



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΚΑΙ
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ
ΣΧΗΜΑΤΟΣ - ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΣΕ
ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
MATLAB

ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΥΛΑ ΕΛΕΩΝΟΡΑ ΖΩΗ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ

Κούκιου Γεωργία
Πανεπιστημιακή Υπότροφος

Λαμία Μάρτιος 2022



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΣ ΟΜΟΕΙΔΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ ΚΑΙ
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΟΥΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ
ΣΧΗΜΑΤΟΣ - ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ
ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΣΕ
ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ
MATLAB

ΚΩΝΣΤΑΝΤΟΥΛΑ ΕΛΕΩΝΟΡΑ ΖΩΗ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ

Κούκιου Γεωργία
Πανεπιστημιακή Υπότροφος

Λαμία Μάρτιος 2022



UNIVERSITY OF
THESSALY

SCHOOL OF SCIENCE

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & TELECOMMUNICATIONS

SEGREGATION OF HOMOGENEIC OBJECTS
AND CLASSIFICATION BASED ON SHAPE
FEATURES – EVALUATION OF SHAPING
FEATURES IN SPECIFIC CASES USING
MATLAB

KONSTANTOULA ELEONORA ZOI

FINAL THESIS

ADVISOR

Koukiou Georgia
Academic Scholars

Lamia March 2022

«Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις ⁽¹⁾, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.

2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.

3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ.), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια

4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία:/...../20.....

Ο – Η Δηλ.

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.»

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αυτή η πτυχιακή εργασία έχει ως στόχο να καταγράψει την διαδικασία διαχωρισμού σχημάτων όμοιου εμβαδικού χώρου με κύριο κριτήριο τα σχηματικά χαρακτηριστικά τους. Αυτό θα επιτευχθεί με την παρουσίαση των τεχνικών τμηματοποίησης εικόνας και την εφαρμογή αυτής επάνω σε μια ρεαλιστική πειραματική διαδικασία. Για να καταγραφεί και να παρουσιαστεί η ροή των δεδομένων αυτών, αρχικά θα παρουσιαστούν πρώτα οι γενικές εννοιές της εικόνας, μετά των στοιχείων που την αποτελεί και τέλος οι βασικές διαδικασίες που ακολουθούμε κατά την επεξεργασία μιας εικόνα όπως η ανάλυση, μορφολογική επεξεργασία, ο μετασχηματισμός κλπ. Στη συνέχεια, θα αναλυθεί το κομμάτι της εξαγωγής των χαρακτηριστικών σήματος κατά κύριο λόγο με βάση τον υπολογισμό του εμβαδού τους. Έπειτα, θα ακολουθήσει η περιγραφική παρουσίαση και λειτουργική ανάλυση των βημάτων που ακολουθήθηκαν για την πειραματική εφαρμογή η οποία έλαβε μέρος και βασίστηκε σε δεδομένα που είχε το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής (ELLAB), μέρος του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών σε συνεργασία με την Ουρολογική Κλινική του Πανεπιστημιακού Νοσοκομείου Ρίου. Εν κατακλείδι, θα αναλύσουμε τα πειραματικά αποτελέσματα και θα εξάγουμε συμπεράσματα βάση των πειραματικών δεδομένων αλλά και των τεχνικών που παρουσιάστηκαν.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to record the process of the separation of shapes of the same area with the main criterion their schematic characteristics. In order to record and present the flow of this data, first the general meanings of the image will be presented, then the elements that constitute it and finally the basic procedures that we follow when processing an image such as analysis, morphological processing, transformation, etc. Next, the export part of the signal characteristics will be analyzed mainly based on the calculation of their area. Then, there will be a descriptive presentation and functional analysis of the steps followed for the experimental application which took part and was based on data held by the Electronics Laboratory (ELLAB), part of the Physics Department of the University of Patras in collaboration with the Serology Clinic of the University Rio Hospital. In conclusion, we will analyze the experimental results and draw conclusions based on the experimental data and the techniques presented.

Table of Contents

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	I
ABSTRACT	III
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>	<u>2</u>
1.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΗΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ	2
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΙΚΟΝΑ</u>	<u>4</u>
2.1 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ.....	4
2.1.Α ΕΙΔΗ ΤΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ.....	4
2.2 ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΙΚΟΝΑ	5
2.2.Α ΔΟΜΗ ΜΙΑΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ	5
2.2.Β ΕΙΔΗ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ.....	6
2.3 ΧΡΩΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.....	7
2.3.Α ΚΛΙΜΑΚΑ ΤΟΥ ΓΚΡΙ (GRAYSCALE)	7
2.3.Β RGB (RED-GREEN-YELLOW)	7
2.3.Γ ΑΣΠΡΟΜΑΥΡΕΣ ΕΙΚΟΝΕΣ	8
2.3.Δ CMYK (CYAN-MAGENTA-YELLOW-KEY).....	8
2.3 ΣΥΜΠΙΕΣΗ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ.....	9
2.4 ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΕΙΚΟΝΑΣ ΑΠΟ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΣΕ ΨΗΦΙΑΚΗ ΜΟΡΦΗ	9
2.4.Α ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΩΔΙΚΟΥ ΠΑΛΜΟΥ.....	9
2.4.Β ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ DELTA	12
2.4Γ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΙΚΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ DELTA	13
2.5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΜΗΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ	14
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑ - ΕΞΑΓΩΓΗ</u>	
<u>ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ.....</u>	<u>16</u>
3.1 ΟΡΙΣΜΟΣ	16
3.2 ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.	18
3.3 ΔΙΑΣΤΟΛΗ.....	19
3.4 ΔΙΑΒΡΩΣΗ.....	20
3.5 ΆΝΟΙΓΜΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΙΜΟ	21
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΣΧΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΑ-ΕΞΑΓΩΓΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ</u>	<u>24</u>
4.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.....	24
4.1.Α ΕΜΒΑΔΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	25
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ	25
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ	26
ΤΡΙΓΩΝΟ	26
Α. ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΥΨΟΣ.....	28

B. ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ.	28
Γ. ΤΡΕΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ.	28
ΤΡΑΠΕΖΙΟ.....	30
4.1.Β ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.....	30
4.1.Γ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.....	33
4.2. ΔΙΑΝΟΜΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ.....	36
4.2.Α ΔΙΑΝΟΜΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	36
ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ.....	37
ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΗ ΒΑΣΗ	38
4.2.Β ΔΙΑΝΟΜΗ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ	39
ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ ΜΙΑΣ ΒΑΣΗΣ.....	39
ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΙΣ ΒΑΣΕΙΣ.....	40
4.2.Γ ΔΙΑΝΟΜΗ ΕΚΤΑΣΗΣ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ	42
ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	42
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ	44
4.2.Δ ΔΙΑΝΟΜΗ ΕΚΤΑΣΗΣ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ	46
4.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΟΥ ΒΑΣΙΖΟΝΤΑΙ ΣΤΙΣ ΡΟΠΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.....	48
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</u>	<u>50</u>
<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</u>	<u>56</u>
<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</u>	<u>58</u>

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της πτυχιακής

Ερευνητικός σκοπός αυτής της πτυχιακής εργασίας αποτελούν οι μέθοδοι ανάλυσης και διαχωρισμού ομοειδών σχημάτων με στόχο την κατηγοριοποίηση και ταξινόμηση τους, χρησιμοποιώντας τους τελικώς στην εφαρμογή τους σε εργαστηριακά δεδομένα.

Σε πρώτο στάδιο, για την για την κατανόηση των εννοιών που θα χρησιμοποιηθούν θα αναλυθούν η έννοια της εικόνας, η δομή και τα χρωματικά μοντέλα αυτής. Έπειτα θα αναλυθεί η μέθοδος μετατροπής μιας αναλογικής εικόνας σε ψηφιακή αλλά και οι μέθοδοι μετασχηματισμού της.

Σε δεύτερο στάδιο, αναπτύσσονται και επεξηγούνται οι μέθοδοι για την εξαγωγή των χαρακτηριστικών ενός σχήματος με βάση μαθηματικούς μορφωτικούς μετασχηματισμούς εικόνας και μοντέλα όπως το άνοιγμα, το κλείσιμο αλλά και η διάβρωση εικόνας.

Σε τρίτο στάδιο, παρουσιάζονται οι ορισμοί των μαθηματικών σχέσεων που θα μας βοηθήσουν με βάση την σχηματική αναπαράσταση των αντικειμένων να εξάγουμε χαρακτηριστικά, όπως το εμβαδό, για την κατηγοριοποίηση τους ως προς την κατασκευή αλλά και ανάλυση των αλγορίθμων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των δεδομένων που θα μας δοθούν.

Στο τέταρτο στάδιο, έχουμε τα αποτελέσματα από την πειραματική εφαρμογή με βάση δεδομένα που μας παραχωρήθηκαν από το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής (ELLAB), Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών με την Ουρολογική Κλινική του Πανεπιστημιακού Νοσοκομείου. Τα δεδομένα αυτά εξάχθηκαν από ρουτίνες MATLAB που αναπτύχθηκαν στο Εργαστήριο Ηλεκτρονικής (ELLAB), Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών και στηρίζονται στους μαθηματικούς μετασχηματισμούς αλγορίθμους που περιγράφονται στα προηγούμενα κεφάλαια. Το πείραμα εστιάζει στην θρυμματίωση λίθων με διάφορες τεχνικές και στον υπολογισμό των γεωμετρικών τους χαρακτηριστικών. Αυτό θα έδινε τη δυνατότητα να εκτιμηθεί η αποτελεσματικότητα της θρυμματοποίησης εφόσον οι λίθοι ήταν μικροί ώστε να μπορούν να αποβληθούν χωρίς επέμβαση.

Τέλος, έχουμε την συμπερασματική ανάλυση με βάση τις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση και εξαγωγή των δεδομένων αυτών και εάν είναι εφικτό να κρίνουμε με βάση την πειραματική εφαρμογή εάν είναι εφικτή ή όχι η προσέγγισή αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Εικόνα

2.1 Ορισμός της εικόνας

Η έννοια της εικόνας θα πρέπει να ξεκινήσει από τον ορισμό της όπου σε ένα γενικής χρήσης λεξικό, όπως αυτό του Γ. Μπαμπινιώτη, συναντάμε ένα ευρύ φάσμα ορισμών, οι οποίοι όμως έχουν μία κοινή συνισταμένη: τη λέξη «αναπαράσταση». Η εικόνα επομένως είναι ένα μέσο αναπαράστασης.

Η εικόνα ορίζεται ως ομοίωμα της πραγματικότητας. Τα ομοιώματα αυτά μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες: εσωτερικά και εξωτερικά. Εσωτερικές είναι οι εικόνες που σχηματίζει ο άνθρωπος εγκέφαλος όταν αντιλαμβάνεται την εξωτερική πραγματικότητα. Τις αποκαλούμε και αλλιώς, παραστάσεις, και δημιουργούνται λόγω των ερεθισμάτων που δέχονται οι νευρώνες και εν συνέχεια τα οποία μεταφέρονται ως σήματα στον εγκέφαλο. Αντίθετα, εξωτερικές είναι οι εικόνες που ο άνθρωπος δημιουργεί για να εκφράσει και να επικοινωνήσει όσα έχει λάβει. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν, για παράδειγμα, ένα γκράφιτι, ένας ζωγραφικός πίνακας, οι αρχαιολογικές εικόνες, άρα και τα αρχιτεκτονικά σχέδια.

Αντίθετα, μία γρήγορη ματιά, λόγου χάρη, στις διαφορετικές τεχνολογίες με τις οποίες έχει απεικονιστεί το ανθρώπινο σώμα μέσω της τέχνης, αρκεί για να αντιληφθούμε πως η δημιουργία των ομοιωμάτων της πραγματικότητας είναι ιστορικά, κοινωνικά και πολιτισμικά συνδεδεμένη. Έτσι μπορούμε να πούμε πως δεν είναι εφικτό να δημιουργηθεί μία πιστή απομίμηση της πραγματικότητας, καθώς η εικόνα είναι μια διαφορετική οντότητα η οποία συνεπώς είναι αδύνατον να ταυτιστεί με το πρότυπό της.

Επομένως, εδώ μπορούμε να ορίσουμε την εικόνα ως ένα κώδικα με πληροφορίες, οι οποίες πληροφορίες δομούν την πραγματικότητα στην οποία ζει το άτομο αλλά και δομούν ένα νέο κώδικα τον οποίο δημιουργεί ο άνθρωπος ώστε να επικοινωνήσει με τον κόσμο γύρω του. Αυτές οι σκέψεις μας δίνουν ένα πιο σύνθετο ορισμό για την έννοια της εικόνας.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε πως οι εικόνες αποτελούν ιεραρχημένες και κωδικοποιημένες συνθέσεις πληροφοριών με σκοπό την επικοινωνία. Συνήθως με τη λέξη «εικόνα» εννοούμε τις οπτικές εικόνες, αλλά σε ένα ευρύτερο φάσμα μπορούν να θεωρηθούν και ως νοητικές κωδικοποιήσεις της πρόσληψης ερεθισμάτων και ταυτόχρονα μέσα επικοινωνίας, όπου εκεί δεν αναφερόμαστε μόνο στο πεδίο της όρασης, αλλά μπορούν να είναι π.χ. και ήχοι.

2.1.α Είδη της εικόνας

Οι εικόνες μπορεί να είναι διδιάστατες, όπως φωτογραφία ή ότι προβάλλει μια οθόνη, ή τρισδιάστατες, όπως εάν άγαλμα ή εάν ολόγραμμα. Έτσι, η λέξη εικόνα χρησιμοποιείται επίσης με την ευρύτερη έννοια οποιασδήποτε διδιάστατης φιγούρας, όπως ένας χάρτης, ένα γράφημα, ένας πίνακας ζωγραφικής ή ένα γκράφιτι. Επίσης, η εικόνα μπορεί να υπάρχει σε δυο εκδοχές είτε ασπρόμαυρη είτε πολύχρωμη.

Οι εικόνες χωρίζονται σε δυο βασικές κατηγορίες: την αναλογική εικόνα (analog image) και την ψηφιακή εικόνα (virtual image).

Η αναλογική εικόνα ορίζεται ως << η εικόνα που σχηματίζεται όταν οι φωτεινές ακτίνες που προέρχονται από ένα αντικείμενο συναντώνται

πραγματικά μεταξύ τους μετά από ανάκλαση ή διάθλαση>>. Αντίθετα, η ψηφιακή εικόνα είναι <<αυτή η εικόνα η οποία σχηματίζεται όταν οι ακτίνες φωτός που προέρχονται από ένα αντικείμενο δεν συναντώνται στην πραγματικότητα, αλλά φαίνεται να συναντώνται όταν παράγονται προς τα πίσω>>.

2.2 Ψηφιακή εικόνα

Μια ψηφιακή εικόνα είναι μια αναπαράσταση μιας πραγματικής εικόνας ως ένα σύνολο αριθμών που μπορεί να αποθηκευτεί και να χειριστεί ένας ψηφιακός υπολογιστής.

Οι ψηφιακές εικόνες έχουν πολλά βασικά χαρακτηριστικά. Ένα από αυτά είναι ο τύπος της εικόνας που μας δίνει λεπτομέρειες σχετικά με το πώς δημιουργείται και προβάλλεται το χρώμα, για παράδειγμα μια ασπρόμαυρη εικόνα καταγράφει μόνο την ένταση του φωτός που πέφτει στα pixel και ένα άλλο είναι η μορφή της εικόνας που παρέχει περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τον τρόπο διάταξης των αριθμών στο αρχείο εικόνας, συμπεριλαμβανομένου του είδους συμπίεσης που χρησιμοποιείται εάν χρησιμοποιείται, για παράδειγμα οι εικόνες JPEG έχουν το πλεονέκτημα της ταχύτητας, επομένως είναι κατάλληλες για κινηματογραφικές ταινίες.

Ένα από τα πλεονεκτήματα των ψηφιακών εικόνων έναντι των παραδοσιακών είναι η δυνατότητα μεταφοράς τους ηλεκτρονικά σχεδόν στιγμιαία και η εύκολη μετατροπή τους από το ένα μέσο στο άλλο, όπως από μια ιστοσελίδα σε μια οθόνη υπολογιστή σε έναν εκτυπωτή.

Ένα μεγαλύτερο πλεονέκτημα είναι η δυνατότητα να τα αλλάζει κανείς ανάλογα με τις ανάγκες του καθώς υπάρχουν πολλά διαθέσιμα προγράμματα που δίνουν τη δυνατότητα να το κάνει αυτό κάποιος, όπως το Photoshop.

Με ένα τέτοιο πρόγραμμα, ένας χρήστης μπορεί να αλλάξει τα χρώματα και τη φωτεινότητα μιας εικόνας, να διαγράψει ανεπιθύμητα ορατά αντικείμενα, να μετακινήσει άλλα και να συγχωνεύσει αντικείμενα από πολλές εικόνες, μεταξύ πολλών άλλων λειτουργιών. Με αυτόν τον τρόπο ένας χρήστης μπορεί να “πειράξει” στοιχεία στις οικογενειακές φωτογραφίες ή ακόμα και να δημιουργήσει νέες εικόνες. Άλλα λογισμικά, όπως επεξεργαστές κειμένου και προγράμματα επιτραπέζιων εκδόσεων, μπορούν εύκολα να συνδυάσουν ψηφιακές εικόνες με κείμενο για την παραγωγή βιβλίων ή περιοδικών πολύ πιο αποτελεσματικά από ό,τι με τις παραδοσιακές μεθόδους.

2.2.α Δομή μιας ψηφιακής εικόνας

Μια ψηφιακή εικόνα είναι μια εικόνα που αποτελείται από στοιχεία εικόνας, γνωστά και ως εικονοστοιχεία (Pixels), το καθένα με πεπερασμένες, διακριτές ποσότητες αριθμητικής αναπαράστασης για την έντασή του ή το επίπεδο του γκρι που είναι μια έξοδος από τις δισδιάστατες συναρτήσεις του που τροφοδοτούνται ως είσοδος από τις χωρικές συντεταγμένες του που συμβολίζονται με x , y στον άξονα x και στον άξονα y , αντίστοιχα.

Οι ψηφιακές εικόνες μπορούν να προβληθούν και να υποβληθούν σε επεξεργασία σε υπολογιστή και μπορούν να χωριστούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες με βάση τα χαρακτηριστικά τους: τα bitmaps και τις διανυσματικές εικόνες (vector images).

Τα bitmaps βασίζονται σε μοτίβα εικονοστοιχείων που συνήθως αντιπροσωπεύονται από έναν ψηφιακό πίνακα, παραδείγματα των οποίων είναι τα BMP, PNG, JPG και GIF.

Οι διανυσματικές εικόνες (vector images) είναι απείρως κλιμακούμενες και δεν έχουν εικονοστοιχεία (pixels), καθώς χρησιμοποιούν μαθηματικούς τύπους για να σχεδιάζουν γραμμές και καμπύλες. Μια εικόνα τύπου bitmap μεγέθους $M \times N$ αποτελείται από πεπερασμένα στοιχεία M σειρών και N στηλών. Κάθε στοιχείο έχει μια συγκεκριμένη θέση και πλάτος, που αντιπροσωπεύει τις πληροφορίες στη θέση, όπως η κλίμακα του γκρι και το χρώμα. Αυτά τα στοιχεία ονομάζονται στοιχεία εικόνας ή εικονοστοιχεία (pixels).

2.2.β Είδη ψηφιακής εικόνας

Ανάλογα με τις πληροφορίες που αντιπροσωπεύονται από κάθε pixel, οι εικόνες μπορούν να χωριστούν σε δυαδικές εικόνες (binary images), εικόνες σε κλίμακα του γκρι (grayscale images), εικόνες RGB (RGB images) και εικόνες ευρετηρίου (index images).

Δυαδική εικόνα: Σε μια δυαδική εικόνα, η τιμή του εικονοστοιχείου αντιπροσωπεύεται από 0 ή 1. Γενικά, το 0 είναι για το μαύρο και το 1 για το λευκό.

Εικόνα σε κλίμακα του γκρι: Η εικόνα σε κλίμακα του γκρι προσθέτει ένα βάθος χρώματος μεταξύ μαύρου και λευκού στη δυαδική εικόνα για να σχηματίσει μια εικόνα σε κλίμακα του γκρι. Τέτοιες εικόνες εμφανίζονται συνήθως ως κλίμακες του γκρι από το πιο σκούρο μαύρο έως το πιο φωτεινό λευκό και κάθε βάθος χρώματος ονομάζεται κλίμακα του γκρι, που συνήθως υποδηλώνεται με L . Στις εικόνες σε κλίμακα του γκρι, τα εικονοστοιχεία μπορούν να λάβουν ακέραιες τιμές μεταξύ 0 και $L-1$.

Εικόνα RG: Σε εικόνες RGB ή έγχρωμες, οι πληροφορίες για κάθε pixel απαιτούν μια πλειάδα αριθμών για να αναπαρασταθούν. Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν τρισδιάστατο πίνακα για να αναπαραστήσουμε μια εικόνα. Σχεδόν όλα τα χρώματα στη φύση μπορούν να αποτελούνται από τρία χρώματα: κόκκινο (R), πράσινο (G) και μπλε (B). Έτσι, κάθε pixel μπορεί να αναπαρασταθεί από μια κόκκινη/πράσινη/μπλε πλειάδα σε μια εικόνα RGB.

Ευρετηριασμένη εικόνα: Μια εικόνα με ευρετήριο αποτελείται από μια μήτρα χρωματικού χάρτη, η οποία χρησιμοποιεί απευθείας αντιστοίχιση τιμών εικονοστοιχείων σε έναν πίνακα σε τιμές χρωματικού χάρτη. Το χρώμα κάθε pixel σε μια εικόνα προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την αντιστοιχη τιμή.

2.3 Χρωματικά μοντέλα

Οι εικόνες κατά βάση χωρίζονται σε 4 κατηγορίες χρωματικών συνθέσεων οι οποίες είναι αυτές με βάση την κλίμακα του γκρι (grayscale), οι RGB (red, green blue), οι ασπρόμαυρες εικόνες, και τέλος οι CMYK (Cyan-Magenta-Yellow-Key).

2.3.α Κλίμακα του γκρι (Grayscale)

Η κλίμακα του γκρι (Grayscale) είναι μια σειρά μονόχρωμων αποχρώσεων από μαύρο έως λευκό. Επομένως, μια εικόνα σε κλίμακα του γκρι περιέχει μόνο αποχρώσεις του γκρι και καθόλου χρώμα.

Οι ψηφιακές εικόνες μπορούν να αποθηκευτούν ως εικόνες σε κλίμακα του γκρι αλλά και οι έγχρωμες εικόνες παρόλο που εξ ονόματος δεν αποτελούνται μόνο από χρώματα κλίμακας του γκρι περιέχουν πληροφορίες σε κλίμακα του γκρι. Αυτό συμβαίνει επειδή κάθε pixel έχει μια τιμή φωτεινότητας, ανεξάρτητα από το χρώμα του. Η φωτεινότητα μπορεί επίσης να περιγραφεί και ως ένταση, η οποία μπορεί να μετρηθεί σε μια κλίμακα από το μαύρο (μηδενική ένταση) έως το λευκό (πλήρης ένταση). Οι περισσότερες μορφές αρχείων εικόνας υποστηρίζουν τουλάχιστον 8-bit κλίμακα του γκρι, που παρέχει 2^8 ή 256 επίπεδα φωτεινότητας ανά pixel. Ορισμένες μορφές υποστηρίζουν 16-bit κλίμακα του γκρι, το οποίο παρέχει 2^{16} ή 65.536 επίπεδα φωτεινότητας.

Πολλά προγράμματα επεξεργασίας εικόνας επιτρέπουν την μετατροπή μιας έγχρωμης εικόνας σε ασπρόμαυρη ή σε κλίμακα του γκρι. Αυτή η διαδικασία αφαιρεί όλες τις πληροφορίες χρώματος, αφήνοντας μόνο τη φωτεινότητα κάθε pixel. Ορισμένα προγράμματα παρέχουν άλλους προσαρμοσμένους αλγόριθμους μετατροπής σε κλίμακα του γκρι που μπορούν να επιτρέπουν να δημιουργηθεί μια ασπρόμαυρη εικόνα.

Ενώ η κλίμακα του γκρι είναι μια σημαντική πτυχή των ψηφιακών εικόνων, ισχύει και για τα έντυπα έγγραφα καθώς το πλαίσιο διαλόγου εκτύπωσης που εμφανίζεται μπορεί να περιλαμβάνει μια επιλογή κλίμακας του γκρι. Με αυτή την επιλογή, οι πληροφορίες χρώματος θα αφαιρεθούν από το έγγραφο πριν εκτυπωθεί.

2.3.β RGB (Red-Green-Yellow)

Το χρωματικό μοντέλο RGB σχετίζεται πολύ στενά με τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε το χρώμα με τους υποδοχείς r (red=κόκκινο), g (green=πράσινο) και b (blue=μπλε) στον αμφιβληστροειδή μας. Το RGB χρησιμοποιεί πρόσθετη ανάμειξη χρωμάτων και είναι το βασικό μοντέλο χρώματος που χρησιμοποιείται στην τηλεόραση ή σε οποιοδήποτε άλλο μέσο που προβάλλει το χρώμα χρησιμοποιώντας το φως.

Είναι το βασικό μοντέλο χρώματος που χρησιμοποιείται σε υπολογιστές και για γραφικά Ιστού (www), αλλά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παραγωγή εκτύπωσης.

Τα δευτερεύοντα χρώματα του RGB - κυανό, ματζέντα και κίτρινο - σχηματίζονται με την ανάμειξη δύο από τα βασικά χρώματα (κόκκινο, πράσινο ή μπλε) και εξαιρώντας το τρίτο χρώμα. Το κόκκινο και το πράσινο

συνδυάζονται για να κάνουν κίτρινο, το πράσινο και το μπλε για να κάνουν κυανό και το μπλε και το κόκκινο σχηματίζουν ματζέντα. Ο συνδυασμός κόκκινου, πράσινου και μπλε σε πλήρη ένταση κάνει το λευκό.

Στα εργαλεία επεξεργασίας εικόνας όπως το photoshop, χρησιμοποιώντας τη λειτουργία «οθόνης» για τα διαφορετικά επίπεδα μιας εικόνας, οι εντάσεις αναμειγνύονται μεταξύ τους σύμφωνα με το μοντέλο πρόσθετης ανάμειξης χρωμάτων.

2.3.γ Ασπρόμαυρες εικόνες

Οι ασπρόμαυρες εικόνες αποτελούνται μόνο δύο χρώματα μαύρο και λευκό γι αυτό και τις αποκαλούμε και δυαδικές εικόνες καθώς αποτελούνται από 2 pixel. Αυτές είναι εικόνες των οποίων τα pixel έχουν μόνο δύο πιθανές τιμές έντασης. Αριθμητικά, οι δύο τιμές είναι συχνά 0 για το μαύρο και είτε 1 είτε 255 για το λευκό.

Οι δυαδικές εικόνες παράγονται συχνά με το όριο μιας εικόνας σε κλίμακα του γκρι ή έγχρωμης εικόνας, προκειμένου να διαχωριστεί ένα αντικείμενο στην εικόνα από το φόντο. Το χρώμα του αντικειμένου (συνήθως λευκό) αναφέρεται ως χρώμα προσκηνίου. Το υπόλοιπο (συνήθως μαύρο) αναφέρεται ως χρώμα φόντου. Ωστόσο, ανάλογα με την εικόνα που πρόκειται να καθοριστεί κατώφλι, αυτή η πολικότητα μπορεί να αντιστραφεί, οπότε το αντικείμενο εμφανίζεται με 0 και το φόντο είναι με μη μηδενική τιμή.

Μερικοί μορφολογικοί τελεστές υποθέτουν μια ορισμένη πολικότητα της δυαδικής εικόνας εισόδου, έτσι ώστε αν επεξεργαστούμε μια εικόνα με αντίστροφη πολικότητα, ο τελεστής θα έχει το αντίθετο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, εάν εφαρμόσουμε έναν τελεστή κλεισίματος σε ένα μαύρο κείμενο σε ένα λευκό φόντο, το κείμενο θα ανοίξει.

Επίσης, η λειτουργία ασπρόμαυρης σάρωσης χρησιμοποιείται συνήθως για έγγραφα που περιέχουν κείμενο, όπου ό,τι είναι τυπωμένος χαρακτήρας εμφανίζεται ως μαύρο στη σάρωση και το φόντο λευκό (μη εκτυπωμένο). Η ασπρόμαυρη λειτουργία αναγκάζει οτιδήποτε πιο σκούρο από ένα συγκεκριμένο όριο σε μαύρο και οτιδήποτε άλλο σε λευκό. Αυτό κάνει τα περισσότερα έγγραφα πιο ευανάγνωστα και με μια καλύτερη αναπαράσταση του πρωτοτύπου.

2.3.δ CMYK (Cyan-Magenta-Yellow-Key)

Αυτό είναι ένα χρωματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται κατά κύριο λόγο για εκτύπωση ψηφιακών εικόνων. Το μαύρο (Key = Key Plate - μια θέση εκτύπωσης που χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή του πιο σκούρου χρώματος αντίθεσης, συχνά μαύρο) προστίθεται ως ξεχωριστό χρώμα αντί να αναμειγνύονται τα άλλα τρία χρώματα για την παραγωγή μαύρου.

Είναι ένα αφαιρετικό μοντέλο (Κυανό, Ματζέντα και Κίτρινο = Λευκό). Συνήθως είναι καλύτερο να επιτρέπεται σε ένα τυπογραφείο να κάνει τη μετατροπή RGB σε CMYK, καθώς υπάρχουν πολλά μοντέλα CMYK, καθένα από τα οποία ταιριάζει με μια συγκεκριμένη διαδικασία εκτύπωσης.

2.3 Συμπίεση ψηφιακής εικόνας

Οι ψηφιακές εικόνες τείνουν να παράγουν μεγάλα αρχεία και συχνά συμπιέζονται για να κάνουν τα αρχεία μικρότερα. Η συμπίεση εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι πολλά κοντινά pixel στην εικόνα έχουν παρόμοια χρώματα ή φωτεινότητα. Αντί να καταγράφει κανείς κάθε pixel ξεχωριστά, μπορεί να καταγράψει ότι, για παράδειγμα, «τα 100 pixel γύρω από μια συγκεκριμένη θέση είναι όλα λευκά». Οι μέθοδοι συμπίεσης ποικίλλουν ως προς την αποτελεσματικότητα και την ταχύτητά τους. Η μέθοδος GIF έχει καλή συμπίεση για εικόνες 8 bit, ενώ το JPEG έχει απώλειες, δηλαδή προκαλεί κάποια υποβάθμιση της εικόνας.

2.4 Μετατροπή εικόνας από αναλογική σε ψηφιακή μορφή

2.4.α Διαμόρφωση κωδικού παλμού

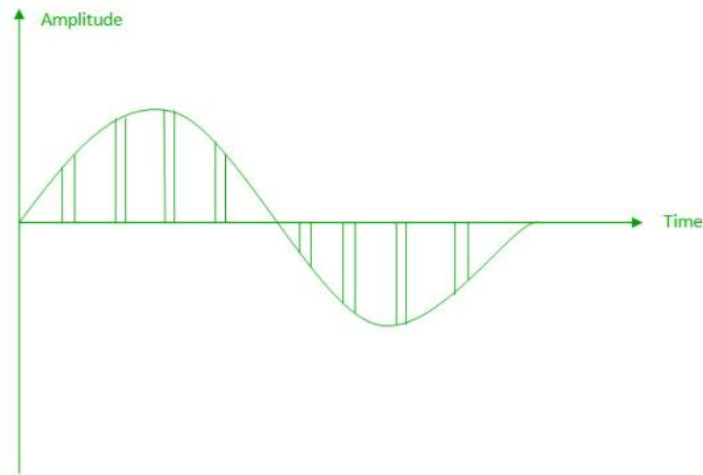
Η πιο κοινή τεχνική για την αλλαγή ενός αναλογικού σήματος σε ψηφιακά δεδομένα ονομάζεται διαμόρφωση κωδικού παλμού (PCM). Ένας κωδικοποιητής PCM έχει τις ακόλουθες τρεις διαδικασίες:

- A. Δειγματοληψία
- B. Κβαντισμός
- C. Κωδικοποίηση

Φίλτρο χαμηλής διέλευσης :

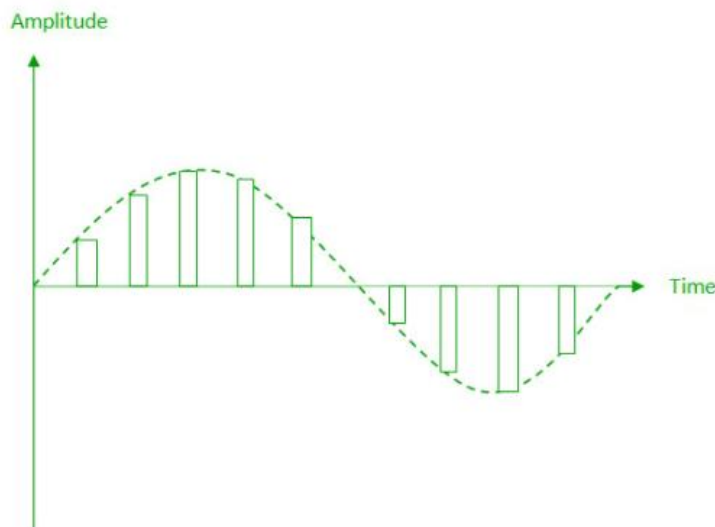
Το φίλτρο χαμηλής διέλευσης εξαλείφει τα εξαρτήματα υψηλής συχνότητας που υπάρχουν στο αναλογικό σήμα εισόδου για να διασφαλίσει ότι το σήμα εισόδου στο δειγματολήπτη είναι απαλλαγμένο από τα ανεπιθύμητα στοιχεία συχνότητας. Αυτό γίνεται για να αποφευχθεί η αλλοίωση του σήματος του μηνύματος.

- A. Δειγματοληψία: Το πρώτο βήμα στο PCM είναι η δειγματοληψία. Η δειγματοληψία είναι μια διαδικασία μέτρησης του πλάτους ενός σήματος συνεχούς χρόνου σε διακριτές στιγμές, μετατρέποντας το συνεχές σήμα σε διακριτό σήμα. Υπάρχουν τρεις μέθοδοι δειγματοληψίας:
 - Ιδανική δειγματοληψία: Στην ιδανική δειγματοληψία, γνωστή και ως Στιγμιαία δειγματοληψία, δειγματοληπτούνται παλμοί στιγμιαίας δειγματοληψίας από το αναλογικό σήμα. Αυτή είναι μια ιδανική μέθοδος δειγματοληψίας και δεν μπορεί να εφαρμοστεί εύκολα.
 - Φυσική δειγματοληψία: Η φυσική δειγματοληψία είναι μια πρακτική μέθοδος δειγματοληψίας στην οποία οι παλμοί έχουν πεπερασμένο πλάτος ίσο με T. Το αποτέλεσμα είναι μια ακολουθία δειγμάτων που διατηρούν το σχήμα του αναλογικού σήματος.



Εικόνα 2.1

- Δειγματοληψία επίπεδης κορυφής: Σε σύγκριση με τη φυσική δειγματοληψία, η δειγματοληψία επίπεδης κορυφής μπορεί εύκολα να ληφθεί. Σε αυτήν την τεχνική δειγματοληψίας, η κορυφή των δειγμάτων παραμένει σταθερή χρησιμοποιώντας ένα κύκλωμα. Αυτή είναι η πιο κοινή μέθοδος δειγματοληψίας που χρησιμοποιείται.



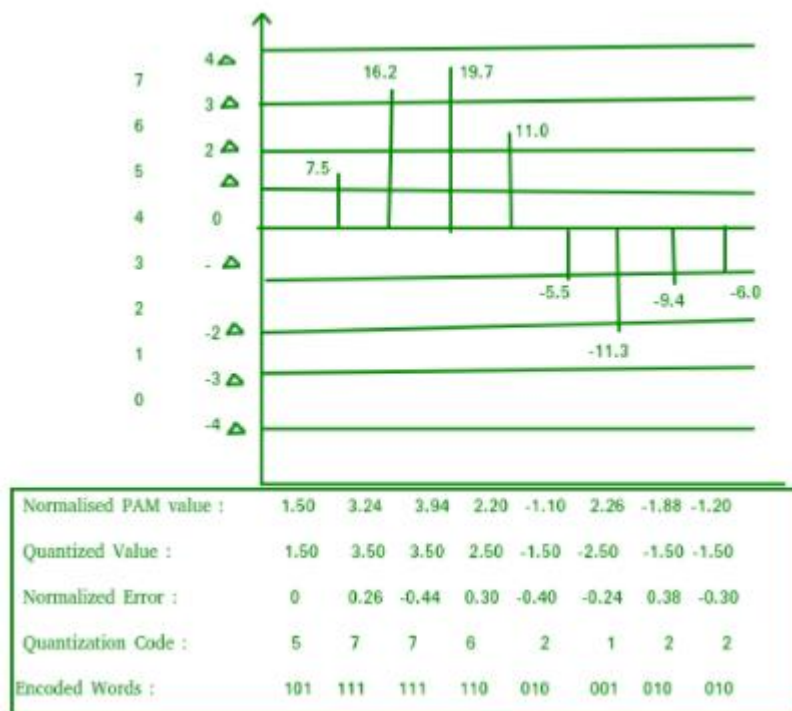
Εικόνα 2.2

Θεώρημα Nyquist: Μια σημαντική παράμετρος είναι ο ρυθμός ή η συχνότητα δειγματοληψίας. Σύμφωνα με το θεώρημα Nyquist, ο ρυθμός δειγματοληψίας πρέπει να είναι τουλάχιστον 2 φορές η υψηλότερη συχνότητα που περιέχεται στο σήμα. Είναι επίσης γνωστό ως το ελάχιστο ποσοστό δειγματοληψίας και δίνεται από: $F_s = 2 \cdot f_h$

- Β. Κβαντοποίηση :Το αποτέλεσμα της δειγματοληψίας είναι μια σειρά παλμών με τιμές πλάτους μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου πλάτη του σήματος. Το σύνολο των πλατών μπορεί να είναι άπειρο με μη ολοκληρωμένες τιμές μεταξύ δύο ορίων.

Τα παρακάτω είναι τα βήματα στην κβαντοποίηση:

- i. Υποθέτουμε ότι το σήμα έχει πλάτη μεταξύ V_{max} και V_{min}
- ii. Το χωρίζουμε σε ζώνες L καθεμία ύψους d όπου, $d = (V_{max} - V_{min}) / L$
- iii. Η τιμή στην κορυφή κάθε δειγματος στο γράφημα δείχνει το πραγματικό πλάτος.
- iv. Η κανονικοποιημένη τιμή διαμόρφωσης πλάτους παλμού (PAM) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο πλάτος/ d .
- v. Μετά από αυτό υπολογίζουμε την κβαντισμένη τιμή που επιλέγει η διαδικασία από τη μέση κάθε ζώνης.
- vi. Το κβαντισμένο σφάλμα δίνεται από τη διαφορά μεταξύ κβαντισμένων τιμών και κανονικοποιημένων τιμών PAM.
- vii. Ο κώδικας κβαντοποίησης για κάθε δείγμα με βάση τα επίπεδα κβαντοποίησης στα αριστερά του γραφήματος.



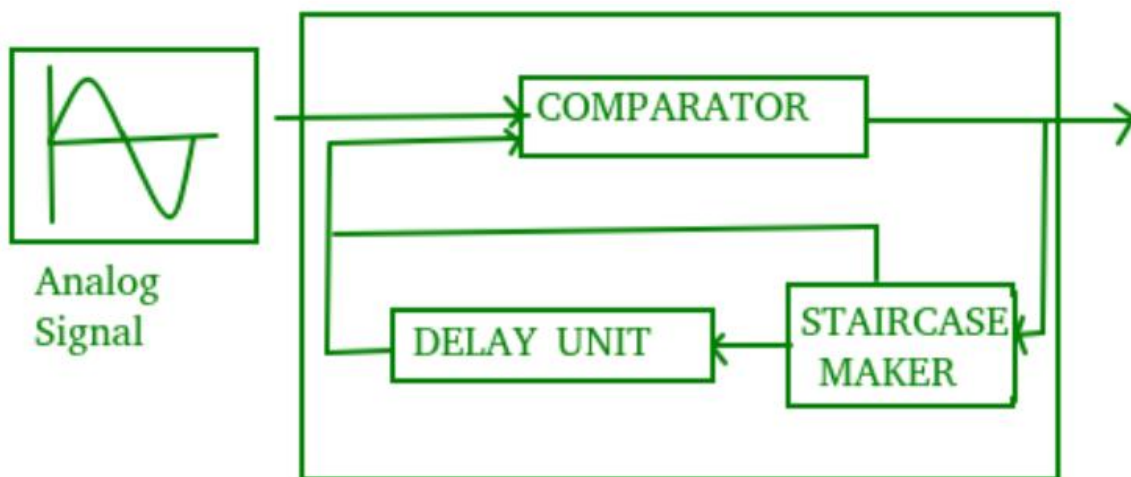
Εικόνα 2.3

C. Κωδικοποίηση: Η ψηφιοποίηση του αναλογικού σήματος γίνεται από τον κωδικοποιητή. Μετά την κβαντοποίηση κάθε δειγματος και τον καθορισμό του αριθμού των bit ανά δείγμα, κάθε δείγμα μπορεί να αλλάξει σε έναν κωδικό n bit. Η κωδικοποίηση ελαχιστοποιεί επίσης το χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης.

2.4.β Διαμόρφωση Delta

Δεδομένου ότι το PCM είναι μια πολύ περίπλοκη τεχνική, έχουν αναπτυχθεί άλλες τεχνικές για τη μείωση της πολυπλοκότητας του PCM. Η απλούστερη είναι η διαμόρφωση δέλτα. Η διαμόρφωση Delta βρίσκει την αλλαγή από την προηγούμενη τιμή.

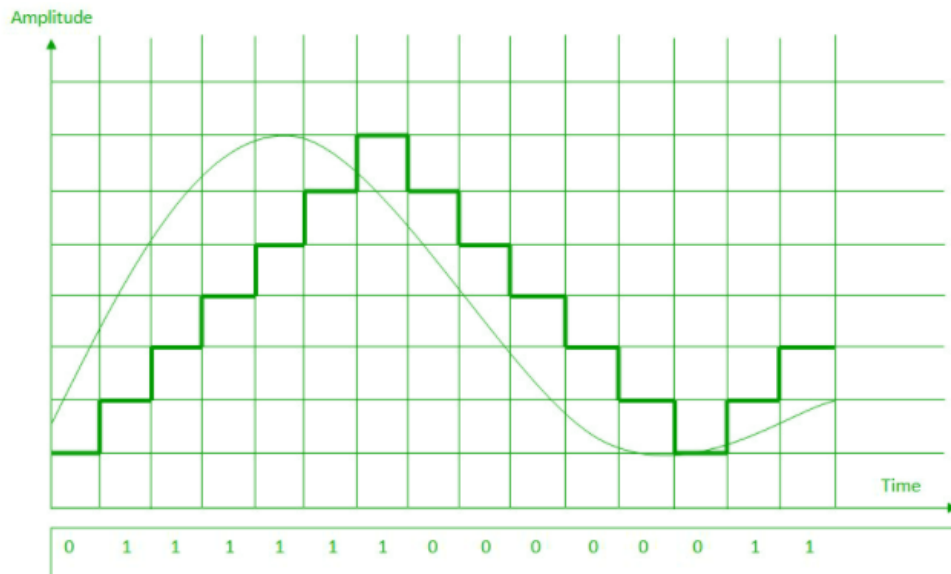
Διαμορφωτής – Ο διαμορφωτής χρησιμοποιείται στην τοποθεσία αποστολέα για τη δημιουργία μιας ροής bit από ένα αναλογικό σήμα. Η διαδικασία καταγράφει μια μικρή θετική αλλαγή που ονομάζεται δέλτα. Εάν το δέλτα είναι θετικό, η διαδικασία καταγράφει ένα 1, ενώ η διαδικασία καταγράφει ένα 0. Ο διαμορφωτής δημιουργεί ένα δεύτερο σήμα που μοιάζει με σκάλα. Στη συνέχεια, το σήμα εισόδου συγκρίνεται με αυτό το σταδιακά κατασκευασμένο σήμα σκάλας (Εικόνα 2.4)



Εικόνα 2.4

Ετσι υπάρχουν οι ακόλουθοι κανόνες για την έξοδο (Εικόνα 2.5):

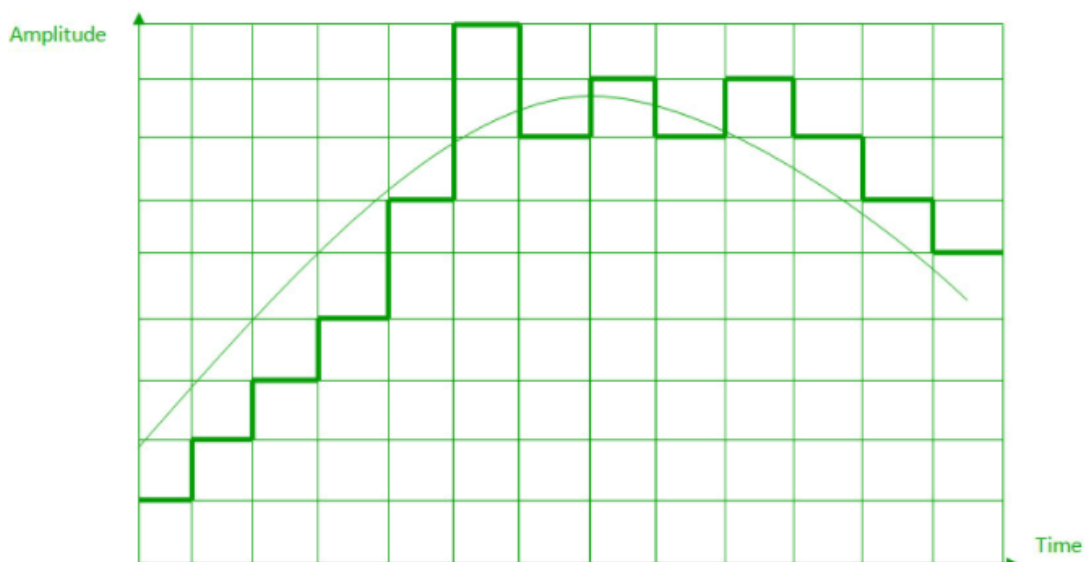
- i. Εάν το αναλογικό σήμα εισόδου είναι υψηλότερο από την τελευταία τιμή του σήματος της σκάλας, αυξήστε το δέλτα κατά 1 και το bit στα ψηφιακά δεδομένα είναι 1.
- ii. Εάν το αναλογικό σήμα εισόδου είναι χαμηλότερο από την τελευταία τιμή του σήματος της σκάλας, μειώστε το δέλτα κατά 1 και το bit στα ψηφιακά δεδομένα είναι 0.



Εικόνα 4.5

2.4γ Προσαρμογική διαμόρφωση Delta

Η απόδοση ενός διαμορφωτή δέλτα μπορεί να βελτιωθεί σημαντικά κάνοντας το μέγεθος βήματος του διαμορφωτή να λάβει μια χρονικά μεταβαλλόμενη μορφή. Απαιτείται μεγαλύτερο μέγεθος βήματος όπου το μήνυμα έχει απότομη κλίση διαμορφωτικού σήματος και μικρότερο μέγεθος βήματος όπου το μήνυμα έχει μικρή κλίση. Το μέγεθος προσαρμόζεται ανάλογα με το επίπεδο του σήματος εισόδου. Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως προσαρμοστική διαμόρφωση δέλτα (ADM).



Εικόνα 4.6

2.5 Μέθοδοι τμηματοποίησης εικόνας

Τμηματοποίηση εικόνας είναι η διαδικασία με την οποία διαχωρίζεται μία εικόνα σε κατάλληλες περιοχές ή αντικείμενα. Για την τμηματοποίηση εικόνας έχουν αναπτυχθεί πολλές τεχνικές, ανάλογα με την εφαρμογή επιλέγεται και η κατάλληλη.

Ο Haralick και ο Shapiro πρότειναν ότι για να είναι μια μέθοδος τμηματοποίησης καλή θα πρέπει να ακολουθεί τα παρακάτω τέσσερα κριτήρια:

- i. Οι περιοχές που διαχωρίζει να είναι ομοιόμορφες και ομογενείς σε σχέση με κάποιο χαρακτηριστικό, π.χ. Τα επίπεδα του γκρι.
- ii. Το εσωτερικό των περιοχών πρέπει να είναι απλό, χωρίς για παράδειγμα πολλές μικρές οπές.
- iii. Γειτονικές περιοχές πρέπει να έχουν σαφώς διαφορετικές τιμές για το χαρακτηριστικό με το οποίο έγινε ο διαχωρισμός.
- iv. Τα όρια των περιοχών πρέπει να είναι απλά, όχι απότομα και ακριβή.

Συνήθως για την ανάπτυξη και την επιλογή μιας τεχνικής διαχωρισμού χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες της ασυνέχειας και ομοιότητας. Μερικές από τις κατηγορίες τεχνικών τμηματοποίησης είναι οι εξής:

- Κατωφλιού – Πολυκατωφλίωσης
- Ταξινόμησης στοιχείων
- Μέθοδοι βασιζόμενες στα όρια περιοχών
- Μέθοδοι βασιζόμενες σε χαρακτηριστικά περιοχών και ομαδοποίησης.
- Μέθοδοι βασιζόμενες σε σύγκριση προτύπων
- Ειδικές τεχνικές για τμηματοποίηση εικόνων υφής (Texture images)
- Ειδικές τεχνικές για τμηματοποίηση εικόνων υφής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Μαθηματική Μορφολογία - Εξαγωγή Χαρακτηριστικών

3.1 Ορισμός

Η Μαθηματική Μορφολογία (ΜΜ) είναι μια θεωρία και τεχνική για την ανάλυση και επεξεργασία γεωμετρικών δομών, με βάση τις θεωρίες συνόλων, δικτύων, την τοπολογία και επιμέρους μαθηματικές διαδικασίες. Η Μαθηματική Μορφολογία κυρίως χρησιμοποιείται σε ψηφιακές εικόνες και κατ'επέκταση στην Όραση Υπολογιστών.

Η Μαθηματική Μορφολογία πρωτοπαρουσιάστηκε από τους Matheron και Serra το 1964 και αφορούσε αρχικά δυαδικές εικόνες. Αργότερα η θεωρία επεκτάθηκε και σε εικόνες τόνων του γκρι (Grayscale Morphology).

Γενικότερα ο τελικός στόχος της επεξεργασίας και ανάλυσης μιας ψηφιακής εικόνας είναι κατά κύριο λόγο ο κατακερματισμός της σε ξεχωριστά αντικείμενα με απώτερο σκοπό την πιο εύκολη ανάλυση των γεωμετρικών της ιδιοτήτων αλλά και της δομής της. Η ανάλυση των γεωμετρικών αντικειμένων πρέπει να είναι ποσοτική επειδή μόνο με αυτό τον τρόπο μπορεί να παραχθεί ένα συνεκτικό μαθηματικό πλαίσιο για την περιγραφή της χωρικής αυτής οργάνωσης. Η ποσοτική αυτή η περιγραφή των γεωμετρικών δομών των μελετώμενων εικόνων είναι ο σκοπός της μαθηματικής μορφολογίας.

Αρχικά η μαθηματική μορφολογία αναπτύχθηκε για την περιγραφή δυαδικών εικόνων και αντικειμένων. Ένα αντικείμενο εικόνας X αντιπροσωπεύεται, σε μαθηματικά μορφολογικής ορολογίας, ως σύνολο μέσα σε ένα n -διαστάσεων Ευκλείδειο χώρο R^n .

Ένα δυαδικό αντικείμενο εικόνας X αντιπροσωπεύεται από το σύνολο:

$$X = \{z: f(z) = 1, z = (x, y) \text{ και } R^2\} \quad (3.1)$$

Το φόντο δυαδικού αντικειμένου είναι το σύνολο X που ορίζεται ως εξής:

$$X = \{z: f(z) = 0, z = (x, y) \text{ και } R^2\} \quad (3.2)$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση του X .

Εάν το ευκλείδειο δίκτυο Z^2 χρησιμοποιείται αντί του R^2 για ψηφιακές δυαδικές εικόνες, οι σχέσεις (3.1) και (3.2) γίνονται:

$$X = \{(i, j): f(i, j) = 1, (i, j) \in Z^2\} \quad (3.3)$$

$$X = \{(i, j): f(i, j) = 0, (i, j) \in Z^2\} \quad (3.4)$$

Αργότερα, η μαθηματική μορφολογία επεκτάθηκε για να περιγράψει και να επεξεργαστεί πολυδιάστατες εικόνες (εικόνες σε γκρι) και αντικείμενα. Αυτού του είδους εικόνες παρουσιάζονται μαθηματικά ως συναρτήσεις $f(x, y)$ των δύο χωρικών συντεταγμένων $x, y, (x, y) \in R^2$:

$$(x, y) \in R^2 \rightarrow f(x, y) \in R \quad (3.5)$$

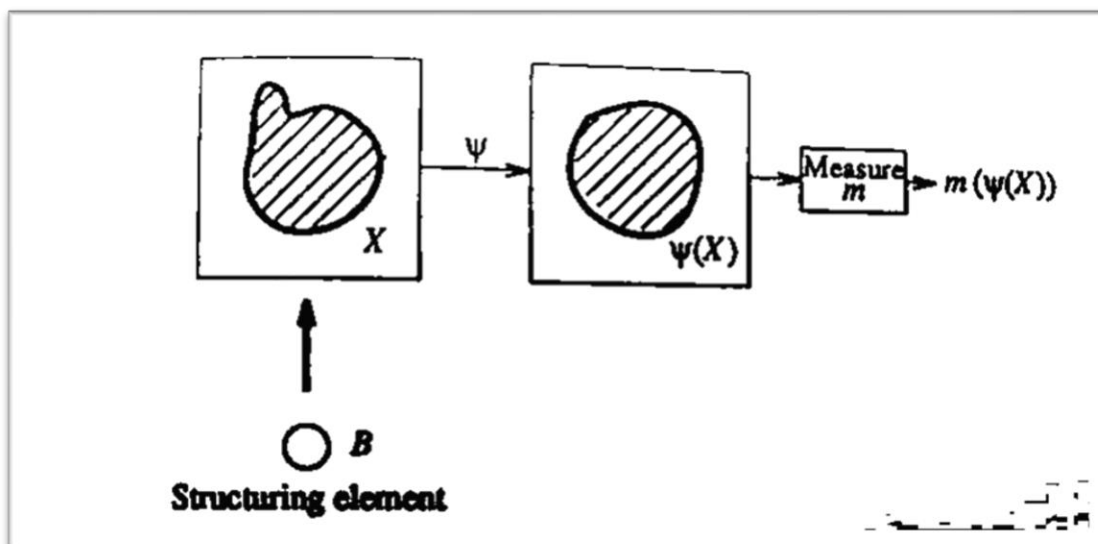
Οι εικόνες σε κλίμακα του γκρι μπορούν να θεωρηθούν ως υποσύνολα του καρτεσιανού προϊόντος $R^2 \times R$.

Ένα αντικείμενο εικόνας περιγράφεται από ένα σύνολο στη μαθηματική μορφολογία επειδή τα υποτιμήματά του μπορούν να περιγραφούν ευκολότερα σε αυτή τη συμβολική αναφορά. Η ομάδα όλων των

αλληλεξαρτήσεων μεταξύ των υποαντικειμένων μιας εικόνας δίνουν τη δομή του αντικειμένου, σύμφωνα με τον J. Serra (1). Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, ένα αντικείμενο εικόνας δεν διαθέτει καμία πληροφορία, προτού το παρακολουθήσουν οι παρατηρητές. Επομένως, η δομή του αντικειμένου εξαρτάται από τον παρατηρητή και δεν είναι αντικειμενική.

Ο παρατηρητής αλληλοεπιδρά με το αντικείμενο και το μετατρέπει σε άλλο, ίσως πιο εκφραστικό, αντικείμενο και μετρά ορισμένες ιδιότητες του αντικειμένου που ονομάζεται στοιχείο δομής (π.χ. κύκλος ή τετράγωνο). Η λειτουργία της αλληλεπίδρασης είναι ο μορφολογικός μετασχηματισμός $\Psi(X)$ του οποίου η λειτουργία είναι που περιγράφεται στο Σχήμα 3.1. Πληροφορίες σχετικά με το μέγεθος του αντικειμένου, το σχήμα, η δύναμη, η κυρτότητα, η ομαλότητα και ο προσανατολισμός μπορούν να αποκτηθούν με μετασχηματισμό το αρχικό αντικείμενο με διαφορετικά δομικά στοιχεία.

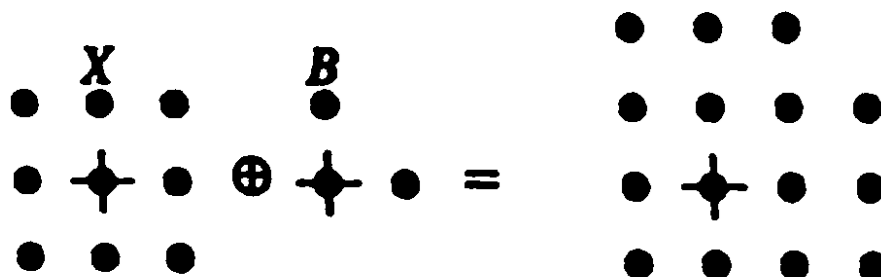
Μερικά ψυχολογικά πειράματα αποκάλυψαν ότι η ανθρώπινη όραση είναι ενεργή και ότι το μυαλό έχει μια δομική δραστηριότητα ακόμη και στα απλούστερα αντιληπτικά φαινόμενα, δηλαδή ακόμα και για να αντιληφθεί το μυαλό μια εικόνα πρώτα πρέπει να την μεταμορφώσει. Επιπλέον, υπάρχει ισχυρό ψυχολογικό κίνητρο για τη χρήση της μαθηματικής μορφολογίας στο επεξεργασία εικόνας και όραση υπολογιστή. αντικείμενο.



Σχήμα 3.1 Η μεθοδολογία της μαθηματικής μορφολογίας.

3.2 Μορφολογικοί μετασχηματισμοί.

Με τον όρο μορφολογικός μετασχηματισμός ονομάζουμε την στενευμένη αλληλεπίδραση μιας ψηφιοποιημένης πεπερασμένης επιφάνειας (εικόνα) με ένα αντικείμενο καθορισμένου σχήματος (δομικό στοιχείο) καθ' όλη την έκταση της. Το σχήμα του δομικού στοιχείου καθορίζεται από τον παρατηρητή και τις ανάγκες που χρειάζεται να εξυπηρετηθούν κατά τον μετασχηματισμό.



Σχήμα 3.2 Προσομοίωση μορφολογικού μετασχηματισμού X =αρχική εικόνα, B =δομικό στοιχείο, τελική εικόνα

Οι μορφολογικοί μετασχηματισμοί $\Psi B(X)$ δεν είναι γενικά αναστρέψιμοι. Στην πραγματικότητα, η φιλοσοφία της μαθηματικής μορφολογίας δεν είναι να αποκαταστήσει την εικόνα αλλά να διαχειριστεί την απώλεια πληροφοριών μιας εικόνας μέσω διαδοχικών μετασχηματισμών.

Ιδιότητες Μετασχηματισμών:

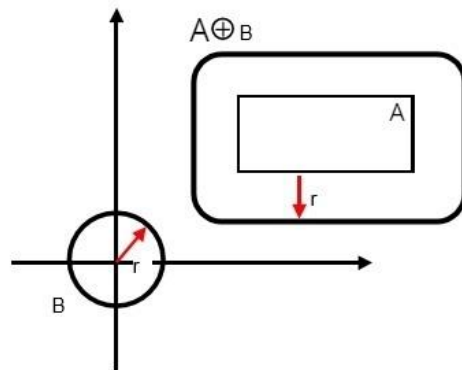
- Αυξητικότητα: $X \subset Y \rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y)$
- Αντιεκτατικότητα : $\Psi(X) \subset X$
- Ταυτοδυναμικότητα : $\Psi[\Psi(X)] = \Psi(X)$

Γενικά το δομικό στοιχείο μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε πίνακας (διαστάσεων μικρότερων από την αρχική εικόνα) ο οποίος περιλαμβάνει για στοιχεία του μηδέν και μονάδες με τρόπο τέτοιο ώστε να σχηματίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα.

3.3 Διαστολή

Η διαστολή ορίζεται ως: $A \oplus B = \{z \in E \mid (B^s)_z \cap A \neq \emptyset\}$,

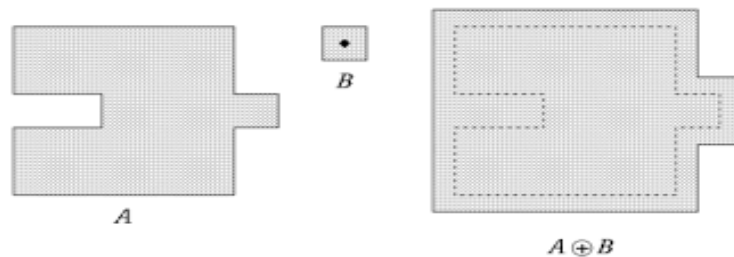
όπου A η αρχική εικόνα και B το δομικό στοιχείο (structuring element).



Σχήμα 3.3 Γραφική αναπαράσταση διαστολής

Με βάση το δομικό στοιχείο, κατά την δυαδική διαστολή, υπολογίζεται μια νέα τιμή σε κάθε θέση της αρχικής εικόνας. Η νέα τιμή είναι η μέγιστη τιμή όλων των εικονοστοιχείων στη γειτονιά του αρχικού εικονοστοιχείου. Επομένως αν έστω ένα από τα γειτονικά εικονοστοιχεία έχει τιμή 1, η νέα τιμή του κεντρικού εικονοστοιχείου θα είναι 1.

Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού της διαστολής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :

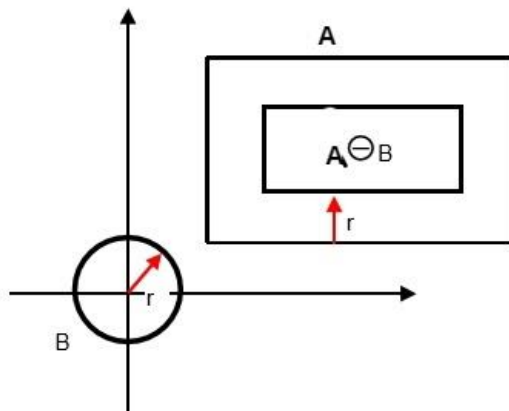


Σχήμα 3.4 A: Αρχική εικόνα , B: Δομικό στοιχείο

3.4 Διάβρωση

Η διάβρωση ορίζεται ως: $A \ominus B = \{z \in E | B_z \subseteq A\}$,

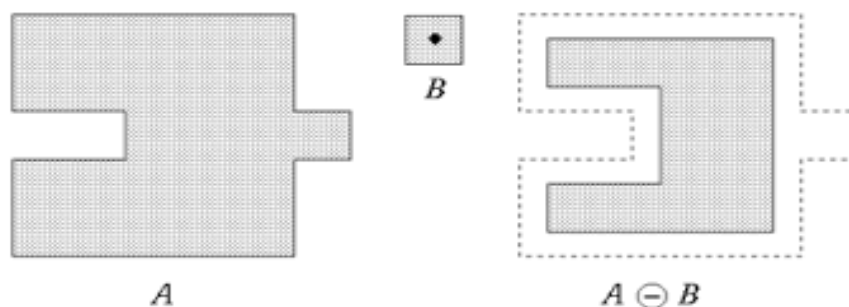
όπου A η αρχική εικόνα και B το δομικό στοιχείο.



Σχήμα 3.5 Γραφική αναπαράσταση διάβρωσης

Με βάση το δομικό στοιχείο, κατά την δυαδική συστολή, υπολογίζεται μια νέα τιμή σε κάθε θέση της αρχικής εικόνας. Η νέα τιμή είναι η ελάχιστη τιμή όλων των εικονοστοιχείων στη γειτονιά του αρχικού εικονοστοιχείου. Επομένως αν έστω ένα από τα γειτονικά εικονοστοιχεία έχει τιμή 0, η νέα τιμή του κεντρικού εικονοστοιχείου θα είναι 0.

Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού της διάβρωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



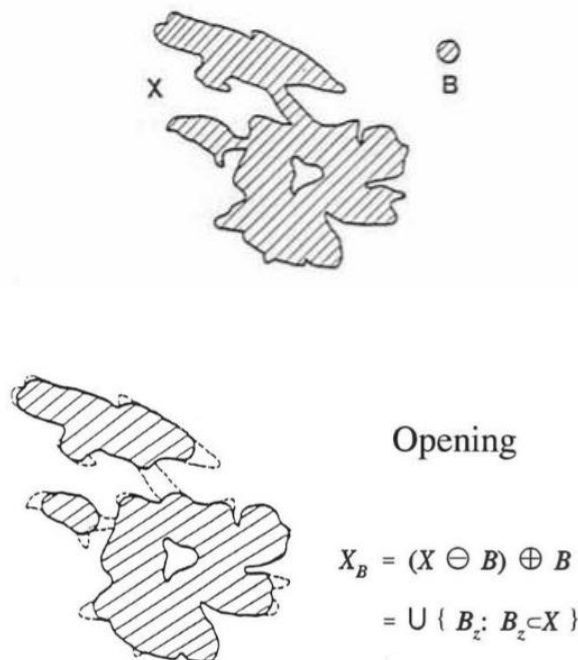
Σχήμα 3.6 A: Αρχική εικόνα , B: Δομικό στοιχείο

3.5 Άνοιγμα και κλείσιμο

Το μορφολογικό άνοιγμα μιας εικόνας με βάση ένα δομικό στοιχείο ορίζεται ως μια διαδοχική συστολή και στη συνέχεια μια διαστολή:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B.$$

Το άνοιγμα είναι πράξη αναλλοίωτη στη μετατόπιση αύξουσα συρρικνωτική και αδύναμη με την έννοια ότι η επανάληψη του ανοίγματος με το ίδιο στοιχείο δεν αλλάζει το αποτέλεσμα. Το άνοιγμα λειαίνει το περίγραμμα των αντικειμένων, κόβει στενούς ισθμούς και εξαφανίζει μικρά ανεπιθύμητα αντικείμενα.

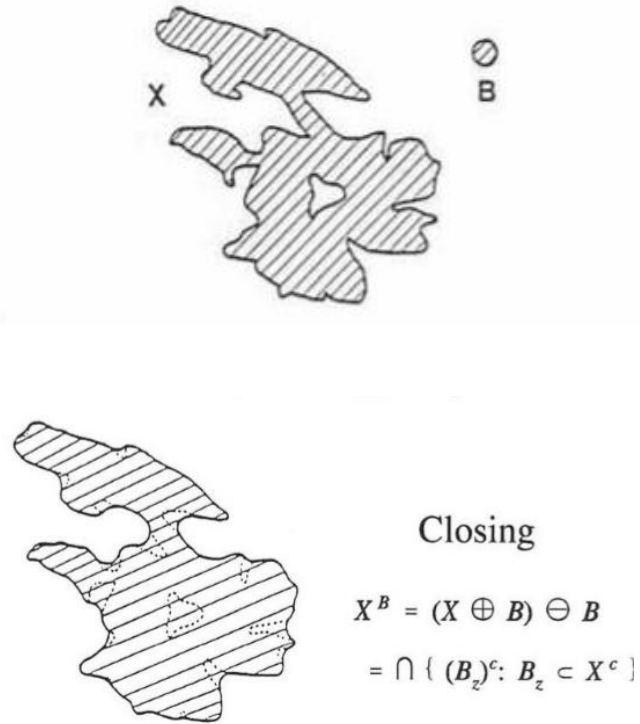


Σχήμα 3.7 Γραφική αναπαράσταση ανοίγματος

Αντίστοιχα το κλείσιμο εικόνας είναι μια συστολή που ακολουθείται από μια διαστολή:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B.$$

Το κλείσιμο είναι πράξη αναλλοίωτη στη μετατόπιση ,αύξουσα και επεκτατική. Το κλείσιμο εξαφανίζει μικρές οπές ενός αντικειμένου και φράσει στενά κανάλια και λεπτούς κόλπους.

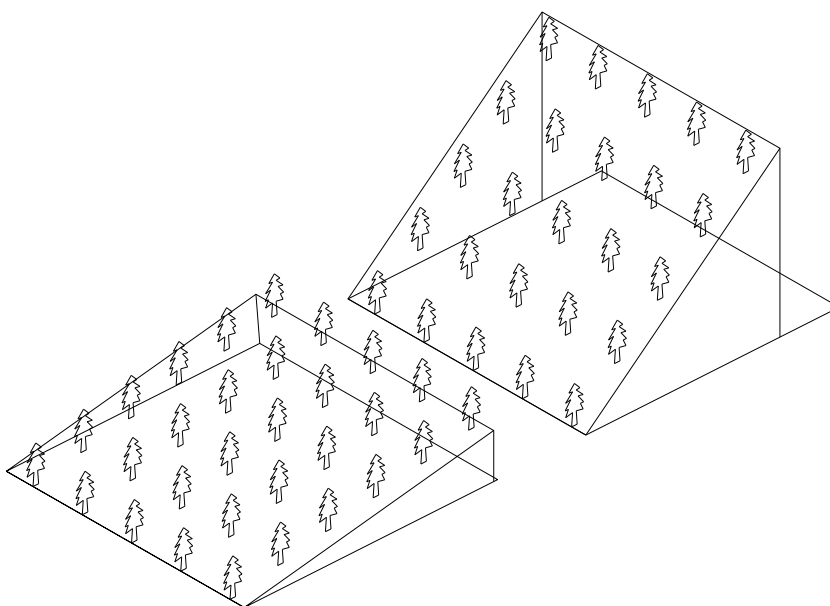


Σχήμα 3.8 Γραφική αναπαράσταση κλεισίματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Σχήματα και εμβαδά-Εξαγωγή Χαρακτηριστικών

4.1 Υπολογισμός επιφανειών

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας, ενός σχήματος, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την “Βασική Τοπογραφική Μέθοδο”. Μια εμβαδομέτρηση γίνεται πάντα στην οριζόντια προβολή της έκτασης.



Σχήμα 4.1 Οριζόντια εκμετάλλευση εδάφους

Στο Σχήμα 4.1 φαίνονται δύο επιφάνειες ίσου εμβαδού, αλλά με διαφορετικές κλίσεις.

Η οριζόντια προβολή κάθε επιφάνειας εξαρτάται από την κλίση της. Όσο μεγαλύτερες κλίσεις έχουν οι επιφάνειες τόσο μικρότερη είναι η οριζόντια προβολή τους. Η κλίση είναι η εφαπτομένη της κατακόρυφης γωνίας. Συνεπώς οι οριζόντιες προβολές των επιφανειών εξαρτώνται από την κατακόρυφη γωνία τους. Η σχέση που δίνει την οριζόντια προβολή E_0 μιας επιφάνειας E , όταν έχει κατακόρυφη γωνία V , είναι:

$$E_0 = E \cdot \sigma \nu W$$

Η γωνία V δεν μπορεί να ξεπεράσει τους 100grad. Δηλαδή βρίσκεται πάντα στο πρώτο τεταρτημόριο. Όσο μεγαλύτερη είναι μια γωνία του πρώτου τεταρτημρίου τόσο μικρότερο είναι το συνημίτονό της. Αυτό μεταφράζεται από τον παραπάνω τύπο ότι: «αύξηση της γωνίας κλίσης μιας επιφάνειας συνεπάγεται μείωση της ωφέλιμης επιφάνειας».

Κάτι το οποίο βοηθάει στον υπολογισμό του εμβαδού μιας οριζόντιας επιφάνειας είναι εάν μετρήσουμε όλες τις διαστάσεις της στο οριζόντιο προβαλλόμενο επίπεδο. Αφού μετρήσουμε όλες τις οριζόντιες αποστάσεις, μπορούμε να σχεδιάσουμε την οριζόντια προβολή της περιοχής. Από τη γεωμετρία που θα εμφανιστεί προχωράμε απευθείας στον υπολογισμό του

εμβαδού. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι η περιοχή της οριζόντιας προβολής της περιοχής - η ωφέλιμη επιφάνεια.

Η μέτρηση του εμβαδού μιας περιοχής γίνεται με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τη μέθοδο που επιλέγεται για την αποτύπωσή της. Υπάρχουν τρεις μέθοδοι εδάφους για οριζόντια χαρτογράφηση:

1. Μέθοδος ανάλυσης σε απλά γεωμετρικά σχήματα.
2. Μέθοδος ορθογώνιων συντεταγμένων (Καρτεσιανή μέθοδος).
3. Μέθοδος πολικών συντεταγμένων.

Ανάλογα με τη μέθοδο, που επιλέξαμε, ακολουθούμε διαφορετικό τρόπο υπολογισμού της επιφάνειας.

Υπάρχει ακόμη η μέθοδος μικτής αποτύπωσης εκτάσεων με τη χρήση των ισοϋψών καμπυλών. Σε αυτή την περίπτωση είναι πολύ δύσκολος ο υπολογισμός της επιφάνειας, που περικλείεται από μια ισοϋψή. Για το σκοπό αυτό έχουν εφευρεθεί διάφορα όργανα που ονομάζονται εμβαδόμετρα.

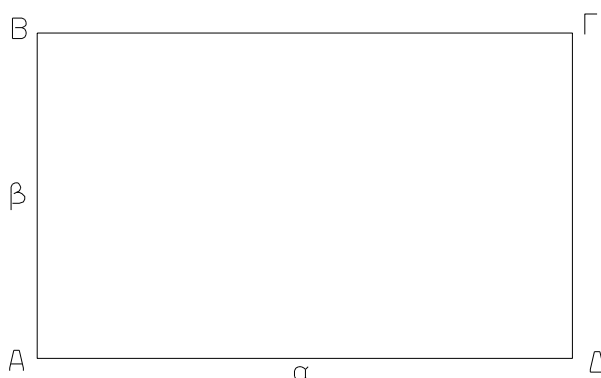
4.1.α Εμβαδά γεωμετρικών σχημάτων

Η μέθοδος αποτύπωσης με ανάλυση των εκτάσεων σε γεωμετρικά σχήματα έχει σκοπό να μετατρέψουμε την αρχική επιφάνεια σε ένα σύνολο σχημάτων, που η εμβαδομέτρησή τους δίνεται από τύπους της γεωμετρίας.

Τα σχήματα, που θα επιλέξουμε, πρέπει να είναι κατά το δυνατό απλά γεωμετρικά σχήματα, που το εμβαδό τους θα υπολογίζεται από απλούς τύπους αλλά και συγχρόνως πρέπει το τελικό αποτέλεσμα να είναι μια καλή προσέγγιση της πραγματικής επιφάνειας της όλης έκτασης. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε εξαρτάται από την απαιτούμενη ακρίβεια των υπολογισμών.

Οι επόμενες παράγραφοι δίνουν τα εμβαδά των κυριότερων επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων. Γνωρίζοντας τους τύπους, που δίνουν τα εμβαδά των σχημάτων, μπορούμε πλέον με ευχέρεια να κάνουμε την καλύτερη δυνατή διανομή μιας έκτασης σε απλά σχήματα.

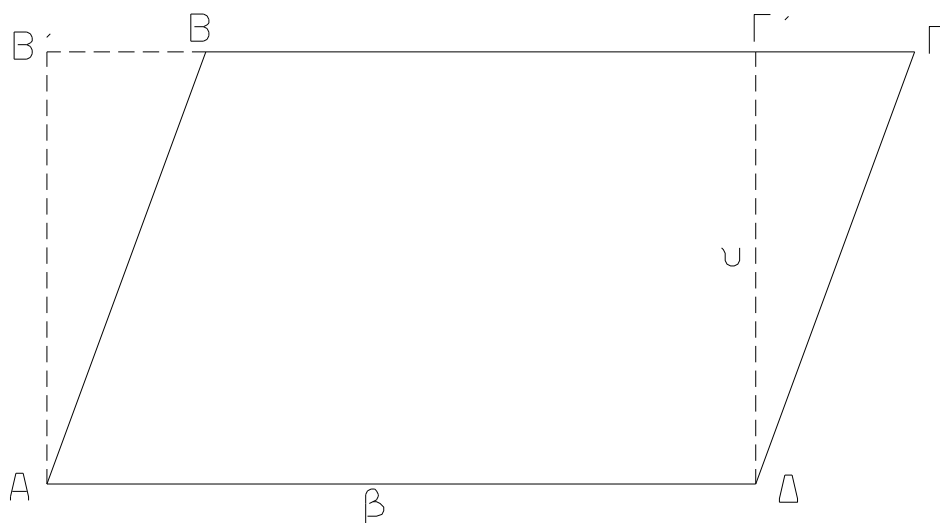
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ



Σχήμα 4.21 Εμβαδό ορθογωνίου

Το εμβαδό ορθογωνίου με πλευρές α και β υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \alpha * \beta$$



Σχήμα 4.3 Εμβαδό παραλληλογράμμου

Έστω το παραλληλόγραμμο ABΓΔ (Σχήμα 4.3). Το μήκος της βάσης του είναι β και το ύψος του είναι υ .

Φέρουμε τις AB' και ΔΓ' κάθετες στην ΓΔ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα AB'B και ΔΓ'Γ έχουν δύο πλευρές ίσες:

AB'=ΔΓ' και AB=ΔΓ.

Άρα AB'B=ΔΓ'Γ

(Σχέση 4.1)

Αλλά το εμβαδό του παραλληλογράμμου ABΓΔ είναι:

ABΓΔ=ABΓ'Δ+ΔΓ'Γ

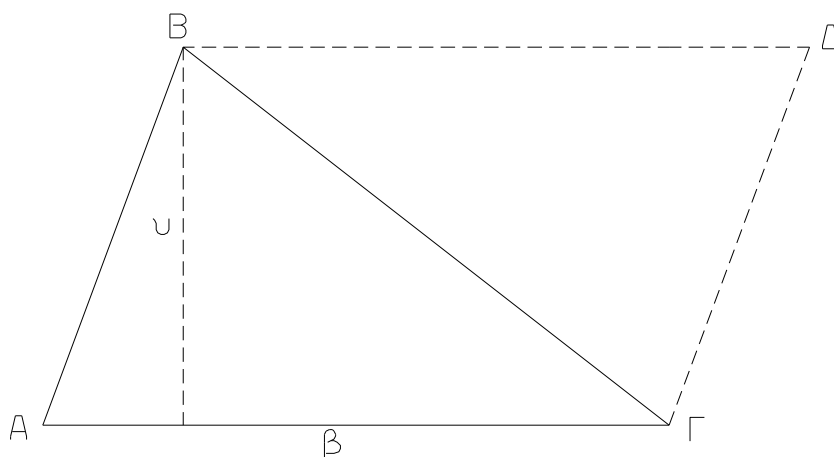
(Σχέση 4.2)

Αντικαθιστώντας την (Σχέση 4.1) στη (Σχέση 4.2) έχουμε:

ABΓΔ=ABΓ'Δ+AB'B=AB'Γ'Δ.

Συνεπώς το εμβαδό του παραλληλογράμμου είναι:

$$E = \beta * \upsilon$$



Σχήμα 4.4 Εμβαδό τριγώνου

Θεωρούμε το τρίγωνο, που εικονίζεται στο Σχήμα 4.4. Από την κορυφή Β φέρουμε τη ΒΔ παράλληλη προς τη βάση ΑΓ και από την κορυφή Γ την ΓΔ παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΒ έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες. Άρα ισχύει:

$$ΑΒΓ=ΔΓΒ \quad (\text{Σχέση 4.3})$$

Ισχύει, όμως, και η σχέση:

$$(ΑΒΔΓ)=(ΑΒΓ)+(ΔΓΒ) \quad (\text{Σχέση 4.4})$$

Από τις (Σχέση 4.3) και (Σχέση 4.4), παίρνουμε:

$$(ΑΒΓΔ)=2(ΑΒΓ)$$

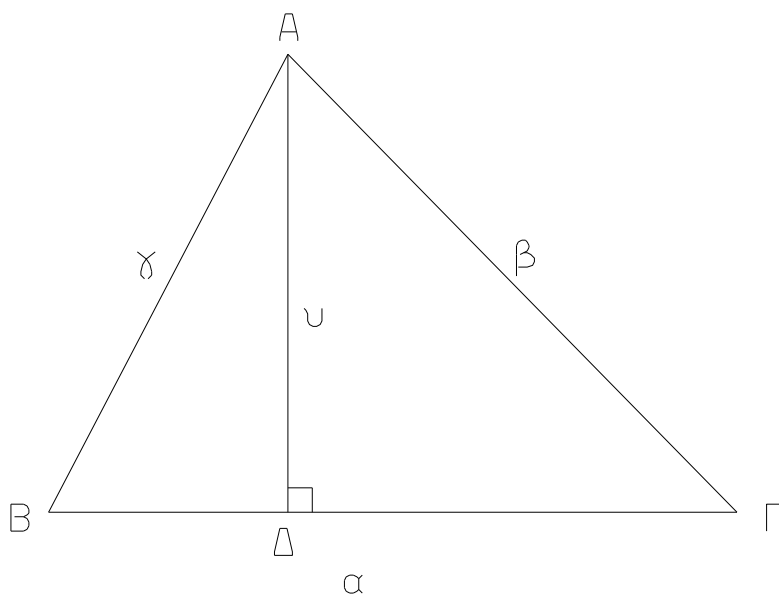
Το σχήμα ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. Το εμβαδό του είναι:

$$E = \beta * \upsilon$$

Επομένως το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλογράμμου, δηλαδή:

$$E = \frac{\beta * \upsilon}{2}$$

Κατά τις Τοπογραφικές εργασίες δεν είναι δυνατό να μετρηθούν διάφορα στοιχεία ενός τριγώνου. Τότε θα γίνει ο υπολογισμός του εμβαδού από τους κατάλληλους τύπους. Ανάλογα με τις μετρήσεις μας, υπάρχουν τρεις τύποι:



Σχήμα 4.5 Μέτρηση εμβαδού τριγώνου

A. Βάση και ύψος.

Το εμβαδό του τριγώνου, που φαίνεται στο Σχήμα 4.5 είναι:

$$E = \frac{\alpha * \nu}{2}$$

B. Δυο πλευρές και περιεχομένη γωνιά.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.5, ισχύει: $\nu = \gamma * \eta \mu \beta$

Με αντικατάσταση στον τύπο εμβαδού τριγώνου, έχουμε τον τύπο:

$$E = \frac{\alpha * \nu}{2} = \frac{\alpha * \gamma * \eta \mu \beta}{2}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει για οποιαδήποτε ζεύγη πλευρών του τριγώνου. Δηλαδή θα ισχύουν και οι τρεις τύποι:

$$E = \frac{\alpha * \gamma * \eta \mu \beta}{2}$$
$$E = \frac{\alpha * \beta * \eta \mu \Gamma}{2}$$
$$E = \frac{\beta * \gamma * \eta \mu \Delta}{2}$$

Γ. Τρεις πλευρές.

Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ (Σχήμα 4.5), ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$B\Delta^2 = \gamma^2 - \nu^2 \quad (\text{Σχέση 4.5})$$

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma^2 &= (\alpha - B\Delta)^2 = \beta^2 - \nu^2 \Rightarrow \\ \alpha^2 + B\Delta^2 - 2\alpha B\Delta + \nu^2 &= \beta^2 \Rightarrow \\ B\Delta^2 &= \beta^2 - \alpha^2 - \nu^2 + 2\alpha B\Delta \end{aligned} \quad (\text{Σχέση 4.6})$$

Από τις σχέσεις (Σχέση 4.5) και (Σχέση 4.6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \nu^2 &= \beta^2 - \alpha^2 - \nu^2 + 2\alpha B\Delta \Rightarrow \\ B\Delta &= \frac{\gamma^2 - \nu^2 + \nu^2 - \beta^2 + \alpha^2}{2\alpha} \Rightarrow \\ B\Delta &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$B\Delta^2 = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} \quad (\text{Σχέση 4.7})$$

Άρα, με συνδυασμό της (Σχέση 4.5) και της (Σχέση 4.7) εξίσωσης, έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma^2 - \nu^2 &= \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} \Rightarrow \\ \nu^2 &= \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} \Rightarrow \\ \nu^2 &= \frac{(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)(2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)}{4\alpha^2} \Rightarrow \\ \nu^2 &= \frac{((\alpha + \gamma)^2 - \beta^2)(\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2)}{4\alpha^2} \Rightarrow \\ \nu^2 &= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)}{4\alpha^2} \end{aligned} \quad (\text{Σχέση 4.8})$$

Η περίμετρος του τριγώνου είναι:

$$2\tau = \alpha + \beta + \gamma \quad (\text{Σχέση 4.9})$$

Από τις (Σχέση 4.8) και (Σχέση 4.9) παίρνουμε:

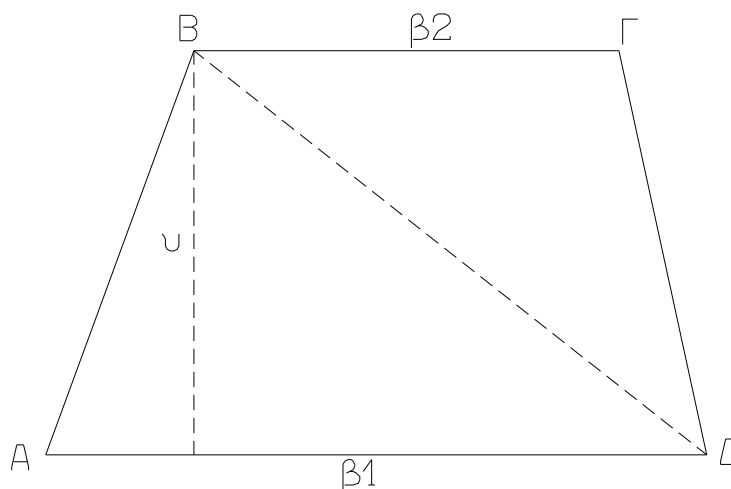
$$\begin{aligned} \nu^2 &= \frac{2\tau * 2(\tau - \alpha) * 2(\tau - \beta) * 2(\tau - \gamma)}{4\alpha^2} \Rightarrow \\ \nu &= \frac{2 * \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{Σχέση 4.10})$$

Αντικαθιστώντας την (Σχέση 4.10) στον τύπο του εμβαδού τριγώνου έχουμε:

$$\boxed{E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}$$

Όπου
$$\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

Ο τύπος αυτός ονομάζεται τύπος του Ήρωνα και υπολογίζει το εμβαδό τριγώνου από τα μήκη των τριών πλευρών του. Στις τοπογραφικές εργασίες είναι πολύ χρήσιμος. Αφού επιλέξαμε σαν μέθοδο αποτύπωσης το διαχωρισμό της έκτασης σε τρίγωνα, μετρούμε όλα τα μήκη των πλευρών των τριγώνων. Στις εργασίες γραφείου με εφαρμογή του τύπου του Ήρωνα υπολογίζουμε όλα τα εμβαδά των επί μέρους τριγώνων και με άθροιση έχουμε το εμβαδό της όλης έκτασης.



Σχήμα 4.6 Εμβαδό τραπεζίου

Το τραπέζιο ΑΒΓΔ, που φαίνεται στο Σχήμα 4.6, έχει τις δύο παράλληλες πλευρές ΑΔ=β1 και ΒΓ=β2. Το ύψος του είναι υ.

Η διαγώνιος ΒΔ σχηματίζει τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΓΔ, με βάσεις β1 και β2 αντίστοιχα. Τα ύψη των τριγώνων είναι ίσα με υ. Το εμβαδό του τραπεζίου είναι ίσο με το εμβαδό των δύο τριγώνων. Άρα:

$$E = \frac{\beta_1 \cdot \upsilon}{2} + \frac{\beta_2 \cdot \upsilon}{2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cdot \upsilon$$

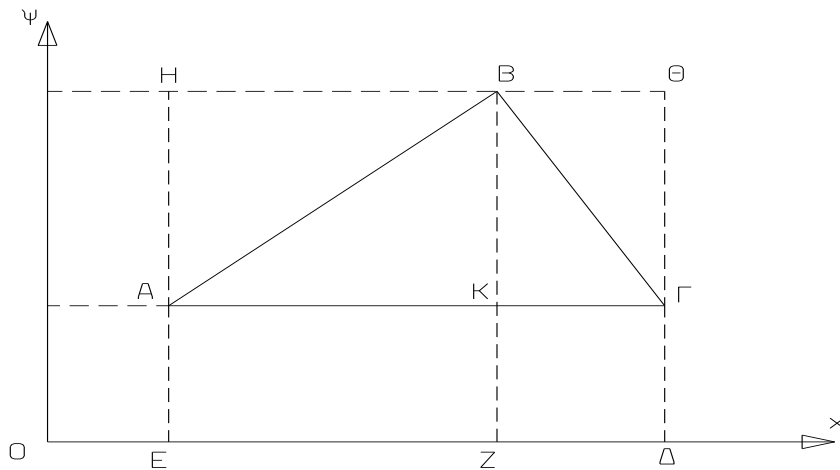
4.1.β Ορθογώνιες συντεταγμένες

Όταν η αποτύπωση μιας έκτασης έγινε με τη χρήση των ορθογώνιων συντεταγμένων των κορυφών της, η εμβαδομέτρηση πρέπει να γίνει με κατάλληλη μέθοδο.

Υπάρχει, βέβαια, η δυνατότητα να θεωρήσουμε ότι η έκταση αποτελείται από τρίγωνα. Επειδή γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών τους και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τον τύπο του Ήρωνα για κάθε τρίγωνο. Η μέθοδος αυτή, όμως, είναι πολύ χρονοβόρα.

Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο υπολογισμού, με τη χρήση των ορθογώνιων συντεταγμένων.

Πρώτα θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου από τις συντεταγμένες των κορυφών του.



Σχήμα 4.7 Εμβαδό τριγώνου από τις συντεταγμένες κορυφών

Στο Σχήμα 4.7 δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με τις συντεταγμένες των κορυφών του. Το ορθογώνιο $AH\Theta\Gamma$ έχει ίση βάση και ίσο ύψος με αυτά του τριγώνου. Άρα έχει διπλάσιο εμβαδό. Από το σχήμα έχουμε τις σχέσεις:

$$2 \bullet (AB\Gamma) = (AH\Theta\Gamma) \quad (\text{Σχέση 4.11})$$

$$(AH\Theta\Gamma) = (EH\Theta\Delta) - (EAKZ) - (K\Gamma\Delta Z) \quad (\text{Σχέση 4.12})$$

$$(EH\Theta\Delta) = B\psi \bullet (\Gamma\chi - A\chi) \quad (\text{Σχέση 4.13})$$

$$(EAKZ) = \Gamma\psi \bullet (B\chi - A\chi) \quad (\text{Σχέση 4.14})$$

$$(K\Gamma\Delta Z) = A\psi \bullet (\Gamma\chi - B\chi) \quad (\text{Σχέση 4.15})$$

Με αντικατάσταση των (Σχέση 4.13), (Σχέση 4.14) και (Σχέση 4.15) στη (Σχέση 4.12) προκύπτει:

$$(AH\Theta\Gamma) = B\psi \bullet (\Gamma\chi - A\chi) - \Gamma\psi \bullet (B\chi - A\chi) - A\psi \bullet (\Gamma\chi - B\chi) \quad (\text{Σχέση 4.16})$$

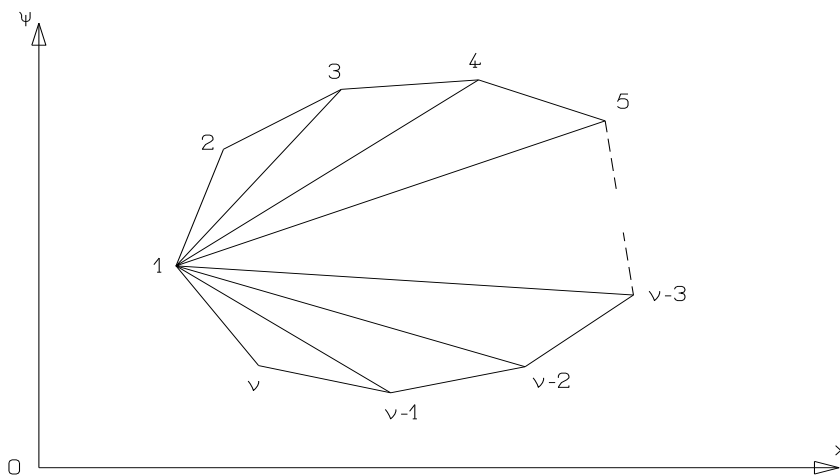
4.16)

Αντικαθιστώντας την (Σχέση 4.16) στην (Σχέση 4.11) έχουμε:

$$2 \bullet (AB\Gamma) = B\psi \bullet (\Gamma\chi - A\chi) + \Gamma\psi \bullet (A\chi - B\chi) + A\psi \bullet (B\chi - \Gamma\chi)$$

Ο παραπάνω τύπος δίνει το εμβαδό ενός τριγώνου από τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Τώρα θα εξετάσουμε ένα τυχόν πολύγωνο n κορυφών.



Σχήμα 4.8 Εμβαδό πολυγώνου n κορυφών

Ας υποθέσουμε ότι το πολύγωνο με n κορυφές που φαίνεται στο σχήμα 4.8, έχει αποτυπωθεί με τις ορθογώνιες συντεταγμένες των κορυφών του. Είναι, συνεπώς, γνωστές οι συντεταγμένες (X_i, Ψ_i) της οποιασδήποτε κορυφής του i .

Θεωρούμε όλες τις ευθείες, που άγονται από την κορυφή 1 προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές. Αυτές χωρίζουν την έκταση σε τρίγωνα. Κάθε τρίγωνο έχει σαν κορυφές τρεις από τις κορυφές του πολυγώνου. Άρα είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών όλων των τριγώνων. Είναι ήδη γνωστός ο τύπος που δίνει το εμβαδό κάθε ενός τριγώνου από τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Με εφαρμογή του τύπου για κάθε ένα τρίγωνο έχουμε τους τύπους:

$$\begin{aligned}
 2 \bullet \text{Τρίγ. } 123: & \quad \psi_1(x_2-x_3) + \psi_2(x_3-x_1) + \psi_3(x_1-x_2) \\
 2 \bullet \text{Τρίγ. } 134: & \quad \psi_1(x_3-x_4) + \psi_3(x_4-x_1) + \psi_4(x_1-x_3) \\
 2 \bullet \text{Τρίγ. } 145: & \quad \psi_1(x_4-x_5) + \psi_4(x_5-x_1) + \psi_5(x_1-x_4) \\
 \dots & \quad \dots \\
 2 \bullet \text{Τρίγ. } 1(v-3)(v-2): & \quad \psi_1(x_{v-3}-x_{v-2}) + \psi_{v-3}(x_{v-2}-x_1) + \psi_{v-2}(x_1-x_{v-3}) \\
 2 \bullet \text{Τρίγ. } 1(v-2)(v-1): & \quad \psi_1(x_{v-2}-x_{v-1}) + \psi_{v-2}(x_{v-1}-x_1) + \psi_{v-1}(x_1-x_{v-2}) \\
 2 \bullet \text{Τρίγ. } 1(v-1)v: & \quad \psi_1(x_{v-1}-x_v) + \psi_{v-1}(x_v-x_1) + \psi_v(x_1-x_{v-1})
 \end{aligned}$$

Με άθροιση κατά μέλη παίρνουμε τη σχέση:

$$2 \bullet \text{Εολ} = \psi_1(x_2-x_3+x_3-x_4+\dots+x_{v-2}-x_{v-1}+x_{v-1}-x_v) + \psi_2(x_3-x_1) + \psi_3(x_1-x_2+x_4-x_1) + \dots + \psi_{v-1}(x_1-x_{v-2}+x_{v-1}-x_1) + \psi_v(x_1-x_{v-1})$$

Από όπου, με απαλοιφή των αντίθετων όρων, έχουμε τελικά:

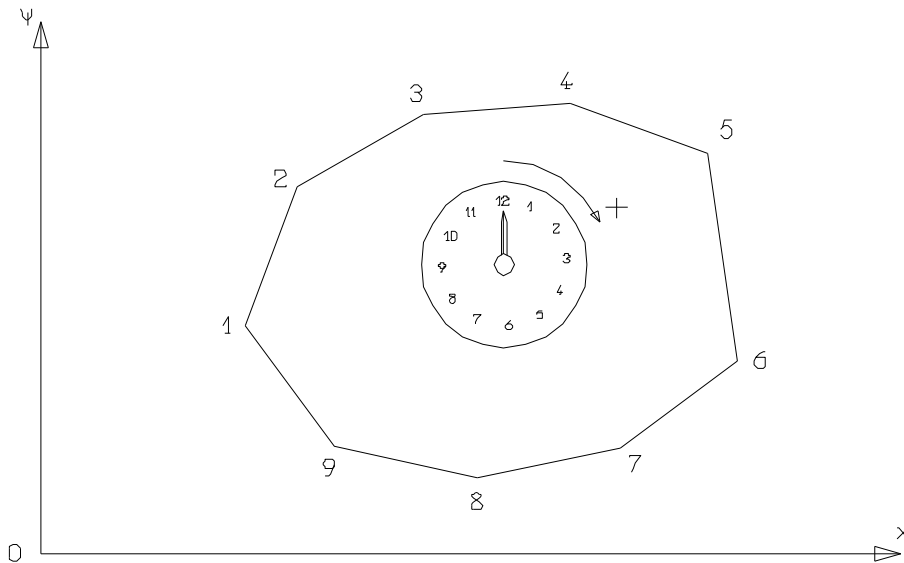
$$2 \bullet \text{Εολ} = \psi_1(x_2-x_v) + \psi_2(x_3-x_1) + \psi_3(x_4-x_2) + \dots + \psi_{v-1}(x_v-x_{v-2}) + \psi_v(x_1-x_{v-1})$$

Αυτός ο τύπος δίνει το εμβαδό ενός κλειστού πολυγώνου με n κορυφές, αν γνωρίζουμε τις ορθογώνιες συντεταγμένες των κορυφών του.

Το εμβαδό κλειστού πολυγώνου n κορυφών είναι ίσο με το άθροισμα όλων των γινομένων $\psi_i(x_{i+1}-x_{i-1})$. Ο πρώτος παράγοντας είναι η τεταγμένη του κάθε σημείου. Ο δεύτερος παράγοντας είναι η διαφορά τετμημένων της προηγούμενης από την επόμενη κορυφή.

Εδώ πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στη σειρά, που δίνεται στις κορυφές. Από αυτή τη σειρά θα ξέρουμε για κάθε κορυφή ποια είναι η επόμενη και ποια η προηγούμενη.

Η σειρά των κορυφών παίρνεται πάντα δεξιόστροφα. Δηλαδή, για την αρίθμηση των κορυφών φανταζόμαστε ότι υπάρχει ένα ρολόι στο κέντρο της έκτασης. Με τη φορά που είναι γραμμένοι οι αριθμοί του ωρολογίου, με την ίδια φορά πρέπει να αριθμηθούν και οι κορυφές της έκτασης.



Σχήμα 4.9 : Φορά αρίθμησης κορυφών πολυγωνικής έκτασης

Τώρα είναι σαφές ότι επόμενη κορυφή της 8 είναι η 9. Προηγούμενη κορυφή της 6 είναι η 5, κ.ο.κ. Επίσης είναι σαφές ότι η επόμενη κορυφή της 9 είναι η 1.

Αν πάρουμε αριστερόστροφη φορά αρίθμησης, τότε το αποτέλεσμα θα προκύψει αρνητικό. Επειδή δεν υπάρχει αρνητικό εμβαδό, θεωρούμε ότι το εμβαδό είναι η απόλυτη τιμή της υπολογισμένης ποσότητας. Η απόλυτη τιμή των υπολογισμών θα είναι ίδια με οποιαδήποτε φορά και αν δουλέψουμε.

Πάντως, δεν έχουμε δικαίωμα να κάνουμε μερικούς υπολογισμούς κατά τη δεξιόστροφη φορά και μερικούς κατά την αντίθετη. Τότε θα προκύψει λάθος αποτέλεσμα.

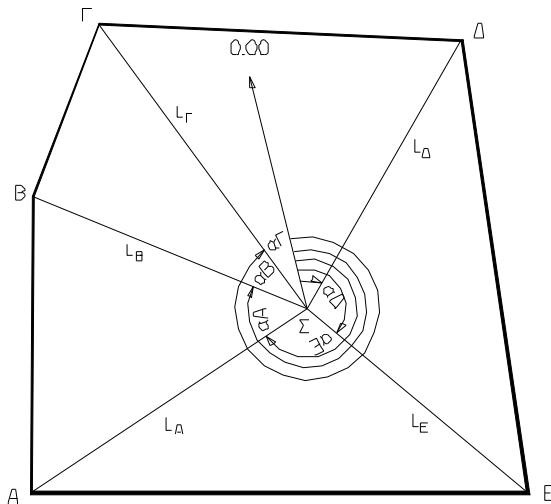
4.1.γ Πολικές συντεταγμένες

Η μέθοδος των πολικών συντεταγμένων είναι η πιο διαδεδομένη μέθοδος αποτύπωσης ενός γηπέδου, καθώς τα τοπογραφικά όργανα μετρούν με μεγάλη ακρίβεια και ταχύτητα τις πολικές συντεταγμένες σημείων αλλά και γιατί αδιαμφισβήτητα ο υπολογισμός του εμβαδού μιας έκτασης, που έχουμε τις πολικές συντεταγμένες των κορυφών της, είναι πολύ εύκολος.

Γνωρίζουμε ήδη ότι το εμβαδό ενός τριγώνου, αν γνωρίζουμε τα μήκη δύο πλευρών του και την περιεχόμενη γωνία δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\text{τριγ}} = \frac{1}{2} * \alpha * \beta * \eta\mu\Gamma$$

Για την αποτύπωση μιας έκτασης με χρήση πολικών συντεταγμένων γίνεται τοποθέτηση του Τοπογραφικού οργάνου σε ένα σημείο στάσης Σ. Γίνεται μέτρηση από το σημείο αυτό όλων των διευθύνσεων (α) και των αποστάσεων (L) των σημείων της έκτασης (βλέπε σχήμα 10).



Σχήμα 4.10 : Εμβαδομέτρηση από πολικές συντεταγμένες

Η έκταση έχει διανεμηθεί αυτόματα σε τρίγωνα, που όλα έχουν κορυφή το σημείο Σ και βάση μια πλευρά της έκτασης. Για κάθε τρίγωνο γνωρίζουμε τα μήκη και τις γωνίες διεύθυνσης των δύο πλευρών που ξεκινούν από τη στάση Σ. Η οριζόντια γωνία των δύο πλευρών είναι προφανώς η διαφορά των γωνιών διεύθυνσής τους. Η γωνία αυτή είναι η γωνία της κορυφής κάθε τριγώνου. Γνωρίζοντας πλέον και τη γωνία της κορυφής, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του κάθε τριγώνου.

Π.χ. στο τρίγωνο ΣΔΕ η γωνία της κορυφής Σ είναι:

$$\bar{\Sigma} = \alpha_E - \alpha_\Delta$$

Επομένως το εμβαδό του τριγώνου ΣΔΕ είναι:

$$(\Sigma\Delta E) = \frac{1}{2} * L_\Delta * L_E * \eta\mu(\alpha_E - \alpha_\Delta)$$

Υπολογίζουμε όλα τα εμβαδά των τριγώνων και το τελικό άθροισμα είναι το εμβαδό της αποτυπωμένης έκτασης.

Ο τύπος, που δίνει το συνολικό εμβαδό μιας έκτασης κ κορυφών είναι:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^{\kappa} L_i * L_{i+1} * \eta\mu(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

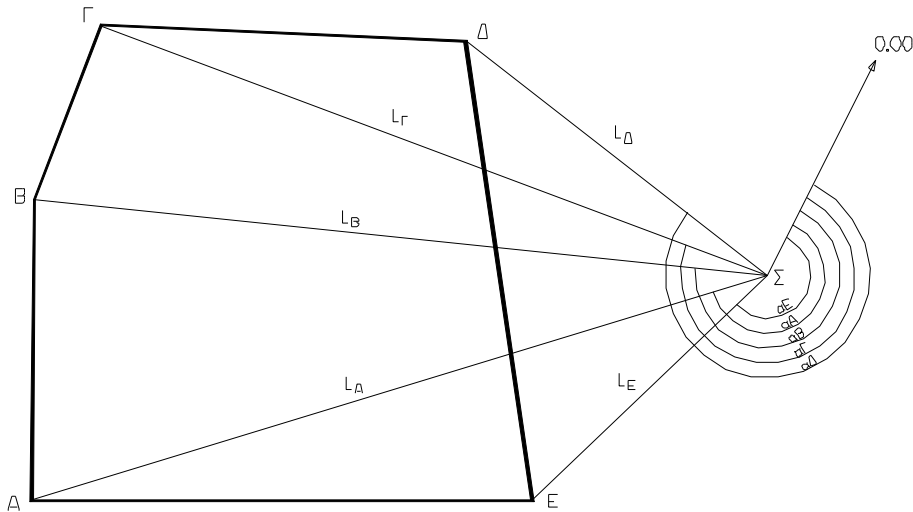
Η δεξιόστροφη φορά ισχύει και εδώ. Σε κάθε τρίγωνο πρώτη κορυφή είναι αυτή που βρίσκεται αριστερά και δεύτερη αυτή που βρίσκεται δεξιά.

Π.χ. για την εμβαδομέτρηση του τριγώνου ΣΓΔ (σχήμα 10) η γωνία κορυφής είναι ίση με τη διαφορά αΔ-αΓ, διότι η πλευρά ΣΔ είναι δεξιότερα της ΣΓ. Εδώ βλέπουμε ότι η διαφορά θα προκύψει αρνητική, διότι η πλευρά ΣΔ είναι στο πρώτο τεταρτημόριο (0 έως 100grad), ενώ η ΣΓ είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο (300 έως 400grad). Αυτό δεν έχει καμιά επίπτωση στους υπολογισμούς μας, διότι εκείνο που χρησιμοποιείται στον τύπο είναι το ημίτονο της γωνίας. Το ημίτονο εδώ θα προκύψει θετικό, διότι:

Η γωνία κορυφής του τριγώνου είναι $-200 > \Sigma > -400$ grad. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που διαφέρουν κατά ακέραιο κύκλο είναι

ίσοι. Συνεπώς η παραπάνω γωνία θα έχει ίσο ημίτονο με την γωνία $\Sigma+400$, που βρίσκεται μεταξύ 0 και 200grad. Μια γωνία στο διάστημα 0 έως 200grad έχει θετικό ημίτονο.

Σε πολλές περιπτώσεις γίνεται αποτύπωση μιας έκτασης με στάση εκτός της περιμέτρου της.



Σχήμα 4.11: Αποτύπωση γηπέδου από εξωτερική στάση

Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε μιας έκτασης αποτυπώθηκαν από στάση Σ εκτός της περιμέτρου της έκτασης.

Το εμβαδό της έκτασης ΑΒΓΔΕ είναι:

$$(ΑΒΓΔΕ) = (\Sigma ΕΑΒΓΔ) - (\Sigma ΕΔ) \quad (\text{Σχέση 4.17})$$

Ισχύει, όμως:

$$(\Sigma ΕΑΒΓΔ) = (\Sigma ΕΑ) + (\Sigma ΑΒ) + (\Sigma ΒΓ) + (\Sigma ΓΔ) \quad (\text{Σχέση 4.18})$$

Με αντικατάσταση της (Σχέση 4.18) στην (Σχέση 4.17) έχουμε:

$$(ΑΒΓΔΕ) = (\Sigma ΕΑ) + (\Sigma ΑΒ) + (\Sigma ΒΓ) + (\Sigma ΓΔ) + (-\Sigma ΔΕ) \quad (\text{Σχέση 4.19})$$

Τα εμβαδά των τριγώνων του τύπου (Σχέση 4.19) υπολογίζονται από το γνωστό τύπο υπολογισμού τριγώνου:

$$(\Sigma ΕΑ) = \frac{1}{2} * L_E * L_A * \eta\mu(\alpha_A - \alpha_E)$$

$$(\Sigma ΑΒ) = \frac{1}{2} * L_A * L_B * \eta\mu(\alpha_B - \alpha_A)$$

$$(\Sigma ΒΓ) = \frac{1}{2} * L_B * L_\Gamma * \eta\mu(\alpha_\Gamma - \alpha_B)$$

$$(\Sigma ΓΔ) = \frac{1}{2} * L_\Gamma * L_\Delta * \eta\mu(\alpha_\Delta - \alpha_\Gamma)$$

$$-(\Sigma ΔΕ) = -\frac{1}{2} * L_E * L_\Delta * \eta\mu(\alpha_\Delta - \alpha_E) = \frac{1}{2} * L_E * L_\Delta * \eta\mu(\alpha_E - \alpha_\Delta)$$

Βλέπουμε ότι στο τρίγωνο ΣΔΕ, που το εμβαδό του αφαιρείται, δεν προκύπτει αλλαγή του τύπου. Αρκεί μόνο να αφαιρέσουμε από τη διεύθυνση της δεξιότερης κορυφής τη διεύθυνση της αριστερότερης. (Υπενθυμίζεται ότι η δεξιόστροφη φορά ελέγχεται με τη θεώρηση ενός ωρολογίου στο κέντρο της έκτασης).

Συμπερασματικά προκύπτει ότι ο τύπος για τον υπολογισμό του εμβαδού μιας έκτασης από τις πολικές συντεταγμένες των κορυφών της είναι ανεξάρτητος από το σημείο της στάσης του Τοπογραφικού οργάνου.

4.2. ΔΙΑΝΟΜΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Ένα σημαντικό κεφάλαιο που ασχολείται με θέματα μέτρησης επιφάνειας είναι η κατανομή των επιφανειών. Γνωρίζοντας ότι για να συλλάβουμε μια περιοχή, πρέπει πρώτα να την αναλύσουμε σε διάφορες επιφάνειες. Το έργο είναι στην πραγματικότητα μια κατανομή σε όλη την επιφάνεια. Ορισμένες επιφάνειες στις οποίες γίνεται η κατανομή είναι αυθαίρετες και εξαρτώνται μόνο από την απαιτούμενη μέτρηση και υπολογιστική ακρίβεια. Ωστόσο, σε ορισμένες περιπτώσεις, η αρχική περιοχή πρέπει να κατανεμηθεί σε έναν ορισμένο αριθμό ισοβασικών επιπέδων. Επιπλέον, μερικές φορές είναι απαραίτητο να κατανεμηθεί η αρχική επιφάνεια σε μέρη που όχι μόνο είναι ίσα σε εμβαδόν, αλλά πληρούν και κάποιες άλλες προϋποθέσεις, όπως η ύπαρξη πανομοιότυπης πρόσοψης στον κεντρικό δρόμο.

Οι διανομές επιφανειών γίνονται με τη χάραξη γραμμών στο έδαφος, οι οποίες θα ορίζουν τμήματα της έκτασης ίσου εμβαδού με το ζητούμενο. Π.χ. έστω ότι ζητούμε τη διανομή μιας έκτασης σε τρεις ισοεμβαδικές εκτάσεις. Πρέπει να εντοπίσουμε τη θέση και τη διεύθυνση δύο ευθειών, που θα διέρχονται μέσα από την ολική έκταση, έτσι που να ορίζουν τρία τμήματα ίσου εμβαδού. Ο στόχος μας επιτυγχάνεται με τον υπολογισμό των συντεταγμένων δύο τουλάχιστον σημείων κάθε μιας από τις γραμμές αυτές.

Υπάρχουν δύο κύρια προβλήματα διανομής εκτάσεων:

1. Διανομή με ευθεία που διέρχεται από γνωστό σημείο.
2. Διανομή με ευθεία γνωστής διεύθυνσης.

Κάθε μια από τις δύο μεθόδους έχει δικό της τρόπο επίλυσης. Οι μέθοδοι αναλύονται στις επόμενες παραγράφους. Υπάρχει, βέβαια, πιθανότητα να χρησιμοποιήσουμε σε μια διανομή και τους δύο τρόπους, ανάλογα με τις συνθήκες και τις απαιτήσεις της εργασίας μας.

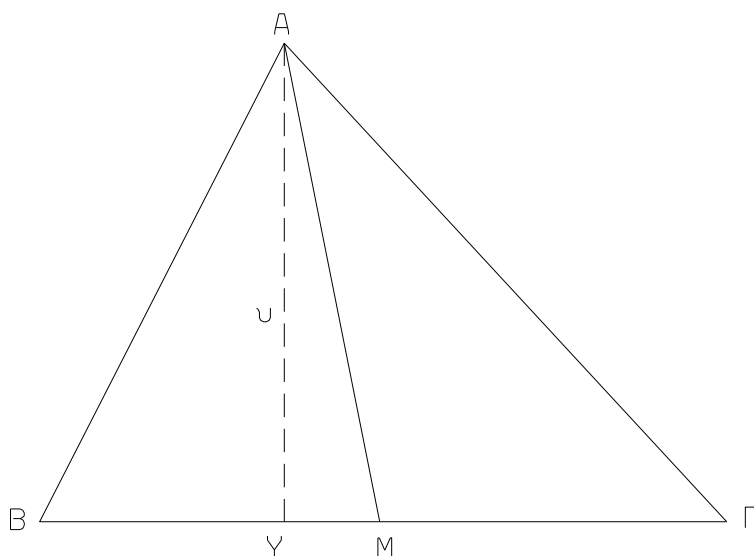
Κατά την περιγραφή των μεθόδων διανομής επιφανειών γίνεται χρήση μεθόδων της Γεωμετρίας, με τις οποίες διανέμονται απλά γεωμετρικά σχήματα σε τμήματα κάποιας ζητούμενης επιφάνειας. Στις παραγράφους, που αμέσως ακολουθούν, θα βρείτε περιγραφές γεωμετρικών μεθόδων, που χρησιμοποιούνται για τη διανομή απλών γεωμετρικών σχημάτων.

4.2.a Διανομή τριγώνου

Η διανομή τριγώνου είναι η γενική μέθοδος της γεωμετρίας, που διαιρεί ένα τρίγωνο σε τμήματα ίσα με μια δοσμένη επιφάνεια. Παρουσιάζονται κυρίως δύο μέθοδοι διανομής τριγώνου.

ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με γνωστές συντεταγμένες των κορυφών του. Ζητείται να διανεμηθεί τμήμα του τριγώνου επιφάνειας ίσης με ΕΔ με ευθεία, που διέρχεται από την κορυφή του Α.



Σχήμα 4.12 Διανομή τριγώνου με ευθεία σταθερού σημείου

Για το τρίγωνο, που εικονίζεται στο σχήμα 4.12, γνωρίζουμε τις συντεταγμένες όλων των κορυφών. Συνεπώς είναι δυνατό να υπολογίσουμε το εμβαδό του Ε από τον τύπο των ορθογώνιων συντεταγμένων:

$$2E = A\psi(\Gamma\chi - B\chi) + B\psi(A\chi - \Gamma\chi) + \Gamma\psi(B\chi - A\chi) \quad (\text{Σχέση 4.20})$$

Από τον τύπο υπολογισμού εμβαδού τριγώνου με τη χρήση του ύψους και της βάσης του έχουμε:

$$E = (B\Gamma \cdot A\Upsilon) / 2 \quad (\text{Σχέση 4.21})$$

Από τη σχέση (Σχέση 4.20) είναι γνωστό το εμβαδό Ε του τριγώνου. Άρα, από τη σχέση (Σχέση 4.21) μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος του:

$$\upsilon = A\Upsilon = 2 \cdot E / B\Gamma \quad (\text{Σχέση 4.22})$$

Έστω ΑΜ η ζητούμενη ευθεία. Τότε πρέπει το εμβαδό του τμήματος ΑΒΜ να είναι ίσο με ΕΔ. Το τρίγωνο ΑΒΜ έχει ίσο ύψος με το τρίγωνο ΑΒΓ. Άρα θα ισχύει ο τύπος:

$$(A\text{B}\text{M}) = E\Delta = (B\text{M} \cdot \upsilon) / 2 \Rightarrow$$

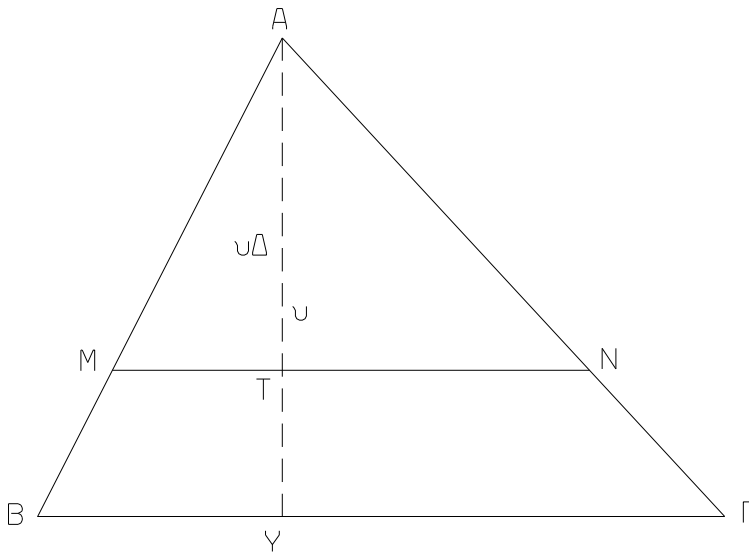
$$B\text{M} = 2 \cdot E\Delta / \upsilon$$

Η παραπάνω σχέση δίνει την απόσταση του σημείου Μ από την κορυφή Β πάνω στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου. Επομένως ορίζεται η θέση του σημείου Μ. Άρα η ευθεία διανομής του τριγώνου είναι η ΑΜ.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με γνωστές συντεταγμένες των κορυφών του. Ζητείται να διανεμηθεί τμήμα εμβαδού $E\Delta$ με ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ (Σχήμα 4.13).

Αφού είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του E .

Από την τοποθέτηση του προβλήματος, είναι γνωστή η διεύθυνση της ζητούμενης ευθείας (παράλληλη στη $B\Gamma$). Συνεπώς για τον πλήρη ορισμό της αρκεί να βρούμε τη θέση ενός σημείου της.



Σχήμα 4.13 Διανομή τριγώνου με ευθεία παράλληλη στη βάση

Έστω MN η ζητούμενη ευθεία. Τότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και AMN είναι όμοια. Από την ομοιότητα των τριγώνων ισχύει η σχέση:

$$\frac{MN}{B\Gamma} = \frac{AT}{AY} = \frac{\upsilon_{\Delta}}{\upsilon} \quad (\text{Σχέση 4.23})$$

Τα εμβαδά των τριγώνων $AB\Gamma$ και AMN δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = \frac{B\Gamma \cdot \upsilon}{2} \quad (\text{Σχέση 4.24})$$

$$E_{\Delta} = \frac{MN \cdot \upsilon_{\Delta}}{2} \quad (\text{Σχέση 4.25})$$

Από τις σχέσεις (Σχέση 4.24) και (Σχέση 4.25) προκύπτει ότι ο λόγος των εμβαδών είναι:

$$\frac{E_{\Delta}}{E} = \frac{MN \cdot \upsilon_{\Delta}}{B\Gamma \cdot \upsilon} = \frac{MN}{B\Gamma} \cdot \frac{\upsilon_{\Delta}}{\upsilon} \quad (\text{Σχέση 4.26})$$

Από τις σχέσεις (Σχέση 4.23) και (Σχέση 4.26) προκύπτει:

$$\frac{E_{\Delta}}{E} = \frac{\upsilon_{\Delta}}{\upsilon} \cdot \frac{\upsilon_{\Delta}}{\upsilon} = \frac{\upsilon_{\Delta}^2}{\upsilon^2} \quad (\text{Σχέση 4.27})$$

Από τη σχέση (Σχέση 4.27) έχουμε:

$$v_{\Delta} = v \cdot \sqrt{\frac{E_{\Delta}}{E}}$$

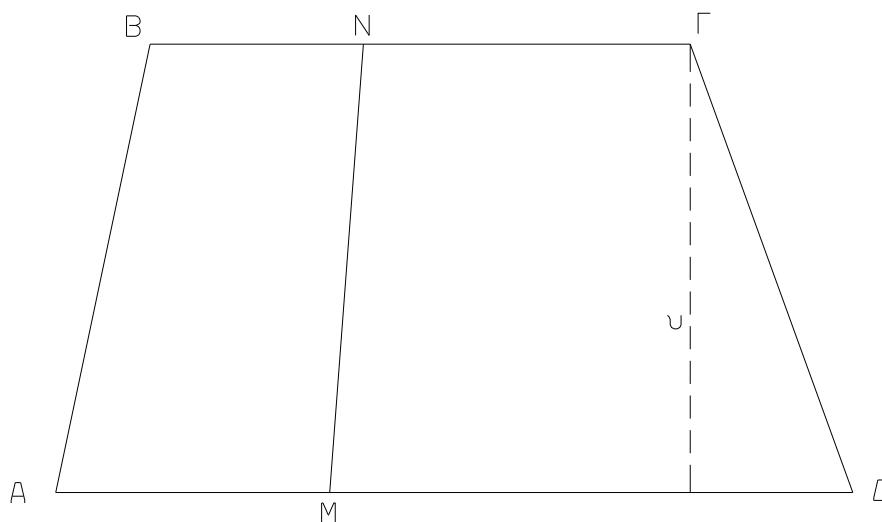
Η παραπάνω σχέση δίνει το ύψος του τριγώνου εμβαδού E_{Δ} . Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι μια παράλληλη προς τη βάση $B\Gamma$ σε απόσταση v_{Δ} από την κορυφή A .

4.2.β Διανομή τραπεζιού

Διανομή τραπεζιού είναι η γεωμετρική μέθοδος ορισμού ενός τμήματος του τραπεζιού με δεδομένο εμβαδό. Υπάρχουν δύο μέθοδοι διανομής ενός τραπεζιού, που περιγράφονται στις ακόλουθες παραγράφους.

ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΣΗΜΕΙΟ ΜΙΑΣ ΒΑΣΗΣ

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με γνωστές τις συντεταγμένες των κορυφών του. Επίσης δίνεται η θέση σημείου M στη βάση του τραπεζιού. Ζητείται η θέση ευθείας MN , η οποία ορίζει τμήμα εμβαδού E_{Δ} (Σχήμα).



Σχήμα 4.14 : Διανομή τραπεζιού με ευθεία δεδομένου σημείου

Αφού γνωρίζουμε όλες τις συντεταγμένες των κορυφών, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των βάσεων από τις σχέσεις:

$$A\Delta = \sqrt{(A_x - \Delta_x)^2 + (A_y - \Delta_y)^2}$$

$$B\Gamma = \sqrt{(B_x - \Gamma_x)^2 + (B_y - \Gamma_y)^2}$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό E του τραπεζιού από τον τύπο των ορθογώνιων συντεταγμένων.

Γνωρίζοντας το εμβαδό και τα μήκη των δύο βάσεων, υπολογίζουμε το ύψος v του τραπεζιού, με τη χρήση του τύπου:

$$E = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \cdot \nu \Rightarrow \nu = \frac{2 \cdot E}{A\Delta + B\Gamma} \quad (\text{Σχέση 4.28})$$

Έστω MN η ζητούμενη ευθεία. Τότε πρέπει το εμβαδό της έκτασης ABNM να είναι ίσο με EΔ. Το σχήμα ABNM είναι επίσης τραπέζιο και έχει το ίδιο ύψος ν με το αρχικό τραπέζιο. Επομένως το εμβαδό του δίνεται από τον τύπο:

$$E_{\Delta} = \frac{AM + BN}{2} \cdot \nu \quad (\text{Σχέση 4.29})$$

Από τη (Σχέση 4.29) υπολογίζουμε το μήκος BN:

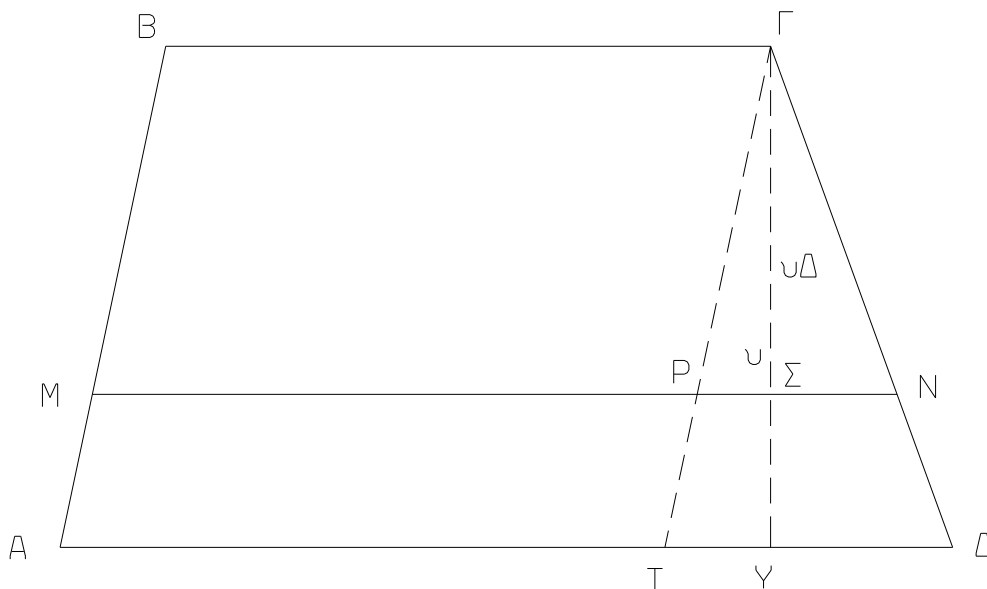
$$BN = \frac{2 \cdot E_{\Delta}}{\nu} - AM \quad (\text{Σχέση 4.30})$$

Τελικά η (Σχέση 4.30), λόγω της (Σχέση 4.28) γίνεται:

$$BN = \frac{E_{\Delta}}{E} \cdot (A\Delta + B\Gamma) - AM$$

Η σχέση αυτή δίνει την απόσταση από το σημείο B του δεύτερου σημείου N της ζητούμενης ευθείας MN. Αφού γνωρίζουμε δύο σημεία της ζητούμενης ευθείας, έχουμε πλήρη ορισμό της στο επίπεδο.

ΔΙΑΝΟΜΗ ΜΕ ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΣΤΙΣ ΒΑΣΕΙΣ



Σχήμα 4.15 Διανομή τραπέζιου με ευθεία παράλληλη στις βάσεις

Του τραπέζιου ABΓΔ, που φαίνεται στο Σχήμα 4.15, είναι γνωστές οι συντεταγμένες όλων των κορυφών. Ζητείται να διανεμηθεί σε ένα τμήμα εμβαδού EΔ με μια ευθεία παράλληλη στις βάσεις του.

Αφού γνωρίζουμε όλες τις συντεταγμένες των κορυφών, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των βάσεων από τις σχέσεις:

$$A\Delta = \sqrt{(A_\chi - \Delta_\chi)^2 + (A_\psi - \Delta_\psi)^2}$$

$$B\Gamma = \sqrt{(B_\chi - \Gamma_\chi)^2 + (B_\psi - \Gamma_\psi)^2}$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό E του τραπεζίου από τον τύπο των ορθογώνιων συντεταγμένων.

Γνωρίζοντας το εμβαδό και τα μήκη των δύο βάσεων, υπολογίζουμε το ύψος ν του τραπεζίου, με τη χρήση του τύπου:

$$E = \frac{A\Delta + B\Gamma}{2} \bullet \nu \Rightarrow \nu = \frac{2 \bullet E}{A\Delta + B\Gamma} \quad (\text{Σχέση 4.31})$$

Έστω MN η ζητούμενη ευθεία. Από την κορυφή Γ θεωρούμε την ευθεία ΓT παράλληλη προς την πλευρά AB του τραπεζίου. Τότε προκύπτουν τα όμοια τρίγωνα $\Gamma P N$ και $\Gamma T \Delta$. Από τις σχέσεις ομοιότητας έχουμε:

$$\frac{\nu_\Delta}{\nu} = \frac{PN}{T\Delta} = \frac{MN - B\Gamma}{A\Delta - B\Gamma} \Rightarrow \nu_\Delta = \frac{MN - B\Gamma}{A\Delta - B\Gamma} \bullet \nu \quad (\text{Σχέση 4.32})$$

Το τμήμα διανομής $B\Gamma N M$ είναι επίσης τραπέζιο, διότι έχει δύο παράλληλες πλευρές ($B\Gamma \parallel MN$). Συνεπώς το εμβαδό του δίνεται από τη σχέση:

$$E_\Delta = \frac{MN + B\Gamma}{2} \bullet \nu_\Delta \quad (\text{Σχέση 4.33})$$

Αντικαθιστούμε στη (Σχέση 4.33) το ν_Δ που υπολογίσαμε στην (Σχέση 4.32) και έχουμε:

$$E_\Delta = \frac{MN + B\Gamma}{2} \bullet \frac{MN - B\Gamma}{A\Delta - B\Gamma} \bullet \nu \quad (\text{Σχέση 4.34})$$

Από τη σχέση (Σχέση 4.34) προκύπτει:

$$E_\Delta = \frac{MN^2 - B\Gamma^2}{2 \bullet (A\Delta - B\Gamma)} \bullet \nu \Rightarrow$$

$$MN = \sqrt{B\Gamma^2 + \frac{2 \bullet E_\Delta \bullet (A\Delta - B\Gamma)}{\nu}} \quad (\text{Σχέση 4.35})$$

Με αντικατάσταση της (Σχέση 4.31) στην (Σχέση 4.35) έχουμε:

$$MN = \sqrt{B\Gamma^2 + \frac{E_\Delta}{E} \bullet (A\Delta^2 - B\Gamma^2)} \quad (\text{Σχέση 4.36})$$

Τελικά αντικαθιστούμε το MN στη σχέση (Σχέση 4.32) και έχουμε τον τύπο:

$$\nu_\Delta = \frac{\sqrt{B\Gamma^2 + \frac{E_\Delta}{E} \bullet (A\Delta^2 - B\Gamma^2)} - B\Gamma}{A\Delta - B\Gamma} \bullet \nu$$

Η σχέση αυτή μας δίνει το ύψος του τμήματος διανομής, δηλαδή την απόσταση της ευθείας διανομής από τη βάση ΒΓ του τραapeζιου. Για την ευθεία διανομής γνωρίζουμε τη διεύθυνσή της (παράλληλη προς τις βάσεις) και την απόστασή της από μια βάση, επομένως είναι πλήρως ορισμένη στο επίπεδο.

4.2.γ Διανομή έκτασης με ευθεία σταθερού σημείου

Η γενική τοποθέτηση του προβλήματος έχει ως εξής:

Δίνεται έκταση $A_1A_2\dots A_n$. Είναι γνωστές οι συντεταγμένες όλων των κορυφών της. Επίσης δίνεται η θέση ενός σημείου M στην περίμετρο της έκτασης. Ζητείται να υπολογισθεί η ευθεία, που διέρχεται από το σημείο M και ορίζει τμήμα της έκτασης εμβαδού ίσου με $E\Delta$.

Είναι προφανές ότι η ζητούμενη ευθεία είναι στην πραγματικότητα η οριζόντια προβολή κάποιας ευθυγραμμίας. Συνεπώς το πρόβλημα εντοπίζεται στον ορισμό της θέσης μιας ευθείας σε ένα επίπεδο. Ο ορισμός μιας ευθείας σε κάποιο επίπεδο είναι δυνατό να γίνει με δύο τρόπους, δηλαδή:

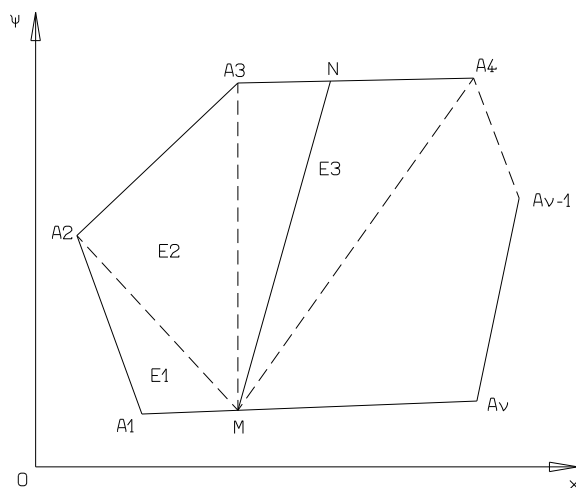
1. Ορίζοντας δύο σημεία της ευθείας.
2. Ορίζοντας ένα σημείο και τη διεύθυνση της ευθείας.

Από την τοποθέτηση του προβλήματος, ήδη έχουμε τη θέση ενός σημείου M της ζητούμενης ευθείας. Επομένως, για τον πλήρη ορισμό της, ζητούμε τη θέση ενός ακόμη σημείου της ή τη γωνία διεύθυνσής της.

Υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης του προβλήματος: ο Αναλυτικός και ο Γεωμετρικός τρόπος.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Στο σχήμα 4.16 βλέπετε την έκταση $A_1A_2\dots A_n$, της οποίας έχουν ορισθεί όλες οι συντεταγμένες των κορυφών. Επίσης δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου M , στην περίμετρο της έκτασης. Ζητείται η εύρεση ευθείας MN , έτσι ώστε το τμήμα της έκτασης, που ορίζεται, να έχει εμβαδό ίσο με $E\Delta$.



Σχήμα 4.16 Διανομή με ευθεία σταθερού σημείου. Αναλυτικός τρόπος

Πρώτο στάδιο της επίλυσης του προβλήματος είναι να εντοπίσουμε την πλευρά της έκτασης, πάνω στην οποία θα βρίσκεται το δεύτερο σημείο N της ζητούμενης ευθείας. Όλες οι πλευρές είναι ευθύγραμμα τμήματα της πολυγωνικής γραμμής που περιβάλλει την έκταση. Κάθε μια πλευρά έχει σαν αρχή και τέλος δύο επάλληλες κορυφές της έκτασης. Για τον εντοπισμό της πλευράς, στην οποία θα ανήκει το ζητούμενο σημείο N, εργαζόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε την ευθεία MA2, η οποία ορίζει το τμήμα της έκτασης MA1A2. Έχουμε τις συντεταγμένες των σημείων M, A1, A2. Επομένως, υπολογίζουμε το εμβαδό E1=(MA1A2), από τον γνωστό τύπο υπολογισμού εμβαδού).

Αν βρούμε E1=ΕΔ, τότε λύθηκε το πρόβλημα και το ζητούμενο σημείο N ταυτίζεται με την κορυφή A2. Η περίπτωση είναι εξαιρετικά σπάνια.

Αν βρούμε E1>ΕΔ, τότε σημαίνει ότι το σημείο N βρίσκεται αριστερότερα του A2.

Αν βρούμε E1<ΕΔ, τότε το ζητούμενο σημείο N βρίσκεται δεξιότερα του A2. Σε αυτή την περίπτωση ελέγχουμε την πιθανότητα το σημείο N να βρίσκεται στην πλευρά A2A3.

Θεωρούμε την ευθεία MA3, ορίζοντας έτσι το τμήμα MA2A3. Έχοντας τις συντεταγμένες των κορυφών, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του τμήματος αυτού E2=(MA2A3).

Αν βρούμε E1+E2=ΕΔ, τότε το ζητούμενο σημείο N ταυτίζεται με την κορυφή A3. Η περίπτωση είναι επίσης εξαιρετικά σπάνια.

Αν βρούμε E1+E2>ΕΔ, τότε σημαίνει ότι το σημείο N βρίσκεται αριστερότερα του A3.

Αν βρούμε E1+E2<ΕΔ, τότε το ζητούμενο σημείο N βρίσκεται δεξιότερα του A3. Σε αυτή την περίπτωση ελέγχουμε την πιθανότητα το σημείο N να βρίσκεται στην πλευρά A3A4.

Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι να εντοπίσουμε την πλευρά της έκτασης, πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο N. Στο παράδειγμα, που εικονίζεται στο σχήμα 16, υποτίθεται ότι βρήκαμε E1+E2=(MA1A2A3)<ΕΔ και E1+E2+E3=(MA1A2A3A4)>ΕΔ. Συνεπώς το σημείο N θα είναι μεταξύ των κορυφών A3 και A4.

Στο δεύτερο στάδιο της επίλυσης του προβλήματος, βρίσκουμε τις εξισώσεις, από τις οποίες θα υπολογισθεί η ακριβής θέση του σημείου N (δηλαδή οι συντεταγμένες του).

Η πρώτη ιδιότητα του σημείου N είναι ότι το εμβαδό (MA1A2A3N)=ΕΔ. Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι 2•(MA1A2A3N)=2•ΕΔ. Συνεπώς καταστρώνουμε την εξίσωση από τον γνωστό τύπο υπολογισμού του διπλάσιου εμβαδού έκτασης από τις ορθογώνιες συντεταγμένες των κορυφών της:

$$M_{\psi}(A_{1z} - N_z) + A_{1\psi}(A_{2z} - M_z) + A_{2\psi}(A_{3z} - A_{1z}) + A_{3\psi}(N_z - A_{2z}) + N_{\psi}(M_z - A_{3z}) = 2E_{\Delta}$$

(Σχέση 4.33)

Η δεύτερη ιδιότητα του ζητούμενου σημείου N είναι ότι βρίσκεται στην ευθεία A3A4. Η γωνία διευσθύνσεως της A3A4 είναι α34 και η εφαπτομένη της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\varepsilon\phi\alpha_{34} = \frac{\Delta\chi_{34}}{\Delta\psi_{34}} = \frac{A_{4\chi} - A_{3\chi}}{A_{4\psi} - A_{3\psi}} \quad (\text{Σχέση 4.34})$$

Επειδή το σημείο N βρίσκεται στην A3A4 η γωνία διεύθυνσεως A3N θα είναι ίση με την α34. Δηλαδή θα ισχύει α3N=α34, επομένως θα έχουμε:

$$\varepsilon\phi\alpha_{3N} = \varepsilon\phi\alpha_{34} = \frac{\Delta\chi_{3N}}{\Delta\psi_{3N}} = \frac{N_{\chi} - A_{3\chi}}{N_{\psi} - A_{3\psi}} \quad (\text{Σχέση 4.35})$$

Από τις (Σχέση 4.34) και (Σχέση 4.35) προκύπτει ότι η δεύτερη εξίσωση θα είναι:

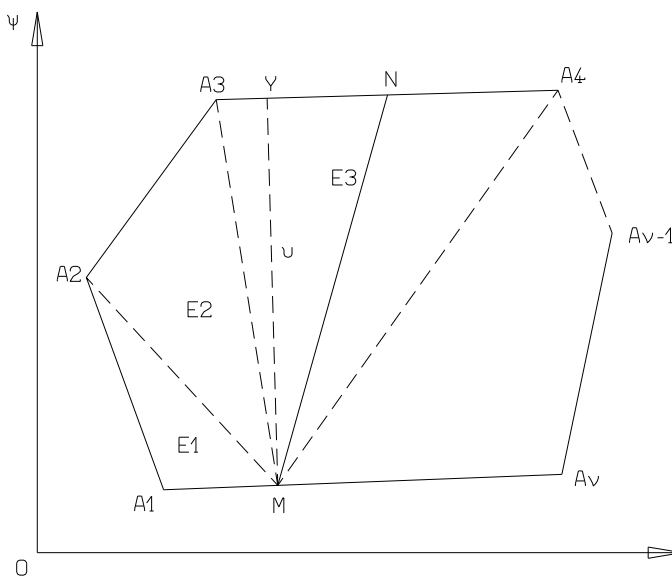
$$\frac{N_{\chi} - A_{3\chi}}{N_{\psi} - A_{3\psi}} = \frac{A_{4\chi} - A_{3\chi}}{A_{4\psi} - A_{3\psi}} \quad (\text{Σχέση 4.36})$$

Οι (Σχέση 4.33) και (Σχέση 4.36) περιέχουν δύο αγνώστους, τους N_χ και N_ψ. Η επίλυση του συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους δίνει τις συντεταγμένες του σημείου N(N_χ,N_ψ).

Επειδή υπάρχουν πολλοί υπολογισμοί στην κατάστροψη και επίλυση των εξισώσεων, είναι πολύ πιθανό να γίνει κάποιο λάθος. Για το λόγο αυτό πρέπει πάντα να γίνεται επαλήθευση των υπολογισμών. Η επαλήθευση συνίσταται στον υπολογισμό του εμβαδού του τμήματος, που προκύπτει με την εφαρμογή των συντεταγμένων του δεύτερου σημείου της ευθείας. Αν βρούμε εμβαδό ίσο με το ζητούμενο ή πολύ κοντά σε αυτό, τότε σημαίνει ότι έγιναν σωστά οι υπολογισμοί. Αν βρούμε εμβαδό που να απέχει πολύ από το ζητούμενο, ή να είναι απαράδεκτο (π.χ. αρνητικό) τότε πρέπει να επαναλάβουμε την ανάλυση του προβλήματος.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

Το πρώτο στάδιο της Γεωμετρικής μεθόδου είναι ίδιο με αυτό που περιγράφηκε για την Αναλυτική μέθοδο:



Σχήμα 4.17 Διανομή με ευθεία σταθερού σημείου. Γεωμετρικός τρόπος

Θεωρούμε την ευθεία MA_2 , η οποία ορίζει το τμήμα της έκτασης MA_1A_2 . Υπολογίζουμε το εμβαδό $E_1=(MA_1A_2)$, από τον γνωστό τύπο υπολογισμού εμβαδού από τις ορθογώνιες συντεταγμένες.

Αν βρούμε $E_1=E\Delta$, τότε λύθηκε το πρόβλημα και το ζητούμενο σημείο N ταυτίζεται με την κορυφή A_2 .

Αν βρούμε $E_1>E\Delta$, τότε σημαίνει ότι το σημείο N βρίσκεται στα αριστερά του A_2 .

Αν βρούμε $E_1<E\Delta$, τότε το ζητούμενο σημείο N βρίσκεται δεξιότερα του A_2 . Σε αυτή την περίπτωση ελέγχουμε την πιθανότητα το σημείο N να βρίσκεται στην πλευρά A_2A_3 .

Θεωρούμε την ευθεία MA_3 , ορίζοντας έτσι το τμήμα MA_2A_3 . Υπολογίζουμε το εμβαδό του τμήματος αυτού $E_2=(MA_2A_3)$.

Αν βρούμε $E_1+E_2=E\Delta$, τότε το ζητούμενο σημείο N ταυτίζεται με την κορυφή A_3 .

Αν βρούμε $E_1+E_2>E\Delta$, τότε το σημείο N βρίσκεται αριστερά του A_3 .

Αν βρούμε $E_1+E_2<E\Delta$, τότε το ζητούμενο σημείο N βρίσκεται δεξιότερα του A_3 . Σε αυτή την περίπτωση ελέγχουμε την πιθανότητα το σημείο N να βρίσκεται στην πλευρά A_3A_4 .

Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα μέχρι να εντοπίσουμε την πλευρά της έκτασης, πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο N . Στο παράδειγμα, που εικονίζεται στο σχήμα 4.17, υποτίθεται ότι βρήκαμε $E_1+E_2=(MA_1A_2A_3)<E\Delta$ και $E_1+E_2+E_3=(MA_1A_2A_3A_4)>E\Delta$. Συνεπώς το σημείο N θα είναι μεταξύ των κορυφών A_3 και A_4 .

Στο σημείο αυτό έχουμε τα εμβαδά των τριγώνων MA_1A_2 , MA_2A_3 , MA_3A_4 , τα οποία είναι E_1 , E_2 , E_3 αντιστοίχα. Επίσης είναι γνωστό το εμβαδό διανομής $E\Delta$. Διαπιστώσαμε ότι $E_1+E_2<E\Delta$ και $E_1+E_2+E_3>E\Delta$. Η ζητούμενη έκταση πρέπει να περιλάβει όλο το τμήμα $MA_1A_2A_3$ και επί πλέον ένα τμήμα του τριγώνου MA_3A_4 , εμβαδού ίσου με $E\Delta -E_1-E_2$. Άρα η ευθεία διανομής πρέπει να χωρίσει ένα τμήμα του τριγώνου MA_3A_4 εμβαδού ίσου με $E_{\text{υπ}}=E\Delta -E_1-E_2$.

Στο δεύτερο στάδιο της Γεωμετρικής μεθόδου το πρόβλημα ανάγεται στη διανομή τριγώνου με ευθεία διερχόμενη από την κορυφή του. Η πορεία εργασιών είναι η εξής:

Υπολογίζουμε το εμβαδό E_3 του τριγώνου MA_3A_4 , από τις συντεταγμένες των κορυφών του.

Υπολογίζουμε το ύψος του από τον τύπο
$$v = \frac{2 \cdot E_3}{A_3 A_4} \quad (\text{Σχέση } 4.37)$$

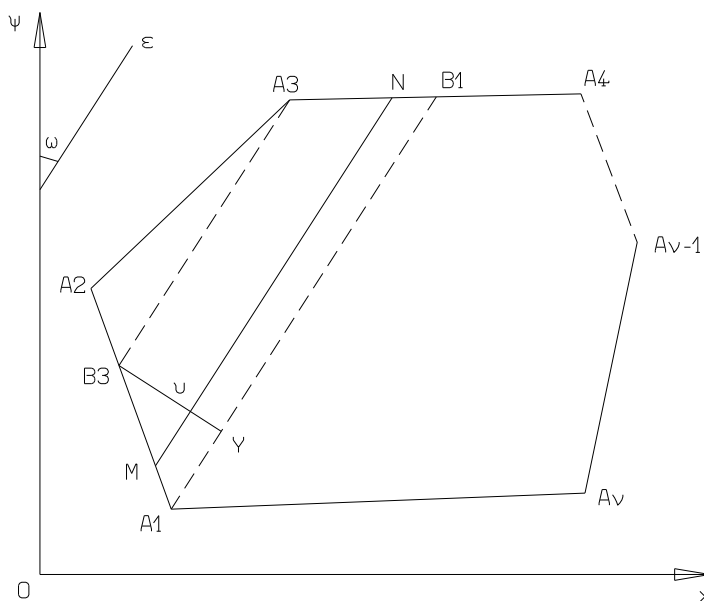
Υπολογίζουμε την απόσταση A_3N από τον τύπο:
$$A_3N = \frac{2 \cdot E_{\text{υπ}}}{v} \quad (\text{Σχέση } 4.38)$$

4.2.6 Διανομή έκτασης με ευθεία σταθερής διεύθυνσης

Η γενική τοποθέτηση του προβλήματος έχει ως εξής:

Δίνεται έκταση $A_1A_2\dots A_n$. Είναι γνωστές οι συντεταγμένες όλων των κορυφών της. Ζητείται να υπολογισθεί η ευθεία, που έχει γωνία διεύθυνσεως ω και ορίζει τμήμα της έκτασης εμβαδού ίσου με $E\Delta$.

Για τον πλήρη ορισμό της ευθείας στο επίπεδο προβολής πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες δύο σημείων της ή τις συντεταγμένες ενός σημείου και της γωνίας διεύθυνσής της. Από την εκφώνηση του προβλήματος είναι ήδη γνωστή η διεύθυνση της ευθείας. Άρα, αρκεί να βρούμε τις συντεταγμένες ενός μόνο σημείου της.



Σχήμα 4.2 Διανομή με ευθεία δεδομένης διεύθυνσης

Στο Σχήμα 4.24.18 φαίνεται μια έκταση $A_1A_2\dots A_n$, της οποίας γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών. Ακόμη δίνεται μια ευθεία ϵ με δεδομένη διεύθυνση ω . Ζητείται η θέση της ευθείας MN , η οποία θα διανέμει τμήμα της έκτασης εμβαδού ίσου με $E\Delta$.

Η επίλυση του προβλήματος έχει ως εξής:

Αφού είναι γνωστές όλες οι συντεταγμένες των κορυφών της έκτασης, η γωνία διεύθυνσης κάθε πλευράς υπολογίζεται εύκολα από το 2ο θεμελιώδες πρόβλημα της Τοπογραφίας. Για παράδειγμα η εφαπτομένη της διεύθυνσης της A_1A_2 είναι:

$$\epsilon\phi\alpha_{12} = \frac{A_{1x} - A_{2x}}{A_{1\psi} - A_{2\psi}} \quad (\text{Σχέση 4.40})$$

Από κάθε κορυφή της έκτασης φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ϵ , δηλαδή με διεύθυνση ω , η οποία τέμνει κάποια άλλη πλευρά της έκτασης, ορίζοντας έτσι ένα τμήμα της.

Στο παράδειγμά μας η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή A3 και έχει διεύθυνση ω τέμνει την πλευρά A1A2 στο σημείο B3. Η ευθεία, που διέρχεται από την κορυφή A1 και έχει διεύθυνση ω τέμνει την πλευρά A3A4 στο σημείο B1. Κ.ο.κ.

Τα σημεία τομής B1, B2 κ.λπ. ανήκουν σε ευθείες με γνωστές διευθύνσεις. Πράγματι κάθε ένα σημείο είναι η τομή μιας ευθείας με διεύθυνση ω και μιας πλευράς της έκτασης, που η διεύθυνσή της έχει υπολογισθεί. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τις σχέσεις υπολογισμού των εφαπτομένων των γωνιών διεύθυνσης για κάθε σημείο τομής. Π.χ. το σημείο B3 ανήκει στην A3B3 και στην πλευρά A1A2. Συνεπώς θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{B_{3\chi} - A_{1\chi}}{B_{3\psi} - A_{1\psi}} = \varepsilon\phi\alpha_{12}$$

$$\frac{A_{3\chi} - B_{3\chi}}{A_{3\psi} - B_{3\psi}} = \varepsilon\phi\omega$$

(Σχέση 4.41 και Σχέση 4.42)

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου B3. Με παρόμοιες εξισώσεις υπολογίζουμε τις συντεταγμένες κάθε σημείου τομής των ευθειών διεύθυνσης ω και των πλευρών της έκτασης.

Ανά δύο οι παράλληλες αυτές ευθείες ορίζουν ένα τμήμα της έκτασης σχήματος τραπεζίου ή τριγώνου. Έχουμε ήδη υπολογίσει τις συντεταγμένες όλων των κορυφών των επί μέρους σχημάτων. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τα εμβαδά όλων των σχημάτων, που ορίζονται από τις παράλληλες ευθείες.

Αθροίζουμε διαδοχικά τα επί μέρους εμβαδά, μέχρι να φτάσουμε στο επιθυμητό εμβαδό διανομής. Το πιθανότερο είναι ότι δεν θα προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδό με αρκετή ακρίβεια. Στην περίπτωση αυτή θα εκτελέσουμε διανομή του επόμενου τμήματος της έκτασης (τραπεζίου ή τριγώνου) κατά την απαιτούμενη διαφορά και θα ορίσουμε έτσι την ευθεία διανομής.

Στο παράδειγμα, που φαίνεται στο Σχήμα 4.24.18, το ζητούμενο εμβαδό EΔ είναι μεγαλύτερο από το (A2A3B3) και μικρότερο από το (A2A3B3)+(A3B3A1B1). Συνεπώς, πρέπει να αποτιμηθεί τμήμα του τραπεζίου A3B3A1B1 και να αποδοθεί στη ζητούμενη έκταση. Το αποκοπόμενο τμήμα του τραπεζίου πρέπει να έχει εμβαδό ίσο με τη ζητούμενη διαφορά $E_{\text{υπ}} = E\Delta - (A2A3B3)$. Άρα η ζητούμενη ευθεία θα διανέμει το τραπέζιο A3B3A1B1 σε τμήμα γνωστού εμβαδού.

Για τη διανομή του τραπεζίου πρέπει να γνωρίζουμε και το ύψος του υ. Ο υπολογισμός του ύψους γίνεται με τις ακόλουθες σκέψεις:

Η ευθεία A1B1 έχει γωνία διεύθυνσεως ω . Το ύψος είναι κάθετο σε αυτή, άρα θα έχει γωνία διεύθυνσεως $\omega + 100\text{grad}$. Εφαρμόζουμε τις σχέσεις που υπολογίζουν τις εφαπτόμενες των γωνιών διεύθυνσεως:

$$\frac{Y_{\chi} - B_{3\chi}}{Y_{\psi} - B_{3\psi}} = \varepsilon\phi(\omega + 100)$$

$$\frac{Y_{\chi} - A_{1\chi}}{Y_{\psi} - A_{1\psi}} = \varepsilon\phi\omega$$

(Σχέση 4.43 και Σχέση 4.44)

Στις εξισώσεις αυτές άγνωστοι είναι τα Y_{χ} και Y_{ψ} . Άρα έχουμε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Από τις σχέσεις αυτές υπολογίζουμε τις

συντεταγμένες του σημείου Y . Στη συνέχεια από τις συντεταγμένες των σημείων B και Y υπολογίζουμε το ύψος:

$$v = \sqrt{(B_{3\chi} - Y_\chi)^2 + (B_{3\psi} - Y_\psi)^2} \quad (\text{Σχέση 4.45})$$

Γνωρίζουμε τα μήκη των βάσεων A_3B_3 και A_1B_1 , και του ύψους v του τραπεζίου $A_3B_3A_1B_1$, έχουμε δε υπολογίσει το εμβαδό του.

Γνωρίζουμε επίσης και το υπόλοιπο εμβαδό E_{up} , που πρέπει να αποτιμηθεί από το τραπεζίο.

Εφαρμόζουμε τη σχέση υπολογισμού του ύψους διανομής:

$$v_\Delta = \frac{\sqrt{B_3A_3^2 + \frac{E_{up}}{E_{tp}} \bullet (A_1B_1^2 - B_3A_3^2)} - B_3A_3}{A_1B_1 - B_3A_3} \bullet v \quad (\text{Σχέση 4.46})$$

Η σχέση αυτή μας δίνει την απόσταση της ευθείας MN από την κορυφή B_3 .

4.3 Χαρακτηριστικά που βασίζονται στις ροπές αδρανείας του σχήματος

Για να αναπαραστήσουμε σχήματα και αντικείμενα ασπρόμαυρα ένα πολύ καλό χαρακτηριστικό είναι οι ροπές ή αλλιώς ροπές αδρανείας των σωμάτων γύρω από άξονα ή από κέντρο. Γενικά ο τύπος των ρομών αδρανείας δίνεται από την σχέση

$$m_{p,q} = \iint_R f(x,y) x^p y^q dx dy \quad (\text{Σχέση 4.47})$$

όπου $f(x,y)$ για δυαδικά αντικείμενα (black and white) είναι 0 για μαύρο και 1 για άσπρο.

Οι κεντρικές ροπές δίνονται από την σχέση

$$\mu_{p,q} = \iint (x-m_x)^p (y-m_y)^q f(x,y) dx dy \quad (\text{Σχέση 4.48})$$

όπου

$$m_x = \frac{m_{10}}{m_{00}} \quad \text{and} \quad m_y = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

(Σχέση 4.49 και Σχέση 4.50)

είναι οι συντεταγμένες του κέντρο βάρους του σώματος. Με βάση τα στοιχεία αυτά η γωνία του κύριου άξονα στο σχήματος με την οριζόντια διεύθυνση δίνεται από την σχέση

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left[\frac{2\mu_{11}}{\mu_{20} - \mu_{02}}\right] \quad (\text{Σχέση 4.50})$$

ενώ η εκκεντρότητα του σχήματος από την έκφραση

$$\left[\frac{\mu_{02} \cos^2 \theta + \mu_{20} \sin^2 \theta - \mu_{11} \sin 2\theta}{\mu_{02} \sin^2 \theta + \mu_{20} \cos^2 \theta + \mu_{11} \cos 2\theta} \right]^{1/2} \quad (\text{Σχέση 4.51})$$

ή από την σχέση

$$\epsilon \triangleq \frac{(\mu_{2,0} - \mu_{0,2})^2 + 4\mu_{1,1}}{\text{area}} \quad (\text{Σχέση 4.52})$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι άλλα απλά χαρακτηριστικά που διαχωρίζουν τα δυαδικά αντικείμενα είναι το πλήθος των pixels που καταλαμβάνει η επιφάνεια τους καθώς και το μήκος της περιμέτρου των υπολογισμένης με την σωστή γεωμετρία.

Τέλος ένα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό σχήματος που διαχωρίζει τα δυαδικά αντικείμενα είναι αυτό που χαρακτηρίζει την πολυπλοκότητα του ορίου του αντικειμένου ονομάζεται στη διεθνή βιβλιογραφία γ , και περιλαμβάνει το μήκος της περιμέτρου P καθώς επίσης και την επιφάνεια του αντικειμένου A :

$$\gamma = \frac{P^2}{4\pi A} \quad (\text{Σχέση 4.53})$$

όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι το γ τόσο πιο πολύ το σχήμα πλησιάζει τον κύκλο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Πειραματικά Αποτελέσματα

Τα πειραματικά αποτελέσματα βασίστηκαν σε δεδομένα που είχε το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής (ELLAB), Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών με την Ουρολογική Κλινική του Πανεπιστημιακού Νοσοκομείου Ρίου. Το πείραμα εστίαζε στην θρυμματίωση λίθων με διάφορες τεχνικές και στον υπολογισμό των γεωμετρικών τους χαρακτηριστικών. Αυτό θα έδινε τη δυνατότητα να εκτιμηθεί η αποτελεσματικότητα της θρυμματοποίησης εφόσον οι λίθοι ήταν μικροί ώστε να μπορούν να αποβληθούν χωρίς επέμβαση.

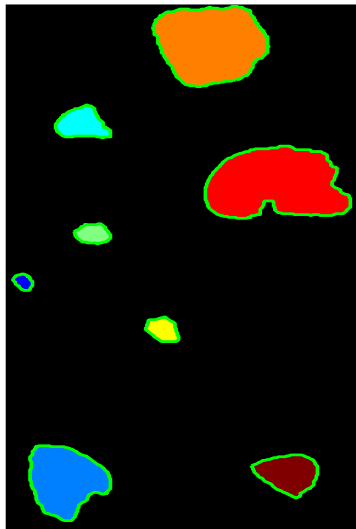
Οι λήψεις σαν αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 5.1, υποβλήθηκαν σε επεξεργασία και αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας ρουτίνες MATLAB που αναπτύχθηκαν στο Εργαστήριο Ηλεκτρονικής (ELLAB), Τμήμα Φυσικής, Πανεπιστήμιο Πατρών και στηρίζονται στους μετασχηματισμούς που περιγράφονται στα προηγούμενα κεφάλαια. Η περιοχή ενδιαφέροντος (ROI) αρχικά απομονώθηκε και στη συνέχεια υποβλήθηκε σε προεπεξεργασία. Η προεπεξεργασία περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

- A. Πραγματοποιήθηκε προσαρμοστικό κατώφλι για να απομονωθούν τα κομμάτια των λίθων.
- B. Τα εικονοστοιχεία φόντου ορίστηκαν στο μηδέν (μαύρο).
- C. Χρησιμοποιήθηκαν μορφολογικές επεμβάσεις για την εξομάλυνση των ορίων των κομματιών. Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν μορφολογικές επεμβάσεις:
 - εξάλειψη μικρών οπών που εμφανίστηκαν με χρήση κατωφλίου λόγω παρεμβολών θορύβου.
 - εξάλειψη πολύ μικρών αντικειμένων (τεχνουργήματα φόντου) των οποίων το μέγεθος ήταν μικρότερο από συγκεκριμένες διαστάσεις.
- D. Η ανάλυση του ROI περιλαμβάνει σήμανση των τεμαχίων πέτρας ανάλογα με την περιοχή τους. Επιπλέον, και για λόγους παρακολούθησης, τα κομμάτια χρωματίστηκαν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2, σύμφωνα με τα μεγέθη τους (ψευδοχρωματισμός).
- E. Τέλος, στη διαδικασία ανάλυσης αξιολογήθηκαν διάφορα γεωμετρικά χαρακτηριστικά κάθε τεμαχίου. Συγκεκριμένα, εκτιμήθηκαν και καταγράφηκαν τα ακόλουθα γεωμετρικά

χαρακτηριστικά: Εμβαδόν, Περίμετρος, Μήκος κύριου άξονα, Μήκος δευτερεύοντος άξονα, (Πίνακας 5.1). Μπορούν επίσης να εκτιμηθούν άλλα γεωμετρικά χαρακτηριστικά όπως η εκκεντρικότητα.

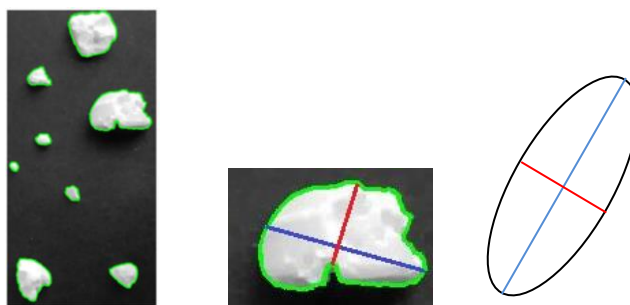


Σχήμα 5.1. Περιοχή ενδιαφέροντος



Σχήμα 5.2. Ψευδοχρωματισμός των λίθων σύμφωνα με το σχήμα τους

Στο Σχήμα 5.3, παρουσιάζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία υπολογίστηκαν και τα οποία παρουσιάζονται στο Πίνακα 1.



Σχήμα 5.3. Οι πράσινες γραμμές αντιστοιχούν στο όριο και περικλείουν την περίμετρο του κάθε λίθου. Μπλε γραμμή: Το μήκος του μεγάλου άξονα. Κόκκινη γραμμή: Το μήκος του μικρού άξονα.

Εμβαδόν (mm ²)	Μήκος Μεγάλου άξονα (mm)	Μήκος Μικρού άξονα (mm)	Περίμετρος (mm)
1,01273148148 148	1,30668602580 007	0,996091581784 479	3,89739658259 600
18,0335862482 853	5,44675500696 738	4,481422609605 06	17,7800357979 296
5,25441529492 455	3,08814168282 511	2,389769323031 05	9,87018330985 619
2,28105709876 543	1,99928944704 313	1,472884489586 16	5,93307078391 439
2,65239197530 864	2,17726154121 787	1,583717411883 98	6,37453068696 684
30,0968792866 941	6,44071188186 209	6,073826087483 64	22,5766377293 092
34,4735939643 347	8,47966532281 284	5,519801138093 68	26,6797588866 226
8,22348679698 217	3,60779402728 775	3,023664279809 30	11,4593454305 879

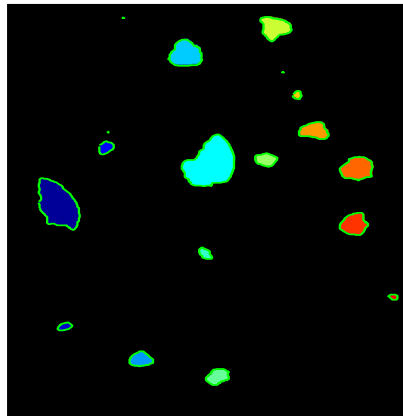
Πίνακας 5.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά (εμβαδόν, περίμετρος, μήκος μεγάλου και μικρού άξονα) για κάθε ένα λίθο (Σχήμα 5.1).

Η ανάλυση του συστήματος απεικόνισης μας ήταν πολύ υψηλή, δηλαδή 42,5 pixels/mm. Αντικείμενα μικρότερα από 0,1 mm ή 4 εικονοστοιχεία, εξαλείφθηκαν με μορφολογική επεξεργασία αφού θεωρήθηκαν ως θόρυβος.

Παρακάτω (Σχήματα 5.4 έως 5.6) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σε ένα δεύτερο δείγμα, όπου αποδεικνύεται η αποτελεσματικότητα της μεθόδου για τον υπολογισμό των διαστάσεων των λίθων.

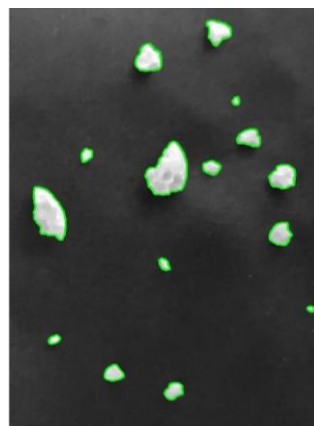


Σχήμα 5.4. Περιοχή ενδιαφέροντος του δεύτερου δείγματος.



Σχήμα 5.5. Ψευδοχρωματισμός των λίθων σύμφωνα με το σχήμα τους για το δεύτερο δείγμα.

Στο Σχήμα 5.6, παρουσιάζονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τα οποία υπολογίστηκαν και τα οποία παρουσιάζονται στο Πίνακα 5.2.



Σχήμα 5.6. Οι πράσινες γραμμές αντιστοιχούν στο όριο και περικλείουν την περίμετρο του κάθε λίθου.

Area (mm ²)	MajorAxisLength (mm)	MinorAxisLength (mm)	Perimeter (mm)
17,34742967175 13	6,664413990885 09	3,391712164015 76	18,3682514201 880
1,019428636089 47	1,501031900810 77	0,870824442006 563	3,96874206051 776
1,551428669833 48	1,692392799988 75	1,199333593374 30	4,90851947306 252
3,195428774110 05	2,248549266434 07	1,867255783687 17	7,08172455626 075
7,744571919798 56	3,299149742938 70	3,091257011852 90	11,1605000922 723
21,36571564091 11	6,547230265492 16	4,379903173524 25	19,7113003572 490
1,231428649536 33	1,667910601532 88	0,957785928566 991	4,56465753844 511
3,132000198658 30	2,397981126815 59	1,693500017396 95	7,05032091561 857
2,530857303385 81	2,059732949359 50	1,584417886990 66	6,30998283925 595
5,965714664111 05	2,962319376372 73	2,791811710367 10	10,3149336016 541
0,620000039325 717	0,994445529153 289	0,816149340880 140	3,07337610247 708
4,345143132749 08	2,843441822712 27	2,075973797513 94	8,51260124156 348
6,972000442224 03	3,241456062173 74	2,783882784478 27	10,4771690751 894
5,306286050855 86	2,802791886446 71	2,465263259856 68	9,10810451040 464
0,432000027401 145	0,847132479388 726	0,667811259552 426	2,63389587608 045

Πίνακας 5.2: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά (εμβαδόν, περίμετρος, μήκος μεγάλου και μικρού άξονα) για κάθε ένα λίθο (Σχήμα 5.4).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Συμπεράσματα

Με βάση την θεωρητική ερευνά που έγινε στα πλαίσια της πτυχιακής εργασίας αλλά και με βάση των πειραματικών δεδομένων και αποτελεσμάτων που μας δοθήκανε από το Εργαστήριο Ηλεκτρονικής (ELLAB) του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Πατρών σε συνεργασία με την Ουρολογική Κλινική του Πανεπιστημιακού Νοσοκομείου Ρίου, μπορούμε να συμπεράνουμε, ότι η επιλογή της τεχνικής για την εξαγωγή των χαρακτηριστικών είναι πολύ σημαντική καθώς τα αποτελέσματα τα οποία θα χρειαστεί να εξάγει θα πρέπει να συνάδουν με τα κριτήρια της περίπτωσης της οποίας έχουμε στα χέρια μας.

Σημαντικό επίσης που πρέπει να επισημανθεί είναι πως με τη βοήθεια απλής κατωφλιοποίησης και μορφολογικών κυρίως μετασχηματισμών μπορούμε να απομονώσουμε μορφές σε μια εικόνα και να υπολογίσουμε χαρακτηριστικά σχήματος (εμβαδόν, περίμετρο, εκκεντρότητα (άξονες)) τα οποία θα εμφανίζονται και παραστατικά.

Τελικώς, μπορούμε να πούμε ότι στην επεξεργασία ψηφιακής εικόνας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο ο χρωματισμός της εικόνας αλλά και η μορφολογική δομή της καθώς με βάση αυτά τα στοιχεία και με την επιλογή των σωστών μαθηματικών μετασχηματισμών μπορούμε να εξάγουμε αλγορίθμους για την κατηγοριοποίηση και ταξινόμηση των εκάστοτε αντικειμένων όπως φάνηκε και από τα πειραματικά αποτελέσματα τα οποία παρουσιάστηκαν.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Διαφάνειες Διάλεξης στην Τμηματοποίηση εικόνας, ΤΕΙ Κρήτης
https://eclass.hmu.gr/modules/document/file.php/TP262/%CE%94%CE%B9%CE%B1%CE%BB%CE%AD%CE%BE%CE%B5%CE%B9%CF%82%07_Segmentation.pdf
2. Ανάπτυξη αλγορίθμων για Τμηματοποίηση (segmentation) ψηφιακής εικόνας και υλοποίηση τους σε περιβάλλον matlab, Βουτοκοπούλου Ευαγγελία, Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Καβάλας, Σχολή Διοίκησης Και Οικονομίας, Τμήμα Διαχείρισης Πληροφοριών, 2006
<http://digilib.teiemt.gr/jspui/bitstream/123456789/2825/1/022006x03x176.pdf>
3. Τμηματοποίησης ιατρικών δεδομένων με χρήση ενεργών περιγραμμάτων, Αντωνιάδης Ηλίας, Δια τμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Στη Βιοϊατρική Τεχνολογία, 2015
https://nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/8985/1/Ilias_Antonia_dis_Master_Thesis.pdf
4. Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας, Χριστόφορος Νίκου, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής <http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1126>
5. Ιατρική Απεικόνιση & Ψηφιακή Επεξεργασία Ιατρικής Εικόνας, Δρ. Γ. Ματόπουλος, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών
https://biomig.ntua.gr/courses/radiotherapy/Image_processing_segmentation.pdf
6. Εκκεντρότητα, Βικιπαιδεία
<https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%95%CE%BA%CE%BA%CE%B5%CE%BD%CF%84%CF%81%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1>
7. Οπτική αναγνώριση και παρακολούθηση αντικειμένων με εξαγωγή χαρακτηριστικών σχήματος σε περιβάλλον κίνησης ρομποτ, Σκολαρίκης Μιχαήλ, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης Πολυτεχνική Σχολή, 2011
http://ikee.lib.auth.gr/record/290937/files/Final_Thesis.pdf
8. Διαφάνειες στην Μορφολογική επεξεργασία δυαδικών εικόνων, Επεξεργασία της μορφής των αντικειμένων, Θεωρία και πράξεις συνόλων
https://www.csd.uoc.gr/~hy471/lectures/13_morphology.pdf
9. Διαφάνειες στην Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας, Κοζύρη Μαρία, 2019
https://eclass.uth.gr/modules/document/file.php/CS_U_192/Lectures/Lec7_2019.pdf
10. Διαφάνειες στην Τεχνητή Όραση, Φίλτρα και Δυαδικές εικόνες, Δρ. Θάνος Δεμψης
https://eclass.hmu.gr/modules/document/file.php/TP249/AV03_BinaryImagesAndFilters.pdf
11. Ανάπτυξη και υλοποίηση νέων τεχνικών επεξεργασίας έγχρωμων εικόνων , Βαρδαβούλια, Μαρία , Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, 2002
<https://thesis.ekt.gr/thesisBookReader/id/17527#page/1/mode/2up>

12. Research Review For Digital Image Segmentation Techniques, Ashraf A. Aly, Safaai Bin Deris, Nazar Zaki, International Journal of Computer Science & Information Technology (IJCSIT) Vol 3, No 5, Oct 2011
13. image processing, University of Tartu,
<https://sisu.ut.ee/imageprocessing/book/1>
14. Chapter 23 - Image Formation & Display / Digital Image Structure , The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing, Steven W. Smith, Ph.D., <https://www.dspguide.com/ch23/1.htm>