποιούμε στις δοκιμές για κάθε παράμετρο είναι η τιμή 2 και η τιμή 4. Έχουμε λοιπόν συνολικά 7 διαφορετικές παραμετροποιήσεις 2 διαφορετικές για κάθε μία απ τις 3 παραμέτρους και μία γενική στην οποία και οι 3 παράμετροι είναι ίσες με 1.

1^η Παραμετροποίηση $M=N=Z=1$

Στην πρώτη παραμετροποίηση, κρατάμε σταθερές και ίσες τις παραμέτρους με τη μονάδα. Καταλαβαίνουμε ότι πρόκειται ουσιαστικά για ένα υλικό ενιαίο, ισότροπο. Ακολουθώντας την διαδικασία εύρεσης των ριζών της εξίσωσης $\mathit{ddet}[\mathbf{H}, \mathbf{\Omega}] = 0$ όπως είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο εξάγουμε ομάδες $\mathbf{\Omega}$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν πολλά πεδία ανίχνευσης στα $\mathbf{\Omega}$ έχουμε το ικανό πλήθος για να μορφώσουμε τις 4 καμπύλες μας στο διάγραμμα $\frac{\omega \Delta^2}{\alpha_0} - h \Delta$.

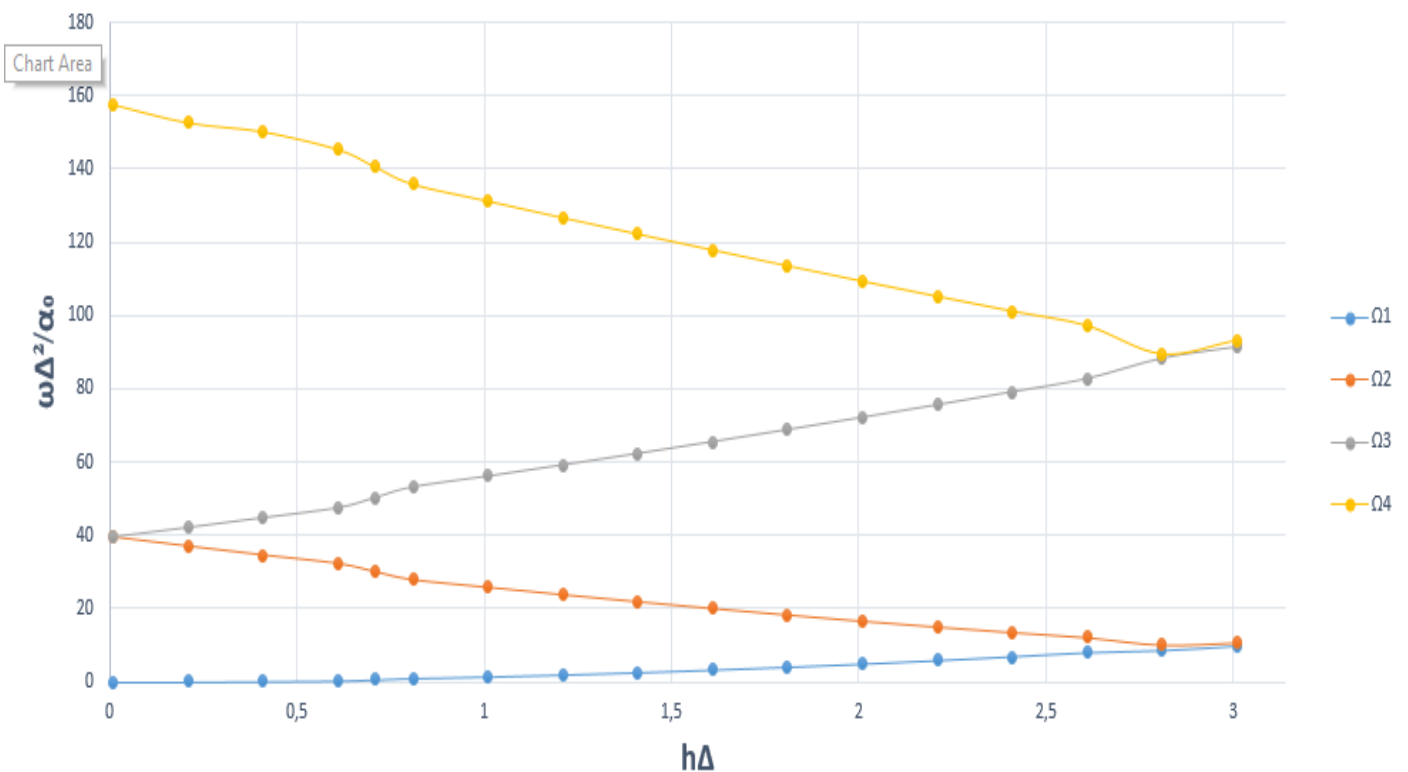
Παρακάτω θα δούμε αναλυτικά τα $\mathbf{\Omega}$ που έχουμε κρατήσει από το πρόγραμμα για την κατασκευή των καμπυλών, καθώς και τα αντίστοιχα \mathbf{H} που έχουμε στον οριζόντιο άξονα του διαγράμματος.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαδικασία (plot) εξαγωγής των τελικών διαγραμμάτων καθώς και στοίχισης των $\mathbf{\Omega}-\mathbf{H}$ έγιναν για κάθε παραμετροποίηση στο περιβάλλον του *Microsoft Excel*.

H	Ω1	Ω2	Ω3	Ω4	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01	0	39,35	39,6	157,66	N	1
0,21	0,044	36,88	42,16	152,68	M	1
0,41	0,17	34,49	44,8	150,21	Z	1
0,61	0,37	32,18	47,52	145,36	v	0,5
0,71	0,66	29,95	50,31	140,57		
0,81	1,02	27,8	53,19	135,87		
1,01	1,46	25,74	56,15	131,25		
1,21	1,99	23,75	59,18	126,7		
1,41	2,59	21,84	62,3	122,24		
1,61	3,28	20	65,5	117,86		
1,81	4,04	18,26	68,8	113,55		
2,01	4,88	16,59	72,13	109,33		
2,21	5,8	15	75,57	105,19		
2,41	6,81	13,49	79,1	101,13		
2,61	7,9	12,1	82,69	97,15		
2,81	8,47	10,1	88,23	89,42		
3,01	9,67	10,71	91,32	93,24		
3,14						

ΠΙΝΑΚΑΣ 1 $M=N=Z=1$

Τέλος θα δούμε το διάγραμμα των 4^{ων} καμπυλών μας.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1 $M=N=Z=1$

Παρατηρούμε ότι με αυτή την παραμετροποίηση οι καμπύλες μας συναντώνται ανά 2. Είναι κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, με αυτές τις σχέσεις παραμέτρων, οι συχνότητες που διεγείρουν τη δοκό μας είναι πάρα πολλές. Ως εκ τούτου η συγκεκριμένη περιοδικότητα στα δύο υλικά μας δεν μπορούμε να πούμε ότι μας βοηθάει, αφού στον χώρο των κατασκευών θα χρειαστούμε περιοδικότητες που δεν θα “απαντούν” σε ορισμένες τουλάχιστον συχνότητες διεγέρσεων.

Την παραπάνω διαδικασία θα την επαναλάβουμε για όλες τις παραμετροποιήσεις και θα δούμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα αναλυτικά για κάθε περίπτωση.

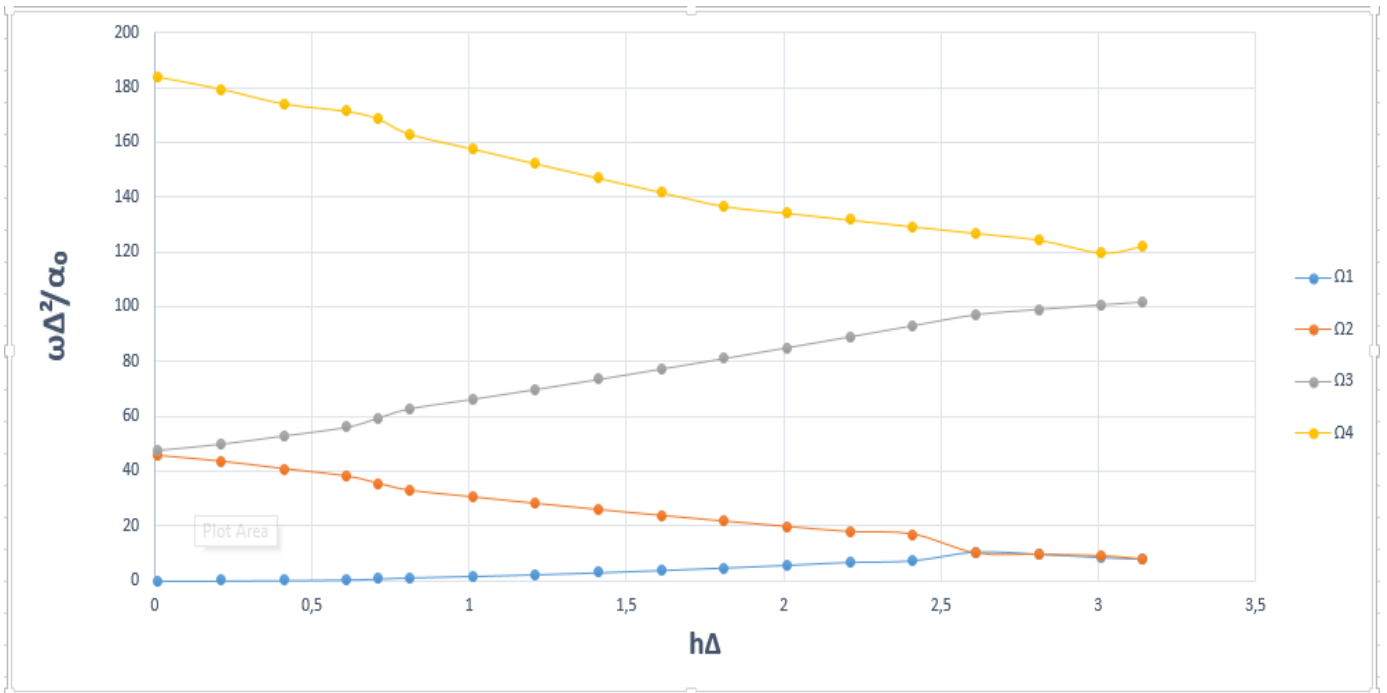
2^η Παραμετροποίηση $M=2$, $N=Z=1$

Με αυτή τη σχέση των 3^{ων} μεγεθών , έχουμε τα εξής αποτελέσματα στα Ω :

H			Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4			ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01			0	45,45	47,76	183,8			N	1
0,21			0,05	43,34	49,97	179,41			M	2
0,41			0,19	40,63	52,98	174,03			Z	1
0,61			0,43	37,94	56,14	171,27			v	0,5
0,71			0,76	35,33	59,42	168,51				
0,81			1,18	32,8	62,79	163				
1,01			1,69	30,37	66,26	157,56				
1,21			2,29	28,03	69,82	152,2				
1,41			2,99	25,79	73,47	146,93				
1,61			3,78	23,64	77,22	141,75				
1,81			4,66	21,58	81,05	136,67				
2,01			5,63	19,63	84,96	134,17				
2,21			6,68	17,78	88,94	131,69				
2,41			7,23	16,9	92,97	129,24				
2,61			10,33	10,033	96,96	126,81				
2,81			9,54	9,54	98,87	124,41				
3,01			8,39	8,97	100,54	119,72				
3,14			7,8	7,8	101,58	122,05				

ΠΙΝΑΚΑΣ 2 $M=2$, $N=Z=1$

Οι αντίστοιχες καμπύλες αυτής της παραμετροποίησης φαίνονται παρακάτω



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2 $M=2, N=Z=1$

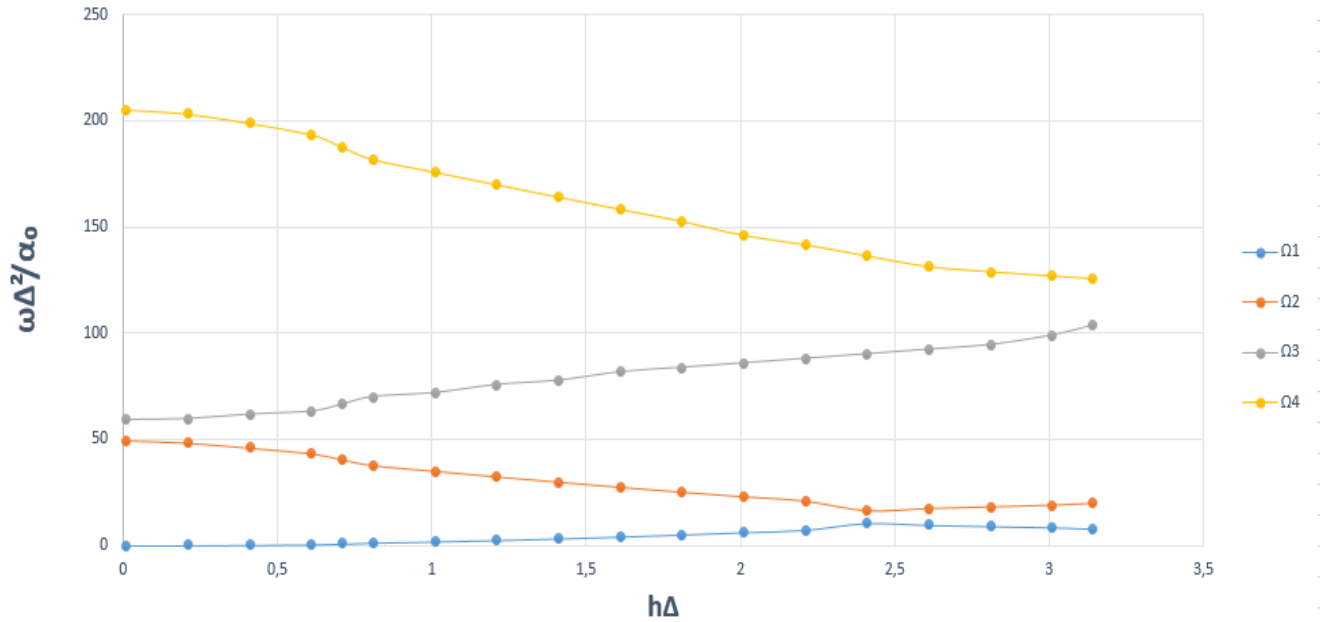
Παρατηρούμε ότι στην 2^η παραμετροποίηση, υπάρχει ένα τμήμα από 100 μέχρι 120 στον άξονα της τεταγμένης μας, το οποίο δεν συναντά κάποια από τις καμπύλες. Αυτό σημαίνει ότι οι αντίστοιχες συχνότητες δεν διεγείρουν αυτή την περιοδικότητα, κάτι που μας είναι αρκετά χρήσιμο.

3^η Παραμετροποίηση $M=4, N=Z=1$ Με αυτή την σχέση των 3^{ων} μεγεθών, έχουμε τα εξής αποτελέσματα στα Ω :

H	Ω1	Ω2	Ω3	Ω4	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01	0	49,51	59,07	205,25	N	1
0,21	0,05	48,36	59,45	203,28	M	4
0,41	0,21	46	61,58	198,9	Z	1
0,61	0,47	43,27	63,03	193,51	v	0,5
0,71	0,83	40,46	66,31	187,73		
0,81	1,29	37,67	69,88	181,81		
1,01	1,85	34,94	71,75	175,87		
1,21	2,51	32,3	75,6	169,95		
1,41	3,27	29,75	77,58	164,1		
1,61	4,13	27,31	81,63	158,32		
1,81	5,1	24,98	83,71	152,64		
2,01	6,13	22,78	85,81	146,06		
2,21	7,25	20,72	87,95	141,61		
2,41	10,41	16,1	90,1	136,3		
2,61	9,54	17,22	92,29	131,23		
2,81	8,99	17,99	94,5	128,88		
3,01	8,42	18,84	99	126,83		
3,14	7,83	19,76	103,59	125,58		

ΠΙΝΑΚΑΣ 3 $M=4, N=Z=1$

Οι αντίστοιχες καμπύλες αυτής της παραμετροποίησης φαίνονται παρακάτω



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3 $M=4, N=Z=1$

Απο τη μορφή των καμπυλών βλέπουμε στην 3^η παραμετροποίηση ότι υπάρχουν δυο διαστήματα , ένα μεταξύ 10 περίπου και 20 μονάδες στην τεταγμένη και ένα μεταξύ περίπου 100 και 125 που δεν βλέπουμε την ύπαρξη κάποιας απο τις καμπύλες . Η παραμετροποίηση 3 λοιπόν μας είναι αρκετά πιο βολική προς το παρόν στο έργο μας σε σύγκριση με τις 2 πρώτες.

Σβερώνης Δημήτριος

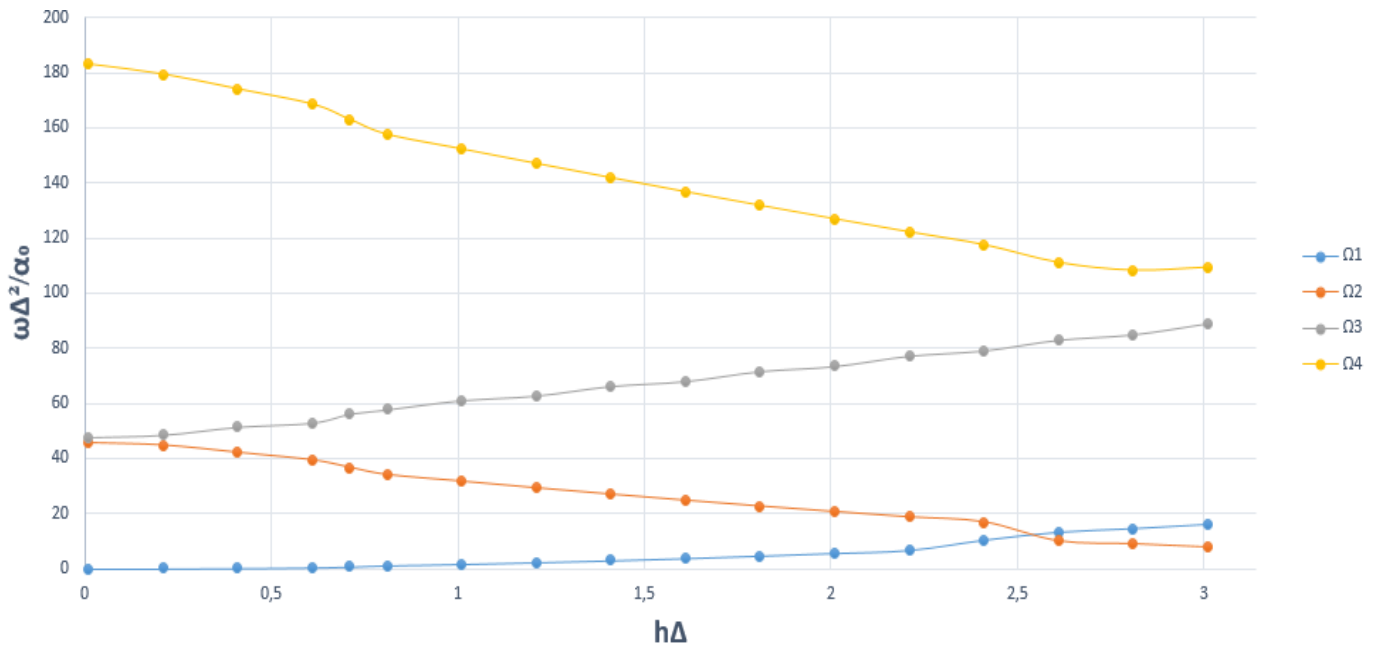
4^η Παραμετροποίηση $N=2$, $M=Z=1$

Με αυτή την σχέση των 3^{ων} μεγεθών , έχουμε τα εξής αποτελέσματα στα Ω

H	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01	0	45,45	47,76	183,05	N	2
0,21	0,05	44,63	48,61	179,41	M	1
0,41	0,19	41,99	51,45	174,03	Z	1
0,61	0,43	39,27	52,98	168,5	v	0,5
0,71	0,76	36,62	56,14	163		
0,81	1,18	34	57,76	157,56		
1,01	1,69	31,58	61,09	152,2		
1,21	2,29	29,19	62,79	146,93		
1,41	2,99	26,9	66,26	141,75		
1,61	3,78	24,7	68,03	136,67		
1,81	4,66	22,6	71,63	131,69		
2,01	5,63	20,59	73,47	126,81		
2,21	6,68	18,69	77,22	122,05		
2,41	10,33	16,9	79,12	117,43		
2,61	13,19	10,03	83	110,99		
2,81	14,47	8,97	84,96	108,16		
3,01	16	7,8	89	109,23		
3,14						

ΠΙΝΑΚΑΣ 4 $N=2$, $M=Z=1$

Οι αντίστοιχες καμπύλες αυτής της παραμετροποίησης φαίνονται παρακάτω



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4 $N=2$, $M=Z=1$

Σβερώνης Δημήτριος

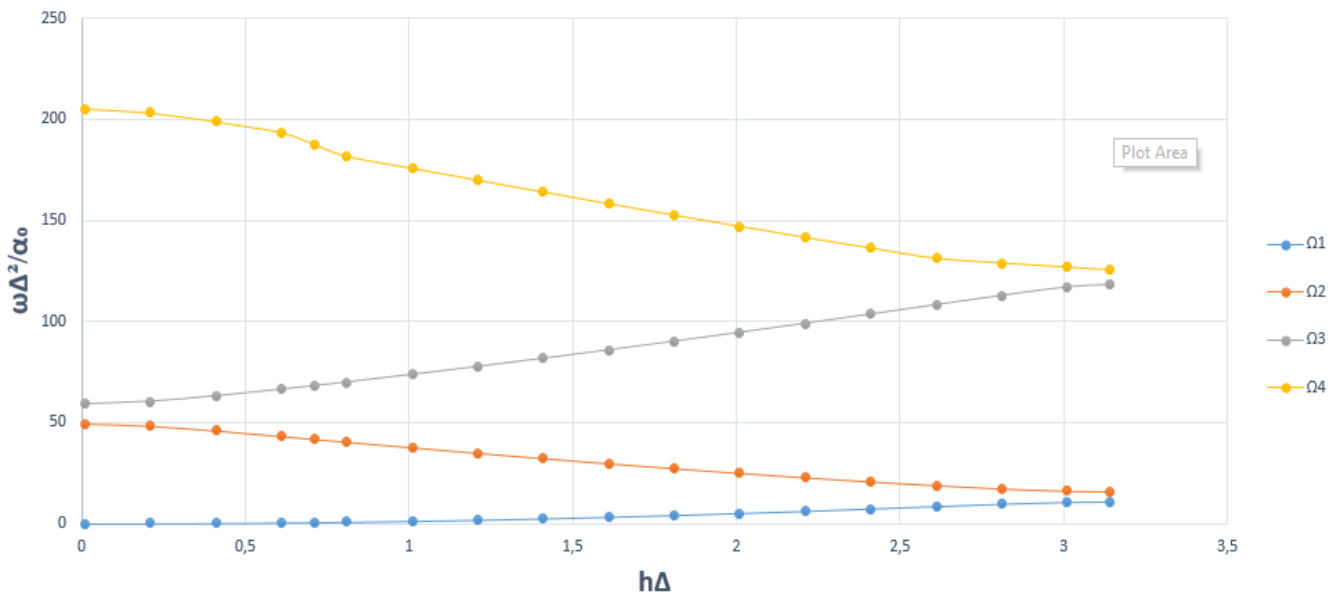
Στην 4^η παραμετροποίηση παρατηρούμε ένα αποτέλεσμα παρόμοιο με την 2^η. Μέχρι στιγμής η παραμετροποίηση με τα μεγαλύτερα ακάλυπτα διαστήματα από καμπύλες είναι η 3^η, για $M=4$, $N=Z=1$.

5η Παραμετροποίηση $N=4$, $M=Z=1$ Με αυτή την σχέση των 3^{ων} μεγεθών, έχουμε τα εξής αποτελέσματα στα Ω

H	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01	0	49,51	59,07	205,25	N	4
0,21	0,06	48,36	60,34	203,28	M	1
0,41	0,21	46	63,03	198,9	Z	1
0,61	0,47	43,27	66,31	193,5	v	0,5
0,71	0,63	41,87	68,07	187,72		
0,81	0,83	40,46	69,88	181,8		
1,01	1,29	37,67	73,65	175,86		
1,21	1,85	34,94	77,58	169,95		
1,41	2,51	32,29	81,63	164,1		
1,61	3,27	29,75	85,81	158,32		
1,81	4,13	27,31	90,1	152,64		
2,01	5,09	24,98	94,5	147,06		
2,21	6,13	22,78	99	141,6		
2,41	7,25	20,72	103,58	136,3		
2,61	8,42	18,84	108,23	131,23		
2,81	9,54	17,22	112,84	128,88		
3,01	10,41	16,09	116,99	126,83		
3,14	10,6	15,86	118,21	125,57		

ΠΙΝΑΚΑΣ 5 $N=4$, $M=Z=1$

Οι αντίστοιχες καμπύλες αυτής της παραμετροποίησης φαίνονται παρακάτω



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 5 $N=4$, $M=Z=1$

Σβερώνης Δημήτριος

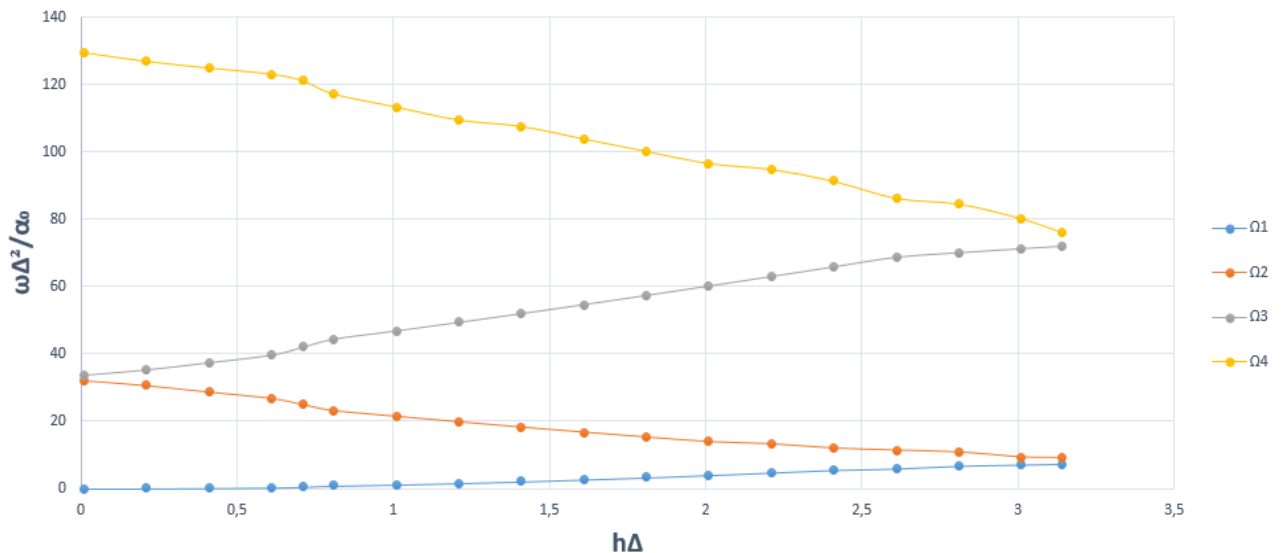
6^η Παραμετροποίηση $Z=2$, $M=N=1$

Με αυτή την σχέση των 3^{ων} μεγεθών , έχουμε τα εξής αποτελέσματα στα Ω

H	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01	0	32,14	33,77	129,43	N	1
0,21	0,036	30,65	35,33	126,83	M	1
0,41	0,13	28,73	37,46	124,9	Z	2
0,61	0,3	26,83	39,7	123,06	v	0,5
0,71	0,53	24,98	42,01	121,11		
0,81	0,83	23,19	44,4	117,2		
1,01	1,19	21,47	46,85	113,33		
1,21	1,62	19,82	49,37	109,51		
1,41	2,1	18,23	51,95	107,62		
1,61	2,67	16,71	54,6	103,89		
1,81	3,29	15,26	57,31	100,23		
2,01	3,98	13,88	60,1	96,64		
2,21	4,72	13,22	62,9	94,87		
2,41	5,52	11,95	65,74	91,38		
2,61	5,93	11,35	68,56	86,3		
2,81	6,74	10,78	69,9	84,65		
3,01	7,09	9,32	71,09	80,3		
3,14	7,3	9,09	71,82	76,25		

ΠΙΝΑΚΑΣ 6 $Z=2$, $M=N=1$

Οι αντίστοιχες καμπύλες αυτής της παραμετροποίησης φαίνονται παρακάτω



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6 $Z=2$, $M=N=1$

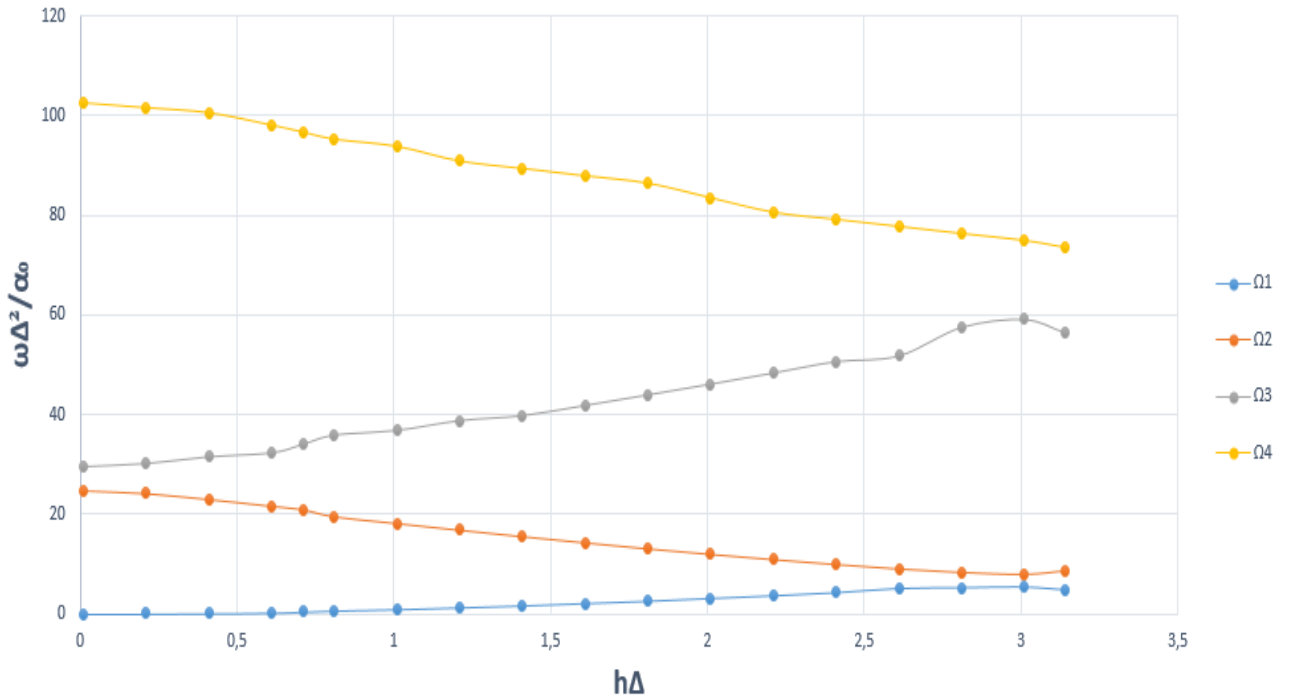
7^η Παραμετροποίηση $Z=4$, $M=N=1$

Με αυτή την σχέση των 3^{ων} μεγεθών , έχουμε τα εξής αποτελέσματα στα Ω

H	Ω1	Ω2	Ω3	Ω4	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ	
0,01	0	24,75	29,54	102,62	N	1
0,21	0,03	24,18	30,17	101,64	M	1
0,41	0,11	23	31,51	100,64	Z	4
0,61	0,23	21,64	32,31	98,14	v	0,5
0,71	0,41	20,93	34,03	96,75		
0,81	0,64	19,53	35,87	95,32		
1,01	0,92	18,15	36,83	93,86		
1,21	1,26	16,8	38,79	90,9		
1,41	1,64	15,51	39,79	89,42		
1,61	2,1	14,26	41,85	87,93		
1,81	2,54	13,06	43,97	86,45		
2,01	3,1	11,93	46,14	83,51		
2,21	3,63	10,87	48,37	80,6		
2,41	4,21	9,88	50,64	79,16		
2,61	5,02	8,99	51,79	77,74		
2,81	5,2	8,29	57,52	76,32		
3,01	5,3	7,93	59,106	74,92		
3,14	4,77	8,61	56,42	73,53		

ΠΙΝΑΚΑΣ 7 Z=4, M=N=1

Οι αντίστοιχες καμπύλες αυτής της μαραμετροποίησης φαίνονται παρακάτω



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 7 Z=4, M=N=1

Σβερώνης Δημήτριος

Στην 7^η Παραμετροποίηση βλέπουμε ένα μικρό κενό κοντά στο $\Omega=8$ στο οποίο δεν διέρχεται κάποια καμπύλη, άρα εκεί δεν “απαντάει” η περιοδικότητα αυτή, της δοκού μας. Επίσης στο κομμάτι απο $\Omega=60$ μέχρι περίπου $\Omega=75$ επίσης δεν έχουμε συνάτηση κάποιας καμπύλης.

Παρατηρούμε λοιπόν συγκρίνοντας τις παραμετροποιήσεις ότι η παραμετροποίηση με τα μεγαλύτερα “κενά” δηλαδή τις μεγαλύτερες περιοχές των Ω στις οποίες δεν έχουμε κάποια καμπύλη, είναι πρώτα η παραμετροποίηση 7 και ακολούθως οι παραμετροποιήσεις 3,2 και τέλος 4.

Κεφάλαιο 5 : Συνοπτικά συμπεράσματα και παρατηρήσεις επί των αποτελεσμάτων

Ολοκληρώνοντας την εργασία αυτή, θα ήταν χρήσιμο να αναφερθούμε και να τονίσουμε κάποια συμπεράσματα. Αρχικώς η μελέτη της συμπεριφοράς ενός δομικού στοιχείου που η δομή του εσωτερικά βασίζεται στην περιοδικότητα των υλικών του είναι ένα ζήτημα σίγουρα αρκετά πολύπλοκο και καινοτόμο. Πρόκειται όπως αναφέραμε και στις εισαγωγικές μας αναφορές, για ένα φαινόμενο το οποίο σαν βάση του έχει την κρυσταλλοδομή. Προσπαθήσαμε παρ'όλα αυτά να εισάγουμε αυτούς τους όρους και αυτή τη διαδικασία ανάλυσης, σε ένα κομμάτι το οποίο μας αφορά, σχεδιάζοντας ένα δομικό στοιχείο έτσι ώστε να έχει περιοδική δομή. Μετά από δοκιμές παρατηρήσαμε ότι είναι πράγματι σχετικά μικρό το εύρος συχνοτήτων στο οποίο το στοιχείο μας δεν διεγείρεται .

Όπως προαναφέραμε το πιο χρήσιμο αποτέλεσμα, το είχαμε δημιουργώντας το υλικό 1 με 4πλάσιο εμβαδόν εγκάρσιας διατομής απο το υλικό 0. Μ' αυτόν τον τρόπο πετύχαμε να έχουμε ένα σεβαστό εύρος, στο οποίο το στοιχείο μας δεν διεγείρεται από τον κυματισμό. Φυσικά σκεπτόμενοι μηχανικώς, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι μπορεί να υπάρξουν και κάποιες τεχνικές εφαρμογές στις οποίες να επιδιώκουμε μια ταλάντωσή, μια διέγερση. Σ'αυτή την περίπτωση θα κινηθούμε όπως είναι φυσικώς στην εντελώς αντίθετη κατεύθυνση ως σκέψη .

Τέλος ελπίζουμε και προσδοκούμε, η μελέτη πάνω στα φαινόμενα περιοδικότητας των υλικών να βοηθήσει τόσο τον τεχνικό κόσμο όσο και γενικότερα να διευκολύνει με την εφαρμογή της

Βιβλιογραφία

Bigoni, D., & Movchan, A. (2002). Statics and dynamics of structural interfaces in elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39(19), 4843–4865. [https://doi.org/10.1016/s0020-7683\(02\)00416-x](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(02)00416-x)

Amanant, S., & Rafiee-Dehkharghani, R. (2023). Investigation of periodic resonators as wave barriers for mitigating surface seismic waves using Bloch-Floquet theory. *Sharif J. Civil Eng.*

Graff, K. F. (1975). *Wave Motion in Elastic Solids*.

Παπαμίχος, Ε., & Χαραλαμπίκης, Ν. (2015). *ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ* (2^η Έκδοση). Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ

Functionally graded material. (2023, May 23). In *Wikipedia*.

https://en.wikipedia.org/wiki/Functionally_graded_material

Bloch's theorem. (2023, May 13). In *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch%27s_theorem

Παράρτημα

Διαδικασία επίλυσης του προβλήματος στο *Wolfram Mathematica*

Παράμετροι Υλικών

```
:=  
N = 1.;  
M = 1.;  
Z = 1.;  
ν = 0.5;
```

Σχέσεις Μεγεθών

```
:=  
Δ1 = ν Δ;  
Δ2 = (1 - ν) Δ;  
Ε1 = Ν Εθ;  
J1 = Μ Jθ;  
Α1 = Ζ Αθ;
```

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ α, γ

$$\alpha_{\theta} = \text{Sqrt} \left[\frac{E_{\theta} J_{\theta}}{\rho A_{\theta}} \right];$$

[τετραγωνική ρίζα]

$$\alpha_1 = \text{Sqrt} \left[\frac{E_1 J_1}{\rho A_1} \right];$$

[τετραγωνική ρίζα]

$$\gamma_{\theta} = \text{Sqrt} \left[\frac{\omega}{\alpha_{\theta}} \right];$$

[τετραγωνική ρίζα]

$$\gamma_1 = \text{Sqrt} \left[\frac{\omega}{\alpha_1} \right];$$

[τετραγωνική ρίζα]

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ :

```

w0[x_, t_] = W0[x] e^{-i \omega t};
w1[x_, t_] = W1[x] e^{-i \omega t};
W1[x_] = a1 e^{-i v1 x} + b1 e^{i v1 x} + c1 e^{-v1 x} + d1 e^{v1 x};
W0[x_] = a0 e^{-i v0 x} + b0 e^{i v0 x} + c0 e^{-v0 x} + d0 e^{v0 x};
M0[x_] = E0 J0 W0''[x];
Q0[x_] = M0'[x];
DW0[x_] = W0'[x];
M1[x_] = E1 J1 W1''[x];
Q1[x_] = M1'[x];
DW1[x_] = W1'[x];

eq1 = M0[0] - M1[0];
eq2 = Q0[0] - Q1[0];
eq3 = DW0[0] - DW1[0];
eq4 = W0[0] - W1[0];
eq5 = W1[\Delta2] - e^{h i (\Delta1 + \Delta2)} W0[-\Delta1];
eq6 = M1[\Delta2] - e^{h i (\Delta1 + \Delta2)} M0[-\Delta1];
eq7 = Q1[\Delta2] - e^{h i (\Delta1 + \Delta2)} Q0[-\Delta1];
eq8 = DW1[\Delta2] - e^{h i (\Delta1 + \Delta2)} DW0[-\Delta1];
G = {eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8};
{tt, mat} = CoefficientArrays[G, {a0, b0, c0, d0, a1, b1, c1, d1}];

```

[παράταξις συντελεστών]

$$\omega = \Omega \frac{\alpha_0}{\Delta^2};$$

$$h = \frac{H}{\Delta};$$

Μητρώο συντελεστών:

```

In[ ]:= mat // MatrixForm

```

$$\begin{pmatrix}
\frac{1.03956}{\Delta^2} & \frac{1.03956}{\Delta^2} & \frac{0.39554}{\Delta^2} & \frac{0.39554}{\Delta^2} & \frac{2.442103956}{\Delta^2} & \frac{2.442103956}{\Delta^2} & \frac{2.03956}{\Delta^2} & \frac{1.03956}{\Delta^2} \\
\frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} \\
(0, -1, 1)\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & (0, 1, 1)\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & -1\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & \sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & (0, +0.7071071)\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & (0, -0.7071071)\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & 0.707107\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} & -0.707107\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}} \\
1. & 1. & 1. & 1. & -1. + 0. i & -1. + 0. i & -1. & -1. \\
-1. e & -1. e & -1. e & -1. e & e & e & e & e \\
\frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} \\
(0, +1, 1) e & (0, -1, 1) e & (0, +1, 1) e & (0, -1, 1) e & (0, -0.35353) e & (0, +0.35353) e & 1. e & 1. e \\
\frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} \\
(0, +1, 1) e & (0, -1, 1) e & (0, +1, 1) e & (0, -1, 1) e & (0, -0.35353) e & (0, +0.35353) e & 1. e & 1. e \\
\frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.110\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{0.144210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} & \frac{1.44210\sqrt{\frac{H}{\Delta^2}}\gamma_0\gamma_0}{\Delta^2} \\
(0, +1, 1) e & (0, -1, 1) e & (0, +1, 1) e & (0, -1, 1) e & (0, -0.35353) e & (0, +0.35353) e & 1. e & 1. e
\end{pmatrix}$$

MAT = FullSimplify[mat, {J_θ > 0, E_θ > 0, ρ > 0, A_θ > 0, Δ > 0, Ω > 0}];
[πλήρης απλοποίηση]

MAT // MatrixForm
[μορφή πίνακα]

The matrix consists of 7 columns and 7 rows of complex expressions. Each element is a fraction with a denominator of Δ² or Δ³. The numerators involve terms like e^{±(θ-1)iH-(θ+0.5i)√Ω}, √Ω, and various powers of θ and Δ. The diagonal elements are simplified to 1. The off-diagonal elements are symmetric about the main diagonal.

Ορίζουσα μητρώου συντελεστών MAT και εύρεση ριζών της εξίσωσης: det[MAT]=0

ddet[H₋, Ω] = Det[MAT] Δ¹² / (Ω⁶ J_θ⁴ E_θ⁴);
[ορίζουσα]

FindRoot[ddet[0.5, Ω] == 0, {Ω, 2}, WorkingPrecision → 80, MaxIterations → 80] // Chop // Quiet
[εύρεση ριζών] [λειτουργική ακρίβεια] [μέγιστος αριθμός επαναλήψ... [στρογγ... [ήσυχη αξιολόγηση έκφρασης]

{Ω → 0.25000}

step = Table[i, {i, 70, 130, 0.3}];
[πίνακας τιμών]

TT[H₋] := FindRoot[ddet[H, Ω] == 0, {Ω, step}, WorkingPrecision → 30] // Chop // Quiet
[εύρεση ριζών] [λειτουργική ακρίβεια] [στρογγ... [ήσυχη]

Table[TT[H], {H, 0.01, π, 0.1}] // Sort // DeleteDuplicates
[πίνακας τιμών] [ταξινό... [διαγραφή αντιγραφών]

