



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΝΟΣ ΤΕΤΡΑΚΟΠΤΕΡΟΥ ΜΗ ΕΠΑΝΔΡΩΜΕΝΟΥ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ

υπό  
**ΦΩΤΕΙΝΟΥ ΣΑΜΠΑΝΗ**

### **Διπλωματική Εργασία**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για  
την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2022



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

## ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΝΟΣ ΤΕΤΡΑΚΟΠΤΕΡΟΥ ΜΗ ΕΠΑΝΔΡΩΜΕΝΟΥ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ

υπό  
**ΦΩΤΕΙΝΟΥ ΣΑΜΠΑΝΗ**

**Διπλωματική Εργασία**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για  
την απόκτηση του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού

Βόλος, 2022

© 2022 Φωτεινός Σαμπάνης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

Πρώτος Εξεταστής  
(Επιβλέπων)

**Δρ. Κωνσταντίνος Αμπουντώλας**  
Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,  
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Δεύτερος Εξεταστής

**Δρ. Δημήτριος Παντελής**  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλίας

Τρίτος Εξεταστής

**Δρ. Αναστάσιος Σταματέλλος**  
Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλίας

# ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΝΟΣ ΤΕΤΡΑΚΟΠΤΕΡΟΥ ΜΗ ΕΠΑΝΔΡΩΜΕΝΟΥ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ

ΦΩΤΕΙΝΟΣ ΣΑΜΠΑΝΗΣ

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, 2022

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Κωνσταντίνος Αμπουντώλας,  
Αναπληρωτής Καθηγητής Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

## Περίληψη

Τα μη επανδρωμένα αεροσκάφη χρησιμοποιούνται πλέον σε πληθώρα ενεργειών και δραστηριοτήτων. Σε αυτήν την διπλωματική εργασία αναπτύσσουμε το δυναμικό μοντέλο του συστήματος και ελεγκτές οι οποίοι μπορούν να συνεισφέρουν στην ομαλή πτητική λειτουργία του αεροσκάφους. Αρχικά, ορίζονται οι βασικές έννοιες των μαθηματικών και της φυσικής διαμέσου των οποίων θα προκύψει η δημιουργία του μοντέλου κατά τον γνωστό φορμαλισμό Newton Euler. Στην συνέχεια, κατά την ολοκλήρωση του μοντέλου του συστήματος, ορίζονται οι ελεγκτικές μέθοδοι που θα εφαρμοστούν, ώστε να καταλήξουμε σε ικανοποιητική πτητική συμπεριφορά. Τέλος, εφαρμόζουμε τον Γραμμικό Τετραγωνικό Ελεγκτή (LQR) σε παραλλαγές του τελικού μοντέλου, που ορίζονται με βάση τον τρόπο γραμμικοποίησής του. Η διπλωματική εργασία καταλήγει με παραδείγματα που αφορούν την συμπεριφορά του τετρακόπτερου σε προσομοίωση, σχολιάζοντας και συγκρίνοντάς τα.

**Λέξεις-κλειδιά:** Μη επανδρωμένο αεροσκάφος, Newton Euler, Γραμμικός Τετραγωνικός Ελεγκτής

# MODELLING AND CONTROL OF A QUADROTOR UNMANNED AERIAL VEHICLE

FOTEINOS SAMPANIS

Department of Mechanical Engineering, University of Thessaly, 2022

Supervisor: Dr Konstantinos Ampountolas

Associate Professor of Systems of Automatic Control

## Abstract

Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) are nowadays being used for a plethora of activities. In this work, the system's dynamic model is developed as well as controllers, which could contribute to the quality of the flight operation. Initially, the basic concepts of mathematics and physics are defined, through which the development of the model will result according to the well-known Newton Euler formalism. Subsequently, upon completion of the system model, the control methods to be applied are defined in order to arrive at a satisfactory flight behavior. Finally, we apply the Linear Quadratic Regulator (LQR) to variants of the final model, defined by how it is linearized. The thesis concludes with examples concerning the behavior of the quadcopter in simulation, commenting, and comparing them.

**Key words:** Unmanned Aerial Vehicle, Newton Euler, Linear Quadratic Regulator

## Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	1
Κεφάλαιο 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ .....	3
2.1 Ιστορία του τετράπτερου .....	3
2.2 Μεθοδολογίες Ελέγχου .....	6
Κεφάλαιο 3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ .....	8
3.1 Κινησιολογία .....	8
3.2 Φορμαλισμός Newton-Euler.....	10
3.2.1 Συστήματα αναφοράς.....	10
3.2.2 Γωνίες Euler.....	11
3.2.3 Κινηματική.....	12
3.2.4 Δυναμική .....	14
Κεφάλαιο 4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ .....	17
4.1 Γραμμικός Τετραγωνικός Ρυθμιστής (LQR) .....	17
4.1.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες.....	18
4.1.2 State-Space Εξισώσεις.....	19
4.2 Γραμμικοποίηση γύρω από σημείο ισορροπίας .....	21
4.3 Γραμμικοποίηση γύρω από κατάσταση.....	23
4.4 Συμπεράσματα .....	26
Κεφάλαιο 5. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ .....	27
5.1 Έλεγχος γραμμικού συστήματος γύρω από σημείο ισορροπίας .....	27
5.1.1 Αρχικές συνθήκες γραμμικής θέσης με ταυτοτικούς πίνακες $Q = I, T = I$ .....	28
5.1.2 Αρχικές συνθήκες γραμμικής θέσης με διαφοροποιημένους πίνακες $Q, T$ .....	29
5.1.3 Αρχικές συνθήκες στις γωνίες Roll, Pitch, Yaw .....	31
5.2 Έλεγχος γραμμικού συστήματος γύρω από κατάσταση.....	33
5.3 Έλεγχος με είσοδο αναφοράς.....	35
5.4 Συμπεράσματα .....	40
Κεφάλαιο 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ .....	41
Βιβλιογραφία .....	42
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	44

## Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 2.1: Γυροπλάνο Breguet-Richet.....	3
Εικόνα 2.2: Helicopter No.2. ....	3
Εικόνα 2.3: Ελικόπτερο de Bothezat. ....	4
Εικόνα 2.4: Το τετρακόπτερο VZ-7. ....	4
Εικόνα 2.5: Parrot Mambo Minidrone. ....	5
Εικόνα 2.6: Σμήνος τετρακόπτερων. ....	5
Εικόνα 3.1: Δυνάμεις και ροπές των κινητήρων. ....	8
Εικόνα 3.2: Pitch, Roll, Yaw.....	9
Εικόνα 3.3: Συστήματα Αναφοράς. ....	10
Εικόνα 3.4: Γωνίες Euler στο τετρακόπτερο.....	12
Εικόνα 4.1: Βασικό διάγραμμα ρυθμιστή πλήρους ανάδρασης. ....	19
Εικόνα 5.1: Διαγράμματα με αρχικές συνθήκες γραμμικής θέσης.....	28
Εικόνα 5.2: Διαγράμματα αρχικών συνθηκών γραμμικής θέσης με διαφοροποιημένα βάρη .....	30
Εικόνα 5.3: Διαγράμματα με αρχικές συνθήκες γωνιών.....	32
Εικόνα 5.4: Διαγράμματα προσαρμοστικής απόκρισης των γωνιών $\varphi, \theta, \psi$ . ....	34
Εικόνα 5.5: Block διάγραμμα με είσοδο αναφοράς σε ελεγκτή πλήρους ανάδρασης.....	36
Εικόνα 5.6: Ημιτονοειδής τροχιά αναφοράς στη γωνία $\psi$ (Yaw). ....	36
Εικόνα 5.7: Ημιτονοειδής & συνημιτονοειδής τροχιές αναφοράς. ....	37
Εικόνα 5.8: Διάγραμμα $\sin, \cos, \text{constant}$ . ....	38



## Κεφάλαιο 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

---

Η χρησιμότητα μικρών, ευέλικτων και γρήγορων τετρακόπτερων ήταν φανερή και έτσι τις τελευταίες δεκαετίες η ύπαρξη τους έγινε πραγματικότητα. Με την ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας, η αξιοποίηση τέτοιου τύπου ιπτάμενων αεροσκαφών πέρασε από το επίπεδο όπου αφορούσε μόνο πειραματικές ή στρατιωτικές χρήσεις, σε αυτό όπου σήμερα η χρήση τους είναι περισσότερο συνηθισμένη για σκοπούς εργασίας και ψυχαγωγίας. Η συναρπαστική κινησιολογία που δύνανται να πραγματοποιούν, εξαιτίας των τεσσάρων ελικών τους και της σχέσης βάρους-ισχύος, και η ποικιλία των χρήσεων που προκύπτουν από αυτή έχουν ωθήσει την έρευνα γύρω από τις ελεγκτικές μεθόδους να λάβει μεγάλες διαστάσεις, και τούμπαλιν. Επιπλέον, η αντικατάσταση του ανθρώπινου προσωπικού από τα εν λόγω συστήματα έχει αυξήσει τις δυνατότητες των επιχειρήσεων και έχει μειώσει τις απώλειες ζώων. Καθίσταται λοιπόν σαφές, ότι έχουν καταστεί αναπόσπαστο κομμάτι της καθημερινότητας και η περαιτέρω εξέλιξη της τεχνολογίας τους είναι δεδομένη. Έτσι πλέον, η ενασχόληση με τη συγκεκριμένη έρευνα έχει γίνει σύνηθες φαινόμενο για πολλούς ενδιαφέροντες.

### **ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:**

Το υπόλοιπο αυτής της διπλωματικής εργασίας χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες που καταλαμβάνουν τα Κεφάλαιο 2 - 5, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή που αφορά διάφορες κατασκευές πολυκόπτερων αεροσκαφών έως και σήμερα. Στη συνέχεια γίνεται λόγος για τις διάφορες ελεγκτικές μεθόδους που υπάρχουν και μπορούν να εφαρμοστούν.

Στο Κεφάλαιο 3 ορίζονται οι βασικές έννοιες και στη συνέχεια αναπτύσσεται το δυναμικό μοντέλο του συστήματος.

Στο κεφάλαιο 4 επεξηγείται η ελεγκτική μέθοδος που θα χρησιμοποιηθεί και εξάγονται παραλλαγές του δυναμικού μοντέλου.

Στο κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του ελεγκτή.

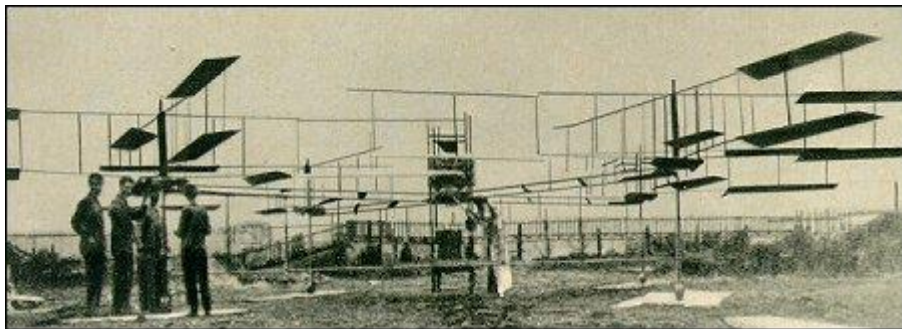
Τα τελικά συμπεράσματα της διπλωματικής εργασίας και κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 6.

## Κεφάλαιο 2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

---

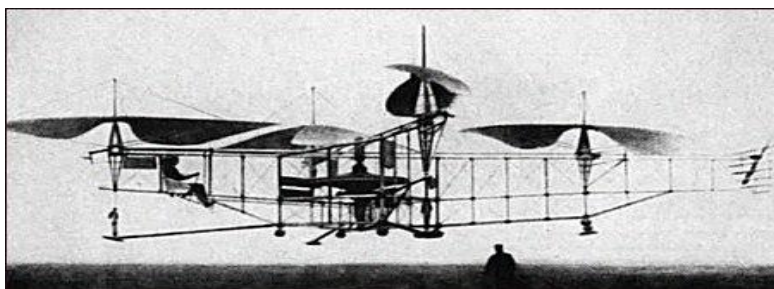
### 2.1 Ιστορία του τετράπτερου

Το πρώτο αερόδυνα που επετεύχθη να απογειωθεί κάθετα οφείλεται στον Louis Breguet. Ήταν ένα ελικόπτερο το οποίο έφερε τέσσερα στροφεία και το 1908 θεωρείτο πως είχε φέρει εις πέρας αρκετές πτήσεις πολύ χαμηλού υψομέτρου και όντας δεμένο στη γη.



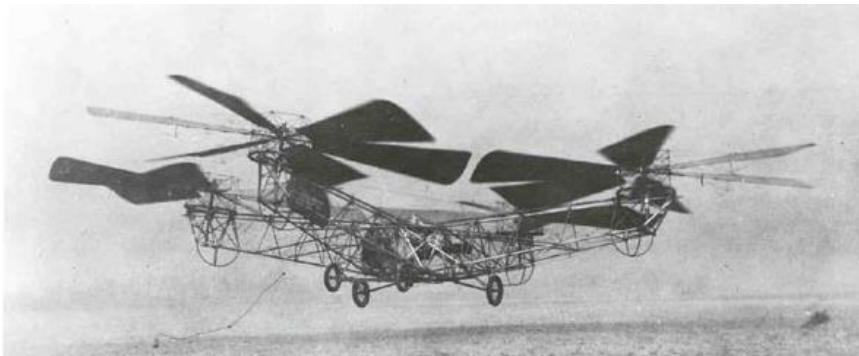
Εικόνα 2.1: Γυροπλάνο Breguet-Richet.

Προχωρώντας στο 1920, ο επίσης Γάλλος μηχανικός Etienne Oehmichen, πειραματιζόταν με διάφορους σχεδιασμούς πολυρότορων αεροσκαφών. Ξεχώρισε το Ελικόπτερο No.2, το οποίο έφερε τέσσερις ρότορες και οχτώ προπέλες, συγκεκριμένα δύο προπέλες σε κάθε άκρη. Η διάταξη των προπελών όσον αφορά τη γωνία των πτερυγίων, το επίπεδο στο οποίο λειτουργούσαν και τέλος την τοποθέτησή τους, κατέστησαν το αεροσκάφος αυτό ικανό για πτήση. Σύμφωνα με πληροφορίες, ο αριθμός των πτήσεων υπερέβη τις χίλιες. Το αεροσκάφος, για την εποχή εκείνη, χαρακτηριζόταν από υψηλή ευστάθεια και αρκετά ελεγχόμενη πτητική συμπεριφορά. Το 1923 κατάφερε να μείνει στον αέρα για αρκετά λεπτά και το 1924 και έπειτα, ήταν δυνατόν να πραγματοποιήσει πτήσεις αρχικά εκατοντάδων μέτρων και στη συνέχεια ενός χιλιομέτρου.



Εικόνα 2.2: Helicopter No.2

Το 1922, από τους George de Bothezat και Ivan Jerome, προέκυψε η ανάπτυξη ενός τετρακόπτερου αεροσκάφους, που στη συνέχεια κατασκευάστηκε από την αεροπορία των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής. Έφερε έναν εξαπτέρυγο ρότορα στην κάθε άκρη της χιαστί κατασκευής του και δύο μικρές προπέλες, οι οποίες χρησίμευαν στην διαχείριση της ώθησης και της εκτροπής του αεροσκάφους. Η απόδοση του αεροσκάφους δεν ήταν καλή, καθώς υπήρχε μεγάλη μηχανολογική πολυπλοκότητα, προβλήματα αξιοπιστίας και υποτροφοδότηση από τον κινητήρα[1].



Εικόνα 2.3: Ελικόπτερο de Bothezat

Η εξελικτική πορεία αυτού του τύπου των αεροσκαφών είναι υπαρκτή και κατά την μεταπολεμική εποχή, κατά κύριο λόγο στις Η.Π.Α. Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως το 1958, αναπτύχθηκε το αεροσκάφος Curtiss-Wright VZ-7, τεσσάρων ροτόρων που μπορούσε να αλλάξει τις γωνίες πτήσης του, μεταβάλλοντας την ποσότητα ώθησης που έδινε ο κάθε ανεμιστήρας αεραγωγού που έφερε ως ρότορα[2].



Εικόνα 2.4: Το τετρακόπτερο VZ-7

Από την αρχή της νέας χιλιετίας, το ενδιαφέρον για τέτοιου είδους αεροσκάφη αναζωογονήθηκε. Η εξέλιξη των υλικών πρόσφερε τη δυνατότητα για μικρές και στιβαρές

κατασκευές και η εξέλιξη των μικροηλεκτρονικών για βελτίωση της πτητικής συμπεριφοράς. Από το 2010 η γαλλική εταιρεία Parrot κυκλοφορεί εκδόσεις του Parrot AR Drone, ενός σύγχρονου τετρακόπτερου το οποίο μπορεί κάποιος να χειριστεί μέσω εφαρμογής στο smartphone[3]. Αυτός ο τύπος τετρακόπτερου είναι φθηνός στη κατασκευή, μικρός στο μέγεθος, ελαφρύς και χρησιμοποιεί προηγμένα ηλεκτρονικά συστήματα για τον έλεγχο της πτήσης, αλλά και για εφαρμογές στις οποίες είναι χρήσιμα.



*Εικόνα 2.5: Parrot Mambo Minidrone*

Η εξέλιξη της τεχνολογίας έχει καταστήσει δυνατό, ένα σμήνος από μικρά, μη επανδρωμένα πολυκόπτερα, να πραγματοποιούν πτήσεις και να φέρνουν εις πέρας επιχειρήσεις μέσω της ενδοεπικοινωνίας που διαθέτουν[4]. Και πάλι, η χρήση αυτή προσελκύει κυρίως στρατιωτικούς σκοπούς, αλλά πλέον και πολιτικούς. Η ενδοεπικοινωνία που αναφέρθηκε αφορά τους τρόπους με τους οποίους τα πολυκόπτερα συνεργάζονται, συλλέγουν και ανταλλάζουν πληροφορίες και αποφασίζουν για το τί σκοπό θα εξυπηρετήσει το κάθε ένα πολυκόπτερο του συνόλου.



*Εικόνα 2.6: Σμήνος τετρακόπτερων*

## 2.2 Μεθοδολογίες Ελέγχου

Την τελευταία δεκαετία υπάρχει μία έκρηξη νέων εφαρμογών για μη επανδρωμένα εναέρια συστήματα (UAS: Unmanned Aerial Systems). Αρχικά, το ενδιαφέρον για τέτοια συστήματα οφειλόταν σε στρατιωτικούς σκοπούς, αλλά η ζήτηση επεκτάθηκε. Η υποεπάρκεια αυτή θα ασχοληθεί με τις μεθοδολογίες ελέγχου του συστήματος και μπορεί να χωριστεί στα ακόλουθα μέρη[5]:

- Γραμμικοί Αξιόπιστοι Ελεγκτές (Linear Robust Controllers)
- Μη Γραμμικοί Ελεγκτές (Non-Linear Controllers)
- «Έξυπνοι» Ελεγκτές (Intelligent Controllers)

### Linear Robust Controllers:

Αυτού του τύπου οι ελεγκτές βρέθηκαν επαρκείς για την επίτευξη σταθερής λειτουργίας πτήσης, κατά τα πρώιμα στάδια της ανάπτυξης τεχνολογιών για τετρακόπτερα αεροσκάφη.

Οι *Proportional Integral Derivative (PID)* ελεγκτές, είναι ικανοί να ελέγξουν διαφορετικές λειτουργίες πτήσης παρόλη την απλότητα τους, αλλά και το γεγονός ότι η δυναμική (dynamics) του τετρακόπτερου είναι μη γραμμικής φύσεως.

Οι Γραμμικοί Τετραγωνικοί (Linear Quadratic formulas) ελεγκτές, χρήζουν γραμμικοποίησης γύρω από ένα σημείο ισορροπίας, όπως για παράδειγμα γύρω από τη κατάσταση αιώρησης, ώστε να επιτευχθεί σταθερότητα.

Οι  $H_\infty$  ελεγκτές, είναι καλή επιλογή για συστήματα με εξωτερικές διαταραχές και ασάφειες στο μοντέλο τους. Χρειάζονται επίσης γραμμικοποίηση.

### Non-Linear Controllers:

Το τετρακόπτερο αεροσκάφος θεωρείται ως ένα υπολειτουργικό, μη γραμμικό σύνθετο σύστημα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι διαθέτει μόνο τέσσερις εισόδους ενώ έχει έξι βαθμούς ελευθερίας κινήσεων, καθιστώντας τους ελεγκτές μη γραμμικής φύσεως ως καλή επιλογή για την λειτουργία του συστήματος. Τα *Feedback Linearization*, *Backstepping* και *Sliding Mode Controller*, είναι οι κυρίαρχες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται. Πρέπει να αναφερθεί ότι οι μη γραμμικοί ελεγκτές για να τρέξουν χρειάζονται σημαντική υπολογιστική δύναμη, γεγονός που μπορεί να αφαιρέσει την επιλογή υλοποίησης τους όταν αυτό αφορά πολυκόπτερα μικρού μεγέθους (minidrones). Αυτό συμβαίνει, διότι ο επεξεργαστής που

φέρουν είναι χαμηλής ισχύος εξαιτίας του μικρού μεγέθους και της χαμηλής τιμής του προϊόντος.

#### Intelligent Controllers:

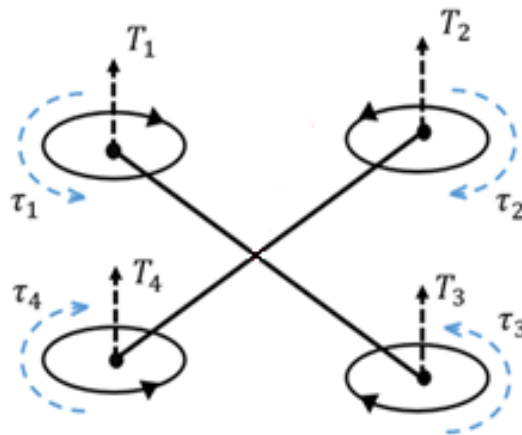
Ελεγκτές τέτοιου τύπου μπορούν να διαχειριστούν μεγαλύτερο εύρος αβεβαιότητας στο σύστημα ελέγχου, από ότι άλλες στρατηγικές. Αφορά ελεγκτές νευρωνικών δικτύων (neural network), ασαφούς λογικής (fuzzy logic) και μοντέλων πρόβλεψης (model predictive).

## Κεφάλαιο 3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται ένα σύνολο εξισώσεων, οι οποίες θα ορίσουν το μαθηματικό μοντέλο του αεροσκάφους που μελετάται. Στόχος είναι να σκιαγραφηθούν οι βασικές έννοιες πάνω στις οποίες θα δομηθεί το μοντέλο, να εξηγηθεί ο τρόπος που το τετρακόπτερο διαπλέει στον αέρα και οι μαθηματικές αρχές που θα στηρίξουν αυτή τη λειτουργία.

### 3.1 Κινησιολογία

Το τετρακόπτερο είναι ένα ιπτάμενο αεροσκάφος με 4 κινητήρες. Ο κάθε κινητήρας βρίσκεται στο ακρότατο του κάθε μπράτσου της κατασκευής. Όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 3.1, ο



Εικόνα 3.1: Δυνάμεις και ροπές των κινητήρων

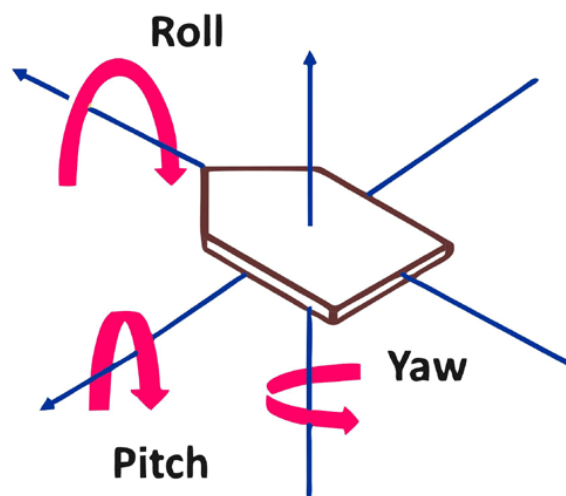
κάθε ρότορας μπορεί να στραφεί με διαφορετική ροπή απ'τους άλλους και κατά συνέπεια να προσφέρει διαφορετική ποσότητα ώθησης (**Thrust**) στο σύστημα, σε σχέση με τους υπόλοιπους. Αρχικά, η διαγώνια σύζευξη των ροτόρων είναι ζωτικής σημασίας για την ευστάθεια του τετρακόπτερου, καθώς το ένα ζεύγος προπελών πρέπει να περιστρέφεται ωρολογιακά, ενώ το άλλο αντιωρολογιακά[6]. Λόγω της δομής αυτής, οι κινήσεις που μπορεί να πραγματοποιήσει είναι 4, αφορώντας όλες τις διαστάσεις του χώρου και περιγράφονται ως εξής:



- **Thrust**

Η κίνηση αυτή προκύπτει από την ισόποση παροχή κάθετης ώθησης από τους κινητήρες, προκαλώντας μόνο μεταβολή του υψομέτρου στο οποίο βρίσκεται το αεροσκάφος και καμία αλλαγή της κλίσης του όσον αφορά το οριζόντιο επίπεδο.

Η Εικόνα 3.2 παρουσιάζει με κατανοητό τρόπο τις κινήσεις που μπορεί να εκτελέσει ένα ιπτάμενο σκάφος.



Εικόνα 3.2: Pitch, Roll, Yaw

- **Pitch**

Η κίνηση αυτή καθορίζει αν το αεροσκάφος θα κινηθεί ευθεία ή όπισθεν. Αν η ώθηση των δύο μπροστά κινητήρων αυξηθεί ισόποσα και η ώθηση των δύο πίσω μειωθεί ισόποσα στον καθένα και με άθροισμα όσο η αύξηση των μπροστά, τότε το αεροσκάφος θα μείνει στο ίδιο υψόμετρο, αλλά θα κινηθεί προς τα πίσω. Αντίθετα, αν μειωθεί η ώθηση στους μπροστά και αυξηθεί στους πίσω, τότε θα κινηθεί προς τα εμπρός.

- **Roll**

Η κίνηση αυτή καθορίζει αν το αεροσκάφος θα κινηθεί αριστερά ή δεξιά στον χώρο. Η ίδια λογική με την κίνηση **Pitch** ισχύει και εδώ: αυξάνοντας την ώθηση των δύο αριστερά και μειώνοντας των δύο δεξιά, το τετρακόπτερο θα κινηθεί προς τα δεξιά, ενώ μεταβάλλοντας τα ανάποδα θα κινηθεί προς τα αριστερά.

- **Yaw**

Πραγματοποιώντας αυτή την κίνηση, το τετρακόπτερο δεν μετακινείται στον χώρο, αλλά αλλάζει προσανατολισμό. Παραμένει στο ίδιο επίπεδο και η κίνηση θα μπορούσε να παρομοιαστεί ότι το αεροσκάφος «κοιτάει» αλλού. Αυτό συμβαίνει όταν το ένα διαγώνιο ζεύγος αυξήσει την ώθηση που παρέχει, όσο την μειώσει το άλλο. Έτσι, η ροπή -καθώς το κάθε ζεύγος έχει την ίδια, αφού οι προπέλες ανά δύο θα περιστρέφονται είτε ωρολογιακά, είτε αντιωρολογιακά- θα αυξηθεί προς τη μία κατεύθυνση και το τετρακόπτερο θα αλλάξει προσανατολισμό.

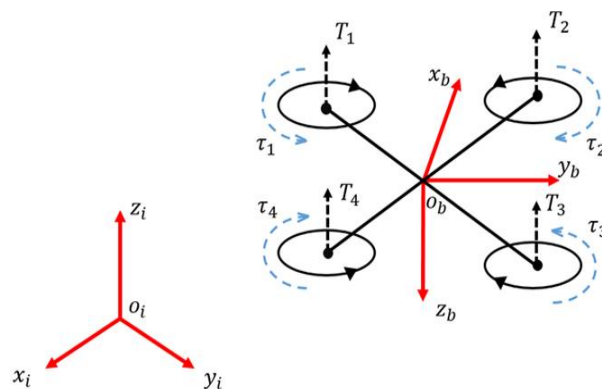
Παρατηρείται, λοιπόν ότι το τετρακόπτερο μπορεί να πραγματοποιήσει στον χώρο τρεις μεταφορικές και τρεις περιστροφικές κινήσεις, δηλαδή συνολικά έξι βαθμούς ελευθερίας (6 DOF).

## 3.2 Φορμαλισμός Newton-Euler

### 3.2.1 Συστήματα αναφοράς

Η κινησιολογία που περιγράφηκε προηγουμένως, καταστεί υποχρεωτικό να οριστούν δύο συστήματα αναφοράς, πάνω στα οποία θα ξεκινήσει η ανάλυση και θα αναπτυχθούν οι εξισώσεις κίνησης[7]:

1. Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς (Inertial Reference System/ *E*-frame)
2. Βαρυκεντρικό Σύστημα Αναφοράς (Body fixed Reference System/ *B*-frame)



Εικόνα 3.3: Συστήματα Αναφοράς

Το πρώτο, τοποθετείται σε ένα απόλυτο σημείο στον χώρο, ενώ το δεύτερο τοποθετείται στο κέντρο βάρους του τετρακόπτερου, το οποίο θεωρητικά βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο της κατασκευής, και κινείται μαζί του. Σε αυτό το σημείο είναι αναγκαίο να οριστούν οι αρχικές υποθέσεις για το μοντέλο: το τετρακόπτερο είναι μία απόλυτα συμμετρική κατασκευή και το κέντρο βάρους του βρίσκεται στο σημείο  $O_b$  (Εικόνα 3.3), ενώ όλοι οι κινητήρες θεωρούνται απόλυτα ίδιοι.

### 3.2.2 Γωνίες Euler

Οι γωνίες Euler είναι από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους για τον ορισμό του προσανατολισμού ενός άκαμπτου σώματος στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, ειδικά όταν αυτό αφορά αεροναυτικές εφαρμογές. Αποτελούν τρεις γωνίες: Pitch, Roll, Yaw [8] και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, διότι μπορούν να περιγράψουν τον προσανατολισμό του ενός συστήματος αναφοράς, συγκριτικά με το άλλο και καθώς η κινησιολογία του τετρακόπτερου -στην παρούσα μελέτη- έχει επιλεγεί να κυβερνάται από τις εξισώσεις Newton-Euler που θα αναπτυχθούν παρακάτω. Σε αυτή τη φάση πρέπει να γίνει η υπόθεση ότι το τετρακόπτερο είναι άκαμπτο σώμα.

Οι γωνίες Roll, Pitch, Yaw σημειώνονται αντίστοιχα ως  $[\varphi \ \theta \ \psi]^T$ . Η σύνδεση ανάμεσα στο Inertial και Body fixed σύστημα αναφοράς προκύπτει ξεκινώντας από ένα γνωστό σημείο προσανατολισμού του αεροσκάφους και κάνοντας τρεις περιστροφές, μία γύρω από κάθε άξονα, παίρνοντας τους ακόλουθους πίνακες περιστροφών (Rotation matrices) [9]:

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\varphi) & -s(\varphi) \\ 0 & s(\varphi) & c(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta) & 0 & s(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s(\theta) & 0 & c(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

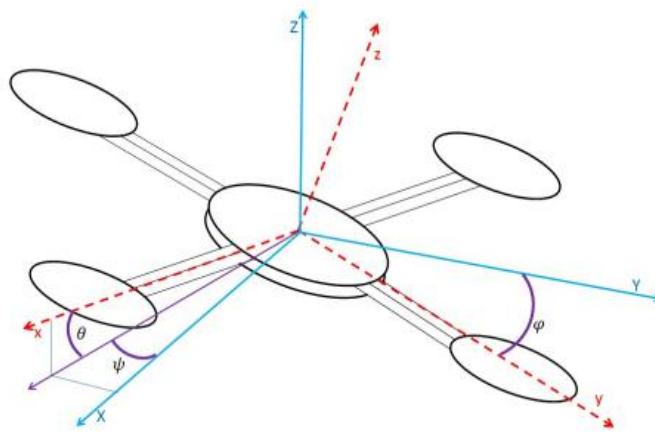
$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c(\psi) & -s(\psi) & 0 \\ s(\psi) & c(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Όπου,  $c$  είναι το συνημίτονο ( $\cos$ ),  $s$  είναι το ημίτονο ( $\sin$ ).

Συνεπώς, οι συντεταγμένες των δύο συστημάτων αναφοράς συνδέονται από τον ακόλουθο πίνακα περιστροφής:

$$R_{zyx}(\varphi, \theta, \psi) = \mathbf{R}_{\theta} = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\varphi) =$$

$$= \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & s(\varphi)s(\theta)c(\psi) - c(\varphi)s(\psi) & c(\varphi)s(\theta)c(\psi) + s(\varphi)s(\psi) \\ c(\theta)s(\psi) & s(\varphi)s(\theta)s(\psi) + c(\varphi)c(\psi) & c(\varphi)s(\theta)s(\psi) - s(\varphi)c(\psi) \\ -s(\theta) & s(\varphi)c(\theta) & c(\varphi)c(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$



Εικόνα 3.4: Γωνίες Euler στο τετρακόπτερο

### 3.2.3 Κινηματική

Μετά τον ορισμό των δύο συστημάτων αναφοράς, αλλά και της μεθόδου σύνδεσης τους, για να οριστούν οι εξισώσεις κινηματικής του τετρακόπτερου πρέπει να οριστούν διανύσματα, που θα εκφράζουν την θέση του και την ταχύτητα σε σχέση με τα συστήματα συντεταγμένων που προαναφέρθηκαν[9].

Ορίζουμε τα διανύσματα:

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\Gamma}^E \boldsymbol{\theta}^E]^T = [X Y Z \varphi \theta \psi]^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{V}^B \boldsymbol{\omega}^B]^T = [u v w p q r]^T \quad (3.7)$$

Όπου,

- $\mathbf{r}^E$  είναι το διάνυσμα της γραμμικής θέσης του τετρακόπτερου σε σχέση με  $E$ -frame:

$$\mathbf{r}^E = [X \ Y \ Z]^T$$

- $\boldsymbol{\theta}^E$  είναι το διάνυσμα της γωνιακής θέσης σε σχέση με  $E$ -frame:

$$\boldsymbol{\theta}^E = [\varphi \ \theta \ \psi]^T$$

- $\mathbf{v}^B$  είναι το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας του τετρακόπτερου σε σχέση με  $B$ -frame:

$$\mathbf{v}^B = [u \ v \ w]^T$$

- $\boldsymbol{\omega}^B$  είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας σε σχέση με  $B$ -frame:

$$\boldsymbol{\omega}^B = [p \ q \ r]^T$$

Η συσχέτιση ανάμεσα στη γραμμική ταχύτητα στο  $B$ -frame και τη εκείνη στο  $E$ -frame προκύπτει, κάνοντας χρήση του πίνακα περιστροφής (3.4) [10]:

$$\dot{\mathbf{r}}^E = \mathbf{R}_\theta \mathbf{v}^B \quad (3.8)$$

Ενώ για την συσχέτιση των γωνιακών ταχυτήτων από το  $E$ -frame στο  $B$ -frame πρέπει να γίνει χρήση του πίνακα μεταφοράς  $\mathbf{T}_\theta$ :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^E = \mathbf{T}_\theta \boldsymbol{\omega}^B \quad (3.9)$$

όπου

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} 1 & s(\varphi)t(\theta) & c(\varphi)t(\theta) \\ 0 & c(\varphi) & -s(\varphi) \\ 0 & \frac{s(\varphi)}{c(\theta)} & \frac{c(\varphi)}{c(\theta)} \end{bmatrix}$$

Με  $t$ , υποδικνείεται η σημειογραφία της εφαπτομένης (tan).

Οι σχέσεις (3.8) και (3.9) παρέχουν αντίστοιχα από 3 εξισώσεις στο κινηματικό μοντέλο:

$$\dot{X} = w[s(\varphi)s(\psi) + c(\varphi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\varphi)s(\psi) - c(\psi)s(\varphi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)]$$

$$\dot{Y} = v[c(\varphi)c(\psi) + s(\varphi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\varphi) - c(\varphi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)]$$

$$\dot{Z} = w[c(\varphi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\varphi)]$$

$$\dot{\varphi} = p + r[c(\varphi)t(\theta)] + q[s(\varphi)t(\theta)]$$

$$\dot{\theta} = q[c(\varphi)] - r[s(\varphi)]$$

$$\dot{\psi} = r\frac{c(\varphi)}{c(\theta)} + q\frac{s(\varphi)}{c(\theta)}$$

### 3.2.4 Δυναμική

Η διαδικασία της αξιοποίησης του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, αφορά τις δυνάμεις που δρουν επάνω στο τετρακόπτερο συνδεόμενες με κάποιους όρους επιταχύνσεων οι οποίοι θα επεξηγηθούν παρακάτω. Ο φορμαλισμός που επιλέχθηκε, καθιστά υποχρεωτικό να υιοθετηθεί και η εξίσωση Euler, ώστε το μοντέλο να περιέχει και τους όρους των ροπών που δρουν στο αεροσκάφος. Συγκεκριμένα [8]:

Ο νόμος του Νεύτωνα εισάγει την ακόλουθη σχέση πινάκων:

$$\mathbf{F}_t = m(\dot{\mathbf{V}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times \mathbf{V}^B) \quad (3.10)$$

όπου,  $m$  η μάζα σε κιλά, του τετρακόπτερου και  $\mathbf{F}_t$  η συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό στο  $B$ -frame.

Η συνισταμένη δύναμη δίνεται από την παρακάτω εξίσωση εκφρασμένη στο  $E$ -frame:

$$m\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_\theta^T \mathbf{F}^B - mg \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - m\Delta = \mathbf{F}_t \quad (3.11)$$

όπου,  $\dot{\mathbf{p}}$  είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης του τετρακόπτερου σε  $m/s^2$  στο  $E$ -frame ως:

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

το διάνυσμα  $\mathbf{F}^B$  αντιπροσωπεύει την ώθηση (thrust) που δίνεται από τους κινητήρες στο  $B$ -frame:

$$\mathbf{F}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

με  $T$  να υποδεικνύεται η συνολική ώθηση σε Newton, στον  $z$ -άξονα, ενώ τέλος το διάνυσμα  $m\mathbf{A}$  εμπεριέχει τις άγνωστες εξωτερικές δυνάμεις -υπονοούνται οι δράσεις του αέρα, όπως η οπισθέλκουσα δύναμη (drag force) και τυχόν άνεμοι- που μπορούν να επηρεάσουν το τετρακόπτερο στους τρεις άξονες.

Ο νόμος του Euler εισάγει την ακόλουθη σχέση πινάκων:

$$\mathbf{m}^B = \mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}^B) \quad (3.14)$$

όπου,  $\mathbf{m}^B = [m_x \ m_y \ m_z]^T$  είναι η συνολική ροπή στο τετράπτερο.

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψιν τις υποθέσεις που έγιναν νωρίτερα, ότι το αεροσκάφος θεωρείται άκαμπτο σώμα (rigid body), συμμετρικό και το κέντρο του να συμπίπτει με εκείνο του κεντροβαρικού συστήματος αξόνων, τότε η μήτρα της ροπής αδράνειας μπορεί να θεωρηθεί ως διαγώνιος πίνακας:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Η συνολική ροπή  $\mathbf{m}^B$  που προαναφέρθηκε, εμπεριέχει αντίστοιχα τις ροπές  $\boldsymbol{\tau}^B = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$  που προκύπτουν από τη μεταβολή των στροφών του κάθε ρότορα και θα χρησιμοποιηθούν παρακάτω ως είσοδοι ελέγχου στο σύστημα, τις ροπές  $\boldsymbol{\tau}^w = [\tau_{wx} \ \tau_{wy} \ \tau_{wz}]^T$  παραγόμενες από τον άνεμο και  $\mathbf{g}_a$ , τις γυροσκοπικές ροπές που παράγονται από την περιστροφή των προπελών, σύμφωνα με:

$$\mathbf{m}^B = \boldsymbol{\tau}^B + \boldsymbol{\tau}^w - \mathbf{g}_a \quad (3.16)$$

Σε αυτό το στάδιο πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος  $\mathbf{g}_a$  μπορεί να παραληφθεί από την εξίσωση. Ο λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι η μεταβολή του προσανατολισμού του τετρακόπτερου ενδέχεται να είναι μικρή, αλλά και των υποθέσεων που έχουν ήδη γίνει.

Επιπρόσθετα, η πολύ μικρή αδράνεια του κάθε ρότορα συμβάλει σε σημαντικό βαθμό στην αμελητέα επιρροή του όρου, ενώ ταυτόχρονα η μέθοδος ελέγχου που θα επιλεγεί μπορεί να μην χρίζει της παρουσίας του στο μοντέλο[11]. Συνεπώς, η συμβολή του διατίθεται στην κρίση του ερευνητή.

Το τελευταίο βήμα είναι να οριστούν οι όροι που θα καταστήσουν τις εισόδους ελέγχου (control inputs), ώστε στο επόμενο κεφάλαιο να γίνει η σχεδίαση του ελεγκτή. Όπως ορίστηκε προηγουμένως -στο διάνυσμα  $\tau^B = [\tau_x \tau_y \tau_z]^T$  - έχουν ήδη επιλεγεί ως τρεις εισοδοί, οι τρεις ροπές. Εξαιτίας του γεγονότος ότι μπορούμε να ελέγξουμε κάθε έναν από τους τέσσερις ρότορες, μπορούμε άρα να ελέγξουμε και ακριβώς τόσους βαθμούς ελευθερίας (DOF) του συστήματος. Συνεπώς, οι εισοδοί μπορούν να γίνουν τέσσερις με την προσθήκη του όρου:  $T = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$

Συνολικά, οι εισοδοί έχουν ως εξής[12]:

$$\begin{aligned} T &= b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \tau_x &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ \tau_y &= bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ \tau_z &= d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) \end{aligned} \tag{3.17}$$

όπου,  $b$  είναι ο συντελεστής ώθησης,  $l$  η απόσταση του ρότορα με το κέντρο του τετρακόπτερου και  $d$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας.  $\Omega_i$  υποδεικνύει τη περιστροφική ταχύτητα της  $i$  προπέλας.

Από τον συνδυασμό των εξισώσεων (3.11), (3.14), (3.17), είναι δυνατόν να εκφραστεί το δυναμικό μοντέλο του συστήματος στο  $B$ -frame:

$$\left\{ \begin{array}{l} -mg[s(\theta)] + f_{wx} = m(\dot{u} + qw - rv) \\ mg[c(\theta)s(\varphi)] + f_{wy} = m(\dot{v} - pw + ru) \\ mg[c(\theta)c(\varphi)] + f_{wz} - b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) = m(\dot{w} + pv - qu) \\ bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + \tau_{wx} = \dot{p}I_x - qrI_y + qrl_z \\ bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + \tau_{wy} = \dot{q}I_y + prI_x - prl_z \\ d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) + \tau_{wz} = \dot{r}I_z - pqI_x + pqI_y \end{array} \right.$$

με  $f_{wx}, f_{wy}, f_{wz}$  οι άγνωστες εξωτερικές δυνάμεις.



## Κεφάλαιο 4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟΥ

---

Στο κεφάλαιο αυτό αλλά και το επόμενο, θα γίνει προσπάθεια να σχεδιαστεί ένας ελεγκτής για το τετρακόπτερο. Υπάρχουν μερικές πληροφορίες που είναι σημαντικό να διευκρινιστούν, ώστε το αντικείμενο που μελετάται να κατανοηθεί καλύτερα:

- a. Ένας τυπικός ελεγκτής για τετρακόπτερο αποσυνδέει τους άξονες yaw, pitch, roll και για τον καθένα εισάγει PID ελεγκτές. Έτσι, πλέον δεν έχουμε σύστημα Πολλαπλών Εισόδων-Πολλαπλών Εξόδων (MIMO) -όπως είναι σε πρώτη φάση το σύστημα του τετρακόπτερου-, αλλά έχουμε αριθμό συστημάτων Μονής Εισόδου-Μονής Εξόδου (SISO). Στην ουσία, αυτό που συμβαίνει είναι ότι μετρατρέποντας το σύστημα σε πολλαπλά SISO και εφαρμόζοντας PID ελεγκτές, ανεμένεται ότι κάθε άξονας θα δουλέψει ανεξάρτητα από τον άλλο[13].
- b. Ο σχεδιασμός που αναφέρθηκε στο (a.) προσφέρει ικανοποιητικό αποτέλεσμα, όταν αυτό αφορά μικρό εύρος της πτητικής συμπεριφοράς, όπως π.χ.
  - όταν το αεροσκάφος ίπταται ακίνητο.
  - όταν κινείται ισορροπώντας, εννοώντας μόνο οριζόντια, διαγώνια ή κάθετη πτήση με σταθερή ταχύτητα.
- c. Έτσι, απαιτούνται πιο περίπλοκες μέθοδοι ελέγχου, ώστε να διευρυνθεί η πτητική ικανότητα του διατηρώντας τους τρεις άξονες αλληλένδετους, καθώς αυτό είναι αναγκαίο αφού έχουν ληφθεί υποψίν τα αδρανειακά φαινόμενα στο σώμα. Η γυροσκοπική επίδραση των προπελών είναι ένας ακόμη λόγος (Εξίσωση 3.16)[14].

### 4.1 Γραμμικός Τετραγωνικός Ρυθμιστής (LQR)

Μια από τις πιο διαδεδομένες κατηγορίες μεθοδολογιών ελέγχου είναι αυτή του βέλτιστου ελέγχου (optimal control). Όταν αφορά την λειτουργία δυναμικών συστημάτων με το ελάχιστο κόστος, τότε περιλαμβάνει μία τετραγωνική συνάρτηση στην οποία μας ενδιαφέρει να ελαχιστοποιηθούν οι παράγοντες που θα επιλεγθούν για την εκάστοτε χρήση και πλέον θεωρείται ως γραμμικό τετραγωνικό πρόβλημα. Σε αυτή τη περίπτωση, γίνεται χρήση ενός γραμμικού τετραγωνικού ελεγκτή. Το δυναμικό σύστημα του τετρακόπτερου είναι σημαντικό να εκφραστεί σε μορφή state-space εξισώσεων.

#### 4.1.1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες

Έστω ένα γραμμικό δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου, το οποίο εκφράζεται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ \dot{y} &= Cx\end{aligned}\tag{4.1}$$

όπου,

$x \in \mathbf{R}^n$  η κατάσταση (state) του συστήματος,  $U \in \mathbf{R}^m$  η είσοδος ελέγχου (control input),  $y$  η έξοδος, ενώ το σύστημα ορίζεται στο  $t \in [t_0, t_1]$ .  $A, B, C$  πίνακες που ορίζονται ανάλογα την περίπτωση και θα σχολιαστούν στην συνέχεια. Από τις παραπάνω εξισώσεις συνεπάγεται ότι υπάρχει ανάδραση πλήρους κατάστασης (full state feedback)[15].

Η τετραγωνική συνάρτηση κόστους ορίζεται ως:

$$J = \int [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T T u(t)] dt\tag{4.2}$$

$Q, T$  παράγοντες στάθμισης (βάρη).

Η είσοδος ελέγχου του συστήματος που ελαχιστοποιεί την τιμή του κόστους μπορεί πλέον να οριστεί ως εξής, όπου το κέρδος ανάδρασης  $K$  είναι μητρικής μορφής:

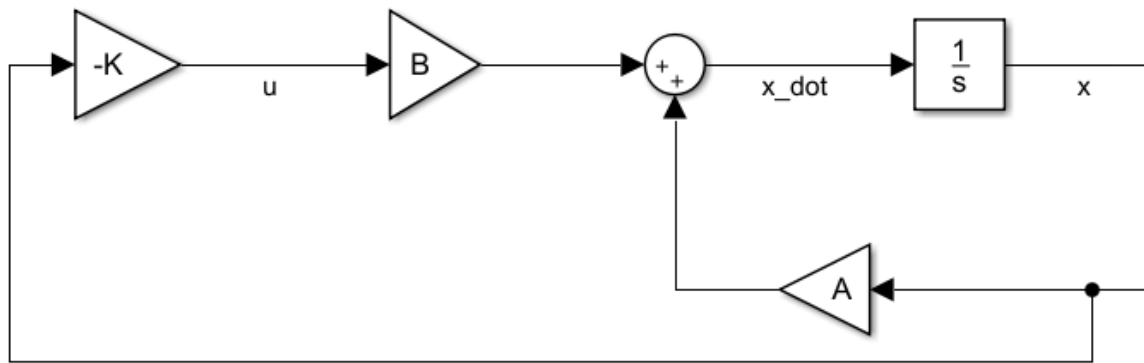
$$u(t) = -Kx(t)\tag{4.3}$$

Σε αυτή την περίπτωση, η αναγκαία συνθήκη για βελτιστότητα της χρονικής παραγώγου της «Hamiltonian» συνάρτησης, είναι η εξής:

$$K = R^{-1}B^T P\tag{4.4}$$

όπου ο πίνακας  $P$  υπακούει στην αλγεβρική εξίσωση Riccati:

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = \dot{P}\tag{4.5}$$



Εικόνα 4.1: Βασικό διάγραμμα ρυθμιστή πλήρους ανάδρασης

Οι παράγοντες στάθμισης  $Q, T$  χρησιμοποιούνται ως σχεδιαστικοί παράμετροι που «τιμωρούν» τις μεταβλητές κατάστασης και τις εισόδους ελέγχου αντίστοιχα[16]. Μία μεγάλη τιμή του  $Q$  υποδηλώνει ότι γίνεται προσπάθεια το σύστημα να ισορροπήσει με την ελάχιστη μεταβολή των καταστάσεων, ενώ μικρή τιμή του  $Q$  σημαίνει ότι οι μεταβολές των καταστάσεων δεν θα τιμωρηθούν πολύ. Αντίστοιχα, μεγάλη τιμή του  $T$  σημαίνει ότι το σύστημα προσπαθεί να ισορροπήσει κάνοντας χρήση λιγότερης ενέργειας, ενώ μικρή τιμή σημαίνει ότι η «ποσότητα» εισόδων ελέγχου δεν θα τιμωρηθεί πολύ. Πιο συγκεκριμένα, η επιλογή των τιμών τους θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα.

#### 4.1.2 State-Space Εξισώσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναπτύχθηκαν οι εξισώσεις που περιγράφουν την κινηματική και δυναμική συμπεριφορά του τετρακόπτερου. Για να εφαρμοστεί ο ελεγκτής θα πρέπει αρχικά να οριστεί συνολικά το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος:

$$x = [\varphi \ \theta \ \psi \ p \ q \ r \ u \ v \ w \ x \ y \ z]^T \in \mathbf{R}^{12} \quad (4.6)$$

Γράφοντας το σε state-space μορφή:

$$\dot{\varphi} = p + r[c(\varphi)t(\theta)] + q[s(\varphi)t(\theta)]$$

$$\dot{\theta} = q[c(\varphi)] - r[s(\varphi)]$$

$$\dot{\psi} = r \frac{c(\varphi)}{c(\theta)} + q \frac{s(\varphi)}{c(\theta)}$$

$$\dot{p} = \frac{I_y - I_z}{I_x} r q + \frac{\tau_x - \tau_{wx}}{I_x}$$

$$\dot{q} = \frac{I_z - I_x}{I_y} p r + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y}$$

$$\dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z} p q + \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z}$$

$$\dot{u} = r v - q w - g[s(\theta)] + \frac{f_{wx}}{m}$$

$$\dot{v} = p w - r u + g[s(\varphi)c(\theta)] + \frac{f_{wy}}{m}$$

$$\dot{w} = q u - p v + g[c(\theta)c(\varphi)] + \frac{f_{wz} - f_t}{m}$$

$$\dot{X} = w[s(\varphi)s(\psi) + c(\varphi)c(\psi)s(\theta)] - v[c(\varphi)s(\psi) - c(\psi)s(\varphi)s(\theta)] + u[c(\psi)c(\theta)]$$

$$\dot{Y} = v[c(\varphi)c(\psi) + s(\varphi)s(\psi)s(\theta)] - w[c(\psi)s(\varphi) - c(\varphi)s(\psi)s(\theta)] + u[c(\theta)s(\psi)]$$

$$\dot{Z} = w[c(\varphi)c(\theta)] - u[s(\theta)] + v[c(\theta)s(\varphi)]$$

Είναι πλέον φανερό, ότι το σύστημα που μελετάται είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο. Αρχικά, παρατηρεί κανείς πως υπάρχουν 12 καταστάσεις (states) που εκφράζουν την δυναμική του συστήματος και γενικότερα την συμπεριφορά του. Επιπλέον, οι εξισώσεις των καταστάσεων αυτών είναι προφανώς μη γραμμικές. Όπως λοιπόν προαναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η εφαρμογή ενός ελεγκτή στο σύστημα αυτό προβάλλει δυσκολίες. Συγκεκριμένα, η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας -για παράδειγμα στο σημείο όπου το τετρακόπτερο ίπταται ακίνητο- είναι σύνηθης διαδικασία, αλλά απομακρύνει το μοντέλο ακόμη περισσότερο από την πραγματικότητα: η διασύνδεση των αξόνων που αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου 4 παύει να ισχύει[17].

Με απώτερο σκοπό να επισημανθούν οι διαφορές, θα ακολουθήσουν δύο προσεγγίσεις:

1. Γραμμικοποίηση γύρω από σημείο ισορροπίας.
2. Γραμμικοποίηση γύρω από κατάσταση (state).

Η δεύτερη, θα επιτρέψει θεωρητικά πιο ευρεία πτητική συμπεριφορά στην βελτιστοποίηση του συστήματος.

## 4.2 Γραμμικοποίηση γύρω από σημείο ισορροπίας

Στην εποενότητα αυτή, θα παρουσιαστεί ο τρόπος γραμμικοποίησης του μοντέλου γύρω από σημείο ισορροπίας. Το εν λόγω σημείο αφορά το τετρακόπτερο όπου ίπταται ακίνητο σε συγκεκριμένο ύψος.

Η πρώτη κίνηση, είναι να οριστεί το διάνυσμα ελέγχου ως:  $u = [T \tau_x \tau_y \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4$

Επιπρόσθετα, μία ακόμη απλούστευση του συστήματος είναι αναγκαίο να προκύψει μέσω της προσέγγισης της ημιτονοειδούς συνάρτησης με το όρισμά της και της συνημιτονοειδούς με τη μονάδα. Το παραπάνω ισχύει μόνο εάν το όρισμα είναι μικρό. Επίσης, οι γυροσκοπικές ροπές έχουν παραληφθεί. Έτσι, καταλήγουμε στο εξής σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = p + r\theta + q\varphi \\ \dot{\theta} = q - r\varphi \\ \dot{\psi} = r + q\varphi \\ \dot{p} = \frac{I_y - I_z}{I_x} r q + \frac{\tau_x - \tau_{wx}}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{I_z - I_x}{I_y} p r + \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z} p q + \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\ \dot{u} = rv - qw - g\theta + \frac{f_{wx}}{m} \\ \dot{v} = pw - ru + g\varphi + \frac{f_{wy}}{m} \\ \dot{w} = qu - pv + g + \frac{f_{wz} - ft}{m} \\ \dot{X} = w(\varphi\psi + \theta) - v(\psi - \varphi\theta) + u \\ \dot{Y} = v(1 + \varphi\psi\theta) - w(\varphi - \psi\theta) + u\psi \\ \dot{Z} = w - u\theta + v\varphi \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Το σημείο ισορροπίας θα οριστεί ως:

$$\bar{x} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z}]^T \in \mathbb{R}^{12}$$

εφαρμόζοντας την σταθερή τιμή εισόδου:

$$\bar{u} = [mg \ 0 \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$$

η οποία παριστάνει την αναγκαία δύναμη που πρέπει να ασκούν οι ρότορες ώστε η συνιστάμενη δύναμη στη κάθετη διεύθυνση να είναι μηδέν, χωρίς αυτό να κινείται.

Οι πίνακες  $A, B$  προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$A = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$B = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{U}=\bar{\mathbf{U}}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

ενώ οι γραμμικοποιημένες State-Space εξισώσεις καταλήγουν σε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi} = p \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{p} = \frac{\tau_x - \tau_{wx}}{I_x} \\ \dot{q} = \frac{\tau_y + \tau_{wy}}{I_y} \\ \dot{r} = \frac{\tau_z + \tau_{wz}}{I_z} \\ \dot{u} = -g\theta + \frac{f_{wx}}{m} \\ \dot{v} = g\varphi + \frac{f_{wy}}{m} \\ \dot{w} = \frac{f_{wz} - ft}{m} \\ \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{z} = w \end{array} \right. \quad (4.10)$$

### 4.3 Γραμμικοποίηση γύρω από κατάσταση

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 3, το γυροσκοπικό φαινόμενο που προκαλούν οι προπέλες μπορεί να αγνοηθεί, όπως και έγινε στην υποενότητα 4.2. Παρ' όλ' αυτά, στην εποενότητα αυτή θα γίνει εφαρμογή του όρου. Συγκεκριμένα, οι όροι που θα χρησιμοποιηθούν είναι οι εξής[17]:

$$\begin{aligned} \tau'_x &= J_p \omega_y (\Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3) \\ \tau'_y &= J_p \omega_x (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου,  $J_p$  η αδράνεια κάθε ρότορα.

Σε αυτό το σημείο, κάνοντας χρήση του Δεύτερου Νόμου του Νεύτωνα και με βάση την απλοποίηση  $[\dot{\varphi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T = [p \ q \ r]^T$ , η οποία ισχύει μόνο για πολύ μικρή μεταβολή των γωνιών, μπορούμε να εξαγάγουμε εκ νέου τρεις χρήσιμες σχέσεις που περιγράφουν το δυναμικό μοντέλο του συστήματος:

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} - \frac{J}{I_x} \dot{\theta} \Omega + \frac{l}{I_x} U_1 \\
\ddot{\theta} &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\varphi} \dot{\psi} - \frac{J}{I_y} \dot{\varphi} \Omega + \frac{l}{I_y} U_2 \\
\ddot{\psi} &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{l}{I_x} U_3
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Εάν το φαινόμενο των γυροσκοπικών ροπών δεν ληφθεί υπόψιν, τότε ο δεύτερος όρος  $(-\frac{J}{I_x} \dot{\theta} \Omega)$  &  $(-\frac{J}{I_y} \dot{\varphi} \Omega)$  από κάθε εξίσωση αντίστοιχα, πρέπει να παραλειφθεί.

Έτσι τώρα, οι είσοδοι στο σύστημα μπορούν να ερμηνευτούν ως:

$$\begin{aligned}
U_1 &= b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\
U_2 &= b(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\
U_3 &= d(\Omega_1^2 + \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\
\Omega &= \Omega_2 + \Omega_4 - \Omega_1 - \Omega_3
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Το διάνυσμα κατάστασης που επιλέγεται, θα περιέχει τους όρους της γωνιακής θέσης και γωνιακής ταχύτητας του τετρακόπτερου. Ειδικότερα:

$$\mathbf{x}^T = [\varphi \ \dot{\varphi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T \in \mathbf{R}^6 \tag{4.14}$$

Άρα το γραμμικοποιημένο σύστημα θα πρέπει να είναι της μορφής  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ .

Προσδιορίζοντας κάθε όρο προκύπτει:

$$\dot{\mathbf{x}}^T = [\dot{\varphi} \ \ddot{\varphi} \ \dot{\theta} \ \ddot{\theta} \ \dot{\psi} \ \ddot{\psi}]^T \tag{4.15}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_y - I_z}{2I_x} \dot{\psi} & 0 & \frac{I_y - I_z}{2I_x} \dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \dot{\psi} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_z - I_x}{2I_y} \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \dot{\theta} & 0 & \frac{I_x - I_y}{2I_z} \dot{\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_x} & 0 & 0 & 0 & \frac{J_p \dot{\theta}}{I_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l}{I_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{J_p \dot{\theta}}{I_y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Παρατηρήσεις που αφορούν τον πίνακα μετάβασης  $\mathbf{A}$  (4.16) και ελέγχου  $\mathbf{B}$  (4.17):

Στα στοιχεία των πινάκων υπάρχουν οι όροι των γωνιακών ταχυτήτων ( $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ ), οι οποίοι υφίστανται ως καταστάσεις (states) στο διάνυσμα κατάστασης που επιλέχθηκε να χρησιμοποιηθεί. Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα έχει μετατραπεί σε Προσαρμοστικό Βέλτιστο Έλεγχο (Adaptive Optimal Control), διότι η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας του τετρακόπτερου επηρεάζει άμεσα τα στοιχεία των παραπάνω πινάκων, ενώ ταυτόχρονα κάθε στοιχείο του πίνακα είναι γραμμικής φύσεως. Πιο αναλυτικά, οι πίνακες προσαρμόζονται στην τροχιά του τετρακόπτερου και έτσι η γραμμικοποίηση καθίσταται ως περισσότερα υποσχόμενη.

Αντίθετα, στην περίπτωση της γραμμικοποίησης γύρω από σημείο ισορροπίας, οι αντίστοιχοι πίνακες εμπειρεύουν μονάχα σταθερές αφαιρώντας την δυνατότητα το σύστημα να μπορεί να προσαρμοστεί στην αλλαγή των πτητικών μεταβλητών.

- Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της πτήσεως του τετρακόπτερου θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 5, παράλληλα με περισσότερες λεπτομέρειες για τον προγραμματισμό των ελεγκτών.

#### **4.4 Συμπεράσματα**

Το αμεσότερο συμπέρασμα που μπορεί να προκύψει από τις παραπάνω διαδικασίες για τις δύο μεθόδους προσέγγισης του προβλήματος, είναι η θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στους πίνακες μετάβασης και ελέγχου. Η διαφοροποίηση μεταξύ τους, στην δεύτερη περίπτωση, άλλαξε τη φύση του προβλήματος σε Προσαρμοστικό Βέλτιστο Έλεγχο.

## Κεφάλαιο 5. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των ελεγκτών στο τετρακόπτερο. Αρχικά, θα γίνει σύντομη αναφορά στον προγραμματισμό του ελεγκτή για το κάθε γραμμικοποιημένο μοντέλο και θα αφορά στοιχεία που δεν αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 4. Στη συνέχεια, θα ακολουθήσουν διαγράμματα απόκρισης του συστήματος σε αρχικές συνθήκες. Τέλος, θα παρουσιαστούν αποτελέσματα που αφορούν το πώς ο Γραμμικός Τετραγωνικός Ελεγκτής μπορεί να εφαρμοστεί με είσοδο αναφοράς.

### 5.1 Έλεγχος γραμμικού συστήματος γύρω από σημείο ισορροπίας

Το πρώτο παράδειγμα ελέγχου αφορά το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας που αναφέρθηκε στην υποενότητα 4.2.

Είναι σημαντικό να αναφερθούν τα εξής:

- Το γραμμικό, συνεχούς χρόνου σύστημα (4.10), είναι συνάμα παρατηρήσιμο και ελέγξιμο. Η διαπίστωση έγινε χρησιμοποιώντας το MATLAB: Οι πίνακες παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας είναι πλήρους βαθμού (βλέπε Παράρτημα).
- Πίνακας παρατηρησιμότητας:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{144 \times 12} \quad (5.1)$$

- Πίνακας ελεγχιμότητας:

$$C = [B \quad A \cdot B \quad A^2 \cdot B \quad \dots \quad A^{11} \cdot B] \in \mathbb{R}^{12 \times 48} \quad (5.2)$$

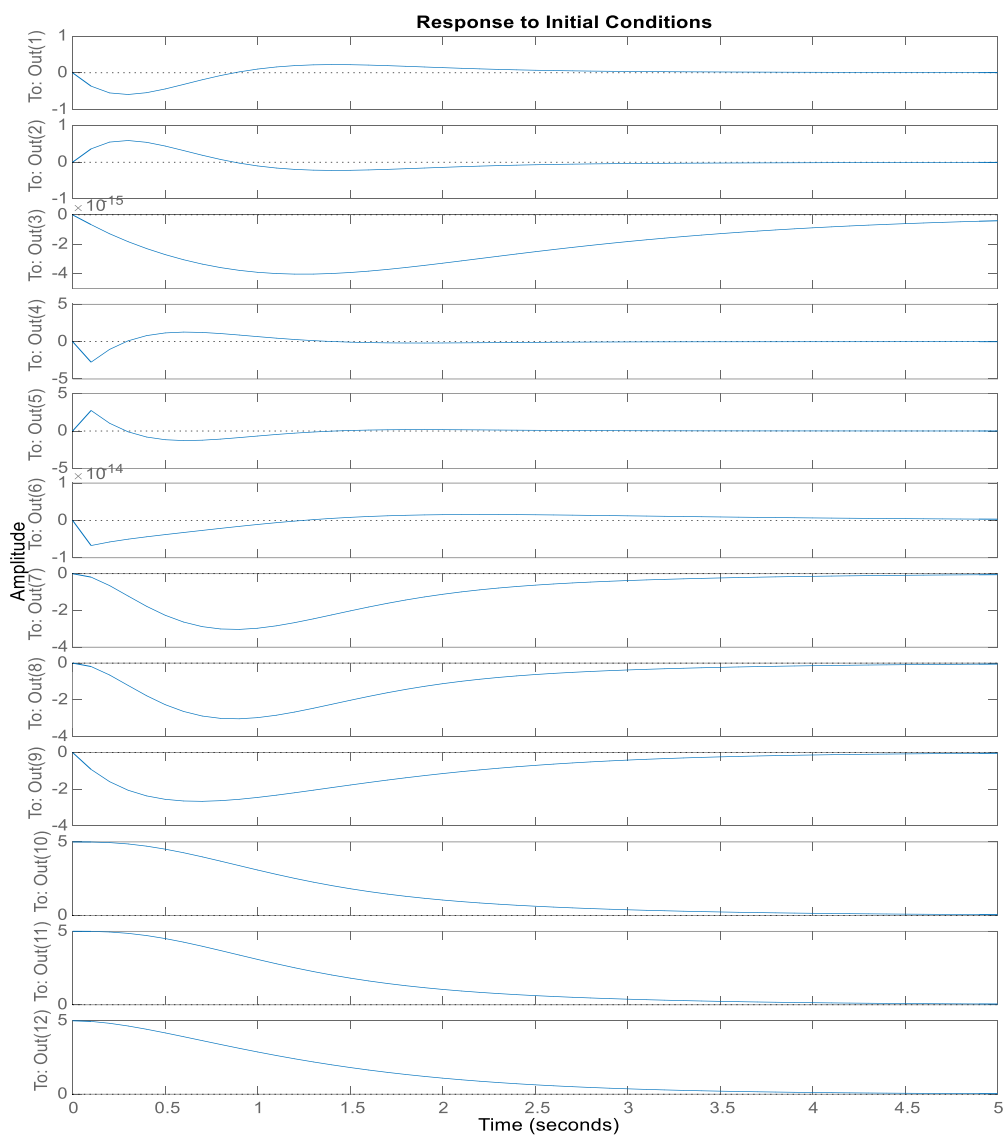
- Οι πίνακες των παραγόντων στάθμισης  $Q, T$  είναι σημαντικό να οριστούν ορθά, καθώς παίζουν τον δεύτερο σημαντικότερο ρόλο, μετά τους πίνακες Μετάβασης και Ελέγχου. Σύμφωνα με την διάλεξη[18] του R. M. Murray ο πίνακας  $Q$  μπορεί να οριστεί ως ταυτοτικός, ενώ ο  $R$  ως διαγώνιος:  $Q = I, T = \rho I$ , όπου το  $\rho$  μεταβάλλεται κατά την κρίση μας. Ταυτόχρονα, τα στοιχεία των πινάκων θα υποβληθούν σε διαδικασία trial and error για την περαιτέρω βελτίωσή τους.

- Το κέρδος ανάδρασης προκύπτει μέσω MATLAB από χρήση της συνάρτησης:  

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, T)$$

### 5.1.1 Αρχικές συνθήκες γραμμικής θέσης με ταυτοτικούς πίνακες $Q = I, T = I$

Στον προγραμματισμό δόθηκαν Αρχικές Συνθήκες της γραμμικής θέσης του τετρακόπτερου σε σχέση με το  $E$ -frame:  $X = 5, Y = 5, Z = 5$



Εικόνα 5.1: Διαγράμματα με αρχικές συνθήκες γραμμικής θέσης

Πίνακας κέρδους:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.3914 & 0 & 0 & 1 \\ 5.4983 & 0 & 0 & 1.0264 & 0 & 0 & 0 & 1.4564 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5.4983 & 0 & 0 & 1.0264 & 0 & -1.4564 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1.0088 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Το παραπάνω παράδειγμα παρουσιάζεται ως πρωτόλειο, ώστε να εξεταστεί εάν το σύστημα μπορεί θεμελιωδώς να ισορροπήσει. Με τις δοθήσες αρχικές συνθήκες, όλες οι καταστάσεις του συστήματος συγκλίνουν σε πεπερασμένο χρόνο, στο σημείο ισορροπίας 0. Σύμφωνα με τον πίνακα κέρδους (5.3) είναι φανερό από τα στοιχεία (2,1) και (3,2) ότι για τις καταστάσεις  $\varphi$  (Roll) και  $\theta$  (Pitch) χρειάζεται η μεγαλύτερη επέμβαση του ελεγκτή στις εισόδους 2 και 3 αντίστοιχα με τιμή **5.4983**.

Συνεχίζουμε σε επόμενα παραδείγματα, με διαφοροποιημένους πίνακες  $Q, T$  για την περαιτέρω βελτίωση της ευστάθειας του συστήματος.

### 5.1.2 Αρχικές συνθήκες γραμμικής θέσης με διαφοροποιημένους πίνακες $Q, T$

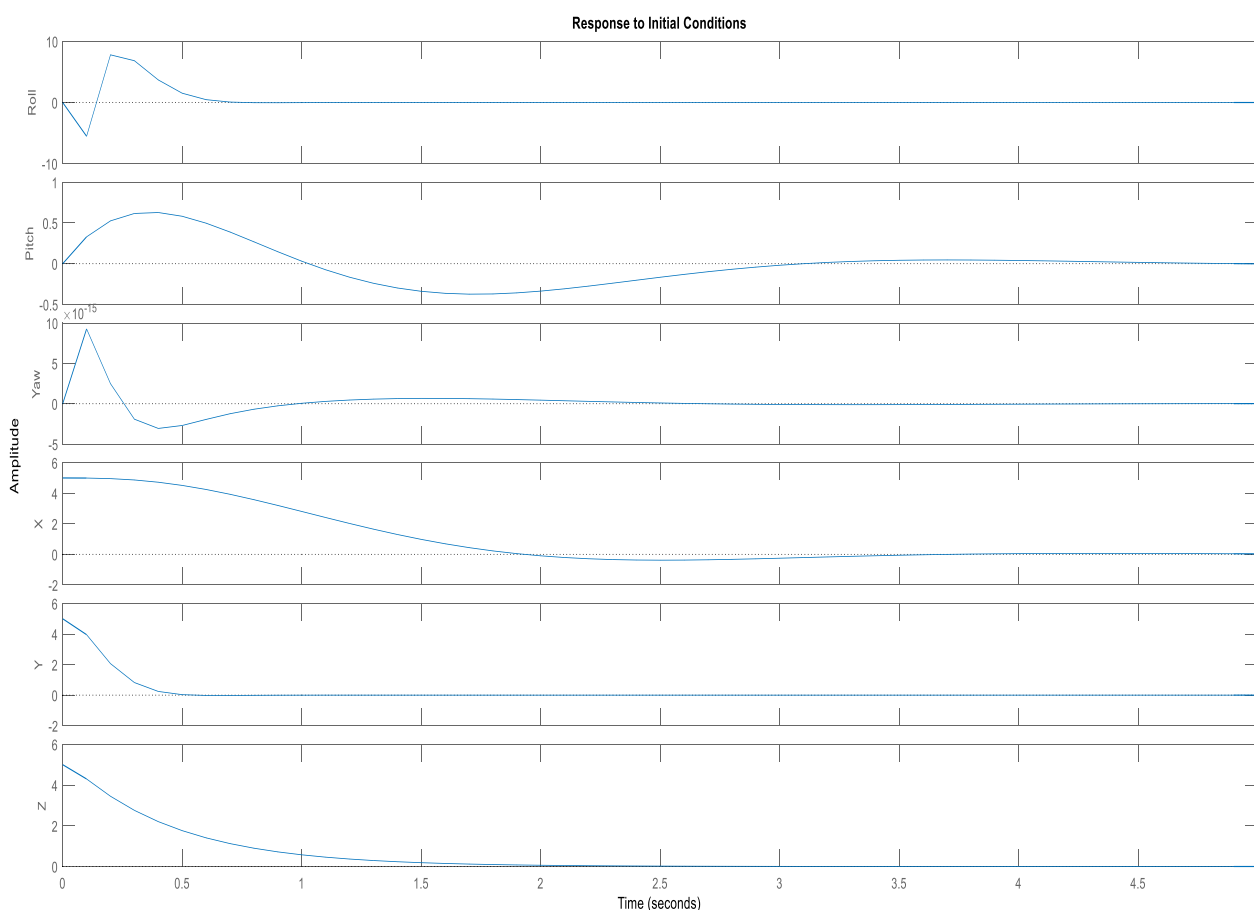
Στο ακόλουθο παράδειγμα στοχεύουμε σε βελτίωση της απόκρισης της γραμμικής θέσης εφαρμόζοντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες με το 5.1.1.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * 10^{-3} \quad (5.5)$$

- Στον πίνακα  $T$  δόθηκε μικρότερη τιμή, ώστε να υπάρχει περισσότερη ελευθερία κατά την εφαρμογή των τιμών εισόδου.
- Στον πίνακα  $Q$  ακολουθήθηκε κυρίως η μέθοδος του trial and error με αρχική βάση τον Ταυτοτικό πίνακα.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.2 & 0 & 0 & 31.6 \\ 41.5 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 316.2 & 0 \\ 0 & 159.2 & 0 & 0 & 38.7 & 0 & -32 & 0 & 0 & -31.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 7.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$



Εικόνα 5.2: Διαγράμματα αρχικών συνθηκών γραμμικής θέσης με διαφοροποιημένα βάρη

- Σημαντική παρατήρηση κατά την εύρεση αρμοστών πινάκων  $Q, T$ :  
Ο ολικός πολλαπλασιασμός του κάθε πίνακα ξεχωριστά με συγκεκριμένο συντελεστή δεν είχε ιδιαίτερη επιρροή στις αποκρίσεις των γραμμικών θέσεων, εκτός της περίπτωσης

όπου η τιμή του συντελεστή ήταν υπερβολικά μεγάλη ή μικρή, όπου και στις δύο το αποτέλεσμα ήταν μη θεμιτό καθώς αύξανε τον χρόνο σύγκλισης.

Στα διαγράμματα της εικόνας 5.2 παρατηρούμε σημαντική βελτίωση της απόκρισης των γραμμικών θέσεων. Ειδικότερα,

- Μείωση του χρόνου επιστροφής στην αρχική κατάσταση στον άξονα X κατά **50%** (από 4sec. σε 2sec.)
- Μείωση του χρόνου επιστροφής στην αρχική κατάσταση στον άξονα Y κατά **87.5%** (από 4sec. σε 0.5sec.)
- Μείωση του χρόνου επιστροφής στην αρχική κατάσταση στον άξονα Z κατά **50%** (από 4sec. σε 2sec.)

Επιπλέον, εάν συγκρίνουμε τα διαγράμματα των γωνιών στις δύο περιπτώσεις βλέπουμε ότι στη δεύτερη, η συμπεριφορά του τετρακόπτερου στις 2/3 γωνίες έχει γίνει ανώμαλη και «σπασμοδική», αλλά και εδώ παρατηρείται έντονη μείωση του χρόνου επιστροφής σε ισορροπία.

Τέλος, από τον πίνακα κέρδους παρατηρείται στο στοιχείο (2,11) η μεγαλύτερη τιμή  $\cong 316.2$  η οποία δικαιολογείται από το γεγονός ότι στην κατάσταση 11 (Γραμμική θέση Y) έχουμε τη μεγαλύτερη μεταβολή.

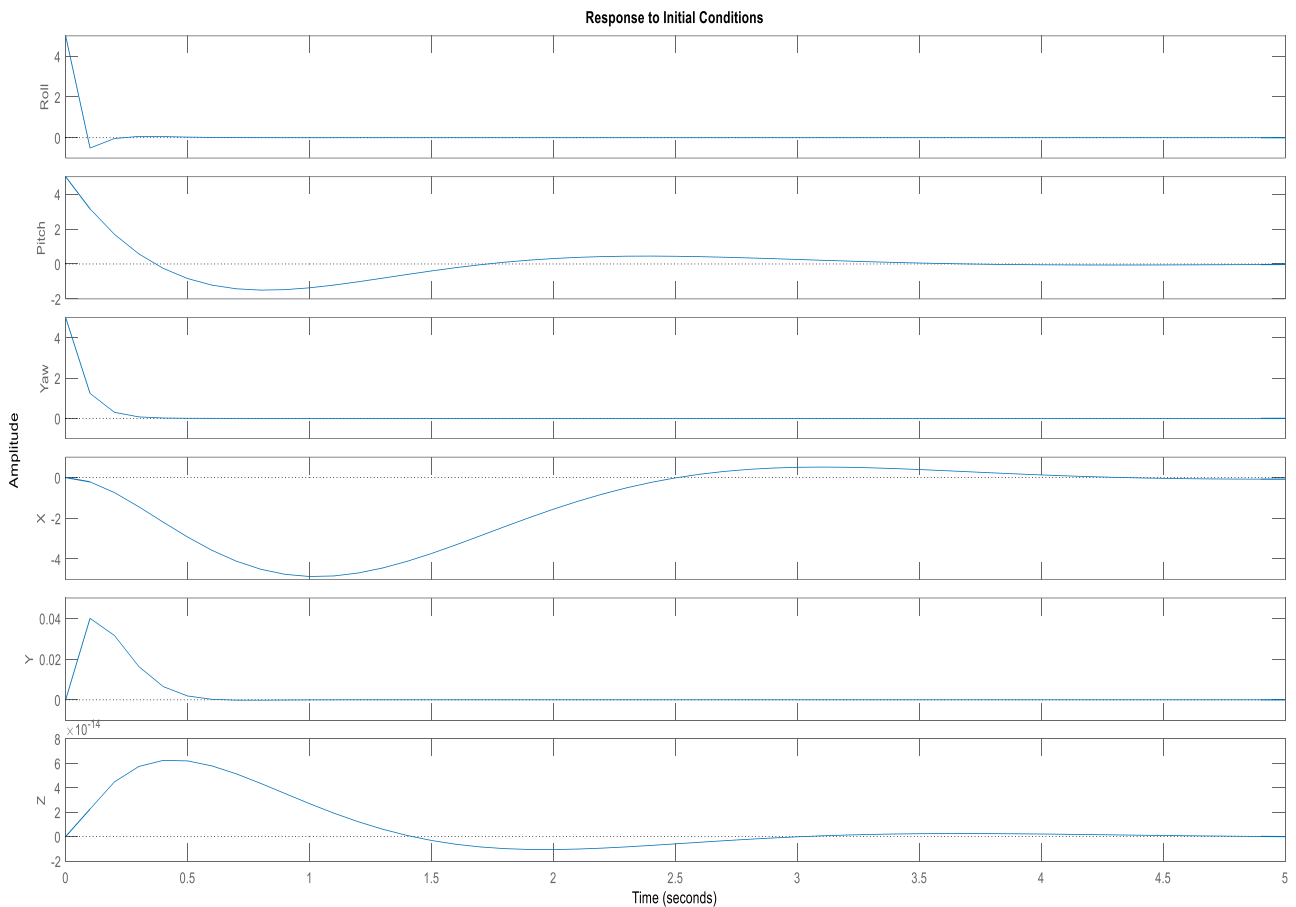
### 5.1.3 Αρχικές συνθήκες στις γωνίες Roll, Pitch, Yaw

Στη περίπτωση αυτή, θα εφαρμοστούν αρχικές συνθήκες πλάτους ίσο με 5 στις γωνίες Roll, Pitch, Yaw, με χρήση των ίδιων πινάκων  $Q, T$  με το 5.1.2.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.2 & 0 & 0 & 31.6 \\ 41.5 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 & 316.2 & 0 \\ 0 & 159.2 & 0 & 0 & 38.7 & 0 & -32 & 0 & 0 & -31.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 7.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Σε αυτό το σημείο επιβεβαιώνεται ότι ο πίνακας κέρδους δεν μεταβάλλεται κατά την αλλαγή των αρχικών συνθηκών. Συνεπώς, οι τιμές των πινάκων στάθμισης (βάρη) ενδέχεται να ευνοούν τη συμπεριφορά του συστήματος σε μια κατάσταση, αλλά σε διαφορετική να μην

είναι οι κατάλληλοι. Παρ'όλαυτα, σύμφωνα με τα παρακάτω διαγράμματα λαμβάνονται αποτελέσματα τα οποία είναι αρκετά υποσχόμενα:



Εικόνα 5.3: Διαγράμματα με αρχικές συνθήκες γωνιών

- Άμεσο συμπέρασμα:

Οι γωνίες επιστρέφουν σε κατάσταση ισορροπίας σε  $t < 0.5 \text{ sec}$ . από την Pitch που πραγματοποιεί μικρή ταλάντωση και συγκλίνει μετά από  $t = 3 \text{ sec}$ .

Τα ακρότατα των μεταβολών των γραμμικών θέσεων είναι της τάξεως του  $Y = 0.04, Z = 7 * 10^{-14}$ , ενώ το αποτέλεσμα  $X = -4$  είναι ανησυχητικό, καθώς πρέπει να ελεγχθεί ο προσανατολισμός του άξονα X.

Ο πίνακας κέρδους μπορεί να αλλάξει, εάν οι πίνακες μετάβασης και ελέγχου προσαρμόζονται κατά την πτήση, οπότε με σταθερά τα βάρη, η συμπεριφορά θα είναι



προσαρμόσιμη στην εκάστοτε κατάσταση. Η περίπτωση αυτή αναλύεται στο υποκεφάλαιο 5.2.

## 5.2 Έλεγχος γραμμικού συστήματος γύρω από κατάσταση

Το δεύτερο παράδειγμα ελέγχου αφορά το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κατάσταση, που αναφέρθηκε στην υποενότητα 4.3. Η κυριότερη διαφορά σε σχέση με την υλοποίηση του προηγούμενου ελεγκτή, είναι ότι στη προκείμενη περίπτωση γίνεται χρήση της συνάρτησης του MATLAB:  $\text{K} = \text{lqr}(A, B, Q, T)$  εντός επαναληπτικού κώδικα-loop μέσα στον οποίο πρέπει να τοποθετηθούν και οι πίνακες Μετάβασης και Ελέγχου, ώστε να ανανεώνεται διαδοχικά το σύστημα για κάθε αλλαγή των μεταβλητών κατάστασης. Οι πίνακες βαρών πρέπει να τοποθετηθούν εκτός «λούπας». Προφανώς, η παρούσα διαδικασία απαιτεί μεγαλύτερη υπολογιστική ισχύ.

Μελετάμε και πάλι το σύστημα όσον αφορά τη ρύθμιση των καταστάσεων προς τη μηδενική τιμή. Η επιλογή των πινάκων στάθμισης βασίζεται στο γεγονός ότι ο παρόν ελεγκτής είναι προσαρμόσιμος, συνεπώς στη προσομοίωση θα πρέπει να παρέχει καλύτερα αποτελέσματα από τους ελεγκτές των προηγούμενων υποκεφαλαίων, αξιοποιώντας απλά ταυτοτικούς πίνακες:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

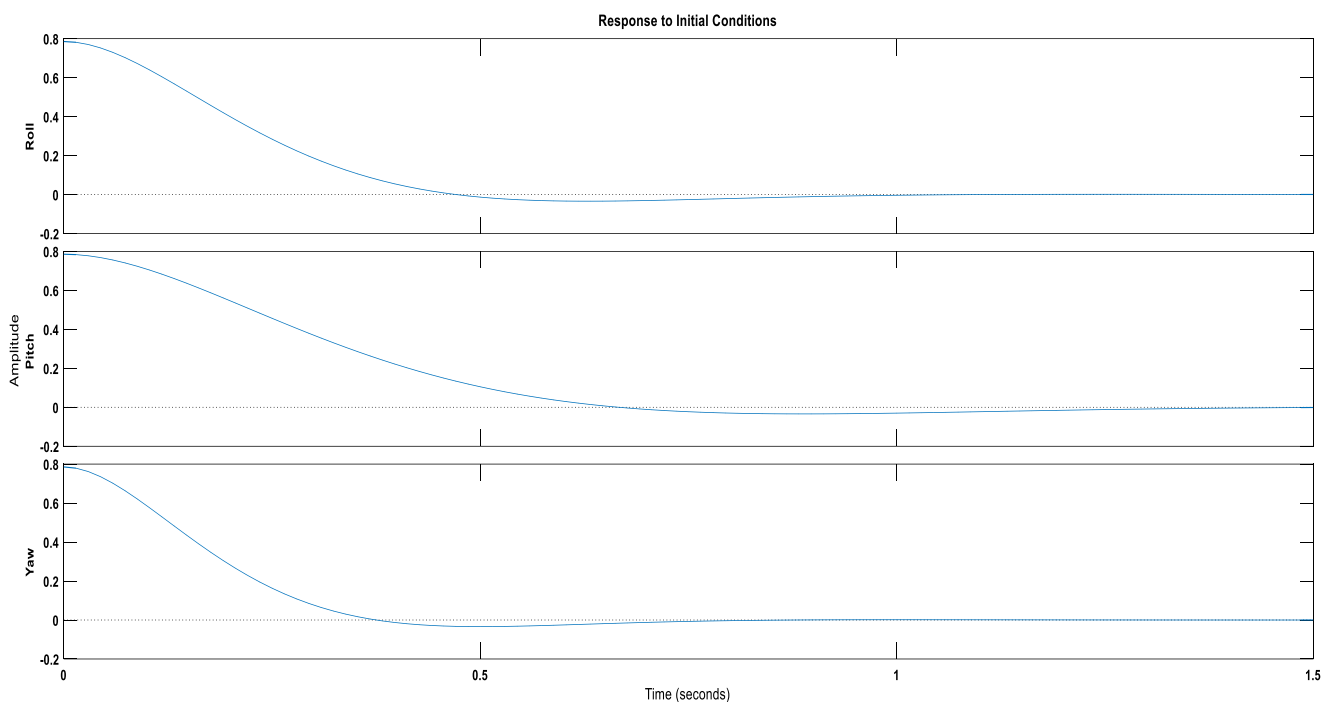
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Ο πίνακας  $Q$  δεν είναι πραγματικά ταυτοτικός. Η συγκεκριμένη δομή επιλέχθηκε διότι η όριση μονάδας σε οποιοδήποτε άλλο στοιχείο της διαγωνίου του έβγαζε το σύστημα εκτός ισορροπίας. *Μία εκτίμηση για τον λόγο, είναι καλή ιδέα για περαιτέρω έρευνα.*

Πίνακας κέρδους κατά την έναρξη της προσομοίωσης:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2828 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3162 & 0.0503 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Κατά την διάρκεια της προσομοίωσης παρατηρείται πολύ μικρή μεταβολή στα στοιχεία του πίνακα, της τάξης του  $10^{-3}$ . Ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι τα στοιχεία παίρνουν πολύ μικρές τιμές, όπως στον πίνακα κέρδους (5.3) όπου και εκεί είχαμε ταυτοτικούς πίνακες βαρών, αλλά λίγο μεγαλύτερες τιμές στις αρχικές συνθήκες. Στα κέρδη (5.6) και (5.7) οι τιμές ήταν πιο μεγάλες διότι είχαμε επιβάλλει διαφορετικούς πίνακες βαρών.



Εικόνα 5.4: Διαγράμματα προσαρμοστικής απόκρισης των γωνιών  $\varphi, \theta, \psi$ .

Οι Αρχικές Συνθήκες της γωνιακής θέσης σε σχέση με  $E$ -frame ορίστηκαν με πλάτος ίσο με

**0.8:**

- Το διάγραμμα της γωνίας  $\psi$  (Yaw) συγκλίνει στη μηδενική τιμή γρηγορότερα από τα άλλα σε  **$t = 0.33 \text{ sec}$** .
- Το διάγραμμα της  $\varphi$  (Roll) συγκλίνει ως δεύτερο σε  **$t \cong 0.5 \text{ sec}$** .
- Το κατά σειρά δεύτερο της  $\theta$  (Pitch) συγκλίνει τελευταίο σε  **$t = 0.67 \text{ sec}$** .

- Και οι τρεις αποκρίσεις παρουσιάζουν μια απειροελάχιστη ταλάντωση -στα παραπάνω- χρονικά διαστήματα γύρω από το σημείο ισορροπίας.

Συμπεράσματα:

- Το σύστημα ισορροπεί πολύ γρηγορά, δηλαδή σε διάστημα μικρότερο του ενός δευτερολέπτου.
- Δεν υπάρχουν ταλαντώσεις, μερικές ή προσωρινές απώλειες ισορροπίας και υπερπηδήσεις στα διαγράμματα.

### 5.3 Έλεγχος με είσοδο αναφοράς

Η βασική ιδέα είναι το ανάποδο των προηγούμενων διαδικασιών. Θέλουμε την απόκριση του συστήματος σε δεδομένη κατάσταση, ξεκινώντας τώρα από μηδενικές τιμές. Για την υλοποίηση του ελεγκτή απαιτούνται ορισμένες διαφοροποιήσεις στο σύστημα [19], σε σχέση με αυτό που έχουμε ήδη:

Κατά την εισαγωγή πίνακα τιμών αναφοράς  $\mathbf{r}$ , το διάνυσμα εισόδου γίνεται  $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{r}$ . Με αυτή τη προσθήκη, στο σύστημα προκύπτει σφάλμα σταθερής κατάστασης και το διάνυσμα εισόδου ορίζεται ως:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ss} - \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{ss}) \quad (5.11)$$

ώστε όταν  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{ss}$  το σφάλμα θα μηδενίζεται. Έπειτα, σε σταθερή κατάσταση, οι κλασικές διαφορικές εξισώσεις (4.1) που ορίζουν το σύστημα γίνονται:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ss} \\ \mathbf{y}_{ss} &= \mathbf{C}\mathbf{x}_{ss} + \mathbf{D}\mathbf{u}_{ss} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Λύνοντας για  $\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{r}_{ss}$  θέτοντας  $\mathbf{x}_{ss} = \mathbf{N}_x \mathbf{r}_{ss}$  και  $\mathbf{u}_{ss} = \mathbf{N}_u \mathbf{r}_{ss}$  προκύπτουν τα νέα κέρδη  $\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_u$  μέσω της (5.12) απ'την εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_x \\ \mathbf{N}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

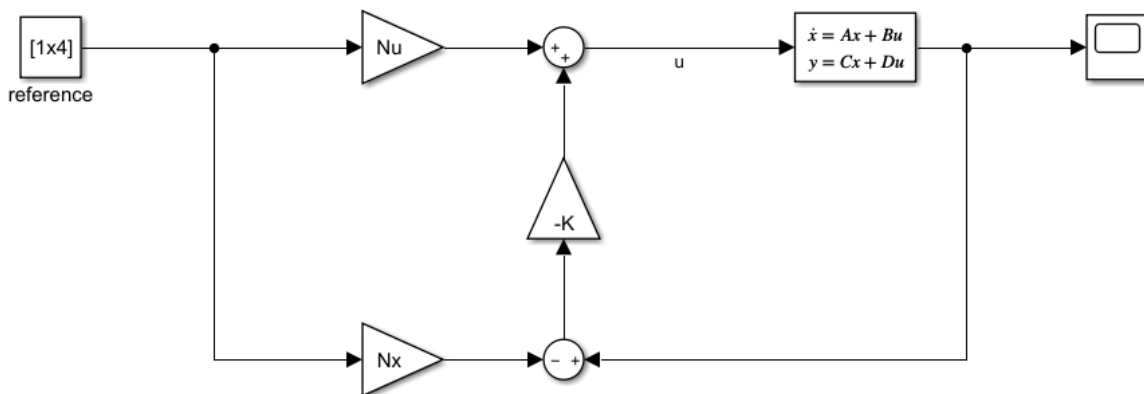
και στη συνέχεια αξιοποιούνται ώστε να προκύψει το συνολικό κέρδος, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\bar{N} = N_u + KN_x \quad (5.14)$$

όπου,  $K$  η κλασική τιμή κέρδους που δίνεται από την εξίσωση του MATLAB.

Ο ελεγκτής πλέον παίρνει τη μορφή:

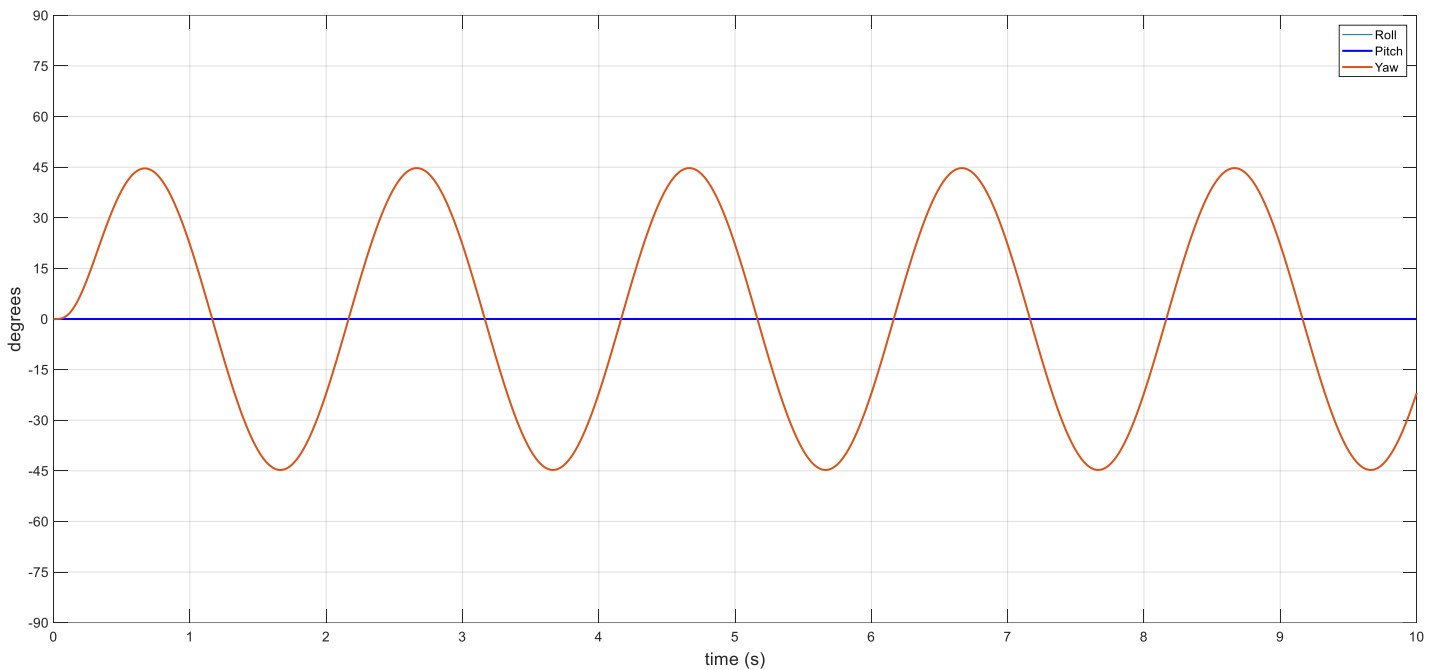
$$u = -Kx + \bar{N}r \quad (5.15)$$



Εικόνα 5.5: Block διάγραμμα με είσοδο αναφοράς σε ελεγκτή πλήρους ανάδρασης

Στα παραδείγματα που ακολουθούν έχουν χρησιμοποιηθεί οι ίδιοι πίνακες βαρών με την υποενότητα 5.2.

1. Η πρώτη εφαρμογή του ελεγκτή αφορά την συμπεριφορά μίας μόνο γωνίας του σε ημιτονοειδή τροχιά αναφοράς:

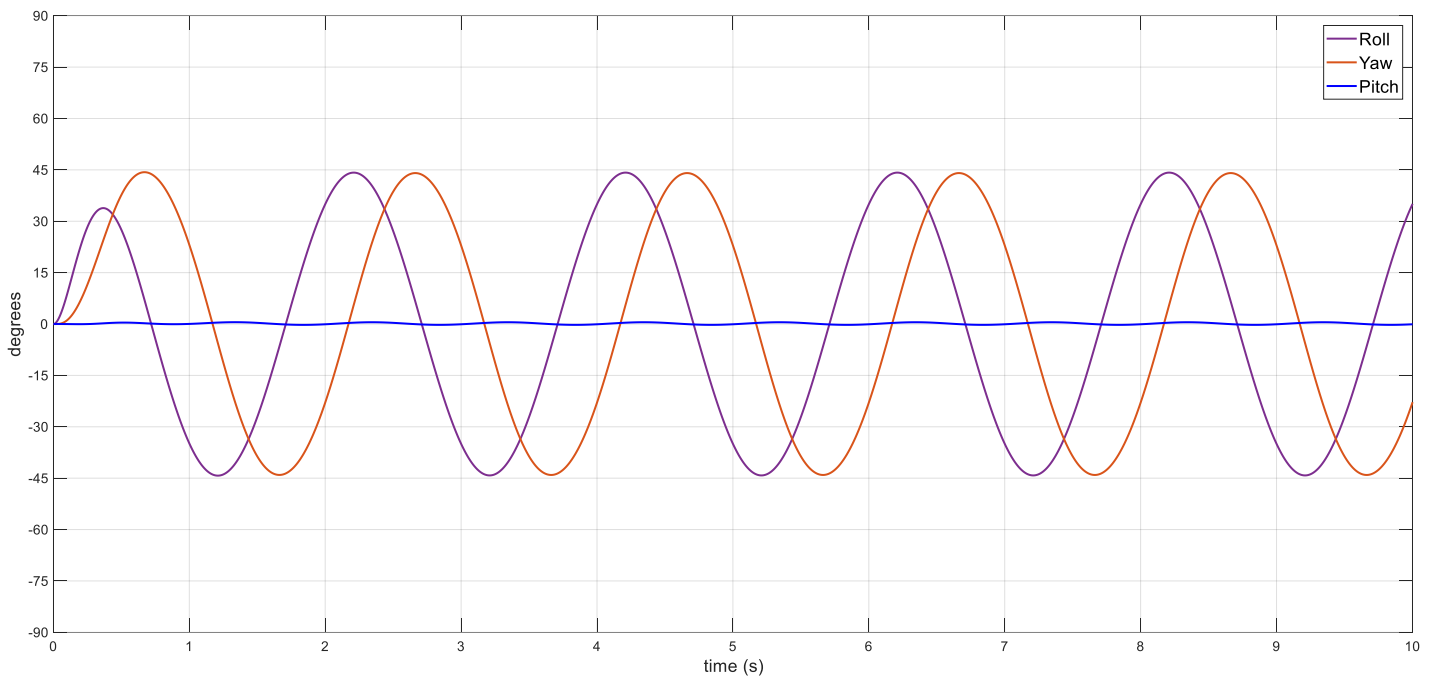


Εικόνα 5.6: Ημιτονοειδής τροχιά αναφοράς στη γωνία  $\psi$  (Yaw).

Από το παραπάνω διάγραμμα, η συμπεριφορά του συστήματος με ημιτονοειδή συνάρτηση αναφοράς δεν παρουσιάζει τίποτα παράτυπο:

- Ακριβής ημιτονοειδής τροχιά.
- Μηδενική επιρροή στις υπόλοιπες γωνίες.

2. Ως επόμενο, έγινε επιπλέον εισαγωγή συνημιτονοειδούς τροχιάς αναφοράς στη γωνία  $\varphi$  (Roll):

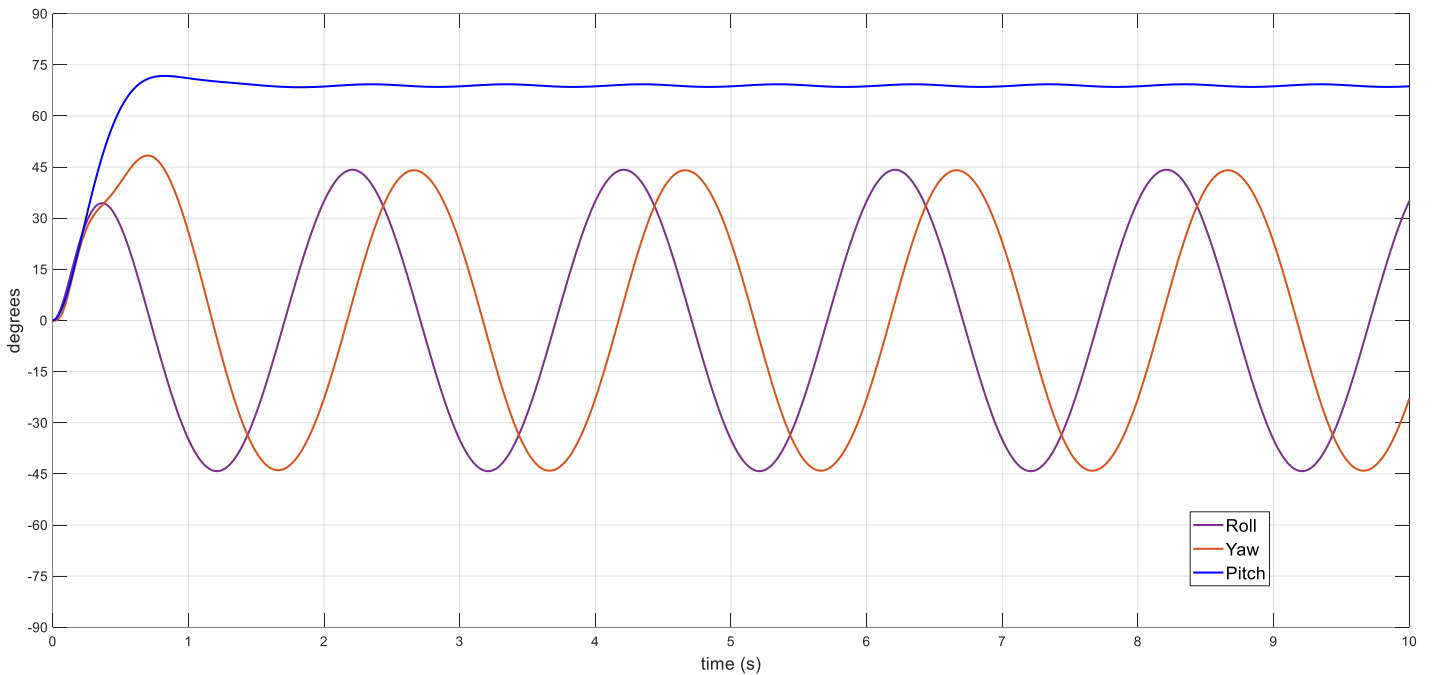


Εικόνα 5.7: Ημιτονοειδής & συνημιτονοειδής τροχιάς αναφοράς.

Παρατηρείται ότι η συμπεριφορά του συστήματος είναι και εδώ σχεδόν απόλυτα ακριβής. Με την προσθήκη επιπλέον τροχιάς αναφοράς σε δεύτερη γωνία, προέκυψε ταλάντωση της τρίτης γωνίας  $\theta$  (Pitch) της τάξης του  $\pm 1$  *degrees*, ενώ δεν υπάρχει καμία επιρροή ανάμεσα στις δύο πρώτες.

3. Η τελευταία δοκιμή συνίσταται από:

- Ημιτονοειδή τροχιά αναφοράς στη γωνία  $\psi$  (Yaw),
- Συνημιτονοειδή τροχιά αναφοράς στη γωνία  $\varphi$  (Roll),
- Σταθερή τιμή στη γωνία  $\theta$  (Pitch).



Εικόνα 5.8: Διάγραμμα  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $constant$

- Για  $t \leq 0.5 \text{ sec.}$ :

Οι τρεις καμπύλες εμφανίζονται συμπτυγμένες έχοντας ίδια κλίση και ίδιο πλάτος, μέχρις ότου το πλάτος της σταθερής τιμής στη γωνία Pitch υπερβεί αυτό της Roll. Μέχρι αυτό το σημείο η γωνία Yaw δεν συμπεριφέρεται όπως ορίζεται από τη συνάρτησή της.

- Για  $0.5 < t \leq 1 \text{ sec.}$ :

Οι καμπύλες ξεκινούν να λαμβάνουν την κανονική τροχιά τους. Συγκεκριμένα, παρατηρείται ότι η γωνία Yaw λαμβάνει για περίπου  $0.3 \text{ sec.}$  μια ευθειάζουσα κλίση, ώστε να δημιουργηθεί η διαφορά φάσης που έχουν οι συναρτήσεις ημιτόνου-συνημιτόνου.

- Για  $t > 1 \text{ sec.}$ :

Το σύστημα ακολουθεί επακριβώς τις τροχιές, με μία μικρή ταλάντωση στη γωνία Pitch της τάξης του  $\pm 1 \text{ degrees}$ .

#### 5.4 Συμπεράσματα

Στις παραπάνω προσομοιώσεις έγινε σαφές ότι όλοι οι ελεγκτές μπορούν να παρέχουν πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα. Ο Γραμμικός Τετραγωνικός Ρυθμιστής σε έλεγχο συστήματος με γραμμικοποίηση γύρω από σημείο ισορροπίας έδωσε αποτελέσματα γρήγορης σύγκλισης με πολύ μικρές ή ανύπαρκτες ταλαντώσεις και υπερπηδήσεις. Ο ίδιος, στον Προσαρμοστικό Έλεγχο που πραγματοποιήθηκε, έδωσε ακόμα καλύτερα αποτελέσματα: γρηγορότερη σύγκλιση, ανύπαρκτη ταλάντωση και υπερπήδηση. Συνεπώς, σύμφωνα με τα παραπάνω δεν μπορεί εύκολα να κριθεί ποιός δίνει πραγματικά καλύτερα αποτελέσματα. Αυτό έγκειται στο γεγονός ότι οι περιπτώσεις που αναλύθηκαν ίσως να μην «δοκίμαζαν» τον κάθε τρόπο ελέγχου στα άκρα του ή να μην ήταν εξ ορισμού σωστοί τρόποι εκτίμησης της απόδοσης τους. Ένα επιπρόσθετο στοιχείο που πρέπει να αναφερθεί ώστε να ξεκαθαρίσει το τοπίο, είναι πως παρόλο που δεν μπορεί να γίνει σωστή κρίση, στην περίπτωση γραμμικοποίησης γύρω από σημείο ισορροπίας έγινε επιπλέον έρευνα πάνω στους πίνακες βαρών για βελτίωση των αποκρίσεων, ενώ στον προσαρμοστικό δεν έγινε. Συνεπώς μπορούμε να πούμε με σιγουριά ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κατάσταση υπερέχει του άλλου σε κάθε πτυχή της μελέτης, αλλά με χρήση περισσότερης υπολογιστικής ισχύς. Τέλος, τα αποτελέσματα που προέκυψαν δείχνουν ότι το τετρακόπτερο μπορεί να ισορροπήσει, σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν.



## Κεφάλαιο 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

---

Σε αυτήν τη διπλωματική εργασία μελετήθηκε το δυναμικό μοντέλο του συστήματος ενός τετρακόπτερου και η δυνατότητα βελτίωσης της πτητικής συμπεριφοράς του. Αρχικά, εξάχθηκε το μοντέλο και συνεχίσαμε με την state-space μορφή του. Σε επόμενο στάδιο, έγινε γραμμικοποίηση γύρω από σημείο ισορροπίας και γύρω από κατάσταση, ώστε στη συνέχεια να γίνει χρήση ενός Γραμμικού Τετραγωνικού Ελεγκτή. Τα αποτελέσματα ήταν σαφή: η εφαρμογή Γραμμικού Τετραγωνικού Ελεγκτή σε γραμμικοποιημένο γύρω από κατάσταση σύστημα, υπερτερούσε της εφαρμογής ίδιου ελεγκτή σε γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από σημείο ισορροπίας σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Τέλος, πραγματοποιήθηκε δοκιμή με είσοδο αναφοράς κατά την οποία εξετάστηκε η δυνατότητα του συστήματος αλλά και του ελεγκτή να υπακούσουν σε αυτά τα δεδομένα, με τα αποτελέσματα να είναι απόλυτα ικανοποιητικά.

Μερικά από τα ερωτήματα που έχουν μείνει αναπάντητα και θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο περαιτέρω εργασίας είναι:

1. Το ποσοστό βελτίωσης που μπορεί να υπάρξει εφαρμόζοντας κάποιο καλύτερα διαμορφωμένο γραμμικοποιημένο μοντέλο γύρω από σημείο ισορροπίας.
2. Έρευνα πάνω στους πίνακες βαρών για περαιτέρω βελτίωση της απόκρισης στον έλεγχο γραμμικοποιημένου γύρω από κατάσταση συστήματος.
3. Εφαρμογή πιο πολύπλοκων εισόδων αναφοράς για την εξέταση της ευστάθειας του συστήματος που αναπτύχθηκε.
4. Εισαγωγή έντονων διαταραχών και εξέταση της συμπεριφοράς.

Τέλος, πρέπει να αναφερθεί ότι στην εργασία αυτή έγινε μία πολύ πρώιμη προσέγγιση σε ότι αφορά τη λειτουργία ενός μη επανδρωμένου αεροσκάφους. Οι βάσεις που τέθηκαν είναι σίγουρα μία καλή αρχή για τον επόμενο εν δυνάμει Μηχανολόγο Μηχανικό του τμήματος που θα καταπιαστεί με το εν λόγω ζήτημα.

## Βιβλιογραφία

---

- [1] “Quadcopter Wikipedia.”
- [2] “History of Quadcopters and Multirotors — Krossblade Aerospace Systems.” <https://www.krossblade.com/history-of-quadcopters-and-multirotors> (accessed Apr. 21, 2022).
- [3] “The History of Drones in 10 Milestones | Digital Trends.” <https://www.digitaltrends.com/cool-tech/history-of-drones/> (accessed Apr. 28, 2022).
- [4] A. Tahir, J. Böling, M. H. Haghbayan, H. T. Toivonen, and J. Plosila, “Swarms of Unmanned Aerial Vehicles — A Survey,” *J Ind Inf Integr*, vol. 16, p. 100106, Dec. 2019, doi: 10.1016/J.JII.2019.100106.
- [5] J. Kim, S. A. Gadsden, and S. A. Wilkerson, “A Comprehensive Survey of Control Strategies for Autonomous Quadrotors,” May 2020, doi: 10.1109/CJECE.2019.2920938.
- [6] “STEM LEARNING: Advanced Air Mobility: The Science Behind Quadcopters Reader-Student Guide”, Accessed: May 03, 2022. [Online]. Available: [www.nasa.gov](http://www.nasa.gov)
- [7] S. Musa, “Techniques for Quadcopter Modelling & Design: A Review,” *Journal of Unmanned System Technology*, 2018, doi: 10.21535/just.v5i3.981.
- [8] N. Fethalla and É. De, “Modelling, Identification, and Control of a Quadrotor Helicopter,” 2019.
- [9] Jāmi‘at al-Wādī. Department of Electrical Engineering, Institute of Electrical and Electronics Engineers. Algeria Section, and Institute of Electrical and Electronics Engineers, *CCSSP 2020 : 020 1st International Conference on Communications, Control Systems and Signal Processing : 16-17th March, 2020, El-Oued, Algeria*.
- [10] T. Bresciani, “Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter,” 2008, [Online]. Available: <http://www.control.lth.se/publications/>
- [11] Z. He and L. Zhao, “A Simple Attitude Control of Quadrotor Helicopter Based on Ziegler-Nichols Rules for Tuning PD Parameters,” *The Scientific World Journal*, vol. 2014, Dec. 2014, doi: 10.1155/2014/280180.
- [12] F. Sabatino, “Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation,” 2015.

- [13] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart, "PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor", Accessed: Jul. 20, 2022. [Online]. Available: [www.portescap.com](http://www.portescap.com)
- [14] "Quadrotor Linear Quadratic Regulator (LQR) - MTwallets." <https://www.mtwallets.com/quadrotor-linear-quadratic-regulator-lqr/> (accessed Jul. 20, 2022).
- [15] R. M. Murray, "Optimization-Based Control."
- [16] "OPTIMAL CONTROL."
- [17] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart, "PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor." [Online]. Available: [www.portescap.com](http://www.portescap.com)
- [18] R. M. Murray, "CDS 110b," 2006.
- [19] D. P. A. E.-N. Gene Franklin, *Feedback Control of Dynamic Systems 8th Edition*.

### Έλεγχος γραμμικού συστήματος γύρω από σημείο ισορροπίας

- Πίνακας Παρατηρησιμότητας:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{11} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{144 \times 12}$$

Πίνακας  $A$  έχει δοθεί στην σχέση 4.8.

Πίνακας  $C$  επιλέγεται ταυτοτικός  $12 \times 12$ .

Ο πίνακας παρατηρησιμότητας προκύπτει από χρήση της εντολής: `Ob=obsv(A,C)`

Ο βαθμός του πίνακα δίνεται με χρήση της εντολής: `rank(Ob)`

Προκύπτει:  $rank = 12 = number\ of\ states$

Ο πίνακας θεωρείται πλήρους βαθμού όταν ο βαθμός του πίνακα είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος, που είναι 12.

- Πίνακας Ελεγχιμότητας:

$$C = [B \quad A \cdot B \quad A^2 \cdot B \quad \dots \quad A^{11} \cdot B] \in \mathbb{R}^{12 \times 48}$$

Πίνακας  $A$  έχει δοθεί στην σχέση 4.8.

Πίνακας  $B$  έχει δοθεί στη σχέση 4.9.

Ο πίνακας ελεγχιμότητας προκύπτει από χρήση της εντολής: `Co=ctrb(A,B)`

Ο βαθμός του πίνακα δίνεται με χρήση της εντολής: `rank(Co)`

Προκύπτει:  $rank = 12 = number\ of\ states$