



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ  
ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ**

**ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΣΕ ΜΗ  
ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ**

**ΜΕΝΕΛΑΟΣ-ΡΑΦΑΗΛ ΣΑΚΚΑΣ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπουσες**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΦΙΚΑ-ΜΑΡΙΑ ΑΔΑΜ**

**Λαμία, Ιούνιος 2022**





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ**

**ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΣΕ ΜΗ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ**

**ΜΕΝΕΛΑΟΣ-ΡΑΦΑΗΛ ΣΑΚΚΑΣ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπουσες**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΦΙΚΑ-ΜΑΡΙΑ ΑΔΑΜ**

**Λαμία, Ιούνιος 2022**





**UNIVERSITY OF THESSALY  
SCHOOL OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND  
BIOMEDICAL INFORMATICS**

**GENERALIZED INVERSE IN UNDIRECTED GRAPHS**

**MENELAOS-RAFAIL SAKKAS**

**DISSERTATION**

**Supervisors**

**PARASKEVI FIKA-MARIA ADAM**

**Lamia, June 2022**

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις <sup>(1)</sup>, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περι-κλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία: 15/06/2022

Ο Δηλών

Μενέλαος-Ραφαήλ Σακκάς

(1) «Όποια/ος εν γνώσει της/τους δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν η/ο υπαίτια/ος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν της/του ή σε άλλη/ον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτη/ον ή σκόπευε να βλάψει άλλη/ον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.



**ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΣΕ ΜΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΑ  
ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ**

**ΜΕΝΕΛΑΟΣ-ΡΑΦΑΗΛ ΣΑΚΚΑΣ**

**Τριμελής Επιτροπή:**

- 1. Παρασκευή Φίκα**, Διδάσκουσα Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Π.Θ (επιβλέπουσα)
- 2. Μαρία Αδάμ**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Π.Θ (επιβλέπουσα)
- 3. Σωτήριος Τασουλής**, Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Π.Θ





# Περίληψη

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία αναλύονται και υλοποιούνται μέθοδοι και αλγόριθμοι που αποσκοπούν στον υπολογισμό διαφόρων τύπων γενικευμένων αντίστροφων πινάκων οι οποίοι προκύπτουν από μη κατευθυνόμενα γραφήματα. Αρχικά, γίνεται μία αναφορά χρήσιμων εννοιών και ορισμών από τη Θεωρία Γραφημάτων. Έπειτα δίνονται οι ορισμοί διαφόρων τύπων γενικευμένου αντίστροφου οποιουδήποτε πίνακα, καθώς και μέθοδοι υπολογισμού αυτών. Στην συνέχεια, παραθέτονται αλγόριθμοι υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων πινάκων μη κατευθυνόμενων γραφημάτων που έχουν προτάθει στην βιβλιογραφία. Κατασκευάστηκε επίσης ένας αλγόριθμος που υπολογίζει δύο τύπους γενικευμένου αντίστροφου. Κάθε μέθοδος που παρουσιάστηκε και υλοποιήθηκε ακολουθείται από αριθμητικό παράδειγμα. Επιπλέον, όλοι οι υπό μελέτη υλοποιημένοι αλγόριθμοι εξετάστηκαν και συγκρίθηκαν ως προς το χρόνο εκτέλεσής τους με απώτερο σκοπό να αποδοθεί ο πιο αποδοτικός αλγόριθμος. Έπειτα, παρουσιάζονται μέτρα κεντρικότητας γραφημάτων των οποίων ο υπολογισμός προϋποθέτει τον υπολογισμό γενικευμένου αντίστροφου του Laplacian πίνακα και μελετώνται οι ιδιότητές τους. Στην συνέχεια, τα μέτρα κεντρικότητας συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς τη συμπεριφορά τους, τις ιδιότητές τους και την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα. Μελετώνται εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα με σκοπό την εύρεση της πιο σημαντικής κορυφής τους.

**Λέξεις κλειδιά:** Μη κατευθυνόμενο γράφημα, πίνακες γραφημάτων, γενικευμένοι αντίστροφοι, Laplacian πίνακας, μέτρα κεντρικότητας

# Abstract

In this dissertation, methods and algorithms are analyzed and implemented with the purpose of computing various types of generalized inverse of matrices associated with undirected graphs. At first, useful concepts and definitions from Graph Theory are discussed. Afterward, various types of generalized inverse matrices are defined and computational methods of them are defined as well. Then, algorithms for the computation of generalized inverse of matrices associated with undirected graphs, suggested in literature, are quoted. Also, an algorithm which compute two types of generalized inverse is constructed. A numerical example is presented for each method. Furthermore, the under study algorithms are compared with respect to their execution time and the most efficient one is suggested. Then, graph centrality measures that are based on the computation of generalized inverse of the Laplacian matrix are presented and their properties are studied. Then, the centrality measures are compared in terms of their behavior, properties and computational complexity. Finally, applications to real-world networks are studied, for the determination of their most important node.

**Keywords:** Undirected graph, graph matrices, generalized inverses, Laplacian matrix, centrality measures



# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
<b>1 Βασικές έννοιες από την Θεωρία Γραφημάτων</b>	<b>3</b>
1.1 Γράφημα	3
1.2 Αριθμητικές ποσότητες γραφημάτων	5
1.2.1 Βαθμός κορυφής ενός γραφήματος-Μέγιστος/ελάχιστος βαθμός	5
1.2.2 Τάξη και μέγεθος ενός γραφήματος	6
1.2.3 Γειτονιά μίας κορυφής	6
1.2.4 Κυρίαρχη κορυφή-Απομονωμένη κορυφή	6
1.3 Είδη γραφημάτων	7
1.3.1 Μη κατευθυνόμενο γράφημα	7
1.3.2 Απλό γράφημα	7
1.3.3 Συνεκτικό γράφημα	8
1.3.4 Πλήρες γράφημα	8
1.3.5 Γράφημα-Αστέρι	9
1.3.6 Γράφημα-Μονοπάτι	9
1.3.7 Κυκλικό γράφημα	10
1.4 Γραφήματα με βάρη-Γραφήματα με απορρόφηση	11
1.5 Πίνακες γραφημάτων	13
1.5.1 Πίνακας γειτνίασης	13
1.5.2 Πίνακας γειτνίασης σε γράφημα με βάρη	14

1.5.3	Laplacian πίνακας . . . . .	15
1.5.4	Laplacian πίνακας γραφήματος με βάρη . . . . .	15
1.5.5	Πίνακας προσπτώσεων . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Τύποι γενικευμένων αντιστρόφων-Υπολογισμός γενικευμένων αντιστρόφων σε μη κατευθυνόμενα γραφήματα</b>	<b>17</b>
2.1	$I$ -αντίστροφοι πίνακες . . . . .	18
2.2	Τύποι γενικευμένων αντιστρόφων . . . . .	19
2.2.1	Γενικευμένοι αντίστροφοι . . . . .	19
2.2.2	Ανακλαστικοί γενικευμένοι αντίστροφοι (reflexive) . . . . .	21
2.2.3	Μονόπλευροι γενικευμένοι αντίστροφοι . . . . .	24
2.2.4	Αντίστροφος Drazin . . . . .	29
2.2.5	Αντίστροφος Group . . . . .	29
2.3	Ανάλυση ιδιαζουσών τιμών . . . . .	30
2.3.1	Υπολογισμός γενικευμένων αντιστρόφων μέσω της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών. . . . .	33
2.4	Αλγόριθμοι υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων σε πίνακες μη κατευθυνόμενων γραφημάτων . . . . .	36
2.4.1	Υπολογισμός ενός $\{1, 2\}$ -αντίστροφου Laplacian πίνακα . . . . .	36
2.4.2	Υπολογισμός ψευδοαντίστροφου Laplacian πίνακα μέσω της ανάλυσης ιδιαζουσών τιμών . . . . .	43
2.4.3	Υπολογισμός γενικευμένων αντιστρόφων σε μη τετραγωνικούς πίνακες προσπτώσεων . . . . .	46
2.4.4	Υπολογισμός αντίστροφου Group Laplacian πίνακα . . . . .	53
2.4.5	Υπολογισμός Απορροφητικού Γενικευμένου Αντίστροφου (Α.Γ.Α) . . . . .	61
2.5	Σύγκριση αλγορίθμων ως προς τον χρόνο εκτέλεσης . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Μέτρα κεντρικότητας-Εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα</b>	<b>65</b>
3.1	Μέτρα κεντρικότητας . . . . .	65
3.2	Εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα . . . . .	69

<b>Συμπεράσματα</b>	<b>71</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>72</b>
<b>Παράρτημα</b>	<b>74</b>





# Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία, ορίζουμε τον γενικευμένο αντίστροφο ενός πίνακα ο οποίος γενικεύει την έννοια του αντίστροφου πίνακα σε μη τετραγωνικούς πίνακες ή τετραγωνικούς μη αντιστρέψιμους πίνακες. Ο γενικευμένος αντίστροφος ενός πίνακα που συνδέεται με ένα γράφημα όπως ο Laplacian πίνακας μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για το γράφημα όπως για παράδειγμα τον πιο σημαντικό κόμβο στο γράφημα.

Στην βιβλιογραφία και συγκεκριμένα στα βιβλία των [IG03], [RK71] υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος μεθόδων υπολογισμού για τους περισσότερους τύπους γενικευμένων αντίστροφων για τις οποίες θα μιλήσουμε στην παρούσα εργασία δείχνοντας αναλυτικά παραδείγματα. Στην βιβλιογραφία επίσης έχουν δημοσιευτεί αλγόριθμοι οι οποίοι χωρίς να χρησιμοποιούν επαναληπτική διαδικασία υπολογίζουν με χαμηλό υπολογιστικό κόστος τύπους γενικευμένων αντίστροφων από πίνακες οι οποίοι έχουν προκύψει από μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Στόχος αυτής της εργασίας είναι να υλοποιήσουμε αυτούς τους αλγορίθμους με την μορφή πηγαίου εκτελέσιμου κώδικα και να προτείνουμε τον πιο αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού γενικευμένου αντίστροφου από αυτούς που παρουσιάστηκαν. Επίσης, παρουσιάζουμε μέτρα κεντρικότητας γραφημάτων τα οποία στηρίζονται στον υπολογισμό γενικευμένων αντιστρόφων των οποίων μελετάμε τις ιδιότητες. Επιπλέον, δοκιμάζουμε ένα καινούριο μέτρο κεντρικότητας και τα συγκρίνουμε ως προς τις ιδιότητές τους για να προτείνουμε ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό που μπορούμε να εφαρμόσουμε για την εύρεση των πιο σημαντικών κορυφών τους.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία απαρτίζεται από 3 κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο της εργασίας χωρίζεται σε ενότητες των οποίων η αρίθμηση αποτελείται από 2 αριθμούς αλλά και από 3, όπου ο πρώτος μας υποδεικνύει τον αριθμό του κεφαλαίου και ο δεύτερος την σειρά εμφάνισης της ενότητας. Σε κάθε ενότητα υπάρχουν υποενότητες οι οποίες αποτελούνται από 3 αριθμούς όπου

ο πρώτος μας υποδεικνύει το κέφαλο στο οποίο ανήκει η υπονότητα αυτήν, ο 2ος αριθμός την ενότητα στην οποία ανήκει και ο 3ος αριθμός την σειρά εμφάνισης της.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται οι έννοιες και οι ορισμοί της Θεωρίας Γραφημάτων που θα μας χρησιμεύσουν για τις εφαρμογές των μεθόδων και των αλγορίθμων σε πίνακες που προκύπτουν από αυτά.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι τύποι των γενικευμένων αντίστροφων καθώς και οι μέθοδοι υπολογισμού για τον καθένα με αριθμητικά παραδείγματα. Επίσης υλοποιούνται αλγόριθμοι υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων του Laplacian πίνακα και του πίνακα προοπτώσεων ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  και δίνονται παραδείγματα εκτέλεσής τους. Τέλος, οι υπό μελέτη αλγόριθμοι συγκρίνονται ως προς τον χρόνο εκτέλεσής τους

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται μέτρα κεντρικότητας γραφημάτων που προϋποθέτουν την ύπαρξη του γενικευμένου αντίστροφου. Σκοπός αυτών των μέτρων είναι η εύρεση της πιο σημαντικής κορυφής ενός γραφήματος. Δοκιμάζεται επίσης και ένα νέο μέτρο κεντρικότητας. Αφού εφαρμόσουμε αυτά τα μέτρα σε γραφήματα, τα συγκρίνουμε ως προς τις ιδιότητές τους (απόδοση, υπολογιστική πολυπλοκότητα) και προτείνουμε ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό. Τέλος, εφαρμόζοντας έναν αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού μέτρων κεντρικότητας που δεν προϋποθέτει τον υπολογισμό του γενικευμένου αντίστροφου, πραγματοποιούμε εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα.



# Κεφάλαιο 1

## Βασικές έννοιες από την Θεωρία Γραφημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποιους ορισμούς της Θεωρίας Γραφημάτων οι οποίοι είναι πολύ χρήσιμοι για τα κεφάλαια της εργασίας.

### § 1.1 Γράφημα

Πριν δώσουμε τον ορισμό του γραφήματος, θα μιλήσουμε για το πως εξάγουμε το σύνολο  $\binom{S}{2}$  από ένα πεπερασμένο σύνολο  $S$ .

**Ορισμός 1.1.1.** Έστω ένα σύνολο  $S$  το οποίο είναι πεπερασμένο και περιέχει  $n = |S| \geq 1$  στοιχεία [OAg]. Ορίζουμε ως σύνολο  $\binom{S}{2}$ , το σύνολο όλων εκείνων των δυνατών υποσυνόλων 2 στοιχείων του  $S$ . Αυτό υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο.

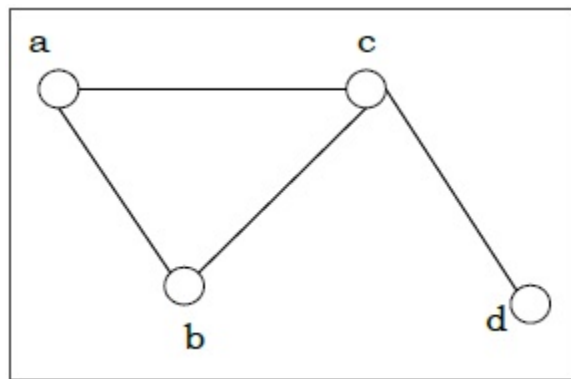
$$\binom{S}{2} = \{\{u, v\} \mid u, v \in S, u \neq v\} \subseteq S \quad (1.1.1)$$

και το πλήθος των στοιχείων του (μετρώντας κάθε  $\{u, v\}$ ), υπολογίζεται ως εξής:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (1.1.2)$$

**Ορισμός 1.1.2.** Ορίζουμε ως **γράφημα**, μια αφηρημένη αναπαράσταση δεδομένων η οποία ορίζεται από 2 σύνολα, το σύνολο κορυφών  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  όπου τα  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ονομάζονται **κορυφές ή κόμβοι** του γραφήματος και το σύνολο ακμών  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subseteq \binom{V}{2}$  όπου κάθε στοιχείο  $e_k = \{v_i, v_j\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  ονομάζεται **ακμή** του γραφήματος [Epp03] [BM08] [Παπ14] [Αλε22]. Ένα γράφημα έχει τον συμβολισμό  $G = (V, E)$ .

**Παράδειγμα 1.1.** Το γράφημα  $G = (V, E)$  που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα έχει 4 κορυφές και 4 ακμές οπότε τα σύνολα κορυφών και ακμών του είναι  $V = \{a, b, c, d\}$  και  $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$  αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1: Ένα γράφημα

**Ορισμός 1.1.3.** **Διαδρομή** σε ένα γράφημα ονομάζεται μία ακολουθία κορυφών και ακμών του όπου μπορούν να επαναλαμβάνονται κορυφές και ακμές. [Epp03] Το πλήθος των ακμών που προσπελαύνονται ονομάζεται **μήκος** της διαδρομής αυτής.

**Παράδειγμα 1.2.** Στο γράφημα του σχήματος 1.1 μία διαδρομή του είναι η

$$(a, \{a, b\}, b, \{b, c\}, c, \{c, b\}, b, \{b, a\}, a)$$

η οποία έχει μήκος ίσο με 4 καθώς έχουν προσπελαστεί 4 ακμές σε αυτήν.

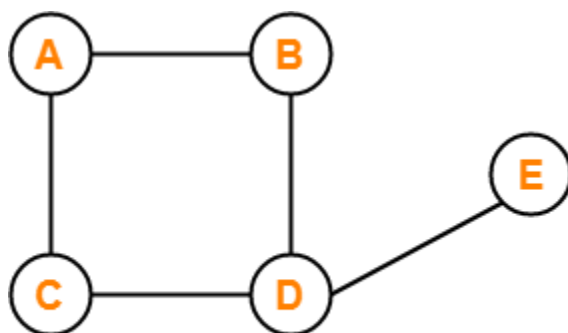
## § 1.2 Αριθμητικές ποσότητες γραφημάτων

Σε αυτήν την ενότητα θα εξηγήσουμε τις ποσότητες που μπορούμε να υπολογίσουμε δεδομένου ενός γραφήματος  $G = (V, E)$ .

### 1.2.1 Βαθμός κορυφής ενός γραφήματος-Μέγιστος/ελάχιστος βαθμός

**Ορισμός 1.2.1.** *Βαθμός* μίας κορυφής  $v$  ενός γραφήματος λέγεται το πλήθος των ακμών οι οποίες εξέρχονται από την  $v$  προς άλλες κορυφές του γραφήματος. Ο βαθμός μίας κορυφής  $v$  ενός γραφήματος συμβολίζεται με  $deg(v)$  [OAg].

**Παράδειγμα 1.3.** Στο γράφημα του παρακάτω σχήματος για τις κορυφές  $A$  και  $D$  ισχύει ότι  $deg(A) = 2$  και  $deg(D) = 3$  καθώς από τις  $A, D$  εξέρχονται 2 και 3 ακμές αντίστοιχα.



Σχήμα 1.2

**Ορισμός 1.2.2.** *Μέγιστος βαθμός* ενός γραφήματος  $n$  κορυφών ονομάζεται η μέγιστη τιμή μεταξύ των βαθμών όλων των κορυφών αυτού [OAg]. Δηλαδή:

$$\Delta(G) = \max\{deg(v_1), deg(v_2), \dots, deg(v_n)\}. \quad (1.2.1)$$

**Ορισμός 1.2.3.** *Ελάχιστος βαθμός* ενός γραφήματος  $n$  κορυφών ονομάζεται η ελάχιστη τιμή μεταξύ των βαθμών όλων των κορυφών αυτού [OAg]. Δηλαδή:

$$\delta(G) = \min\{\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n)\}. \quad (1.2.2)$$

**Παράδειγμα 1.4.** Για το γράφημα στο Σχήμα 1.2 ισχύει ότι  $\Delta(G) = 3$  και  $\delta(G) = 1$ .

## 1.2.2 Τάξη και μέγεθος ενός γραφήματος

**Ορισμός 1.2.4.** *Τάξη* ενός γραφήματος ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του συνόλου κορυφών του [OAg]. Συμβολίζεται με  $n = |V|$ .

**Ορισμός 1.2.5.** *Μέγεθος* ενός γραφήματος ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του συνόλου ακμών του [OAg]. Συμβολίζεται με  $m = |E|$ .

## 1.2.3 Γειτονιά μίας κορυφής

**Ορισμός 1.2.6.** *Γειτονιά* μιας κορυφής  $v$  ονομάζεται το σύνολο  $N(v) \subseteq V$  στο οποίο ανήκουν όλες εκείνες οι κορυφές με τις οποίες η κορυφή  $v$  συνδέεται με ακμή [OAg].

**Πόρισμα 1.2.7.** Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου  $N(v)$  ισούται με τον βαθμό της κορυφής δηλαδή  $\deg(v) = |N(v)|$ .

## 1.2.4 Κυρίαρχη κορυφή-Απομονωμένη κορυφή

**Ορισμός 1.2.8.** *Κυρίαρχη κορυφή* ενός γραφήματος  $n$  κορυφών, λέγεται μία κορυφή  $v$  για την οποία ισχύει  $\deg(v) = n - 1$  [OAg].

**Ορισμός 1.2.9.** *Απομονωμένη κορυφή* ενός γραφήματος  $n$  κορυφών, λέγεται μία κορυφή  $v$  για την οποία ισχύει  $\deg(v) = 0$  [OAg].

**Λήμμα 1.2.10.** Έστω ένα γράφημα  $n$  κορυφών. Το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του ισούται με το διπλάσιο του μεγέθους του. Αυτό το λήμμα, είναι γνωστό και ως *Λήμμα της χειραψίας* [Epp03].

## § 1.3 Είδη γραφημάτων

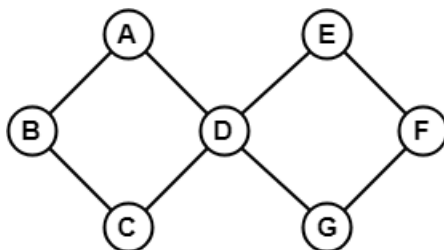
Στην παρούσα ενότητα θα αναφέρουμε τα είδη γραφημάτων τα οποία βρίσκουν εφαρμογή στα επόμενα κεφάλαια αυτής της εργασίας. Τα γραφήματα αυτής της εργασίας είναι μη κατευθυνόμενα, απλά και συνεκτικά.

### 1.3.1 Μη κατευθυνόμενο γράφημα

**Ορισμός 1.3.1.** Ένα γράφημα λέγεται **μη κατευθυνόμενο** όταν οι ακμές του δεν είναι προσανατολισμένες [Epp03] [BM08]. Ισχύει ότι:

$$\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\} \forall v_i, v_j \in V \quad (1.3.1)$$

**Παράδειγμα 1.5.** Το γράφημα που δίνεται στο παρακάτω σχήμα είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα.



Σχήμα 1.3

### 1.3.2 Απλό γράφημα

Ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται **απλό** όταν δεν υπάρχουν σε αυτό βρόχοι ή παράλληλες ακμές [Epp03]. Ισχύει ότι:

$$\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\} \forall v_i, v_j \in V, i \neq j \quad (1.3.2)$$



**Παράδειγμα 1.6.** Το γράφημα του Σχήματος 1.3 είναι ένα απλό γράφημα καθώς δεν έχει βρόχους ή παράλληλες ακμές.

### 1.3.3 Συνεκτικό γράφημα

**Ορισμός 1.3.2.** Ένα απλό και μη κατευθυνόμενο γράφημα λέγεται **συνεκτικό** όταν από κάθε κορυφή του, υπάρχει διαδρομή προς όλες τις άλλες κορυφές [Deo74].

**Παράδειγμα 1.7.** Το γράφημα του Σχήματος 1.3 είναι συνεκτικό γράφημα γιατί από καθεμία από τις 7 κορυφές του υπάρχει διαδρομή προς τις υπόλοιπες κορυφές.

### 1.3.4 Πλήρες γράφημα

**Ορισμός 1.3.3.** **Πλήρες γράφημα** ονομάζεται το γράφημα στο οποίο κάθε ζεύγος των κορυφών του συνδέεται με ακμή [BM08]. Συμβολίζεται με  $K_n$  όπου  $n$  το πλήθος των κορυφών ή τάξη του γραφήματος. Ισχύει ότι:

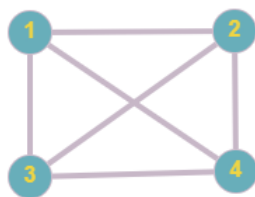
$$E = \binom{V}{2} \quad (1.3.3)$$

και

$$|E| = m = \frac{n(n-1)}{2} \quad (1.3.4)$$

Η (1.3.3) προέκυψε λόγω της (1.1.1) διότι όλα τα δυνατά υποσύνολα 2 στοιχείων του συνόλου κορυφών  $V$  αναπαριστούν όλες τις ακμές του γραφήματος. Η (1.3.4) προέκυψε λόγω της (1.1.2).

**Παράδειγμα 1.8.** Το γράφημα το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, είναι ένα πλήρες γράφημα 4 κορυφών ( $K_4$ ). Όπως παρατηρείται, σε κάθε δυνατό ζεύγος των κορυφών του 1, 2, 3, 4 υπάρχει σύνδεση με ακμή.



Σχήμα 1.4: Ένα πλήρες γράφημα 4 κορυφών

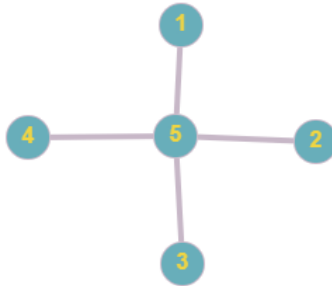
### 1.3.5 Γράφημα-Αστέρι

**Ορισμός 1.3.4.** Ένα γράφημα  $n$  κορυφών, ονομάζεται **γράφημα-αστέρι** όταν για τους βαθμούς κάθε κορυφής του  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ισχύει ότι

$$\deg(1) = 1, \deg(2) = 1, \dots, \deg(n-1) = 1, \deg(n) = n-1. \quad (1.3.5)$$

Ονομάζεται έτσι λόγω του ότι η σχηματική του αναπαράσταση έχει το σχήμα ενός αστεριού  $n-1$  ακτινών. Τα γραφήματα αυτά έχουν τον συμβολισμό  $S_{n-1}$ .

**Παράδειγμα 1.9.** Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται ένα γράφημα-αστέρι 4 ακτινών  $S_4$ .



Σχήμα 1.5: Ένα γράφημα-αστέρι

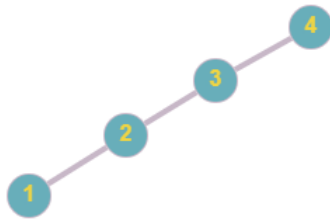
### 1.3.6 Γράφημα-Μονοπάτι

**Ορισμός 1.3.5.** Ένα γράφημα  $n$  κορυφών, ονομάζεται **γράφημα-μονοπάτι** όταν για τους βαθμούς κάθε κορυφής του  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ισχύει ότι

$$\deg(1) = 1, \deg(2) = 2, \dots, \deg(n-1) = 2, \deg(n) = 1. \quad (1.3.6)$$

Αυτά τα γραφήματα συμβολίζονται με  $P_n$ .

**Παράδειγμα 1.10.** Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται ένα γράφημα-μονοπάτι 4 κορυφών  $P_4$ .



Σχήμα 1.6: Ένα γράφημα-μονοπάτι

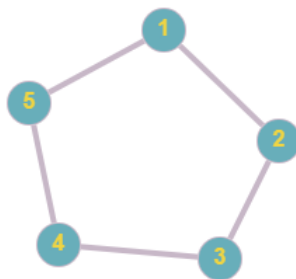
### 1.3.7 Κυκλικό γράφημα

**Ορισμός 1.3.6.** Ένα γράφημα  $n$  κορυφών, ονομάζεται **κυκλικό γράφημα** όταν για τους βαθμούς κάθε κορυφής του  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ισχύει ότι

$$\deg(1) = \deg(2) = \dots = \deg(n - 1) = \deg(n) = 2. \quad (1.3.7)$$

Στην ουσία πρόκειται για ένα γράφημα-μονοπάτι με την διαφορά ότι υπάρχει σύνδεση της κορυφής 1 με την κορυφή  $n$  και αυτό έχει αποτέλεσμα το γράφημα αυτό να σχηματίζει έναν κύκλο. Αυτά τα γραφήματα συμβολίζονται με  $C_n$ .

**Παράδειγμα 1.11.** Στο παρακάτω σχήμα, φαίνεται ένα κυκλικό γράφημα 5 κορυφών  $C_5$ .



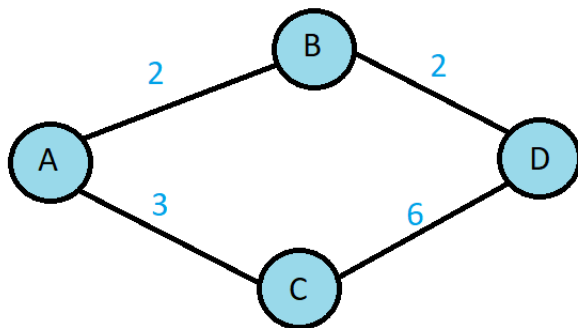
Σχήμα 1.7: Ένα κυκλικό γράφημα

## § 1.4 Γραφήματα με βάρη-Γραφήματα με απορρόφηση

Σε αυτήν την ενότητα θα μιλήσουμε για δυο ειδικές κατηγορίες γραφημάτων οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως με σκοπό την αναπαράσταση γραφημάτων δικτύων.

**Ορισμός 1.4.1.** Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$   $n$  κορυφών και  $m$  ακμών. Το γράφημα αυτό θα λέγεται **γράφημα με βάρη** αν επιπλέον εκτός από τα σύνολα  $V, E$  αυτό ορίζεται και από ένα διάνυσμα  $\vec{w} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \in \mathbb{R}^m$ . Κάθε στοιχείο του  $w_1, w_2, \dots, w_m$ , ονομάζεται **βάρος** των ακμών του  $e_1, e_2, \dots, e_m$  αντίστοιχα [Epp03] [Deo74]. Τα γραφήματα αυτά ορίζονται με την μορφή  $G = (V, E, \vec{w})$ .

**Παράδειγμα 1.12.** Το γράφημα του παρακάτω σχήματος είναι ένα γράφημα το οποίο έχει βάρη στις 4 ακμές του. Το διάνυσμα  $\vec{w} \in \mathbb{R}^4$  ισούται με  $\vec{w} = [2, 3, 2, 6]^T$



Σχήμα 1.8

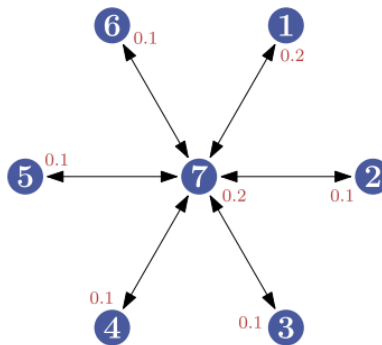
**Ορισμός 1.4.2.** Ο **βαθμός** μίας κορυφής  $v$  ενός γραφήματος  $n$  κορυφών με βάρη, υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\text{deg}(v) = \sum_{v_k \in N(v_i)} w_{e=\{v_i, v_k\}=\{v_k, v_i\}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.4.1)$$

όπου  $N(v_i)$  η γειτονιά της κορυφής  $v_i$ .

**Ορισμός 1.4.3.** Έστω ένα γράφημα  $G = (V, E)$  το οποίο έχει  $n$  κορυφές. Αυτό το γράφημα θα λέγεται **γράφημα με απορρόφηση** αν επιπλέον εκτός από τα σύνολα  $V, E$  ορίζουμε και ένα διάνυσμα  $\vec{d} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T \in \mathbb{R}^n$  το οποίο λέγεται **διάνυσμα απορρόφησης** [JT18] [BFM19]. Κάθε ένα από τα στοιχεία του  $d_1, d_2, \dots, d_n$  ονομάζονται **βαθμοί απορρόφησης** των κορυφών  $v_1, v_2, \dots, v_n$  αντίστοιχα. Τα γραφήματα αυτά συμβολίζονται με  $(G, \vec{d})$ .

**Παράδειγμα 1.13.** Το γράφημα-αστέρι  $S_6$  του παρακάτω σχήματος ορίζει ένα γράφημα με απορρόφηση. Από τις τιμές που αναγράφονται σε κάθε κορυφή του γραφήματος αυτού, συμπεραίνουμε ότι το γράφημα έχει διάνυσμα απορρόφησης  $\vec{d} = [0.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2]^T$ .



Σχήμα 1.9: Ένα γράφημα με απορρόφηση

## § 1.5 Πίνακες γραφημάτων

Κάθε μη κατευθυνόμενο γράφημα, εκτός από τα σύνολα κορυφών και ακμών του, μπορεί να αναπαρασταθεί και από διδιάστατους πίνακες. Σε αυτήν την ενότητα θα μιλήσουμε για αυτούς τους πίνακες καθώς και για τις πληροφορίες που μπορούμε να εξάγουμε μέσω αυτών για ένα γράφημα.

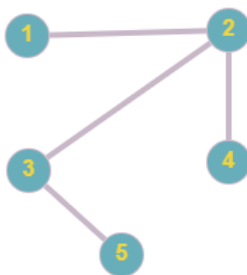
### 1.5.1 Πίνακας γειτνίασης

**Ορισμός 1.5.1.** Πίνακας γειτνίασης ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G = (V, E)$   $n$  κορυφών, ονομάζεται ένας συμμετρικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  όπου κάθε στοιχείο του  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$  υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο [Epp03] [BM08]:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases} \quad (1.5.1)$$

**Παρατήρηση 1.1.** Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής  $i = 1, 2, \dots, n$  του πίνακα γειτνίασης ενός γραφήματος ισούται με τον βαθμό της κορυφής  $v_i$ ,  $\deg(v_i)$ .

**Παράδειγμα 1.14.** Στο γράφημα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, ο πίνακας γειτνίασης του  $A$  βάσει της (1.5.1) είναι ο παρακάτω:



Σχήμα 1.10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Παρατήρηση 1.2.** Κάθε στοιχείο  $a_{ij}$  του πίνακα γειτνίασης  $A$ , ισούται με το πλήθος των διαδρομών μήκους 1 από την κορυφή  $v_i$  στην κορυφή  $v_j$ . Αν όμως υπολογίσουμε τον πίνακα  $A^k$  τότε κάθε στοιχείο του πίνακα αυτού ισούται με το πλήθος των διαδρομών μήκους  $k$  από την κορυφή  $v_i$  στην κορυφή  $v_j$ .

### 1.5.2 Πίνακας γειτνίασης σε γράφημα με βάρη

**Ορισμός 1.5.2.** Πίνακας γειτνίασης ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος με βάρη  $G = (V, E, \bar{w})$  ονομάζεται ο συμμετρικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  όπου κάθε στοιχείο του  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$  υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_k, & e_k = \{v_i, v_j\} \in E, k = 1, 2, \dots, m, \\ 0, & \{v_i, v_j\} \notin E. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

**Παράδειγμα 1.15.** Στο γράφημα με βάρη του Σχήματος 1.8, ο πίνακας γειτνίασής του  $A$  βάσει της (1.5.2) είναι ο παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Να σημειωθεί ότι οι παρατηρήσεις 1.1 και 1.2 ισχύουν και για τους πίνακες γειτνίασης γραφημάτων με βάρη.

### 1.5.3 Laplacian πίνακας

**Ορισμός 1.5.3.** *Laplacian πίνακας* ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $G = (V, E)$   $n$  κορυφών ονομάζεται ο συμμετρικός πίνακας  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ο οποίος υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο [OAg] [BFM20]:

$$L = Deg - A, \quad (1.5.3)$$

όπου  $Deg = \text{diag}(\text{deg}(v_1), \text{deg}(v_2), \dots, \text{deg}(v_n))$  και  $A$  ο πίνακας γειτνίασης του  $G$ . Κάθε στοιχείο του  $l_{ij}$  μπορεί επίσης να υπολογιστεί ως εξής:

$$l_{ij} = \begin{cases} \text{deg}(v_i), & i = j \\ -1, & i \neq j \wedge v_i \sim v_j \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (1.5.4)$$

**Παράδειγμα 1.16.** Ο Laplacian πίνακας του γραφήματος στο Σχήμα 1.10 υπολογίζεται ως εξής από τον πίνακα γειτνίασής του και την (1.5.3):

$$L = Deg - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.5.4 Laplacian πίνακας γραφήματος με βάρη

**Ορισμός 1.5.4.** *Laplacian πίνακας* ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος με βάρη  $G = (V, E, \vec{w})$   $n$  κορυφών ονομάζεται ο συμμετρικός πίνακας  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ο οποίος υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο [BFM19]:

$$L = W - A, \quad (1.5.5)$$

όπου  $W = \text{diag}(\text{deg}(v_1), \text{deg}(v_2), \dots, \text{deg}(v_n))$  και  $A$  ο πίνακας γειτνίασης του  $G$ . Κάθε στοιχείο του  $l_{ij}$  μπορεί επίσης να υπολογιστεί ως εξής:



$$l_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j \\ -a_{ij}, & i \neq j \wedge v_i \sim v_j \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \quad (1.5.6)$$

**Παράδειγμα 1.17.** Ο Laplacian πίνακας του γραφήματος στο σχήμα 1.8 υπολογίζεται ως εξής:

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

#### Ιδιότητες του Laplacian πίνακα

- Για κάθε Laplacian πίνακα  $L$  ισχύει ότι  $tr(L) = 2m$ , όπου  $m$  το πλήθος των ακμών ή μέγεθος του γραφήματος.
- Ο Laplacian πίνακας είναι πάντα μη αντιστρέψιμος πίνακας.
- Ο Laplacian πίνακας έχει πάντα κυρίαρχη διαγώνιο δηλαδή ισχύει ότι  $|l_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |l_{ij}|$ .
- Ο Laplacian πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές ή 0.

### 1.5.5 Πίνακας προσπτώσεων

**Ορισμός 1.5.5.** Πίνακας προσπτώσεων ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος γραφήματος  $n$  κορυφών και  $m$  ακμών, ονομάζεται ο πίνακας  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  του οποίου κάθε στοιχείο  $b_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$  υπολογίζεται από τον τύπο:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η κορυφή } v_i \text{ είναι άκρο της } e_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (1.5.7)$$

## **Κεφάλαιο 2**

### **Τύποι γενικευμένων**

### **αντιστρόφων-Υπολογισμός γενικευμένων**

### **αντιστρόφων σε μη κατευθυνόμενα**

### **γραφήματα**

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για τους τύπους των γενικευμένων αντιστρόφων και θα παρουσιαστούν αλγόριθμοι υπολογισμού τους από πίνακες μη κατευθυνόμενων γραφημάτων.

## § 2.1 $I$ –αντίστροφοι πίνακες

**Ορισμός 2.1.1.** Έστω πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Ο πίνακας  $A^g \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ονομάζεται  $I$ –αντίστροφος πίνακας του  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  [RK71] [IG03] [CJ91], αν ικανοποιεί κάποιο υποσύνολο  $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$  των συνθηκών που δίνονται παρακάτω

$$AA^gA = A \quad (2.1.1)$$

$$A^gAA^g = A^g \quad (2.1.2)$$

$$(AA^g)^T = AA^g \quad (2.1.3)$$

$$(A^gA)^T = A^gA \quad (2.1.4)$$

οι οποίες ονομάζονται **συνθήκες Penrose** [IG03]. Κάθε  $I$ –αντίστροφος πίνακας πρέπει να ικανοποιεί την 2.1.1

Ο πίνακας  $A^g$ , δεδομένου ενός πίνακα  $A$  δεν είναι μοναδικός εκτός ορισμένων περιπτώσεων όπως ο αντίστροφος Group και ο Moore-Penrose αντίστροφος ή ψευδοαντίστροφος. Ο ορισμός 2.1.1 ισχύει και σε περίπτωση μη αντιστρέψιμου τετραγωνικού πίνακα. Σε περίπτωση που ο πίνακας αντιστρέφεται τότε ο  $A^g$  συμπίπτει με τον αντίστρόφό του  $A^{-1}$ .

**Παράδειγμα 2.1.** Έστω οι πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  και  $A^g \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και ότι ο  $A^g$  ικανοποιεί μόνο την 1η (2.1.1) και την 3η (2.1.3) συνθήκη Penrose. Τότε βάσει του Ορισμού 2.1.1 ο πίνακας  $A^g$  θα είναι ένας  $\{1, 3\}$ –αντίστροφος του πίνακα  $A$ .

## § 2.2 Τύποι γενικευμένων αντιστρώφων

Σε αυτήν την ενότητα θα δώσουμε τους ορισμούς των τύπων γενικευμένων αντιστρώφων καθώς και μεθόδους υπολογισμού αυτών που έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία.

### 2.2.1 Γενικευμένοι αντίστροφοι

**Ορισμός 2.2.1.** *Γενικευμένοι αντίστροφοι* λέγονται εκείνοι οι πίνακες  $A^g$  οι οποίοι θα πρέπει να ικανοποιούν μόνο την 1η (2.1.1) από τις συνθήκες του Penrose [IG03] [Kyr21].

#### Μέθοδος υπολογισμού ενός γενικευμένου αντίστροφου

Η παρακάτω μέθοδος, δεδομένου ενός τετραγωνικού μη αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , υπολογίζει έναν γενικευμένο αντίστροφο ή  $\{1\}$ -αντίστροφο του πίνακα  $A$  μέσω της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του πίνακα  $A$  [BFM20]. Τα βήματα της μεθόδου δίνονται σε γλώσσα Matlab.

- $A_{aug} = [A \text{ eye}(n)]$  (Υπολογίζουμε τον  $n \times 2n$  επαυξημένο πίνακα)
- $B = \text{rref}(A_{aug})$  [Μετατρέπουμε τον επαυξημένο σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (reduced row echelon form)]
- $A_g = B(:, n + 1 : 2n)$  (Υπολογίζουμε τον  $\{1\}$ - αντίστροφο του πίνακα  $A$ )
- Ελέγχουμε εάν ικανοποιείται μόνο η πρώτη συνθήκη Penrose (2.1.1).

**Παράδειγμα 2.2.** Έστω ο παρακάτω μη αντιστρέψιμος  $4 \times 4$  πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί ένας  $\{1\}$ -αντίστροφος πίνακας του πίνακα  $A$  χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο υπολογισμού ενός γενικευμένου αντίστροφου.

### Λύση

Υπολογίζουμε τον  $4 \times 8$  επαυξημένο πίνακα  $A_{aug}$ . Έχουμε:

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στην συνέχεια, εκτελώντας στο Matlab την έκφραση για τον υπολογισμό της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής του επαυξημένου πίνακα  $A_{aug}$  παίρνουμε ως αποτέλεσμα:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.6667 & -0.3333 & -1.6667 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -0.3333 & 0.3333 & -1.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για τον πίνακα  $A^g$  έχουμε ότι:

$$A^g = B(:, n+1 : 2n) = B(:, 5 : 8) = \begin{bmatrix} 0 & -0.6667 & -0.3333 & -1.6667 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -0.3333 & 0.3333 & -1.3333 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για να ελέγξουμε αν το αποτέλεσμα μας είναι σωστό, θα πρέπει να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιείται μόνο η 1η συνθήκη του Penrose (2.1.1). Είναι:

$$\begin{aligned}
 P_1 = AA^g A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A \\
 P_2 = A^g AA^g &= \begin{bmatrix} -1 & -1.6667 & -1.3333 & -2.6667 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1.3333 & -0.6667 & -2.3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A^g \\
 P_3 = AA^g &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq (AA^g)^T \\
 P_4 = A^g A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq (A^g A)^T
 \end{aligned}$$

άρα ο πίνακας  $A^g$  είναι ένας  $\{1\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$ .

## 2.2.2 Ανακλαστικοί γενικευμένοι αντίστροφοι (reflexive)

**Ορισμός 2.2.2.** Ανακλαστικοί γενικευμένοι αντίστροφοι λέγονται εκείνοι οι πίνακες  $A^g$  οι οποίοι πρέπει να ικανοποιούν μόνο την 1η (2.1.1) και την 2η (2.1.2) από τις συνθήκες του Penrose [RK71] [IG03]. Οι πίνακες αυτοί είναι και γενικευμένοι αντίστροφοι λόγω της (2.1.1).

### Μέθοδος υπολογισμού ενός ανακλαστικού γενικευμένου αντίστροφου

Η παρακάτω μέθοδος δεδομένου ενός τετραγωνικού μη αντιστρέψιμου πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $\text{rank}(A) = n - 1$ , υπολογίζει έναν ανακλαστικό γενικευμένο αντίστροφο ή  $\{1, 2\}$ -αντίστροφο του πίνακα  $A$  [BFM20].

- Από τον πίνακα  $A$  εξάγουμε τον υποπίνακα (έστω  $A_0$ ) που προκύπτει διαγράφοντας την  $n$ -οστή γραμμή και την  $n$ -οστή στήλη του πίνακα  $A$ . Δηλαδή έχουμε έναν πίνακα διαστάσεων  $(n - 1) \times (n - 1)$ .
- Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του  $A_0$ ,  $A_0^{-1}$ .
- Κατασκευάζουμε τον  $\{1, 2\}$ -αντίστροφο του πίνακα  $A$ ,  $A^g$  με την εξής μορφή:

$$A^g = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbb{O}_{1 \times (n-1)} & 0 \end{bmatrix}.$$

**Παράδειγμα 2.3.** Έστω ο παρακάτω μη αντιστρέψιμος  $3 \times 3$  τετραγωνικός πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί ένας  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$  χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο υπολογισμού ενός ανακλαστικού γενικευμένου αντίστροφου.

#### Λύση

Ο βαθμός του πίνακα  $A$  είναι  $\text{rank}(A) = 2$ . Διαγράφοντας την 3η γραμμή και 3η στήλη του πίνακα  $A$  ο πίνακας  $A_0$  που προκύπτει είναι:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα αυτόν ισχύει ότι  $\det(A_0) = 3 - (-32) = 35 \neq 0$  άρα ο αντίστροφος του  $A_0^{-1}$  υπολογίζεται ως εξής:

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{35} & -\frac{8}{35} \\ \frac{4}{35} & \frac{3}{35} \end{bmatrix}$$

άρα ο ανακλαστικός γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα  $A$  είναι ο:

$$A^g = \begin{bmatrix} A_0^{-1} & \mathbb{O}_{2 \times 1} \\ \mathbb{O}_{1 \times 2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{35} & -\frac{8}{35} & 0 \\ \frac{4}{35} & \frac{3}{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να ελέγξουμε αν το αποτέλεσμα μας είναι σωστό, πρέπει να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιούνται οι 2 πρώτες συνθήκες του Penrose (2.1.1), (2.1.2). Έχουμε:

$$P_1 = AA^gA = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$P_2 = A^gAA^g = \begin{bmatrix} \frac{1}{35} & -\frac{8}{35} & 0 \\ \frac{4}{35} & \frac{3}{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A^g$$

$$P_3 = AA^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq (AA^g)^T$$

$$P_4 = A^gA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq (A^gA)^T$$

άρα ο πίνακας  $A^g$  είναι ένας  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$ .



### 2.2.3 Μονόπλευροι γενικευμένοι αντίστροφοι

Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \neq m$ . Οι **μονόπλευροι γενικευμένοι αντίστροφοι**  $A^g \in \mathbb{R}^{m \times n}$  του πίνακα αυτού χωρίζονται σε 2 κατηγορίες, τους δεξιούς αντίστροφους και τους αριστερούς αντίστροφους [IG03] [RK71].

#### Δεξιοί αντίστροφοι

**Ορισμός 2.2.3.** *Δεξιοί αντίστροφοι* ονομάζονται όλοι εκείνοι οι πίνακες  $A_R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  οι οποίοι ικανοποιούν τις 3 πρώτες συνθήκες του Penrose (2.1.1), (2.1.2), και (2.1.3) καθώς επίσης και την σχέση  $AA_R = I_n$  όπου  $I_n$  ο  $n \times n$  ταυτοτικός πίνακας [IG03] [RK71].

#### Αριστεροί αντίστροφοι

**Ορισμός 2.2.4.** *Αριστεροί αντίστροφοι* ονομάζονται όλοι εκείνοι οι πίνακες  $A_L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες του Penrose (2.1.1), (2.1.2), και (2.1.4) καθώς επίσης και την σχέση  $A_L A = I_m$  όπου  $I_m$  ο  $m \times m$  ταυτοτικός πίνακας [IG03] [RK71].

#### Μέθοδος υπολογισμού μονόπλευρων αντιστρόφων

Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  για τον οποίο ισχύει ότι  $\text{rank}(A) = \min\{m, n\}$ . Για την μέθοδο αυτή διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, την περίπτωση όπου  $n < m$  και την περίπτωση όπου  $n > m$  [Kyr21].

#### Περίπτωση $n < m$ (Δεξιός αντίστροφος)

- Αφού υπολογίσουμε τον βαθμό του πίνακα  $A$ ,  $\text{rank}(A)$  εξάγουμε όλους τους υποπίνακες διαστάσεων  $(\text{rank}(A)) \times (\text{rank}(A))$  των οποίων το πλήθος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \binom{n}{\text{rank}(A)} \binom{m}{\text{rank}(A)}. \quad (2.2.1)$$

- Για κάθε υποπίνακα  $A_N$  υπολογίζουμε τον αντίστροφο του  $A_N^{-1}$  και παίρνουμε τον ανάστροφο αυτού  $(A_N^{-1})^T$ .

- Τοποθετούμε τις στήλες του  $(A_N^{-1})^T$  στις αντίστοιχες στήλες του πίνακα  $A$  από τις οποίες αποτελείται ο υποπίνακας  $A_N$  και στις υπόλοιπες στήλες βάζουμε την τιμή 0. Αυτόν τον πίνακα τον ονομάζουμε  $B$ .
- Υπολογίζουμε τον πίνακα  $A_R$  ως εξής

$$A_R = B^T,$$

ο οποίος είναι ένας  $\{1, 2, 3\}$ -αντίστροφος ή Δεξιός αντίστροφος του πίνακα  $A$  καθ'ότι ισχύει  $AA_R = I_n$ .

#### Περίπτωση $n > m$ (Αριστερός αντίστροφος)

- Αφού υπολογίσουμε τον βαθμό του πίνακα  $A$ ,  $\text{rank}(A)$  εξάγουμε όλους τους υποπίνακες διαστάσεων  $(\text{rank}(A)) \times (\text{rank}(A))$  των οποίων το πλήθος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$N = \binom{n}{\text{rank}(A)} \binom{m}{\text{rank}(A)}. \quad (2.2.2)$$

- Για κάθε υποπίνακα  $A_N$  υπολογίζουμε τον αντίστροφο του  $A_N^{-1}$  και παίρνουμε τον ανάστροφο αυτού  $(A_N^{-1})^T$ .
- Εδώ αυτό που αλλάζει είναι ότι τώρα τοποθετούμε τις γραμμές του πίνακα  $(A_N^{-1})^T$  στις αντίστοιχες γραμμές από τις οποίες αποτελείται ο υποπίνακας  $A_N$  και στις υπόλοιπες γραμμές βάζουμε την τιμή 0. Αυτόν τον πίνακα τον ονομάζουμε  $C$ .
- Υπολογίζουμε τον πίνακα  $A_L$  ως εξής

$$A_L = C^T,$$

ο οποίος είναι ένας  $\{1, 2, 4\}$ -αντίστροφος ή Αριστερός αντίστροφος του πίνακα  $A$  καθ'ότι ισχύει  $A_L A = I_m$ .

**Παράδειγμα 2.4.** Έστω ο παρακάτω πίνακας διαστάσεων  $2 \times 3$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -8 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Να χαρακτηριστεί το είδος του πίνακα  $A^g$  και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο  $A^g$  χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο υπολογισμού μονόπλευρων αντιστροφών.

### Λύση

Για τον πίνακα  $A$  έχουμε ότι  $n = 2$  και  $m = 3$  δηλαδή βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου  $n < m$  άρα ο πίνακας  $A^g = A_R$  θα είναι ένας  $\{1, 2, 3\}$ -αντίστροφος (δεξιός αντίστροφος) του πίνακα  $A$ . Ο βαθμός του πίνακα  $A$ ,  $\text{rank}(A)$  είναι  $\text{rank}(A) = \min\{2, 3\} = 2$  οπότε το πλήθος των δυνατών υποπινάκων διαστάσεων  $2 \times 2$  από την (2.2.1) είναι:

$$N = \binom{2}{2} \binom{3}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} \cdot \frac{3!}{2!(3-2)!} = 1 \cdot 3 = 3 \text{ υποπίνακες}$$

οι οποίοι είναι οι εξής:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{bmatrix},$$

και για τους οποίους έχουμε ότι  $\det(A_1) = 7$ ,  $\det(A_2) = 2$ ,  $\det(A_3) = -1$ . Οπότε οι αντίστροφοι των 3 αυτών πινάκων υπολογίζονται παρακάτω:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}, A_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

$$A_3^{-1} = (-1) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}.$$

Παίρνουμε τους αναστρόφους πίνακές τους:

$$(A_1^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{8}{7} \\ -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}, (A_2^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}, (A_3^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Επειδή ζητείται να υπολογίσουμε μόνο έναν πίνακα  $A^g$  θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $B$  με βάση τον  $(A_1^{-1})^T$ . Ο υποπίνακας  $A_1$  αποτελείται από την 1η και 2η στήλη του πίνακα  $A$  επομένως θα πρέπει στον πίνακα  $B$  οι στήλες του  $(A_1^{-1})^T$  (κοιτώντας από αριστερά προς τα δεξιά) να τοποθετηθούν αντίστοιχα στην 1η και 2η στήλη του πίνακα  $B$ . Η στήλη που περισσεύει θα πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ο πίνακας  $B$  είναι ο:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & \frac{8}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Οπότε ο πίνακας  $A^g = A_R$  υπολογίζεται ως εξής:

$$A_R = B^T = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{8}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα  $B$  με βάση τους πίνακες  $(A_2^{-1})^T$  και  $(A_3^{-1})^T$ .

**Παράδειγμα 2.5.** Έστω ο παρακάτω πίνακας διαστάσεων  $3 \times 2$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Να χαρακτηριστεί το είδος του πίνακα  $A^g$  και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο  $A^g$  χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο υπολογισμού μονόπλευρων αντιστρόφων.

### Λύση

Για αυτόν τον πίνακα έχουμε ότι  $n = 3$  και  $m = 2$  άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου  $n > m$  επομένως ο πίνακας  $A^g$  θα είναι ένας  $\{1, 2, 4\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$  (αριστερός αντίστροφος). Εφόσον ο βαθμός του πίνακα  $A$ ,  $\text{rank}(A)$  είναι  $\text{rank}(A) = \min\{3, 2\} = 2$  το πλήθος των  $2 \times 2$  υποπινάκων υπολογίζεται από την (2.2.2) ως εξής:

$$N = \binom{3}{2} \binom{2}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{2!}{2!(2-2)!} = 3 \cdot 1 = 3 \text{ υποπίνακες}$$

οι οποίοι είναι

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -5 & -9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

για τους οποίους έχουμε ότι  $\det(A_1) = -3$ ,  $\det(A_2) = 5$ ,  $\det(A_3) = -14$ . Οπότε οι αντίστροφοι των πινάκων αυτών υπολογίζονται ως:

$$\begin{aligned} A_1^{-1} &= -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \\ A_2^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \\ A_3^{-1} &= -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{9}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Οι ανάστροφοι αυτών είναι:

$$(A_1^{-1})^T = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, (A_2^{-1})^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, (A_3^{-1})^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{9}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}.$$

Επειδή στο παράδειγμα ζητείται να υπολογίσουμε μόνο έναν πίνακα  $A^g$  θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $C$  με βάση τον  $(A_1^{-1})^T$ . Ο υποπίνακας  $A_1$  αποτελείται από την 1η και 2η γραμμή του πίνακα  $A$  επομένως θα πρέπει στον πίνακα  $C$  οι γραμμές του  $(A_1^{-1})^T$  (κοιτώντας από πάνω προς τα κάτω) να τοποθετηθούν αντίστοιχα στην 1η και 2η γραμμή του. Η γραμμή που περισσέυει θα πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ο πίνακας  $C$  είναι ο ακόλουθος:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $A^g = A_L$  υπολογίζεται παρακάτω:

$$A_L = C^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

## 2.2.4 Αντίστροφος Drazin

**Ορισμός 2.2.5.** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ένας μη αντιστρέψιμος πίνακας και έστω ένας μη αρνητικός αριθμός  $k$ , που ονομάζεται δείκτης, έτσι ώστε να ισχύει  $\text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k)$  [IG03]. Ορίζουμε ως **αντίστροφο Drazin** τον πίνακα  $A^D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ο οποίος ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$A^{k+1}A^D = A^k \tag{2.2.3}$$

$$A^D A A^D = A^D \tag{2.2.4}$$

$$A A^D = A^D A \tag{2.2.5}$$

## 2.2.5 Αντίστροφος Group

**Ορισμός 2.2.6.** Ως **αντίστροφο Group** ορίζουμε μια κατηγορία του αντιστρόφου Drazin όπου ο δείκτης  $k$  παίρνει τις τιμές 0 ή 1. Στην βιβλιογραφία [IG03] [RK71], για τον αντίστροφο Group χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $A^\#$ . Για τον αντίστροφο Group οι (2.2.3), (2.2.4) και (2.2.5) γίνονται ως εξής:

$$AA^{\#}A = A, \quad (2.2.6)$$

$$A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}, \quad (2.2.7)$$

$$AA^{\#} = A^{\#}A. \quad (2.2.8)$$

Από τις (2.2.6) και (2.2.7) συμπεραίνουμε ότι ο αντίστροφος Group  $A^{\#}$  είναι ένας ανακλαστικός γενικευμένος αντίστροφος ή  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$  με την διαφορά ότι ο αντίστροφος Group είναι μοναδικός για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  [IG03] συνεπώς και ο αντίστροφος Drazin είναι επίσης μοναδικός.

### § 2.3 Ανάλυση ιδιζουσών τιμών

**Ορισμός 2.3.1.** Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Ορίζουμε ως *ανάλυση ιδιζουσών τιμών* την παραγοντοποίηση του πίνακα  $A$  με την παρακάτω μορφή [Aδά08] [HJ85] [Joh21] [Jör15]:

$$A = U\Sigma V^T, \quad (2.3.1)$$

όπου  $V$  είναι ένας  $m \times m$  πίνακας του οποίου κάθε στήλη αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού πίνακα  $A^T A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  στα οποία έχουμε εφαρμόσει κανονικοποίηση έτσι ώστε να είναι μοναδιαία διανύσματα,  $\Sigma$  είναι ένας  $n \times m$  πίνακας ο οποίος δίνεται παρακάτω ως σύνθετος πίνακας με την εξής μορφή [Aδά08]:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Delta_{k \times k} & \mathbb{O}_{k \times (m-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k) \times k} & \mathbb{O}_{(n-k) \times (m-k)} \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

όπου  $\text{rank}(A) = k$ , ο βαθμός του πίνακα  $A$ . Ο πίνακας  $\Delta$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ονομάζονται *ιδιάζουσες τιμές* του πίνακα  $A$  [Aδά08]. Ο πίνακας  $\Delta$  γράφεται ως εξής:

$$\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k), \sigma_i > 0 \text{ με } i = 1, 2, \dots, k \quad (2.3.3)$$

και  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ , όπου  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$  οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A^T A$ . Ο πίνακας  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  είναι ο πίνακας του οποίου κάθε στήλη υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο [Αδά08]:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \quad (2.3.4)$$

όπου  $v_i$  η  $i$ -οστή στήλη του πίνακα  $V$ . Να σημειωθεί ότι οι πίνακες  $U, V$  είναι ορθογώνιοι πίνακες. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$U U^T = U^T U = I_n,$$

$$V V^T = V^T V = I_m$$

και ότι η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών δεν είναι μοναδική για κάθε πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Αυτό οφείλεται στο ότι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A^T A$  που αντιστοιχούν σε κάθε του ιδιοτιμή είναι άπειρα.

**Παράδειγμα 2.6.** Να βρεθεί μία ανάλυση ιδιαζουσών τιμών για τον παρακάτω πίνακα διαστάσεων  $3 \times 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση

Υπολογίζουμε τον πίνακα  $A^T A$ . Είναι:

$$A^T A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A^T A$  είναι:



$$\lambda(\lambda - 28) = 0,$$

απ' όπου έχουμε ότι  $\lambda_1 = 28$ ,  $\lambda_2 = 0$  που είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A^T A$  με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατήρουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα  $\vec{v}_1$  και  $\vec{v}_2$  δεν είναι μοναδιαία γιατί ισχύει ότι  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = \sqrt{2}$  οπότε πρέπει να εφαρμόσουμε κανονικοποίηση για να τα κάνουμε μοναδιαία. Ο πίνακας  $V$  μετά την κανονικοποίηση γίνεται:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα  $A$  είναι  $\sigma_1 = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ . Για τον πίνακα  $U$  έχουμε ότι:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$$

Επειδή όμως ο πίνακας  $U$  πρέπει να είναι  $3 \times 3$  πρέπει να βρούμε ακόμα δύο διανύσματα  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$  τέτοια ώστε τα  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$  να είναι κάθετα μεταξύ τους ανα δύο. Τέτοια διανύσματα είναι τα παρακάτω:

$$\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{70}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}$$

τα οποία ικανοποιούν τον ισχυρισμό των κάθετων διανυσμάτων ανά δύο που αναφέρθηκε παραπάνω. Το  $\vec{u}_2$  είναι ένα διάνυσμα βάσης του μηδενοχώρου του πίνακα  $A^T$  ενώ το διάνυσμα  $\vec{u}_3$  προέκυψε εφαρμόζοντας την μέθοδο Gram-Schmidt [Αδά08] στα διανύσματα  $\vec{u}_2$  και  $\vec{u}_3$ . Οπότε ο πίνακας  $U$  είναι ο παρακάτω:

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας  $\Sigma$  βάσει της (2.3.2) και διότι ισχύει  $\text{rank}(A) = k = 1$  υπολογίζεται ως εξής:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα μία ανάλυση ιδιοζουσών τιμών του πίνακα  $A$  είναι:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

### 2.3.1 Υπολογισμός γενικευμένων αντιστρώφων μέσω της ανάλυσης ιδιοζουσών τιμών.

#### Μέθοδος υπολογισμού

Έστω ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  και μία ανάλυσή ιδιοζουσών τιμών του

$$A = U \begin{bmatrix} \Delta_{k \times k} & \mathbb{O}_{k \times (m-k)} \\ \mathbb{O}_{(n-k) \times k} & \mathbb{O}_{(n-k) \times (m-k)} \end{bmatrix} V^T$$

όπου  $\text{rank}(A) = k$  ο βαθμός του πίνακα  $A$ . Τότε για κάθε μη μηδενικό πίνακα  $X, Y, Z$  [IG03]

[RK71] ο πίνακας

$$A^g = V \begin{bmatrix} \Delta_{k \times k}^{-1} & X_{k \times (n-k)} \\ Y_{(m-k) \times k} & Z_{(m-k) \times (n-k)} \end{bmatrix} U^T \quad (2.3.5)$$

είναι ένας γενικευμένος αντίστροφος ή  $\{1\}$ -αντίστροφος για τον πίνακα  $A$ .

Στην μέθοδο αυτήν υπάρχουν υποπεριπτώσεις όπου η καθεμία από αυτές μας δίνει διαφορετικό τύπο γενικευμένου αντιστρόφου [IG03] [RK71]. Αυτές είναι:

- Όταν  $Z = Y\Delta X$ , τότε ο  $A^g$  είναι ένας ανακλαστικός γενικευμένος αντίστροφος ή  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$ .
- Όταν  $X = \mathbb{O}$  τότε ο  $A^g$  είναι ένας  $\{1, 3\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$ .
- Όταν  $Y = \mathbb{O}$  τότε ο  $A^g$  είναι ένας  $\{1, 4\}$ -αντίστροφος του πίνακα  $A$ .
- Όταν  $X = Y = Z = \mathbb{O}$  τότε ο  $A^g = A^+$  είναι ο ψευδοαντίστροφος ή Moore-Penrose αντίστροφος του πίνακα  $A$ .

**Παράδειγμα 2.7.** Να υπολογιστούν όλοι οι τύποι των γενικευμένων αντίστροφων της παραπάνω μεθόδου υπολογισμού για τον πίνακα  $A$  του Παραδείγματος 2.6.

### Λύση

Οι τύποι των γενικευμένων αντιστρόφων  $A^g$  της παραπάνω μεθόδου ορίζονται από την γενική μορφή στην (2.3.5). Για τον πίνακα  $A^g$  έχουμε:

$$A^g = V \begin{bmatrix} \Delta_{1 \times 1}^{-1} & \mathbb{X}_{1 \times 2} \\ \mathbb{Y}_{1 \times 1} & \mathbb{Z}_{1 \times 2} \end{bmatrix} U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{7}} & x_1 & x_2 \\ y_1 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{70}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω γενική μορφή όπου  $y_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}}$ ,  $x_1 = 2\sqrt{10}$ ,  $x_2 = 2\sqrt{140}$ ,  $z_1 = \sqrt{10}$ ,  $z_2 = \sqrt{140}$  προκύπτει ο παρακάτω γενικευμένος αντίστροφος ή  $\{1\}$ -αντίστροφος πίνακας:

$$A^g = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 5 \\ \frac{146}{7} & -\frac{41}{14} & \frac{213}{14} \end{bmatrix}.$$

Για τον ανακλαστικό γενικευμένο αντίστροφο ή  $\{1, 2\}$ -αντίστροφο του πίνακα  $A$  θα πρέπει να ισχύει  $Z = Y\Delta X = \begin{bmatrix} 2\sqrt{7}x_1y_1 & 2\sqrt{7}x_2y_1 \end{bmatrix}$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές των  $x_1, x_2, y_1$  με τις τιμές που βάλουμε στον  $\{1\}$ -αντίστροφο, ο  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος που προκύπτει είναι:

$$A^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{195}{7} & -\frac{55}{14} & \frac{283}{14} \end{bmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό του  $\{1, 3\}$ -αντίστροφου του πίνακα  $A$  πρέπει να ισχύει ότι  $X = \mathbb{O}_{1 \times 2}$ . Ο  $\{1, 3\}$ -αντίστροφος που προκύπτει είναι:

$$A^g = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -5 \\ \frac{48}{7} & -\frac{13}{14} & \frac{73}{14} \end{bmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό του  $\{1, 4\}$ -αντίστροφου του πίνακα  $A$  πρέπει να ισχύει ότι  $Y = \mathbb{O}_{1 \times 1} = 0$ . Ο  $\{1, 4\}$ -αντίστροφος που προκύπτει είναι:

$$A^g = \begin{bmatrix} \frac{97}{14} & -\frac{27}{28} & \frac{143}{28} \\ \frac{293}{14} & -\frac{83}{28} & \frac{423}{28} \end{bmatrix}.$$

Τέλος, για τον ψευδοαντίστροφο ή Moore-Penrose αντίστροφο θα πρέπει να ισχύει ότι  $X = \mathbb{O}_{1 \times 2}$ ,  $Y = \mathbb{O}_{1 \times 1} = 0$  και  $Z = \mathbb{O}_{1 \times 2}$ . Ο ψευδοαντίστροφος που προκύπτει είναι:

$$A^g = A^+ = \begin{bmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{1}{28} & \frac{3}{28} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{28} & \frac{3}{28} \end{bmatrix}.$$

## § 2.4 Αλγόριθμοι υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων σε πίνακες μη κατευθυνόμενων γραφημάτων

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε αλγόριθμους που έχουν προταθεί στα άρθρα των [BFM20] [BFM19] οι οποίοι υπολογίζουν τύπους γενικευμένων αντιστροφών από πίνακες μη κατευθυνόμενων γραφημάτων. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την επίλυση αριθμητικών παραδειγμάτων που αφορούν αυτούς καθώς και με την υλοποίηση αυτών των αλγόριθμων σε κώδικα Matlab έχοντας ως βάση τον ψευδοκώδικα τους. Τέλος θα παρουσιάσουμε έναν νέο αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει μονόπλευρους γενικευμένους αντίστροφους από έναν πίνακα προσπτώσεων ενός απλού, συνεκτικού και μη κατευθυνόμενου γραφήματος.

### 2.4.1 Υπολογισμός ενός $\{1, 2\}$ -αντίστροφου Laplacian πίνακα

#### LU παραγοντοποίηση

**Ορισμός 2.4.1.** Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ορίζουμε ως **LU παραγοντοποίηση**, την παραγοντοποίηση του πίνακα  $A$  στη μορφή [Rai]

$$A = LU, \quad (2.4.1)$$

όπου  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ένας κάτω τριγωνικός πίνακας ο οποίος έχει την εξής μορφή:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

και  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ένας άνω τριγωνικός πίνακας ο οποίος έχει την εξής μορφή:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Για να κάνουμε  $LU$  παραγοντοποίηση στον πίνακα  $A$  πρώτα υπολογίζουμε τον πίνακα  $U$  κάνοντας απαλοιφή Gauss στον πίνακα  $A$  και στην συνέχεια μέσω της (2.4.1) υπολογίζουμε τον πίνακα  $L$  [Rai]. Να σημειωθεί ότι σε περίπτωση που ο πίνακας  $A$  έχει κυρίαρχη διαγώνιο δηλαδή ισχύει ότι  $|\alpha_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|$  τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την  $LU$  παραγοντοποίηση με ευστάθεια.

### **$LD\bar{U}$ παραγοντοποίηση**

**Ορισμός 2.4.2.** Η  $LD\bar{U}$  παραγοντοποίηση είναι μια παραλλαγή της  $LU$  παραγοντοποίησης και η διαφορά της με την  $LU$  είναι ότι πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον πίνακα  $U$  ως εξής [BFM20]:

$$U = D\bar{U}, \quad (2.4.2)$$

όπου  $D = \text{diag}(U_{11}, U_{22}, \dots, U_{nn})$  και  $\bar{U}$  ο πίνακας που προκύπτει αν σε κάθε γραμμή του πίνακα  $U$  διαιρέσουμε με το στοιχείο  $U_{ii}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  δηλαδή ο πίνακας  $\bar{U}$  θα πρέπει να έχει όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με 1.

**Παράδειγμα 2.8.** Έστω ο παρακάτω  $3 \times 3$  πίνακας με κυρίαρχη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστεί η  $LU$  παραγοντοποίηση και στην συνέχεια η  $LD\bar{U}$  παραγοντοποίηση του πίνακα  $A$ .

## Λύση

Για την LU παραγοντοποίηση πρώτα θα υπολογίσουμε τον πίνακα  $U$  κάνοντας απαλοιφή Gauss στον πίνακα  $A$ . Εφαρμόζουμε με την σειρά τις παρακάτω γραμμοπράξεις

$$r_2 \rightarrow r_2 - \left(-\frac{1}{3}\right)r_1, r_3 \rightarrow r_3 - \frac{1}{6}r_1, r_3 \rightarrow r_3 - \frac{7}{19}r_2$$

και παίρνουμε τον πίνακα

$$U = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{229}{38} \end{bmatrix}.$$

Για τον πίνακα  $L$  από την (2.4.1) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{229}{38} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6l_{21} & -2l_{21} + \frac{19}{3} & l_{21} + \frac{7}{3} \\ 6l_{31} & -2l_{31} + \frac{19}{3}l_{32} & l_{31} - \frac{7}{3}l_{32} - \frac{229}{38} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$l_{21} = -\frac{1}{3},$$

$$l_{31} = \frac{1}{6},$$

$$l_{32} = \frac{7}{19},$$

άρα ο πίνακας  $L$  είναι:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{19} & 1 \end{bmatrix}.$$

Για την  $LD\bar{U}$  παραγοντοποίηση σύμφωνα με τον ορισμό (2.4.2) ο πίνακας  $D$  γράφεται ως εξής:

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{229}{38} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $\bar{U}$  προκύπτει διαιρώντας κάθε γραμμή του πίνακα  $U$  με το αντίστοιχο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα  $D$ , δηλαδή με 6,  $19/3$  και  $-229/38$  αντίστοιχα όποτε αυτός είναι:

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{7}{19} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### Αλγόριθμος 1

Ο αλγόριθμος των [BFM20] που υλοποιήσαμε παρακάτω σε μορφή ψευδοκώδικα και ο οποίος έχει ως βάση την μέθοδο υπολογισμού ενός  $\{1\}$ -αντίστροφου, έχοντας δεδομένο έναν Laplacian πίνακα  $Lap \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος  $n$  κορυφών, υπολογίζει έναν ανακλαστικό γενικευμένο αντίστροφο ή  $\{1, 2\}$ -αντίστροφο του  $Lap$  μέσω της  $LD\bar{U}$  παραγοντοποίησης. Επειδή οι Laplacian πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμοι ισχύει ότι  $D = \text{diag}(U_{11}, U_{22}, \dots, U_{(n-1)(n-1)}, 0)$ . Λόγω του ότι ο Laplacian πίνακας είναι συμμετρικός πίνακας έχουμε ότι  $\bar{U} = L^T$ . Υπολογίζουμε τους αντίστροφους πίνακες των πινάκων  $L$ ,  $\bar{U}$  και τον πίνακα  $D^- = \text{diag}(\frac{1}{D_{11}}, \frac{1}{D_{22}}, \dots, \frac{1}{D_{(n-1)(n-1)}}, 0)$ . Τέλος, ο  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του  $Lap$  υπολογίζεται ως εξής:

$$L^- = \bar{U}^{-1} \cdot D^- \cdot L^{-1}$$



**Algorithm 1:** Computation of an  $\{1, 2\}$ -inverse of a Laplacian matrix with  $LD\bar{U}$  factorization

```
Data: Laplacian matrix  $Lap \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 
Result:  $\{1, 2\}$ -inverse of  $Lap$ ,  $L^-$ 
// Initializations of matrices
 $L = I_n, U = \mathbb{O}_{n \times n}, D = \mathbb{O}_{n \times n}, u = \mathbb{O}_{n \times n}, D^- = \mathbb{O}_{n \times n}$ 
// Gauss elimination for computing  $U$  matrix - Computation of  $L$ 
for  $j = 1$  to  $n - 1$  do
  for  $i = j + 1$  to  $n$  do
     $mult = Lap_{ij} / Lap_{jj}$ 
     $L_{ij} = mult$ 
    for  $k = j$  to  $n$  do
       $Lap_{ik} = Lap_{ik} - mult \cdot Lap_{jk}$ 
    end
  end
end
 $U = Lap$ 
// Computation of  $D$ 
for  $i = 1$  to  $n$  do
  for  $j = 1$  to  $n$  do
    if  $i = j$  then
       $D_{ii} = U_{ii}$ 
    end
  end
end
// Computation of  $\bar{U}$ 
for  $i = 1$  to  $n$  do
   $c = U_{ii}$ 
  for  $j = 1$  to  $n$  do
    if  $c \neq 0$  then
       $U_{ij} = U_{ij} / c$ 
    end
  end
end
 $\bar{U} = U$ 
// Computation of  $L$  inverse,  $L^{-1}$ 
 $\bar{U} = L^T$ 
// Computation of  $\bar{U}$  inverse,  $\bar{U}^{-1}$ 
// Computation of  $D^-$ 
for  $i = 1$  to  $n$  do
  if  $D_{ii} \neq 0$  then
     $D_{ii}^- = 1 / D_{ii}$ 
  end
end
// Computation of  $\{1, 2\}$ -inverse of  $Lap$ ,  $L^-$ 
 $L^- = \bar{U}^{-1} \cdot D^- \cdot L^{-1}$ 
// Checking if Penrose conditions are satisfied
```

**Παράδειγμα 2.9.** Έστω ένα γράφημα  $G$  το οποίο έχει σύνολο κορυφών  $V = \{1, 2, 3\}$  και σύνολο ακμών  $E = \{e_1, e_2\}$  όπου  $e_1 = \{1, 3\}$  και  $e_2 = \{2, 3\}$ . Να υπολογισθεί ένας  $\{1, 2\}$ - αντίστροφος του Λαπλασιανού πίνακα του  $G$  ακολουθώντας τα βήματα του Αλγόριθμου 1.

### Λύση

Με βάση τα σύνολα κορυφών και ακμών του γραφήματος  $G$ ,  $V, E$  ο πίνακας γειτνίασης είναι ο παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι βαθμοί των κορυφών του είναι  $\deg(1) = 1$ ,  $\deg(2) = 1$ ,  $\deg(3) = 2$  οπότε ο διαγώνιος πίνακας των βαθμών είναι:

$$Deg = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο Laplacian πίνακας υπολογίζεται ως εξής:

$$Lap = Deg - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει τον Laplacian πίνακα, εφαρμόζουμε την μέθοδο Gauss για να υπολογίσουμε τους πίνακες  $U, L$  σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 1. Εκτελώντας με την σειρά τις παρακάτω γραμμοπράξεις

$$r_2 \rightarrow r_2 - 0r_1, \quad r_3 \rightarrow r_3 - (-1)r_1, \quad r_3 \rightarrow r_3 - (-1)r_1$$

οι πίνακες  $U, L$  που προκύπτουν είναι οι εξής:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για τους πίνακες  $D, \bar{U}$  έχουμε:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{U} = L^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τους αντίστροφους πίνακες των πινάκων  $\bar{U}, L$  καθώς και τον πίνακα  $D^-$  παίρνουμε ότι:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οπότε ο  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του Laplacian πίνακα του γραφήματος  $G$ ,  $L^-$  υπολογίζεται ως:

$$L^- = \bar{U}^{-1} \cdot D^- \cdot L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, ελέγχουμε εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες του Penrose (2.1.1), (2.1.2). Έχουμε:

$$Lap \cdot L^- \cdot Lap = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = Lap,$$

$$L^- \cdot Lap \cdot L^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L^-,$$

$$Lap \cdot L^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \neq (Lap \cdot L^-)^T,$$

$$L^- \cdot Lap = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq (L^- \cdot Lap)^T.$$

Επομένως ο πίνακας  $L^-$  είναι ένας  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του Laplacian πίνακα  $Lap$  του γραφήματος  $G$ .

## 2.4.2 Υπολογισμός ψευδοαντίστροφου Laplacian πίνακα μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών

### Αλγόριθμος 2

Έστω ο Laplacian πίνακας  $Lap \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ενός γραφήματος  $G$   $n$  κορυφών. Ο αλγόριθμος που υλοποιήσαμε σε μορφή ψευδοκώδικα, υπολογίζει τον ψευδοαντίστροφο του  $Lap$ ,  $Lap^+$  μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών του πίνακα  $Lap$ . Ο πίνακας  $Lap^+$  που υπολογίζεται στον αλγόριθμο προκύπτει από την 2.3.5 [IG03] [RK71] για  $X = \mathbb{O}_{k \times (n-k)}$ ,  $Y = \mathbb{O}_{(n-k) \times k}$  και  $Z = \mathbb{O}_{(n-k) \times (n-k)}$ . Θεωρούμε την συνάρτηση  $SVD(A)$  η οποία υπολογίζει μία ανάλυση ιδιζουσών τιμών για έναν πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

**Algorithm 2:** Computation of the pseudoinverse of a Laplacian matrix by Singular Value Decomposition(SVD)

```

Data: A  $n \times n$  Laplacian matrix,  $Lap$ 
Result: A pseudoinverse of  $Lap$ ,  $Lap^+$ 
// Initializations of matrices
 $U = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $\Sigma = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $V = \mathbb{O}_{n \times n}$ 
 $k = \text{rank}(Lap)$ 
 $\Delta = \mathbb{O}_{k \times k}$ 
// Computation of a SVD of Lap
 $[U, \Sigma, V] = \text{SVD}(Lap)$ 
for  $i = 1$  to  $k$  do
    for  $j = 1$  to  $k$  do
         $\Delta_{ij} = \Sigma_{ij}$ 
    end
end
 $B = [\Delta^{-1} \mathbb{O}_{k \times (n-k)}; \mathbb{O}_{(n-k) \times k} \mathbb{O}_{(n-k) \times (n-k)}]$ 
 $Lap^+ = V \cdot B \cdot U^T$ 
// Check if all Penrose conditions are satisfied

```

**Παράδειγμα 2.10.** Έστω ένα γράφημα  $G$  το οποίο έχει σύνολα κορυφών και ακμών  $V = \{1, 2, 3\}$  και  $E = \{e_1, e_2\}$  όπου  $e_1 = \{1, 2\}$  και  $e_2 = \{1, 3\}$ . Να υπολογιστεί ένας ψευδοαντίστροφος του Laplacian πίνακα του  $G$  ακολουθώντας τα βήματα του Αλγόριθμου 2.

### Λύση

Με βάση τα συνόλα κορυφών και ακμών του  $G$  και του ότι οι βαθμοί των κορυφών είναι  $\text{deg}(1) = 2$ ,  $\text{deg}(2) = 1$ ,  $\text{deg}(3) = 1$  ο πίνακας γειτνίασης και ο διαγώνιος πίνακας των βαθμών είναι οι εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Deg} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οπότε για τον Laplacian πίνακα έχουμε:

$$\text{Lap} = \text{Deg} - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

για τον οποίο ισχύει ότι  $k = \text{rank}(Lap) = 2$ .

Μία ανάλυση ιδιοζουσών τιμών του πίνακα  $Lap$  είναι η:

$$Lap = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο υποπίνακας  $\Delta$  που προκύπτει από τον πίνακα  $\Sigma$  είναι:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με  $\det(\Delta) = 3$  οπότε ο αντίστροφος του  $\Delta^{-1}$  είναι ο

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο ψευδοαντίστροφος του Laplacian πίνακα  $Lap^+$  υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} Lap^+ &= VBU^T \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ελέγχουμε εάν ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες του Penrose. Έχουμε:

$$Lap \cdot Lap^+ \cdot Lap = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
Lap^+ \cdot Lap \cdot Lap^+ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}, \\
Lap \cdot Lap^+ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = (Lap \cdot Lap^+)^T, \\
Lap^+ \cdot Lap &= \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = (Lap^+ \cdot Lap)^T.
\end{aligned}$$

Οπότε ο πίνακας  $Lap^+$  είναι ο ψευδοαντίστροφος του Laplacian πίνακα του γραφήματος  $G$ .

### 2.4.3 Υπολογισμός γενικευμένων αντιστρώφων σε μη τετραγωνικούς πίνακες προσπτώσεων

#### Αλγόριθμος 3

Ο αλγόριθμος που κατασκευάσαμε σε μορφή ψευδοκώδικα, είναι ένας αλγόριθμος που βασίζεται στην μέθοδο υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων που παρουσιάστηκε στην υποενότητα 2.2.3 [Kyr21], ο οποίος έχοντας δεδομένο έναν μη τετραγωνικό πίνακα προσπτώσεων  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ενός γραφήματος  $G$   $n$  κορυφών και  $m$  ακμών με  $k = \text{rank}(A) = \min\{m, n\}$  υπολογίζει μονόπλευρους αντίστροφους του πίνακα αυτού.

Ο μονόπλευρος αντίστροφος που υπολογίζεται είναι ένας δεξιός αντίστροφος αν  $n < m$  ενώ αν  $n > m$  τότε είναι αριστερός αντίστροφος. Το διάνυσμα  $\vec{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^T$  είναι ένα διάνυσμα στο οποίο αποθηκεύονται οι θέσεις των γραμμών ή στηλών του  $A$  αντίστοιχα από τις οποίες θα αποτελείται ο υποπίνακας  $A_0 \in \mathbb{R}^{k \times k}$ . Αυτές ορίζονται θεωρώντας την συνάρτηση  $\text{random}(a, b)$  η οποία επιστρέφει έναν τυχαίο ακέραιο αριθμό στο κλειστό διάστημα ακεραίων  $[a, b]$ . Ο αλγόριθμος εξασφαλίζει ότι δεν επαναλαμβάνεται καμία από τις τιμές  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Στην συνέχεια ταξινομούμε τα  $v_1, v_2, \dots, v_k$  σε αύξουσα σειρά και δημιουργούμε τον υποπίνακα  $A_0$ . Τέλος, αναλόγως στην περίπτωση που βρισκόμαστε ( $n < m$  ή  $n > m$ ) μπορούμε να αποφανθούμε για το

είδος του μονόπλευρου αντιστρόφου που θα υπολογιστεί και εν τέλει να τον υπολογίσουμε.

**Algorithm 3:** Computation of an one-side inverse of an incidence matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

```

Data: An incidence matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \neq m$ 
Result: An  $\{1, 2, 3\}$  or  $\{1, 2, 4\}$ - inverse of  $A$ ,  $A^g \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 
 $k = \min\{m, n\}$ ,  $v = \mathbb{O}_{k \times 1}$ 
// Initializations of matrices
 $A_0 = \mathbb{O}_{k \times k}$ ,  $B = \mathbb{O}_{n \times m}$ ,  $A^g = \mathbb{O}_{m \times n}$ ,  $a = \mathbb{O}_{k \times k}$ ,  $b = \mathbb{O}_{k \times k}$ 
 $v_1 = \text{random}(1, \max\{m, n\})$ 
for  $i = 2$  to  $k$  do
    repeat
         $v_i = \text{random}(1, \max\{m, n\})$ 
         $m = 0$ 
        for  $j = 1$  to  $i - 1$  do
            if  $v_j \neq v_i$  then
                 $m = m + 1$ 
            end
        end
    until  $m = i - 1$ 
end
 $v = \text{sort}(v)$ 

if  $k = n$  then
    for  $j = 1$  to  $k$  do
         $A_0(:, j) = A(:, v_j)$ 
    end
     $a = A_0^{-1}$   $b = a^T$ 
    for  $j = 1$  to  $k$  do
         $B(:, v_j) = b(:, j)$ 
    end
     $A^g = B^T$ 
end

if  $k = m$  then
    for  $i = 1$  to  $k$  do
         $A_0(i, :) = A(v_i, :)$ 
    end
     $a = A_0^{-1}$   $b = a^T$ 
    for  $i = 1$  to  $k$  do
         $B(v_i, :) = b(i, :)$ 
    end
     $A^g = B^T$ 
end

```



**Παράδειγμα 2.11.** Έστω το γράφημα  $G$  του Σχήματος 2.1. Να βρεθεί ένας μονόπλευρος αντίστροφος (χαρακτηρίζοντας το είδος του) του πίνακα προσπτώσεων του  $G$  ακολουθώντας τα βήματα του Αλγόριθμου 3. Το διάνυσμα των θέσεων των γραμμών ή στηλών από τις οποίες θα αποτελείται ο υποπίνακας  $A_0$  είναι  $\vec{v} = [1, 2, 3]^T$ .



Σχήμα 2.1

### Λύση

Το γράφημα  $G$  έχει σύνολα κορυφών και ακμών:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$$

όπου  $e_1 = \{1, 4\}$ ,  $e_2 = \{2, 4\}$ ,  $e_3 = \{3, 4\}$ . Με βάση τα σύνολα  $V$ ,  $E$  ο πίνακας προσπτώσεων που προκύπτει είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο έχουμε ότι  $n = 4$  και  $m = 3$  άρα βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου  $n > m$  δηλαδή ο γενικευμένος αντίστροφος που θα υπολογιστεί θα είναι ένας αριστερός αντίστροφος του πίνακα προσπτώσεων  $A$  και το διάνυσμα  $\vec{v}$  αναπαριστά θέσεις γραμμών. Για τον πίνακα προσπτώσεων ισχύει ότι  $k = \text{rank}(A) = \min\{3, 4\} = 3$  που σημαίνει ότι ο υποπίνακας  $A_0$  θα είναι διαστάσεων  $3 \times 3$ .

Από τις τιμές του  $\vec{v}$ , ο υποπίνακας  $A_0$  που προκύπτει θα είναι ο:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

οι πίνακες  $a = A_0^{-1}$ ,  $b = a^T$  είναι οι:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή ισχύει ότι  $n > m$  ο πίνακας  $B$  υπολογίζεται ως εξής:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο αριστερός αντίστροφος πίνακας του  $A$ ,  $A_L$  θα είναι:

$$A_L = B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

#### Αλγόριθμος 4

Ο αλγόριθμος που υλοποιήσαμε ο οποίος φαίνεται παρακάτω σε μορφή ψευδοκώδικα, έχοντας δεδομένο έναν μη τετραγωνικό πίνακα προσπτώσεων  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ενός γραφήματος  $G$   $n$  κορυφών και  $m$  ακμών με  $k = \text{rank}(A) = \min\{m, n\}$  υπολογίζει 3 τύπους γενικευμένων αντίστροφων για τον πίνακα  $A$  μέσω της ανάλυσης ιδιζουσών τιμών του. Στην ουσία πρόκειται για μια παραλλαγή του Αλγορίθμου 2 [IG03] [RK71]. Λόγω του ότι ισχύει ότι  $k = \text{rank}(A) = \min\{m, n\}$  κάποιοι από τους πίνακες  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  στην (2.3.5) δεν ορίζονται γιατί μια από τις διαστάσεις τους παίρνει την τιμή 0. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να παίρνουμε άλλους τύπους γενικευμένων αντίστροφων από αυτούς που παίρναμε στην (2.3.5) για οποιονδήποτε πίνακα. Για αυτό θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις όπου στην καθεμία θα υπολογίζεται διαφορετικός τύπος γενικευμένου αντίστροφου.

Όταν  $k = m$  ( $n > m$ ) τότε ορίζεται μόνο ο πίνακας  $X$  και ο πίνακας  $A^g$  είναι είτε  $\{1, 2, 4\}$ -αντίστροφος (αριστερός αντίστροφος) για  $X \neq \mathbb{O}$  είτε ψευδοαντίστροφος για  $X = \mathbb{O}$ . Όταν  $k = n$  ( $n < m$ ) τότε ορίζεται μόνο ο πίνακας  $Y$  και ο πίνακας  $A^g$  είναι είτε  $\{1, 2, 3\}$ -αντίστροφος (δεξιός αντίστροφος) για  $Y \neq \mathbb{O}$  είτε ψευδοαντίστροφος για  $Y = \mathbb{O}$ .

**Algorithm 4:** Computation of a generalized inverse of an incidence  $n \times m$  matrix  $A$  of a graph  $G$ 

```
Data: An incidence matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $n \neq m$   
Result: A generalized inverse  $A^g \in \mathbb{R}^{m \times n}$   
 $k = \min\{m, n\}$   
// Initializations of matrices  
 $U = \mathbb{O}_{m \times m}$ ,  $V = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $\Sigma = \mathbb{O}_{n \times m}$ ,  $\Delta = \mathbb{O}_{k \times k}$   
 $[U, \Sigma, V] = \text{SVD}(A)$   
for  $i = 1$  to  $k$  do  
| for  $j = 1$  to  $k$  do  
| |  $\Delta_{ij} = \Sigma_{ij}$   
| end  
end  
// Read matrices  $X \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k}$   
if  $k = m$  then  
|  $\text{READ}(X)$   
|  $A^g = V \cdot [\Delta^{-1} \ X] \cdot U^T$   
| if  $X \neq \mathbb{O}$  then  
| |  $\text{PRINT}(A^g \text{ is an } \{1, 2, 4\}\text{-inverse of incidence matrix } A)$   
| else  
| |  $\text{PRINT}(A^g \text{ is the pseudoinverse of incidence matrix } A)$   
| end  
end  
if  $k = n$  then  
|  $\text{READ}(Y)$   
|  $A^g = V \cdot [\Delta^{-1} ; Y] \cdot U^T$   
| if  $Y \neq \mathbb{O}$  then  
| |  $\text{PRINT}(A^g \text{ is an } \{1, 2, 3\}\text{-inverse of incidence matrix } A)$   
| else  
| |  $\text{PRINT}(A^g \text{ is the pseudoinverse of incidence matrix } A)$   
| end  
end
```

**Παράδειγμα 2.12.** Έστω ένα γράφημα  $G$  το οποίο έχει σύνολα κορυφών και ακμών  $V = \{1, 2, 3\}$  και  $E = \{e_1, e_2\}$  αντίστοιχα, όπου  $e_1 = \{1, 3\}$ ,  $e_2 = \{2, 3\}$ . Να βρεθούν οι γενικευμένοι αντίστροφοι του πίνακα προσπτώσεων του  $G$  ακολουθώντας τα βήματα του Αλγόριθμου 4.

### Λύση

Με βάση τα σύνολα  $V$ ,  $E$  ο πίνακας προσπτώσεων που προκύπτει είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Μία ανάλυση ιδιαζουσών τιμών του πίνακα  $A$  είναι η εξής:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Έχουμε ότι

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

με  $\det(\Delta) = \sqrt{3}$  άρα

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επειδή από τον πίνακα προσπτώσεων ισχύει ότι  $n = 3$  και  $m = 2$ , δηλαδή βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου  $n > m$  με  $k = m$ , η γενική μορφή για τους γενικευμένους αντιστρόφους  $A^g$  είναι η παρακάτω:

$$A^g = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}. \quad (2.4.3)$$

Για τον αριστερό αντίστροφο πρέπει να ισχύει ότι  $x_1 \neq 0$  και  $x_2 \neq 0$ . Αντικαθιστώντας στην (2.4.3) όπου  $x_1 = \sqrt{6}$  και  $x_2 = \sqrt{6}$  ο  $A^g = A_L$  που προκύπτει είναι:

$$A^g = A_L = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ένας  $\{1, 2, 4\}$ -αντίστροφος για τον πίνακα προσπτώσεων  $A$  του γραφήματος  $G$ . Για τον ψευδοαντίστροφο θα αντικαταστήσουμε στην (2.4.3) όπου  $x_1 = 0$  και  $x_2 = 0$ . Μετά από πράξεις προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$$A^+ = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ο ψευδοαντίστροφος του πίνακα προσπτώσεων  $A$  του γραφήματος  $G$ .

#### 2.4.4 Υπολογισμός αντίστροφου Group Laplacian πίνακα

##### Παραγοντοποίηση τάξης

**Ορισμός 2.4.3.** Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  με  $k = \text{rank}(A) = n - 1$ . Ορίζουμε ως *παραγοντοποίηση τάξης*, την παραγοντοποίηση του πίνακα  $A$  με την παρακάτω μορφή:

$$A = GF \tag{2.4.4}$$

οπου  $G \in \mathbb{R}^{n \times k}$  ένας πίνακας ο οποίος έχει ως στήλες του τις πρώτες  $n - 1$  γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα  $A$  (λόγω του ότι  $k = \text{rank}(A) = n - 1$ ) και  $F \in \mathbb{R}^{k \times n}$  ένας πίνακας του οποίου κάθε στήλη περιέχει τους συντελεστές οι οποίοι προκύπτουν αφού έχουμε εκφράσει κάθε στήλη του πίνακα  $A$  ως γραμμικό συνδυασμό των γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών του. Για να βρούμε τις  $n - 1$  γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του πίνακα  $A$  θα πρέπει να εφαρμόσουμε την μέθοδο Gauss και έπειτα όποιες στήλες έχουν το οδηγούν στοιχείο τους διάφορο του μηδενός είναι γραμμικά ανεξάρτητες ενώ σε αντίθετη περίπτωση είναι γραμμικά εξαρτημένες. Σε αυτήν την περίπτωση η γραμμικά εξαρτημένη στήλη είναι μόνο μία και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στηλών με μη μηδενικούς συντελεστές.

**Παράδειγμα 2.13.** Έστω ο παρακάτω  $3 \times 3$  πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Να υπολογιστούν οι πίνακες  $G$ ,  $F$  κάνοντας παραγοντοποίηση τάξης.

### Λύση

Ο βαθμός του πίνακα  $A$  είναι  $k = \text{rank}(A) = 2$ . Εφαρμόζοντας με την σειρά τις γραμμοπράξεις  $r_2 \rightarrow r_2 - \frac{3}{2}r_1$ ,  $r_3 \rightarrow r_3 - r_1$ , προκύπτει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα έχει το οδηγούν στοιχείο της ίσο με 0 επομένως η τελευταία στήλη του πίνακα  $A$  είναι γραμμικά εξαρτημένη και μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων 2. Για να βρούμε τους συντελεστές, θα λύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

του οποίου η λύση είναι  $\alpha_1 = \frac{18}{7}$ ,  $\alpha_2 = -\frac{1}{7}$ . Εκφράζουμε όλες τις στήλες του πίνακα  $A$  ως γραμμικό συνδυασμό τις πρώτης ( $A_1$ ) και δεύτερης ( $A_2$ ) στήλης του ως εξής:

$$A_1 = 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2$$

$$A_2 = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2$$

$$A_3 = \frac{18}{7}A_1 + \left(-\frac{1}{7}\right)A_2$$

Οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.3 οι πίνακες  $G$  και  $F$  υπολογίζονται ως εξής:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix},$$

με

$$A = GF = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{18}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

### Αλγόριθμος 5

Ο αλγόριθμος που υλοποιήσαμε ο οποίος φαίνεται παρακάτω σε μορφή ψευδοκώδικα, έχοντας δεδομένο έναν Laplacian πίνακα  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ενός γραφήματος  $G$   $n$  κορυφών, υπολογίζει, κάνοντας παραγοντοποίηση τάξης στον πίνακα  $L$ , έναν αντίστροφο Group του  $L$  [IG03].

Αφού υπολογίσει τους πίνακες  $G$  και  $F$ , στη συνέχεια βρίσκει τον πίνακα  $B = (FG)^{-1}$  και εν τέλει υπολογίζει τον αντίστροφο Group του Laplacian πίνακα  $L^\# = G \cdot B^2 \cdot F$ . Μετά τον υπολογισμό του  $L^\#$  θα πρέπει να ελέγξουμε αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του αντίστροφου Group (2.2.6), (2.2.7) και (2.2.8).



**Algorithm 5:** Computation of a Group inverse of a Laplacian matrix  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 

```
Data: A Laplacian matrix  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  of a graph  $G$ 
Result: A Group inverse of  $L$ ,  $L^\#$ 
 $k = \text{rank}(L)$ 
// Initializations of matrices
 $G = \mathbb{O}_{n \times k}$ ,  $F = \mathbb{O}_{k \times n}$ ,  $L^\# = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $Lap = L$ 
 $A = \mathbb{O}_{k \times 1}$ ,  $b = \mathbb{O}_{n \times 1}$ ,  $B = \mathbb{O}_{k \times k}$ 

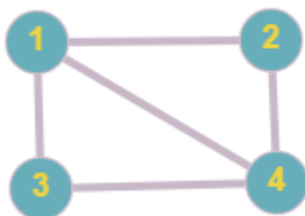
// Gaussian elimination of matrix L
for  $j = 1$  to  $n - 1$  do
  for  $i = j + 1$  to  $n$  do
     $m = L_{ij} / L_{jj}$ 
    for  $a = j$  to  $n$  do
       $L_{ia} = L_{ia} - m \cdot L_{ja}$ 
    end
  end
end

// Computation of matrix G
for  $i = 1$  to  $n$  do
   $b_{i1} = L_{in}$ 
  for  $j = 1$  to  $k$  do
     $G_{ij} = Lap_{ij}$ 
  end
end

// Computation of matrix F
 $A_{(n-1)1} = b_{(n-1)1} / L_{(n-1)(n-1)}$ 
for  $i = n - 2$  to  $1$  do
   $\text{sum} = 0$ 
  for  $j = n - 1$  to  $i + 1$  do
     $\text{sum} = \text{sum} + L_{ij} \cdot A_{j1}$ 
  end
   $A_{i1} = (b_{i1} - \text{sum}) / L_{ii}$ 
end
 $F = [I_k \ A]$ 

// Computation of Group inverse of L
 $B = (F \cdot G)^{-1}$ 
 $L^\# = G \cdot B^2 \cdot F$ 
// Check if Group inverse conditions are satisfied
```

**Παράδειγμα 2.14.** Έστω ένα γράφημα  $G$  το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να βρεθεί ο αντί-



Σχήμα 2.2

στροφος Group του Laplacian πίνακα του γραφήματος αυτού ακολουθώντας τα βήματα του Αλγορίθμου 5.

### Λύση

Το γράφημα  $G$  έχει σύνολα κορυφών και ακμών  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  και  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  αντίστοιχα, όπου  $e_1 = \{1, 2\}$ ,  $e_2 = \{1, 3\}$ ,  $e_3 = \{1, 4\}$ ,  $e_4 = \{2, 4\}$ ,  $e_5 = \{3, 4\}$  οπότε ο πίνακας γειτνίασης και ο διαγώνιος πίνακας των βαθμών του γραφήματος  $G$  είναι οι παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{Deg} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

από τους οποίους προκύπτει ο Laplacian πίνακας  $L$

$$L = \text{Deg} - A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

με  $k = \text{rank}(L) = 3$ . Εφαρμόζουμε στον  $L$  παραγοντοποίηση τάξης. Κάνοντας απαλοιφή Gauss στον πίνακα  $L$  και εφαρμόζοντας με την σειρά τις παρακάτω γραμμοπράξεις

$$\begin{aligned}
r_2 &\rightarrow r_2 + \frac{1}{3}r_1 \\
r_3 &\rightarrow r_3 + \frac{1}{3}r_1 \\
r_4 &\rightarrow r_4 + \frac{1}{3}r_1 \\
r_3 &\rightarrow r_3 + \frac{1}{5}r_2 \\
r_4 &\rightarrow r_4 + \frac{4}{5}r_2 \\
r_4 &\rightarrow r_4 + r_3
\end{aligned}$$

προκύπτει ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix}
3 & -1 & -1 & -1 \\
0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\
0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{8}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του παραπάνω πίνακα έχει το οδηγούν στοιχείο της ίσο με 0 οπότε η τελευταία στήλη του  $L$  είναι γραμμικά εξαρτημένη και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων 3 γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών. Για να βρούμε τους συντελεστές πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα

$$\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

του οποίου η λύση του είναι  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$ . Οι πίνακες  $G$ ,  $F$  υπολογίζονται ως εξής:

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Για τον υπολογισμό του πίνακα  $B$  θα πρέπει ο πίνακας  $F \cdot G$  να είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε:

$$F \cdot G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει  $\det(F \cdot G) = 32 \neq 0$  οπότε ο αντίστροφος του είναι:

$$(F \cdot G)^{-1} = B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο αντίστροφος Group του Laplacian πίνακα του γραφήματος  $G$  είναι:

$$\begin{aligned} L^\# = G \cdot B^2 \cdot F &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{32} & -\frac{3}{32} \\ 0 & -\frac{3}{32} & \frac{5}{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

αφού ικανοποιεί και τις συνθήκες του αντίστροφου Group

$$\begin{aligned}
LL^{\#}L &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = L, \\
L^{\#}LL^{\#} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix} = L^{\#}, \\
LL^{\#} = L^{\#}L &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### 2.4.5 Υπολογισμός Απορροφητικού Γενικευμένου Αντίστροφου (Α.Γ.Α)

**Ορισμός 2.4.4.** Έστω ένα γράφημα με απορρόφηση  $(G, \vec{d})$   $n$  κορυφών όπου  $\vec{d}$  το διάνυσμα απορρόφησης και ο Laplacian πίνακας του  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ορίζουμε ως **Απορροφητικό Γενικευμένο Αντίστροφο (Α.Γ.Α)** του  $L$  έναν πίνακα  $L^d \in \mathbb{R}^{n \times n}$  για τον οποίο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες [JT18]:

- Ο  $L^d$  είναι ένας ανακλαστικός γενικευμένος αντίστροφος ή  $\{1, 2\}$ -αντίστροφος του  $L$ .
- $L^d L \vec{y} = \vec{y}$ ,  $\forall \vec{y} \in N_{1,0}$  και  $L^d \vec{y} = \mathbf{0}$ ,  $\forall \vec{y} \in R_{1,0}$  όπου  $N_{1,0} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : D\vec{x} \in \text{Range}(L)\}$ ,  $R_{1,0} = \{D\vec{x} : \vec{x} \in \text{Ker}(L) \text{ και } D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)\}$ .

**Πρόταση 2.4.5.** Εάν το γράφημα  $G$  είναι συνεκτικό τότε αυτός ο πίνακας είναι μοναδικός.

Μέσω αυτού του πίνακα μπορούμε να βρούμε ποια είναι η πιο σημαντική κορυφή του γραφήματος  $(G, \vec{d})$  με την βοήθεια μέτρων κεντρικότητας (θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο σε αυτά).

#### Αλγόριθμος 6

Ο αλγόριθμος των [BFM19] που υλοποιήσαμε ο οποίος φαίνεται παρακάτω σε μορφή ψευδοκώδικα, έχοντας δεδομένο τον πίνακα γειτνίασης  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ενός γραφήματος με απορρόφηση  $(G, \vec{d})$   $n$  κορυφών, αφού πρώτα υπολογίσει τον Laplacian πίνακα μετά από μία ακολουθία πράξεων, καταλήγει στον υπολογισμό του Α.Γ.Α του γραφήματος αυτού. Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην σχέση  $L^d = (I_n - VD)Y(I_n - DV)$  [JT18] όπου  $Y$  είναι ένας γενικευμένος αντίστροφος ή  $\{1\}$ -αντίστροφος του Laplacian πίνακα του  $(G, \vec{d})$ ,  $V = \vec{v}\mathbf{1}^T / \bar{d}$  όπου  $\vec{v}$  ένα θετικό διάνυσμα στο  $\text{Ker}(L)$  και  $\bar{d} = d^T v$ .

**Algorithm 6:** Computation of an absorption inverse of Laplacian Matrix

**Data:** An adjacency matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  and absorption vector  $d \in \mathbb{R}^n$   
**Result:** An absorption inverse of the Laplacian matrix  $L^d$  or a Group inverse  $L^\#$

```

// Initializations of matrices
 $L^- = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $D = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $Y_1 = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $Y_2 = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $Y_3 = \mathbb{O}_{n \times n}$ 
 $L^d = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $W = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $L = \mathbb{O}_{n \times n}$ ,  $z = \mathbb{O}_{(n-1) \times 1}$ 
 $L_1 = \mathbb{O}_{(n-1) \times (n-1)}$ ,  $v = \mathbb{O}_{n \times 1}$ ,  $\bar{d} = 0$ 

 $[L, W] = \text{GetLaplacianMatrix}(A)$ 
 $L_1 = L(1:n-1, 1:n-1)$ 
 $z = L(1:n-1, n)$ 

// Computation of  $L_1^{-1}$ 
 $v = [-L_1^{-1} \cdot z; 1]$ 
 $\bar{d} = d^T v$ 
// Computation of matrix  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{1}$  is a column vector with  $n$  elements all equal
with  $\mathbf{1}$ 
 $V = (1/\bar{d}) \cdot v \cdot \mathbf{1}^T$ 

 $D = \text{diag}(d)$ 
 $L^- = [L_1^{-1} \mathbb{O}_{(n-1) \times 1}; \mathbb{O}_{1 \times (n-1)} \ 0]$ 

 $Y_1 = V \cdot D \cdot L^-$ 
 $Y_2 = L^- \cdot D \cdot V$ 
 $Y_3 = Y_1 \cdot D \cdot V$ 
 $L^d = L^- - Y_1 - Y_2 + Y_3$ 
// In graphs with no absorption,  $L^\# = L^- - Y_1 - Y_2 + Y_3$ 

```

Αν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε έναν Α.Γ.Α του Laplacian πίνακα ενός γραφήματος με απορρόφηση  $(G, \vec{d})$  με ένα οποιοδήποτε διάνυσμα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε απευθείας αυτό το γινόμενο χάρη στον παρακάτω αλγόριθμο των [BFM19] ο οποίος είναι πιο αποδοτικός από τον Αλγόριθμο 6 για τον υπολογισμό αυτών.

Να σημειωθεί ότι ο πίνακας  $L^-$  προκύπτει εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο 1 και στον παρακάτω αλγόριθμο τον θεωρούμε δεδομένο. Επίσης όταν το γράφημα δεν έχει απορρόφηση ισχύει ότι  $L^d = L^\#$  [JT18].

**Algorithm 7:** Computation of product  $L^d b$  for an absorption graph  $(G, d)$  with  $n$  vertices

**Data:**  $\{1, 2\}$ —inverse of the Laplacian matrix  $Lap, L^- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , an absorption vector  $d \in \mathbb{R}^n$  and a vector  $b \in \mathbb{R}^n$

**Result:** A vector  $L^d b \in \mathbb{R}^n$  which represents a centrality measure for  $(G, d)$

$\mathbf{v1} = \text{null}(Lap) \in \ker(Lap)$

// Normalize the vector  $\mathbf{v1}$

$\mathbf{v} = (1/\text{norm}(\mathbf{v1})) \cdot \mathbf{v1}$

$\bar{d} = d^T \mathbf{v}$

$D = \text{diag}(d)$

$V = (1/\bar{d}) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{1}^T$

$\mathbf{c} = \mathbf{b} - D \cdot V \cdot \mathbf{b}$

$\mathbf{x} = L^- \mathbf{c}$

// Computation of  $z = L^d b$

$z = \mathbf{x} - (1/\bar{d}) \cdot \mathbf{v}(d^T \mathbf{x})$

## § 2.5 Σύγκριση αλγορίθμων ως προς τον χρόνο εκτέλεσης

Στον πίνακα που φαίνεται παρακάτω, αναγράφονται οι χρόνοι εκτέλεσης των αλγορίθμων υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων του 2ου κεφαλαίου έπειτα από την μετατροπή τους σε κώδικα Matlab με χρήση συναρτήσεων χαμηλού υπολογιστικού κόστους. Οι εφαρμογές των αλγορίθμων έχουν γίνει με δεδομένο ένα γράφημα-αστέρι  $n$  κορυφών για διάφορες τιμές του  $n$ . Στο παράρτημα υπάρχει μία έκφραση σε γλώσσα Matlab η οποία υπολογίζει τον πίνακα γειννίαςης από ένα γράφημα-αστέρι καθώς και αντίστοιχες εκφράσεις για γραφήματα-μονοπάτι και κυκλικά γραφήματα. Οι αλγόριθμοι έχουν εκτελεστεί σε υπολογιστή που διαθέτει RAM 16GB και εξαπύρηννο επεξεργαστή 5ης γενιάς.



Πλήθος κορυφών	Αλγ. 1	Αλγ. 2	Αλγ. 4	Αλγ. 5	Αλγ. 6
10	0.001	0.0002	0.002	0.001	0.0002
100	0.008	0.008	0.009	0.04	0.001
300	0.035	0.09	0.094	0.35	0.008
600	0.102	0.432	0.438	1.38	0.04
1000	0.279	1.44	1.44	3.79	0.146
2000	1.3	5.65	6.36	15.27	0.59
3000	3.16	14.38	15.45	35.46	1.79
5000	10.0	55.5	57.61	100.8	5.71

Από τον παραπάνω πίνακα, προκύπτει η ακόλουθη κατάταξη των αλγορίθμων από τον υπολογιστικά καλύτερο αλγόριθμο στον υπολογιστικά χειρότερο.

1. Αλγόριθμος 6
2. Αλγόριθμος 1
3. Αλγόριθμος 4
4. Αλγόριθμος 2
5. Αλγόριθμος 5

Όπως παρατήρουμε από τους χρόνους του παραπάνω πίνακα ο Αλγόριθμος 6 είναι ο καλύτερος υπολογιστικά αλγόριθμος για αυτό τον προτείνουμε ως τον πιο αποδοτικό. Οι αλγόριθμοι 4 και 2 λόγω του ότι υπολογίζουν γενικευμένους αντίστροφους μέσω της ανάλυσης ιδιαιζουσών τιμών δεν είναι αποδοτικοί όταν εφαρμόζονται σε γραφήματα μεγάλης κλίμακας. Ο Αλγόριθμος 5 επειδή χρησιμοποιεί επαναληπτική διαδικασία εισάγεται επιπλέον υπολογιστικό κόστος, για αυτό και δεν μπορούμε να τον εφαρμόσουμε παρά μόνο σε γραφήματα με μικρό πλήθος κορυφών.

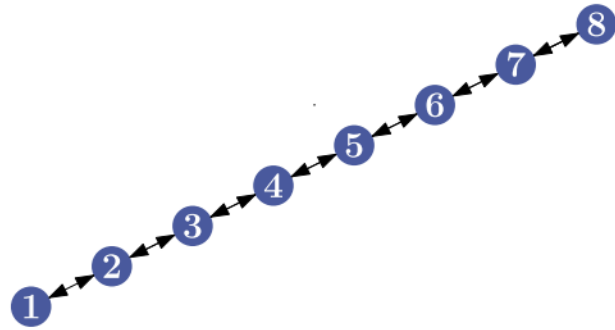
## Κεφάλαιο 3

# Μέτρα κεντρικότητας-Εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για τα μέτρα κεντρικότητας και θα δείξουμε εφαρμογές αυτών σε γραφήματα με απορρόφηση καθώς και σε γραφήματα πραγματικών δικτύων. Τέλος θα παρουσιάσουμε ένα καινούριο μέτρο κεντρικότητας και θα το συγκρίνουμε με τα ήδη υπάρχοντα μέτρα κεντρικότητας ως προς την αποτελεσματικότητά τους.

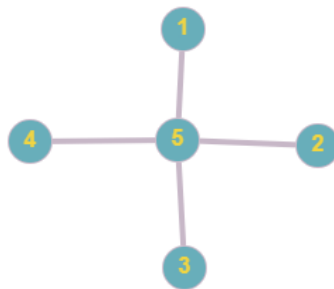
### § 3.1 Μέτρα κεντρικότητας

Τα μέτρα κεντρικότητας που αναφέρονται στο άρθρο των [BFM19] είναι μετρικές οι οποίες εφαρμόζονται σε ένα γράφημα με απορρόφηση  $(G, \vec{d})$   $n$  κορυφών και έχουν την μορφή ενός διανύσματος  $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$ . Μέσω αυτών των μετρικών μπορούμε με δεδομένο το γράφημα  $(G, \vec{d})$  να αποφανθούμε για το ποια είναι η πιο σημαντική κορυφή του. Εφόσον υπολογίσουμε μία μετρική, κάθε στοιχείο  $m_1, m_2, \dots, m_n$  είναι ο βαθμός σημαντικότητας κάθε κορυφής  $v_1, v_2, \dots, v_n$  [BFM19]. Η κορυφή η οποία έχει το μεγαλύτερο βαθμό σημαντικότητας είναι η πιο σημαντική κορυφή του γραφήματος. Για παράδειγμα, στο γράφημα-μονοπάτι του παρακάτω σχήματος (θεωρούμε διάνυσμα απορρόφησης  $\vec{d} = \mathbf{1}$ , όπου  $\mathbf{1} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ ) οι πιο σημαντικές κορυφές του γραφήματος αναμένουμε να είναι οι κορυφές 4 και 5 διότι αν αυτές οι κορυφές αφαιρεθούν από το γράφημα τότε το γράφημα χωρίζεται σε 2 γραφήματα τα οποία μοιάζουν λιγότερο με το αρχικό



Σχήμα 3.1

γράφημα σε σχέση με το αν αφαιρούσαμε από το γράφημα κάποια άλλη κορυφή. Αν αυξήσουμε τον βαθμό απορρόφησης μιας κορυφής του γραφήματος τότε η πιο σημαντική κορυφή επιλέγεται λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη την απόστασή της από την κορυφή που έχει τον υψηλότερο βαθμό απορρόφησης. Αντίστοιχα για το γράφημα-αστέρι 5 κορυφών του παρακάτω σχήματος αναμένουμε η πιο σημαντική κορυφή του να είναι η κεντρική διότι αν αφαιρεθεί από αυτό, τότε η δομή του γραφήματος καταστρέφεται.



Σχήμα 3.2

Το πιο σημαντικό στοιχείο κάθε μετρικής που εφαρμόζεται είναι ότι πρέπει να λαμβάνει υπόψη και την τοπολογία ενός γραφήματος αλλά και τους βαθμούς απορρόφησης των κορυφών του γραφήματος [BFM19]. Η μετρική που προτάθηκε στο άρθρο των [JT18] η οποία είναι  $\vec{m} = L^d \mathbf{1}$  όπου  $L^d$  ο Α.Γ.Α του Laplacian πίνακα δεν λαμβάνει υπόψη την τοπολογία του γραφήματος αλλά μόνο τους βαθμούς απορρόφησης των κορυφών. Ένα μειονέκτημα αυτής της μετρικής είναι ότι όταν δεν υπάρχει απορρόφηση, η μετρική δεν δίνει αποτέλεσμα.

Οι [BFM19] στο άρθρο τους πρότειναν 2 νέες μετρικές, τις  $\vec{m} = L^d \vec{w}$  για γράφημα με βάρη και διάνυσμα βαρών  $\vec{w}$  και  $\vec{m} = \text{diag}(L^d W)$  όπου  $W$  ο διαγώνιος πίνακας των βαθμών των κορυφών ενός γραφήματος με βάρη. Αυτές οι μετρικές λαμβάνουν υπόψη τόσο την τοπολογία όσο και τους βαθμούς απορρόφησης των κορυφών του γραφήματος και επίσης σε περίπτωση που δεν υπάρχει απορρόφηση στις κορυφές, οι μετρικές αυτές συνεχίζουν να ταξινομούν τις κορυφές. Όταν το γράφημα μας δεν έχει βάρη τότε αντί της μετρικής  $L^d \vec{w}$  χρησιμοποιούμε τη μετρική  $L^d \text{diag}(Deg)$ , όπου  $Deg$  ο διαγώνιος πίνακας των βαθμών και αντί της μετρικής  $\text{diag}(L^d W)$  χρησιμοποιούμε τη μετρική  $\text{diag}(L^d Deg)$ .

Παρακάτω βλέπουμε τα αποτελέσματα (βαθμοί απορρόφησης) της εφαρμογής των μετρικών ( $L^d \text{diag}(Deg)$  και  $\text{diag}(L^d Deg)$ ) σε ένα γράφημα-αστέρι 6 κορυφών για διανύσματα απορρόφησης  $\vec{d} = \mathbf{1}$  και  $\vec{d} = [2, 1, 1, 1, 1, 2]^T$ .

$L^d \text{diag}(Deg) (\vec{d} = \mathbf{1})$	$\text{diag}(L^d Deg) (\vec{d} = \mathbf{1})$
-0.1111	0.8056
-0.1111	0.8056
-0.1111	0.8056
-0.1111	0.8056
-0.1111	0.8056
0.5556	0.6944

$L^d \text{diag}(Deg) (\vec{d} = [2, 1, 1, 1, 1, 2]^T)$	$\text{diag}(L^d Deg) (\vec{d} = [2, 1, 1, 1, 1, 2]^T)$
-1.0000	0.6250
-0.2500	0.8750
-0.2500	0.8750
-0.2500	0.8750
-0.2500	0.8750
0.5000	0.6250

Όπως παρατηρούμε από τους παραπάνω πίνακες, οι μετρικές  $L^d \text{diag}(Deg)$  και  $\text{diag}(L^d Deg)$  λαμβάνουν υπόψη και την τοπολογία του γραφήματος που εφαρμόστηκαν καθώς και τους βαθμούς απορρόφησης κάθε κορυφής του γραφήματος αυτού.

Τώρα θα παρουσιάσουμε μία νέα μετρική στην οποία ο Α.Γ.Α του Laplacian πίνακα ενός γραφήματος με απορρόφηση  $(G, \vec{d})$  πολλαπλασιάζεται με το ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα γειννίας του γραφήματος αυτού για να δώσει τους βαθμούς σημαντικότητας κάθε κορυφής. Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής αυτής της μετρικής (έστω  $\vec{p}$ ) σε ένα γράφημα-αστέρι 6 κορυφών με διανύσματα απορρόφησης  $\vec{d} = \mathbf{1}$  και  $\vec{d} = [2, 1, 1, 1, 1, 2]^T$  αντίστοιχα.

$L^d \vec{p} (\vec{d} = \mathbf{1})$	$L^d \vec{p} (\vec{d} = [2, 1, 1, 1, 1, 2]^T)$
-0.010858	-0.206974
-0.010858	0.079057
-0.010858	0.079057
-0.010858	0.079057
-0.010858	0.079057
0.054289	0.048860

Βλέπουμε, ότι αυτή η μετρική όταν όλες οι κορυφές έχουν ίδιο βαθμό απορρόφησης δίνει ως πιο σημαντική κορυφή του γραφήματος την κεντρική. Αντιθέτως, όταν αυξάνουμε τον βαθμό απορρόφησης της κεντρικής κορυφής του γραφήματος (6) καθώς και μίας περιφερειακής (1), η μετρική αυτήν παρουσιάζει ευαισθησία σε αυτήν την αλλαγή. Αυτό σημαίνει ότι δίνει πιο πολύ βάση στους βαθμούς απορρόφησης παρά στην τοπολογία του γραφήματος. Έναντι των άλλων μετρικών αυτή απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό κόστος διότι απαιτείται ο υπολογισμός του ιδιοδιανύσματος.

Με βάση τα στοιχεία των παραπάνω πινάκων και λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες των μέτρων κεντρικότητας που συζητήσαμε, προτείνουμε την μετρική  $L^d \text{diag}(Deg)$  ή  $L^d \vec{w}$  όταν έχουμε γράφημα με βάρη, ως την πιο αποτελεσματική μετρική για την εύρεση της πιο σημαντικής κορυφής σε ένα γράφημα.

## § 3.2 Εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε 5 γραφήματα δικτύων πάνω στα οποία εφαρμόζουμε τα μέτρα κεντρικότητας που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 3.1 για να βρούμε τον πιο σημαντική κορυφή αυτών των δικτύων.

- Το *E-mail* είναι ένα γράφημα με 1133 κορυφές και 10902 ακμές το οποίο αναπαριστά ένα δίκτυο ανταλλαγής E-mail μεταξύ των μελών του Πανεπιστημίου Rovira i Virgili στην Ταραγόνα (Ισπανία) [Gui+03].
- Το *Autobahn* είναι ένα γράφημα με 1168 κορυφές και 2486 ακμές το οποίο περιγράφει την λειτουργία του συστήματος του εθνικού οδικού δικτύου της Γερμανίας. Οι κορυφές του γραφήματος αυτού αναπαριστούν τοποθεσίες της Γερμανίας ενώ οι ακμές αναπαριστούν τους αυτοκινητοδρόμους που συνδέουν αυτές [Kai].
- Το *Delaunay* είναι ένα γράφημα 2048 κορυφών και 12254 ακμών το οποίο αναπαριστά μια Delaunay διαίρεση σε τρίγωνα ενός διαγράμματος Voronoi 2048 κόμβων [Ber+11] [DK]. Κάθε κορυφή του γραφήματος αυτού αναπαριστά έναν κόμβο του διαγράμματος Voronoi ενώ κάθε ακμή αναπαριστά μια πλευρά ενός τριγώνου.
- Το *Power* είναι ένα γράφημα 4941 κορυφών και 13188 ακμών το οποίο αναπαριστά την τοπολογία του ηλεκτρικού δικτύου των δυτικών πολιτειών στις ΗΠΑ. Αρχικά η κατασκευή του έγινε από τους [WS98]. Κάθε κορυφή αυτού του γραφήματος αναπαριστά μια γεννήτρια ή έναν μετασχηματιστή και κάθε ακμή του αναπαριστά μια γραμμή τροφοδοσίας που τους συνδέει.
- Το *Yeast* είναι ένα γράφημα 2114 κορυφών και 4480 ακμών το οποίο περιγράφει το πως αλληλεπιδρούν οι πρωτεΐνες των ζυμομύκητων. Κάθε κορυφή του αναπαριστά μια πρωτεΐνη και κάθε ακμή του αναπαριστά την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο πρωτεϊνών [Jeo+01] [Sun+03].

Στον παρακάτω πίνακα, βλέπουμε τα αποτελέσματα της εφαρμογής των αλγορίθμων 6 και 7 οι οποίοι υπολογίζουν την μετρική  $L^d \text{diag}(Deg)$  για την εύρεση της πιο σημαντικής κορυφής των 5 γραφημάτων δικτύων. Στον πίνακα αυτόν βλέπουμε και τον χρόνο εκτέλεσης των αλγορίθμων 6 και 7 για τον υπολογισμό αυτών. Επειδή αυτά τα γραφήματα δεν έχουν απορρόφηση, θεωρούμε διάνυσμα απορρόφησης  $\vec{d} = \mathbf{1}$  για να αποφασίσουμε με βάση την τοπολογία του γραφήματος για την σημαντικότητα μίας κορυφής.

Γράφημα	Χρόνος εκτέλεσης Αλγ. 7	Χρόνος εκτέλεσης Αλγ. 6	Πιο σημαντική κορυφή
E-mail	0.008	0.173	110
Autobahn	0.0092	0.180	582
Delaunay	0.026	0.611	473
Power	0.133	5.53	2701
Yeast	0.0084	0.692	560

Από τους χρόνους εκτέλεσης των αλγορίθμων 6 και 7 στον παραπάνω πίνακα, αποδεικνύεται ότι ο αλγόριθμος 7 είναι πιο αποδοτικός από τον αλγόριθμο 6.

**Εικασία 3.1.** Για το γράφημα *Autobahn* η πιο σημαντική κορυφή (582) μας υποδηλώνει μία σημαντική Γερμανική τοποθεσία π.χ ένα μεγάλο αστικό κέντρο. Για το γράφημα *Delaunay* η πιο σημαντική κορυφή (473) μας υποδηλώνει ότι αν αφαιρεθεί από το διάγραμμα *Voronoi* καταστρέφει την δομή του. Για το γράφημα *Power* η πιο σημαντική κορυφή του (2701) μας υποδηλώνει έναν κεντρικό μετασηματιστή. Για το γράφημα *Yeast* η πιο σημαντική κορυφή (560) μας υποδηλώνει μία πρωτεΐνη η οποία είναι σημαντική για την αλληλεπίδραση της με άλλες πρωτεΐνες.

## Συμπεράσματα

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία υλοποιήσαμε αλγόριθμους υπολογισμού γενικευμένων αντίστροφων από πίνακες μη κατευθυνόμενων γραφημάτων. Εκτελέσαμε αριθμητικά παραδείγματα, μετατρέποντας τους σε μορφή πηγαίου εκτελέσιμου κώδικα σε γλώσσα Matlab με βάση τους επίσης υλοποιημένους ψευδοκώδικες αυτών. Επιπλέον, κατασκευάσαμε και παρουσιάσαμε στην πτυχιακή μας εργασία έναν αλγόριθμο υπολογισμού δύο τύπων γενικευμένων αντίστροφων του πίνακα προσπτώσεων ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος. Στην συνέχεια, συγκρίναμε τους υπό μελέτη αλγόριθμους ως προς τον χρόνο εκτέλεσής τους στο Matlab και προτείναμε τον αλγόριθμο 6 ως τον πιο αποδοτικό εξ' αυτών. Σε περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τον γενικευμένο αντίστροφο επί ένα διάνυσμα, τότε ο αλγόριθμος 7 είναι πιο αποδοτικός από τον αλγόριθμο 6.

Επιπλέον, παρουσιάσαμε μέτρα κεντρικότητας γραφημάτων για την εύρεση της σημαντικότερης κορυφής αυτών τα οποία προτείνονται στην βιβλιογραφία. Επίσης, δοκιμάσαμε ένα νέο μέτρο κεντρικότητας που βασίζεται στον υπολογισμό του ιδιοδιανύσματος της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του πίνακα γειννίας. Μελετήσαμε τις ιδιότητές τους και τα συγκρίναμε ως προς την απόδοση τους και την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα τους προτείνοντας ως πιο αποτελεσματικό το  $L^d \text{diag}(Deg)$  για γράφημα χωρίς βάρη και αντίστοιχα το  $L^d \vec{w}$  για γράφημα με βάρη. Στην συνέχεια, λόγω του ότι τα μέτρα κεντρικότητας προϋποθέτουν τον υπολογισμό του γενικευμένου αντίστροφου  $L^d$  επί ένα διάνυσμα, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο 7 ως τον πιο αποδοτικό για αυτόν τον υπολογισμό. Τέλος, μέσω αυτού του αλγορίθμου πραγματοποιήσαμε εφαρμογές σε πραγματικά δίκτυα για την εύρεση της πιο σημαντικής κορυφής τους.



# Βιβλιογραφία

- [1] M. Benzi, P. Fika, and M. Mitrouli. “Graphs with absorption: numerical methods for the absorption inverse and the computation of centrality measures”. In: *Linear Algebra and its Applications* 574 (2019), pp. 123–152.
- [2] M. Benzi, P. Fika, and M. Mitrouli. “Performance and stability of direct methods for computing generalized inverses of the graph Laplacian”. In: *Electronic Transactions on Numerical Analysis* 53 (2020), pp. 439–458.
- [3] M.De Berg et al. *Computational Geometry: Algorithms and applications*. 3rd edition. Springer, 2011.
- [4] J.A. Bondy and U.S.R Murty. *Graph Theory*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2008.
- [5] Richard A. Brualdi and Dragos Cvetkovic. *A combinatorial approach to matrix theory and its applications*. Discrete Mathematics and its applications. CRC Press, 2009.
- [6] S.L. Campbell and C.D. Meyer Jr. *Generalized inverses of linear transformations*. New York : Dover Pub. Inc., 1991.
- [7] Tim Davis and Scott Kolodziej. *The SuiteSparse Matrix Collection*. url: <https://sparse.tamu.edu/>.
- [8] Narsingh Deo. *Graph Theory with applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall Inc, 1974.
- [9] Susanna S. Epp. *Discrete Mathematics with Applications*. 3rd edition. Brooks Cole, 2003.
- [10] R. Guimera et al. “Self-similar community structure in a network of human interactions”. In: *Physical Review E* 68 (2003), pp. 65–103.
- [11] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [12] Adi Ben Israel and Thomas N.E Greville. *Generalized Inverses, Theory and Applications*. 2nd edition. Springer, 2003.
- [13] K.A. Jacobsen and J.H. Tien. “A generalized inverse for graphs with absorption”. In: *Linear Algebra and its Applications*. 537 (2018), pp. 118–147.
- [14] H. Jeong et al. “Lethality and centrality of protein networks”. In: *Nature* 411 (2001), pp. 41–42.
- [15] Nathaniel Johnston. *Introduction to Linear and Matrix Algebra*. Springer, 2021.
- [16] Volker Mehrmann Jörg Liesen. *Linear Algebra*. 1st edition. Springer, 2015.

- [17] Dr Marcus Kaiser. *Biological Networks Data Sets of Newcastle University*. url: <http://www.biological-networks.org/>.
- [18] Ivan Kyrchei. *Generalized Inverses*. Mathematics Research Developments. Nova, 2021.
- [19] Cesar O.Aguilar. *Graph Theory, SUNY Geneseo, Department of Mathematics*. url: <https://www.geneseo.edu/%20aguilar/public/notes/Graph-Theory-HTML/>.
- [20] Rao C. Radhakrishna and Mitra Sujit Kumar. *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*. John Wiley and Sons Inc, 1971.
- [21] Vaibhav Kumar Rai. *GeeksforGeeks*. url: <https://www.geeksforgeeks.org/1-u-decomposition-system-linearequations/?ref=lbp>.
- [22] S. Sun et al. “Topological structure analysis of the protein–protein interaction network in budding yeast”. In: *Nucleic Acids Research* 31 (2003), pp. 2443–2450.
- [23] D. J. Watts and S. H. Strogatz. “Collective dynamics of “smallworld” networks”. In: *Nature* 393 (1998), pp. 440–442.
- [24] Δονάτος Γ. και Αδάμ Μ. *Γραμμική Άλγεβρα Θεωρία και Εφαρμογές*. Gutenberg, 2008.
- [25] Δήμητρα Αλεξίου. *Μαθηματικά και Θεωρία Γραφημάτων για Μηχανικούς*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2022.
- [26] Μανωλόπουλος Ι. και Παπαδόπουλος Α. και Τσίγλας Κ. *Θεωρία και Αλγόριθμοι Γράφων*. Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, 2014.

# Παράρτημα

Στο παράρτημα της εργασίας αυτής παραθέτουμε τους πηγαίους κώδικες των αλγορίθμων σε γλώσσα Matlab καθώς και τις εντολές υπολογισμού πινάκων γειτνίασης για μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

## Κώδικας για $LD\bar{U}$ παραγοντοποίηση

```
function [L,D,u] = LDU_Beta (A)

n=size (A, 1);
[Lap,~]=Get_Laplacian_Matrix (A);
[L,U,P]=lu (Lap);
u=U;
temp=diag (U);
D=diag (temp);
for i=1:n
    if (U(i , i)~=0)
        u(i , :)=(1/U(i , i))*U(i , :);
    endif
endfor
endfunction
```

## Κώδικας για τον υπολογισμό Laplacian πίνακα

```
function [L,Deg] = Get_Laplacian_Matrix (A)

    s=sum(A,2);
    Deg=diag(s);
    L=Deg-A;
endfunction
```

## Κώδικας Αλγόριθμου 1

```
function [Lminus] = GI_Laplacian_LDU (A)
    n=size(A,1);
    Dminus=zeros(n,n);

    [Lap,~]=Get_Laplacian_Matrix(A);
    [L,D,u]=LDU_Beta(A);
    Linv=inv(L);
    u=L';
    uinv=inv(u);
    d=diag(D(1:n-1,1:n-1));
    dminus=d.^(-1);
    Dminus=[diag(dminus) zeros(n-1,1);zeros(1,n-1) 0];
    Lminus=uinv*Dminus*Linv;
endfunction
```

## Κώδικας Αλγόριθμου 2

```
function [Lplus] = Lap_Pseudo (A)

    n=size(A,1);
    [Lap,~]=Get_Laplacian_Matrix(A);
    k=rank(Lap);
    Delta=zeros(k,k);

    [U, Sigma ,V]=svd(Lap);
    Delta=Sigma(1:k,1:k);

    B=[inv(Delta) zeros(k,n-k); zeros(n-k,k) zeros(n-k,n-k)];
    Lplus=V*B*U';

endfunction
```

## Κώδικας Αλγόριθμου 4

```
function [Ag] = Incidence_SVD (A)
```

```
    [n,m]= size (A);
```

```
    k=min(m, n);
```

```
    X=zeros (k , n-k);
```

```
    Y=zeros (m-k , k);
```

```
    [U, Sigma ,V]=svd (A);
```

```
    Delta=Sigma (1:k , 1:k);
```

```
    if (k==m)
```

```
        Ag=V*[inv (Delta) X]*U';
```

```
    endif
```

```
    if (k==n)
```

```
        Ag=V*[inv (Delta) ; Y]*U';
```

```
    endif
```

```
endfunction
```

## Κώδικας Αλγόριθμου 5

```
function [Lhash] = GROUP_INVERSE (A)

n=size(A,1);
[L,~]=Get_Laplacian_Matrix(A);
k=rank(L);
a=zeros(k,1);

[l,u,p]=lu(L);

b=u(1:n,n);
G=L(1:n,1:k);

a(n-1)=b(n-1)/u(n-1,n-1);
for i=n-2:-1:1
    sum=0;
    for j=n-1:-1:i+1
        sum=sum+u(i,j)*a(j);
    endfor
    a(i)=(b(i)-sum)/u(i,i);
endfor

F=[eye(k) a];
C=F*G;
B=inv(C);
Lhash=G*B^2*F;
endfunction
```

## Κώδικας Αλγόριθμου 6

```
function [Ld] = Get_Absorption_Inverse (A,d)

n=size (A,1);
[L,~]=Get_Laplacian_Matrix (A);
l=L(1:n-1,1:n-1);
z=L(1:n-1,n);
l_inv=inv (l);

v=[(-1)*l_inv*z;1];
d_bar=d'*v;

V=(1/d_bar)*v*ones (1,n);
D=diag (d);
Lminus=[l_inv zeros (n-1,1); zeros (1,n-1) 0];

Y1=V*D*Lminus;
Y2=Lminus*D*V;
Y3=Y1*D*V;

Ld=Lminus-Y1-Y2+Y3;
endfunction
```



## Κώδικας Αλγόριθμου 7

```
function [Ld_b] = Get_Centrality_Measure (A,d,b)
```

```
n=size (A,1);
```

```
[Lap ,Deg]=Get_Laplacian_Matrix (A);
```

```
Lminus=GI_Laplacian_LDU (A);
```

```
v1=null (Lap);
```

```
v=(1/norm(v1))*v1;
```

```
d_bar=d'*v;
```

```
D=diag (d);
```

```
V=(1/d_bar)*v*(ones (n,1))';
```

```
c=b-D*V*b;
```

```
x=Lminus*c;
```

```
Ld_b=(1/d_bar)*(x-v*(d'*x));
```

```
endfunction
```

## Εντολές για τον υπολογισμό πινάκων γειτνίασης

*%Star-Graph of n vertices*

```
A=[zeros(n-1,n-1) ones(n-1,1) ; ones(1,n-1) 0];
```

*%Cycle graph of n vertices*

```
A=zeros(n,n)+diag(ones(n-1,1),1)+diag(1,n-1)+diag(ones(n-1,1),-1)  
+diag(1,-(n-1))
```

*%Path-Graph of n vertices*

```
A =zeros(n,n)+diag(ones(n-1,1),1)+diag(ones(n-1,1),-1)
```

