



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Τομέας Μηχανικής Υλικών & Κατεργασιών

**Αριθμητική ανάλυση μακροσκοπικών
ατελειών σε σύνθετα υλικά με στρωματώδεις
μικροδομές και ελαστοπλαστικές φάσεις**

Διπλωματική εργασία του
Ιορδανίδη Δημήτρη

Εξεταστική επιτροπή:
Μ.Αγόρας, Επ. Καθηγητής (επιβλέπων)
Σ.Καραμάνος, Καθηγητής
Ν.Αράβας, Καθηγητής

©2023 Ιορδανίδης Δημήτρης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ.202 παρ.2)

Περιεχόμενα

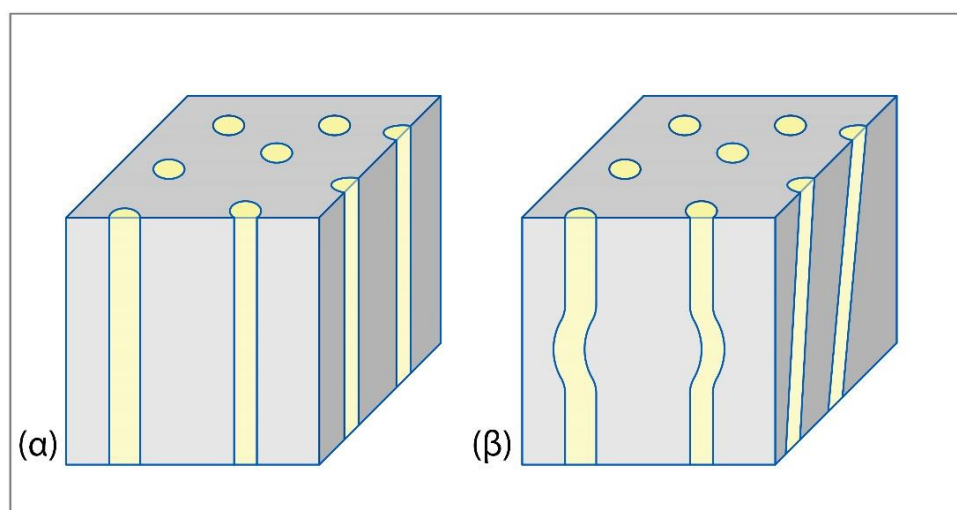
Εισαγωγή	1
Ενότητα 1: Παρουσίαση προβλήματος	3
1.1 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου και μοναδιαία κυψελίδα	3
1.2 Πρόβλημα Ομογενοποίησης	5
1.3 Συνοριακές συνθήκες	7
1.4 Συνθήκες περιοδικότητας	8
1.5 Εφαρμογή περιοδικών συνοριακών συνθηκών σε περιβάλλον πεπερασμένων στοιχείων	9
1.6 Τύποι φόρτισης	11
Ενότητα 2: Υπολογισμοί	12
2.1.1 Καθαρή διάτμηση και $\theta=0^\circ$	13
2.1.2 Μονοαξονική θλίψη και $\theta=0^\circ$	17
2.2.1 Καθαρή διάτμηση και $\theta=2^\circ$	19
2.2.2 Μονοαξονική θλίψη και $\theta=2^\circ$	22
2.3.1 Καθαρή διάτμηση και $\theta=5^\circ$	24
2.3.2 Μονοαξονική θλίψη και $\theta=5^\circ$	28
2.4.1 Συγκρίσεις για καθαρή διάτμηση	30
2.4.2 Συγκρίσεις για μονοαξονική θλίψη	31
Ενότητα 3: Συμπεράσματα	34
Βιβλιογραφία	35

Εισαγωγή

Τα σύνθετα υλικά με ινώδη μικροδομή προσφέρουν υψηλή αντοχή και δυσκαμψία ενώ ταυτόχρονα διατηρούν το βάρος τους χαμηλό. Δεν είναι παράλογο, λοιπόν, το ενδιαφέρον που παρουσιάζεται για τέτοιου είδους υλικά, ιδιαίτερα από τον κλάδο της αεροναυπηγικής. Ένα από τα θεμελιώδη μειονεκτήματά τους, ωστόσο, αποτελεί η ασυμβατότητα των εφελκυστικών και των θλιπτικών φορτιών που μπορούν να παραλάβουν, με τα δεύτερα να είναι πολύ μικρότερα. Από τις πρώτες απόπειρες επεξήγησης της εν λόγω ασυμβατότητας, ήταν του Rosen[1] ο οποίος έλαβε υπόψιν του τον ελαστικό λυγισμό των ινών. Πιο συγκεκριμένα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η κρίσιμη τάση αστοχίας δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_c = G_m / (1 - c_f)$$

όπου το G_m είναι το ελαστικό μέτρο διατμήσεως του μητρικού υλικού ενώ c_f είναι το κλάσμα όγκου των ινών. Αυτό που υποδηλώνει η παραπάνω σχέση είναι η σύνδεση του φορτιού αστοχίας με το μακροσκοπικό μέτρο διατμήσεως G του σύνθετου υλικού. Βελτιώσεις στην προσέγγιση αυτή προέκυψαν από την συμπερίληψη φαινομένων πλαστικότητας. Παρόλα αυτά, τα φορτία αστοχίας που προέβλεπαν οι παραπάνω θεωρήσεις ήταν αρκετά υψηλότερα των πραγματικών. Η ουσιαστική γεφύρωση των προβλέψεων με τις παρατηρήσεις οφείλεται στην αποδοχή της ατελούς φύσης αυτών των υλικών. Οι προϋπάρχουσες ατέλειες στην γεωμετρία των ινών καθώς και η ανικανότητα άψογης ευθυγράμμισης αυτών από την παραγωγική διαδικασία, επιταχύνουν την αστοχία του υλικού. Στο σχήμα 1 παρουσιάζεται η ατελής δομή αυτών των υλικών.



Σχήμα 1: (α) ιδεατή μικροδομή. (β) πραγματική μικροδομή

Βασιζόμενος στην παραπάνω παρατήρηση, ο Argon[2] διατυπώνει για ένα ελαστικά απαράμορφωτο - τέλεια πλαστικό σύνθετο υλικό το εξής κριτήριο αστοχίας:

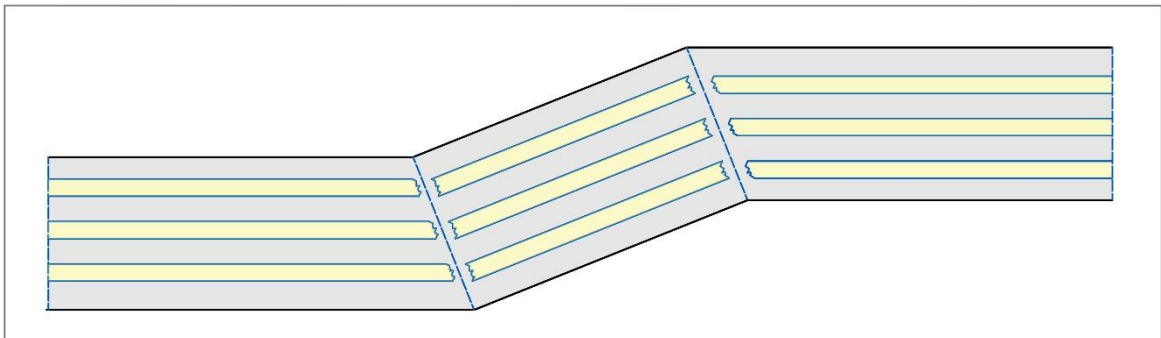
$$\sigma_c = \frac{\tau_y}{\theta_0}$$

όπου τ_y είναι το όριο διαρροής σε διάτμηση του σύνθετου υλικού και θ_0 είναι η αρχική, τοπική απόκλιση των ινών από την ιδεατή μικροδομή. Ο Budiansky[3] επεκτείνει αυτή την ιδέα και για ελαστικά - τέλεια πλαστικά σύνθετα υλικά με όριο διαρροής σε διάτμηση $\tau_y = G \cdot \gamma_y$. Η βελτιωμένη σχέση που παρουσίασε ήταν:

$$\sigma_c = \frac{G_m}{\gamma_y + \theta_0} = \frac{G}{1 + \frac{\gamma_y}{\theta_0}}$$

Θέτοντας $\theta_0 = 0$ η σχέση καταλήγει στην αρχική διατύπωση του Rosen, ενώ υποθέτοντας ότι οι παραμορφώσεις είναι αμελητέες στην έναυση της πλαστικής διαρροής, δηλαδή $\gamma_y \ll 1$, καταλήγει στην έκφραση του Argon.

Ο μηχανισμός, λοιπόν, ο οποίος τελικά προκαλεί αστοχία, ξεκινά από λυγισμό σε μικροσκοπικό επίπεδο παρουσία πλαστικότητας και εξελίσσεται στην ανάπτυξη διακριτών ζωνών εντός των οποίων συγκεντρώνεται η παραμόρφωση και προκαλείται περιστροφή και θραύση των ινών. Στο σχήμα 2 παρουσιάζεται τμήμα αυτή της ζώνης.



Σχήμα 2: Ζώνη συγκέντρωσης των παραμορφώσεων

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η εξέλιξη της μικροδομής και η επίδρασή της στην ανάπτυξη μακροσκοπικών ατελειών. Ως μια απλουστευτική προσέγγιση του πραγματικού προβλήματος, το υλικό χαρακτηρίζεται από στρωματώδη περιοδική μικροδομή. Οι 2 φάσεις που την αποτελούν είναι ισότροπες, γραμμικώς ελαστικές και μοντελοποιούν τον ρόλο του μητρικού υλικού και του υλικού ενίσχυσης. Πλαστικότητα εισάγεται σε μια από τις δυο φάσεις κάθε φορά ενώ το υλικό υπόκειται σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

Ενότητα 1

Παρουσίαση Προβλήματος

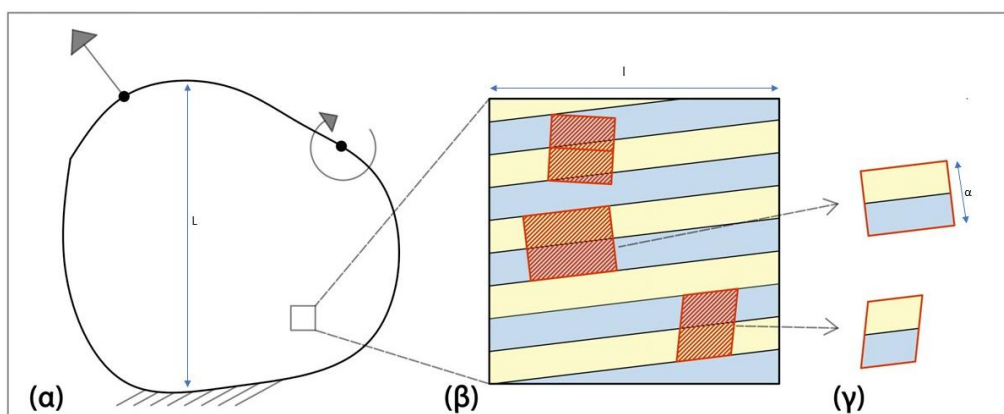
1.1 Αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου και μοναδιαία κυψελίδα

Απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να έχει νόημα ο χαρακτηρισμός ενός σύνθετου υλικού ως ομογενές, είναι η κλίμακα μήκους στην οποία είναι παρατηρήσιμη η ετερογένεια των φάσεων που απαρτίζουν την δομή του, να είναι πολύ μικρότερη από την κλίμακα μήκους του μακροσκοπικού προβλήματος.

Η ανάλυση γίνεται στην μικροκλίμακα και αφορά ένα τμήμα του υλικού με ικανό μέγεθος ώστε αφενός να ενσωματώνει όλη την πληροφορία της μικροδομής και αφετέρου η συμπεριφορά του να είναι αντιπροσωπευτική του μακροσκοπικού υλικού. Ένα τέτοιο κομμάτι της ύλης καλείται αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου, θεωρείται ομογενές σώμα και ο ορισμός του εξασφαλίζει ότι τα όποια συμπεράσματα εξαχθούν βάσει αυτού, μπορούν άμεσα να γενικευτούν και για το πλήρες μακροσκοπικό υλικό.

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του υπό εξέταση σύνθετου υλικού είναι η περιοδικότητα της μικροδομής του. Αυτό συνεπάγεται πως όσα αποτελέσματα μπορούν να εξαχθούν από ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου, μπορούν επίσης να εξαχθούν και από πληροφορία που βρίσκεται σε μια ακόμα μικρότερη δομή, η οποία καλείται μοναδιαία κυψελίδα. Μια καλώς ορισμένη μοναδιαία κυψελίδα θα πρέπει να είναι σε θέση, μετά από την περιοδική της επανάληψη, να επιστρέψει την πλήρη εικόνα της μικροδομής του σύνθετου υλικού.

Έστω, λοιπόν, διφασικό σύνθετο υλικό με στρωματώδη μικροδομή, το οποίο παρουσιάζεται στο σχήμα 3(β). Στο σχήμα 3(γ) φαίνονται οι πιθανές γεωμετρίες της μοναδιαίας κυψελίδας, η επιλογή της οποίας δεν αλλοιώνει την συμπεριφορά του μακροσκοπικού υλικού.



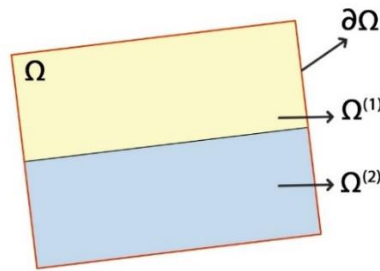
Σχήμα 3: (α) Μακροσκοπική αναπαράσταση του σύνθετου υλικού. (β) Αντιπροσωπευτικό στοιχείο της μικροδομής. (γ) πιθανές γεωμετρίες της μοναδιαίας κυψελίδας.

Ως L και l ορίζονται 2 χαρακτηριστικά μήκη στο μακροσκοπικό υλικό και στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο αντίστοιχα. Η απαίτηση ότι $L \ll l$ εξασφαλίζει τον καλό χωρισμό των κλιμάκων μήκους, ώστε να μπορεί το σύνθετο να θεωρείται ομογενές

στην μακροκλίμακα. Η απαίτηση ότι $l \ll \alpha$ εξασφαλίζει ότι το αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου φέρει αρκετές μοναδιαίες κυψελίδες ώστε να μπορεί να θεωρείται ομογενές.

Η περιοδικότητα της μικροδομής -και των συνοριακών συνθηκών- συνεπάγεται την περιοδικότητα των πεδίων της τάσης και των παραμορφώσεων. Αυτό σημαίνει ότι αρκεί η λύση του προβλήματος να γίνει στο χωρίο που ορίζεται από την μοναδιαία κυψελίδα και τα παραγόμενα πεδία σ και ε θα περιγράφουν την απόκριση ολοκλήρου του υλικού.

Μια μοναδιαία κυψελίδα καταλαμβάνει την περιοχή του χώρου Ω με σύνορο $\partial\Omega$ ενώ απαρτίζεται από τις φάσεις 1 και 2 οι οποίες καταλαμβάνουν τις υποπεριοχές $\Omega^{(1)}$ και $\Omega^{(2)}$ αντίστοιχα, όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Προφανώς $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}$ και $\Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} = \emptyset$



Σχήμα 4: Μοναδιαία κυψελίδα

Το πόσο συμμετέχει η κάθε φάση στην μικροδομή ποσοτικοποιείται από το κλάσμα όγκου της, το οποίο ορίζεται ως:

$$c^{(r)} = \frac{|\Omega^{(r)}|}{|\Omega|} \quad \mu\epsilon \quad r=1,2$$

Ακόμα, ορίζονται οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των φάσεων με την ιδιότητα:

$$\chi^{(r)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{για } \mathbf{x} \in \Omega^{(r)} \\ 0 & \text{για } \mathbf{x} \notin \Omega^{(r)} \end{cases}$$

Έτσι η περιγραφή της τάσης και της παραμόρφωσης δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^2 \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \cdot \sigma^{(r)}(\mathbf{x}) \quad \text{και} \quad \varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^2 \chi^{(r)}(\mathbf{x}) \cdot \varepsilon^{(r)}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

ενώ οι ιδιότητες των γραμμικώς ελαστικών και ισότροπων φάσεων προκύπτουν από τους τανυστές 4^{ης} τάξεως της ελαστικότητας και της ενδοτικότητας, οι οποίοι συμβολίζονται $\mathbb{C}^{(r)}$ και $\mathbb{S}^{(r)}$ αντίστοιχα, με $\mathbb{C}^{(r)} = (\mathbb{S}^{(r)})^{-1}$.

1.2 Πρόβλημα Ομογενοποίησης

Στόχος αποτελεί η λύση του προβλήματος ομογενοποίησης και ο προσδιορισμός της μακροσκοπικής συμπεριφοράς του υλικού, όπως αυτή αποδίδεται από τις μέσες τιμές των τάσεων και των παραμορφώσεων. Πιο συγκεκριμένα ορίζονται:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \frac{|\Omega^{(1)}|}{|\Omega^{(1)}|} \int_{\Omega^{(1)}} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}) d\Omega^{(1)} + \frac{|\Omega^{(2)}|}{|\Omega^{(2)}|} \int_{\Omega^{(2)}} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) d\Omega^{(2)} \right\} = \\ &= c^{(1)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + c^{(2)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \frac{|\Omega^{(1)}|}{|\Omega^{(1)}|} \int_{\Omega^{(1)}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}) d\Omega^{(1)} + \frac{|\Omega^{(2)}|}{|\Omega^{(2)}|} \int_{\Omega^{(2)}} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x}) d\Omega^{(2)} \right\} = \\ &= c^{(1)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} + c^{(2)} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} \end{aligned}$$

όπου ο συμβολισμός $\langle \cdot \rangle$ υποδηλώνει μέση τιμή ενός πεδίου. Ο υπολογισμός των παραπάνω εκφράσεων προϋποθέτει την γνώση των πεδίων $\boldsymbol{\sigma}^{(r)}$ και $\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)}$ σε κάθε φάση. Αυτά προκύπτουν από την επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών που ορίζεται ως εξής:

(i) Εξισώσεις ισορροπίας (αγνοούνται μαζικές δυνάμεις):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \sigma_{ij,j} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

(ii) Κινηματικές εξισώσεις:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\bar{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{u} \bar{\nabla}) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_{ij,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

(iii) Καταστατικές εξισώσεις: εφόσον οι φάσεις του σύνθετου υλικού είναι ελαστοπλαστικές, η ολική παραμόρφωση αποτελεί άθροισμα ενός ελαστικού και ενός πλαστικού μέρους. Το ίδιο ισχύει και για τον ρυθμό της παραμόρφωσης. Επομένως:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e(\mathbf{x}) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Για το ελαστικό μέρος της κάθε φάσης ισχύει ότι:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{(r)}(\mathbf{x}) = \mathbb{S}^{(r)} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu^{(r)}} \mathbb{K} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{3\kappa^{(r)}} \mathbb{J} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)}(\mathbf{x})$$

όπου $\mu^{(r)}$ και $\kappa^{(r)}$ τα ελαστικά μετρά διατμήσεως και διογκώσεως της κάθε φάσης, ενώ \mathbb{K} ο μοναδιαίος αποκλίνων τανυστής 4^{ης} τάξεως και \mathbb{J} ο μοναδιαίος σφαιρικός τανυστής 4^{ης} τάξεως. Αξιοποιώντας βασικές ιδιότητες αυτών των τανυστών, η παραπάνω σχέση ξαναγράφεται:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^{(r)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu^{(r)}} \dot{\boldsymbol{s}}^{(r)}(\mathbf{x}) + \frac{1}{3\kappa^{(r)}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{sph}^{(r)}(\mathbf{x})$$

όπου $\dot{\mathbf{s}}^{(r)}$ και $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{sph}^{(r)}$ είναι οι ρυθμοί του αποκλίνοντος και του σφαιρικού τμήματος της τάσης αντίστοιχα.

Μια εναλλακτική ομάδα ελαστικών σταθερών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι αυτή του μέτρου ελαστικότητας $E^{(r)}$ και του λόγου poisson $\nu^{(r)}$. Η σχέση σύνδεσης αυτών των δυο είναι[4]:

$$\mu^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{2(1+\nu^{(r)})} = \frac{3}{2} \frac{1-2\nu^{(r)}}{1+\nu^{(r)}} \kappa^{(r)}$$

Για να περιγραφεί η πλαστικότητα είναι απαραίτητη η εισαγωγή ενός κριτηρίου διαρροής. Έστω ότι το κριτήριο στο οποίο υπακούν τα υλικά των φάσεων είναι αυτό του Von Mises με καθετότητα. Επομένως ισχύει :

$$\Phi = \sigma_{eq} - \sigma_y = 0$$

όπου σ_{eq} είναι η ισοδύναμη τάση κατά Von Mises και σ_y το όριο διαρροής. Για αυτές τις δυο ποσότητες ισχύουν οι εκφράσεις:

$$\sigma_{eq}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} \quad \text{και} \quad \sigma_y(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^2 \chi^{(r)} \sigma_y^{(r)}$$

Θεωρούμε ότι τα υλικά των φάσεων υφίστανται ισότροπη κράτυνση . Δηλαδή το όριο διαρροής τους αποτελεί συνάρτηση της συσσωρευμένης πλαστικής παραμόρφωσης. Γίνεται η απλουστευτική υπόθεση ύπαρξης ενός μέτρου σκληρύνσεως H , το οποίο περιγράφει την καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης μετά το όριο διαρροής. Πιο συγκεκριμένα ισχύει:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(r)} = \boldsymbol{\sigma}_o^{(r)} + H^{(r)} (\boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} - \boldsymbol{\varepsilon}_o^{(r)}) \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(r)} = H^{(r)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(r)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(r)} \geq \boldsymbol{\varepsilon}_o^{(r)}$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}_o^{(r)}, \boldsymbol{\varepsilon}_o^{(r)}$ είναι η αρχική τάση και η αρχική παραμόρφωση διαρροής.

Από τον κανόνα της καθετότητας ισχύει ότι :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^{(r)}(\mathbf{x}) = \dot{\lambda}^{(r)} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}^{(r)}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^{(r)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(r)}}$$

όπου $\dot{\lambda}^{(r)}$ ο πλαστικός πολλαπλασιαστής.

Η παραπάνω περιγραφή της πλαστικότητας ισχύει στην γενική περίπτωση που και οι δυο φάσεις είναι ελαστοπλαστικές. Στην συγκεκριμένη εργασία μια από τις δυο φάσεις θα φέρει πλαστικά χαρακτηριστικά κάθε φορά.

Αυτές είναι συνθήκες που πρέπει να ισχύουν στο εσωτερικό της κυψελίδας. Εκτός αυτών πρέπει να εξασφαλιστεί και η συνέχεια των μετατοπίσεων στην διεπιφάνεια των δυο φάσεων, καθώς και η ισορροπία της. Δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\mathbf{u}^{(+)} = \mathbf{u}^{(-)} \quad \text{και} \quad \mathbf{t}^{(+)} + \mathbf{t}^{(-)} = 0$$

όπου οι συμβολισμοί (+),(-) υποδηλώνουν τον υπολογισμό των πεδίων αυτών εκατέρωθεν της διεπιφάνειας.

1.3 Συνοριακές συνθήκες

Για να είναι πλήρες το πρόβλημα συνοριακών τιμών, χρειάζεται να περιγραφούν και οι συνθήκες στο σύνορο. Αυτές, συνήθως, παίρνουν την μορφή:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_u \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_t$$

όπου $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ γνωστά διανυσματικά πεδία και \mathbf{n} το μοναδιαίο, κάθετο και προς τα έξω διάνυσμα της επιφάνειας στο σύνορο.

Δυο ειδικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών είναι αυτές των γραμμικών μετατοπίσεων και ομοιόμορφων τάσεων, οι οποίες περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{u} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \text{με} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{σταθερός, συμμετρικός τανυστής } 2^{\text{ας}} \text{ τάξεως}$$

και

$$\mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad \text{με} \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \text{σταθερός, συμμετρικός τανυστής } 2^{\text{ας}} \text{ τάξεως}$$

Στην παρούσα εργασία, από τις ειδικές περιπτώσεις, εξετάζεται αυτή την γραμμικών μετατοπίσεων, οπότε το ενδιαφέρον επικεντρώνεται εκεί. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του είδους της συνοριακής συνθήκης είναι ότι η επιβολή της παράγει ομοιόμορφη μέση παραμόρφωση. Για να αποδειχθεί αυτό αξιοποιείται το θεώρημα της μέσης τιμής, το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})] dS$$

Το παραπάνω ισχύει γενικά για ετερογενή σώματα, όπως αυτό μιας μοναδιαίας κυψελίδας. Εάν, λοιπόν, επικρατούν συνθήκες γραμμικών μετατοπίσεων στο σύνορο του σώματος προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} [u_i n_j + n_i u_j] dS = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} [\hat{\varepsilon}_{ip} x_p n_j + n_i \hat{\varepsilon}_{jp} x_p] dS \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\hat{\varepsilon}_{ip} x_{p,j} + \hat{\varepsilon}_{jp} x_{p,i}] d\Omega = \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\hat{\varepsilon}_{ip} \delta_{pj} + \hat{\varepsilon}_{jp} \delta_{pi}] d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\hat{\varepsilon}_{ij} + \hat{\varepsilon}_{ji}] d\Omega \xrightarrow{\text{συμμετρία}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{ij} d\Omega = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Επιβολή αυτής της συνοριακής συνθήκης στο επίπεδο της κυψελίδας οδηγεί στην ανάπτυξη ομοιόμορφων παραμορφώσεων. Λόγω της περιοδικότητας, η παραμόρφωση αυτή περιγράφει την παραμόρφωση όλου του σύνθετου. Στο μακροσκοπικό επίπεδο, όμως, έχει εξασφαλιστεί ότι το σώμα είναι ομογενές, με επακόλουθο την ανάπτυξη ομοιόμορφων τάσεων $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Εάν, λοιπόν, υπολογιστεί το $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ τότε από την σχέση $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbb{C}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ μπορούν να εξαχθούν οι ομογενοποιημένες καταστατικές ιδιότητες του σύνθετου υλικού. Εδώ έγκειται η αξία αυτής της συνοριακής συνθήκης.

1.4 Συνθήκες περιοδικότητας

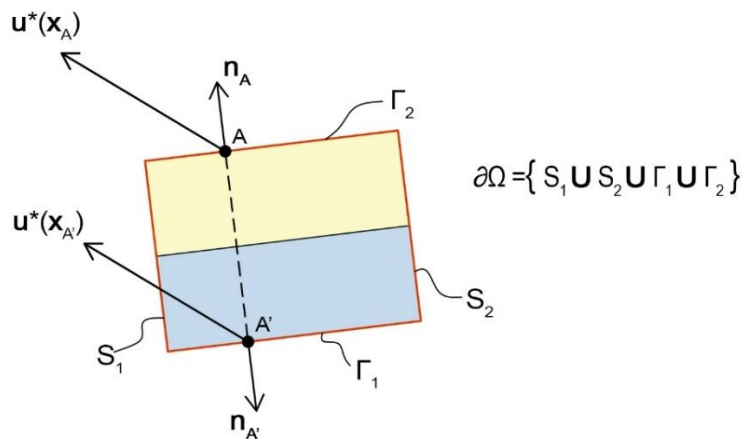
Η περιοδικότητα της μικροδομής διευκολύνει το πρόβλημα, αφού το περιορίζει στο χωρίο που ορίζεται από την μοναδιαία κυψελίδα. Είναι, λοιπόν, σημαντικό να μαθηματικοποιηθεί η έννοια της περιοδικότητας. Περαιτέρω πληροφορίες μπορούν να βρεθούν στη εργασία των Michelle.et.al. [5]

Όπως προαναφέρθηκε, η επιβολή γραμμικών μετατοπίσεων της μορφής $\mathbf{u} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$ στο σύνορο της κυψελίδας έχει ως επακόλουθο την παραγωγή ομοιόμορφης μέσης παραμόρφωσης $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Το πλήρες πεδίο των παραμορφώσεων, ωστόσο, στο ετερογενές σώμα της κυψελίδας, δεν έχει λόγο να είναι ομοιόμορφο. Σε αυτή την περίπτωση το τοπικό πεδίο των παραμορφώσεων καθώς και το πεδίο των μετατοπίσεων στο οποίο οφείλει την ύπαρξη του, μπορούν να γράφουν ως εξής:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \text{ και } \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

Η περιοδικότητα που έχει επιβληθεί συνεπάγεται ότι το διάνυσμα της μετατόπισης \mathbf{u}^* παίρνει την ίδια τιμή για κάθε ζεύγος ομόλογων σημείων $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_{A'}$ στο σύνορο $\partial\Omega$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5. Δηλαδή ισχύει ότι :

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_A) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{A'}) \quad \forall \mathbf{x}_A \leftrightarrow \mathbf{x}_{A'} \in \partial\Omega$$



Σχήμα 5: Αναπαράσταση μετατόπισης ομόλογων σημείων πάνω στο σύνορο.

Εφόσον, όμως, ισχύει ότι $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, θα πρέπει $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \rangle = \langle (\nabla \mathbf{u}^*(\mathbf{x}))_s \rangle = 0$.

Αξιοποιώντας το σχήμα 5 προκύπτει ότι:

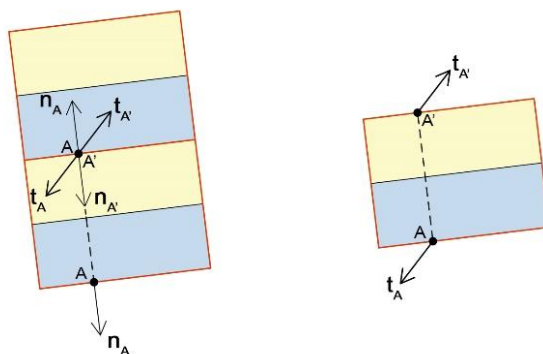
$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{u}^*(\mathbf{x})) \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* d\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} [\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^*(\mathbf{x})] dS = \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \left\{ \int_{S_1} (\mathbf{u}^* \mathbf{n})_s dS + \int_{S_2} (\mathbf{u}^* \mathbf{n})_s dS + \int_{\Gamma_1} (\mathbf{u}^* \mathbf{n})_s dS + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{u}^* \mathbf{n})_s dS \right\} \end{aligned}$$

Από την βασική ιδιότητα του \mathbf{u}^* ισχύει ότι $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_A) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{A'})$. Αυτό όμως ισχύει για κάθε ζεύγος τέτοιων σημείων, οπότε μπορεί να γραφεί η έκφραση $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_A \in \Gamma_1) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_{A'} \in \Gamma_2)$. Αξιοποιώντας και το γεγονός ότι $\mathbf{n}_A = -\mathbf{n}_{A'}$ προκύπτει:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^* \mathbf{n}_A + \mathbf{n}_A \mathbf{u}^*) dS - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^* \mathbf{n}_A + \mathbf{n}_A \mathbf{u}^*) dS = 0$$

Ακολουθώντας όμοια συλλογιστική για τις πλευρές του συνόρου S_1 και S_2 αποδεικνύεται ότι $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle = 0$.

Η περιοδική επανάληψη της κυψελίδας είναι αυτή που διαμορφώνει την πλήρη εικόνα του σύνθετου υλικού. Κατά την επανάληψη της, ωστόσο, διαμορφώνονται επιφάνειες οι οποίες θα πρέπει να ισορροπούν. Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6, σε μια διεπιφάνεια που ισορροπεί ισχύει $\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_{A'} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{t}_A = -\mathbf{t}_{A'}$. Το διάνυσμα της τάσης, λοιπόν, παίρνει αντίθετη τιμή για κάθε ζεύγος ομόλογων σημείων $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_{A'}$ στο σύνορο $\partial\Omega$.



Σχήμα 6: Αντισυμμετρία του διανύσματος της τάσης

Αξιοποιώντας τον ορισμό του διανύσματος της τάσης και το γεγονός ότι $\mathbf{n}_A = -\mathbf{n}_{A'}$ προκύπτει ότι :

$$\mathbf{t}_A + \mathbf{t}_{A'} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \mathbf{n}_A + \boldsymbol{\sigma}_{A'} \cdot \mathbf{n}_{A'} = 0 \Rightarrow (\boldsymbol{\sigma}_A - \boldsymbol{\sigma}_{A'}) \cdot \mathbf{n}_A = 0 \text{ ή } (\sigma_{ij}^A - \sigma_{ij}^{A'}) n_j = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι οι διατμητικές και η ορθή τάση που εμφανίζονται σε μια διεπιφάνεια πρέπει να είναι συνεχείς. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει και στις διεπιφάνειες μεταξύ των φάσεων.

1.5 Εφαρμογή περιοδικών συνοριακών συνθηκών σε περιβάλλον πεπερασμένων στοιχείων

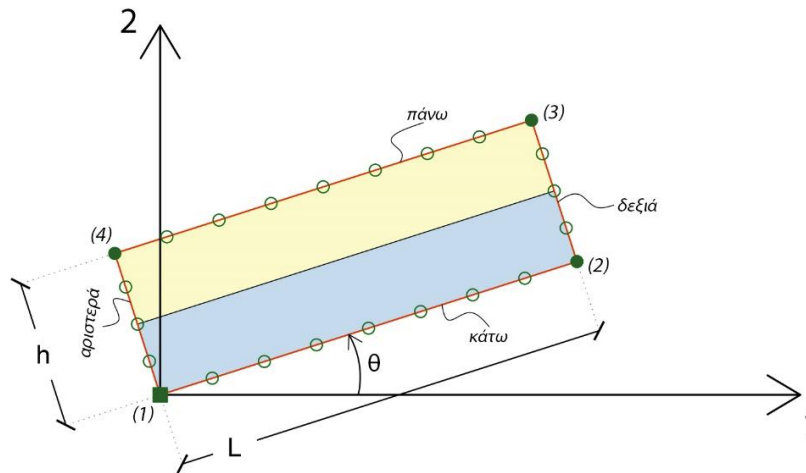
Τα βασικά αποτελέσματα, όσον αφορά τις μετατοπίσεις, που παρουσιάστηκαν παραπάνω συνοψίζονται ως εξής:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}') = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}' \in \partial\Omega$$

Προκειμένου να πραγματοποιηθούν οι διάφοροι υπολογισμοί που ακολουθούν, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της πληροφορίας των περιοδικών συνοριακών συνθηκών (Π.Σ.Σ) σε ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων. Μια αντίστοιχη προσπάθεια γίνεται στην εργασία των Paradioti et. al.[6]. Έστω, λοιπόν, το σχήμα 7. Στην παρούσα εργασία πραγματεύονται προβλήματα επίπεδης παραμορφώσεως, οπότε η τρίτη διάσταση της κυψελίδας στο σχήμα 7 δεν σχεδιάζεται. Οι οροί «Πάνω», «Κάτω», «Δεξιά», «Αριστερά», αναφέρονται στις αντίστοιχες πλευρές της κυψελίδας καθώς και

στα σημεία- ή καλύτερα στους κόμβους σε γλώσσα πεπερασμένων στοιχείων- που συναντώνται πάνω σε αυτές.



Σχήμα 7: Μοναδιαία κυψελίδα με Π.Σ.Σ

Έστω 2 ομόλογα σημεία τα οποία βρίσκονται «Δεξιά» και «Αριστερά» και άρα ισχύουν οι εκφράσεις:

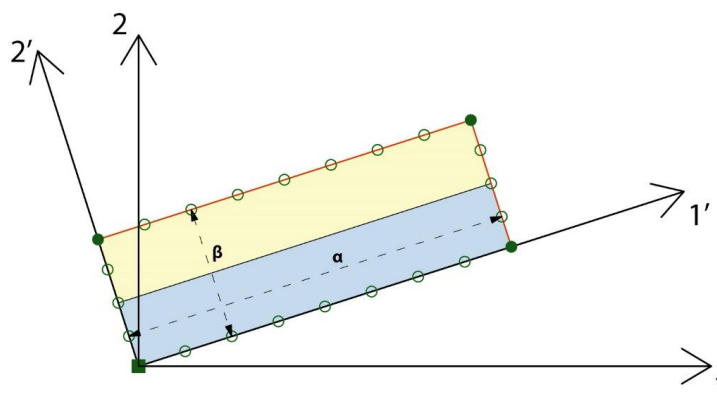
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(Δεξιά)}) &= \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{x}^{(Δεξιά)} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^{(Δεξιά)}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(Αριστερά)}) &= \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{x}^{(Αριστερά)} + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^{(Αριστερά)}) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(-)}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^{(Δεξιά)}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(Αριστερά)}) = \hat{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{x}^{(Δεξιά)} - \mathbf{x}^{(Αριστερά)}) + [\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^{(Δεξιά)}) - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^{(Αριστερά)})]$$

Η βασική ιδιότητα του \mathbf{u}^* είναι ότι $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^{(Δεξιά)}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}^{(Αριστερά)})$. Επομένως, ισχύει:

$$\mathbf{u}^{(Δεξιά)} - \mathbf{u}^{(Αριστερά)} = \hat{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{x}^{(Δεξιά)} - \mathbf{x}^{(Αριστερά)})$$

Χρησιμοποιώντας το περιστραμμένο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος 8 παρατηρείται ότι η διαφορά $\mathbf{x}^{(Δεξιά)} - \mathbf{x}^{(Αριστερά)}$ παίρνει την σταθερή τιμή \mathbf{a} για κάθε ζεύγος ομόλογων σημείων πάνω στα 2 σύνορα.



Σχήμα 8: Περιστραμμένο σύστημα συντεταγμένων της μοναδιαίας κυψελίδας.

Εφόσον $\mathbf{x}^{(Δεξιά)} - \mathbf{x}^{(Αριστερά)} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x}^{(Δεξιά)} \leftrightarrow \mathbf{x}^{(Αριστερά)} \in \partial\Omega$, τότε θα ισχύει και για το ζευγάρι $\mathbf{x}^{(2)} \leftrightarrow \mathbf{x}^{(1)}$. Άρα $\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{a} = \cos\theta \cdot L \mathbf{e}_1 + \sin\theta \cdot L \mathbf{e}_2$.

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική για 2 ομόλογα σημεία «Πάνω» και «Κάτω», αποδεικνύεται ότι:

$$\mathbf{u}^{(Πάνω)} - \mathbf{u}^{(Κάτω)} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}^{(Πάνω)} - \mathbf{x}^{(Κάτω)})$$

και

$$\mathbf{x}^{(Πάνω)} - \mathbf{x}^{(Κάτω)} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(1)} = -\sin\theta \cdot h \mathbf{e}_1 + \cos\theta \cdot h \mathbf{e}_2$$

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν είναι τα εξής:

$$\mathbf{u}^{(Δεξιά)} - \mathbf{u}^{(Αριστερά)} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}^{(Δεξιά)} - \mathbf{x}^{(Αριστερά)}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}$$

και

$$\mathbf{u}^{(Πάνω)} - \mathbf{u}^{(Κάτω)} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}^{(Πάνω)} - \mathbf{x}^{(Κάτω)}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{u}^{(4)} - \mathbf{u}^{(1)}$$

Οι διανυσματικές αυτές εξισώσεις, φανερώνουν τον κανόνα βάσει του οποίου λαμβάνουν χώρα οι σχετικές μετατοπίσεις ομόλογων συνοριακών κόμβων. Αρκεί ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων των κόμβων «οδηγών» (1), (2) και (4) ώστε να προδιαγραφούν πλήρως οι μετατοπίσεις των υπόλοιπων συνοριακών κόμβων.

1.6 Τύποι φόρτισης

Για να μελετηθεί η απόκριση του σύνθετου υλικού, θα πρέπει πρώτα να του επιβληθεί μια διέγερση. Ένας από τους τρόπους με τους οποίους επιτυγχάνεται αυτό, στην παρούσα εργασία, είναι προδιαγράφοντας πλήρως τις μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών που ορίστηκαν στην υποενότητα 1.5. Πιο συγκεκριμένα ορίζεται το $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ως εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Επιβάλλονται, δηλαδή, ίσες ποσότητες εφελκυσμού και θλίψης σε δύο μεταξύ τους κάθετες διευθύνσεις -το οποίο αντιστοιχεί σε καθαρή διάτμηση- θεωρώντας συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Για την γεωμετρία της κυψελίδας του σχήματος 7, θέτοντας $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{0}$ ώστε να αποφευχθούν κινήσεις στερεού σώματος, οι μετατοπίσεις των κόμβων (2) και (4) που δίνουν την παραπάνω παραμορφωσιακή κατάσταση είναι:

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon \cdot L \cdot \cos\theta \\ \varepsilon \cdot L \cdot \sin\theta \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u}^{(4)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \cdot h \cdot \sin\theta \\ \varepsilon \cdot h \cdot \cos\theta \end{Bmatrix}$$

Αυτού του είδους η φόρτιση εντάσσεται στο πλαίσιο των γραμμικών μετατοπίσεων και παράγει ομοιόμορφη μέση παραμόρφωση.

Ένας διαφορετικός τρόπος με τον οποίο επιβάλλονται φορτία στο υλικό είναι εκτελώντας μονοαξονική θλίψη υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Δηλαδή:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -\varepsilon & 0 \\ 0 & \text{άγνωστο} \end{bmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι επιβάλλεται βράχυνση στην διεύθυνση 1, ενώ το υλικό είναι ελεύθερο να παραμορφωθεί στην διεύθυνση 2. Οι μετατοπίσεις των κόμβων (2) και (4), της κυψελίδας του σχήματος 7, είναι:

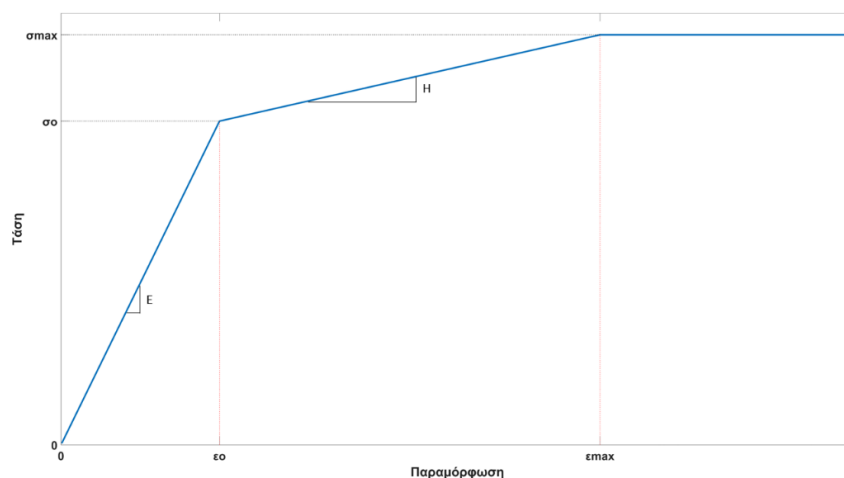
$$u^{(2)} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon \cdot L \cdot \cos \theta \\ L \cdot \sin \theta \cdot \text{άγνωστο} \end{Bmatrix} \text{ και } u^{(4)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon \cdot h \cdot \sin \theta \\ h \cdot \cos \theta \cdot \text{άγνωστο} \end{Bmatrix}$$

Η ελευθερία της παραμόρφωσης εξασφαλίζεται θέτοντας την συνιστώσα της δύναμης των κόμβων (2) και (4) στην διεύθυνση 2 ίση με το μηδέν.

Ενότητα 2

Υπολογισμοί

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι βασικοί υπολογισμοί της εργασίας. Υπενθυμίζεται ότι η ανάλυση αφορά σύνθετα υλικά με στρωματώδη περιοδική μικροδομή, ενώ οι μοναδιαίες κυψελίδες που εξετάζονται έχουν την μορφή του σχήματος 7. Οι γραμμικώς ελαστικές και ισότροπες φάσεις που αποτελούν την μικροδομή προσδιορίζονται μέσω του μέτρου ελαστικότητάς $E^{(r)}$ και του λόγου poisson $\nu^{(r)}$. Πλαστικότητα εισάγεται σε μια από τις δυο φάσεις κάθε φορά, έστω την φάση 1, για την οποία υιοθετείται η αμφιγραμμική προσέγγιση, έως μια κρίσιμη τιμή της παραμόρφωσης πέραν από την οποία το υλικό θεωρείται τέλεια πλαστικό, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.



Εικόνα 1: Καμπύλη τάσης παραμόρφωσης για την ελαστοπλαστική φάση

Οι ελαστοπλαστικές ιδιότητες των φάσεων αδιαστατοποιούνται βάσει του ορίου διαρροής της φάσης I ως εξής :

$$\sigma_o^{(1)} = 90\text{Mpa}, E^{(1)} = 100\sigma_o^{(1)}, \varepsilon_o^{(1)} = \frac{\sigma_o^{(1)}}{E^{(1)}}, H = \frac{E^{(1)}}{9}, \varepsilon_{\max}^{(1)} = 3.4\varepsilon_o^{(1)}, E^{(2)} = \lambda E^{(1)}$$

όπου λ μια σταθερά αναλογίας, η τιμή της οποίας θα δηλώνεται κάθε φορά, ενώ οι λόγοι poisson είναι $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.25$

Όσον αφορά την γεωμετρία της κυψελίδας, επιλέγεται το $L=10h$ και $c^{(1)} = 0.4$. Αυτό συνεπάγεται ότι τα ύψη των στρώσεων είναι $h^{(1)} = \frac{2}{5}h$ και $h^{(2)} = \frac{3}{5}h$. Η πραγματική τιμή του h δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα, ωστόσο για λόγους πληρότητας δηλώνεται ότι επιλέχτηκε $h=5$.

Στα μοντέλα εφαρμόζονται περιοδικές συνοριακές συνθήκες και οι τύποι φορτίσεων που επιβάλλονται είναι αυτοί που περιεγράφηκαν στην υποενότητα 1.6 . Για την επίλυση του προβλήματος αξιοποιείται το υπολογιστικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων ABAQUS[7]. Χρησιμοποιήθηκαν 8-κομβικά στοιχεία επίπεδης παραμόρφωσης μειωμένης ολοκλήρωσης (CPE8R), στο μοντέλο επιτράπηκε να αναπτυχθούν πεπερασμένες παραμορφώσεις (Nlgeom=On), ενώ όπου κρίθηκε αναγκαίο χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος μήκος τόξου (Riks).

2.1.1 Καθαρή διάτμηση και $\theta=0^\circ$

Ο πρώτος υπολογισμός που γίνεται αφορά την περίπτωση όπου η γωνία $\theta=0^\circ$. Οι στρώσεις, δηλαδή, είναι επίπεδες και παράλληλες προς την διεύθυνση της φόρτισης, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2. Μελετάται πρώτα η φόρτιση της καθαρής διάτμησης.



Εικόνα 2: Μοντέλο με επίπεδες στρώσεις που υφίσταται καθαρή διάτμηση. Η πράσινη στρώση αντιστοιχεί στην φάση 2.

Επιλέγεται το $\hat{\varepsilon} = -0.2\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + 0.2\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y$ με επακόλουθο οι μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών να δίνονται από τις σχέσεις:

$$u^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.2 \cdot 50 \cdot 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ και } u^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.2 \cdot 5 \cdot 1 \end{Bmatrix}$$

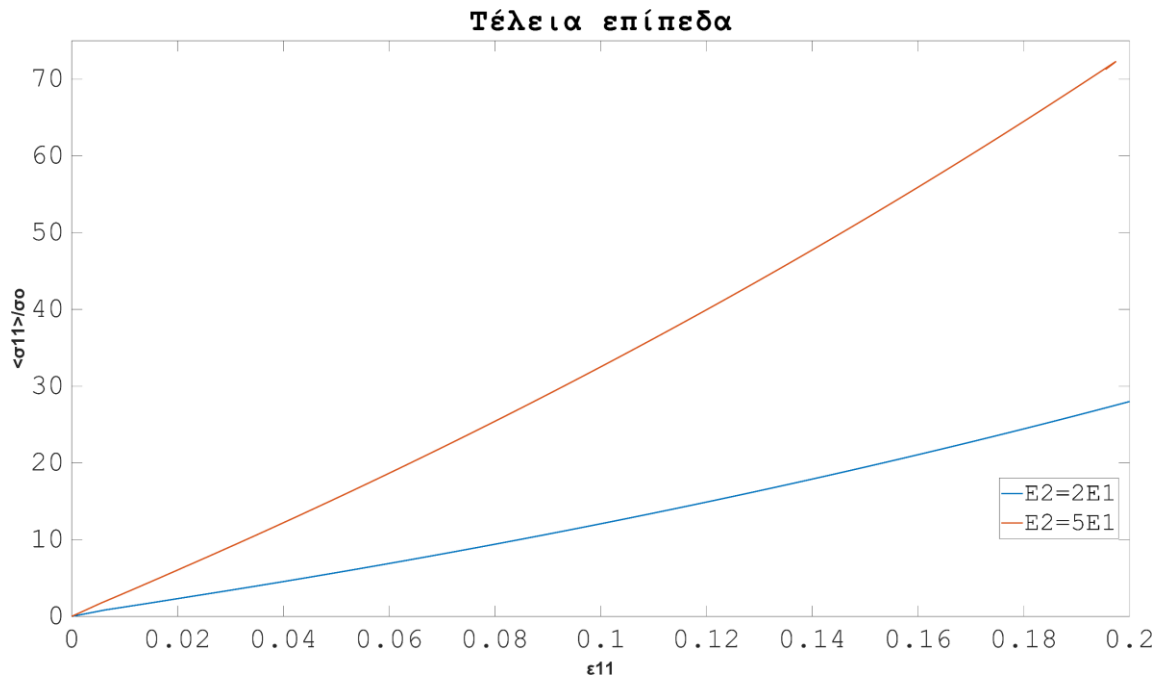
Τα αποτελέσματα των υπολογισμών για $\lambda=2$ και $\lambda=5$ παρουσιάζονται στο διάγραμμα 1. Σημειώνεται ότι η μέση τάση $\langle \sigma_{11} \rangle$ υπολογίζεται από τις αντιδράσεις στις στηρίξεις ως εξής :

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{RF}{A'}$$

όπου RF =δύναμη αντίδρασης και $A' = h \cdot \cos(\theta) \cdot t$ η απαραμόρφωτη επιφάνεια στην οποία ασκείται η δύναμη, με t να είναι το βάθος στην διεύθυνση 3.

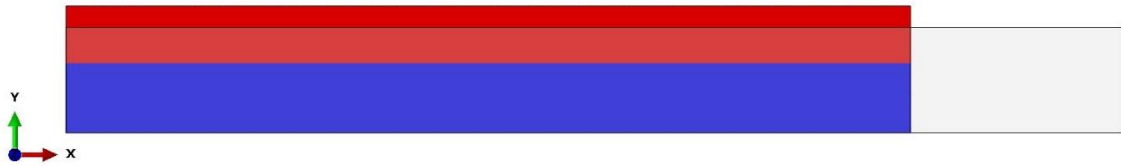
Επίσης, η μέση παραμόρφωση δίνεται από τις μετατοπίσεις των κόμβων 2 και 4 από την σχέση:

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle = \frac{u_x^{(2)} - u_x^{(4)}}{L \cos \theta}$$

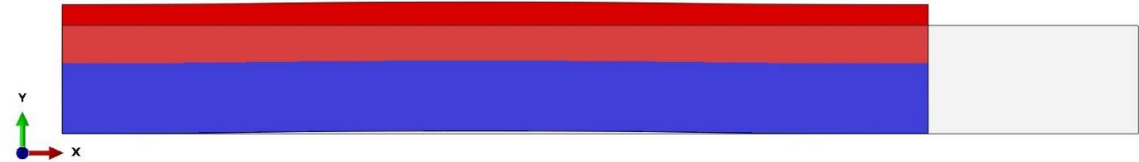


Διάγραμμα 1: Σύγκριση απόκρισης υλικού με επίπεδες στρώσεις για καθαρή διάτμηση, $\theta=0^\circ$, και διαφορετική ετερογένεια φάσεων.

Ο παραπάνω υπολογισμός μπορεί να πραγματοποιηθεί και αναλυτικά με την θεωρία να προβλέπει ομοιόμορφα πεδία στις φάσεις. Πράγματι, η τάση και η παραμόρφωση ήταν ομοιόμορφες καθ' όλη την διάρκεια της φόρτισης, για την περίπτωση που $E^{(2)} = 2E^{(1)}$. Όπως είναι αναμενόμενο, το υλικό με την πιο σκληρή φάση 2 παρουσιάζει αυξημένη δυσκαμψία. Το αξιοσημείωτο σε αυτόν τον υπολογισμό είναι ότι στην περίπτωση που $E^{(2)} = 5E^{(1)}$, για τα τελευταία βήματα της φόρτισης, παρατηρείται μια αναστροφή της καμπύλης, ανομοιόμορφα πεδία στις φάσεις και μια απώλεια της επιπεδότητας. Ο υπολογισμός, ωστόσο, ολοκληρώνεται χωρίς πρόβλημα και στην εικόνα 3 φαίνονται οι τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις των μοντέλων.



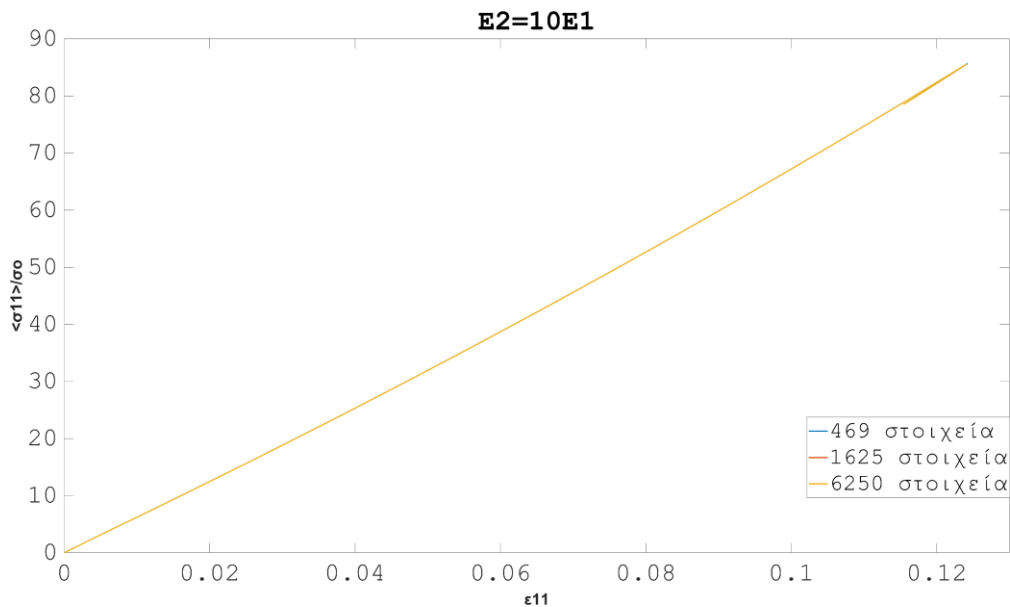
(α)



(β)

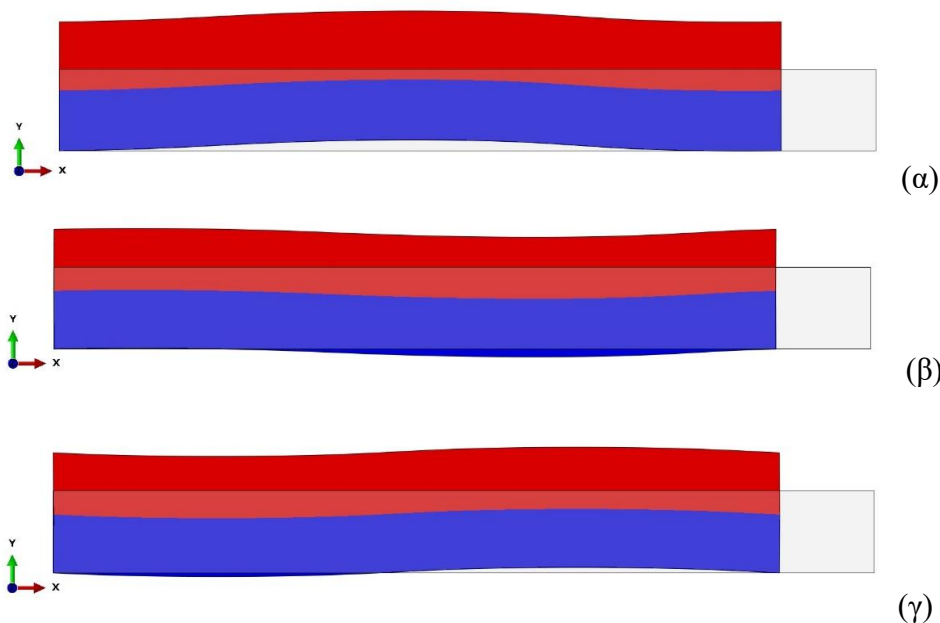
Εικόνα 3: (α) $E^{(2)} = 2E^{(1)}$, (β) $E^{(2)} = 5E^{(1)}$. Τελική παραμορφωσιακή κατάσταση των μοντέλων για καθαρή διάτμηση. Στην εικόνα 2β παρατηρείται απώλεια επιπεδότητας των φάσεων

Εξετάζοντας το μοντέλο με $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ παρατηρείται μια επιδεινωμένη κατάσταση ως προς την αναστροφή της καμπύλης και την ανομοιομορφία των πεδίων στα τελευταία στάδια της φόρτισης, όπως παρουσιάζεται στο διάγραμμα 2. Πλέον, η διαδικασία της επίλυσης δεν ολοκληρώνεται. Σε μια προσπάθεια αντιμετώπισης της δυσκολίας αυτής εφαρμόζονται πυκνότερα πλέγματα, χωρίς όμως αποτέλεσμα.



Διάγραμμα 2: Δοκιμές σύγκλισης για την περίπτωση που $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ και καθαρή διάτμηση.

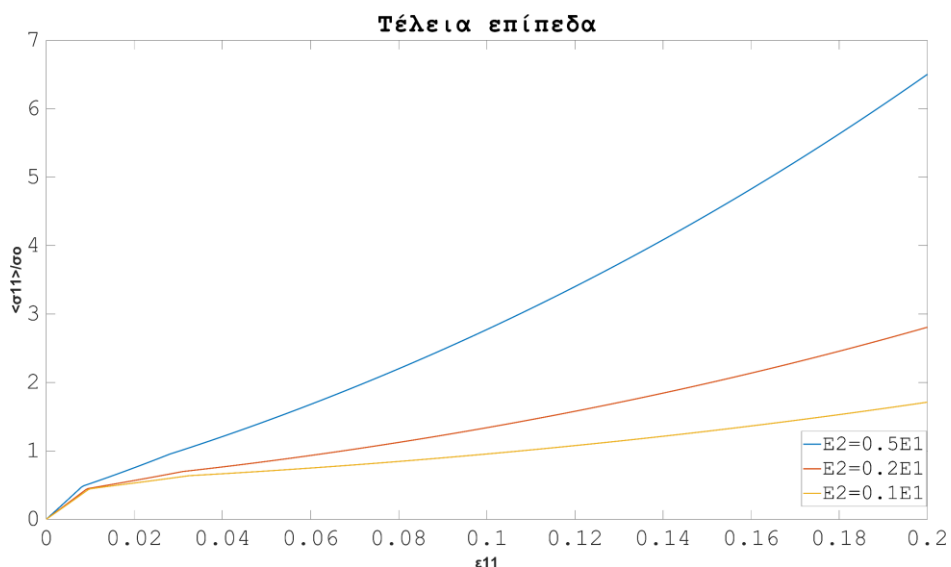
Η απώλεια της ομοιομορφίας των πεδίων συνοδεύεται και πάλι από απώλεια της επιπεδότητας των φάσεων, όπως φαίνεται, καθ' υπερβολήν, στην εικόνα 4.



Εικόνα 4: (α) 469 στοιχεία, (β) 1625 στοιχεία, (γ) 6250 στοιχεία. Τελική παραμορφωσιακή κατάσταση σε καθαρή διάτμηση για $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ με συντελεστή κλίμακας των παραμορφώσεων +4.

Το αξιοσημείωτο με την εικόνα 4 είναι ότι παρόλο που η μόνη παράμετρος που μεταβάλλεται είναι η πυκνότητα του πλέγματος, η τελική παραμορφωσιακή κατάσταση παρουσιάζει διαφορές μεταξύ των μοντέλων. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο λόγος για τον οποίο η διαδικασία επίλυσης αποτυγχάνει να ολοκληρωθεί είναι η ανάπτυξη αστάθειας η οποία καθιστά το μονοπάτι που παρουσιάζεται στο διάγραμμα 2 μη ευσταθές. Υπάρχει, λοιπόν, ένα σημείο διακλάδωσης με το μοντέλο να μην είναι σε θέση να παρακολουθήσει το πλέον ευσταθές μονοπάτι.

Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν για τιμές του $\lambda > 1$. Εισάγοντας, δηλαδή την πλαστικότητα, στην ελαστικά μαλακή φάση. Στο διάγραμμα 3 η συνθήκη αυτή αντιστρέφεται και πλέον η πλαστικότητα είναι στην ελαστικά σκληρή φάση.



Διάγραμμα 3: Σύγκριση απόκρισης υλικού με επίπεδες στρώσεις για καθαρή διάτμηση με την πλαστικότητα στην ελαστικά σκληρή φάση

Σε αυτή την περίπτωση όλοι οι υπολογισμοί ολοκληρώθηκαν, τα πεδία στις φάσεις παρέμειναν ομοιόμορφα καθόλη τη διάρκεια της φόρτισης και διατηρήθηκε η επιπεδότητα των στρώσεων. Με αλλά λογία, δεν ενεργοποιείται ο μηχανισμός της αστάθειας ο οποίος προκαλεί διακλάδωση της λύσης.

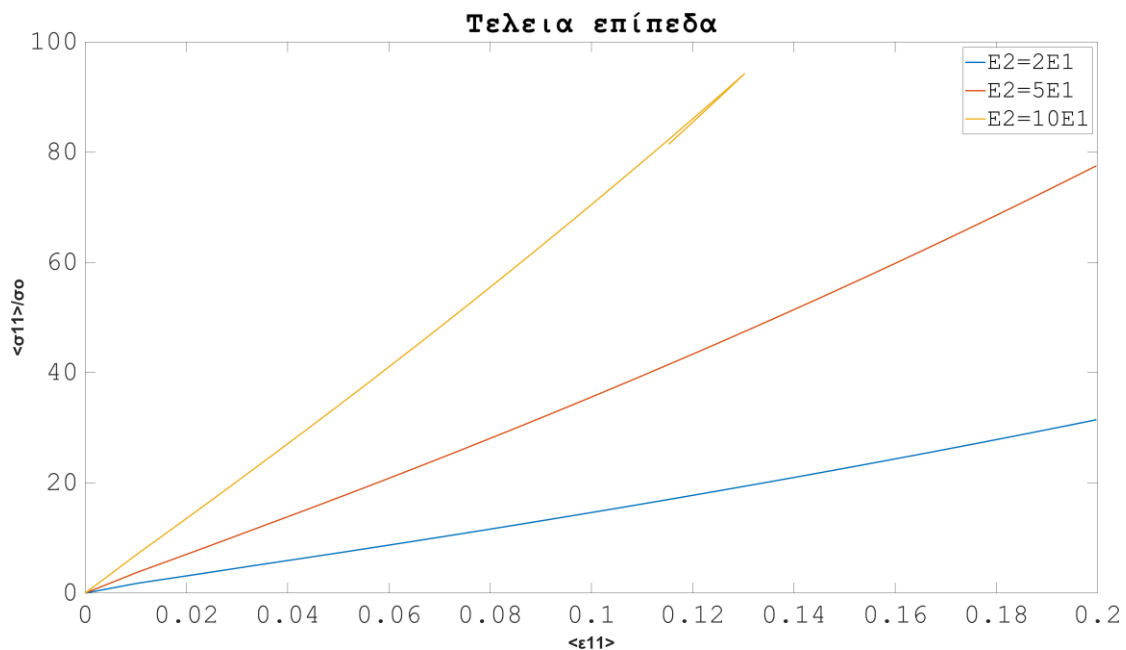
Επίσης, στο διάγραμμα 3 παρατηρούνται αλλαγές της κλίσης των καμπυλών οι οποίες παίρνουν την μορφή «σπασίματος». Αυτό οφείλεται στην μετάβαση της φάσης 1 από την ελαστική στην πλαστική κατάσταση και τέλος στην τέλεια πλαστική συμπεριφορά.

2.1.2 Μονοαξονική θλίψη και $\theta=0^\circ$

Ο επόμενος υπολογισμός που γίνεται αφορά πάλι επίπεδες στρώσεις, αλλά τώρα υπό συνθήκες μονοαξονικής βράχυνσης. Ο τρόπος με τον οποίο μοντελοποιείται αυτή η φόρτιση είναι προδιαγράφοντας τις μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών, όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 1.6, και θέτοντας την δύναμη στον κόμβο (4) ίση με το μηδέν προκειμένου να υπάρξει ελεύθερη παραμόρφωση στην διεύθυνσή y . Πιο συγκεκριμένα, επιλέγοντας το $\varepsilon = -0.2e_x e_x$ ορίζονται οι εξής μετατοπίσεις :

$$u^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.2 \cdot 50 \cdot 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ και } u^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{άγνωστο} \end{Bmatrix}$$

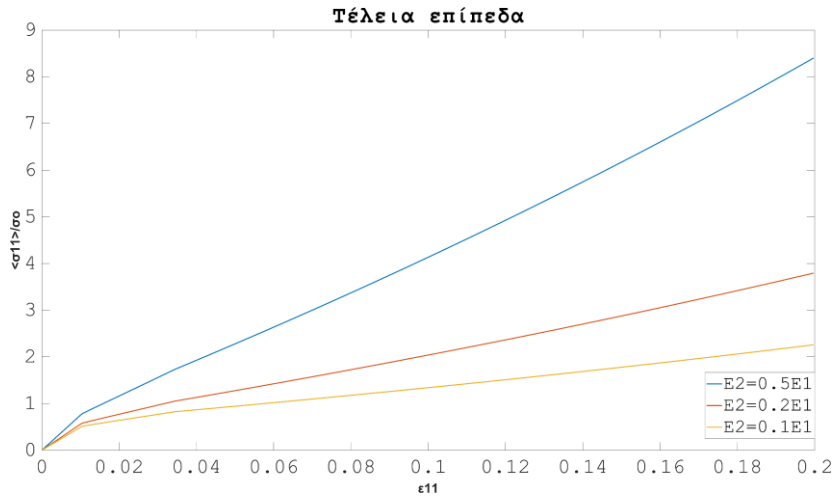
Στο διάγραμμα 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για $\lambda=2,5$ και 10



Διάγραμμα 4: Σύγκριση απόκρισης υλικού με επίπεδες στρώσεις για μονοαξονική θλίψη και διαφορετική ετερογένεια φάσεων

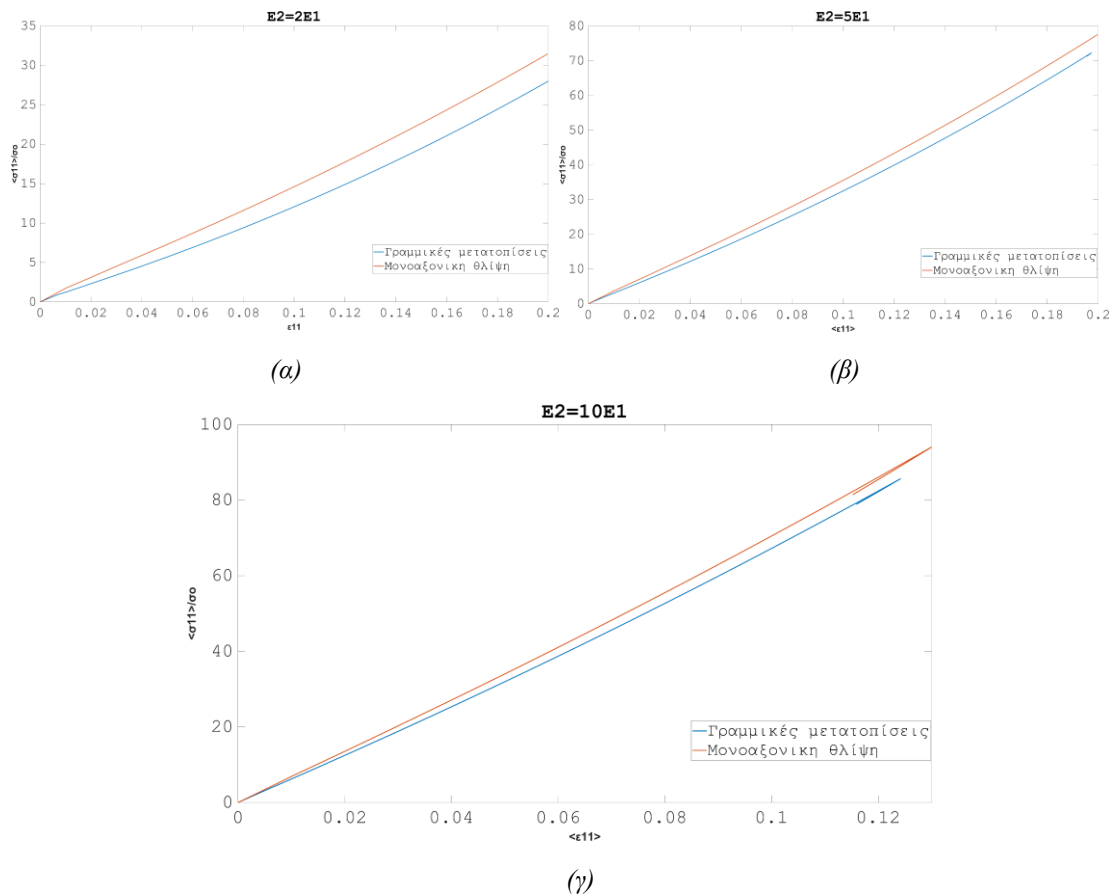
Σε αυτή την περίπτωση δεν παρατηρείται αναστροφή στην καμπύλη $E^{(2)} = 5E^{(1)}$ ούτε και απώλεια της επιπεδότητας των στρώσεων ενώ τα πεδία της τάσης και της παραμόρφωσης προκύπτουν ομοιόμορφα για όλα τα βήματα της φόρτισης. Αντίθετα, η περίπτωση όπου $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ συνοδεύεται από ανομοιόμορφα πεδία στα τελευταία στάδια της φόρτισης καθώς και από απώλεια της επιπεδότητας. Υπάρχει, λοιπόν και εδώ ανάπτυξη αστάθειας.

Επιλέγοντας η πλαστικότητα να βρίσκεται στην ελαστικά σκληρή φάση προκύπτουν τα δεδομένα του διαγράμματος 5. Παρατηρούνται και εδώ οι αλλαγές στην κλίση που συνοδεύουν την μετάβαση από την ελαστική στην πλαστική συμπεριφορά. Τα πεδία παρέμειναν ομοιόμορφα στις φάσεις, πράγμα που υποδηλώνει την μη ενεργοποίηση του μηχανισμού αστάθειας.



Διάγραμμα 5: Σύγκριση απόκρισης υλικού με επίπεδες στρώσεις για καθαρή διάτμηση με την πλαστικότητα στην ελαστικά σκληρή φάση

Συγκρίνοντας την μονοαξονική θλίψη με την καθαρή διάτμηση προκύπτει το διάγραμμα 6



Διάγραμμα 6: Σύγκριση μεταξύ καθαρής διάτμησης και μονοαξονικής θλίψης για διαφορετική ετερογένεια φάσεων.

Από τα στοιχεία του διαγράμματος 6 προκύπτει ότι και για τις 3 τιμές του λ το σύστημα στο οποίο επιβάλλεται μονοαξονική θλίψη παρουσιάζει αυξημένη δυσκαμψία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το διάγραμμα $\delta(\gamma)$ από όπου προκύπτει ότι όταν στο μοντέλο επιβάλλεται μονοαξονική θλίψη, τότε το ανάστροφο τμήμα της καμπύλης είναι μεγαλύτερο. Παρόλα αυτά, η αδυναμία υπολογισμού της λύσης και αρά η έναρξη του μηχανισμού της αστάθειας συναντάται στην ίδια τιμή της παραμόρφωσης που συναντάται και για καθαρή διάτμηση.

2.2.1 Καθαρή διάτμηση και $\theta=2^\circ$

Σε μια προσπάθεια να μελετηθεί η ανάπτυξη και η εξέλιξη του μηχανισμού της αστάθειας που παρατηρήθηκε στην παραπάνω ενότητα, η φόρτιση που επιβάλλεται δεν είναι ευθυγραμμισμένη ως προς τις φάσεις. Το μοντέλο, δηλαδή, στρέφεται κατά μια αρχική γωνιά θ ως προς την διεύθυνση της φόρτισης, όπως παρουσιάστηκε και στο σχήμα 7. Θα εξεταστούν και πάλι οι 2 τύποι φόρτισης ξεκινώντας με την καθαρή διάτμηση. Για $\theta=2^\circ$ προκύπτει το μοντέλο της εικόνας 5.

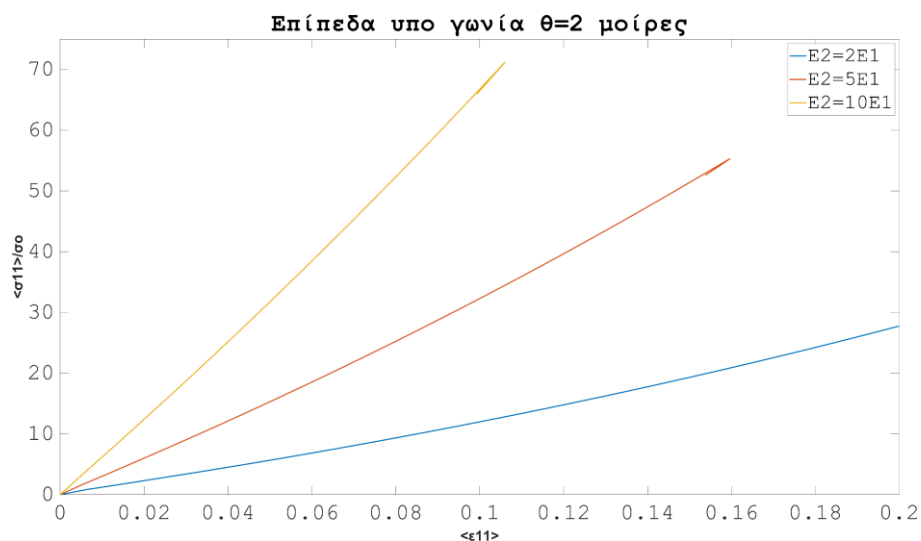


Εικόνα 5: Μοντέλο με επίπεδες στρώσεις, καθαρή διάτμηση και $\theta=2^\circ$

Επιλέγεται το $\hat{\epsilon} = -0.2\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + 0.2\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y$ με επακόλουθο οι μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών να δίνονται από τις σχέσεις :

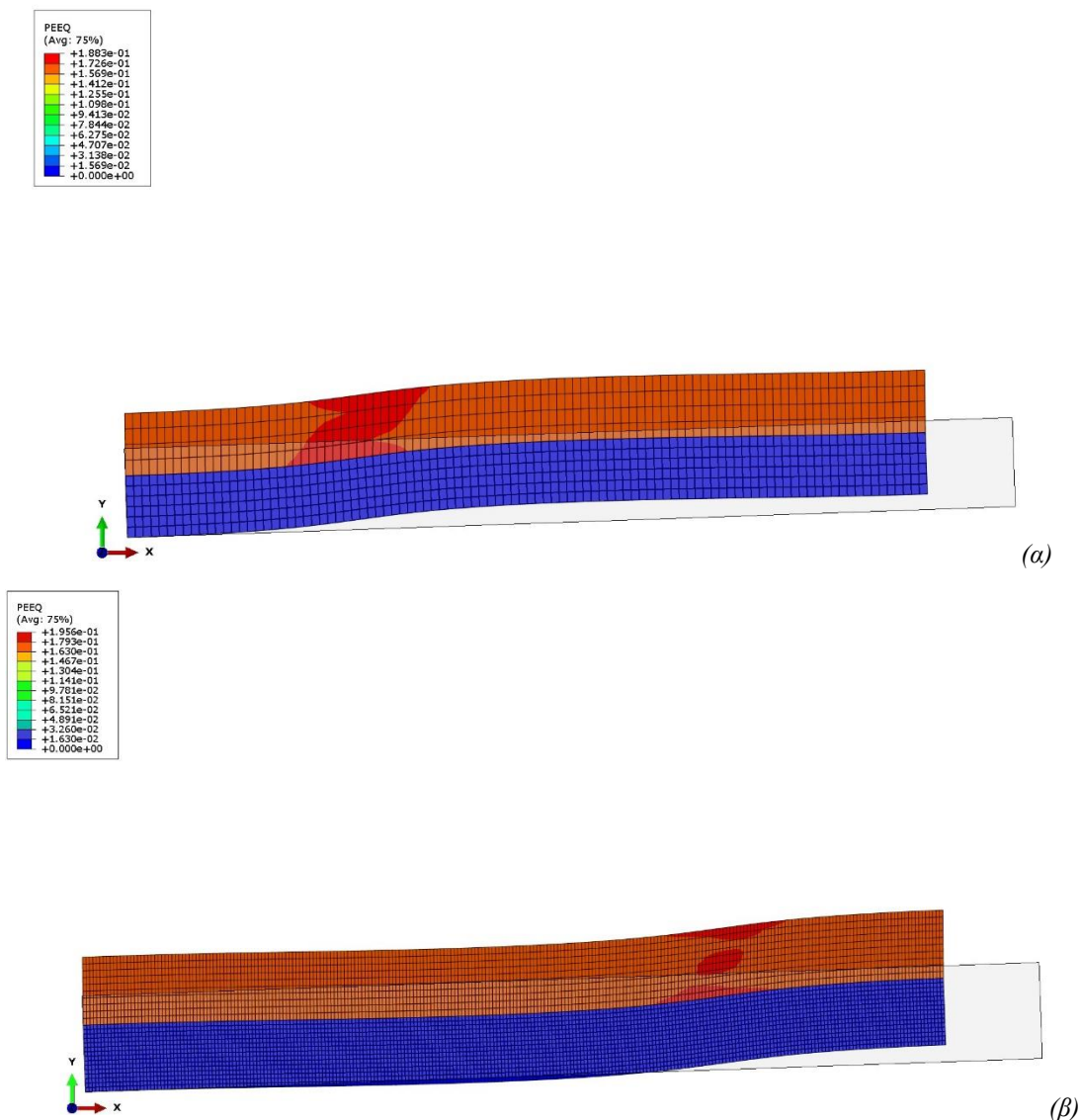
$$u^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.2 \cdot 50 \cdot \cos(2^\circ) \\ 0.2 \cdot 50 \cdot \sin(2^\circ) \end{Bmatrix} \text{ και } u^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0.2 \cdot 5 \cdot \sin(2^\circ) \\ 0.2 \cdot 5 \cdot \cos(2^\circ) \end{Bmatrix}$$

Στο διάγραμμα 7 παρουσιάζονται οι υπολογισμοί για $\lambda=2,5$ και 10



Διάγραμμα 7: Σύγκριση απόκρισης υλικού με $\theta=2^\circ$ σε καθαρή διάτμηση για διαφορετική ετερογένεια των φάσεων.

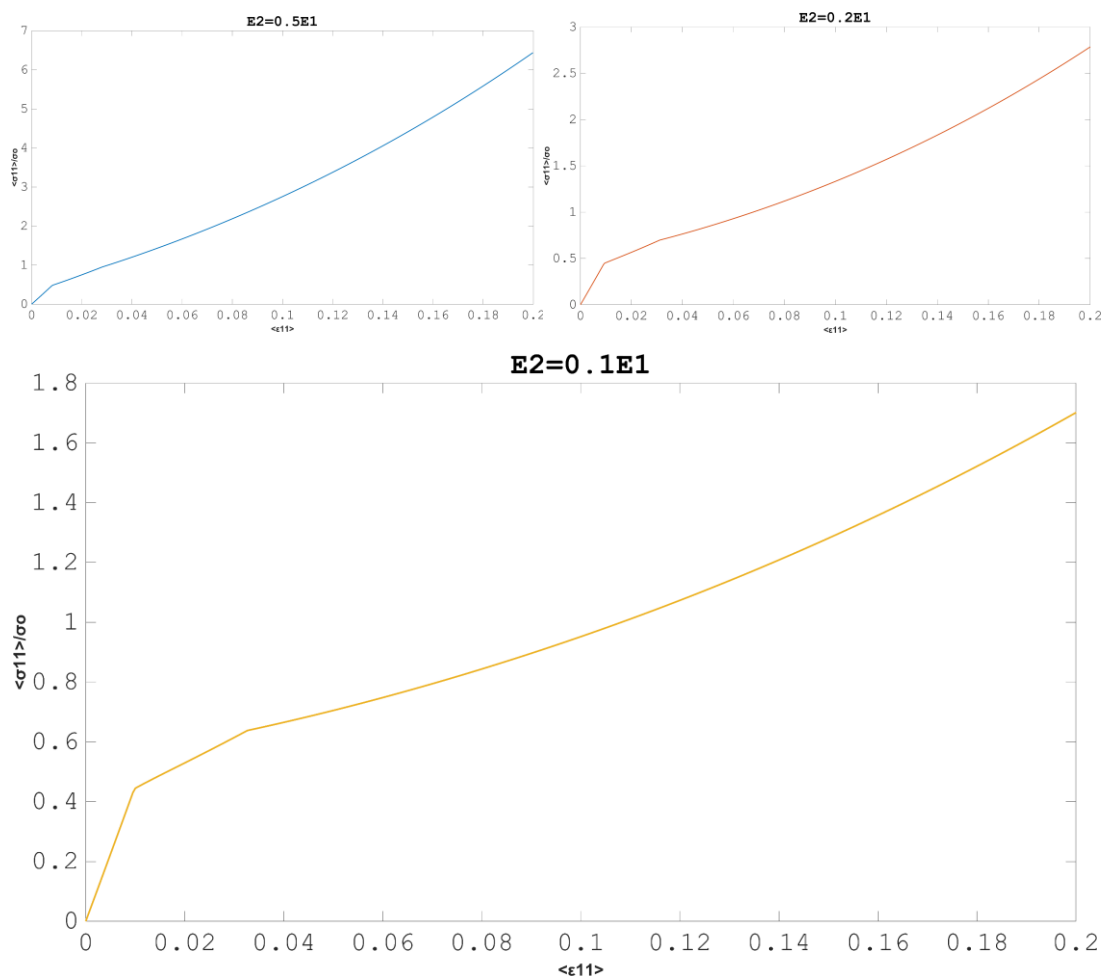
Η κλίση που εισήχθη κάνει αμέσως αισθητή την παρουσία της εφόσον πλέον, σε σχέση με την περίπτωση που $\theta=0^\circ$, ο υπολογισμός για $E^{(2)} = 5E^{(1)}$ δεν ολοκληρώνεται. Η αποτυχία σύγκλισης της λύσης συνοδεύεται και πάλι από ανομοιόμορφα πεδία και απώλεια της επιπεδότητας των φάσεων, για τα τελευταία βήματα της φόρτισης. Τόσο η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται όσο και η τιμή της παραμόρφωσης -στην ανάστροφη πορεία της καμπύλης- για την οποία τα μονοπάτια καθίστανται μη ευσταθή, είναι χαμηλότερες από ότι στο μοντέλο με $\theta=0^\circ$. Αυτό αποδεικνύει τον επιβαρυντικό χαρακτήρα της ανευθυγράμμισης φόρτισης η οποία επιταχύνει την ανάπτυξη της αστάθειας. Αναλυτικές συγκρίσεις μεταξύ των μοντέλων γίνονται σε επόμενη ενότητα. Σε μια προσπάθεια να αντιμετωπιστεί η δυσκολία υπολογισμού της λύσης πυκνώνεται το πλέγμα, χωρίς όμως αποτέλεσμα. Στην εικόνα 6 παρουσιάζονται οι τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις για 2 διαφορετικά πλέγματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι πάλι η τελική εικόνα μεταξύ των μοντέλων διαφέρει, παρόλο που η μόνη συνιστώσα που αλλάζει είναι το πλέγμα.



Εικόνα 6: (α) 1000 στοιχεία (β) 6250 στοιχεία. Καθαρή διάτμηση για $E^{(2)} = 10E^{(1)}$. Ισοϋψείς ισοδύναμης πλαστικής παραμόρφωσης στην τελική παραμορφωσιακή κατάσταση με συντελεστή κλίμακας των παραμορφώσεων +4.

Από την εικόνα 6 γίνεται αντιληπτό ότι πλέον η απώλεια της επιπεδότητας των στρώσεων συνοδεύεται από μια ζώνη συγκέντρωσης των παραμορφώσεων. Μάλιστα μια πιο προσεκτική ματιά σε αυτή την ζώνη φανερώνει ομοιότητες με αυτό που παρουσιάστηκε στο σχήμα 2 της εισαγωγής. Οι ισοϋψείς που απεικονίζονται αφορούν την ισοδύναμη πλαστική παραμόρφωση, για αυτό και παίρνουν μηδενική τιμή στην στρώση της φάσης 2.

Εισαγωγή της πλαστικότητας στην ελαστικά σκληρή φάση έχει όμοια αποτελέσματα με την περίπτωση που $\theta=0^\circ$. Δηλαδή δεν αναπτύσσεται αστάθεια, τα πεδία παραμένουν ομοιόμορφα καθόλη την διάρκεια της φόρτισης και η επιπεδότητα των στρώσεων διατηρείται. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών για $\lambda=0.5, 0.2$ και 0.1 παρουσιάζονται στο διάγραμμα 8.



Διάγραμμα 8: Σύγκριση απόκρισης υλικού με $\theta=2^\circ$ σε καθαρή διάτμηση για διαφορετική ετερογένεια των φάσεων

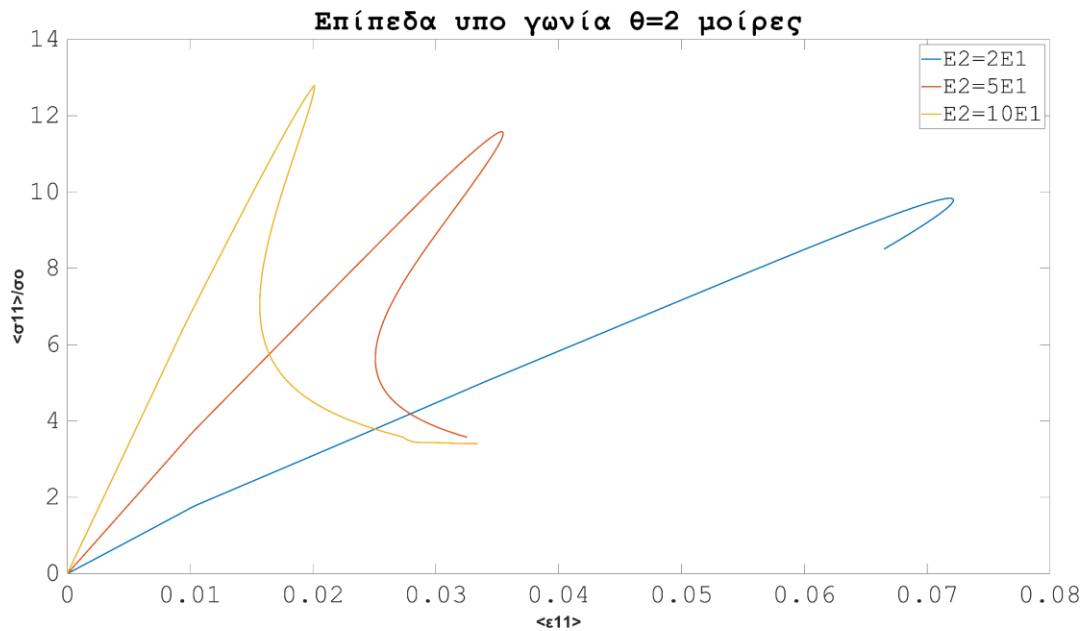
Πλέον είναι πιο ευδιάκριτη η αλλαγή της κλίσης των καμπυλών την στιγμή που η φάση 1 μεταβαίνει από την αμιγώς ελαστική κατάσταση στην ελαστοπλαστική.

2.2.2 Μονοαξονική θλίψη και $\theta=2^\circ$

Σε αυτή την υποενότητα ελέγχεται ο 2° τύπος φόρτισης, που είναι μονοαξονική θλίψη υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι αυτό στην εικόνα 5 ενώ επιλέγεται $\hat{\epsilon} = -0.2\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x$. Οι μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών είναι:

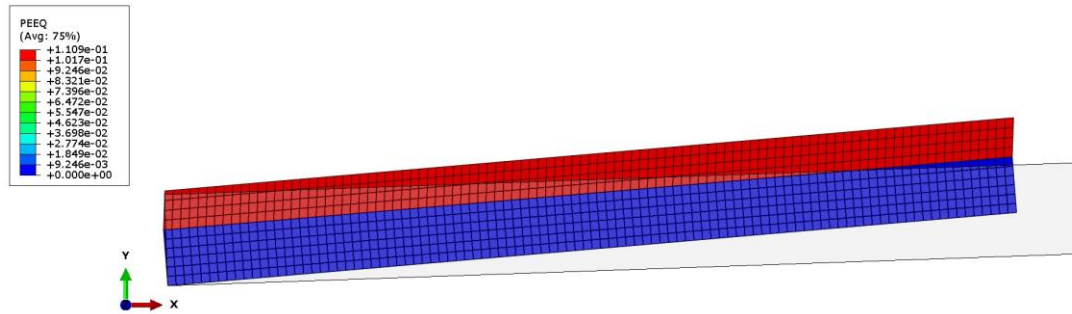
$$u^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.2 \cdot 50 \cdot \cos(2^\circ) \\ \text{άγνωστο} \end{Bmatrix} \text{ και } u^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0.2 \cdot 5 \cdot \sin(2^\circ) \\ \text{άγνωστο} \end{Bmatrix}$$

Στο διάγραμμα 9 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών για $\lambda=2,5$ και 10.

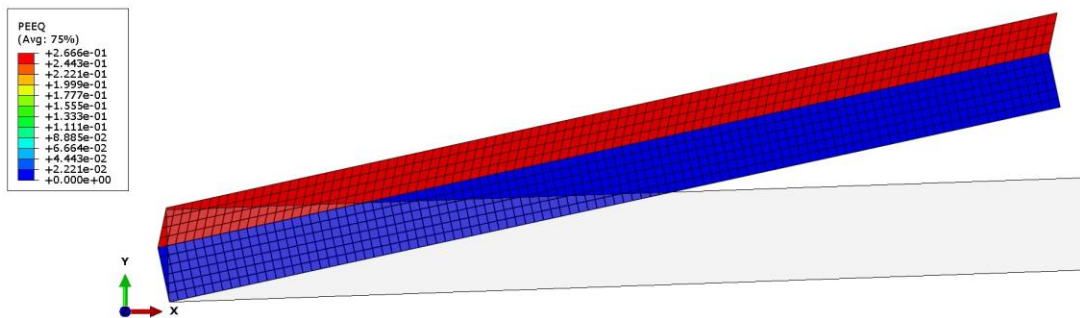


Διάγραμμα 9: Σύγκριση απόκρισης υλικού με $\theta=2^\circ$ σε μονοαξονική θλίψη για διαφορετική ετερογένεια των φάσεων

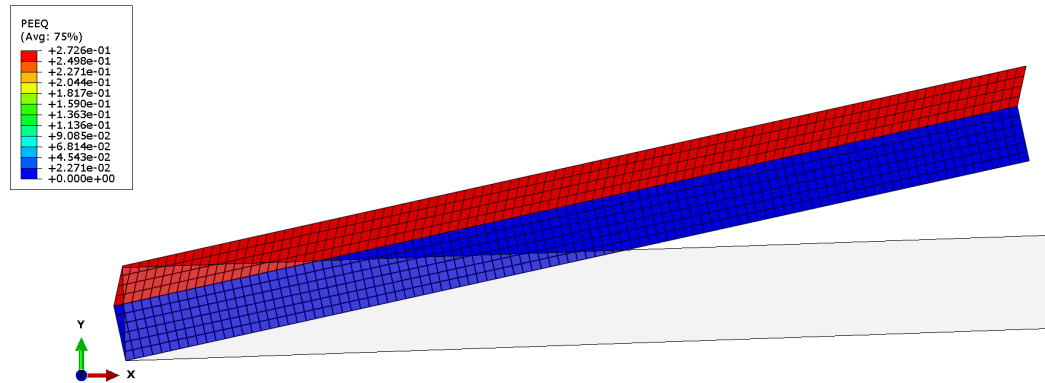
Πλέον η παρουσία της κλίσης των στρώσεων αλλάζει εντελώς την εικόνα της απόκρισης. Στο μοντέλο με $E^{(2)} = 2E^{(1)}$ συναντώνται δυσκολίες υπολογισμού της λύσης οι οποίες για $\theta=0^\circ$ δεν υπήρχαν και ούτε μπορούν να ξεπεραστούν με πύκνωση του πλέγματος. Στα μοντέλα με $E^{(2)} = 5E^{(1)}$ και $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ εντοπίζεται η ύπαρξη ενός οριακού σημείου πέραν από το οποίο παρατηρείται αναστροφή της καμπύλης. Η αγγλική ορολογία αυτής της αναστροφής είναι το «snap-back». Σε αυτό το μοντέλο, με αυτό το είδος φόρτισης, ο αλγόριθμος ήταν σε θέση να παρακολουθήσει την αναστροφή της καμπύλης και οι υπολογισμοί ολοκληρωθήκαν χωρίς πρόβλημα. Αυτό θα μπορούσε σημαίνει ότι το μονοπάτι ισορροπίας πριν και μετά την εμφάνιση του οριακού σημείου είναι το ίδιο. Δεν υπάρχει δηλαδή η διακλάδωση που εντοπίζεται στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης. Για να μπορέσουν να χαραχτούν οι καμπύλες του διαγράμματος 9 χρησιμοποιείται η μέθοδος «μήκος τόξου». Παρατηρώντας τις τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις των μοντέλων της εικόνας 7 διαπιστώνεται μια διαφορετική συμπεριφορά από αυτή που είχε σημειωθεί στην εικόνα 6.



(α)



(β)



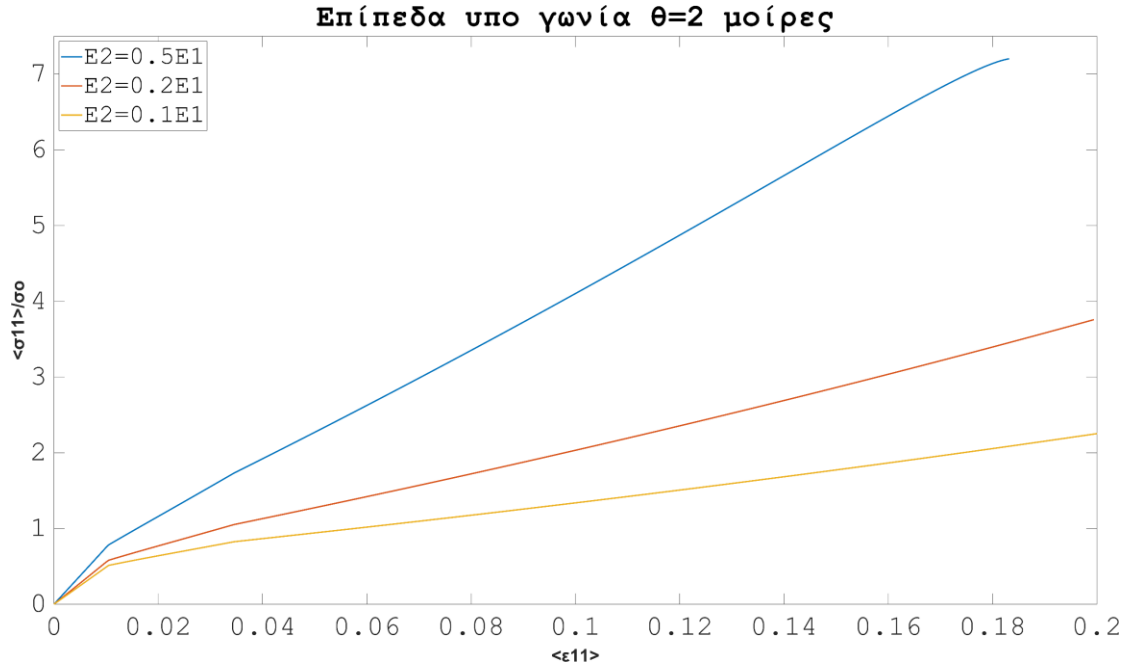
(γ)

Εικόνα 7: (α) $E^{(2)} = 2E^{(1)}$, (β) $E^{(2)} = 5E^{(1)}$, (γ) $E^{(2)} = 10E^{(1)}$. Τελική παραμορφωσιακή κατάσταση για μονοαξονική θλίψη.

Σε κάθε ένα από τα (α),(β),(γ) της εικόνας 7 παρατηρείται μια πεπερασμένη περιστροφή του μοντέλου. Σημειώνεται ότι σε αυτή την εικόνα δεν έχει επιβληθεί κάποιος συντελεστής κλίμακας των παραμορφώσεων, σε αντίθεση με την εικόνα 6. Είναι επίσης φανερή η έντονη διάτμηση που υφίσταται η φάση 1. Τα πεδία που αναπτύσσονται είναι ομοιόμορφα στις φάσεις. Πάρα την εμφάνιση ενός οριακού σημείου, η επιπεδότητα των στρώσεων διατηρείται και ο υπολογισμός ολοκληρώνεται, σε αντίθεση με την περίπτωση της καθαρής διάτμησης της υποενότητας 2.2.1 . Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο μηχανισμός που ενεργοποιείται τις φορές που συναντάται

ένα οριακό σημείο στον δρόμο ισορροπίας είναι διαφορετικός για τα δυο είδη φόρτισης.

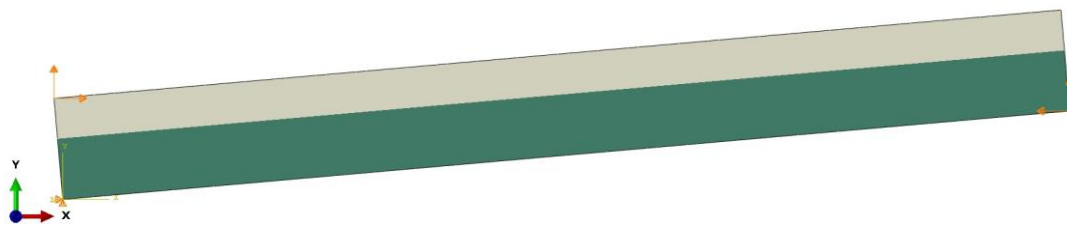
Εισάγοντας την πλαστικότητα στην ελαστικά σκληρή φάση δεν εντοπίζεται κάποιο οριακό σημείο, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα 10, ούτε παρατηρείται και έντονη περιστροφή των επιπέδων.



Διάγραμμα 10: Σύγκριση απόκρισης υλικού με $\theta=2^\circ$ σε μονοαξονική θλίψη για διαφορετική ετερογένεια των φάσεων

2.3.1 Καθαρή διάτμηση και $\theta=5^\circ$

Ενισχύοντας την παρουσία της κλίσης, χρησιμοποιούνται επίπεδα τα οποία βρίσκονται υπό γωνιά $\theta=5^\circ$ ως προς την διεύθυνση της φόρτισης, όπως φαίνεται και στην εικόνα 8.

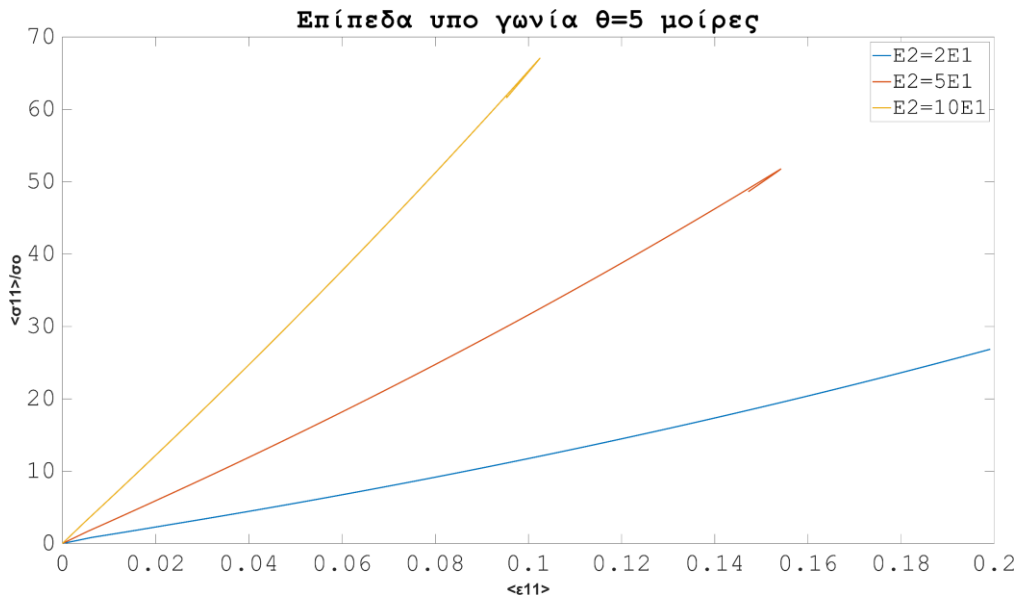


Εικόνα 8: Μοντέλο με επίπεδες στρώσεις, σε καθαρή διάτμηση και $\theta=5^\circ$

Επιλέγοντας πάλι το $\hat{\epsilon} = -0.2\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x + 0.2\mathbf{e}_y\mathbf{e}_y$ οι μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών δίνονται από τις σχέσεις:

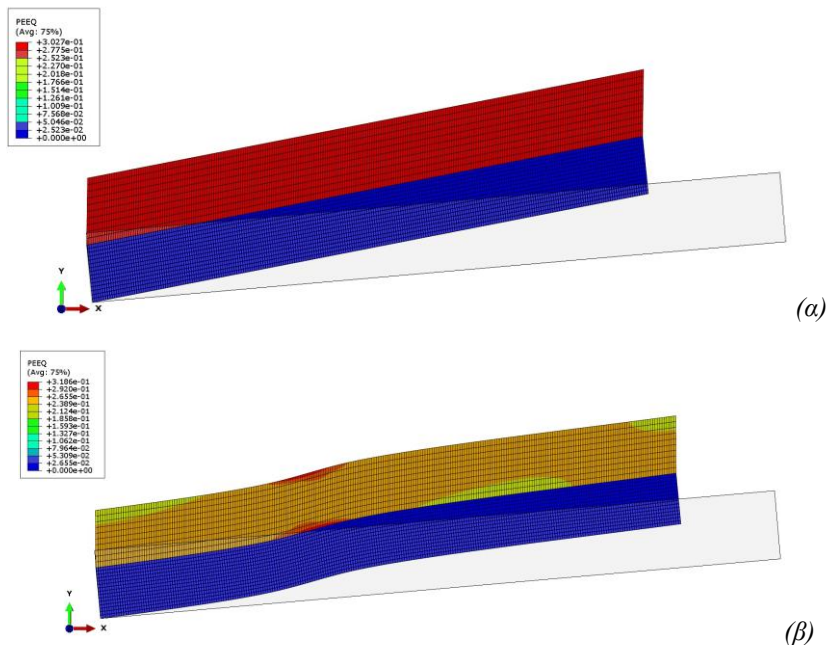
$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.2 \cdot 50 \cdot \cos(5^\circ) \\ 0.2 \cdot 50 \cdot \sin(5^\circ) \end{Bmatrix} \text{ και } \mathbf{u}^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0.2 \cdot 5 \cdot \sin(5^\circ) \\ 0.2 \cdot 5 \cdot \cos(5^\circ) \end{Bmatrix}$$

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών για $\lambda=2,5$ και 10 παρουσιάζονται στο διάγραμμα 11:



Διάγραμμα 11: Σύγκριση απόκρισης υλικού με $\theta=5^\circ$ σε καθαρή διάτμηση για διαφορετική ετερογένεια των φάσεων

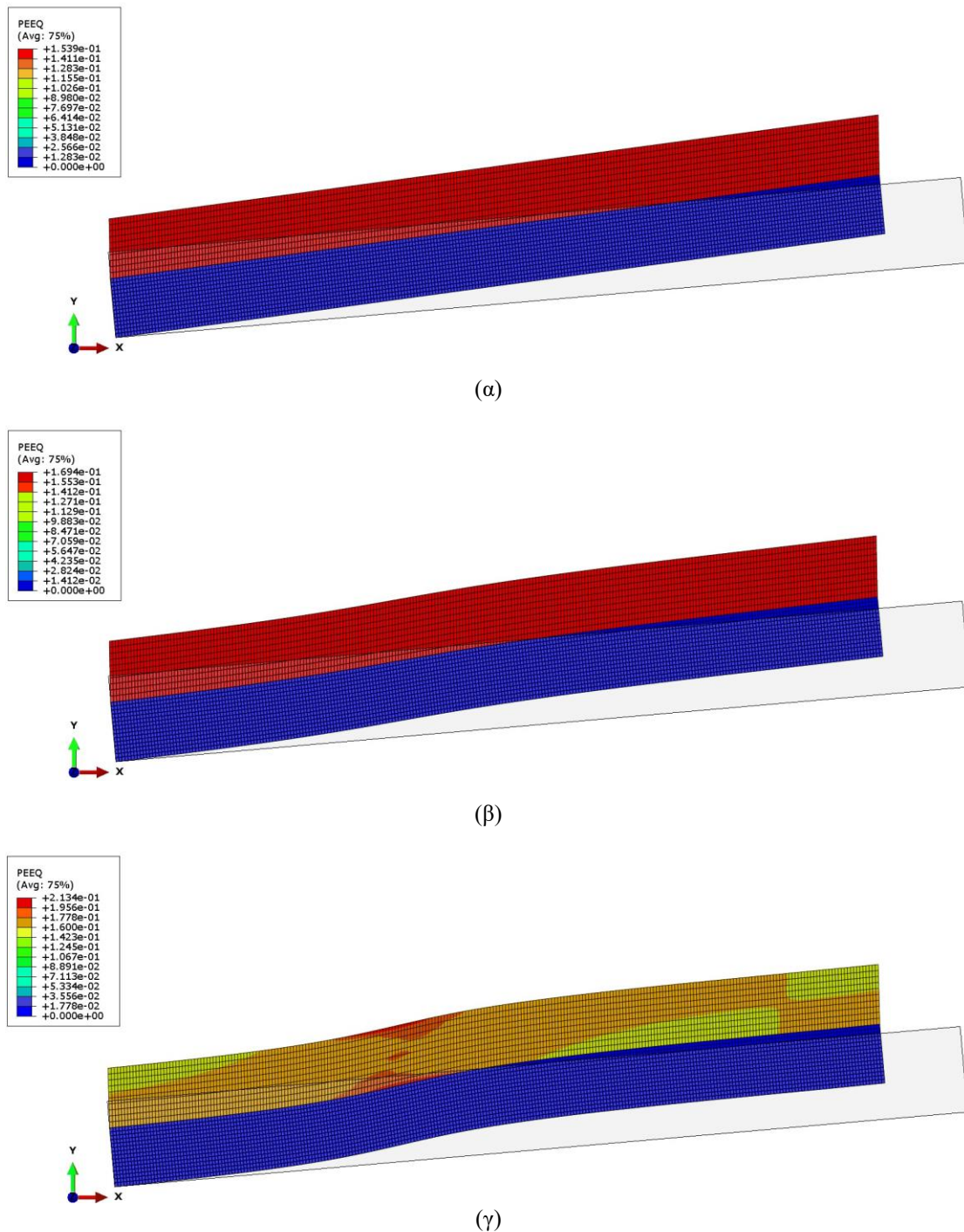
Τα αποτελέσματα είναι στο ίδιο πνεύμα με την περίπτωση όπου $\theta=2^\circ$. Δηλαδή, τα πεδία είναι ομοιόμορφα καθόλη την διάρκεια της φόρτισης μέχρι και το οριακό σημείο όπου εκεί καθίστανται ανομοιόμορφα, η επιπεδότητα των στρώσεων χάνεται και ο υπολογισμός δεν ολοκληρώνεται. Στην εικόνα 9 παρουσιάζονται οι τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις των μοντέλων με $E^{(2)}=2E^{(1)}$ και $E^{(2)}=5E^{(1)}$. Σημειώνεται ότι για την πρώτη περίπτωση δεν εντοπίζονται ανομοιόμορφα πεδία ούτε απώλεια της επιπεδότητας, τουλάχιστον όχι μέχρι αυτή την παραμόρφωση.



Εικόνα 9: (α) $E^{(2)}=2E^{(1)}$, (β) $E^{(2)}=5E^{(1)}$. Τελική παραμορφωσιακή κατάσταση σε καθαρή διάτμηση με συντελεστή κλίμακας των παραμορφώσεων +4.

Για να αναδειχθεί η διαδικασία ενεργοποίησης και εξέλιξης του μηχανισμού που προκαλεί την αστάθεια παρουσιάζονται τα στιγμιότυπα κατά την διάρκεια της

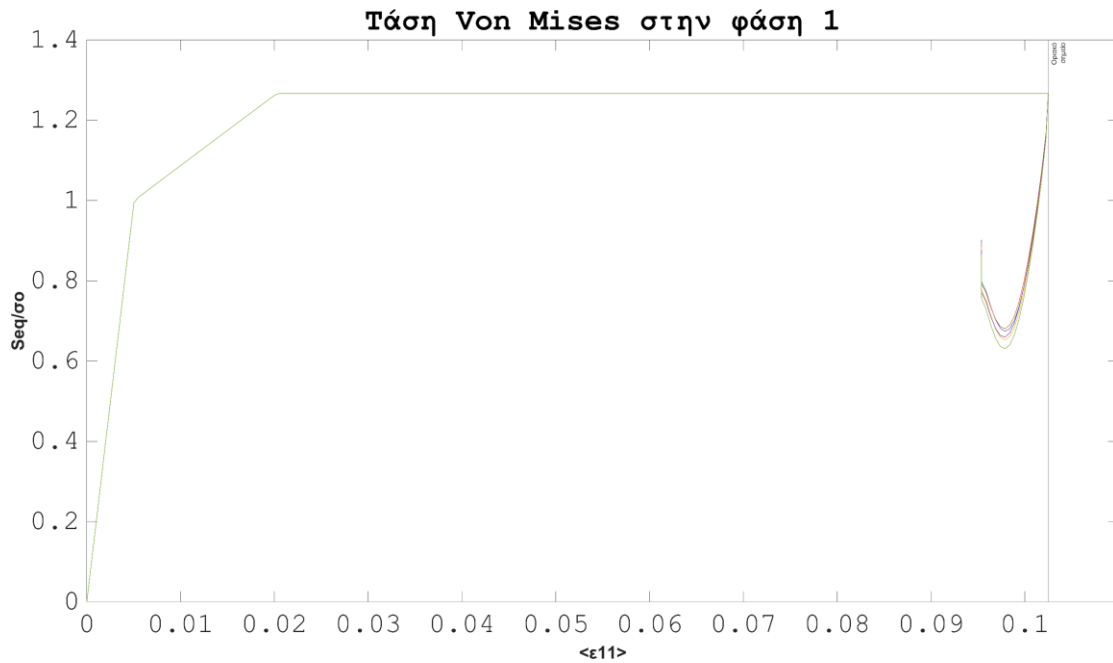
φόρτισης στην εικόνα 10. Πιο συγκεκριμένα, απεικονίζεται το μοντέλο με $E^{(2)} = 10E^{(1)}$, σε παραμόρφωση ± 0.004 της παραμόρφωσης στο οριακό σημείο.



Εικόνα 10: (α) παραμόρφωση 0.004 πριν το οριακό σημείο, (β) οριακό σημείο, (γ) παραμόρφωση 0.004 μετά το οριακό σημείο. Παραμορφωσιακή κατάσταση σε καθαρή διάτμηση για $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ με συντελεστή κλίμακας των παραμορφώσεων +4.

Η στιγμή που απεικονίζει η εικόνα 10α αφορά ένα μοντέλο με ομοιόμορφα πεδία ανά φάσεις και επίπεδες στρώσεις. Την στιγμή της εικόνας 10β τα πεδία έχουν γίνει

ανομοιόμορφα και η επιπεδότητα έχει χαθεί. Αυτό αποδεικνύει τον ταχύ τρόπο με τον οποίο ενεργοποιείται η αστάθεια. Ο απότομος αυτός χαρακτήρας της αστάθειας γίνεται αντιληπτός και από τον τρόπο με τον οποίο τα πεδία παύουν να είναι ομοιόμορφα. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζεται το διάγραμμα 12 όπου φαίνεται η ισοδύναμη τάση κατά Von Mises για στοιχεία των φάσεων 1 και 2.



(α)



(β)

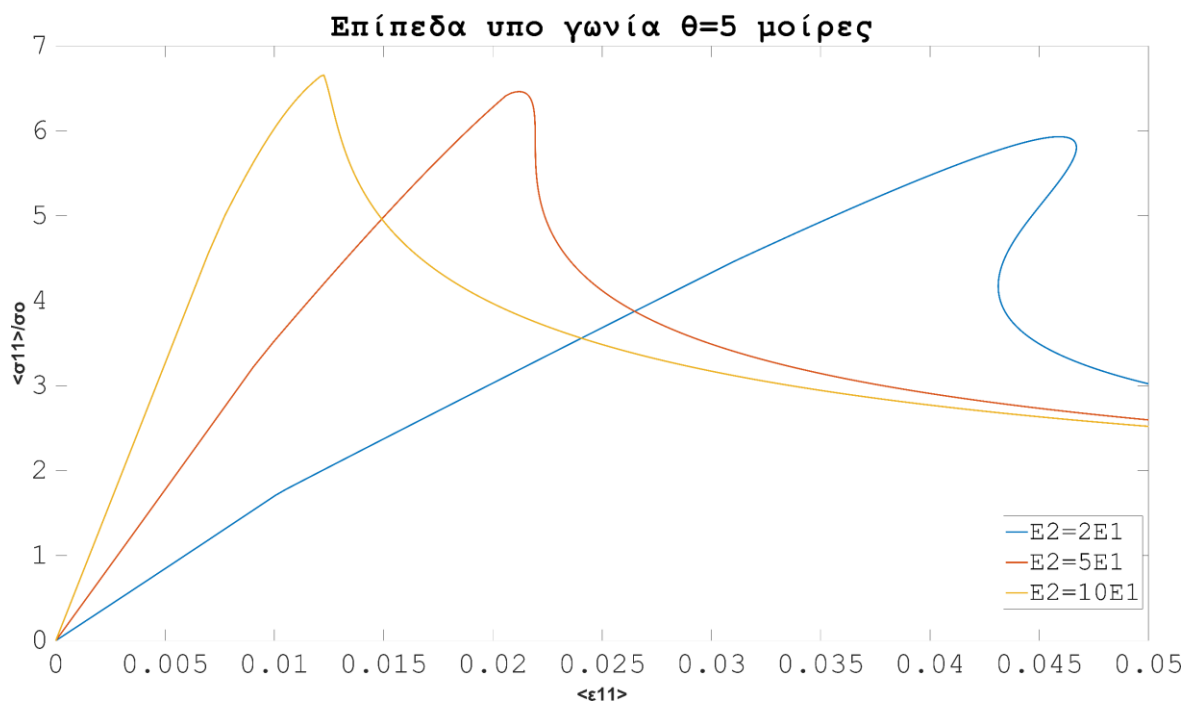
Διάγραμμα 12: Τάση Von Mises σε 10 στοιχεία του πλέγματος που ανήκουν: (α)φάση 1 (β)φάση 2, για καθαρή διάτμηση, $E^{(2)} = 10E^{(1)}$ και $\theta = 5^\circ$.

2.3.2 Μονοαξονική θλίψη και $\theta=5^\circ$

Προχωρώντας με τον 2^ο τύπο φόρτισης επιλέγεται $\hat{\epsilon} = -0.2\mathbf{e}_x\mathbf{e}_x$ με επακόλουθο οι μετατοπίσεις των κόμβων οδηγών να είναι:

$$u^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.2 \cdot 50 \cdot \cos(5^\circ) \\ \text{άγνωστο} \end{Bmatrix} \text{ και } u^{(4)} = \begin{Bmatrix} 0.2 \cdot 5 \cdot \sin(5^\circ) \\ \text{άγνωστο} \end{Bmatrix}$$

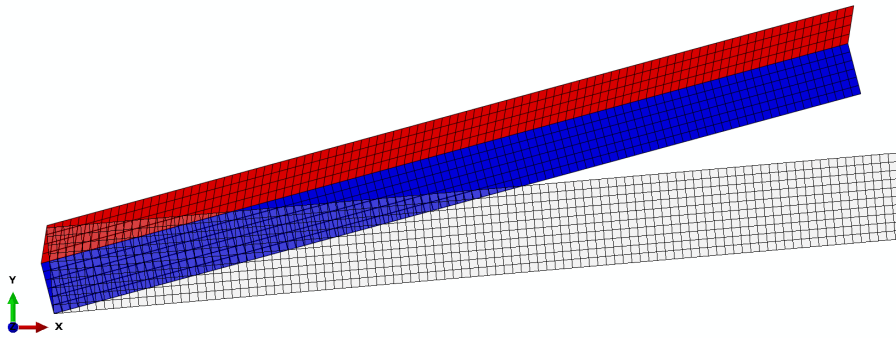
Τα αποτελέσματα των υπολογισμών παρουσιάζονται στο διάγραμμα 13.



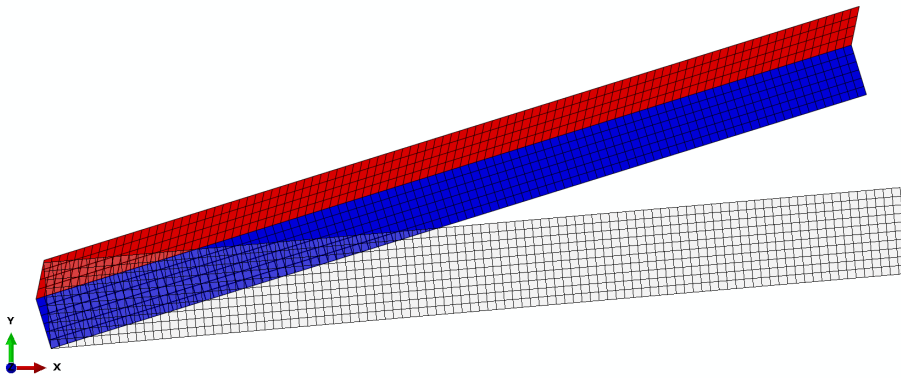
Διάγραμμα 13: Σύγκριση απόκρισης υλικού με $\theta=5^\circ$ σε μονοαξονική θλίψη για διαφορετική ετερογένεια των φάσεων

Σημειώνεται ότι πλέον τα μοντέλα είναι τέτοιας μορφής οπότε δεν προκαλείται αναστροφή της καμπύλης. Δηλαδή το «snar-back» που εμφανιζόταν στο μοντέλο με $\theta=2^\circ$ αντικαθίσταται από ένα «snar-through». Επομένως, για τον υπολογισμό της καμπύλης ισορροπίας δεν απαιτείται η μέθοδος «μήκος τόξου». Εξαιρέση σε όσα αναφέρθηκαν παραπάνω αποτελεί το μοντέλο με $E^{(2)} = 2E^{(1)}$. Επίσης σημειώνεται ότι σε όλες τις περιπτώσεις του διαγράμματος 13 τα πεδία παρέμειναν ομοιόμορφα ανά φάση καθόλη την διάρκεια της φόρτισης.

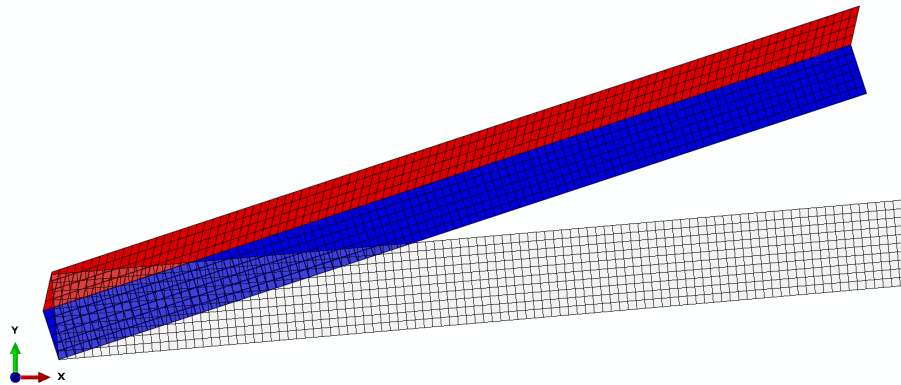
Από την εικόνα 11, όπου παρουσιάζονται οι τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις των μοντέλων, διαπιστώνεται ανάλογη συμπεριφορά με την περίπτωση όπου $\theta=2^\circ$. Υπάρχει δηλαδή μια πεπερασμένη περιστροφή του υλικού η οποία συνοδεύεται από μια έντονη διάτμηση της φάσης 1.



(α)



(β)



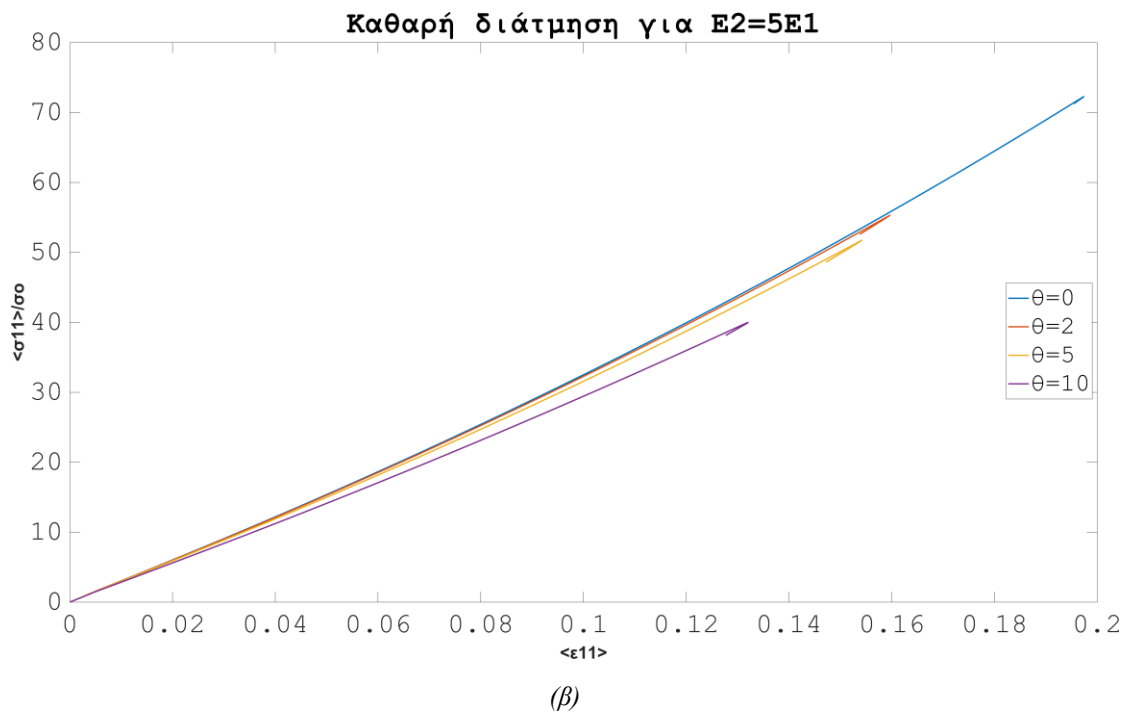
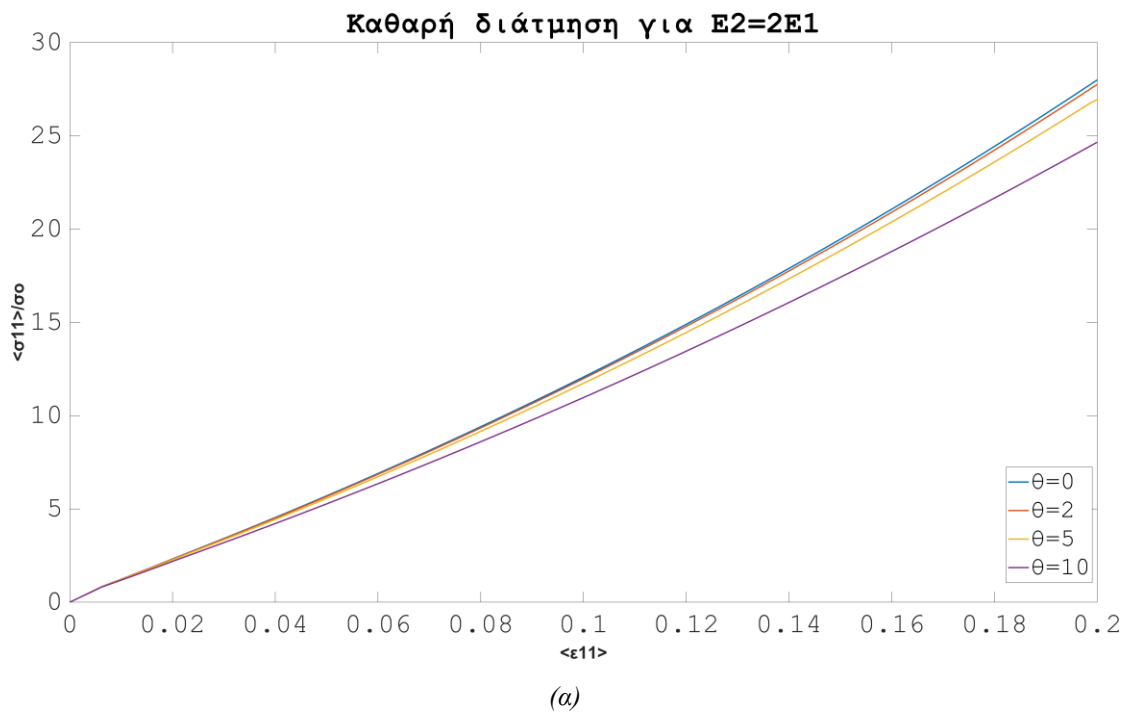
(γ)

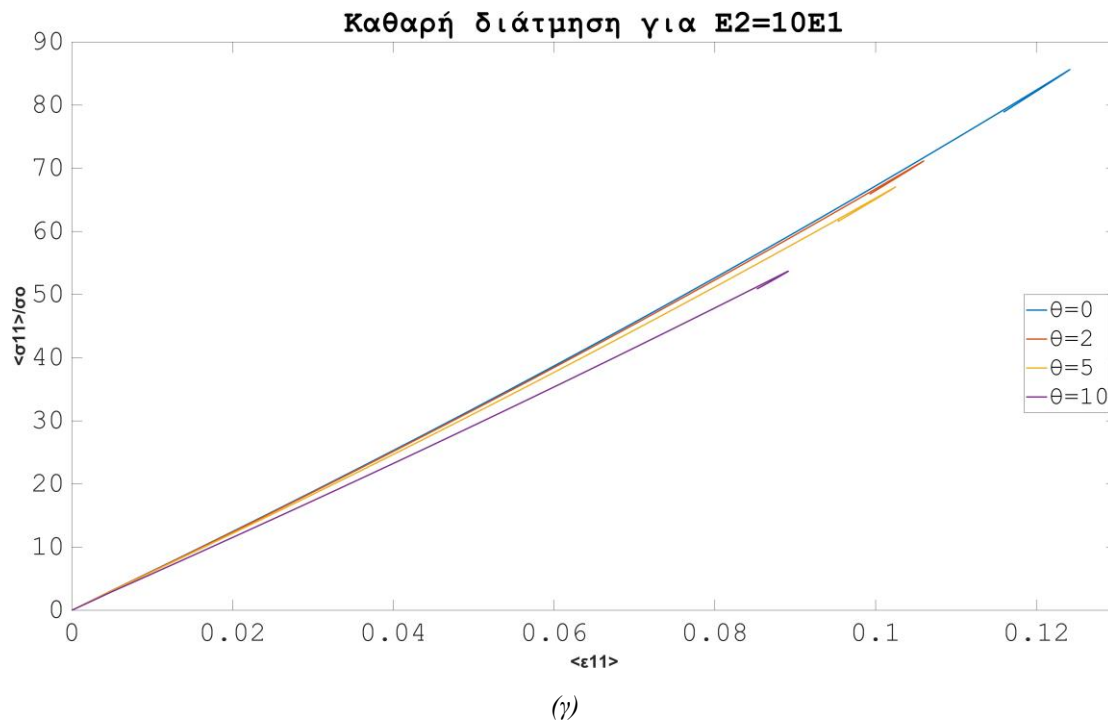
Εικόνα 11: (α) $E^{(2)} = 2E^{(1)}$, (β) $E^{(2)} = 5E^{(1)}$, (γ) $E^{(2)} = 10E^{(1)}$. Τελική παραμορφωσιακή κατάσταση σε μονοαξονική θλίψη για $\theta=5^\circ$.

Οι εικόνες 13 (α),(β),(γ) μοιάζουν, μιας και αναφέρονται στην ίδια τελική μακροσκοπική παραμόρφωση. Τα μονοπάτια που ακολουθήθηκαν, ωστόσο διαφέρουν, όπως φάνηκε στο διάγραμμα 13.

2.4.1 Συγκρίσεις για καθαρή διάτμηση

Σε αυτή την ενότητα πραγματοποιούνται συγκρίσεις μεταξύ των μοντέλων που παρουσιάστηκαν μέχρι τώρα, στα οποία επιβλήθηκε καθαρή διάτμηση, για να μελετηθεί η επίδραση της όλο ένα και αυξανόμενης γωνίας θ . Τα αποτελέσματα των συγκρίσεων παρουσιάζονται στο διάγραμμα 14.





Διάγραμμα 14: (α) $E^{(2)} = 2E^{(1)}$, (β) $E^{(2)} = 5E^{(1)}$, (γ) $E^{(2)} = 10E^{(1)}$. Συγκρίσεις μεταξύ μοντέλων με διαφορετική γωνία ατέλειας υπό συνθήκες καθαρής διάτμησης.

- Για $E^{(2)} = 5E^{(1)}$

	$\theta=0^\circ$	$\theta=2^\circ$	$\theta=5^\circ$	$\theta=10^\circ$
$\langle \sigma_{11}^{\max} / \sigma_o \rangle$	72.3	55.3	51.7	39.4
ϵ^{\max}	0.197	0.160	0.154	0.13

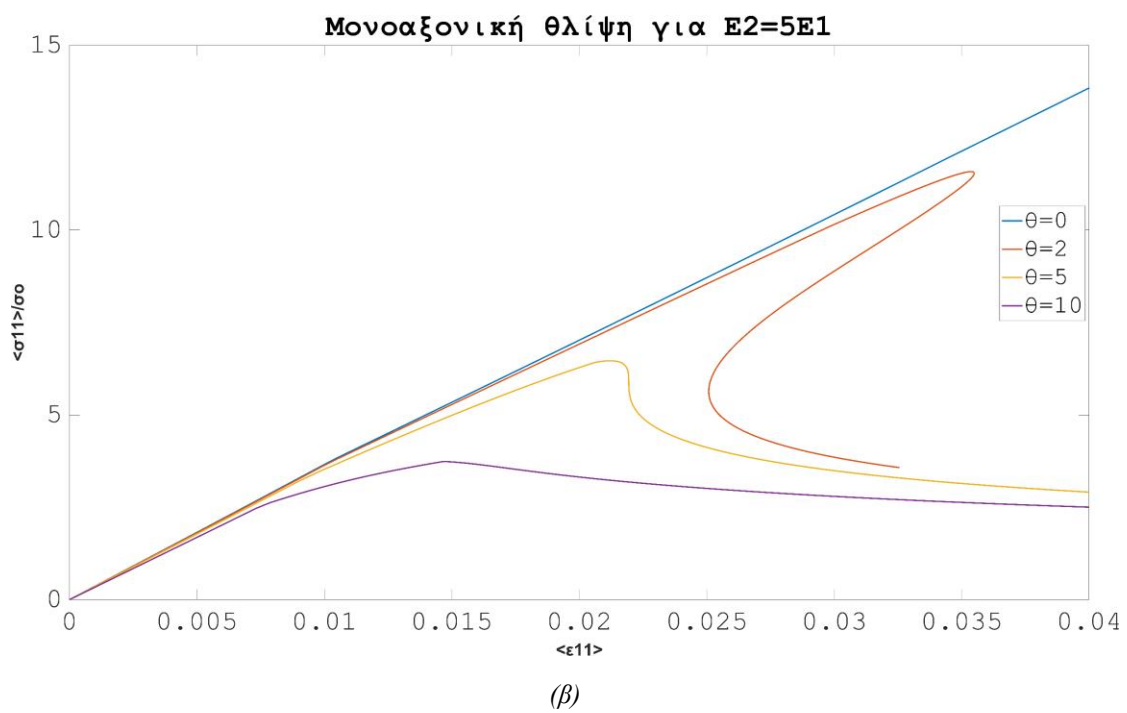
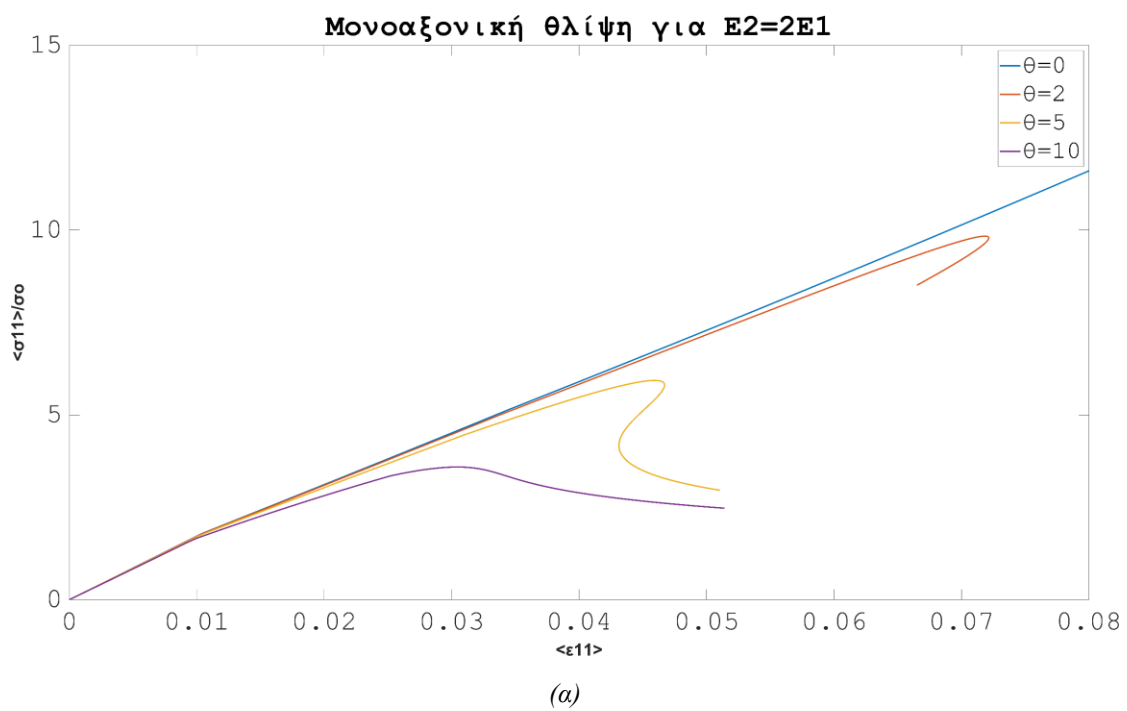
- Για $E^{(2)} = 10E^{(1)}$

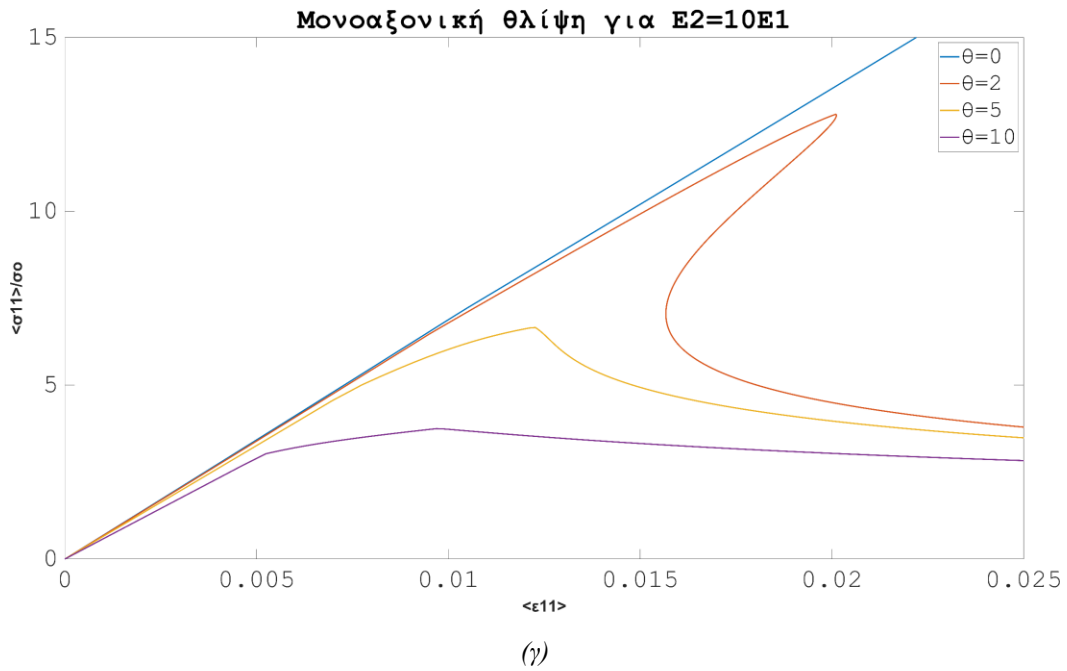
	$\theta=0^\circ$	$\theta=2^\circ$	$\theta=5^\circ$	$\theta=10^\circ$
$\langle \sigma_{11}^{\max} / \sigma_o \rangle$	85.6	71.2	67	51.7
ϵ^{\max}	0.124	0.106	0.102	0.086

Καθώς αυξάνει η γωνία της ατέλειας, η μέγιστη τάση και η μέγιστη παραμόρφωση που επιτυγχάνονται πέφτουν.

2.4.2 Συγκρίσεις για μονοαξονική θλίψη

Στο διάγραμμα 15 παρουσιάζονται οι συγκρίσεις στα διάφορα μοντέλα για την περίπτωση που επιβλήθηκε μονοαξονική θλίψη.





Διάγραμμα 14: (α) $E^{(2)} = 2E^{(1)}$, (β) $E^{(2)} = 5E^{(1)}$, (γ) $E^{(2)} = 10E^{(1)}$. Συγκρίσεις μεταξύ μοντέλων με διαφορετική γωνία ατέλειας υπό συνθήκες μονοαξονικής θλίψης.

- Για $E^{(2)} = 2E^{(1)}$

	$\theta=0^\circ$	$\theta=2^\circ$	$\theta=5^\circ$	$\theta=10^\circ$
$\langle \sigma_{11}^{\max} / \sigma_o \rangle$	31.4	9.8	5.9	3.6
ϵ (οριακό σημείο)	-	0.0721	0.0460	0.0303
Snap-Back	-	-	✓	✓
Snap-Through	-	-		

- Για $E^{(2)} = 5E^{(1)}$

	$\theta=0^\circ$	$\theta=2^\circ$	$\theta=5^\circ$	$\theta=10^\circ$
$\langle \sigma_{11}^{\max} / \sigma_o \rangle$	77.5	11.6	6.5	3.7
ϵ (οριακό σημείο)	-	0.0354	0.0212	0.0148
Snap-Back	-	✓		
Snap-Through	-		✓	✓

- Για $E^{(2)} = 10E^{(1)}$

	$\theta=0^\circ$	$\theta=2^\circ$	$\theta=5^\circ$	$\theta=10^\circ$
$\langle \sigma_{11}^{\max} / \sigma_o \rangle$	94.2	12.8	6.6	3.7
ϵ (οριακό σημείο)	0.13	0.0201	0.0123	0.0097
Snap-Back	-	✓		
Snap-Through	-		✓	✓

Ενότητα 3

Συμπεράσματα

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα βασικά συμπεράσματα. Πρωταρχικό πόρισμα των παραπάνω υπολογισμών είναι η έντονη επίδραση της ετερογένειας των φάσεων στην απόκριση του σύνθετου υλικού. Η τιμή που παίρνει κάθε φορά το λ δεν επηρεάζει απλώς την δυσκαμψία του συστήματος, αλλά και το αν θα ενεργοποιηθεί κάποιος μηχανισμός αστάθειας στο εύρος των παραμορφώσεων που εξετάζονται. Για παράδειγμα, όταν επιλέχτηκε $\lambda=2$ μαζί με καθαρή διάτμηση, δεν υπήρξε κάποια παρεμπόδιση του υπολογισμού για γωνία θ που δοκιμάστηκε, ενώ όταν τέθηκε $\lambda=5$ όλα τα μοντέλα εμφάνισαν ένα οριακό σημείο και μια αναστροφή της καμπύλης τάσης-παραμόρφωσης. Επιπλέον, για $\lambda < 1$, δεν παρατηρείται αστάθεια μιας και όταν εξαντλούνται τα αποθέματα κράτυνσης πέφτει η ετερογένεια των φάσεων του υλικού.

Επίσης καθοριστική στην ανάπτυξη της αστάθειας είναι και η γωνία θ των επιπέδων. Όταν ελέγχθηκε το μοντέλο με $\theta=0^\circ$ δεν παρατηρήθηκε μεγάλη διαφορά μεταξύ των δύο τύπων φόρτισης. Με εξαίρεση την διαφορετική δυσκαμψία μεταξύ αυτών, οι τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις συνοδεύονταν και οι δύο από απώλεια ομοιομορφίας των πεδίων στις φάσεις καθώς και απώλεια επιπεδότητας, για $\lambda=10$. Ο ίδιος υπολογισμός για $\theta=2^\circ$ δίνει εντελώς διαφορετικές συμπεριφορές. Στην περίπτωση της καθαρής διάτμησης ο υπολογισμός δεν ολοκληρώνεται, εντοπίζονται ανομοιόμορφα πεδία στις φάσεις και απώλεια επιπεδότητας. Αντίθετα, για μονοαξονική θλίψη, τα πεδία παρέμεναν ομοιόμορφα καθόλη την διάρκεια της φόρτισης, η οποία ολοκληρώθηκε, η επιπεδότητα των φάσεων διατηρήθηκε και συνοδεύτηκε από μια πεπερασμένη περιστροφή καθώς και μια έντονη διάτμηση της φάσης I . Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο μηχανισμός της αστάθειας που ενεργοποιείται, ανάλογα τη φόρτιση που επιβάλλεται, είναι διαφορετικός. Απουσία κλίσης των επιπέδων δεν υπάρχει ξεκάθαρος τρόπος διάκρισης μεταξύ αυτών, ενώ όταν πλέον ελέγχονται μοντέλα με μη ευθυγραμμισμένη φόρτιση, οι αποκρίσεις διαφοροποιούνται έντονα. Όπως παρουσιάστηκε και στην υποενότητα των συγκρίσεων, κλίση των στρώσεων μαζί με μονοαξονική θλίψη οδηγεί στην εμφάνιση ενός οριακού σημείου το οποίο ακολουθείται από ένα «snap-back» ή «snap-through» ανάλογα την γωνία θ . Υπό αυτές τις συνθήκες είναι δυνατόν να παρακολουθηθεί η απόκριση του υλικού, για τις περισσότερες περιπτώσεις τουλάχιστον. Αντίθετα, όταν ελέγχθηκε η επίδραση της γωνίας θ μαζί με καθαρή διάτμηση, οι τελικές παραμορφωσιακές καταστάσεις δεν εμφάνιζαν έντονη μεταβολή της γεωμετρίας, ωστόσο παρουσίαζαν μια ζώνη στην οποία συγκεντρώνονταν οι παραμορφώσεις. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ευσταθής καμπύλη ισορροπίας, πριν και μετά το οριακό σημείο, είναι η ίδια για την περίπτωση της μονοαξονικής θλίψης. Αντίθετα, για καθαρή διάτμηση, το οριακό σημείο συνοδεύεται από μια διακλάδωση της λύσης η οποία μεταπηδά σε διαφορετικό μονοπάτι ισορροπίας. Τέλος, η ολοένα και αυξανόμενη γωνία θ προκαλεί μια συνεχή πτώση των μέγιστων φορτίων που αναπτύσσονται, ενώ παράλληλα οδηγεί στην εμφάνιση οριακών σημείων σε χαμηλότερες παραμορφώσεις.

Βιβλιογραφία

- [1] Rosen, B. W. (1965) 'Mechanics of composite strengthening', *Composite Materials*, pp. 37-75. American Society of Metals, Metals Park, OH
- [2] ARGON, A.S. (1972) 'Fracture of composites', *Treatise on Materials Science & Technology*, pp. 79-114.
- [3] Budiansky, B. (1983) 'Micromechanics', *Computers & Structures*, 16(1-4), pp. 3-12.
- [4] Νικόλαος Αράβας, *Μηχανική των υλικών – Εισαγωγή στη μηχανική παραμορφωσίμων σωμάτων και την γραμμική ελαστικότητα, τόμος 1.*
- [5] Michel, J.C., Moulinec, H. and Suquet, P. (1999) 'Effective properties of composite materials with periodic microstructure: A computational approach', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172(1-4), pp. 109-143.
- [6] Papadioti, I., Danas, K. and Aravas, N. (2016) 'A methodology for the estimation of the effective yield function of isotropic composites', *International Journal of Solids and Structures*, 87, pp. 120-138.
- [7] ABAQUS/Standard, Version 6.14, c Dassault Systemes, 2014