



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Παραμετρικές μέθοδοι μείωσης τάξης μοντέλων μεγάλης  
κλίμακας**

Διπλωματική Εργασία

**Δημήτριος Χατζηγεωργίου**

**Επιβλέπων:** Ευμορφόπουλος Νέστωρ

Βόλος 2022





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

**Παραμετρικές μέθοδοι μείωσης τάξης μοντέλων μεγάλης  
κλίμακας**

**Διπλωματική Εργασία**

**Δημήτριος Χατζηγεωργίου**

**Επιβλέπων:** Ευμορφόπουλος Νέστωρ

Βόλος 2022





UNIVERSITY OF THESSALY  
SCHOOL OF ENGINEERING  
DEPARTMENT OF ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING

**Parametric methods for order reduction of large-scale  
models**

Diploma Thesis

**Dimitrios Chatzigeorgiou**

**Supervisor:** Nestor Evmorfopoulos

Volos 2022



Εγκρίνεται από την Επιτροπή Εξέτασης:

Επιβλέπων **Ευμορφόπουλος Νέστωρ**

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και  
Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μέλος **Σταμούλης Γεώργιος**

Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπο-  
λογιστών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Μέλος **Ποταμιάνος Γεράσιμος**

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και  
Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας





# Ευχαριστίες

Με την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, αναπληρωτή καθηγητή κ.Νέστορα Ευμορφόπουλο, για την συνεχή καθοδήγηση του και την εμπιστοσύνη που έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας στο πρόσωπό μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής, και συγκεκριμένα τον καθηγητή κ.Γιώργο Σταμούλη και τον αναπληρωτή καθηγητή κ.Γεράσιμο Ποταμιάνο, για τις υποδείξεις και την υποστήριξη τους στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Θα ήταν παράληψη αν δεν ευχαριστούσα τους συμφοιτητές και καθηγητές με τους οποίους συναναστράφηκα αυτά τα χρόνια, αλλά ιδιαίτερα τον διδακτορικό φοιτητή κ.Παύλο Στόικο και τον διδάσκοντα κ.Γεώργιο Φλώρο για την βοήθεια τους σε όλη τη διάρκεια της παρούσας εργασίας. Εξαιρετικά σημαντική ήταν η συμβολή του διδακτορικού φοιτητή κ. Χρυσόστομου Χατζηγεωργίου, ο οποίος με καθοδήγησε σε όλα τα στάδια της παρούσας εργασίας και η συνεισφορά του έδρασε καταλυτικά στην έκβαση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ θα ήθελα να το πω στην οικογένεια μου, τα αδέρφια μου Χρυσόστομο, Γιάννη, Ευθυμία, Δέσποινα, στους γονείς μου Αναστάσιο και Μαρία, καθώς και τη σύντροφο μου Μαριάννα, που ο καθένας πίστευε σε μένα όλα αυτά τα χρόνια δείχνοντας υπομονή και τη συμπαράστασή του με κάθε τρόπο.

Δημήτριος Χατζηγεωργίου

Βόλος 2022



## **ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΠΕΡΙ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΗΣ ΔΕΟΝΤΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ**

«Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ρητά ότι η παρούσα διπλωματική εργασία, καθώς και τα ηλεκτρονικά αρχεία και πηγαίοι κώδικες που αναπτύχθηκαν ή τροποποιήθηκαν στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο, αρχεία ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή. Δηλώνω επίσης ότι τα αποτελέσματα της εργασίας δεν έχουν χρησιμοποιηθεί για την απόκτηση άλλου πτυχίου. Αναλαμβάνω πλήρως, ατομικά και προσωπικά, όλες τις νομικές και διοικητικές συνέπειες που δύναται να προκύψουν στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής».

Ο/Η Δηλών/ούσα

Δημήτριος Χατζηγεωργίου



# Περίληψη

Στα πλαίσια της αυξημένης χρήσης ηλεκτρικών συσκευών στην καθημερινότητα μας, αλλά και της ραγδαίας εξέλιξης της τεχνολογίας και της επιστήμης, με το μέγεθος των ηλεκτρικών κυκλωμάτων να έχει εκτοξευθεί σε κλίμακα εκατομμυρίων στοιχείων, εύκολα εξάγεται το συμπέρασμα ότι η σχεδίαση ενσωματωμένων κυκλωμάτων έχει μετατραπεί σε δυσκολότερη και πιο πολύπλοκη διαδικασία. Ο υπολογισμός της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων αυτών είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος, και απαραίτητη είναι η χρήση κάποιου λογισμικού προσομοίωσης του κυκλώματος, καθώς η συμβατική μελέτη και σχεδίαση είναι πλέον ιδιαίτερα δύσκολη και σε κάποιες περιπτώσεις αδύνατη. Οι τεχνικές υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR) επιταχύνουν την προσομοίωση των κυκλωμάτων, η οποία είναι απαραίτητη διαδικασία πριν την σχεδίασή των κυκλωμάτων, και αποσκοπούν στη μείωση της πολυπλοκότητας των γραμμικών κυκλωμάτων. Έτσι, με την παραγωγή μικρότερων μοντέλων, έχουμε απλοποίηση και μείωση των απαιτούμενων υπολογισμών των μαθηματικών μοντέλων, που προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ιδιότητες των αρχικών μοντέλων, καθώς και οικονομία στην προσομοίωση αυτών των μοντέλων σε σχέση με τα αρχικά μοντέλα που καταναλώνουν πόρους του συστήματος (μνήμη, χρόνο της CPU). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας αναλύονται τεχνικές υποβιβασμού τάξης μοντέλου βασισμένες στη μέθοδο αντιστοίχισης ροπών (M.M.M.), οι οποίες είναι κατάλληλες για δίκτυα με πολλές εισόδους (ports), καθώς και με πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων και κόμβων. Ταυτόχρονα, η μέθοδος αυτή, είναι απλή στην υλοποίηση της και τα αποτελέσματα που εξάγονται είναι πολύ ικανοποιητικά. Τέλος, με βάση τη μελέτη που έγινε πάνω στη παραμετρική μέθοδο υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR) με βάση τη μέθοδο moment matching, παρατηρήθηκε πως με δοθείσες παραμέτρους και με κατάλληλη επιλογή των moments στην Arnoldi, επιτυγχάνεται μείωση τάξης μοντέλου, με το σύστημα που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία, να έχει όμοια συμπεριφορά με αυτή του αρχικού κυκλώματος, ανεξάρτητα με τον μεγάλο αριθμό των εισόδους (ports).

## Λέξεις Κλειδιά

Νόμοι του Kirchhoff, Τροποποιημένη Ανάλυση Κόμβων, Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR), Reduced basis και POD μέθοδοι, Eigenvalue based MOR μέθοδοι, Gramian based MOR μέθοδοι, Moment matching μέθοδοι, υπόχωρος Krylov, επαναληπτική μέθοδος Arnoldi, Παραμετρικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR), μέθοδος balanced truncation, αλγόριθμος SVD

# Abstract

In the context of the increasing use of electrical appliances in our daily lives, but also the rapid development of technology and science, with the size of electrical circuits having skyrocketed to millions of elements, it is easy to conclude that embedded circuit design has become more difficult and more complex process. Calculating the behavior of these circuits is very complex, and it is necessary to use some circuit simulation software, as the conventional study and design is now very difficult and in some cases impossible. Model Order Reduction (MOR) techniques accelerate simulation of circuits, which is a necessary process before designing circuits, and aim to reduce the complexity of linear circuits. So, by producing smaller models, we have simplified and reduced the required calculations of mathematical models, which are very close to the properties of the original models, as well as economy in simulating these models compared to the original models that consume system resources (memory, CPU time). In the present dissertation, Model Order Reduction (MOR) techniques based on the moment matching method are analyzed, which are suitable for networks with many inputs (ports), as well as with a very large number of components and nodes. At the same time, this method is simple to implement and the results obtained are very satisfactory. Finally, based on the study performed on the parametric method of model order reduction (PMOR) based on the moment matching method, it was observed that with given parameters and appropriate selection of moments in Arnoldi, a reduction of model order is achieved, with the system resulting from this process, to behave similarly to that of the original circuits, independently of the large number of ports.

## **Keywords**

Kirchhoff's Laws, Modified Node Analysis (MNA), Model Order Reduction Methods (MOR), Reduced basis and POD methods, Eigenvalue based MOR methods, Gramian based MOR methods, Moment matching methods, Krylov subspace, Arnoldi repetitive method, balanced truncation method, SVD algorithm



# Πίνακας περιεχομένων

<b>Ευχαριστίες</b>	<b>ix</b>
<b>Περίληψη</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>Πίνακας περιεχομένων</b>	<b>xvii</b>
<b>Κατάλογος σχημάτων</b>	<b>xix</b>
<b>Κατάλογος πινάκων</b>	<b>xxi</b>
<b>Συνοτομογραφίες</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Περιγραφή του προβλήματος . . . . .	1
1.2 Σκοπός της εργασίας . . . . .	2
1.3 Διάρθρωση της διπλωματικής Εργασίας . . . . .	3
<b>2 Μαθηματικό Υπόβαθρο</b>	<b>5</b>
2.1 Βασικές έννοιες ηλεκτρικών κυκλωμάτων . . . . .	5
2.1.1 Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία . . . . .	5
2.1.2 Μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος . . . . .	7
2.1.3 Νόμοι του Kirchhoff . . . . .	8
2.2 Γραμμικά συστήματα . . . . .	9
2.2.1 Συνάρτησης μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις . . . . .	10
2.2.2 Πόλοι και Μηδενικά . . . . .	11
2.3 Ορθοκανονικές βάσεις . . . . .	12

<b>3</b>	<b>Το πρόβλημα της Προσομοίωσης Κυκλωμάτων</b>	<b>15</b>
3.1	Τροποποιημένη Ανάλυση Κόμβων (Modified Nodal Analysis, MNA) . . . .	16
3.1.1	Εξισώσεις τοπολογίας κυκλωμάτων . . . . .	16
3.2	Εξισώσεις τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων MNA και δυναμικές εξισώσεις	22
<b>4</b>	<b>Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR)</b>	<b>27</b>
4.1	Το πρόβλημα μείωσης του μοντέλου . . . . .	27
4.2	Μέθοδος Moment Matching . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Παραμετρικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR)</b>	<b>37</b>
5.1	Παραμετρική μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR) με βάση τη μέθοδο moment-matching . . . . .	38
5.2	Κατασκευή του παραμετροποιημένου μειωμένου μοντέλου . . . . .	40
5.2.1	Δειγματοληψία παραμέτρων . . . . .	40
5.2.2	Συνένωση της Βάσης . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Πειραματική διαδικασία</b>	<b>43</b>
6.1	Περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας . . . . .	43
6.2	Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης . . . . .	45
6.3	Παρατηρήσεις . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Επίλογος και Συμπεράσματα</b>	<b>49</b>
7.1	Μελοντική προέκταση . . . . .	50
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>51</b>

# Κατάλογος σχημάτων

1.1	Εφαρμογές των μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR)	1
2.1	Γραμμικό κυκλωματικό στοιχείο αντίστασης	6
2.2	Γραμμικό κυκλωματικό στοιχείο πυκνωτή	7
2.3	Γραμμικό κυκλωματικό στοιχείο πηνίου	7
2.4	Σχηματική περιγραφή συστήματος με είσοδο και έξοδο	9
2.5	Συνάρτηση μεταφοράς	10
2.6	Αναπαράσταση Μετασχηματισμού Laplace στο μιγαδικό επίπεδο	12
3.1	Εξισώσεις τοπολογίας	17
3.2	Αρχικό κύκλωμα της δημιουργίας του ελλειπτούμενου πίνακα πρόσπτωσης	17
3.3	Πρώτο στάδιο της δημιουργίας του ελλειπτούμενου πίνακα πρόσπτωσης	18
3.4	Δεύτερο στάδιο της δημιουργίας του ελλειπτούμενου πίνακα πρόσπτωσης	18
3.5	Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MNA εξισώσεων	25
4.1	Αρχική κατάσταση πριν τη διαδικασία του Model Order Reduction ενός LTI συστήματος	28
4.2	Τελική κατάσταση μετά τη διαδικασία του Model Order Reduction ενός LTI συστήματος	29
4.3	Υλοποίηση του αλγορίθμου Arndoli	34
6.1	Αγωγός ηλεκτρικής ενέργειας	44
6.2	Σύγκριση της συνάρτησης μεταφοράς των αρχικών κυκλωμάτων σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς στα υποβιβασμένης τάξης μοντέλα (Reduced Order Models (ROMs) με χρήση της μεθόδου moment matching στο εύρος συχνοτήτων $[10^{-3}, 10^{20}]$ και αριθμό Moments 10, για το αρχείο εισόδου <code>ibmpg1</code> και για θύρες (1,1)	46

- 6.3 Σύγκριση της συνάρτησης μεταφοράς των αρχικών κυκλωμάτων σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς στα υποβιβασμένης τάξης μοντέλα (Reduced Order Models (ROMs) με χρήση της μεθόδου moment matching στο εύρος συχνοτήτων  $[10^{-3}, 10^{20}]$  και αριθμό Moments 10, για το αρχείο εισόδου `ibmpg1` και για θύρες (2,2) . . . . . 47
- 6.4 Σύγκριση της συνάρτησης μεταφοράς των αρχικών κυκλωμάτων σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς στα υποβιβασμένης τάξης μοντέλα (Reduced Order Models (ROMs) με χρήση της μεθόδου moment matching στο εύρος συχνοτήτων  $[10^{-3}, 10^{20}]$  και αριθμό Moments 10, για το αρχείο εισόδου `ibmpg1` και για θύρες (3,3) . . . . . 48

# Κατάλογος πινάκων

3.1	Διαστάσεις απο τους υπό-πίνακες των βημάτων της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων . . . . .	20
4.1	Διαφορές Gramian based MOR και Moment Matching . . . . .	31
6.1	Χαρακτηριστικά των Ενδεικτικών αποτελεσμάτα προσομοίωσης . . . . .	45
6.2	Χαρακτηριστικά του συστήματος . . . . .	48



# Συντομογραφίες

KCL	Kirchoff's Current Law
KVL	Kirchoff's Voltage Law
LTI	Linear Time Invariant
MIMO	Multiple-input Multiple-output
M.M.M.	Moment Matching Method
MNA	Modified Nodal Analysis
MOR	Model Order Reduction
PRIMA	Passive Reduced-Order Interconnect Macromodelling Algorithm
PMOR	Parametric Model Order Reduction
ROM	Reduced Order Model





# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Στις μέρες μας αυξημένη είναι η χρήση ηλεκτρικών συσκευών σε όλες τις ανάγκες της καθημερινής μας ζωής. Το κινητό τηλέφωνο και ο υπολογιστής είναι συσκευές που βρίσκονται πλέον σε κάθε σπίτι. Ωστόσο, η χρήση δεν περιορίζεται μόνο σε αυτά, καθώς ο προσανατολισμός της κοινωνίας είναι προς τη δημιουργία ενός έξυπνου σπιτιού. Όλες οι συσκευές πλέον αποτελούνται από ηλεκτρικά κυκλώματα που αγγίζουν την κλίμακα των εκατομμυρίων στοιχείων.



Σχήμα 1.1: Εφαρμογές των μεθόδων υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR)

Η αυξημένη αυτή χρήση, έχει ως αποτέλεσμα ο υπολογισμός της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων αυτών να είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος. τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή αυτών των κυκλωμάτων αυξάνονται συνεχώς, λόγω των πολύ μεγάλων διαστάσεων που έχουν τα μοντέλα αυτά, με την επίλυση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν από τέτοιας κλίμακας κυκλώματα να είναι ιδιαίτερα δύσκολη και σε κάποιες περιπτώσεις αδύνατη. Απαραίτητη είναι λοιπόν, η χρήση κάποιου λογισμικού προσομοίωσης κυκλώματος. Η χρήση τεχνικών μείωσης τάξης μεγέθους μοντέλων ( Model Order Reduction (MOR) ), καθίσταται πλέον μία από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές που αποσκοπούν στη μείωση της πολυπλοκότητας των γραμμικών κυκλωμάτων. Με την παραγωγή μικρότερων μοντέλων, που θα προσεγγίζουν όμως σε μεγάλο βαθμό τις ιδιότητες των αρχικών μοντέλων, επιτυγχάνεται η μείωση των απαιτούμενων υπολογισμών και η απλοποίηση των μαθηματικών μοντέλων, ενώ παράλληλα είναι πιο εύκολο και οικονομικό να προσομοιώσουν αυτά τα μοντέλα σε σχέση με τα αρχικά.

Ωστόσο, οι τυπικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR) δεν είναι συνήθως ισχυρές όταν υπάρχει ένα παραμετρικό μοντέλο που πρέπει να μειωθεί. Έτσι προκύπτει η αναγκαιότητα τεχνικών, που λαμβάνουν υπόψη την μεταβλητότητα τέτοιων παραμέτρων. Μια από τις πλέον σύγχρονες και ιδιαίτερα δημοφιλείς σε πρακτικές εφαρμογές μεθόδους, είναι οι παραμετρικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR). Αυτό συμβαίνει, γιατί είναι εύκολο να εφαρμοστούν και χρειάζονται λιγότερους υπολογισμούς σε σχέση με άλλες αντίστοιχες μεθόδους για τον υποβιβασμό τάξης μοντέλου παραμετρικού κυκλώματος. Επομένως, είναι κατάλληλες για τη μείωση των υψηλών διαστάσεων συστημάτων που προκύπτουν συνήθως στο σχεδιασμό και την ανάλυση κυκλωμάτων VLSI.

## 1.2 Σκοπός της εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση παραμετρικών μεθόδων υποβιβασμού τάξης μεγέθους PMOR σε μεγάλης κλίμακας ηλεκτρικά κυκλώματα. Δίνεται έμφαση σε τεχνικές που χρησιμοποιούν τη μέθοδο αντιστοίχισης ροπών (moment matching) και αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά τα δίκτυα που αποτελούνται από μεγάλο αριθμό ports. Με τις παραμετρικές τεχνικές μείωσης τάξης μοντέλου PMOR, επιτυγχάνεται η επιτάχυνση της προσομοίωσης των κυκλωμάτων που έχουν παραμέτρους, ενώ ταυτόχρονα διατη-

ρούνται τα χαρακτηριστικά του αρχικού μοντέλου. Με την παραγωγή μικρότερων μοντέλων, που θα προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ιδιότητες των αρχικών μοντέλων, επιτυγχάνεται μείωση των απαιτούμενων υπολογισμών και απλοποίηση των μαθηματικών μοντέλων, καθώς είναι πιο εύκολο και οικονομικό να προσομοιώσουν αυτά τα μοντέλα σε σχέση με τα αρχικά που καταναλώνουν αρκετή μνήμη και χρόνο της CPU.

Με τη χρήση της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων MNA μετατρέπουμε τα δίκτυα τροφοδοσίας των ολοκληρωμένων συστημάτων σε γραμμικά συστήματα, στα οποία  $\square$ α εφαρμόσουμε κατάλληλα και τις διάφορες παραμέτρους και στη συνέχεια θα γίνει χρήση του αλγόριθμου Arnoldi για να πετύχουμε τον υποβιβασμό της τάξης μεγέθους PMOR. Τελικά, θα έχουμε επιτύχει την επίλυση των συστημάτων, με την υλοποίηση της να είναι απλή και τα αποτελέσματα που εξάγονται από αυτή να είναι πολύ ικανοποιητικά.

### 1.3 Διάρθρωση της διπλωματικής Εργασίας

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο, που είναι απαραίτητο για την κατανόηση των εργαλείων που εφαρμόζονται στα επόμενα κεφάλαια. Γίνεται λόγος για γραμμικά κυκλώματα στοιχεία, διάφορες έννοιες που μας βοηθούν στην αποτύπωση και μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, τον τρόπο παραγωγής μία συνάρτηση μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις καθώς και τι είναι ορθοκανονικές βάσεις.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται μία εισαγωγή στο πρόβλημά της προσομοίωσης κυκλωμάτων, δίνοντας αναλυτικά τον τρόπο υπολογισμού των εξισώσεων MNA ενός ηλεκτρικού κυκλώματος.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται αναφορά γενικά στις μεθόδους υποβιβασμού τάξης μοντέλου MOR, καθώς και λεπτομερή αναφορά στη μέθοδο αντιστοίχισης ροπών moment matching.

Στο Κεφάλαιο 5 περιγράφονται οι παραμετρικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου PMOR, και ειδικότερα στην παραμετρική μέθοδο υποβιβασμού τάξης μοντέλου PMOR με βάση τη μέθοδο αντιστοίχισης ροπών moment matching.

Στο Κεφάλαιο 6 περιγράφεται η πειραματική διαδικασία και δίνονται ενδεικτικά αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Τέλος, στο κεφάλαιο 7 συνοψίζεται στον επίλογο και τα συμπεράσματα.



# Κεφάλαιο 2

## Μαθηματικό Υπόβαθρο

### 2.1 Βασικές έννοιες ηλεκτρικών κυκλωμάτων

#### 2.1.1 Γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία

Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια του ηλεκτρικού κυκλώματος, που είναι μια κλειστή διαδρομή, αγωγή από το ηλεκτρικό ρεύμα. Σε αυτό το κύκλωμα τα στοιχεία τα οποία συμμετέχουν ονομάζονται ηλεκτρικά στοιχεία.[1] Αυτά τα ηλεκτρικά στοιχεία ονομάζονται με τη σειρά τους, ηλεκτρικά στοιχεία δύο ακροδεκτών ή κυκλωματικά στοιχεία και χαρακτηρίζονται από:

- Ρεύμα κλάδου, όπου είναι το ρεύμα που το διαρρέει
- Τάση κλάδου, όπου είναι η τάση που αναπτύσσεται στα άκρα του

Συναρτήσεις του χρόνου αποτελεί τόσο το ρεύμα, όσο και η τάση κλάδου και η σχέση που ενώνει το ρεύμα και την τάση κλάδου εξαρτάται από τη φύση του ηλεκτρικού στοιχείου. Η σχέση αυτή ονομάζεται, σχέση  $v - i$  ή χαρακτηριστική  $v - i$  του στοιχείου δύο ακροδεκτών. Αυτά τα ηλεκτρικά στοιχεία που συναντάμε στα ηλεκτρικά κυκλώματα μπορούμε να τα κατατάξουμε σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Ενεργά ηλεκτρικά στοιχεία: είναι τα στοιχεία του κυκλώματος που παρέχουν ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα και πολλές φορές αναφέρονται και ως πηγές ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτές οι πηγές χωρίζονται με τη σειρά τους, σε:

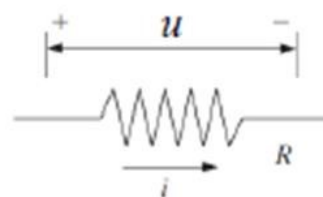
1. Πηγές συνεχούς τάσης

2. Πηγές εναλλασσόμενης τάσης
  3. Πηγές συνεχούς ρεύματος
  4. Πηγές εναλλασσόμενου ρεύματος
  5. Εξαρτώμενες πηγές
- Παθητικά ηλεκτρικά στοιχεία: είναι τα στοιχεία εκείνα τα οποία καταναλώνουν ή αποθηκεύουν ενέργεια, αλλά δεν παράγουν ενέργεια. Η ενέργεια που καταναλώνεται αποθηκεύεται σε ηλεκτρική ενέργεια ή σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου ή ακόμα μπορεί να μετατραπεί σε άλλη μορφή ενέργειας, όπως είναι η θερμική ενέργεια (φαινόμενο joule) χωρίς βέβαια να ενισχύεται η ισχύς της εξόδου των στοιχείων αυτών. Οι εξισώσεις των παθητικών ηλεκτρικών στοιχείων μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή:

$$i_k(t) = g_k u(t) + C_k \frac{du_k(t)}{dt} + S_k(t) \quad (2.1)$$

Τα κυριότερα γραμμικά κυκλωματικά στοιχεία είναι τα ακόλουθα με τα κύρια τρία να είναι:

Αντιστάτης ή στοιχείο αντίστασης Ο αντιστάτης ή πιο συνηθισμένα αντίσταση είναι το ηλεκτρικό στοιχείο, το οποίο κατά τη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος, έχει την τάση να μετατρέπει την ηλεκτρική ενέργεια σε θερμότητα.

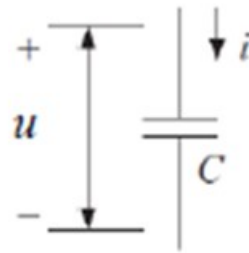


$$u(t) = ri(t)$$

$$i(t) = gu(t) \quad (g = 1/r)$$

Σχήμα 2.1: Γραμμικό κυκλωματικό στοιχείο αντίστασης

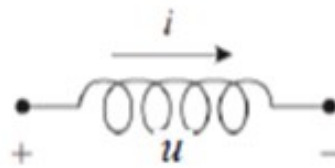
Πυκνωτής ή στοιχείο χωρητικότητας Ο πυκνωτής ή αλλιώς στοιχείο χωρητικότητας, είναι ένα στοιχείο του κυκλώματος, το οποίο συντελεί στην αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας με τη βοήθεια του ηλεκτρικού φορτίου το οποίο συσσωρεύεται στις αγωγίμες επιφάνειες του.



$$i(t) = c \frac{du(t)}{dt}$$

Σχήμα 2.2: Γραμμικό κυκλωματικό στοιχείο πυκνωτή

Πηνίο ή στοιχείο επαγωγής Ο επαγωγέας ή στοιχείο αυτεπαγωγής είναι το χαρακτηριστικό στοιχείο του κυκλώματος, το οποίο επιτρέπει την αποθήκευση μαγνητικής ενέργειας με τη βοήθεια μαγνητικής ροής, που εμπλέκει το αγωγίμο τύλιγμα του πηνίου.



$$u(t) = l \frac{di(t)}{dt}$$

Σχήμα 2.3: Γραμμικό κυκλωματικό στοιχείο πηνίου

## 2.1.2 Μελέτη ενός ηλεκτρικού κυκλώματος

Για την κατανόηση των εννοιών που περιγράφονται στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα ορίσουμε κάποια βασικά προσδιοριστικά χαρακτηριστικά που συναντάμε σε κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα και μας βοηθούν στην μελέτη τους. Αυτά είναι:

**Κλάδος (branch):** Κάθε στοιχείο δύο ακροδεκτών ονομάζεται κλάδος (branch) του κυκλώματος, με κάθε κλάδο να διαρρέεται από ένα ηλεκτρικό ρεύμα.

**Κόμβος (node):** Το σημείο τομής δύο ή περισσοτέρων κλάδων ονομάζεται κόμβος (node). Κάθε κόμβος βρίσκεται σε κάποιο δυναμικό, με τα δυναμικά των κόμβων να μετρούνται ως προς

τον ίδιο κόμβο, που λέγεται κόμβος αναφοράς ή κοινός κόμβος. Ο κόμβος αναφοράς σημειώνεται με το σύμβολο της γείωσης. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι το δυναμικό του κόμβου είναι στην ουσία η διαφορά δυναμικού του κόμβου από το δυναμικό του κόμβου αναφοράς. Έτσι, δεν έχουμε να κάνουμε με το απόλυτο δυναμικό του κόμβου, αλλά με την τάση του κόμβου. Σημειώνουμε ότι η επιλογή του κόμβου αναφοράς είναι αυθαίρετη. Η διαφορά δυναμικού ανά μέσα στους δύο κόμβους των κλάδων λέγεται τάση κλάδου. Τα ρεύματα κλάδων και οι τάσεις κλάδων είναι οι βασικές μεταβλητές των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

**Βρόχος (mesh):** Οι κλειστές τροχιές που σχηματίζουν οι κλάδοι ενός κυκλώματος ονομάζονται βρόχοι (θηλιές). Ένας βρόχος που δεν έχει στο εσωτερικό του άλλους κλάδους λέγεται απλός βρόχος (mesh). Ο βρόχος που περιέχει και άλλους κλάδους στο εσωτερικό του λέγεται σύνθετος βρόχος (loop).

### 2.1.3 Νόμοι του Kirchhoff

Με βάση τα στοιχεία που προαναφέραμε, καθορίζονται οι σχέσεις τάσης – ρεύματος μεταξύ τους. Η ανάλυση και η σχεδίαση των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων κάνουν συνεχή χρήση ενός πλήθους σημαντικών τεχνικών από τη βασική θεωρία δικτυωμάτων. Με τα κυκλώματα να αναλύονται τις περισσότερες φορές με χρήση ενός συνδυασμού:

1. **του Νόμου Τάσης του Kirchhoff, (Kirchhoff Voltage Law, KVL):** Ο οποίος αναφέρει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων (ΗΕΔ) σε κάθε κλειστό βρόγχο ενός κυκλώματος, είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης (διάφορα δυναμικού) στους επιμέρους κλάδους που απαρτίζουν τον βρόχο, δηλαδή πως η τάση κατά μήκος κάθε κλάδου είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού των άκρων του κόμβου.
2. **του Νόμου Ρεύματος του Kirchhoff, (Kirchhoff Current Law, KCL):** Ο οποίος αναφέρει ότι το άθροισμα όλων των εντάσεων που εισέρχονται σε ένα κόμβο, ισούται με το άθροισμα των εντάσεων που εξέρχονται από τον κόμβο, δηλαδή πως το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που προσπίπτουν είναι 0.

Εαν θεωρήσουμε τι ακόλουθες σχέσεις:

$$\underline{u}(t) = \left[ u_1(t) \quad , \dots , \quad u_m(t) \right]^T \quad (2.2)$$



$$\underline{V}(t) = [V_1(t) \ , \dots, \ V_m(t)]^T \quad (2.3)$$

$$\underline{i}(t) = [i_1(t) \ , \dots, \ i_m(t)]^T \quad (2.4)$$

Τότε από το νόμο τάσεων του Kirchhoff (Kirchhoff Voltage Law ή KVL) έχουμε:

$$\sum_{k=1}^m u_k(t) = 0 \Leftrightarrow \underline{u}(t) = A^T \underline{V}(t)$$

Τότε από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff (Kirchhoff Current Law ή KCL) έχουμε:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \Leftrightarrow A \underline{i}(t) = 0$$

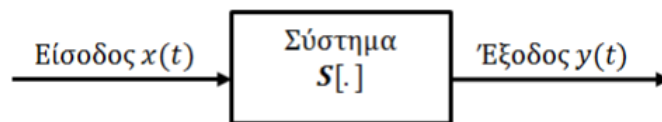
## 2.2 Γραμμικά συστήματα

Σύστημα ονομάζεται κάθε οντότητα που επενεργεί σε κάποιο σήμα  $x(t)$  και ως αποτέλεσμα παράγει ένα (νέο) σήμα  $y(t)$ . Στο μαθηματικό κομμάτι, ένα σύστημα θεωρείται ως ένας μετασχηματισμός  $S[\cdot]$  που μετασχηματίζει ένα σήμα  $x(t)$  ένα άλλο σήμα  $y(t)$  σύμφωνα με τη σχέση :

$$y(t) = S[x(t)]$$

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται σχέση εισόδου – εξόδου και περιγράφει ένα σύστημα στο πεδίο του χρόνου (time domain) με βάση την είσοδο και την έξοδό του, αγνοώντας πλήρως την εσωτερική δομή και περιγραφή του συστήματος.

Στο σχήμα 2.4, απεικονίζεται η έξοδος του  $y(t)$  στη γενική της μορφή.



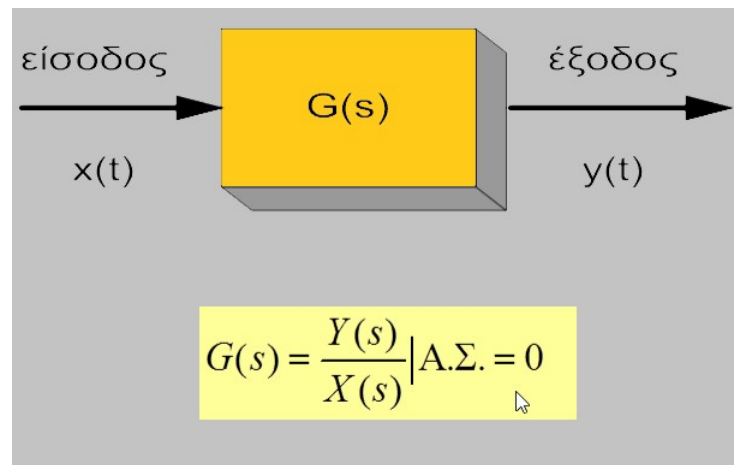
Σχήμα 2.4: Σχηματική περιγραφή συστήματος με είσοδο και έξοδο

Ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας χαρακτηρίζεται γραμμικό, αν και μόνο αν για δύο οποιαδήποτε δοθέντα σήματα  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  ισχύει:

$$F[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] = \alpha_1 F[x_1(t)] + \alpha_2 F[x_2(t)]$$

### 2.2.1 Συνάρτησης μεταφοράς από δυναμικές εξισώσεις

Συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)  $H(s)$  ορίζεται το πηλίκο του μετασχηματισμού Laplace της εξόδου ενός γραμμικού αμετάβλητου συστήματος προς το μετασχηματισμό Laplace της εισόδου του στο πεδίο της συχνότητας, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και αντιστοιχεί σε μία σχέση με την οποία περιγράφεται η δυναμική του συστήματος υπό εξέταση.



Σχήμα 2.5: Συνάρτηση μεταφοράς

Έχοντας αρχικά τις παρακάτω εξισώσεις, όπου η είσοδος συμβολίζεται με  $x(t)$  και η έξοδος συμβολίζεται με  $u(t)$ :

$$E \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.5)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.6)$$

Και παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μια από αυτές τις σχέσεις προκύπτει:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \quad (2.7)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.8)$$

Υποθέτοντας ότι έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, όταν δηλαδή έχει νόημα η συνάρτηση μεταφοράς, δηλαδή  $X(0) = 0$ , το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$(sI - A)X(s) = B \quad (2.9)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (2.10)$$

Για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος λύνοντας την πρώτη εξίσωση 2.9 ως προς  $X(s)$ , έχουμε:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s) \Rightarrow$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

και κάνοντας αντικατάσταση στη εξίσωση 2.10 ως προς  $X(s)$ , έχουμε:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \Rightarrow$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s)$$

και τελικά προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.11)$$

Συστήματα με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο από αυτόν του παρανομαστή, δε μπορούν να περιγραφούν από δυναμικές εξισώσεις στο χώρο κατάστασης, επομένως δεν έχουν λύση.

## 2.2.2 Πόλοι και Μηδενικά

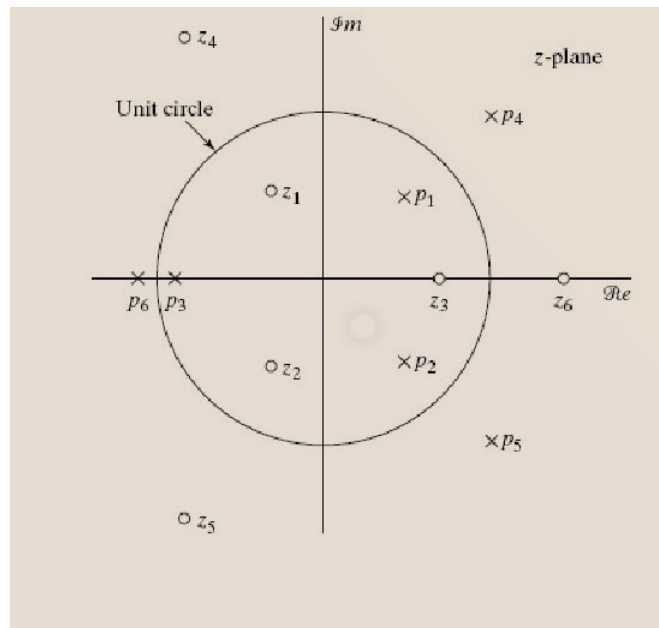
Ο μετασχηματισμός laplace σε συστήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις ορίζεται ως η ρητή συνάρτηση του  $s$ , δηλαδή είναι ο λόγος των πολυωνύμων του  $s$ :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Θα ορίσουμε δυο έννοιες, οι οποίες θα μας βοηθήσουν στην αναπαράσταση των μετασχηματισμών laplace στο μιγαδικό επίπεδο.

- **Πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς:** ορίζονται οι τιμές εκείνες, για τις οποίες μηδενίζεται το πολυώνυμο του παρανομαστή της συνάρτησης, δηλαδή  $D(s) = 0$ .
- **Μηδενικά μιας συνάρτησης μεταφοράς:** ορίζονται οι τιμές εκείνες για τις οποίες το πολυώνυμο του αριθμητή έχει μηδενική τιμή, δηλαδή  $N(s) = 0$ .

Η αναπαράσταση του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να γίνει στο μιγαδικό επίπεδο, με τη χρήση των μηδενικών και των πόλων.



Σχήμα 2.6: Αναπαράσταση Μετασχηματισμού Laplace στο μιγαδικό επίπεδο

Ο  $yy'$  άξονας απεικονίζει το φανταστικό κομμάτι (Im) και ο  $xx'$  άξονας απεικονίζεται το πραγματικό κομμάτι (Re). Επίσης με  $\times$  συμβολίζονται οι πόλοι και με  $\circ$  τα μηδενικά.

### 2.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Αρχικά, βάση του διανυσματικού χώρου, ονομάζουμε ένα σύνολο διανυσμάτων, το οποίο είναι γραμμικώς ανεξάρτητο αλλά ταυτόχρονα παράγει και τον χώρο.[2] Εάν σε μία βάση  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  ενός υποχώρου  $V$  του  $R^n$ , κάθε διάνυσμά της είναι κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα της βάσης αλλά και ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, εάν δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με μηδέν, τότε αυτή η βάση καλείται ορθογώνια βάση.

$$e_i e_j = 0, i \neq j$$

Εάν τα διανύσματα  $e_1, e_2, \dots, e_k$  είναι επιπλέον μοναδιαία, τότε η βάση ονομάζεται ορθοκανονική ενός διανυσματικού χώρου, της οποίας κάθε διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.

$$\|e_i\| = 1$$

Επομένως, ξεκινώντας από οποιαδήποτε βάση μπορεί να κατασκευαστεί μια ορθογώνια βάση και έπειτα με μια διαδικασία ορθοκανονικοποίησης να γίνει Ορθοκανονική.

Η διαδικασία με την οποία θα κάνουμε τη βάση ορθογώνια ονομάζεται διαδικασία ορθογωνοποίησης *Gramm – Schmidt*.

Έστω ο υποχώρος  $V \in \mathbb{R}^n$  και η βάση του  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , θεωρούμε τα διανύσματα:

$$e_1 = u_1$$

$$e_j = u_j - \sum_{i=1}^{j-1} pr_{e_i} u_j, j = 2, 3, \dots, k$$

Στη συνέχεια εφόσον έχει προκύψει ότι το σύνολο  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  αποτελεί ορθογώνια βάση του  $V$ , το σύνολο  $s^* = \left\{ \frac{e_1}{|e_1|}, \frac{e_2}{|e_2|}, \dots, \frac{e_k}{|e_k|} \right\}$  θα αποτελεί τελικά την ορθοκανονική βάση



## Κεφάλαιο 3

# Το πρόβλημα της Προσομοίωσης Κυκλωμάτων

Για την διαδικασία της προσομοίωσης ενός κυκλώματος, χρειάζεται αρχικά να βρεθεί ένας ικανοποιητικός τρόπος περιγραφής του. Είναι σημαντική η επιλογή του της μεθόδου με την οποία θα περιγράφονται οι εξισώσεις ενός κυκλώματος, με την επιλογή αυτή να είναι σημαντική τόσο για την ανάλυση κυκλωμάτων μέσω υπολογιστή, όσο ακόμα και για τον σχεδιασμό προγραμμάτων για ενσωματωμένα συστήματα. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι, με σημαντικότερη αυτή της τροποποιημένης Ανάλυσης Κόμβων (Modified Nodal Analysis, MNA). [1] Οι MNA εξισώσεις έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. Χρησιμοποιούν εργαλεία όπως, τον Νόμο Τάσεων του Kirchhoff, (Kirchhoff Voltage Law, KVL) και το Νόμο Ρευμάτων του Kirchhoff, (Kirchhoff Current Law, KCL).
2. Υπάρχει το πλεονέκτημα ότι μπορούν να συμπεριλάβουν και στοιχεία εξαρτώμενα από το ρεύμα, κάτι που στην αρχική προσέγγιση (nodal analysis) δεν προσφέρεται.
3. Παράλληλα η αποτελεσματικότητα που εμφανίζουν στον χρόνο εκκίνησης, την ταχύτητα εκτέλεσης και τις απαιτήσεις χωρητικότητας ενός προγράμματος είναι κάτι που τις κάνουν να ξεχωρίζουν.

### 3.1 Τροποποιημένη Ανάλυση Κόμβων (Modified Nodal Analysis, MNA)

Όλα τα ηλεκτρικά κυκλώματα αποτελούνται από ηλεκτρικά στοιχεία. Υπάρχουν, όπως αναφέραμε, τα ηλεκτρικά στοιχεία που έχουν δύο ακροδέκτες με βασικά στοιχεία να είναι η αντίσταση, ο πυκνωτής και το πηνίο, αλλά και με περισσότερους ακροδέκτες με βασικότερους εκπροσώπους τον μετασχηματιστή, το transistor και τον τελεστικό ενισχυτή.[3]

Κάποιες φορές, η λύση έγκειται στη συστηματική εφαρμογή της ανάλυσης κόμβων ή βρόχων. Οι μετασχηματισμοί κυκλωμάτων κατά Thévenin και Norton χρησιμοποιούνται συχνά για να βοηθήσουν στην απλοποίηση των κυκλωμάτων και οι έννοιες της διαίρεσης τάσης και ρεύματος αντιπροσωπεύουν επίσης βασικά εργαλεία ανάλυσης. Σε αυτό το σημείο θα γίνει αναφορά σε ένα από τα βασικά εργαλεία, αυτό της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων.

#### 3.1.1 Εξισώσεις τοπολογίας κυκλωμάτων

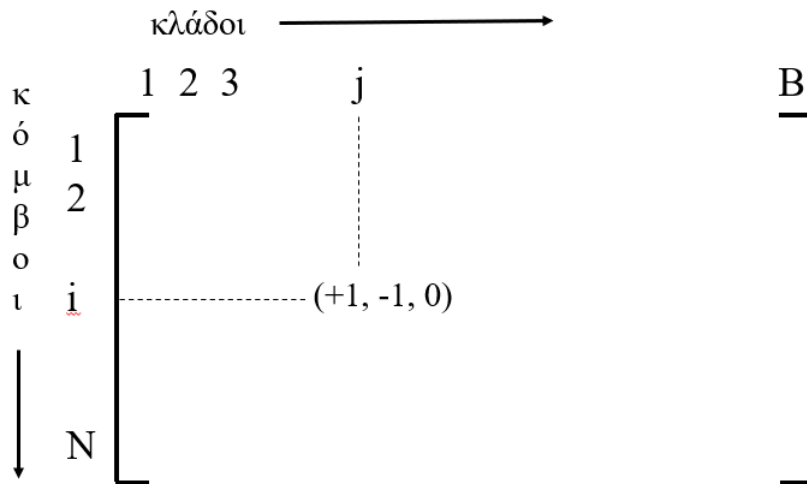
Θεωρούμε  $\{V = 0, 1, \dots, n - 1\}$ , το σύνολο των κόμβων (nodes) του κυκλώματος και  $\{E = e_1, \dots, e_m\}$ , το σύνολο των  $m$  κλάδων (branches) του κυκλώματος.

Εάν σε κάθε κλάδο προσαρτηθεί μια αυθαίρετη (αλλά πάντοτε συνδυασμένη) φορά αναφοράς, τότε ο ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης (incidence matrix)  $A$ , ως προς τον κόμβο αναφοράς, όπου είναι η γείωση και θα τον συμβολίζουμε με 0, για τον προσανατολισμένο γράφο του κυκλώματος ορίζεται ως εξής:

$$A_{i,j} = \begin{cases} +1 & , \text{εαν ο κλάδος } j \text{ εξέρχεται από τον κόμβο } i \\ -1 & , \text{εαν ο κλάδος } j \text{ εισέρχεται στον κόμβο } i \\ 0 & , \text{εαν ο κλάδος } j \text{ δε συνδέεται με τον κόμβο } i. \end{cases}$$

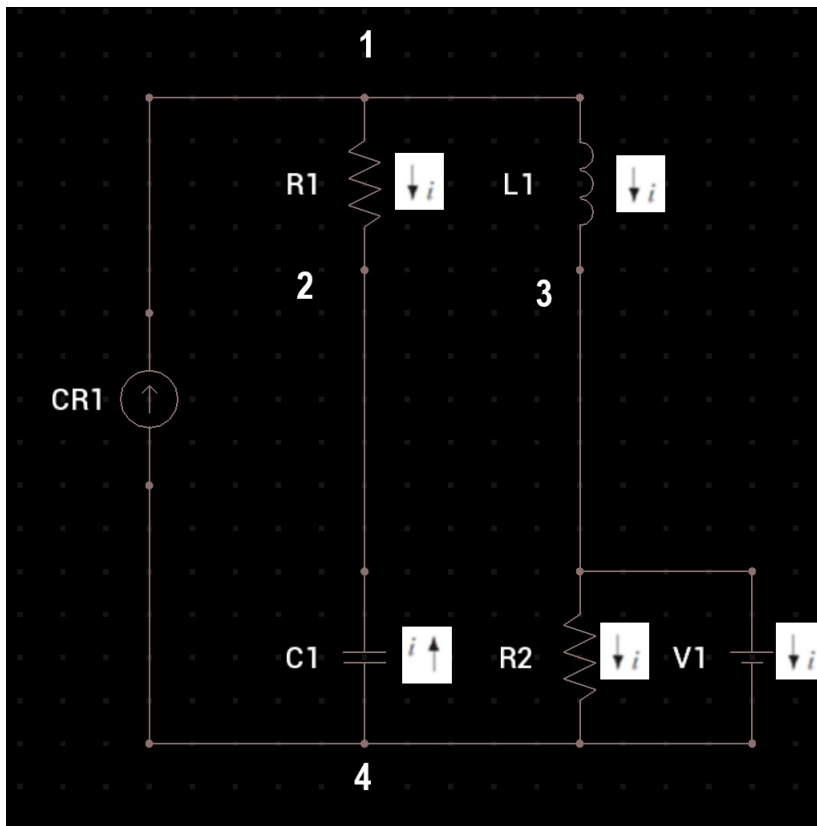
Οι διαστάσεις του πίνακα  $A$  είναι  $(n - 1) \times m$





Σχήμα 3.1: Εξισώσεις τοπολογίας

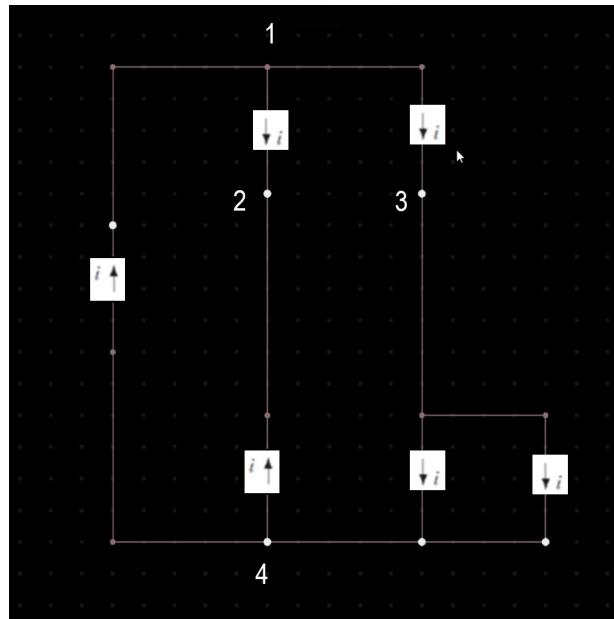
Στη συνέχεια θα δούμε ένα σύντομο παράδειγμα που δείχνει τον τρόπο δημιουργίας του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης μέσα από ένα κύκλωμα.



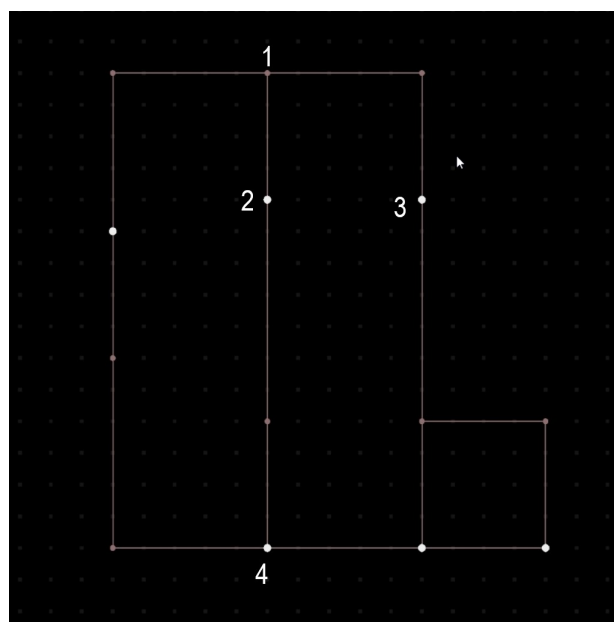
Σχήμα 3.2: Αρχικό κύκλωμα της δημιουργίας του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης

Το κύκλωμα του σχήματος 3.2 έχει 4 κόμβους

- Κόμβος 1: ενώνονται η πηγή ρεύματος CR1, η αντίσταση R2 και το πηνίο L1
- Κόμβος 2: ενώνονται η αντίσταση R1 και ο πυκνωτής C1
- Κόμβος 3: ενώνονται το πηνίο L1, η αντίσταση R2 και η πηγή τάσης V1
- Κόμβος 4: ενώνονται η αντίσταση R2, η πηγή τάσης V1, ο πυκνωτής C1 και η πηγή ρεύματος CR1



Σχήμα 3.3: Πρώτο στάδιο της δημιουργίας του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης



Σχήμα 3.4: Δεύτερο στάδιο της δημιουργίας του ελαττούμενου πίνακα πρόσπτωσης

Έτσι, ο ελαττωμένος πίνακας πρόσπτωσης που προκύπτει είναι:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix}$$

Από τον Νόμο Τάσης του Kirchhoff (KVL) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Τέλος, από τον Νόμο Ρεύματος του Kirchhoff (KCL) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχοντας κάνει τον διαχωρισμό των ηλεκτρικών στοιχείων σε ενεργητικά και παθητικά, ανάλογα με το αν παρέχουν ενέργεια στο κύκλωμα ή όχι, ένας ακόμα τρόπος με τον οποίον μπορούμε να εντάξουμε τα στοιχεία αυτά σε κατηγορίες με κριτήριο αυτή τη φορά τη γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης που διέπει το ηλεκτρικό στοιχείο. Αυτή η κατηγορία περιλαμβάνει αντιστάσεις, χωρητικότητες και πηγές ρεύματος. Επομένως, με βάση την χαρακτηριστική εξίσωση, προκύπτουν ότι έχουμε την πρώτη ομάδα με  $m_1$  στοιχεία στο πλήθος, με τη γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης να είναι:

$$i_k(t) = g_k u(t) + C_k \frac{du_k(t)}{dt} + S_k(t) \quad (3.1)$$

Στην περίπτωση εκείνη που τα στοιχεία δεν μπορούν να γραφτούν με τη μορφή της παραπάνω χαρακτηριστικής εξίσωσης, με τη κατηγορία αυτή να περιλαμβάνει τα πηνία και τις πηγές τάσης, η γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$u_k(t) = l \frac{di_k(t)}{dt} + S_k(t) \quad (3.2)$$

Τα βασικά βήματα για την τροποποιημένη ανάλυση κόμβων μπορούν να συνοψιστούν στα εξής: Υποθέσαμε αρχικά, πως  $m_1$  είναι τα στοιχεία της ομάδας 1, δηλαδή για αντιστάσεις, πυκνωτές και πηγές ρεύματος, και  $m_2$  τα στοιχεία της ομάδας 2, δηλαδή πηνία και τις πηγές τάσης, όπου  $m = m_1 + m_2$ . Χωρίζουμε τον ελαττωμένο πίνακα πρόπτωσης  $A$  και τα διανύσματα  $\underline{i}(t)$  και  $\underline{u}(t)$  σε υπό-πίνακες και υπό-διανύσματα που αντιστοιχούν στις δυο ομάδες στοιχείων ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}_1(t) \\ \underline{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\underline{i}(t) = \begin{bmatrix} \underline{i}_1(t) \\ \underline{i}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Οι διαστάσεις απο τους υπό-πίνακες που προέκυψαν από τα βήματα της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων, φαίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα 3.1

Υπό-πίνακες	Διαστάσεις
$A_1$	$(n - 1) \times m_1$
$A_2$	$(n - 1) \times m_2$
$u_1$	$m_1 \times 1$
$u_2$	$m_2 \times 1$
$i_1$	$m_1 \times 1$
$i_2$	$m_2 \times 1$

Πίνακας 3.1: Διαστάσεις απο τους υπό-πίνακες των βημάτων της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων

Από τον KCL όπως είδαμε και παραπάνω ισχύει:

$$A\underline{i}(t) = \underline{0} \Leftrightarrow A_1\underline{i}_1(t) + A_2\underline{i}_2(t) \quad (3.6)$$

και απο τον KVL:

$$\underline{u}(t) = A^T \underline{V}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u}_1(t) = A_1^T \underline{V}(t) \\ \underline{u}_2(t) = A_2^T \underline{V}(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

καθώς

$$A^T = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix}$$

με:

$$A_1^T \longrightarrow m_1 \times (n - 1)$$

και

$$A_2^T \longrightarrow m_2 \times (n - 1)$$

Οι εξισώσεις των στοιχείων της ομάδας G1 και της ομάδας G2 μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$i_1(t) = Gu_1(t) + C \frac{u_1(t)}{dt} + S_1(t) \quad (3.8)$$

- $G$  : Είναι ένας διαγώνιος πίνακας  $m_1 \times m_1$  με μη μηδενικά διαγώνια στη θέση των αντιστάσεων, αλλά μηδενικά διαγώνια στοιχεία στη θέση των χωρητικοτήτων και πηγών ρεύματος.
- $C$  : Είναι ένας διαγώνιος πίνακας  $m_1 \times m_1$  με μη μηδενικά διαγώνια στη θέση των χωρητικοτήτων.
- $S_1(t)$  : Είναι ένα διάνυσμα  $m_1 \times 1$  με μη μηδενικά στη θέση πηγών ρεύματος.

$$u_2(t) = Ru_2(t) + L \frac{u_2(t)}{dt} + S_2(t) \quad (3.9)$$

- $L$  : Είναι ένας διαγώνιος πίνακας  $m_2 \times m_2$  με μη μηδενικά διαγώνια στη θέση των αυτεπαγωγών.
- $S_2(t)$  : Είναι ένα διάνυσμα  $m_2 \times 1$  με μη μηδενικά στη θέση πηγών τάσης.

Και με κατάλληλες αντικαταστάσεις, η σχέση 3.8 γίνεται:

$$-A_1 S_1(t) = A_1 G A_1^T u(t) + A_1 G A_1^T \frac{u(t)}{dt} + A_2 I_2(t) \quad (3.10)$$

Και η σχέση 3.9 γίνεται:

$$S_2(t) = A_2^T u(t) - L \frac{i_2(t)}{dt} \quad (3.11)$$

Επομένως από τον συνδιασμό των εξισώσεων 3.10 και 3.11 προκύπτει ένα επεκταμένο (σύνθετο) σύστημα εξισώσεων διαστάσεων  $[(n - 1) + m_2] \times [(n - 1) + m_2]$ , το οποίο το γράφουμε σε έναν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u(t)}{dt} \\ \frac{i_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

## 3.2 Εξισώσεις τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων MNA και δυναμικές εξισώσεις

Για την παρουσίαση της συσχέτισης των MNA εξισώσεων με τις δυναμικές εξισώσεις, θέτουμε τους πίνακες και τα διανύσματα της σχέσης 3.12 ως εξής:

$$G = \begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix}$$

$$u_{in}(t) = \begin{bmatrix} -A_1 S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

Και τελικά προκύπτει το σύστημα των MNA εξισώσεων ενός MIMO συστήματος, ως εξής:

$$Gx(t) + C \frac{dx}{dt} = Bu_{in}(t) \quad (3.13)$$

$$u_{out}(t) = L^T x \quad (3.14)$$

- $x(t)$ : είναι το διάνυσμα κατάστασης
- $U_{in}(t)$ : είναι το διάνυσμα των διεγέρσεων εισόδου μεγέθους  $N_i$ , δηλαδή όσος και ο αριθμός των εισόδων

- $U_{out}(t)$ : είναι το διάνυσμα των εξόδων μεγέθους  $N_o$ , όσος δηλαδή και ο αριθμός των εξόδων.

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στις MNA εξισώσεις, 3.13 και 3.14, λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \quad (3.15)$$

$$Y(s) = LX(s) \quad (3.16)$$

Υποθέτοντας ότι  $X(0)=0$  και μία απόκριση παλμού να εφαρμόζεται στο  $U(s)$ , για παράδειγμα  $U(s)=1$ , το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$(sI - A)X(s) = B \quad (3.17)$$

$$Y(s) = LX(s) \quad (3.18)$$

Και καταλήγουμε στη συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος, που είναι:

$$H(s) = L^T(G + sC)^{-1}B \quad (3.19)$$

Σε αυτό το σημείο παρατίθεται η απόδειξη του συσχετισμού και της ομοιότητας των παραπάνω MNA εξισώσεις, με τις δυναμικές εξισώσεις.

Υποθέτουμε πως ο πίνακας  $C$  είναι αντιστρέψιμος. Τότε πολλαπλασιάζοντας με αυτόν έχουμε:

$$\begin{aligned} Gx(t) + C \frac{dx}{dt} &= Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ C^{-1}Gx(t) + C^{-1}C \frac{dx}{dt} &= C^{-1}Bu_{in}(t) \Rightarrow \\ \frac{dx}{dt} &= -C^{-1}Gx + C^{-1}Bu_{in}(t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Εαν σε αυτό το σημείο θέσουμε:

$$A = -C^{-1}G \quad (3.21)$$

$$b = C^{-1}B \quad (3.22)$$

Και κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις 3.21 και 3.22 στη σχέση 3.20, προκύπτει:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu_{in}$$

, όπου είναι η καταστατική εξίσωση στη μορφή που έχουμε δείξει. Όμοια προκύπτει, πως η σχέση της συνάρτησης μεταφοράς της εξίσωσης είναι:

$$H(s) = \underline{c}^T (sI - A)^{-1} b$$

Η συμπεριφορά κάθε *port* μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση

$$YV = I$$

ή

$$ZI = V$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $Y$  περιέχει αγωγιμότητες, ο  $V$  τάσεις και ο  $I$  ρεύματα.

Στον πίνακα  $Y$  οι μόνες πηγές που επιτρέπονται στο κύκλωμα, είναι οι πηγές τάσης κατά μήκος των *ports*. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε κάποιες αντικαταστάσεις στις MNA εξισώσεις. Το  $u_{in}(t)$  αλλάζει σε  $u_p(t)$  που είναι το διάνυσμα των τάσεων στα *ports* και το  $u_{out}(t)$  σε  $i_p(t)$  που είναι το διάνυσμα των ρευμάτων.

Επιπλέον, οι έξοδοι μπορούν να υπολογισθούν από τις εισόδους και μπορεί να φανεί πως  $B = -L$ . Έτσι οι σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$Gx + C \frac{dx}{dt} = Bu_p(t)$$

$$i_p(t) = -B^T x$$

και ο πίνακας αντιμετάθεσης

$$Y(s) = -B^T (G + sC)^{-1} B$$

Και για τον πίνακα  $Z$  αντίστοιχα παίρνουμε

$$Gx + C \frac{dx}{dt} = Bu_p(t)$$

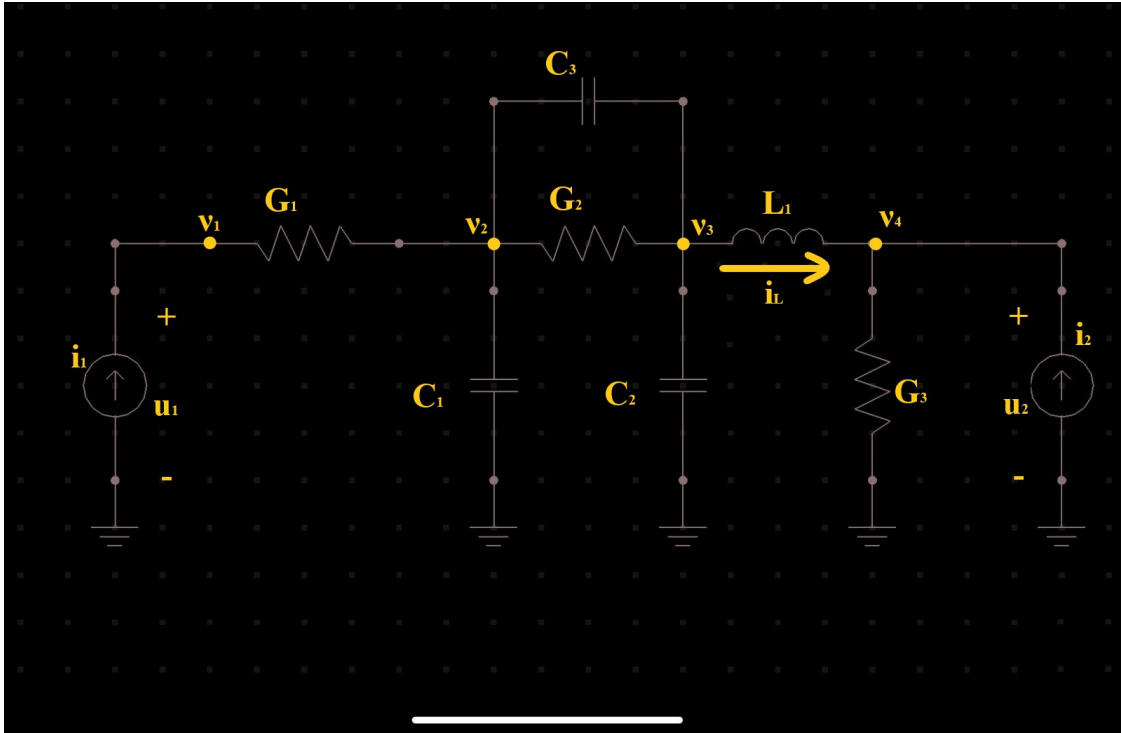
$$i_p(t) = B^T x$$



Έτσι

$$Z(s) = B^T(G + sC)^{-1}B$$

Ας δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο θα φανούν όλα πιο ξεκάθαρα. Έστω το παρακάτω κύκλωμα:



Σχήμα 3.5: Ενδεικτικό παράδειγμα δημιουργίας MNA εξισώσεων

Δημιουργούμε τους πίνακες  $G$ ,  $C$  και  $B$ , ενώ το διάνυσμα κατάστασης είναι το  $x$ :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2) & -G_2 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (C_1 + C_2) & -C_c & 0 & 0 \\ 0 & -C_c & (C_c + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -L_1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_2 \\ V_4 \\ I_L \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_p = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, I_p = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, L = B$$

## Κεφάλαιο 4

# Μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR)

### 4.1 Το πρόβλημα μείωσης του μοντέλου

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τα κυκλώματα που συναντάμε στην καθημερινότητά μας σε διάφορες εφαρμογές, αποτελούνται από εκατομμύρια στοιχεία. Τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή αυτών των κυκλωμάτων αυξάνονται συνεχώς, με σκοπό τον ακριβή προσδιορισμό του αποτελέσματος [4] [2]. Ωστόσο αυτό έχει ως αποτέλεσμα, λόγω των πολύ μεγάλων διαστάσεων που έχουν τα μοντέλα αυτά, η επίλυση των γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν από τέτοιας κλίμακας κυκλώματα να είναι ιδιαίτερα δύσκολη και σε κάποιες περιπτώσεις αδύνατη. Η χρήση τεχνικών μείωσης της τάξης μεγέθους των μοντέλων αυτών ( Model Order Reduction (MOR) ) να καθίσταται μία από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές που αποσκοπούν στη μείωση της πολυπλοκότητας των γραμμικών κυκλωμάτων [5] [6].

Με την παραγωγή μικρότερων μοντέλων, που θα προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό τις ιδιότητες των αρχικών μοντέλων, επιτυγχάνεται μείωση των απαιτούμενων υπολογισμών και η απλοποίηση των μαθηματικών μοντέλων, καθώς είναι πιο εύκολο και οικονομικό να προσομοιώσουν αυτά τα μοντέλα σε σχέση με τα αρχικά [7] [8] [3]

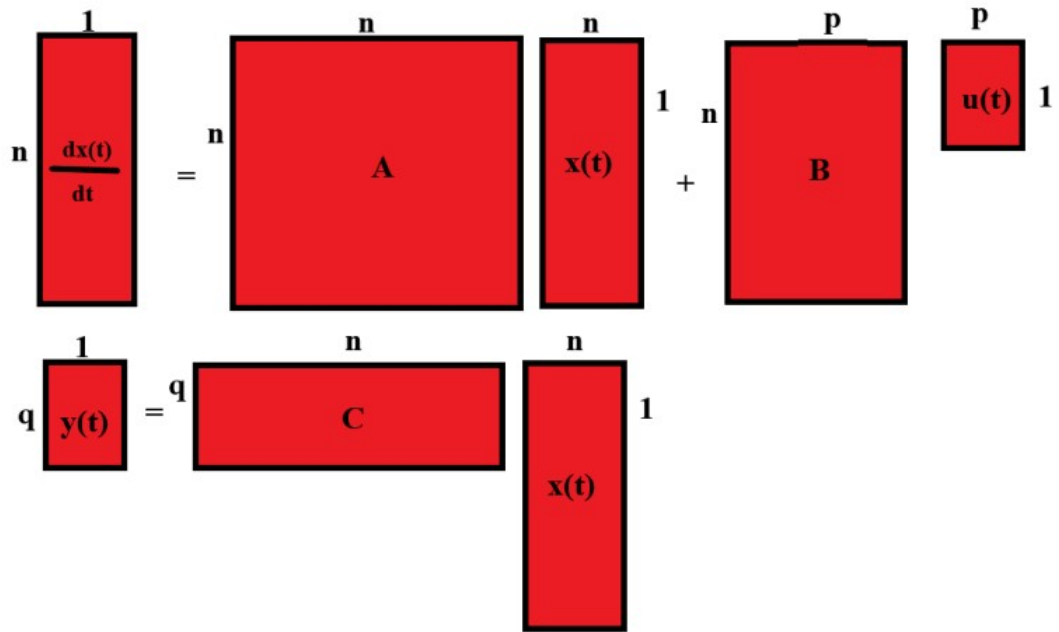
Οι τεχνικές μείωσης της τάξης μεγέθους των μοντέλων αυτών ( Model Order Reduction (MOR) ), είναι βασισμένες στη προβολή Projection-based Linear MOR [9] [10].

Αρχικά, θεωρώντας το γραμμικά μεταβλητό σύστημα χρόνου:

$$E \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4.2)$$

, όπου οι διαστάσεις τους είναι:  $E, A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ ,  $C \in R^{p \times n}$ ,  $u \in R^m$ ,  $y \in R^p$ ,  $x \in R^n$  και  $n$  να είναι αρκετά μεγάλο.



Σχήμα 4.1: Αρχική κατάσταση πριν τη διαδικασία του Model Order Reduction ενός LTI συστήματος

Όλες οι υπάρχουσες τεχνικές μείωσης της τάξης μεγέθους των μοντέλων, Model Order Reduction (MOR), είναι βασισμένες στο MOR με βάση την προβολή [11] [12]. Δηλαδή, αυτό σημαίνει πρακτικά, το να βρεθεί ένας υποχώρος  $S_1$  που προσεγγίζει την πολυπλοκότητα που βρίσκεται το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$ . Συνέχεια της διαδικασίας αποτελεί, η προσέγγιση του  $x(t)$  από την προβολή του  $\tilde{x}(t)$  στον υποχώρο  $S_1$ .

Υποθέτοντας ότι έχει βρεθεί μια ορθοκανονική βάση  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$  του υποχώρου  $S_1$ , τότε η προσέγγιση του  $\tilde{x}(t)$  στον υποχώρο  $S_1$  μπορεί να αναπαρασταθεί από τη βάση ως εξής:

$$E \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + e \quad (4.3)$$

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t) \quad (4.4)$$

Και στη συνέχεια, εάν το σφάλμα  $e$  είναι ίσο με μηδέν ( $e=0$ ) και η προβολή  $W^T e = 0$  στον υποχώρο  $S_2$ , όπου οι στήλες του  $W$  αποτελούν βάση του υποχώρου  $S_2$ , προκύπτει:

$$W^T E \frac{dx(t)}{dt} = W^T Ax(t) + W^T Bu(t)$$

και

$$\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t)$$

Στο τέλος, εάν κάνουμε αντικατάσταση

$$\tilde{E} = W^T EV$$

$$\tilde{A} = W^T AV$$

$$\tilde{B} = W^T B$$

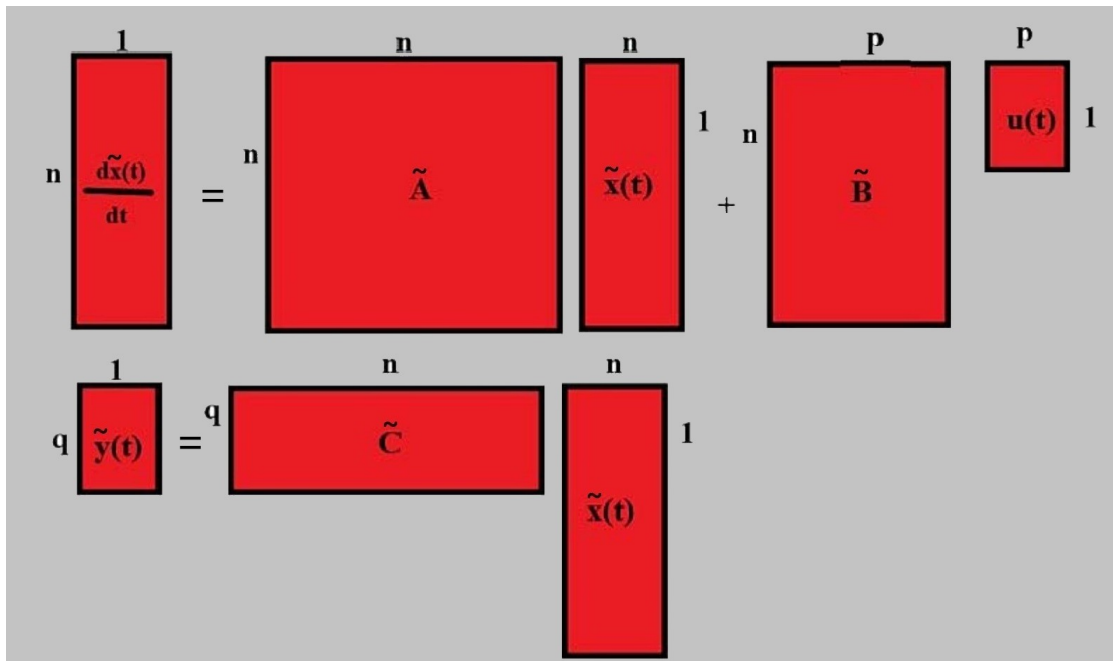
$$\tilde{C} = CV$$

προκύπτει το μειωμένο μοντέλο:

$$\tilde{E} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (4.5)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \quad (4.6)$$

όπου  $\tilde{E}, \tilde{A} \in R^{q \times q}$ ,  $\tilde{B} \in R^{q \times m}$ ,  $\tilde{C} \in R^{p \times q}$ ,  $u \in R^m$ ,  $\tilde{y} \in R^p$ ,  $\tilde{x} \in R^q$  και  $q \ll n$ .



Σχήμα 4.2: Τελική κατάσταση μετά τη διαδικασία του Model Order Reduction ενός LTI συστήματος

Το τελικό σύστημα, που περιγράφει η τελευταία εξίσωση, είναι πολύ μικρότερο σε σύγκριση με το αρχικό σύστημα, με την έννοια ότι υπάρχουν πολύ λιγότερες εξισώσεις στο δεύτερο από ότι στο πρώτο σύστημα και είναι ευκολότερο να λυθεί. Παράλληλα, μειώνεται και ο χρόνος προσομοίωσής της επίλυσης του συστήματος.

Όσον αφορά το σφάλμα μεταξύ των δύο συστημάτων θα πρέπει να είναι εντός αποδεκτής ανοχής. Το σφάλμα μπορεί να μετρηθεί μέσω του σφάλματος μεταξύ των διανυσμάτων κατάστασης  $x(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  ή μεταξύ των αποκρίσεων εξόδου  $y(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$  ή μεταξύ των συναρτήσεων μεταφοράς των δύο συστημάτων.

Οι τεχνικές MOR έχουν ως κοινό σκοπό τη συμπεριφορά του μειωμένου μοντέλου που θα παράξουν, η οποία πρέπει να είναι επαρκώς κοντά με αυτήν του αρχικού μοντέλου στα πλαίσια της μέτρησης του σφάλματος. Το σημείο που διαφέρουν οι τεχνικές αυτές, είναι ο υπολογισμός των  $W$  και  $V$ .

Μερικές τεχνικές MOR που αξίζει να αναφέρουμε, είναι:

- **Reduced basis και POD μέθοδοι:** Υπολογίζουν τους πίνακες προβολής  $W \in R^{rxn}$ ,  $V \in R^{rxn}$  από τα στιγμιότυπα του διανύσματος κατάστασης  $x(t)$  σε διάφορες χρονικές στιγμές.
- **Eigenvalue based MOR μέθοδοι:** Τα  $W \in R^{rxn}$ ,  $V \in R^{rxn}$  είναι ιδιοδιανύσματα ή αμετάβλητοι υποχώροι που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές των πινάκων  $(A, E)$ .
- **Gramian based MOR μέθοδοι:** Υπολογίζουν τους πίνακες προβολής  $W \in R^{rxn}$ ,  $V \in R^{rxn}$  από την ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα των Gramians.
- **Moment matching μέθοδοι:** Υπολογίζουν τους πίνακες προβολής  $W \in R^{rxn}$ ,  $V \in R^{rxn}$  από τα στιγμιότυπα της συνάρτησης μεταφοράς.

Διαδικασίες υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR), καθώς προσεγγίσεις και προτάσεις που έχουν προταθεί τα τελευταία χρόνια είναι:

1. Μέθοδοι node elimination
2. Μέθοδοι Gramian based
3. Μέθοδοι Moment matching

Οι μέθοδοι Gramian based και Moment matching αποτελούν και τις πιο σημαντικές μεθόδους. Γίνεται μια μικρή σύγκριση μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων, όπου παρατίθεται στον παρακάτω πίνακα 4.1.

Χαρακτηριστικά	Gramian based MOR	Moment Matching
Είναι κατάλληλες για συστήματα	Μικρής κλίμακας	Μεγάλης κλίμακας
Συγκεκριμένο όριο σφάλματος	Παρέχουν	Δεν Παρέχουν
Ιδιαιτερότητα	Διατηρούν την παθητικότητα του αρχικού συστήματος	Είναι υπολογιστικά αποδοτικές

Πίνακας 4.1: Διαφορές Gramian based MOR και Moment Matching

Τελικά, οι μέθοδοι αντιστοίχισης ροπών (Moment Matching Method) είναι πιο κλιμακωτές μέθοδοι και έτσι προτιμούνται περισσότερο για την μείωση τάξης μοντέλων ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

## 4.2 Μέθοδος Moment Matching

Μία από τις πιο σημαντικές και επιτυχημένες μεθόδους MOR για γραμμικά συστήματα, βασίζεται στους υποχώρους Krylov. Αυτή, συνήθως ονομάζονται μέθοδος αντιστοίχισης ροπών (Moment Matching Method) ή Krylov subspace και είναι πολύ αποτελεσματικές σε προβλήματα προσομοίωσης κυκλώματων, καθώς τα μεγάλα παρασιτικά συστήματα αποτελούνται από πολύ μεγάλο αριθμό στοιχείων, θυρών και κόμβων που χρήζουν μείωσης τάξης μεγέθους. Μέθοδοι που βασίζονται στην αντιστοίχιση ροπών, Moment Matching, διατυπώνονται για να έχουν άμεση εφαρμογή στο γραμμικό μοντέλο που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τη μέθοδο μείωσης τάξης μεγέθους Model Order Reduction (MOR).

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στις MNA εξισώσεις, που είδαμε στο κεφάλαιο 3, λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$Gx(s) + sCx(s) = Bu_{in}(s) \quad (4.7)$$

$$u_{out}(s) = L^T x(s) \quad (4.8)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος είναι:

$$H(s) = L^T (G + sC)^{-1} B \quad (4.9)$$

Στόχος των συγκεκριμένων μεθόδων είναι η προσέγγιση το παραπάνω συστήματος με ένα μοντέλο χαμηλότερης τάξης μεγέθους  $n \ll m$

$$G'x(s) + sC'x'(s) = B'u_{in}(s) \quad (4.10)$$

$$u'_{out}(s) = L'^T x'(s) \quad (4.11)$$

όπου οι  $C', G' \in R^{n \times n}$ ,  $X'(s) \in R^n$ ,  $B' \in R^{n \times p}$ .

Και τελικά προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος θα είναι:

$$H'(s) = L'^T (G' + sC')^{-1} B' \quad (4.12)$$

και αν θεωρήσουμε  $A = -G^{-1}C$  και  $R = G^{-1}B$  η σχέση 5.6 προκύπτει:

$$H(s) = L^T (I - sA)^{-1} R \quad (4.13)$$

όπου ο  $I \in R^{m \times m}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  αναπαριστούν το σύνολο των πόλων της  $H(s)$  και επεκτείνοντας το ανάπτυγμα τη σειρά Taylor της  $H(s)$  στο  $s = 0$ , έχουμε:

$$H(s) = (M_0 + M_1 s + M_2 s^2 + \dots) \quad (4.14)$$

Οι συντελεστές  $M_k \in R^{p \times p}$ , ονομάζονται στιγμιότυπα της  $H(s)$ .

Η σχέση που υπολογίζει αυτά τις ροπές (moments) της  $H(s)$  προκύπτει ως εξής:

$$(sI - A)(x_0 + x_1 s + x_2 s^2 + \dots) = B \quad (4.15)$$

$$x_0 = A^{-1} B, m_0 = Lx_0$$

$$x_1 = A^{-1} x_0, m_1 = Lx_1$$

$$x_2 = A^{-1} x_1, m_2 = Lx_2$$

...

και τελικά:

$$m_i = L(A^{-1})^i A^{-1} B$$

επομένως,

$$M_k = L^T (-G^{-1}C)^k G^{-1} B$$



$$M_k = L^T A^k R, k = 0, 1, 2, \dots$$

Και στόχος αποτελεί, το επιτυχημένο ταίριασμα των ροπών (moments):

$$M_k = M'_k A^k R, k = 0, 1, 2, \dots, 2q - 1$$

Στον αλγόριθμο της PRIMA η διαδικασία της αντιστοίχισης ροπών (moment matching) επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό των πινάκων του αρχικού συστήματος, ως εξής:

$$G' = V^T G V$$

$$C' = V^T C V$$

$$B' = V^T B V$$

, όπου  $V \in R^{m \times p}$ .

Οι στήλες του  $V$  τέμνουν τον υποχώρο *krylov*:

$$K_r(A, R, q) = \text{span}(R, AR, A^2, \dots, A^{2q-1}R)$$

- $A \in R^{n \times n}$  και  $R \in R^n$  : Είναι τα αρχικά τα διανύσματα
- $q$  : Είναι κάποιος δεδομένος θετικός ακέραιος, όπου ονομάζεται δείκτης της ακολουθίας *krylov*
- $R, AR$ : Είναι τα διανύσματα που κατασκευάζουν τον υπόχωρο *krylov* και ονομάζονται βασικοί φορείς της ακολουθίας

Για τη δημιουργία μιας βάσης σε έναν πίνακα, κάνουμε χρήση της ακολουθίας *Krylov*[13] [14]. Ωστόσο η ακολουθία *Krylov* δεν είναι ορθοκανονική, και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να χρειαζόμαστε μία κατάλληλη μέθοδο έτσι ώστε η ακολουθία μας να μετατραπεί σε ορθοκανονική. Μία τέτοια διαδικασία, για την υλοποίηση του υποχώρου *Krylov*, είναι η επαναληπτική μέθοδος *Arnoldi*.

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα ενδεικτικό κομμάτι ψευδοκώδικα, με την υλοποίηση της *Arnoldi*.

```

Arnoldi Algorithm
1: procedure ARNOLDI( $A, V, m$ )
2:  $q_1 = \frac{v}{\|v\|}$ ;
3:   for  $j = 0; j < m; j++$  do
4:      $z = Aq_j$ ;
5:     for  $i = 0; i < j; i++$  do
6:        $h_{i,j} = q_i^T z$ ;
7:        $z = z - h_{i,j}q_i$ ;
8:     end for
9:      $h_{j+1,j} = \|z\|$ ;
10:    if  $h_{j+1,j} == 0$  then
11:      quit;
12:    end if
13:     $q_{j+1} = \frac{z}{h_{j+1,j}}$ ;
14:  end for
15: end procedure

```

Σχήμα 4.3: Υλοποίηση του αλγορίθμου Arnoldi

Έτσι έχουμε τη δημιουργία των πινάκων:

- $Q_m$ , με τις διαστάσεις του πίνακα να είναι:

$$Q_m \rightarrow n \times m$$

και είναι της μορφής:

$$Q_m = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

- $H_m$ , με τις διαστάσεις του πίνακα να είναι:

$$H_m \rightarrow (m + 1) \times m$$

και είναι της μορφής:

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & h_{m+1,m} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Από τους πίνακες  $Q_m$  και  $H_m$ , βλέπουμε πως ισχύει η σχέση:

$$AQ_m = Q_{m+1}H_m \quad (4.18)$$

Τέλος, αυτό που παρατηρείται είναι ο πίνακας  $Q_m$  έχει ως στήλες ορθοκανονικά διανύσματα και οι ιδιοτιμές του πίνακα  $H_m$  είναι προσεγγίσεις των ιδιοτιμών του πίνακα  $A$ .



## Κεφάλαιο 5

# Παραμετρικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR)

Σε αυτό το σημείο θα επεκτείνουμε το πρόβλημα του υποβιβασμού τάξης μοντέλου MOR, προσθέτοντας το θέμα των παραμέτρων. [15] [16]

Οι τυπικές μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (MOR) δεν είναι συνήθως ισχυρές όταν υπάρχει ένα παραμετρικό μοντέλο που πρέπει να μειωθεί. Έτσι προκύπτει η αναγκαιότητα τεχνικών, που λαμβάνουν υπόψη την μεταβλητότητα τέτοιων παραμέτρων. Η μεταβλητότητα των παραμέτρων φαίνεται έντονα στο σχεδιασμό των μικρο- και νάνο- ηλεκτρονικών συστημάτων, σε περιπτώσεις συζευγμένων ηλεκτροθερμικών προβλημάτων, καθώς και σε πολλές αναλύσεις βελτιστοποίησης. Με τη μοντελοποίηση και τη προσομοίωση σε πολλές τιμές των παραμέτρων να είναι αναπόφευκτες. Για πολλά εργαλεία σχεδίασης και ανάλυσης, η μοντελοποίηση και η προσομοίωση πρέπει να γίνονται σε κάθε περίπτωση της παραμέτρου από την αρχή.[17] [18]

Η προσέγγιση είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για την ηλεκτρική ανάλυση νανοηλεκτρονικών δομές, καθώς οι παράμετροι εκεί εμφανίζονται συχνά σε γραμμική μορφή, όπου απαιτείται από αυτό εξαγωγή για ένα παραμετρικό μοντέλο. Ωστόσο, η προσομοίωση του επακόλουθου παραμετρικού συστήματος εξακολουθεί να είναι πολύ χρονοβόρα, λόγω της μεγάλης διάστασης του συστήματος.[19] [20] [21]

Για αυτούς ακριβώς τους λόγους, έχει καθιερωθεί η χρήση της μεθόδου της μείωσης τάξης παραμετρικού μοντέλου (PMOR) για τον υπολογισμό ενός μοντέλου μειωμένης τάξης (ROM), που δεν είναι μόνο πολύ χαμηλότερης διάστασης, αλλά και ακριβής για όλες τις τιμές των παραμέτρων, εντός ενός καθορισμένου εύρους.[22]

Επομένως, η χρήση της παραμετρικής ROM για την αντικατάσταση του μοντέλου πλήρους τάξης στην προσομοίωση και άλλες αναλύσεις βελτιστοποίησης, οδηγεί σε σημαντικά επιτάχυνση και υψηλή ακρίβεια. Πολλές μέθοδοι μείωσης τάξης παραμετρικού μοντέλου (PMOR) έχουν προταθεί μέχρι στιγμής. Στην παρούσα εργασία, γίνεται χρήση της μεθόδου αντιστοίχισης αντιστοίχισης ροπών (moment matching). Μία μέθοδος, η οποία είναι ιδιαίτερα δημοφιλής σε πρακτικές εφαρμογές. Αυτό συμβαίνει, γιατί είναι εύκολο να εφαρμοστεί, χρειάζεται λιγότερους υπολογισμούς από τις περισσότερες των άλλων μεθόδων, και επομένως είναι κατάλληλη για τη μείωση των υψηλών διαστάσεων συστημάτων που προκύπτουν συνήθως στο σχεδιασμό και την ανάλυση κυκλωμάτων VLSI.

## 5.1 Παραμετρική μέθοδος υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR) με βάση τη μέθοδο moment-matching

Το γραμμικό σύστημα που είχαμε περιγράψει στο προηγούμενο κεφάλαιο, συναρτήση των παραμέτρων  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , [9] [18][23] μπορεί να εκφραστεί ως:

$$C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \frac{dx(t)}{dt} + G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)x(t) = Bu_p(t) \quad (5.1)$$

$$i_p(t) = B^T x(t) \quad (5.2)$$

- $x(t, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^N$ : Είναι το διάνυσμα των αγνώστων στο σύστημα
- $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in R^{N \times N}$ : Είναι πίνακες που περιγράφουν την αθροιστική μνήμη και τα στοιχεία χωρίς μνήμη του δικτύου που εξαρτάται από  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
- $i_p$ : Είναι τα ρεύματα των ports
- $u_p$ : Είναι οι τάσεις των ports
- $p$ : Είναι ο αριθμός των ports
- $B$ : Είναι ένας πίνακας επιλογής που αντιστοιχίζει τις τάσεις των ports στο κόμβο του δικτύου
- $N$ : Είναι ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών στη διατύπωση των MNA εξισώσεων

- $n$ : Είναι ο αριθμός των παραμέτρων στο δίκτυο

Από το σύστημα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, με τις εξισώσεις

$$\tilde{E} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \quad (5.3)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \quad (5.4)$$

, η παραμετρική συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού μοντέλου υπολογίζεται ως εξής:

$$H(s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = L(sC(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^{-1}B \quad (5.5)$$

Την παραπάνω σχέση 5.5, επιδιώκουμε σε αυτό το σημείο να δημιουργήσουμε μια προσέγγιση ενός υποβιβασμένης τάξης μοντέλου (ROM), η οποία θα είναι σε θέση να αποτυπώσει με ακρίβεια τη συμπεριφορά εισόδου και εξόδου του συστήματος, για οποιονδήποτε πιθανό συνδυασμό στο χώρο παραμέτρων:

$$\tilde{H}(s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \tilde{L}(s\tilde{C}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) - \tilde{G}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^{-1}\tilde{B} \quad (5.6)$$

Γενικά, οι παραμετρικοί μέθοδοι υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR) προσπαθούν να δημιουργήσουν ένα υποβιβασμένης τάξης μοντέλο (ROM), της οποίας η δομή είναι παρόμοια με την αρχική και ταυτόχρονα εμφανίζει παρόμοια παραμετρική εξάρτηση. Η πιο απλή μέθοδος για που αντιπροσωπεύει ένα παραμετρικό σύστημα βασίζεται σε μια επέκταση της σειράς Taylor, συναρτήση των παραμέτρων  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  :

$$(s(C_0 + C_1\lambda_1 + \dots + C_n\lambda_n) - (G_0 + G_1\lambda_1 + \dots + G_n\lambda_n))x(s, \lambda) = Bu(s) \quad (5.7)$$

$$y(s, \lambda) = Lx(s, \lambda) \quad (5.8)$$

, όπου τα  $C_0$  και  $G_0$  περιέχουν τις τιμές χωρητικότητας και αγωγιμότητας που αντιστοιχούν στα μη παραμετρικά μέρη, ενώ τα  $C_i$  και  $G_i$  περιλαμβάνουν τις τιμές χωρητικότητας και αγωγιμότητας που έχουν κλιμακωθεί σε σχέση με τις παραμέτρους. Η χρήση αυτού του είδους αναπαράστασης, με ρητή εξάρτηση παραμέτρων, μας επιτρέπει να αποκτήσουμε ένα υποβιβασμένης τάξης μοντέλο (ROM), με παρόμοια αναπαράσταση όταν εφαρμόζεται ο πίνακας προβολής:

$$(s(\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1\lambda_1 + \dots + \tilde{C}_n\lambda_n) - (\tilde{G}_0 + \tilde{G}_1\lambda_1 + \dots + \tilde{G}_n\lambda_n))x(s, \lambda) = \tilde{B}u(s) \quad (5.9)$$

$$y(s, \lambda) = \tilde{L}x(s, \lambda) \quad (5.10)$$

, όπου  $\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n \in R^{rxr}$ ,  $\tilde{G}_0, \tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n \in R^{rxr}$ ,  $\tilde{B} \in R^{rxp}$  και  $\tilde{L} \in R^{qxr}$ . είναι οι υποβιβασμένης τάξης μοντέλου (ROM) πίνακες, με  $r \ll N$

## 5.2 Κατασκευή του παραμετροποιημένου μειωμένου μοντέλου

Άλλο ένα σημείο που θα πρέπει να γίνει αναφορά, είναι η κατασκευή του παραμετροποιημένου μειωμένου μοντέλου ( Parameterized Reduced Model Generation ). Πολλές από αυτές τις επιλογές κατασκευής είναι ευρέως εφαρμόσιμες, καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν με οποιοδήποτε από τις βασικές μέθοδοι υπολογισμού της βάσης (Moment-Matching, Balanced Truncation, Time Domain POD, Frequency Domain POD, grid-based sampling, Latin hypercube sampling). [9]

Όλες οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή των ενιαίων γενικών πινάκων βάσης που θα αναφέρουμε, κάνουν χρήση της παραμέτρου  $p$ , η οποία ανήκει σε ένα μόνο πεδίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ .

### 5.2.1 Δειγματοληψία παραμέτρων

Σε αυτό το σημείο θα γίνει μια αναφορά στην δειγματοληψία των παραμέτρων (Parameter Sampling). Η επιλογή των σημείων δειγματοληψίας παραμέτρων, είναι σημαντικό ζητούμενο που προκύπτει σε όλες τις μεθόδους υπολογισμού της βάσης. Στη μέθοδο αντιστοίχισης ροπών ( Moment matching ), πρέπει κανείς να επιλέξει δείγματα παραμέτρων τα οποία βρίσκονται σε κατάλληλες ροπές (moments). Στην περίπτωση τώρα του balanced truncation, πρέπει κανείς να επιλέξει δείγματα παραμέτρων για τη δημιουργία του τοπικού συστήματος LTI στα οποία εφαρμόζεται η μέθοδος balanced truncation. Στην περίπτωση πάλι του Proper Orthogonal Decomposition (POD), πρέπει να γίνει η επιλογή των δειγμάτων παραμέτρων στα οποία υπολογίζονται οι ροπές (moments). [9]

Για προβλήματα με μικρό αριθμός παραμέτρων, μια δομημένη ή τυχαία μέθοδος δειγματοληψίας ( grid-based sampling ή Latin hypercube sampling) είναι η απλούστερη προσέγγιση, και σε συνδιασμό με τον επαρκή υψηλό αριθμό δειγμάτων, θα δημιουργήσει ένα πλούσιο σύνολο δεδομένων που καλύπτει το χώρο παραμέτρων.

Για μέτριο αριθμό παραμέτρων, η γρήγορη δειγματοληψία πλήρους πλέγματος (full grid sampling) είναι ιδιαίτερα ακριβή, αφού ο αριθμός των σημείων στο πλέγμα αυξάνεται εκθετικά με τη διάσταση  $d$ . Η δειγματοληψία με Latin hypercube sampling παραμένει σε χρήση, αν και βρίσκεται μεγάλος αριθμός από δείγματα από σημεία, ενδέχεται να χρειαστεί επιπλέον δείγματα από σημεία για να εξασφαλιστεί η επαρκής κάλυψη.



Για μέτριες διαστάσεις προβλήματα που παρουσιάζουν δομή (π.χ. ομαλότητα), μια προσέγγιση δειγματοληψίας αραιού πλέγματος (sparse grid sampling) θα είναι πιθανότατα άλλη μια αποτελεσματική λύση. Ωστόσο, όταν η διάσταση της παραμέτρου του χώρου είναι μεγάλη ( $d > 10$ ), καθίσταται ιδιαίτερα δύσκολο να εξισορροπηθεί το κόστος δειγματοληψίας με την κάλυψη του χώρου παραμέτρων. Αυτές οι περιπτώσεις απαιτούν πιο εξελιγμένες προσεγγίσεις δειγματοληψίας, όπως μια προσαρμοστική αναζήτηση (problem-aware adaptive search) με επίγνωση του προβλήματος του χώρου παραμέτρων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία η υλοποίηση γίνεται με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας (random sampling method)

## 5.2.2 Συνένωση της Βάσης

Μία από τις κοινές προσεγγίσεις για την δημιουργία των γενικών πινάκων βάσης  $V$  και  $W$ , είναι η συνένωση των τοπικών πινάκων βάσης (Concatenation of Basis) που λαμβάνονται για αρκετά δείγματα παραμέτρων  $p_1, \dots, p_K$ . Ας υποθέσουμε ότι το  $V_1, V_2, \dots, V_K$  και  $W_1, W_2, \dots, W_K$  είναι ο συμβολισμός από τους πίνακες τοπικής βάσης που αντιστοιχούν στο  $p_1, \dots, p_K$ . Τότε μπορεί κανείς να κατασκευάσει τους ενιαίους γενικούς πίνακες βάσης  $V$  και  $W$  χρησιμοποιώντας:

$$V = [V_1, V_2, \dots, V_K] \quad (5.11)$$

$$W = [W_1, W_2, \dots, W_K] \quad (5.12)$$

Ωστόσο, είναι πολύ πιθανό οι τοπικοί πίνακες να έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους το ένα το άλλο, οδηγώντας σε δυνητικά ανεπαρκείς ενιαίους γενικούς πίνακες βάσης  $V$  και  $W$ . Για την αποφυγή αυτής της κατάστασης, το βήμα της συνένωση των τοπικών πινάκων βάσης συνήθως ακολουθείται από έναν αλγόριθμο SVD ή μια rank-revealing QR παραγοντοποίηση, με στόχο την αφαίρεση αυτών των στοιχείων από τους ενιαίους γενικούς πίνακες βάσης  $V$  και  $W$ . Η ενέργεια αυτή οδηγεί τελικά, σε σφαιρικούς πίνακες βάσης, με ορθοκανονικές στήλες.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι στο θεωρητικό επίπεδο δεν θα είχε σημασία αν οι τοπικοί πίνακες  $V_i$  και  $W_i$  είναι ορθογώνιοι πριν από το βήμα συνένωσης. Αυτό συμβαίνει, γιατί το μειωμένο μοντέλο καθορίζεται από το εύρος και όχι από μια συγκεκριμένη βάση. Όπως φαίνεται και στην περίπτωση των υποχώρων Krylov, όπου η βάση ισχύος  $[b, Ab, \dots, A^{k-1}b]$  αντικαθίσταται από μια ορθογώνια βάση που υπολογίζεται μέσω μιας διαδικασίας Arnoldi.

Οι πίνακες τοπικής βάσης μπορούν να ληφθούν χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις βασικές μέθοδοι υπολογισμού (Moment-Matching, Balanced Truncation, Time Domain

POD, Frequency Domain POD, grid-based sampling, Latin hypercube sampling). Ωστόσο, η μέθοδος επιλογής έχει ως αποτέλεσμα διαφορετικές ιδιότητες στο μειωμένο μοντέλο.

Η προσέγγιση συνένωσης είναι ιδιαίτερα κατάλληλη, όταν οι τοπικοί βασικοί πίνακες λαμβάνονται με τη μέθοδο αντιστοίχισης ροπών ( Moment matching ).

Μετά τη συνένωση, το τελικό μειωμένο παραμετροποιημένο μοντέλο, που λαμβάνεται από τους γενικούς πίνακες βάσης, θα εξακολουθεί να παρεμβάλλει το αρχικό μοντέλο σε κάθε συνδυασμό σημείων παρεμβολής συχνότητας και παραμέτρων, που χρησιμοποιείται στην κατασκευή κάθε πίνακα τοπικής βάσης.

Υποθέτοντας ότι ο αλγόριθμος SVD εκτελέστηκε στους συνδυασμένους πίνακες και αφαίρεσε μόνο τις μηδενικές τιμές, τότε στην περίπτωση που ο ο αλγόριθμος SVD αφαιρεί κάποια μικρή μη μηδενική και μοναδική τιμή, κάτω από μια αριθμητική ανοχή, η παρεμβολή αυτή θα είναι κατά προσέγγιση.

Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την προσέγγιση της μεθόδου balanced truncation, όπου οι πίνακες  $V_i$  και  $W_i$  είναι οι πίνακες βάσης της μεθόδου balanced truncation στις τιμές των παραμέτρων  $p_i$ .

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μία φορά συνένωση και το μειωμένο μοντέλο που προκύπτει δεν είναι πλέον βέβαιο ότι θα είναι ισορροπημένο, ακόμη και στην τιμή της παραμέτρου  $p_i$ . Παρόλα αυτά, η συνένωση των τοπικών balanced truncation βάσεων, μπορεί να αποφέρει ένα καλό μειωμένο παραμετρικό μοντέλο, δεδομένου ότι ο υποχώρος μείωσης φέρει τις σημαντικές πληροφορίες βάσης για μεμονωμένες παραμέτρους.

# Κεφάλαιο 6

## Πειραματική διαδικασία

### 6.1 Περιγραφή της πειραματικής διαδικασίας

Στόχος της πειραματικής διαδικασίας είναι η προσομοίωση μιας γραμμής μεταφοράς με παραμέτρους τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του δικτύου μεταφοράς, με την εφαρμογή παράλληλα των μεθόδων υποβιβασμού τάξης μεγέθους MOR και τη χρήση εκτεταμένων υποχώρων Krylov ή moment matching σε αυτά τα πραγματικά κυκλώματα μεσαίας και μεγάλης κλίμακας.

Με τη χρήση της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων MNA μετατρέπουμε τα δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων συστημάτων σε γραμμικά συστήματα, στα οποία θα εφαρμόσουμε κατάλληλα και τις διάφορες παραμέτρους και στη συνέχεια θα γίνει χρήση του αλγόριθμου Arnoldi για να πετύχουμε τον υποβιβασμό της τάξης μεγέθους MOR και τελικά επίλυση των συστημάτων.

Δίκτυα τροφοδοσίας των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων της IBM θα είναι τα πραγματικά κυκλώματα που θα μελετήσουμε, με βασικό εργαλείο στην διαδικασία της υλοποίησης μας να είναι το εργαλείο MATLAB. Ένα εργαλείο, το οποίο είναι σχεδιασμένο για άμεση και γρήγορη υλοποίηση αλγορίθμων, με τη χρήση συναρτήσεων συστήματος για τις περισσότερες πράξεις μεταξύ πινάκων.

Στη συνέχεια παρατίθεται ένα παράδειγμα, που θα κάνει πιο κατανοητή την διαδικασία της προσομοίωσης.

Αρχικά, έχουμε μια γραμμή μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας μήκους  $l$  και πλάτους  $w$ , όπου

για το μήκος γραμμής ισχύει:

$$1000m \leq l \leq 5000m$$

και

$$5m \leq l \leq 10m$$



Σχήμα 6.1: Αγωγός ηλεκτρικής ενέργειας

Παίρνοντας τυχαία δειγματοληψία  $\kappa$  σημείων για το μήκος  $l$  και το πλάτος  $w$ , για  $\kappa=5$  παίρνω  $l_1 = 1023, l_2 = 2056, l_3 = 3950, l_4 = 2325, l_5 = 4155$  και  $w_1 = 5.14, w_2 = 8.56, w_3 = 6.23, w_4 = 9.11, w_5 = 7.44$

και για κάθε τυχαίο  $l$  και  $w$  που πήραμε κατασκευάζουμε τους αντίστοιχους πίνακες:  $G_1 = G(L_1, W_1), G_2 = G(L_2, W_2), G_3 = G(L_3, W_3), G_4 = G(L_4, W_4), G_5 = G(L_5, W_5)$  και  $C_1 = C(L_1, W_1), C_2 = C(L_2, W_2), C_3 = C(L_3, W_3), C_4 = C(L_4, W_4), C_5 = C(L_5, W_5)$

Στη συνέχεια, εφόσον έχουμε δημιουργήσει για όλα τα σημεία τους πίνακες  $G_1, G_2, \dots, G_k$  και αντίστοιχα τους πίνακες  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , με τη χρήση του αλγόριθμου Arnoldi προκύπτουν οι πίνακες  $V_1, V_2, \dots, V_k$

$$\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$$

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$$

και τελικά προκύπτει:

$$\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$$

με τις διαστάσεις των πινάκων που προκύπτουν να είναι της μορφής:

$$G_k, C_k \longrightarrow V_k : n \times r$$

και για  $r = 2$

$$G_1, C_1 \longrightarrow V_1 : n \times 2$$

$$G_2, C_2 \longrightarrow V_2 : n \times 2$$

$$G_3, C_3 \longrightarrow V_3 : n \times 2$$

$$G_4, C_4 \longrightarrow V_4 : n \times 2$$

$$G_5, C_5 \longrightarrow V_5 : n \times 2$$

Έπειτα, κάνουμε συνένωση (concatenate) τους πίνακες που προέκυψαν,  $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$

$$\{V_1; V_2; V_3; V_4; V_5\}$$

Επόμενη ενέργεια είναι η παραγοντοποίηση QR του συνενωμένου (concatenate) πίνακα, όπου τελικά μας δίνεται ο τελικός πίνακας προβολής (projection)  $V$ .

Και στο τέλος κάνουμε αντικατάσταση του πίνακα  $V$  ώστε να σχηματιστούν οι τελικοί reduced πίνακες:

$$\tilde{C} = V^T C V$$

$$\tilde{G} = V^T G V$$

$$\tilde{B} = V^T B$$

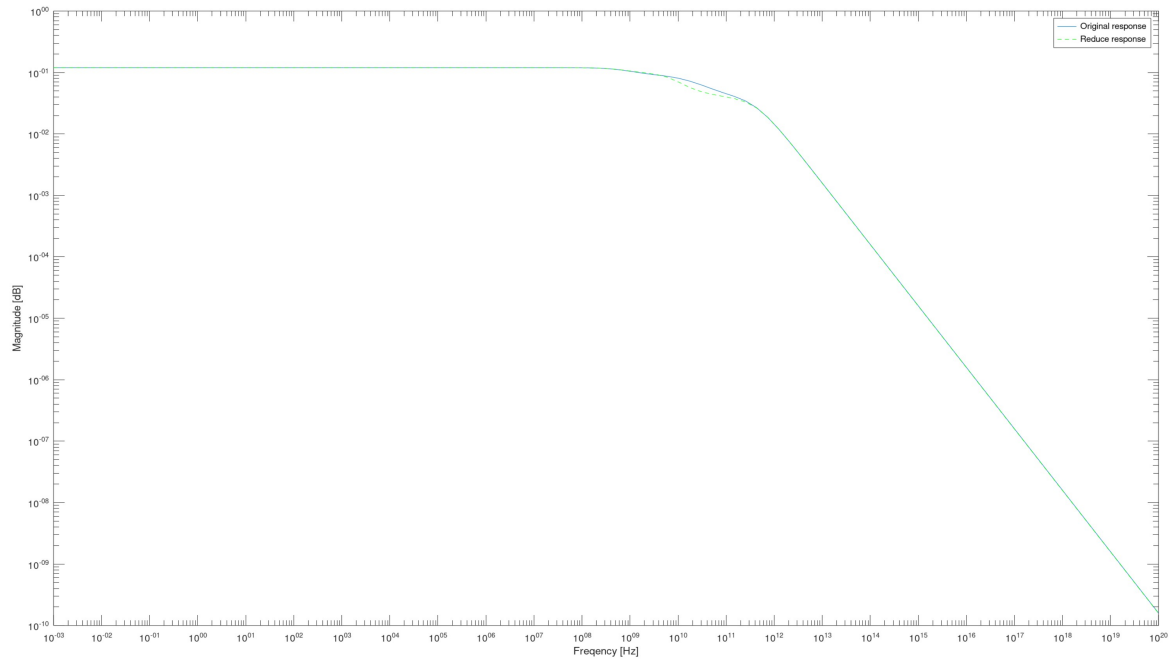
$$\tilde{L} = L V$$

## 6.2 Ενδεικτικά αποτελέσματα προσομοίωσης

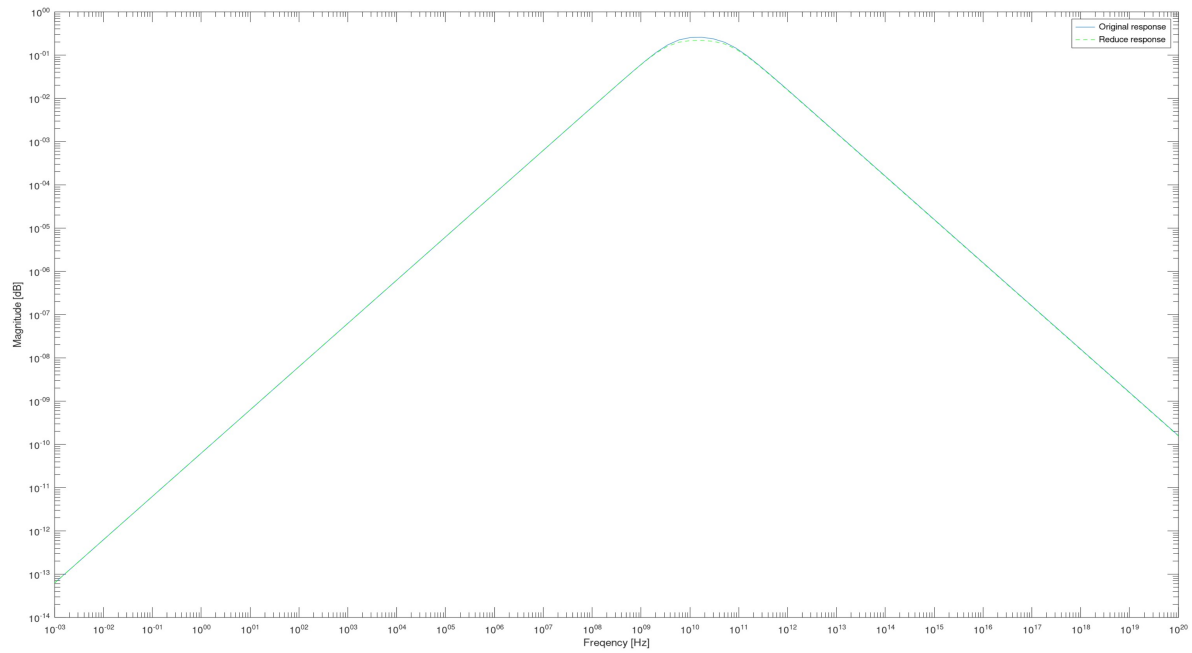
Για να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την πειραματική διαδικασία διαλέξαμε τα διαθέσιμα πλέγματα ενέργειας power grids της IBM [9]. Τα χαρακτηριστικά των παραπάνω πλεγμάτων ενέργειας μπορούν να συνοψιστούν στον παρακάτω πίνακα 6.1:

Αρχείο Εισόδου	εύρος συχνοτήτων	Αριθμός Moments	Αριθμός εισόδων
ibmpg1	$[10^{-3}, 10^{20}]$	10	(1,1)
ibmpg1	$[10^{-3}, 10^{20}]$	10	(2,2)
ibmpg1	$[10^{-3}, 10^{20}]$	10	(3,3)

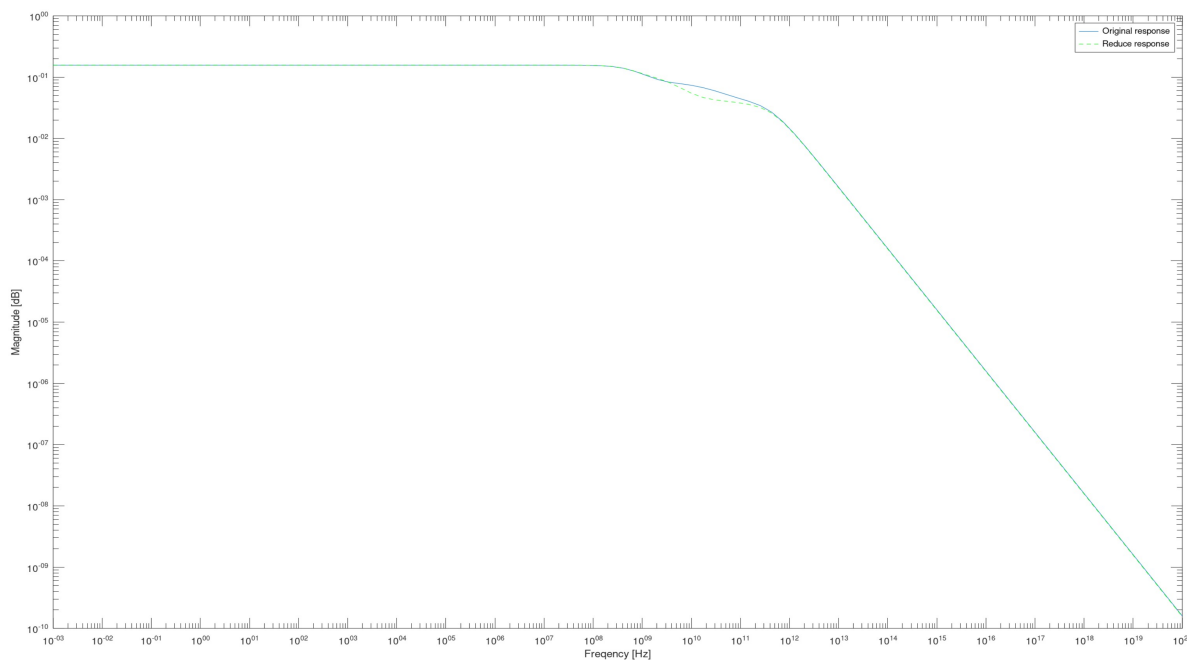
Πίνακας 6.1: Χαρακτηριστικά των Ενδεικτικών αποτελεσμάτα προσομοίωσης



Σχήμα 6.2: Σύγκριση της συνάρτησης μεταφοράς των αρχικών κυκλωμάτων σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς στα υποβιβασμένης τάξης μοντέλα (Reduced Order Models (ROMs)) με χρήση της μεθόδου moment matching στο εύρος συχνοτήτων  $[10^{-3}, 10^{20}]$  και αριθμό Moments 10, για το αρχείο εισόδου `ibmpg1` και για θύρες (1,1)



Σχήμα 6.3: Σύγκριση της συνάρτησης μεταφοράς των αρχικών κυκλωμάτων σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς στα υποβιβασμένης τάξης μοντέλα (Reduced Order Models (ROMs) με χρήση της μεθόδου moment matching στο εύρος συχνοτήτων  $[10^{-3}, 10^{20}]$  και αριθμό Moments 10, για το αρχείο εισόδου `ibmpg1` και για θύρες (2,2)



Σχήμα 6.4: Σύγκριση της συνάρτησης μεταφοράς των αρχικών κυκλωμάτων σε σχέση με τη συνάρτηση μεταφοράς στα υποβιβασμένης τάξης μοντέλα (Reduced Order Models (ROMs) με χρήση της μεθόδου moment matching στο εύρος συχνοτήτων  $[10^{-3}, 10^{20}]$  και αριθμό Moments 10, για το αρχείο εισόδου `ibmpg1` και για θύρες (3,3)

### 6.3 Παρατηρήσεις

Για την διαδικασία των προσομοιώσεων και την εξαγωγή αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα Matlab και πιο συγκεκριμένα η έκδοση R2017a, σε συσκευή με προδιαγραφές:

CPU	Intel(R) Core(TM) i5-5200U CPU @ 2.20GHz
Memory(RAM)	8,00 GB
OS	Microsoft Windows 10
Kernel	64-based PC

Πίνακας 6.2: Χαρακτηριστικά του συστήματος



## Κεφάλαιο 7

### Επίλογος και Συμπεράσματα

Μέσα από την παρούσα διπλωματική εργασία έγινε μελέτη μιας από τις πλέον σύγχρονες και ιδιαίτερα δημοφιλείς σε πρακτικές εφαρμογές μεθόδου, που απασχολεί την έρευνα τα τελευταία χρόνια. Αυτό συμβαίνει, γιατί είναι εύκολο να εφαρμοστεί, χρειάζεται λιγότερους υπολογισμούς σε σχέση με άλλες αντίστοιχες μεθόδους για τον υποβιβασμό τάξης μοντέλου παραμετρικού κυκλώματος. Επομένως, είναι κατάλληλη για τη μείωση των υψηλών διαστάσεων συστημάτων που προκύπτουν συνήθως στο σχεδιασμό και την ανάλυση κυκλωμάτων VLSI.

Η μελέτη επικεντρώθηκε στην διαδικασία υλοποίησης μιας προσομοίωσης, με τα εργαλεία που χρειάζεται για να γίνει, καθώς και ο τρόπος μοντελοποίησης ενός κυκλώματος που δίνεται μέσα από ένα αρχείο περιγραφής κυκλώματος. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στον τρόπο με τον οποίο μπορούν αυτά τα κυκλώματα να λυθούν γρηγορότερα και με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων πόρων του συστήματος.

Με βάση τη μελέτη που έγινε πάνω στη παραμετρική μέθοδο υποβιβασμού τάξης μοντέλου (PMOR) με βάση τη μέθοδο moment matching, παρατηρήθηκε πως με τις δοθείσες παραμέτρους και με την κατάλληλη επιλογή των moments στην Arnoldi, επιτυγχάνεται μείωση τάξης μοντέλου, με το σύστημα που προέκυψε από αυτή τη διαδικασία, να έχει όμοια συμπεριφορά με αυτή του αρχικού. Τέλος, έγιναν πειράματα και διαπιστώθηκε πως υπάρχουν τεχνικές, σύμφωνα με τις οποίες μπορούν να επιτευχθούν αποτελέσματα πολύ κοντά σ' αυτά των αρχικών κυκλωμάτων, όσο μεγάλος και αν είναι ο αριθμός των ports.

## 7.1 Μελλοντική προέκταση

Πιθανή μελλοντική προέκταση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα μπορούσε να είναι η παραλληλοποίηση ορισμένων σταδίων της υλοποίησης, προκειμένου να έχουμε και από εκεί γρηγορότερα αποτελέσματα.

# Βιβλιογραφία

- [1] Νίκος Ι. Μάργαρης. *Ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων*. Τζιόλα, 2009.
- [2] Ορθοκανονικές βάσεις. [https://eclass.aueb.gr/modules/document/file.php/INF169/mathematics\\_ii/epeaek\\_grammiki/LAkef2/linalgkef2\(5\).html](https://eclass.aueb.gr/modules/document/file.php/INF169/mathematics_ii/epeaek_grammiki/LAkef2/linalgkef2(5).html). Ανακτήθηκε: 24-1-2022.
- [3] Crysostomos A. Chatzigeorgiou. Model order reduction techniques for circuits and systems with large number of ports. Master's thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Thessaly, February 2018.
- [4] P. Gunupudi, R. Khazaka, and M. Nakhla. Analysis of transmission line circuits using multi-dimensional model reduction techniques. *IEEE 10th Topical Meeting on Electrical Performance of Electronic Packaging (Cat. No. 01TH8565)*, pages 43–46, July 2001. DOI:10.1109/EPEP.2001.967607.
- [5] S. Gugercin, A. C. Antoulas, and C. Beattie. Model reduction for large-scale linear dynamical systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 30(2):609–638, January 2008. DOI:10.1137/060666123.
- [6] Ngoc Kien Vu and Hong Quang Nguyen. Model order reduction algorithm based on preserving dominant poles. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 19(6):2047–2058, June 2021. DOI:10.1007/s12555-019-0990-8.
- [7] Kuan Lu, Kangyu Zhang, Haopeng Zhang, Xiaohui Gu, Yulin Jin, Shibo Zhao, Chao Fu, and Yongfeng Yang. A review of model order reduction methods for large-scale structure systems. *Shock and Vibration*, 2021:19, May 2021. DOI:10.1155/2021/6631180.

- [8] Dmitry Missiuro Vasilyev. *Theoretical and practical aspects of linear and nonlinear model order reduction techniques*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, November 2008.
- [9] Peter Benner, Serkan Gugercin, and Karen Willcox. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, November 2015.
- [10] Imad M. Jaimoukha and Ebrahim M. Kasenally. Krylov subspace methods for solving large lyapunov equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(1):227–251, October 1994. DOI:10.1137/0731012.
- [11] Athanasios C. Antoulas. Approximation of large-scale dynamical systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, January 2005. DOI:10.1137/1.9780898718713.
- [12] Sani R. Nassif. Power grid analysis benchmarks. In *Proceedings of the 2008 Asia and South Pacific Design Automation Conference, ASP-DAC '08*, pages 376–381, January 2008.
- [13] Mohammad Umar Rehman. *Krylov Subspace Methods in Model Order Reduction*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering, IIT Delhi, March 2016.
- [14] Vladimir Druskin and Leonid Knizhnerman. Extended krylov subspaces: Approximation of the matrix square root and related functions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(3):755–771, April 1998. DOI:10.1137/S0895479895292400.
- [15] Lihong Feng and Peter Benner. *A robust algorithm for parametric model order reduction based on implicit moment matching*. Springer, Switzerland, January 2014. DOI:10.1007/978-3-319-02090-7-6.
- [16] D.S. Weile, E. Michielssen, E. Grimme, and K. Gallivan. A method for generating rational interpolant reduced order models of two-parameter linear systems. *Applied Mathematics Letters*, 12(5):93–102, July 1999. DOI:10.1016/S0893-9659(99)00063-4.
- [17] Rudy Eid, Behnam Salimbahrami, Boris Lohmann, Evgenii B Rudnyi, and Jan G Korvink. Parametric order reduction of proportionally damped second-order systems. *Sensors and Materials*, 19(3):149–164, April 2007.

- [18] Lihong Feng, Yao Yue, Nicodemus Banagaaya, Peter Meuris, Wim Schoenmaker, and Peter Benner. Parametric modeling and model order reduction for (electro-)thermal analysis of nanoelectronic structures. *Journal of Mathematics in Industry*, 6(1):10, December 2016. DOI:10.1186/s13362-016-0030-8.
- [19] A. Bentbib, K. Jbilou, and E. M. Sadek. On some krylov subspace based methods for large-scale nonsymmetric algebraic riccati problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(10):2555–2565, August 2015. DOI:10.1016/j.camwa.2015.09.025.
- [20] Abid Bazaz, Mashuq Nabi, and Janardhanan Sivaramakrishnan. A review of parametric model order reduction techniques. *IEEE 2012 IEEE International Conference on Signal Processing, Computing and Control (ISPCC)*, November 2012. DOI:10.1109/ISPCC.2012.6224356.
- [21] Timothy A. Davis, Sivasankaran Rajamanickam, and Wissam M. Sid-Lakhdar. A survey of direct methods for sparse linear systems. *Acta Numerica*, 25:383–566, May 2016. DOI:10.1017/S0962492916000076.
- [22] George Floros. *Order reduction of large thermal and electrical models with system-theoretic techniques and matrix equation algorithms*. PhD thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Thessaly, November 2019. DOI:10.12681/eadd/46633.
- [23] P.K. Gunupudi, R. Khazaka, M.S. Nakhla, T. Smy, and D. Celo. Passive parameterized time-domain macromodels for high-speed transmission-line networks. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 51(12):2347–2354, September 2003. DOI:10.1109/TMTT.2003.820169.