

**Π.Μ.Σ Εφαρμοσμένη Οικονομική
Σχολή Οικονομικών και Διοικητικών Επιστημών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**



**ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΣΤΑΔΙΩΝ
ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΩΝ ΑΛΥΣΙΔΩΝ:
Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΑΥΤΟΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΤΕΛΙΚΟΥ
ΠΡΟΪΟΝΤΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ**

Διπλωματική Εργασία

Αντωνία Αντωνίου

Επιβλέπων Καθηγητής

Ηλίας Σ. Κεβόρκ

Υπεύθυνη Δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης, έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Τέλος, βεβαιώνω ότι αυτή η διπλωματική εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος Μεταπτυχιακών σπουδών Εφαρμοσμένης Οικονομικής του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Αντωνία Αντωνίου

Βόλος, Φεβρουάριος 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Καθηγητή του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας κ. Ηλία Κεβόρκ. Η πραγματοποίηση της παρούσας εργασίας κατέστη δυνατή χάρη στην πολύτιμη βοήθεια του, την καθοδήγηση και την υποστήριξη που μου παρείχε τόσο επιστημονικά όσο και ηθικά. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους δικούς μου ανθρώπους για την υποστήριξη.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Abstract	5
Εισαγωγή.....	7
Κεφάλαιο 1: «Εφοδιαστική αλυσίδα»	10
1.1 Η έννοια της Εφοδιαστικής Αλυσίδας.....	11
1.1.1 Ιστορική αναδρομή.....	12
1.1.2 Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας	12
1.1.3 Λειτουργίες μιας Εφοδιαστικής Αλυσίδας.....	14
1.2 Η Μέθοδος Αποθεματικής Πολιτικής Order-Up-To level (R,S).....	16
1.3 Το Φαινόμενο Bullwhip.....	17
1.3.1 Ιστορική αναδρομή του Φαινομένου Bullwhip	17
1.3.2 Οι βασικές αιτίες του φαινομένου Bullwhip.....	19
Κεφάλαιο 2: «Βιβλιογραφική Ανασκόπηση».....	22
2.1 Στοιχεία της μοντελοποίησης του φαινομένου Bullwhip	22
2.1.1 Ζήτηση.....	22
2.1.2 Πρόβλεψη	23
2.1.3 Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δευτέρου βαθμού AR(2)	24
2.1.4 Υπόδειγμα ARMA(2,2).....	25
2.2 Η Αξία της πληροφορίας	26
2.2.1 Η επίδραση της Ανταλλαγής Πληροφοριών στο φαινόμενο Bullwhip.....	27
2.2.2 Διαφορετικά επίπεδα ποιότητας πληροφοριών, στην περίπτωση ανταλλαγής πληροφορίας	30
Κεφάλαιο 3: «Το φαινόμενο Bullwhip στην περίπτωση του Λιανοπωλητή»	33
3.1 Η περίπτωση που $LR=1$	35
3.2 Η περίπτωση που $LR=2$	37
3.3 Η περίπτωση που $LR=3$	39
Κεφάλαιο 4 :«Το φαινόμενο Bullwhip στην περίπτωση του Προμηθευτή».....	42
4.1 Η περίπτωση που $LS=1$	43
4.2 Η περίπτωση που $LS=2$	46
4.3 Η περίπτωση που $LS=3$	49
Κεφάλαιο 5: «Υπολογισμός του φαινομένου Bullwhip».....	54
5.1 Η περίπτωση του Λιανοπωλητή.....	54
5.2 Η περίπτωση του Προμηθευτή.....	58
5.2.1 Πρώτη περίπτωση, όπου $BWt = Var(qtS, IS)Var(dt)$	58
5.2.2 Δεύτερη περίπτωση, όπου $BWt = Var(qtS, IS)Var(qtR)$	62
Κεφάλαιο 6: «Συμπεράσματα».....	65

Βιβλιογραφία.....	68
Παράρτημα.....	72

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται μια ειδική περίπτωση του συστήματος περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, η πολιτική Order-up-to level (OUT) για ένα προϊόν και για μία εφοδιαστική αλυσίδα αποτελούμενη από ένα λιανοπωλητή και ένα προμηθευτή. Η ζήτηση που καλούνται να ικανοποιήσουν τα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας ακολουθεί μία στάσιμη διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται ότι ο λιανοπωλητής ανταποκρίνεται σε ένα υπόδειγμα ζήτησης από τους τελικούς καταναλωτές AR(2), οπότε με πολιτική παραγγελιών OUT προς τον προμηθευτή, αποδεικνύεται ότι ο τελευταίος ικανοποιεί μια μορφή ζήτησης της μορφής ARMA (2,2). Στην ανάλυση που πραγματοποιείται ενσωματώνεται η στρατηγική της πλήρους ανταλλαγής πληροφορήσης των δεδομένων ζήτησης των τελικών καταναλωτών (Information Sharing-IS) μεταξύ του λιανοπωλητή και του προμηθευτή. Βάσει της στρατηγικής αυτής (IS), ο προμηθευτής γνωρίζει τα διαχρονικά στοιχεία ζήτησης του λιανοπωλητή καθώς και τις τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος AR(2). Επιπλέον, εξετάζεται ο βαθμός μεταβολής της ζήτησης καθώς προχωράμε προς τα ανώτερα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας (από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή), το γνωστό φαινόμενο Bullwhip. Η προσέγγιση του προβλήματος πραγματοποιείται μέσω μαθηματικοστατιστικής ανάλυσης και τα αποτελέσματα δείχνουν πως μεταβάλλεται η ένταση του φαινομένου Bullwhip όταν αλλάζει ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας σε διαφορετικές τιμές των παραμέτρων των υποδειγμάτων ζήτησης του λιανοπωλητή και του προμηθευτή.

Abstract

In this paper we examine a special case of the system of periodic inventory inspection, the Order-up-to level (OUT) policy for a product and for a supply chain consisting of a retailer and a supplier. The demand that the members of the supply chain have to satisfy follows a static process. More specifically, it is considered that the retailer responds to a model of demand by final consumers AR(2), therefore with an OUT order policy towards the supplier, it is proved that the latter satisfies a form of demand of the form of ARMA (2,2). In the analysis that takes place, we incorporate the strategy of full exchange of information of the demand data of final consumers (Information Sharing-IS) between the retailer and the supplier. Based on

this strategy (IS), the supplier knows the data of demand of the retailer overtime as well as the values of the parameters of the AR(2) model. Moreover, we examine the rate of demand as we proceed towards the highest parts of the supply chain (from the retailer to the supplier), the well-known Bullwhip phenomenon. We approach the problem through a mathematical and statistical analysis and our results show that the intensity of the Bullwhip phenomenon changes when the time of delivery of the order changes to various values of the parameters of the models of demand of the retailer and the supplier.

Εισαγωγή

Ο όρος της Εφοδιαστικής Αλυσίδας σε συνδυασμό με το σενάριο της Ανταλλαγής Πληροφόρησης στις Εφοδιαστικές Αλυσίδες δύο σταδίων, έχουν απασχολήσει έντονα την επιστημονική κοινότητα και τον χώρο της διοίκησης τα τελευταία χρόνια. Έχουν δοθεί ποικίλοι ορισμοί για την Εφοδιαστική Αλυσίδα, με τον Lambert (2004) να ορίζει την εφοδιαστική αλυσίδα ως διαδικασία σχεδιασμού, εφαρμογής και ελέγχου βασικών διαδικασιών, που μετατρέπουν τις εισροές από τους προμηθευτές σε προϊόντα και υπηρεσίες προσθέτοντας τους αξία, με σκοπό να παραδοθούν στους πελάτες.

Σύμφωνα με έρευνες που έχουν γίνει, η πρόβλεψη της μελλοντικής ζήτησης είναι ιδιαίτερα σημαντική για οποιοδήποτε μέλος της εφοδιαστικής αλυσίδας, καθώς οι ακριβείς προβλέψεις της μελλοντικής ζήτησης μπορούν να οδηγήσουν σε υψηλά επίπεδα εξυπηρέτησης πελατών και χαμηλά αποθεματικά κόστη.

Προκειμένου να επιτευχθούν οι προβλέψεις με μεγαλύτερη ακρίβεια, είναι σημαντικό τα μέλη μιας εφοδιαστικής αλυσίδας να λάβουν την πρωτοβουλία της ανταλλαγής πληροφοριών που αφορούν την ζήτηση, που παρατηρείται από την πλευρά των καταναλωτών στα σημεία πώλησης. Τα τελευταία χρόνια η ερευνητική προσπάθεια στον τομέα αυτό έχει επικεντρωθεί στην ποσοτικοποίηση της αξίας που μπορεί να έχει μία τέτοια πληροφορία, κυρίως μέσω του φαινομένου Bullwhip , αλλά και στους παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν τα οφέλη της ανταλλαγής πληροφοριών.

Το φαινόμενο Bullwhip αναφέρεται ως το φαινόμενο όπου οι διακυμάνσεις στην ακολουθία των παραγγελιών είναι συνήθως μεγαλύτερη όσο προχωράμε στα ανώτερα μέλη της εφοδιαστικής αλυσίδας (π.χ από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή, από τον προμηθευτή προς τον κατασκευαστή κ.οκ). Αυτό το φαινόμενο εμφανίζεται επανειλημμένα σε βιομηχανικές δραστηριότητες, μακροοικονομικά δεδομένα και προσομοιώσεις όπως το γνωστό παιχνίδι μπύρας. Το φαινόμενο Bullwhip δημιουργεί διαστρέβλωση του μεγέθους της ζήτησης που αντιμετωπίζει το κάθε μέλος, γεγονός που οφείλεται πρωτίστως στις μεθόδους πρόβλεψης της ζήτησης που διενεργεί το κάθε μέλος από πλευράς του και στη μέθοδο διαμόρφωσης του μεγέθους των παραγγελιών που θα προβεί. Υπό τις συνθήκες αυτές η διαστρέβλωση της ζήτησης δημιουργεί πολλά προβλήματα, όπως είναι οι μη αξιόπιστες προβλέψεις της ζήτησης οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν είτε σε διατήρηση υπερβολικά υψηλών μεγεθών

αποθεμάτων, είτε στην αδυναμία των πελατών να έχουν το προϊόν την στιγμή που το επιθυμούν.

Για την ποσοτικοποίηση τόσο του φαινομένου Bullwhip, όσο και του οφέλους από την ανταλλαγή πληροφορίας, που αφορά στοιχεία της ζήτησης η οποία εκδηλώνεται από τους τελικούς καταναλωτές στα σημεία πώλησης, οι έρευνες που υπάρχουν στην βιβλιογραφία επικεντρώνουν το ενδιαφέρον τους στη μελέτη μιας εφοδιαστικής αλυσίδας δύο σταδίων, όπου το κατώτερο στάδιο αφορά τον λιανοπωλητή (στάδιο 1) και το ανώτερο να αναφέρεται στον προμηθευτή (στάδιο 2). Η τελική ζήτηση ανά χρονική περίοδο στο σημείο πώλησης διαμορφώνεται σύμφωνα με ένα υπόδειγμα ARIMA (p,q), ενώ το μέγεθος της παραγγελίας που δίνεται από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή και από τον προμηθευτή στον κατασκευαστή διαμορφώνεται σύμφωνα με την πολιτική παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order-up-to-level), το οποίο αποτελεί ειδική περίπτωση των συστημάτων περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος. Τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει μέχρι σήμερα επιβεβαιώνουν ότι η ανταλλαγή πληροφορίας που αφορά στοιχεία της τελικής ζήτησης από τους καταναλωτές οδηγούν σε σημαντική μείωση του μεγέθους των αποθεμάτων που κρατά ο προμηθευτής και κατ' επέκταση μείωση του κόστους.

Στην παρούσα εργασία, εξετάζεται η αξία της Ανταλλαγής Πληροφορίας σε μια εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων, όταν η ζήτηση από τους τελικούς καταναλωτές στον λιανοπωλητή ακολουθεί το στάσιμο υπόδειγμα AR(2). Θεωρώντας ότι (α) το μέγεθος της παραγγελίας που δίνεται από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή διαμορφώνεται σύμφωνα με την πολιτική «παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order up to level) και (β) ότι ο προμηθευτής γνωρίζει τα στοιχεία ζήτησης του λιανοπωλητή και τις τιμές των παραμέτρων του AR(2), αποδεικνύεται ότι οι παραγγελίες που δίνονται από τον λιανοπωλητή προς τον προμηθευτή (δηλαδή η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής) περιγράφεται από το υπόδειγμα ARMA (2,2). Πιο συγκεκριμένα η διάρθρωση της παρούσας εργασίας έχει ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του όρου της εφοδιαστικής αλυσίδας και η ιστορική της αναδρομή. Επίσης αναφέρεται η σημαντικότητα της σωστής διαχείρισης μιας εφοδιαστικής αλυσίδας και οι βασικές λειτουργίες της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η βιβλιογραφική επισκόπηση σχετικά με έρευνες που αφορούν το φαινόμενο Bullwhip. Επιπλέον γίνεται εμφανής η σημαντικότητα της ανταλλαγής πληροφοριών, καθώς και η σημασία της ποιότητας των πληροφοριών.

Στο τρίτο κεφάλαιο, διενεργούνται όλες οι απαιτούμενες αποδείξεις σχετικά με τον προσδιορισμό του μεγέθους των παραγγελιών που δίνει ο λιανοπωλητής στον προμηθευτή για διαφορετικούς χρόνους παράδοσης των παραγγελιών αυτών, προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί το φαινόμενο Bullwhip από τον λιανοπωλητή προς τον προμηθευτή.

Ομοίως στο τέταρτο κεφάλαιο, διενεργούνται όλες οι απαιτούμενες αποδείξεις σχετικά με τον προσδιορισμό του μεγέθους των παραγγελιών που δίνει ο προμηθευτής στον κατασκευαστή για διαφορετικούς χρόνους παράδοσης των παραγγελιών αυτών, προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί και πάλι το φαινόμενο Bullwhip μεταξύ του προμηθευτή και του κατασκευαστή. Να αναφερθεί εδώ ότι η ανάλυση βασίζεται στην υπόθεση ότι ο προμηθευτής γνωρίζει τα στοιχεία ζήτησης του λιανοπωλητή και τις τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος ζήτησης AR(2).

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο, μελετάται η ένταση του φαινομένου Bullwhip μέσω υπολογισμού του αντίστοιχου λόγου, για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του υποδείγματος AR(2) και για διαφορετικούς χρόνους παράδοσης της παραγγελίας από τον προμηθευτή στον λιανοπωλητή, παραθέτοντας και αναλύοντας τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης τα οποία οδηγούν και στα τελικά συμπεράσματα της παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 1: «Εφοδιαστική αλυσίδα»

Πίνακας 1: Ορολογία και Συμβολισμοί

d_t	:	Το μέγεθος της ζήτησης την χρονική περίοδο t .
$H_t = \{\dots, d_{t-2}, d_{t-1}, d_t\}$:	Το σύνολο των διαθέσιμων στοιχείων για το μέγεθος της ζήτησης, όπως αυτή διαμορφώνεται από τους καταναλωτές για το προϊόν, τις παρελθούσες χρονικές περιόδους
$\hat{d}_{t+i H_t}$:	Η πρόβλεψη του πραγματικού μεγέθους της ζήτησης d_{t+i} , με δεδομένο ότι η πρόβλεψη αυτή διενεργείται την χρονική περίοδο t με διαθέσιμο το σύνολο H_t
$\hat{D}_{t H_t} = \sum_{i=1}^l \hat{d}_{t+i H_t}$:	Πρόβλεψη η οποία διενεργείται την χρονική περίοδο t , για την συνολική ζήτηση που θα εμφανιστεί το χρονικό διάστημα $l = P + L$.
$e_{t+i H_t} = d_{t+i} - \hat{d}_{t+i H_t}$:	Το σφάλμα πρόβλεψης για την πραγματική ζήτηση d_{t+i} , όταν η πρόβλεψη αυτή διενεργείται την χρονική περίοδο t με διαθέσιμο το σύνολο H_t
Y_t	:	Στοχευμένο επίπεδο αποθέματος την χρονική περίοδο t .
η	:	Επίπεδο εξυπηρέτησης (κύκλου).
P	:	Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών επιθεωρήσεων του επιπέδου του αποθέματος
L	:	Ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας
z_n	:	Η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής υπολογιζόμενη στην πιθανότητα η
$V_{t H_t}$:	Διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $\sum_{i=1}^L e_{t+i H_t}$
μ	:	Μέσος
γ_0	:	Διακύμανση
γ_s	:	Αυτοσυνδιακύμανση
q_t	:	Το μέγεθος της παραγγελίας
ρ_s	:	Συντελεστές αυτοσυσχέτισης

1.1 Η έννοια της Εφοδιαστικής Αλυσίδας

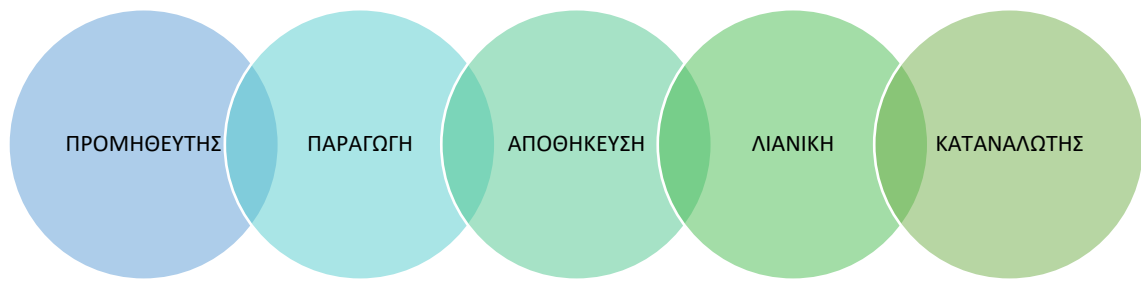
Στην σύγχρονη αγορά υπάρχει η ανάγκη των εταιρειών να γίνονται περισσότερο ανταγωνιστικές, να συνδυάζουν δηλαδή το χαμηλό κόστος με την ποιότητα, την ταχύτητα, την ευελιξία και την καινοτομία στις υπηρεσίες τους. Έτσι είναι πλέον απαραίτητη η ανάπτυξη συστημάτων logistics και εφοδιαστικών αλυσίδων που να μπορούν να επιτυγχάνουν το στόχο κάθε επιχείρησης, δηλαδή την μείωση του συνολικού κόστους τους και την αύξηση του κέρδους τους. Με τον τρόπο αυτό, θα καταφέρουν να είναι ανταγωνιστικές στις αυξανόμενες απαιτήσεις της παγκόσμιας αγοράς.

Η Εφοδιαστική αλυσίδα ορίζεται ως η διαδικασία σχεδιασμού, εφαρμογής και ελέγχου βασικών διαδικασιών, που μετατρέπουν τις εισροές από τους προμηθευτές σε προϊόντα και υπηρεσίες προσθέτοντας τους αξία, με σκοπό να παραδοθούν στους πελάτες. (Lambert, 2004).

Κάποιοι ακόμα ορισμοί που έχουν δοθεί είναι:

- Όπως έχει αναφερθεί από τον Beamon (1998), μια εφοδιαστική αλυσίδα παρουσιάζει την δομή της διαδικασίας παραγωγής, όπου οι πρώτες ύλες μετατρέπονται σε τελικό προϊόν, το οποίο παραδίδεται στους πελάτες (καταναλωτές).
- Ακόμα, ο Bridgfield Group (2006), ορίζει την εφοδιαστική αλυσίδα ως ένα συνδεδεμένο σύνολο σταδίων και διαδικασιών, που ξεκινά με τον προμηθευτή πρώτων υλών και καταλήγει στην παράδοση των τελικών προϊόντων στον καταναλωτή.
- Επιπλέον, ο Pienaar. (2009b) ορίζει την εφοδιαστική αλυσίδα ως «μια γενική περιγραφή της διαδικασίας παραγωγής», που περιλαμβάνει τις διαδικασίες μετατροπής των πρώτων υλών σε τελικά προϊόντα και τη μεταφορά τους στον καταναλωτή.

Οι ορισμοί αυτοί επικεντρώνονται στους βασικούς καθοριστικούς παράγοντες μιας αποτελεσματικής αλυσίδας εφοδιασμού, όπου οι πόροι (πρώτες ύλες) σε συνδυασμό με μια σειρά από δραστηριότητες προστιθέμενης αξίας δημιουργούν το τελικό προϊόν, το οποίο μεταφέρεται στους τελικούς καταναλωτές.



Σχήμα 1.1 Η ΔΟΜΗ ΜΙΑΣ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

1.1.1 Ιστορική αναδρομή

Η κινητήρια δύναμη ώστε να αναπτυχθεί ένα πιο γρήγορο και αξιόπιστο μοντέλο εφοδιασμού ήταν η Α και Β βιομηχανικές επαναστάσεις. Η Β' βιομηχανική επανάσταση, ή belle époque όπως ονομάστηκε, κατέληξε στην μεγάλη σύρραξη του Α' και Β' παγκοσμίου πολέμου. Μέσα από τις εξελίξεις της εποχής εκείνης στην στρατιωτική διοίκηση, προέκυψαν μεγάλα επιτεύγματα της σύγχρονης διοίκησης (όπως η επιχειρησιακή έρευνα, πλήθος μαθηματικών μοντέλων για την διευκόλυνση των υπολογισμών, η επιστημονική διοίκηση της εφοδιαστικής αλυσίδας των στρατευμάτων) (Drucker, 1958).

Κατά την διάρκεια της δεκαετίας του 1960 έγινε αντιληπτή η ανάγκη ανάπτυξης της εφοδιαστικής αλυσίδας σε επιχειρηματικό αλλά και επιστημονικό επίπεδο. Η διαχειριστική πολυαρχία, η πολυπλοκότητα στην διοίκηση αλλά και οι λάθος επιλογές στις προμήθειες και την αποθήκευση, είχαν ως αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους και την αναποτελεσματική εξυπηρέτηση των πελατών. (Drucker, 1958).

Για να μπορέσουν να αντιμετωπισθούν τα εσωτερικά προβλήματα σε ένα διαρκώς αυξανόμενο ανταγωνιστικό περιβάλλον, που έβαινε στην παγκοσμιοποίηση, ήταν απαραίτητος ο αποτελεσματικός συντονισμός σε όλα τα επίπεδα (Rushton et al, 2014).

1.1.2 Διαχείριση Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Κάποιοι από τους ορισμούς που έχουν δοθεί στη βιβλιογραφία για την έννοια της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας είναι:

- Οι Lee et al, (1997) αναφέρουν ότι η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας /Supply Chain Management (SCM) συμπεριλαμβάνει όλες τις διαδικασίες που πραγματοποιούνται, δηλαδή την απόκτηση των πρώτων υλών, την

μεταποίηση σε ενδιάμεσα και τελικά προϊόντα και την παράδοση του τελικού προϊόντος στους πελάτες μέσω ενός συστήματος διανομής.

- Επιπλέον το Συμβούλιο Επαγγελματιών Διαχείρισης Εφοδιαστικής Αλυσίδας (2009) υποστηρίζει ότι η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας (SCM) περιλαμβάνει το σχεδιασμό και την διαχείριση όλων των δραστηριοτήτων που σχετίζονται με την προμήθεια, την αγορά, τον μετασχηματισμό και όλες τις δραστηριότητες διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας. Κυρίως, περιλαμβάνει τον συντονισμό και την συνεργασία με τα επιμέρους στάδια, που μπορούν να είναι προμηθευτές, διαμεσολαβητές, τρίτοι πάροχοι υπηρεσιών και πελάτες.

Το σχήμα 1.2 παρουσιάζει τα συστατικά της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας. Αρχικά στο πρώτο πεδίο είναι η βελτίωση της ανταγωνιστικότητας (competitiveness) των επιχειρήσεων σε μια εφοδιαστική αλυσίδα, κάτι που είναι ο βασικότερος σκοπός της και επιτυγχάνεται με την καλύτερη δυνατή εξυπηρέτηση του πελάτη (customer service). Δύο βασικοί παράγοντες στους οποίους «στηρίζεται» η ανταγωνιστικότητα είναι οι ολοκληρωμένες εργασιακές μονάδες (integration of organizational units) και ο συντονισμός των ροών (coordination of flows).

Κάποια επίσης σημαντικά συστατικά είναι:

- η επιλογή των συνεργατών σε μια αλυσίδα εφοδιασμού (choice of partners)
- η αποδοτική συνεργασία μεταξύ των επιχειρήσεων (network of organizations and inter-organizational collaboration)
- η ικανή ηγεσία (leadership).

Στο δεύτερο τμήμα κάποιοι επίσης σημαντικοί παράγοντες είναι:

- η χρήση της τεχνολογίας στην πληροφορική και την επικοινωνία (use of information and communication technology)
- ο προσανατολισμός στις διαδικασίες και ο προηγμένος σχεδιασμός (advanced planning).

Τέλος η έννοια της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας θεμελιώνεται στα logistics, την επιχειρησιακή έρευνα (operations research) και την οργανωτική θεωρία (organizational theory) (Stadtler, 2005).

Ο βασικός στόχος στην διαχείριση μιας εφοδιαστικής αλυσίδας είναι η ικανοποίηση των πελατών μιας επιχείρησης. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός και να είναι

αποτελεσματική μια αλυσίδα εφοδιασμού είναι απαραίτητος ο συντονισμός και η επικοινωνία μεταξύ των προμηθευτών και των κατασκευαστών (Trkman, et al, 2005).



Σχήμα 1.2: Τα συστατικά της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας

Πηγή: (Stadtler., 2005)

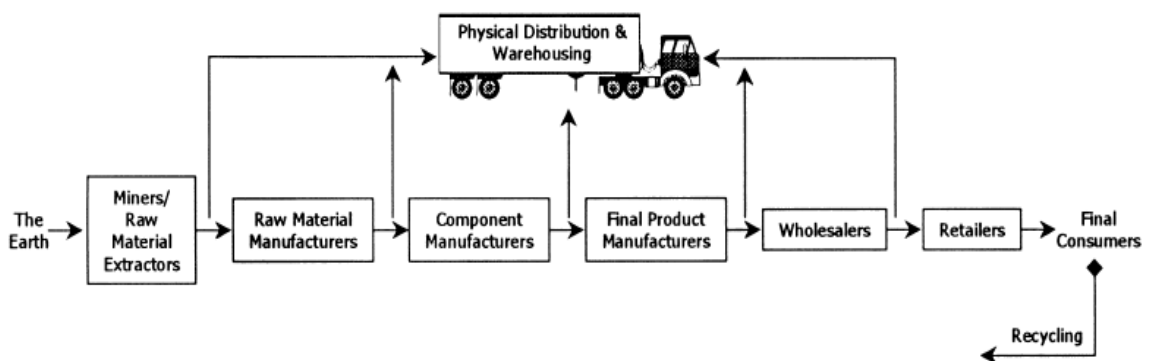
1.1.3 Λειτουργίες μιας Εφοδιαστικής Αλυσίδας

Μια εφοδιαστική αλυσίδα μπορεί να διαφέρει από κάποια άλλη, ως προς τα στάδια ή τους παράγοντες που την επηρεάζουν (π.χ ευαισθησία προϊόντος), ωστόσο κάποιες βασικές λειτουργίες της, σύμφωνα με την υπάρχουσα βιβλιογραφία (Harland et al. 1999, Tan et al, 1998)είναι:

- Η πρόβλεψη της ζήτησης: συνήθως οι προβλέψεις έχουν να κάνουν με την ποσότητα παραγγελίας ή με την ποσότητα των τελικών προϊόντων που πρέπει να μεταφερθούν στην αγορά.
- Ο προγραμματισμός της διαδικασίας παραγωγής: σύμφωνα με τις προβλέψεις που πραγματοποιούνται και τους διαθέσιμους πόρους γίνεται ο απαραίτητος συντονισμός και προγραμματισμός των σταδίων μιας αλυσίδας, προκειμένου να είναι αποτελεσματική η παραγωγική της διαδικασία.

- Η προμήθεια πρώτων υλών: για να επιτευχθεί η διαδικασία της παραγωγής, πρέπει να έχουν εξασφαλιστεί από τις επιχειρήσεις τα απαραίτητα υλικά και υπηρεσίες.
- Η αποθήκευση του προϊόντος: αρχικά γίνεται η παραλαβή του τελικού προϊόντος και στην συνέχεια η αποθήκευσή του, με σκοπό να φυλάσσεται μέχρι να γίνει η αποστολή του στον τελικό πελάτη.
- Η μεταφορά και η διανομή των προϊόντων: αφορά όλα τα μέσα που διαθέτει μια επιχείρηση, προκειμένου να καταλήξουν τα προϊόντα ή οι υπηρεσίες στον τελικό καταναλωτή.
- Η διαχείριση του αποθέματος: σύμφωνα με τις προβλέψεις των παραγγελιών και λαμβάνοντας υπόψη το κόστος αποθήκευσης και έλλειψης, υπολογίζεται το απαραίτητο στοκ ασφαλείας αλλά και η ποσότητα του αποθέματος σε συνδυασμό με το χρονικό διάστημα που πρέπει να φυλάσσεται στις αποθήκες.

Το Σχήμα 1.3 δείχνει τις δραστηριότητες που πραγματοποιούνται σε μια εφοδιαστική αλυσίδα όπως απεικονίζεται από τους New και Payne (1995). Αρχικά η διαδικασία παραγωγής ξεκινά με την εξόρυξη πρώτων υλών ή ορυκτών από την γη, στην συνέχεια γίνεται η επεξεργασία από τους κατασκευαστές, ακολουθεί η μεταφορά του προϊόντος στους χονδρεμπόρους, και από εκεί στους λιανοπωλητές με σκοπό να καταλήξει το τελικό προϊόν στους πελάτες. Σε κάποιες περιπτώσεις η διαχείριση της εφοδιαστικής αλυσίδας περιλαμβάνει και την ανακύκλωση ή την επαναχρησιμοποίηση των προϊόντων ή των πρώτων υλών.



Σχήμα 1.3: Οι δραστηριότητες που πραγματοποιούνται σε μια εφοδιαστική αλυσίδα

Πηγή: (Tan, 2001)

Μέσω της διαχείρισης της εφοδιαστικής αλυσίδας, η επιχείρηση πρέπει να ικανοποιεί ουσιαστικά δύο κριτήρια. Το πρώτο κριτήριο αφορά την ποσότητα των προϊόντων και την ομαλή σύνδεση μεταξύ των σταδίων της εφοδιαστικής αλυσίδας, ενώ το δεύτερο κριτήριο είναι ο συνδυασμός της υψηλής ποιότητας που προσφέρεται στους πελάτες με το χαμηλότερο κόστος (Tan, 2001).

1.2 Η Μέθοδος Αποθεματικής Πολιτικής Order-Up-To level (R,S)

Το σύστημα παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (Order-up-to Level) σύμφωνα με τον Κεβόρκ (2018) είναι μια ειδική περίπτωση του συστήματος περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, όπου οι βασικές παράμετροι του χαρακτηρίζουν την εξέλιξη των παραγγελιών μέσα στον χρόνο. Η μορφή της κατανομής της ζήτησης ανά χρονική περίοδο αλλά και το χρονικό διάστημα P και L είναι οι βασικές παράμετροι που απαιτούνται. Το σημαντικότερο στο σύστημα αυτό είναι πως επικεντρώνεται στον προσδιορισμό ενός στοχευμένου επιπέδου αποθέματος (target inventory level) το οποίο θα διασφαλίζει κάτω από ορισμένες συνθήκες ότι στο χρονικό διάστημα $l=P+L$, δεν θα εξαντληθεί το απόθεμα.

Όταν, η εφαρμογή της πολιτικής των παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος περιγράφεται στο πλαίσιο μιας εφοδιαστικής αλυσίδας δύο σταδίων. Με δεδομένο ότι και τα δύο στάδια (Λιανοπωλητής, Προμηθευτής) ακολουθούν την συγκεκριμένη πολιτική και ο λιανοπωλητής δίνει την παραγγελία του στο τέλος της κάθε χρονικής περιόδου, γίνεται αντιληπτό ότι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών επιθεωρήσεων του επιπέδου αποθέματος είναι μια χρονική περίοδος ($P=1$).

Σύμφωνα με τους Silver, et al. (2017) το αναμενόμενο διαθέσιμο απόθεμα στο τέλος της χρονικής περιόδου $t+i$ θα ισούται με :

$$[\text{Στοκ Ασφαλείας}] = Y_t - \bar{D}_{t|H_t} \quad (1.1)$$

Το στοκ αυτό παρέχει το απαιτούμενο «μαξιλαράκι ασφαλείας» ώστε να μην παρατηρηθεί έλλειψη αποθέματος στο χρονικό διάστημα L, με πιθανότητα ίση με η.

Μαθηματικά αυτό διατυπώνεται από την σχέση $\Pr(\sum_{i=1}^L d_{t+i} \leq Y_t)$.

Σύμφωνα με την (1.1) θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \Pr (\sum_{i=1}^L d_{t+i} \leq \sum_{i=1}^L \hat{d}_{t+i|H_t} + [\text{Στοκ Ασφαλείας}]) = \\ \Pr (\sum_{i=1}^L e_{t+i|H_t} \leq [\text{Στόκ Ασφαλείας}]) = \eta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Κάνοντας την υπόθεση ότι η τυχαία μεταβλητή $\sum_{i=1}^L e_{t+i|H_t}$, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση $V_{t|H_t}$, και μετασχηματίζοντας την μεταβλητή αυτή σε τυπική κανονική προκύπτει ότι:

$$[\text{Στόκ Ασφαλείας}] = Z_\eta \sqrt{V_{t|H_t}} \quad (1.3)$$

Σύμφωνα με τις (1.1), (1.2) και (1.3) θα ισχύει ότι :

$$Y_t = \hat{D}_{t|H_t} + z_\eta \sqrt{V_{t|H_t}} = \sum_{i=1}^L \hat{d}_{t+i|H_t} + z_n \sqrt{V_{t|H_t}} \quad (1.4)$$

Στην παγκόσμια αγορά, πολλές επιχειρήσεις (κυρίως επιχειρήσεις στον τομέα των υπολογιστών και της προχωρημένης πληροφορικής) έχουν υιοθετήσει την πολιτική Order-Up-To εξαιτίας της φύσης της. Η πολιτική αυτή, είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε αντικείμενα που συσχετίζονται μεταξύ τους όταν απαιτείται ο συντονισμός και η ανανέωση τους.

Ο συντονισμός μιας περιοδικής επιθεώρησης παρέχει σημαντική εξοικονόμηση εξαιτίας της δυνατότητας που δίνει αυτή η πολιτική να ρυθμιστεί το στοκ ασφαλείας, μια επιθυμητή ρύθμιση όταν η ζήτηση μεταβάλλεται με το χρόνο. Το βασικό μειονέκτημα ωστόσο που υπάρχει, είναι πως οι ποσότητες ανανέωσης ποικίλουν και τα έξοδα χρηματοδότησης είναι υψηλότερα σε σχέση με την συνεχή επιθεώρηση.

1.3 Το Φαινόμενο Bullwhip

Το φαινόμενο Bullwhip προκύπτει όταν υπάρχει αύξησή της μεταβλητότητας της ζήτησης, όσο κατευθυνόμαστε από τα τελευταία στάδια (καταναλωτές) προς τα αρχικά στάδια, μιας εφοδιαστικής αλυσίδας. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να οδηγήσει σε αύξηση του κόστους για ένα προϊόν, λόγω της αύξησης των διατηρούμενων αποθεμάτων στα στάδια της εφοδιαστικής αλυσίδας.

1.3.1 Ιστορική αναδρομή του Φαινομένου Bullwhip

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με την μελέτη του φαινομένου Bullwhip είναι ο Jay Wright Forrester (1958), υποστήριξε πως η διαστρέβλωση της ζήτησης στην εφοδιαστική αλυσίδα οφείλεται εν μέρει στην αποτυχία των μελών της να

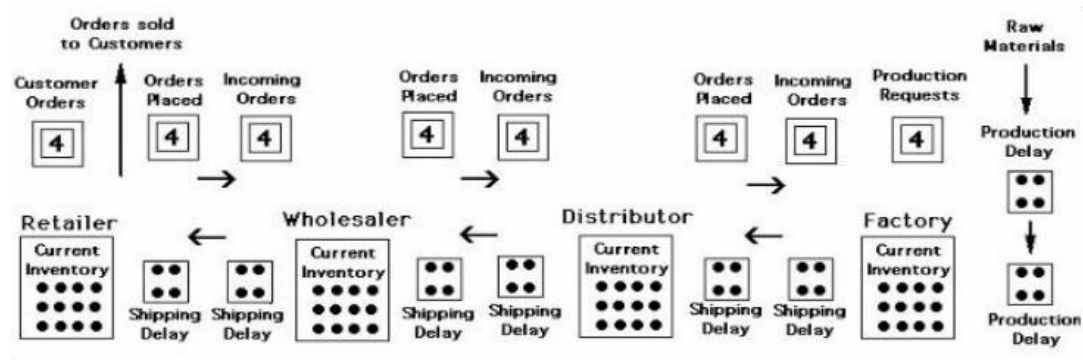
συνεργάζονται και να μοιράζονται τις πληροφορίες, αλλά και στην πολυπλοκότητα της δομής της ίδιας της εφοδιαστικής αλυσίδας. Όσον αφορά την δομή της αλυσίδας, επικεντρώθηκε κυρίως στο γεγονός ότι σε μια εφοδιαστική αλυσίδα υπάρχουν καθυστερήσεις οι οποίες δεν γίνεται να εξαλειφθούν.

Σύμφωνα με τον J. Forrester (1958) οι καθυστερήσεις αυτές είναι δύο ειδών:

- η καθυστέρηση για την μεταφορά της πληροφορίας ζήτησης (delay of transferring demand information)
- η καθυστέρηση για την μεταφορά των προϊόντων από ένα επίπεδο στο αμέσως επόμενο (delay of transferring physical products).

Υποστήριξε επίσης πως η μελέτη της εφοδιαστικής αλυσίδας στο σύνολό της με τη χρήση της Δυναμικής Συστημάτων, μπορεί να δώσει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τους τρόπους που μπορεί να περιοριστεί το φαινόμενο. Η έρευνα η οποία ενέπνευσε πολλούς επιστήμονες στο να μελετήσουν σε βάθος το φαινόμενο και να αναπτύξουν επιχειρησιακά μοντέλα προκειμένου να το ερευνήσουν στην πράξη, είναι το γνωστό «παιχνίδι μπίρας».

Στο παιχνίδι αυτό οι συμμετέχοντες (μαθητές, διευθυντές, αναλυτές) παίζουν τους ρόλους των πελατών, των λιανοπωλητών, των χονδρεμπόρων και των προμηθευτών μιας δημοφιλούς μάρκας μπίρας. Οι συμμετέχοντες δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους και πρέπει να λάβουν αποφάσεις για τις παραγγελίες σε κάθε στάδιο, σύμφωνα με τις παραγγελίες από τον επόμενο παίκτη του επόμενου σταδίου. Κάτι το οποίο παρατηρήθηκε είναι ότι οι μεταβολές της ζήτησης σε ένα στάδιο είναι μεγαλύτερες από αυτές ενός κατώτερου σταδίου. Αυτή η ενισχυμένη μεταβλητότητα στις παραγγελίες αποδόθηκε στην παράλογη λήψη αποφάσεων των παικτών. Έτσι ο Sterman (1989) έδειξε ότι το φαινόμενο αυτό είναι συνέπεια της ορθολογικής συμπεριφοράς των παικτών εξαιτίας της δομής της εφοδιαστικής αλυσίδας.



Σχήμα 1.4: Ταμπλό του επιτραπέζιου Beer Distribution Game Πηγή: (Sterman, 1992)

1.3.2 Οι βασικές αιτίες του φαινομένου Bullwhip

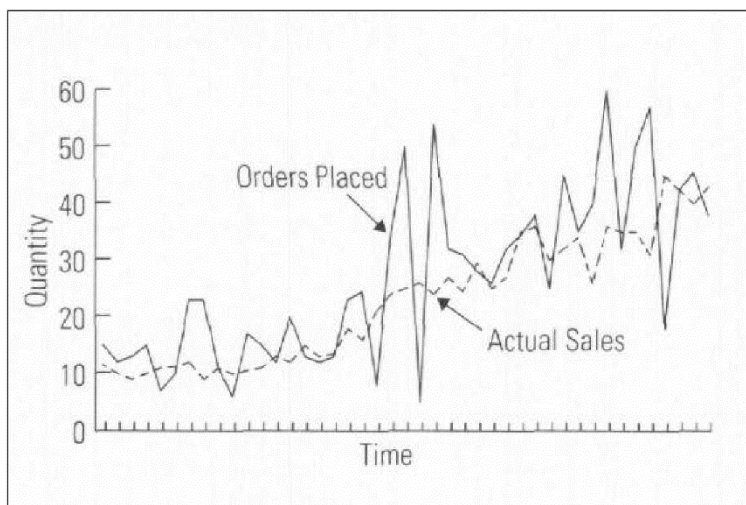
Οι βασικές αιτίες του φαινομένου Bullwhip σύμφωνα με την βιβλιογραφία είναι:

➤ Σφάλματα στην πρόβλεψη της ζήτησης

Κάθε επιχείρηση σε μια εφοδιαστική αλυσίδα κάνει τις παραγγελίες της βασιζόμενη στις προβλέψεις που έχει κάνει, όμως όπως είναι γνωστό η έννοια της πρόβλεψης εμπεριέχει και ένα ποσοστό λάθους. Αν οι προβλέψεις είναι λανθασμένες τότε θα είναι λανθασμένες και οι παραγγελίες. Όταν οι παραγγελίες αυτές φτάσουν στον προμηθευτή, θα προχωρήσει στις δικές του προβλέψεις (όπου πάλι θα εμπεριέχεται ένα ποσοστό λάθους). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η παραποίηση των πληροφοριών ζήτησης από τα κατώτερα στάδια της εφοδιαστικής αλυσίδας (λιανοπωλητές), μέχρι τα ανώτερα στάδια (προμηθευτές).

➤ Παραγγελία σε παρτίδες

Σε μια αλυσίδα εφοδιασμού, κάθε εταιρεία υποβάλει παραγγελίες σε ένα προηγούμενο στάδιο, και συγχρόνως κάνει τον έλεγχο του αποθέματος. Η παραγγελία στον προμηθευτή δεν γίνεται αμέσως μόλις εισέρχεται η νέα παραγγελία στην εταιρεία, αλλά όταν οι παραγγελίες γίνουν τόσες, ώστε να φτάσουν σε ένα σημείο να μειωθεί το σταθερό κόστος παραγγελίας της ή τα έξοδα μεταφοράς. Συνήθως οι προμηθευτές προσφέρουν ειδικές εκπτώσεις στους πελάτες που οι παραγγελίες τους είναι σε παρτίδες, ώστε να γεμίζει πλήρων ο σχετικός χώρος των οχημάτων μεταφοράς (full truckloads). Με τον τρόπο αυτό όμως η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής παρουσιάζει μεγαλύτερη διασπορά από αυτή της ίδιας της εταιρείας.

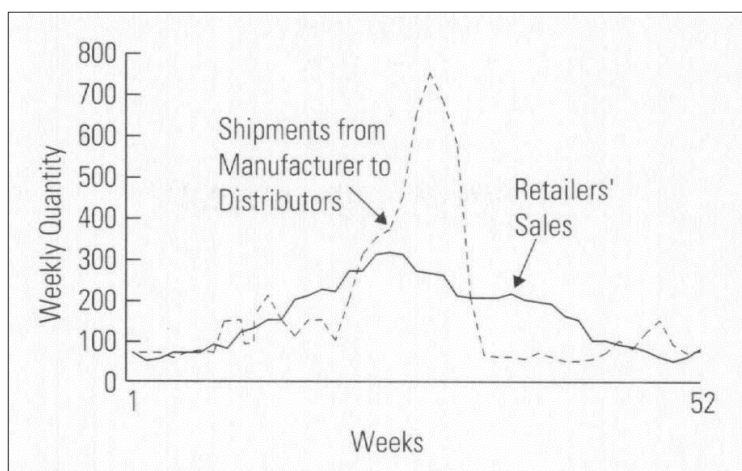


Σχήμα 1.5: Η μεταβλητότητα στις παραγγελίες από τον έμπορο στον κατασκευαστή

Πηγή: (Lee, 1997)

➤ Διακύμανση των τιμών

Οι ενέργειες διαφήμισης, εκπτώσεων και εμπορικών συμφωνιών μεταξύ των εταιρειών μιας εφοδιαστικής αλυσίδας προκαλούν αυξομειώσεις στις τιμές των προϊόντων και κατά συνέπεια αύξηση της διασποράς της ζήτησης. Όταν γίνεται κάποια από αυτές τις ενέργειες, οι καταναλωτές αγοράζουν μεγαλύτερες ποσότητες από αυτές που χρειάζονται, ενώ όταν η τιμή είναι ξανά στα κανονικά επίπεδα, οι ποσότητες των καταναλωτών είναι λιγότερες, εξαιτίας του αποθέματος που έχει δημιουργηθεί. Η σημασία της διακύμανσης των τιμών μπορεί να γίνει αντιληπτή από έρευνα (Lee, 1997) που έγινε μεταξύ κατασκευαστών και διανομέων στην βιομηχανία ειδών παντοπωλείου, στην οποία τα προϊόντα αγοράστηκαν πριν τις απαιτήσεις λόγω της ελκυστικής προσφοράς ενός κατασκευαστή. Η έρευνα αυτή έδειξε ότι το 80% των προϊόντων που μεταφέρονται από τους προμηθευτές στα σούπερ μάρκετ είναι προϊόντα που αγοράστηκαν λόγω ελκυστικής τιμής πριν να υπάρξει η ζήτηση. Η κίνηση αυτή συνέβαλε ώστε το κόστος του αποθέματος να μειωθεί από τα 100 στα 75 δις δολάρια.



Σχήμα 1.6: Το φαινόμενο Bullwhip σε ένα εποχιακό προϊόν (σούπα)

Πηγή: (Lee, 1997)

➤ Παιχνίδι της κατανομής (Rationing και Shortage Gaming)

Όταν η ζήτηση ενός προϊόντος υπερβαίνει την προσφορά του, οι προμηθευτές αποστέλλουν ανάλογη ποσότητα με την παραγγελία, στους λιανοπωλητές. Για παράδειγμα εάν η συνολική προσφορά αντιστοιχεί στο 50% της συνολικής ζήτησης, τότε και οι λιανοπωλητές θα λάβουν το 50% της συνολικής ποσότητας που έχει γίνει η παραγγελία. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, όταν υπάρχει ενδεχόμενο μελλοντικής

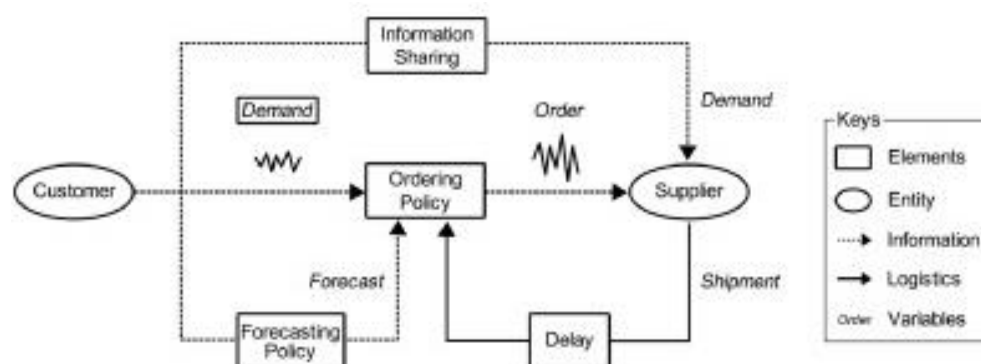
έλλειψης για κάποιο προϊόν, οι λιανοπωλητές έχουν την τάση να κάνουν παραγγελίες σε μεγαλύτερες ποσότητες από αυτές που χρειάζονται, με σκοπό να έχουν ένα πλεονέκτημα απέναντι στους ανταγωνιστές τους. Το αποτέλεσμα ήταν πως οι λιανοπωλητές ακύρωναν μεγάλο ποσοστό των παραγγελιών τους, δημιουργώντας έτσι μεγάλο κόστος στους προμηθευτές.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα του Rationing και Shortage Gaming συνέβη την δεκαετία του 80, όταν στην βιομηχανία των ηλεκτρονικών υπολογιστών παρουσιάζονταν συχνά ελλείψεις σε κάρτες μνήμης (μορφής DRAM). Τότε, υπήρξε μια μεγάλη αύξηση των παραγγελιών, όχι εξαιτίας της αύξησης της κατανάλωσης αλλά εξαιτίας της ανησυχίας των λιανοπωλητών, να μην ξεμείνουν από απόθεμα. Ορισμένοι, μάλιστα έδιναν τις παραγγελίες σε περισσότερους από έναν προμηθευτές. Ως αποτέλεσμα αυτών των κινήσεων, ήταν να υπάρξει ένας μεγάλος αριθμός ακυρώσεων των παραγγελιών και η ύπαρξη μεγάλου κόστους για τους προμηθευτές (Lee, 1997).

Κεφάλαιο 2: «Βιβλιογραφική Ανασκόπηση»

2.1 Στοιχεία της μοντελοποίησης του φαινομένου Bullwhip

Η τεχνική που χρησιμοποιείται στις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί για την αναλυτική εξέταση του φαινομένου Bullwhip, είναι η μοντελοποίηση των συμμετεχόντων στην εφοδιαστική αλυσίδα, ως ένα σύστημα καταγραφής αποθεμάτων. Στο πλαίσιο αυτό, διερευνάται ο αντίκτυπος των στοιχείων όπως η ζήτηση, η πολιτική προβλέψεων, η πολιτική παραγγελιών και οι μηχανισμοί ανταλλαγής πληροφοριών. Μερικοί από τους παράγοντες αυτούς θεωρούνται εξωγενείς και μερικοί ενδογενείς για την λήψη αποφάσεων και θα μπορούσαν να έχουν είτε θετικές είτε αρνητικές επιπτώσεις στην διερεύνηση της ζήτησης (Wang et al, 2016).



Σχήμα 2.1: Οι ρόλοι των στοιχείων μιας εφοδιαστικής αλυσίδας

Πηγή: (Wang et al, 2016)

2.1.1 Ζήτηση

Οι Chen et al, (2000) προσδιόρισαν ότι το φαινόμενο Bullwhip οφείλεται τουλάχιστον εν μέρει στην απρόβλεπτη ζήτηση που προκύπτει στους χρόνους παράδοσης και στην ανάγκη πρόβλεψης της μελλοντικής ζήτησης. Οι περισσότερες έρευνες κάνουν την υπόθεση ότι η ζήτηση είναι μια στοχαστική διαδικασία. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούν ένα μοντέλο, όπου η ζήτηση είναι ανεξάρτητα και πανομοιότυπα κατανομημένη διεργασία λευκού θορύβου (Deziel et al 1967). Αυτό το μοντέλο έχει κάποια μαθηματικά πλεονεκτήματα, όμως θεωρείται ιδιαίτερα απλουστευμένο καθώς παραβλέπει την χρονική συσχέτιση της ζήτησης. Η συσχέτιση της ζήτησης μπορεί να ληφθεί υπόψιν με μοντέλα αυτοπαλίνδρομου κινητού μέσου όρου (ARMA) (Box et al, 1970).

Πρόσφατες μελέτες έχουν δείξει ότι τα υποδείγματα ARIMA (p,d,q) περιγράφουν επαρκώς σε πολλές περιπτώσεις την διαχρονική εξέλιξη της ζήτησης του λιανοπωλητή. Όπως οι Ali et al. (2012), οι οποίοι πραγματοποίησαν την έρευνα τους έχοντας διαθέσιμα για δύο έτη στοιχεία σχετικά με τις εβδομαδιαίες πωλήσεις 1.798 προϊόντων ενός supermarket στη Γερμανία. Στην έρευνα αυτή οι Ali et al (2012) προσάρμοσαν στην χρονολογική σειρά πωλήσεων κάθε προϊόντος υπόδειγμα ARIMA(p,d,q) και κατέληξαν στα εξής ευρήματα:

- 16,3% των σειρών βρέθηκαν να ακολουθούν το υπόδειγμα ARIMA (0,0,0)
- 30,3% των σειρών βρέθηκαν να ακολουθούν το υπόδειγμα ARIMA (1,0,0)
- 13% των σειρών βρέθηκαν να ακολουθούν το υπόδειγμα ARIMA (0,0,1)
- 8,6% των σειρών βρέθηκαν να ακολουθούν το υπόδειγμα ARIMA (1,0,1)
- 23,7% των σειρών βρέθηκαν να ακολουθούν το υπόδειγμα ARIMA (0,1,1)

Πιο πολύπλοκα μοντέλα ARIMA για την ζήτηση έχουν επίσης μελετηθεί: Ενδεικτικά αναφέρουμε τα AR(2), AR(p) (Luong et all, 2007). ARMA(1,1) (Alwan, et all, 2003) ARMA(2,2) (Gaalman et all, 2009) και ARMA(p,q) (Gaalman, 2006). Επίσης στα μη στάσιμα μοντέλα ARIMA, δεδομένου ότι η διακύμανση των μη στάσιμων χρονοσειρών δεν είναι πλέον πεπερασμένη θα πρέπει να υιοθετηθούν εναλλακτικά μέτρα και προσεγγίσεις του Bullwhip (Graves, 1999).

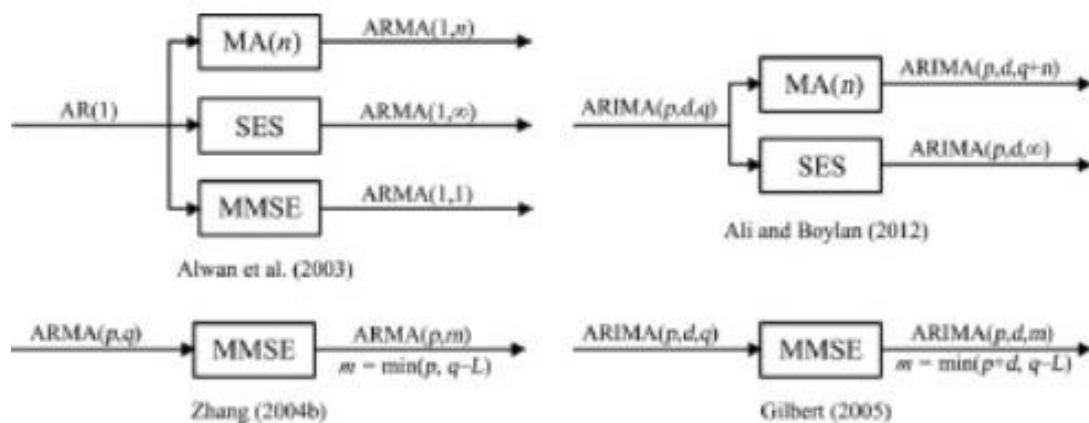
2.1.2 Πρόβλεψη

Υπάρχει ένα ευρύ φάσμα μεθόδων πρόβλεψης του Bullwhip που έχει διερευνηθεί στην βιβλιογραφία. Οι δύο βασικές τεχνικές πρόβλεψης που έχουν χρησιμοποιηθεί περισσότερο είναι η μέθοδο πρόβλεψης κινητού μέσου όρου (MA)(Chen et al. (2000a) και η μέθοδος της απλής εκθετικής εξομάλυνσης(SES), (Disney et all. 2003). Και οι δύο αυτές τεχνικές είναι εύκολες στην χρήση και για τον λόγο αυτό έχουν υιοθετηθεί ευρέως από την βιομηχανία. Η πρόβλεψη ελάχιστου μέσου τετραγώνου σφάλματος (MMSE) η οποία δείχνει πόσο ακριβής είναι μια εκτίμηση (όσο μικρότερο το MSE τόσο καλύτερη η εκτίμηση), είναι σε θέση να επιτύχει την υψηλότερη δυνατή ακρίβεια για την καθορισμένη διαδικασία ζήτησης και χρησιμοποιείται συχνά ως σημείο αναφοράς (Zhang, 2004a). Ωστόσο, η χρήση της πρόβλεψης MMSE βασίζεται συχνά σε μη ρεαλιστικές υποθέσεις (ότι η ζήτηση μπορεί να προσδιοριστεί και είναι σταθερή με την πάροδο του χρόνου). Αυτές οι

τεχνικές πρόβλεψης έχουν σχεδιαστεί για την εποχιακή ζήτηση και την ζήτηση τάσης. Ένα άλλο ενδιαφέρον θέμα είναι η σχέση μεταξύ της ακρίβειας πρόβλεψης και του συνολικού κόστους.

Ο Zhang (2004a) πρότεινε ότι η πρόβλεψη MMSE ελαχιστοποιεί το κόστος που σχετίζεται με το απόθεμα. Αυτό υποστηρίχθηκε από τους Hussain et al. (2012) σε μια μελέτη προσομοίωσης. Ωστόσο, σύμφωνα με ορισμένες εμπειρικές και αναλυτικές έρευνες (Hosoda & Disney, 2009), η πιο ακριβής πρόβλεψη δεν οδηγεί πάντα σε μια βέλτιστη αλυσίδα εφοδιασμού όταν λαμβάνεται υπόψη το φαινόμενο Bullwhip αποκλειστικά για ένα στάδιο (Disney et al, 2008).

Στο Σχ. 2.2 φαίνεται η εξέλιξη της ζήτησης, δηλαδή η δομή της σειράς εντολών αναπλήρωσης που δημιουργείται από διαφορετικά μοντέλα ζήτησης και μεθόδους πρόβλεψης. (Ο Zhang, 2004).



Σχήμα 2.2: Περίληψη της εξέλιξης της ζήτησης με διαφορετικά μοντέλα ζήτησης (L είναι ο χρόνος παράδοσης)
 Πηγή: (Zhang, 2004)

2.1.3 Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δευτέρου βαθμού AR(2)

Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος p τάξεως ή $AR(p)$ είναι:

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Η τάξη p αναφέρεται στο μήκος της υστέρησης, ενώ ο όρος αυτοπαλίνδρομο προέρχεται από το γεγονός ότι η παραπάνω σχέση είναι ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης που οι ερευνητικές μεταβλητές ή παλινδρομητές (regressors) είναι οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Y_t με χρονική υστέρηση. Η μεταβλητή ε_t είναι λευκός θόρυβος, δηλαδή είναι μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία, όπου για κάθε t

ισχύει ότι $E(\varepsilon_t)=0$ και $E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$ (που σημαίνει αυτόματα λόγω της $E(\varepsilon_t)=0$ ότι και $\text{var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$).

Σύμφωνα με τον Hamilton (1994) η μορφή ενός υποδείγματος AR(2) είναι:

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

Όπου:

- $\delta, \varphi_1, \varphi_2$ είναι παράμετροι του υποδείγματος
- ε_t : είναι το τυχαίο σφάλμα το οποίο κατανέμεται κανονικά με μέσο μηδέν και σταθερή διακύμανση $\sigma_\varepsilon^2, \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Οι συνθήκες

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -1 < \varphi_2 < 1,$$

διασφαλίζουν ότι η ζήτηση θα είναι στάσιμη.

Εφόσον μια χρονολογική σειρά είναι ασθενώς στάσιμη θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$\text{➤ } E(Y_t) = \mu, \text{ ανεξάρτητη από το } t \quad (2.2)$$

$$\text{➤ } V(Y_t) = \sigma^2, \text{ ανεξάρτητη από το } t \quad (2.3)$$

$$\text{➤ } \text{Cov}(Y_t, Y_{t+s}) = \text{Cov}(Y_{t+i}, Y_{t+i+s}) = \gamma_s = \gamma_s \quad (2.4)$$

2.1.4 Υπόδειγμα ARMA(2,2)

Το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητού μέσου όρου είναι της μορφής :

$$Y_t = \delta + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} \dots \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \dots \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Είναι συνδυασμός p αυτοπαλίνδρομων όρων και q όρων κινητού μέσου, γι' αυτό και αποκαλείται μεικτό αυτοπαλίνδρομο-κινητού μέσου υποδείγματος τάξεως (p,q) ARMA (p,q).

Ένα υπόδειγμα ARMA (2,2) είναι της μορφής:

$$q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 q_{t-1} + \varphi_2 q_{t-2} + v_t + \theta_1 v_{t-1} + \theta_2 v_{t-2} \quad (2.5)$$

Επίσης για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός ARMA (p,q) υποδείγματος μπορούν να εφαρμοστούν οι ίδιες τεχνικές που χρησιμοποιούνται και για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός MA(q) υποδείγματος. Δηλαδή μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις που συνδέουν τις αυτοσυσχετίσεις με τις παραμέτρους του υποδείγματος. Στην περίπτωση του υποδείγματος ARMA (2,2) θα εφαρμοστούν οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται για τη εκτίμηση του MA(2) δηλαδή:

- $E(Y_t) = \mu$
- $\gamma_0 = V(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$
- $\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2$
- $\gamma_2 = \theta_2\sigma^2$
- $\gamma_s = 0$ για $s > 2$
- $\rho_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$
- $\rho_2 = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$

(2.6)

2.2 Η Αξία της πληροφορίας

Εξαιτίας του ανταγωνισμού που υπάρχει στην αγορά, πολλές βιομηχανίες έχουν ξεκινήσει τις προσπάθειες βελτίωσης των προβλέψεων της ζήτησης προκειμένου να είναι πιο αποτελεσματικές οι αλυσίδες εφοδιασμού τους. Ο στόχος τους είναι η καλύτερη αντιστοιχία της προσφοράς με την ζήτηση ώστε να μειωθεί το κόστος των αποθεμάτων. Η εξοικονόμηση χρημάτων από μία τέτοια προσπάθεια μπορεί να κυμαίνεται από 14 δισεκατομμύρια δολάρια έως 30 δισεκατομμύρια δολάρια για τη βιομηχανία τροφίμων (Kurt Salmon Associates, 1993). Μία βασική πρωτοβουλία ώστε να βελτιωθούν οι προβλέψεις σύμφωνα με την βιβλιογραφία, είναι η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των σταδίων σε μια εφοδιαστική αλυσίδα. Ακόμα η ανταλλαγή πληροφοριών για τις πωλήσεις έχει θεωρηθεί ως μια σημαντική στρατηγική για την αντιμετώπιση του λεγόμενου «Bullwhip effect» (Lee et al. 1997a, 1997b). Οι Lee et.al (1997) χαρακτηρίζουν αυτό το φαινόμενο ως «παραμόρφωση της ζήτησης», η οποία μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα για τους προμηθευτές, όπως είναι οι εξαιρετικά ανακριβείς προβλέψεις ζήτησης, η χαμηλή αξιοποίησή του διαθέσιμου χώρου αποθήκευσης, το υπερβολικό απόθεμα και η κακή εξυπηρέτηση των πελατών. Οι πληροφορίες χρησιμεύουν ώστε να επιτευχθεί :

- Ο συντονισμός βασικών δραστηριοτήτων όπως είναι η παραγωγή, η αποθήκευση και η μεταφορά. Οι εταιρίες που συμπεριλαμβάνονται σε μια αλυσίδα εφοδιασμού σύμφωνα με τα στοιχεία που διαθέτουν για την προσφορά και την ζήτηση λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με την οργάνωση της παραγωγής, τα επίπεδα των αποθεμάτων, τα πιο χρήσιμα οδικά δίκτυα και τις τοποθεσίες αποθήκευσης.

- Ο προγραμματισμός της διαδικασίας παραγωγής προκείμενου να ικανοποιηθεί η μελλοντική ζήτηση. Τα δεδομένα σχετικά με την ζήτηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για στρατηγικές αποφάσεις (όπως επέκταση , νέες επενδύσεις κ.α)(Huang, e.a, 2003)

Authors	Shared Information
Boone et al. (2002)	demand, forecast
Bourland et al. (1996)	demand
Cachon and Fisher (2000)	demand, inventory
Cachon and Lariviere (2001)	demand, demand forecasts
Chen (1999)	inventory, order
Chen et al. (2000)	demand
Crosbon and Donohoue (2003)	sales
Huang and Gangopadhyay (2004)	demand
Karaesman et al (2002)	advance order
Kulp et al (2004)	inventory level, warehouse, consumer info
Lau et al. (2002)	demand, order, inventory
Lee and Whang (1999)	demand
Lee et al. (2000)	demand
Mitra and Chatterjee (2004)	demand
Owen and Levary (2002)	demand, inventory
Ozer (2003)	advance demand
Raghuathan (2003)	demand
Simchi-Levi and Zho (2003)	demand
Smaros et al. (2003)	demand
Waller et al (1999)	inventory level , demand
Wang and Seidmann (1995)	demand
Xu et al. (2001)	demand
Yu et al. (2001)	demand, order
Yu et al. (2002)	demand, order

Πίνακας 2: Είδη πληροφοριών

Πηγή:(Huang, e tal,2003)

Σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες η ακρίβεια των προβλέψεων εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ακρίβεια των δεδομένων που χρησιμοποιούνται (π.χ. Syntetos, et all, 2010). Όμως, όπως έχει αναφέρει ο Goodwin (2009) η ακρίβεια των προβλέψεων συχνά αποφέρει περισσότερα έξοδα από έσοδα, για τον λόγο αυτό είναι απαραίτητη η προσθήκη περισσότερου θεωρητικού υλικού, ώστε να διερευνηθεί η σχέση της ακρίβειας της πρόβλεψης και της εμπειρικής της χρησιμότητας διότι, η σχέση μεταξύ ακρίβειας και χρησιμότητας είναι ιδιαίτερα περίπλοκη σε ένα περιβάλλον διαχείρισης του αποθέματος.

2.2.1 Η επίδραση της Ανταλλαγής Πληροφοριών στο φαινόμενο Bullwhip

Εξαιτίας των συνεπειών που μπορούν να προκύψουν από την επίδραση του φαινομένου Bullwhip, έχει υπάρξει μεγάλο ενδιαφέρον στην βιβλιογραφία για την

μελέτη και την αντιμετώπιση του. Στις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί, έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες μεθοδολογικές προσεγγίσεις (μελέτες προσομοίωσης, στατιστικές προσεγγίσεις κ.α). Γενικά στις μελέτες αυτές, έχει διαπιστωθεί ότι υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις στις οποίες κρίνεται απαραίτητη η επεξεργασία πληροφοριών και η απογραφή, ώστε να αντιμετωπιστούν οι αρνητικές επιπτώσεις του Bullwhip.

Τα αποτελέσματα από εμπειρικές έρευνες που πραγματοποιήθηκαν, δείχνουν ότι οι ερευνητές πρέπει να είναι προσεκτικοί στην σύνδεση της μέτρησης του Bullwhip με την κατάλληλη απόφαση της ποσότητας παραγγελίας και την χρονική περίοδο παράδοσης. Ακόμα, αναφέρεται ότι μια συγκεντρωτική μέτρηση για μεγάλο χρονικό διάστημα μπορεί να είναι ικανή να καλύψει το φαινόμενο Bullwhip (Chen et al, 2012,).

Ενώ η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των μελών της εφοδιαστικής αλυσίδας προτείνεται συχνά ως ένα από τα βασικά διαρθρωτικά μέτρα για την διαχείριση του φαινομένου Bullwhip, το είδος και η ποιότητα των πληροφοριών που πρέπει να κοινοποιούνται μεταξύ των εταιριών, είτε για την βελτίωση των πληροφοριών είτε για τις ροές των υλικών, εξακολουθεί να αποτελεί τομέα που έχει απασχολήσει τους ερευνητές. Οι Lee et al., (2000) και Patnayakuni et al., (2006) υποστηρίζουν ότι η ανταλλαγή πληροφοριών και ο συντονισμός των σταδίων σε μια εφοδιαστική αλυσίδα μειώνουν το φαινόμενο Bullwhip και βελτιώνουν την συνολική απόδοση της. Αυτά τα οφέλη περιλαμβάνουν βελτιωμένες δυνατότητες στην διαχείριση των αποθεμάτων, κάτι που συμβάλει στην βελτίωση της λειτουργικής απόδοσης της αλυσίδας, στην μείωση του κόστους σε ορισμένους τομείς αλλά και σε υψηλότερα έσοδα.

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν παραδείγματα που έχουν αναφερθεί στην βιβλιογραφία όπως:

- Οι Sahin και Robinson (2005) όπου παρατηρούν μείωση του λειτουργικού κόστους κατά 48% λόγω της ανταλλαγής πληροφοριών και του συντονισμού των σταδίων στις αλυσίδες εφοδιασμού.
- Οι Avin και Federgruen (1998) και Fry et al. (2001) που διαπίστωσαν εξοικονόμηση 10-15% από την ανταλλαγή πληροφοριών στο πλαίσιο συστημάτων απογραφής (VMI) που διαχειρίζονται οι προμηθευτές.

- Οι Gavirneni, Karuscinski και Tayur (1999) που αναφέρουν την μείωση έως και 35% του κόστους των προμηθευτών, από την ανταλλαγή των δεδομένων ζήτησης από τους λιανοπωλητές.

Το είδος των πληροφοριών που πρέπει να κοινοποιούνται σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να είναι σύμφωνο με το ειδικό πλαίσιο της εφοδιαστικής αλυσίδας και τα οφέλη που θα προκύψουν από τον βελτιωμένο συντονισμό των δραστηριοτήτων.

Οι Chatfield et al. (2004) διεξήγαγαν επίσης μια γενική μελέτη προσομοίωσης για να εξετάσουν τον αντίκτυπο της ανταλλαγής πληροφοριών, της ποιότητας των πληροφοριών και της μεταβλητότητας του χρόνου παράδοσης, στην επίδραση του Bullwhip σε μια αλυσίδα εφοδιασμού με στοχαστικούς χρόνους παράδοσης και μια περιοδική πολιτική απογραφής. Όταν δεν υπάρχει κοινή χρήση πληροφοριών, κάθε στάδιο ορίζει το επίπεδο της παραγγελίας του χρησιμοποιώντας μόνο «τοπικές» πληροφορίες, δηλαδή παραγγελίες από τον άμεσο πελάτη του. Ενώ σε ένα σενάριο κοινής χρήσης πληροφοριών, τα δεδομένα από το σημείο πώλησης που σχετίζονται με τη ζήτηση που διαμορφώνει ο τελικός πελάτης, χρησιμοποιούνται για να διαμορφωθούν οι τελικές παραγγελίες. Το αποτέλεσμα που προέκυψε είναι, ότι ο τύπος των πληροφοριών που επιλέγεται επηρεάζει την ένταση του φαινομένου Bullwhip.

Παρά τα πιθανά οφέλη που υπάρχουν από την κοινή χρήση των πληροφοριών, πολλά μέλη στα στάδια μιας εφοδιαστικής αλυσίδας δεν μοιράζονται όλους τους διαφορετικούς τύπους διαθέσιμων πληροφοριών, για διάφορους λόγους. Για παράδειγμα, ενδέχεται να αγνοούν ορισμένους τύπους πληροφοριών με βάση την θέση τους στην αλυσίδα εφοδιασμού ή τις τρέχουσες εκτιμήσεις τους για τους κινδύνους της εφοδιαστικής αλυσίδας και τα επίπεδα παραγωγής. Επίσης υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις όπου ο τύπος πληροφοριών μοιράζεται για συγκεκριμένο σκοπό (όπως την ενοποίηση εμπορευμάτων με σκοπό την μεταφορά τους) (Shockley και Fetter, 2015).

Κατά συνέπεια, ο τρόπος βελτίωσης των επιδόσεων της εφοδιαστικής αλυσίδας (ιδίως των επιδόσεων εκπλήρωσης παραγγελιών) όταν οι πληροφορίες δεν κοινοποιούνται, παραμένει ένα αναπάντητο ερευνητικό ζήτημα από την έρευνα του φαινομένου Bullwhip. (Disney et al, 2019)

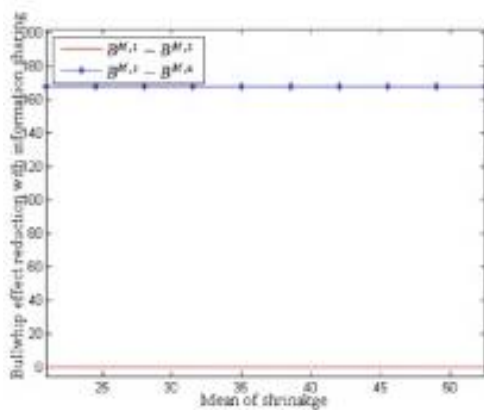
2.2.2 Διαφορετικά επίπεδα ποιότητας πληροφοριών, στην περίπτωση ανταλλαγής πληροφορήσης

Διαφορετικά συστήματα πληροφοριών, μπορούν να παρέχουν στον λιανοπωλητή διαφορετικής ποιότητας πληροφορίες σχετικά με το απόθεμα. Για παράδειγμα, ένα σύστημα πληροφοριών που βασίζεται σε γραμμικό κώδικα, θα επιτρέψει στον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων να εκτιμήσει τον μέσο και την διακύμανση της μείωσης του αποθέματος, κάνοντας ανάλυση στα ιστορικά καταγεγραμμένα δεδομένα αποθέματος, σύμφωνα με τους κύκλους παραγγελιών. Ενώ αντίθετα, ένα προηγμένο σύστημα πληροφοριών, όπως ένα σύστημα που βασίζεται σε RFID παρέχει στον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων δεδομένα σε πραγματικό χρόνο σχετικά με την απογραφή, και ακριβείς και έγκυρες πληροφορίες σχετικά με την μείωση του αποθέματος. Κατά συνέπεια, η ποιότητα των πληροφοριών ορίζεται ως υψηλή εάν ο λιανοπωλητής διαθέτει πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο σχετικά με την μείωση του αποθέματος και ως χαμηλή όταν ο λιανοπωλητής διαθέτει μόνο στατιστικές πληροφορίες.

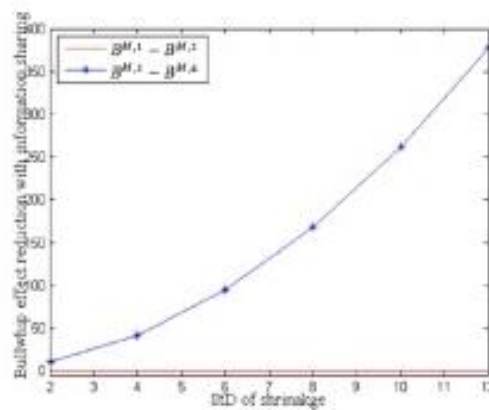
Όπως γίνεται αντιληπτό και από το σχήμα 2.3 η ανταλλαγή πληροφοριών έχει πιο σημαντική επίδραση στην απόδοση του κατασκευαστή όταν κοινοποιούνται πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο, για τους ακόλουθους τρεις λόγους (Οι κόκκινες και μπλε διακεκομμένες γραμμές στα σχήματα 2.3 και 2.4 αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα της κοινής χρήσης πληροφοριών όταν η ποιότητα των πληροφοριών είναι χαμηλή και υψηλή αντίστοιχα).

- Πρώτον, η κοινή χρήση πληροφοριών σε πραγματικό χρόνο επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την απόδοση του κατασκευαστή, καθώς μειώνει το φαινόμενο Bullwhip και το κόστος του κατασκευαστή, ενώ η κοινή χρήση στατιστικών στοιχείων των αποθεμάτων βοηθά μόνο στον έλεγχο του κόστους του κατασκευαστή.
- Δεύτερον, η μείωση του κόστους του κατασκευαστή, που προκαλείται από την ανταλλαγή πληροφοριών είναι μεγαλύτερη όταν κοινοποιούνται πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι οι διαχειριστές πρέπει να στοχεύουν στην προώθηση της ανταλλαγής πληροφοριών στους συνεργάτες της αλυσίδας εφοδιασμού.

- Τρίτον, όσο η μέση μείωση του κόστους, αυξάνεται τόσο το όφελος της κοινής χρήσης των πληροφοριών αυξάνεται πιο έντονα (όταν οι πληροφορίες δίνονται σε πραγματικό χρόνο), όπως γίνεται αντιληπτό από το σχήμα 2.4(α). Όταν η μείωση του κόστους είναι πιο αβέβαιη, τότε το όφελος της κοινής χρήσης πληροφοριών αυξάνεται όταν οι πληροφορίες είναι διαθέσιμες σε πραγματικό χρόνο, ενώ αντίθετα το όφελος μειώνεται όταν κοινοποιούνται μόνο στατιστικές πληροφορίες, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4(β). Έτσι, θα πρέπει να καταβληθεί μεγαλύτερη προσπάθεια ώστε να επιτευχθεί η συνεργασία με τους εταίρους της εφοδιαστικής αλυσίδας, προκειμένου να γίνει η απόκτηση ακριβών και έγκυρων πληροφοριών αποθέματος, όταν το σφάλμα απογραφής είναι πιο σοβαρό και ειδικά όταν είναι πιο μεταβλητό.



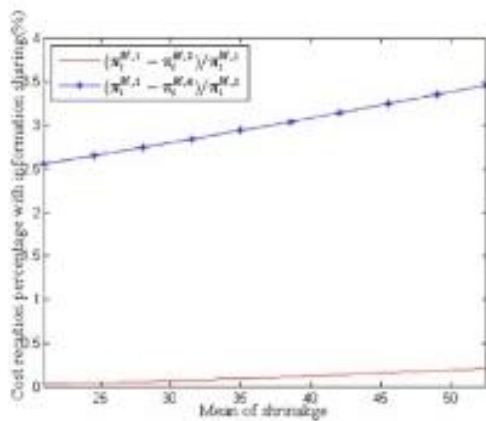
(a) Effects of shrinkage mean



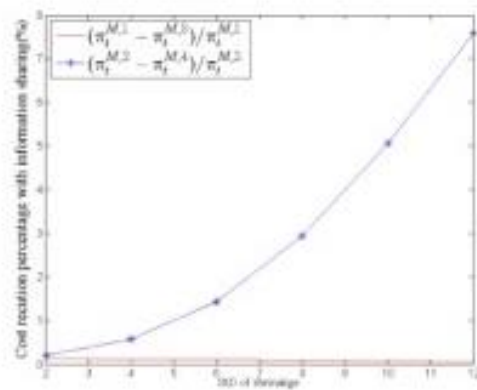
(b) Effects of shrinkage StD

Σχήμα 2.3: Η επίδραση της ποιότητας των πληροφοριών στο φαινόμενο bullwhip

Πηγή: (Dai H, et al,2016)



(a) Effects of shrinkage mean



(b) Effects of shrinkage StD

Σχήμα 2.4: Οι επιπτώσεις της ποιότητας των πληροφοριών στο κόστος

Πηγή: (Dai H, et al,2016)

Τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να βοηθήσουν τόσο τους λιανοπωλητές, όσο και τους κατασκευαστές να βελτιώσουν τις αποφάσεις τους με βάση την ποιότητα των διαθέσιμων πληροφοριών. Ο έμπορος λιανικής δεν επωφελείται άμεσα από την ανταλλαγή πληροφοριών με άλλα μέλη της αλυσίδας εφοδιασμού, αλλά γνωρίζει ότι η ανταλλαγή πληροφοριών είναι πάντα ευνοϊκή για τον κατασκευαστή. Επομένως, ο έμπορος λιανικής μπορεί να αξιοποιήσει αυτό το πλεονέκτημα για να διαπραγματευτεί τα οφέλη που προκύπτουν, (όπως μικρότερο χρόνο παράδοσης) με τον κατασκευαστή (Lee et al., 2000).

Η πρόσβαση σε διαθέσιμες πληροφορίες σε πραγματικό χρόνο σε ένα στάδιο μιας εφοδιαστικής αλυσίδας, καθώς και η κοινή χρήση πληροφοριών μπορεί να συμβάλει στην μείωση του κόστους απόκτησης πληροφοριών σε πραγματικό χρόνο. Επομένως η ποιότητα των πληροφοριών και η ανταλλαγή πληροφοριών είναι αλληλένδετες και αλληλοενισχύονται. Κάτι, που γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι η συνεργασία μεταξύ των εταιριών της εφοδιαστικής αλυσίδας έχει συμβάλει ώστε να υπάρξει ολοένα και πιο σημαντική αλληλεπίδραση μεταξύ τους, στο σημερινό επιχειρηματικό περιβάλλον. Η αλληλεπίδραση αυτή έχει επιτευχθεί εξαιτίας των προηγμένων τεχνολογιών του διαδικτύου, των διαθέσιμων προγραμμάτων και των μεγάλων δεδομένων (big data)(Dai et al,2016).

Κεφάλαιο 3: «Το φαινόμενο Bullwhip στην περίπτωση του Λιανοπωλητή»

Στην παρούσα εργασία, η ανάλυση θα βασιστεί στην υπόθεση ότι η ζήτηση του λιανοπωλητή θα διαμορφώνεται για κάθε χρονική περίοδο σύμφωνα με το στάσιμο αυτοπαλίνδρομο σχήμα δευτέρου βαθμού AR(2).

Έστω λοιπόν ότι η ζήτηση για το προϊόν του λιανοπωλητή σε κάθε χρονική περίοδο διαμορφώνεται σύμφωνα με το AR(2):

$$d_t = \delta + \varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2 d_{t-2} + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Όπου (ε_t) είναι ακολουθία ανεξάρτητων μεταβλητών που αναπαριστούν τυχαία σφάλματα με κάθε ε_t να κατανέμεται κανονικά με αναμενόμενη τιμή $E(\varepsilon_t)=0$ και διακύμανση $\text{Var}(\varepsilon_t)=\sigma_\varepsilon^2$.

Οι συνθήκες

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -1 < \varphi_2 < 1 \quad (3.2)$$

διασφαλίζουν ότι η ζήτηση θα είναι στάσιμη σύμφωνα με Hamilton (1994) και θα κατανέμεται κανονικά με μέσο:

$$\mu = \frac{\delta}{1-\varphi_1-\varphi_2} \quad (3.3)$$

Και διακύμανση:

$$\gamma_0^{(R)} = \varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \sigma^2 \quad (3.4)$$

Επίσης για το AR(2) οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης ρ_s , (autocorrelation coefficients), οι οποίοι ως γνωστόν δείχνουν την ένταση της συσχέτισης μεταξύ δύο οποιονδήποτε τιμών της χρονοσειράς της ζήτησης, προκύπτουν από την σχέση:

$$\rho_s = \varphi_1 \rho_{s-1} + \varphi_2 \rho_{s-2} \quad (3.5)$$

Έτσι ισχύει:

$$\rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2$$

$$\rho_0 = 1 \text{ και } \rho_{-1} = \rho_1$$

Οι παραπάνω εξισώσεις, γνωστές και ως εξισώσεις Yule-Walker συνιστούν σύστημα δύο εξισώσεων, όπου από την λύση του προκύπτουν οι τιμές για τις δύο αυτοσυσχετίσεις, εφόσον είναι γνωστές οι τιμές των συντελεστών φ_1, φ_2 :

$$\rho_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \text{ και } \rho_2 = \varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \quad (3.6)$$

Ακολούθως ορίζονται και οι συντελεστές αυτοσυνδιακύμανσης ως:

$$\gamma_s = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-i}) = \varphi_1 \gamma_{i-1} + \varphi_2 \gamma_{i-2} + \sigma^2 \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με τις (3.3) και (3.5) η διακύμανση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\gamma_0^R = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} - \varphi_2^2 - \frac{\varphi_2 \varphi_1^2}{1-\varphi_2}} = \frac{(1-\varphi_2)}{(1+\varphi_2)} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1+\varphi_2)^2 - \varphi_1^2} \quad (3.8)$$

Στην παρούσα εργασία περιγράφεται μια εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων από έναν λιανοπωλητή και έναν προμηθευτή, και γίνεται η υπόθεση ότι τόσο ο Λιανοπωλητής (στάδιο 1) όσο και ο προμηθευτής (στάδιο 2) ακολουθούν την πολιτική «παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος».

Αρχικά, ο λιανοπωλητής (στάδιο 1) δίνει την παραγγελία του στο τέλος της κάθε χρονικής περιόδου t , αφού παρατηρήσει την ζήτηση d_t της περιόδου και εφόσον έχει μετρήσει το επίπεδο του αποθέματος του.

Η παραγγελία του σύμφωνα με τον Lee et al. (2000) θα είναι ίση με:

$$q_t^{(R)} = d_t + (Y_t^{(R)} - Y_{t-1}^{(R)}) \quad (3.9)$$

Ουσιαστικά με την παραγγελία του ο λιανοπωλητής θα πρέπει να αναπληρώσει το υπάρχον απόθεμα για το μέγεθος της ζήτησης της τρέχουσας περιόδου, αλλά και την μεταβολή μεταξύ των χρονικών περιόδων t και $t-1$ του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος εξαιτίας της αναπροσαρμογής της πρόβλεψης της συνολικής ζήτησης στον χρόνο παράδοσης της παραγγελίας (L_R).

Όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 1, το $Y_t^{(R)}$ και $Y_{t-1}^{(R)}$ αντίστοιχα προσδιορίζονται από την (1.4) δηλαδή ισούται :

$$Y_t^{(R)} = \hat{D}_{t|H_t} + z_\eta \sqrt{V_{t|H_t}^{(R)}}, \text{ και } Y_{t-1}^{(R)} = \hat{D}_{t-1|H_{t-1}} + z_\eta \sqrt{V_{t-1|H_{t-1}}^{(R)}} \quad (3.10)$$

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας των τύπων υπολογισμού του $Y_t^{(R)}$ που δημιουργεί η ζήτηση AR(2), θα μελετηθούν παρακάτω οι περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας θα είναι ίσος με $L_R=1,2,3$.

3.1 Η περίπτωση που $L_R=1$

Η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής όταν ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας (L_R)=1 θα ισούται με :

$$d_{t+1} = \delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} + \varepsilon_{t+1} \quad (3.11)$$

Έχοντας επίσης διαθέσιμο το σύνολο των στοιχείων $H_t = \{\dots, d_{t-2}, d_{t-1}, d_t\}$ που αφορά το μέγεθος της ζήτησης, τις χρονικές περιόδους $(\dots, t-2, t-1, t)$ και κατ' επέκταση και τις αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων $(\dots, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)$ η πρόβλεψη «Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (Minimum Mean Square Error)» η οποία διενεργείται την χρονική περίοδο t και αφορά το μέγεθος της ζήτησης την χρονική περίοδο $t+1$ θα δίνεται από την σχέση:

$$\hat{d}_{t+1} = E(d_{t+1}|d_t, d_{t-1}) = \delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} \quad (3.12)$$

Επομένως, το σφάλμα πρόβλεψης θα έχει αναμενόμενη τιμή:

$$e_{t+1} = d_{t+1} - \hat{d}_{t+1} = \varepsilon_{t+1} \quad (3.13)$$

Και η διακύμανση θα ισούται ;

$$V_t^{(R)} = Var(\varepsilon_{t+1}) = \sigma_\varepsilon^2 \quad (3.14)$$

Για τον προσδιορισμό του στοχευμένου επιπέδου αποθέματος τη χρονική περίοδο t απαιτείται, σύμφωνα με την (1.4) ο υπολογισμός του όρου \hat{D}_t που συμβολίζει την πρόβλεψη της συνολικής ζήτησης που θα εμφανιστεί τις χρονικές περιόδους $t+1$, $t+2$ και $t+3$ αντίστοιχα, επιπλέον ο υπολογισμός του όρου V_t που είναι η διακύμανση του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης των μεγεθών της ζήτησης του λιανοπωλητή που θα εμφανιστούν τις χρονικές περιόδους $t+1$, $t+2$ και $t+3$ αντίστοιχα.

Έτσι για $L_R=1$ ισχύει ότι:

Για το \hat{D}_t :

$$\hat{D}_t = \delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} \quad (3.15)$$

Και για το \hat{D}_{t-1} :

$$\hat{D}_{t-1} = \delta + \varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2 d_{t-2} \quad (3.16)$$

Το μέγεθος της παραγγελίας την χρονική περίοδο t σύμφωνα με την (3.9) και όταν $L_R=1$ θα δίνεται από:

$$\begin{aligned} q_t^{(R)} &= d_t + (Y_t - Y_{t-1}) = d_t + (\hat{D}_t + z_{nR}\sqrt{V_t} - \hat{D}_{t-1} - z_{nR}\sqrt{V_{t-1}}) \\ &= d_t + (\hat{D}_t - \hat{D}_{t-1}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Με δεδομένο ότι ισχύει $V_t = V_{t-1}$ όπως έχει αναφερθεί πάρα πάνω
Σύμφωνα με τις (3.15), (3.16) και (3.17) το μέγεθος της παραγγελίας διαμορφώνεται
ως εξής:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= d_t + \delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} - (\delta + \varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2 d_{t-2}) \\
 &= d_t + \delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} - \delta - \varphi_1 d_{t-1} - \varphi_2 d_{t-2} \\
 &= (1 + \varphi_1) d_t + (\varphi_2 - \varphi_1) d_{t-1} - \varphi_2 d_{t-2}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Με δεδομένο ότι η διακύμανση $Var(d_t) = \gamma_0^R$ έχει υπολογιστεί σύμφωνα με την
(3.8).

Στην συνέχεια η διακύμανση $Var(q_t^{(R)})$ σύμφωνα με τον Luong (2007) θα ισούται:

$$\begin{aligned}
 Var(q_t^{(R)}) &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^R + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^R + \varphi_2^2 \gamma_0^R + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) cov(d_t d_{t-1}) \\
 &\quad - 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2) cov(d_t d_{t-2}) - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2) cov(d_{t-1} d_{t-2}) \\
 &= \gamma_0^R \left[(1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) + \frac{\varphi_1^2(-2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2)}{1 - \varphi_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varphi_2^2(-2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2)}{1 - \varphi_1} + \frac{\varphi_1\varphi_2(2 - 2\varphi_2 - 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2)}{1 - \varphi_1} \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Οι παραγγελίες του λιανοπωλητή αποτελούν την ζήτηση την οποία αντιμετωπίζει ο
κατασκευαστής. Για τον λόγο αυτό το φαινόμενο Bullwhip μπορεί να μετρηθεί από το
λόγο της απόλυτης διακύμανσης της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο κατασκευαστής και
της απόλυτης διακύμανσης της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής.

Και δεδομένου ότι $E(q_t) = E(d_t) = \mu$, ο λόγος Bullwhip διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 BW_t &= \frac{Var(q_t^{(R)})}{Var(d_t)} \\
 &= (1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) + \frac{\varphi_1^2(-2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2)}{1 - \varphi_1} \\
 &\quad + \frac{\varphi_2^2(-2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2)}{1 - \varphi_1} + \frac{\varphi_1\varphi_2(2 - 2\varphi_2 - 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2)}{1 - \varphi_1}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.2 Η περίπτωση που $L_R=2$

Η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής όταν ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας (L_R)=2 θα ισούται με:

$$\begin{aligned}
 d_{t+2} &= \delta + \varphi_1 d_{t+1} + \varphi_2 d_t + \varepsilon_{t+2} \\
 &= \delta + \varphi_1(\delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) + \varphi_2 d_t + \varepsilon_{t+2} \\
 &= \delta + \varphi_1 \delta + \varphi_1 \varphi_1 d_t + \varphi_1 \varphi_2 d_{t-1} + \varphi_1 \varepsilon_{t+1} + \varphi_2 d_t + \varepsilon_{t+2} \\
 &= \delta(1 + \varphi_1) + (\varphi_1^2 + \varphi_2) d_t + \varphi_1 \varphi_2 d_{t-1} + \varphi_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Και για την πρόβλεψη ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος ισχύει:

$$\begin{aligned}
 \hat{d}_{t+2} &= \delta + \varphi_1 d_{t+1} + \varphi_2 d_t \\
 &= (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1^2 + \varphi_2) d_t + \varphi_1 \varphi_2 d_{t-1}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Επίσης, για τα σφάλματα πρόβλεψης θα ισχύει

$$e_{t+2} = d_{t+2} - \hat{d}_{t+2} = \varphi_1 \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} \tag{3.23}$$

Ενώ η διακύμανση θα ισούται με ;

$$\begin{aligned}
 V_t^{(R)} &= (1 + \varphi_1)^2 \text{Var}(\varepsilon_{t+1}) + \text{Var}(\varepsilon_{t+2}) = (1 + \varphi_1)^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\
 &= \sigma_\varepsilon^2 [1 + (1 + \varphi_1)^2]
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ομοίως με την περίπτωση όπου $L_R=1$, έτσι και στην περίπτωση αυτή υπολογίζεται το \hat{D}_t, \hat{D}_{t-1} :

$$\hat{D}_t = \sum_{i=1}^2 \hat{d}_{t+i} = [\delta + (1 + \varphi_1) \delta] + [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] d_t + [\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2] d_{t-1} \tag{3.25}$$

Έτσι το \hat{D}_{t-1} ισούται:

$$\hat{D}_{t-1} = [\delta + (1 + \varphi_1) \delta] + [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] d_{t-1} + [\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2] d_{t-2} \tag{3.26}$$

Το μέγεθος της παραγγελίας την χρονική περίοδο t σύμφωνα με την (3.9), (3.25) και (3.26) και όταν $L_R=2$ θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= (\hat{D}_t - \hat{D}_{t-1}) \\
 &= [\delta + (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) d_t + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2) d_{t-1}] - [\delta \\
 &\quad + (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) d_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2) d_{t-2}] \\
 &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) d_t + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_2) d_{t-1} \\
 &\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) d_{t-2}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Στην συνέχεια η διακύμανση θα ισούται

$$\begin{aligned}
\text{Var}(q_t^{(R)}) &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
&\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \text{cov}(d_t d_{t-1}) \\
&\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \text{cov}(d_t d_{t-2}) \\
&\quad - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \text{cov}(d_{t-1} d_{t-2}) \\
&= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \right. \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^3(-1 - 2\varphi_1 - \varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_2^3(-1 - \varphi_2 - 2\varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^2 \varphi_2(-2 + 5\varphi_2 - \varphi_1)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1 \varphi_2^2(3\varphi_1^2 + 1 - \varphi_2^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad \left. + \frac{2\varphi_1^3 \varphi_2(2\varphi_1 - \varphi_2^2 + \varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} \right] \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Και δεδομένου ότι $E(q_t) = E(d_t) = \mu$, ο λόγος Bullwhip διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
BW_t &= \frac{\text{Var}(q_t^{(R)})}{\text{Var}(d_t)} \\
&= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^3(-1 - 2\varphi_1 - \varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_2^3(-1 - \varphi_2 - 2\varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^2 \varphi_2(-2 + 5\varphi_2 - \varphi_1)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1 \varphi_2^2(3\varphi_1^2 + 1 - \varphi_2^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^3 \varphi_2(2\varphi_1 - \varphi_2^2 + \varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

3.3 Η περίπτωση που $L_R=3$

Η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο λιανοπωλητής όταν ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας (L_R)=3 θα ισούται με:

$$\begin{aligned} d_{t+3} &= \delta + \varphi_1 d_{t+2} + \varphi_2 d_{t+1} + \varepsilon_{t+3} \\ &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1) d_t + (\varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) d_{t-1} \\ &\quad + (\varphi_1^2 + \varphi_2) \varepsilon_{t+1} + \varphi_1 \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Και για την πρόβλεψη ελαχίστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{d}_{t+3} &= \delta + \varphi_1 d_{t+2} + \varphi_2 d_{t+1} \\ &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1) d_t \\ &\quad + (\varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) d_{t-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Επίσης, για τα σφάλματα πρόβλεψης θα ισχύει :

$$e_{t+3} = d_{t+3} - \hat{d}_{t+3} = (\varphi_1^2 + \varphi_2) \varepsilon_{t+1} + \varphi_1 \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} \quad (3.32)$$

Ενώ η διακύμανση θα ισούται με :

$$\begin{aligned} V_t^{(R)} &= (\varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \text{Var}(\varepsilon_{t+1}) + \varphi_1 \text{Var}(\varepsilon_{t+2}) + \text{Var}(\varepsilon_{t+3}) \\ &= (\varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \sigma_\varepsilon^2 + \varphi_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 [1 + \varphi_1^2 + (\varphi_1^2 + \varphi_2)^2] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ομοίως με τις περιπτώσεις όπου $L_R=1,2$, έτσι και όταν $L_R=3$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \hat{D}_t &= \sum_{i=1}^3 \hat{d}_{t+i} = \delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} + (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1^2 + \varphi_2) d_t + \varphi_1 \varphi_2 d_{t-1} + \\ &(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1) d_t + (\varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) d_{t-1} = (1 + 1 + \varphi_1 + 1 + \\ &\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1) d_t + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \\ &\varphi_2^2) d_{t-1} = (3 + 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1^2) \delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2) d_t + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \\ &\varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) d_{t-1} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Έτσι το \hat{D}_{t-1} ισούται:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{t-1} &= (3 + 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1^2) \delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2) d_{t-1} + \\ &(\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) d_{t-2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Το μέγεθος της παραγγελίας την χρονική περίοδο t σύμφωνα με την (3.9), (3.34) και (3.35) και όταν $L_R=3$ θα δίνεται από:

$$\begin{aligned}
q_t^{(R)} &= (\widehat{D}_t - \widehat{D}_{t-1}) \\
&= [(3 + 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1^2)\delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)d_t \\
&\quad + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)d_{t-1}] - [(3 + 2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1^2)\delta \\
&\quad + (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)d_{t-1} + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)d_{t-2}] \\
&= (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)d_t \\
&\quad + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)d_{t-1} \\
&\quad - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)d_{t-2} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια η διακύμανση θα ισούται:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(q_t^{(R)}) &= (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)^2\gamma_0^R \\
&\quad + (\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)^2\gamma_0^R \\
&\quad - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)^2\gamma_0^R \\
&\quad + 2(\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_1)\text{cov}(d_t d_{t-1}) \\
&\quad + 2(\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)\text{cov}(d_t d_{t-2}) \\
&\quad + 2(\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad + \varphi_2^2)\text{cov}(d_{t-1} d_{t-2}) \\
&= \gamma_0^R \left[(\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)^2 \right. \\
&\quad + (\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)^2 - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)^2 \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^4(8\varphi_2^2 - \varphi_1^3 - 2\varphi_1^2 - 2 - 3\varphi_1)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_2^4(-\varphi_1 - 3\varphi_1^3 - 4\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^3\varphi_2(-4\varphi_1 - 5 + 2\varphi_1^3 + \varphi_1^4)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1\varphi_2^3(5\varphi_1 + 5 + 4\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^2(6\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_2 + 5\varphi_1^3\varphi_2^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad \left. + \frac{2\varphi_2^2(\varphi_1^2 - \varphi_1^5\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)}{1 - \varphi_2} \right] \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Και δεδομένου ότι $E(q_t) = E(d_t) = \mu$, ο λόγος Bullwhip διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 BW_t &= \frac{Var(q_t^{(R)})}{Var(d_t)} \\
 &= (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)^2 \\
 &\quad - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)^2 + \frac{2\varphi_1^4(8\varphi_2^2 - \varphi_1^3 - 2\varphi_1^2 - 2 - 3\varphi_1)}{1 - \varphi_2} \\
 &\quad + \frac{2\varphi_2^4(-\varphi_1 - 3\varphi_1^3 - 4\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1^3\varphi_2(-4\varphi_1 - 5 + 2\varphi_1^3 + \varphi_1^4)}{1 - \varphi_2} \\
 &\quad + \frac{2\varphi_1\varphi_2^3(5\varphi_1 + 5 + 4\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1^2(6\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_2 + 5\varphi_1^3\varphi_2^2)}{1 - \varphi_2} \\
 &\quad + \frac{2\varphi_2^2(\varphi_1^2 - \varphi_1^5\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)}{1 - \varphi_2} \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Από τις (3.20), (3.29) και (3.38) αρχικά συνάγεται ότι οι παράγοντες οι οποίοι διαφοροποιούν τις τιμές του BW_t είναι ο βαθμός συσχέτισης της ζήτησης σε διαφορετικές χρονικές υστερήσεις, ο οποίος εκφράζεται μέσω των παραμέτρων φ_1 και φ_2 , και ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας L_R .

Η επίδραση των παραγόντων αυτών στο φαινόμενο Bullwhip θα διερευνηθούν στο κεφάλαιο 5, όπου θα υπάρξουν αριθμητικά παραδείγματα και γραφήματα.

Κεφάλαιο 4 :«Το φαινόμενο Bullwhip στην περίπτωση του Προμηθευτή».

Όπως και ο λιανοπωλητής έτσι και ο προμηθευτής, ακολουθεί την πολιτική «παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος».

Σύμφωνα με την πολιτική που εφαρμόζει ο προμηθευτής, στο τέλος κάθε χρονικής περιόδου t , αφού παρατηρήσει την ζήτηση $q_t^{(R)}$, η θέση του αποθέματος συγκρίνεται με το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος $Y_t^{(S)}$ και γίνεται η παραγγελία της ποσότητας :

$$q_t^{(S)} = q_t^{(R)} + (Y_t^{(S)} - Y_{t-1}^{(S)}) \quad (4.1)$$

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται το σενάριο ανταλλαγής πληροφορήσης στο οποίο ο προμηθευτής διαθέτει το σύνολο των παραγγελιών $Q_t = \{q_1^{(R)}, q_2^{(R)}, \dots, q_{t-1}^{(R)}, q_t^{(R)}\}$ και την ζήτηση που καλείται να ικανοποιήσει ο λιανοπωλητής $H_t = \{d_1, d_2, \dots, d_{t-1}, d_t\}$. Η ζήτηση του λιανοπωλητή ακολουθεί το υπόδειγμα AR(2), και η ζήτηση είναι $D_t = d + \varphi_1 D_{t-1} + \varphi_2 D_{t-2} + \varepsilon_t$ και ισχύει $\varphi_1 + \varphi_2 < 1$, $\varphi_2 - \varphi_1 < 1$, και $|\varphi_2| < 1$ ώστε η διαδικασία να είναι στάσιμη.

Γενικά στο σενάριο αυτό, για να προσδιοριστεί το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος του προμηθευτή $Y_t^{(S,IS)}$, ο προμηθευτής χρειάζεται να προβλέψει την συνολική ζήτηση (ή την ποσότητα παραγγελίας του λιανοπωλητή) στον χρόνο παράδοσης της παραγγελίας L_S .

Παρακάτω θα προσδιοριστούν δύο περιπτώσεις του φαινομένου Bullwhip, στην πρώτη περίπτωση υπολογίζεται ο λόγος της απόλυτης τιμής της διακύμανσής της παραγγελίας που δίνεται στον κατασκευαστή προς την απόλυτη τιμή της διακύμανσης της ζήτησης του λιανοπωλητή, ενώ στην δεύτερη υπολογίζεται ο λόγος της απόλυτης τιμής της διακύμανσής της παραγγελίας που δίνεται στον κατασκευαστή προς την απόλυτη τιμή της διακύμανσης της ζήτησης του προμηθευτή. Όπως και στην περίπτωση του λιανοπωλητή έτσι και στην περίπτωση του προμηθευτή θα γίνει η μελέτη των περιπτώσεων όπου το $L_S=1,2,3$ εξαιτίας της πολυπλοκότητας υπολογισμού του $Y_t^{(S)}$ που δημιουργεί η ζήτηση του ARIMA (2,2).

Προκειμένου να υπολογιστεί στην συνέχεια η διακύμανση $Var(q_t^{(S,IS)})$ είναι απαραίτητο να υπολογιστεί το θ_1 και θ_2 για την κάθε περίπτωση όπου το $L_S=1,2,3$.

4.1 Η περίπτωση που $L_S=1$

Στην περίπτωση όπου το $L_S=1$ και σύμφωνα με την (3.18) ισχύει ότι:

$$q_t^{(R)} = (1 + \varphi_1)d_t + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-1} - \varphi_2d_{t-2} \quad (4.2)$$

Επίσης σύμφωνα με την (3.1) για d_t, d_{t-1}, d_{t-2} θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} d_t &= \delta + \varphi_1d_{t-1} + \varphi_2d_{t-2} + \varepsilon_t \\ d_{t-1} &= \delta + \varphi_1d_{t-2} + \varphi_2d_{t-3} + \varepsilon_{t-1} \\ d_{t-2} &= \delta + \varphi_1d_{t-3} + \varphi_2d_{t-4} + \varepsilon_{t-2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της $q_t^{(R)}$ (3.18) και κάνοντας αντικατάσταση στην (4.3)

προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} q_t^{(R)} &= (1 + \varphi_1)d_t + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-1} - \varphi_2d_{t-2} \\ &= \delta + \varphi_1[(1 + \varphi_1)d_{t-1} + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-2} + (-\varphi_2)d_{t-3}] \\ &\quad + \varphi_2[(1 + \varphi_1)d_{t-2} + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-3} + (-\varphi_2)d_{t-4} + (1 + \varphi_1)\varepsilon_t \\ &\quad + (\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} - \varphi_2\varepsilon_{t-2}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Όμως σύμφωνα με την (3.18) για $q_{t-1}^{(R)}$ και $q_{t-2}^{(R)}$ ισχύει ότι:

$$q_{t-1}^{(R)} = (1 + \varphi_1)d_{t-1} + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-2} - \varphi_2d_{t-3} \quad (4.5)$$

Και

$$q_{t-2}^{(R)} = (1 + \varphi_1)d_{t-2} + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-3} - \varphi_2d_{t-4} \quad (4.6)$$

Επομένως η (4.4) διαμορφώνεται ως εξής :

$$q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2q_{t-2}^{(R)} + (1 + \varphi_1)\varepsilon_t + (\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} - \varphi_2\varepsilon_{t-2} \quad (4.7)$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι η διαχρονική εξέλιξη των παραγγελιών $q_t^{(R)}$ ακολουθεί το υπόδειγμα ARIMA (2,2) και μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1q_{t-1} + \varphi_2q_{t-2} + v_t + \theta_1v_{t-1} + \theta_2v_{t-2} \quad (4.8)$$

Επομένως σύμφωνα με τις (4.7) και (4.8) θα ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} v_t &= \varepsilon_t(1 + \varphi_1), \\ \theta_1v_{t-1} &= \varepsilon_{t-1}(\varphi_2 - \varphi_1) \leftrightarrow \theta_1 \varepsilon_{t-1}(1 + \varphi_1) = \varepsilon_{t-1}(\varphi_2 - \varphi_1) \leftrightarrow \theta_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{1 + \varphi_1}, \\ \theta_2v_{t-2} &= -\varphi_2 \leftrightarrow \theta_2 \varepsilon_{t-2}(1 + \varphi_1) = -\varphi_2 \leftrightarrow \theta_2 = \frac{-\varphi_2}{1 + \varphi_1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Εφόσον η διαχρονική εξέλιξη των παραγγελιών $q_t^{(R)}$ ακολουθεί το υπόδειγμα ARIMA (2,2) για την διακύμανση της ζήτησης του προμηθευτή σύμφωνα με (Box et.a, 1994) θα ισχύει:

$$\gamma_0^{(S)} = \sigma_v^2 \frac{(1 + \varphi_2)(-\varphi_1\theta_1 - \varphi_1^2\theta_2 + \varphi_1\theta_2\theta_1) + (1 - \varphi_2)(-\varphi_2\theta_2 + 1 - \theta_1\varphi_1 + \theta_1^2 - \theta_2\varphi_1^2 + \theta_2\theta_1\varphi_1 - \theta_2\varphi_2 + \theta_2^2)}{(1 - \varphi_2)(1 - \varphi_2^2) - (1 + \varphi_2)(\varphi_1^2)} \quad (4.10)$$

Επίσης με δεδομένο ότι είναι διαθέσιμο το σύνολο των στοιχείων $O_t = \{q_t^{(R)}, q_{t-1}^{(R)}, q_{t-2}^{(R)}, \dots\}$, που αφορά το μέγεθος της ζήτησης του λιανοπωλητή τις χρονικές στιγμές $t, t-1, t-2, \dots$, και επιπλέον το γεγονός ότι ο προμηθευτής γνωρίζει το σύνολο των στοιχείων $H_t = \{d_t, d_{t-1}, d_{t-2}, \dots\}$, που αφορά το μέγεθος της ζήτησης του προϊόντος, τις χρονικές στιγμές $t, t-1, t-2, \dots$, συνεπάγεται ότι είναι διαθέσιμες και οι αντίστοιχες τιμές των σφαλμάτων $(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots)$. Έτσι η πρόβλεψη «Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος» (MMSE) η οποία δίνεται στο τέλος της χρονικής περιόδου t και αφορά το μέγεθος της ζήτησης όταν $L_S=1$ θα ισούται :

$$\hat{q}_{t+1}^{(R)} = \delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} \quad (4.11)$$

Ενώ τα σφάλματα πρόβλεψης θα είναι :

$$e_t^{(S,IS)} = \varepsilon_t(1 + \varphi_1) \quad (4.12)$$

Και η διακύμανση θα είναι ίση:

$$V_t = (1 + \varphi_1)^2 \sigma_v^2 \quad (4.13)$$

Το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος για τον προμηθευτή $Y_t^{(S,IS)}$, απαιτεί την πρόβλεψη της συνολικής ζήτησης $\hat{Q}_t^{(S,IS)}$ που θα εμφανιστεί στον χρόνο παράδοσης της παραγγελίας L_S , καθώς και την διακύμανση του αθροίσματος των σφαλμάτων πρόβλεψης της ζήτησης $V_t^{(S,IS)}$ που θα εμφανιστεί τα χρονικά διάστημα $t+1, t+2$ και $t+3$ όταν οι προβλέψεις διενεργούνται την χρονική περίοδο t .

Έτσι όταν $L_S=1$ ισχύει ότι:

$$\hat{Q}_t^{(S,IS)} = \delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} \quad (4.14)$$

και

$$\hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} = \delta + \varphi_1 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_{t-2}^{(R)} \quad (4.15)$$

Το μέγεθος της παραγγελίας σύμφωνα με (4.1) ισούται:

$$q_t^{(S)} = q_t^{(R)} + (Y_t^{(S)} - Y_{t-1}^{(S)}) \quad (4.16)$$

Με δεδομένο ότι το στοχευμένο επίπεδο αποθέματος την χρονική στιγμή t και $t-1$ δίνεται από τον (1.4) θα ισχύει ότι:

$$Y_t^{(S,IS)} = \hat{Q}_t^{(S,IS)} + Z_{n(S)} \sqrt{V_t^{(S,IS)}} \quad (4.17)$$

Και

$$Y_{t-1}^{(S,IS)} = \hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} + Z_{n(S)} \sqrt{V_{t-1}^{(S,IS)}} \quad (4.18)$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην (4.16) ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} q_t^{(S,IS)} &= q_t^{(R)} + (\hat{Q}_t^{(S,IS)} - \hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)}) \\ &= q_t^{(R)} + (\delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} - \delta - \varphi_1 q_{t-1}^{(R)} - \varphi_2 q_{t-2}^{(R)}) \\ &= (1 + \varphi_1) q_t^{(R)} + (\varphi_2 - \varphi_1) q_{t-1}^{(R)} - \varphi_2 q_{t-2}^{(R)} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Στην συνέχεια η διακύμανση θα ισούται με:

$$\begin{aligned} Var(q_t^{(S,IS)}) &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} + (-\varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\ &\quad + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) cov(q_t q_{t-1}) - 2(1 + \varphi_1)(-\varphi_2) cov(q_t q_{t-2}) \\ &\quad - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(-\varphi_2) cov(q_{t-1} q_{t-2}) \\ &= \gamma_0^{(S)} \left[(1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. + 2(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Επομένως το φαινόμενο Bullwhip στην πρώτη περίπτωση θα ισούται:

$$\begin{aligned} BW_t &= \frac{Var(q_t^{(S,IS)})}{Var(d_t)} \\ &= \frac{\gamma_0^{(S)} (1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1)}{\gamma_0^{(R)}} + \frac{+2\gamma_0^{(S)} (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right)}{\gamma_0^{(R)}} \\ &\quad - \frac{2\gamma_0^{(S)} (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right)}{\gamma_0^{(R)}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ενώ στην δεύτερη περίπτωση το φαινόμενο Bullwhip ισούται:

$$\begin{aligned}
 BW_t &= \frac{Var(q_t^{(S,IS)})}{Var(q_t^{(R)})} \\
 &= (1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) \\
 &\quad + 2(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
 &\quad - 2(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Εξαιτίας της πολυπλοκότητας των τύπων υπολογισμού του $q_t^{(S,IS)}$ και των $\gamma_0^{(R)}$ και $\gamma_0^{(S)}$ δεν προχωράμε στις αντικαταστάσεις.

4.2 Η περίπτωση που $L_S=2$

Ομοίως για $L_S=2$ και σύμφωνα με την (3.27) ισχύει ότι:

$$q_t^{(R)} = [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]d_t + [+ \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2]d_{t-1} + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]d_{t-2} \tag{4.23}$$

Κάνοντας αντικατάσταση όπως και στην περίπτωση όπου το $L_S=1$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2](\delta + \varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2 d_{t-2} + \varepsilon_t) \\
 &\quad + [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2](\delta + \varphi_1 d_{t-2} + \varphi_2 d_{t-3} + \varepsilon_{t-1}) \\
 &\quad + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2](\delta + \varphi_1 d_{t-3} + \varphi_2 d_{t-4} + \varepsilon_{t-2}) = \\
 &= \varphi_1[\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]d_{t-1} + \varphi_1[\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2]d_{t-2} \\
 &\quad + \varphi_1[-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]d_{t-2} + \varphi_2[\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]d_{t-2} \\
 &\quad + \varphi_2[\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2]d_{t-3} + \varphi_2[-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]d_{t-3} + [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]\varepsilon_t \\
 &\quad + [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1]\varepsilon_{t-1} + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]\varepsilon_{t-2} \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Όμως σύμφωνα με την (3.27) ισχύει ότι:

$$q_{t-1}^{(R)} = [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]d_{t-1} + [+ \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2]d_{t-2} + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]d_{t-3} \tag{4.25}$$

Και

$$q_{t-2}^{(R)} = [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]d_{t-2} + [+ \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2]d_{t-3} + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]d_{t-4} \tag{4.26}$$

Επομένως η (4.24) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= \varphi_1 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_{t-2}^{(R)} + [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2]\varepsilon_t + [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1]\varepsilon_{t-1} \\
 &\quad + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2]\varepsilon_{t-2} \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι η διαχρονική εξέλιξη των παραγγελιών $q_t^{(R)}$ ακολουθεί το υπόδειγμα ARIMA (2,2) και μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 q_{t-1} + \varphi_2 q_{t-2} + v_t + \theta_1 v_{t-1} + \theta_2 v_{t-2} \quad (4.28)$$

Επομένως σύμφωνα με (4.27) θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} v_t &= \varepsilon_t [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2], \\ \theta_1 v_{t-1} &= \varepsilon_{t-1} [\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1] \leftrightarrow \theta_1 \varepsilon_{t-1} [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] = \varepsilon_{t-1} [\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1] \leftrightarrow \\ \theta_1 &= \frac{\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2}, \\ \theta_2 v_{t-2} &= [-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2] \leftrightarrow \theta_2 [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] \varepsilon_{t-2} = -\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 \leftrightarrow \theta_2 = \frac{-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

Η πρόβλεψη «Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος» (MMSE) η οποία δίνεται στο τέλος της χρονικής περιόδου t και αφορά το μέγεθος της ζήτησης όταν $L_S=2$ θα ισούται :

Εφόσον ισχύει ότι $\hat{q}_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_{t-2}^{(R)}$ τότε για τα $\hat{q}_{t+1}^{(R)}$ και $\hat{q}_{t+2}^{(R)}$ αντίστοιχα ισχύει:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{t+1}^{(R)} &= \delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)}, \\ \hat{q}_{t+2}^{(R)} &= \delta + \varphi_1 q_{t+1}^{(R)} + \varphi_2 q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 (\delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)}) + \varphi_2 q_t^{(R)} \\ &= \delta + \varphi_1 \delta + \varphi_1^2 q_t^{(R)} + \varphi_1 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_t^{(R)} \\ &= (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1^2 + \varphi_2) q_t^{(R)} + \varphi_1 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ενώ τα σφάλματα πρόβλεψης θα είναι :

$$e_t^{(S,IS)} = \varepsilon_t [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] \quad (4.31)$$

Και η διακύμανση θα είναι ίση:

$$V_t = (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \sigma_v^2 \quad (4.32)$$

Επίσης το \hat{Q}_t είναι ίσο

$$\hat{Q}_t^{(S,IS)} = \sum_{i=1}^2 \hat{q}_{t+i} = \delta + (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2) q_{t-1}^{(R)} \quad (4.33)$$

Έτσι το $\hat{Q}_t^{(S,IS)}$ και $\hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)}$ είναι:

$$\hat{Q}_t^{(S,IS)} = \delta + (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2) q_{t-1}^{(R)} \quad (4.34)$$

$$\hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} = \delta + (1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) q_{t-1}^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2) q_{t-2}^{(R)} \quad (4.35)$$

Έτσι όπως και στην περίπτωση όπου $L_S=1$ έτσι και για την περίπτωση όπου $L_S=2$ η ποσότητα παραγγελίας θα ισούται :

$$\begin{aligned}
q_t^{(S)} &= q_t^{(R)} + \left(\hat{Q}_t^{(S,IS)} - \hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} \right) \\
&= q_t^{(R)} + \delta + (1 + \varphi_1)\delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2)q_{t-1}^{(R)} - \delta \\
&\quad - (1 + \varphi_1)\delta - (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)q_{t-1}^{(R)} - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2)q_{t-2}^{(R)} \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_2)q_{t-1}^{(R)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)q_{t-2}^{(R)} \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια η διακύμανση θα ισούται με :

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(q_t^{(S,IS)}\right) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \text{cov}(q_t q_{t-1}) \\
&\quad - 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \text{cov}(q_t q_{t-2}) \\
&\quad - 2(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \text{cov}(q_{t-1} q_{t-2}) \\
&= \gamma_0^{(S)} [(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2] \\
&\quad + 2(-\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 - \varphi_1^4 + 2\varphi_2^2\varphi_1 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 \\
&\quad - 2\varphi_1^2\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
&\quad - 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Επομένως το φαινόμενο Bullwhip στην πρώτη περίπτωση θα ισούται:

$$\begin{aligned}
BW_t &= \frac{\text{Var}(q_t^{(S,IS)})}{\text{Var}(d_t)} \\
&= \frac{\gamma_0^{(S)} (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2}{\gamma_0^{(R)}} \\
&\quad + \frac{2\gamma_0^{(S)} (-\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 - \varphi_1^4 + 2\varphi_2^2\varphi_1 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1^2\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right)}{\gamma_0^{(R)}} \\
&\quad - \frac{2\gamma_0^{(S)} (-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right)}{\gamma_0^{(R)}} \tag{4.38}
\end{aligned}$$

Ενώ στην δεύτερη περίπτωση το φαινόμενο Bullwhip ισούται:

$$\begin{aligned}
 BW_t &= \frac{Var(q_t^{(S,IS)})}{Var(q_t^{(R)})} \\
 &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \\
 &\quad + 2(-\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 - \varphi_1^4 + 2\varphi_2^2\varphi_1 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 \\
 &\quad - 2\varphi_1^2\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
 &\quad - 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_2^2 \\
 &\quad - \varphi_1\varphi_2^2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

4.3 Η περίπτωση που $L_S=3$

Ομοίως για $L_S=3$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)d_t \\
 &\quad + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)d_{t-1} \\
 &\quad - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)d_{t-2} \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Κάνοντας τις αντιστάσεις όπως και στις περιπτώσεις όπου $L_S=1,2$, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 q_t^{(R)} &= [(\delta + \varphi_1d_{t-1} + \varphi_2d_{t-2} + \varepsilon_t)(\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)] + \\
 &[(\delta + \varphi_1d_{t-2} + \varphi_2d_{t-3} + \varepsilon_{t-1})(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \\
 &\varphi_1)] - [(\delta + \varphi_1d_{t-3} + \varphi_2d_{t-4} + \varepsilon_{t-2})(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)] = (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + \\
 &2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \\
 &\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)\delta + (\varphi_1^4 + \varphi_1^3 + 2\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2)d_{t-1} + (\varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \\
 &2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_2^2\varphi_1 - \varphi_1^4 - \varphi_1^3 - 2\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^2)d_{t-2} + \\
 &(\varphi_2^2\varphi_1 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_2^3 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \\
 &\varphi_2^2\varphi_1)d_{t-3} + (-\varphi_2^2 - \varphi_2^2\varphi_1 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_2^3)d_{t-4} + (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \\
 &\varphi_2)\varepsilon_t + (\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \\
 &\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)\varepsilon_{t-2} \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Επομένως η (4.41) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
q_t^{(R)} &= \varphi_1 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_{t-2}^{(R)} + [\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2]\varepsilon_t \\
&\quad + [\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1]\varepsilon_{t-1} \\
&\quad + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2]\varepsilon_{t-2}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Ομοίως με $L_S=1$ και $L_S=2$ προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}
v_t &= \varepsilon_t[\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2], \\
\theta_1 v_{t-1} &= \varepsilon_{t-1}[\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1] \leftrightarrow \theta_1 \varepsilon_{t-1}[\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + \\
2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2] &= \varepsilon_{t-1}[\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1] \\
\leftrightarrow \theta_1 &= \frac{\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2} \\
\theta_2 v_{t-2} &= [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2] \leftrightarrow \theta_2[\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2]\varepsilon_{t-2} \\
&= -\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2 \\
\leftrightarrow \theta_2 &= \frac{-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2}{\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Η πρόβλεψη «Ελαχίστου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος» (MMSE) η οποία δίνεται στο τέλος της χρονικής περιόδου t και αφορά το μέγεθος της ζήτησης όταν $L_S=3$:

Εφόσον ισχύει ότι $\hat{q}_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_{t-2}^{(R)}$ τότε για τα $\hat{q}_{t+1}^{(R)}$ και $\hat{q}_{t+2}^{(R)}$ αντίστοιχα ισχύει:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{t+1}^{(R)} &= \delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)}, \\
\hat{q}_{t+2}^{(R)} &= \delta + \varphi_1 q_{t+1}^{(R)} + \varphi_2 q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 (\delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)}) + \varphi_2 q_t^{(R)} = \delta + \varphi_1 \delta + \\
\varphi_1^2 q_t^{(R)} &+ \varphi_1 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 q_t^{(R)} = \delta(1 + \varphi_1) + q_t^{(R)}(\varphi_1^2 + \varphi_2) + \varphi_1 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{t+3}^{(R)} &= \delta + \varphi_1 q_{t+2}^{(R)} + \varphi_2 q_{t+1}^{(R)} \\
&= \delta + \varphi_1 \left[(1 + \varphi_1) \delta + (\varphi_1^2 + \varphi_2) q_t^{(R)} + \varphi_1 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} \right] \\
&\quad + \varphi_2 \left(\delta + \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} \right) \\
&= \delta + \varphi_1 (1 + \varphi_1) \delta + \varphi_1 (\varphi_1^2 + \varphi_2) q_t^{(R)} + \varphi_1^2 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 \delta + \varphi_2 \varphi_1 q_t^{(R)} \\
&\quad + \varphi_2^2 q_{t-1}^{(R)} \\
&= \delta + \varphi_1 \delta + \varphi_1^2 \delta + \varphi_1^3 q_t^{(R)} + \varphi_2 \varphi_1 q_t^{(R)} + \varphi_1^2 \varphi_2 q_{t-1}^{(R)} + \varphi_2 \delta + \varphi_2 \varphi_1 q_t^{(R)} \\
&\quad + \varphi_2^2 q_{t-1}^{(R)} \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1^3 + 2\varphi_2 \varphi_1) q_t^{(R)} + (\varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) q_{t-1}^{(R)} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Ενώ τα σφάλματα πρόβλεψης θα είναι :

$$e_t^{(S,IS)} = \varepsilon_t [\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2] \quad (4.45)$$

Και η διακύμανση θα είναι ίση:

$$V_t = \sigma_v^2 (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)^2 \quad (4.46)$$

Όταν $L_S=3$ ισχύει ότι το \hat{Q}_t είναι ίσο

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_t^{(S,IS)} &= \sum_{i=1}^2 \hat{q}_{t+i} \\
&= \delta + (1 + \varphi_1 + 1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta \\
&\quad + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2 \varphi_1) q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) q_{t-1}^{(R)} \\
&= (3 + 2\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2 \varphi_1) q_t^{(R)} \\
&\quad + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) q_{t-1}^{(R)} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Έτσι το $\hat{Q}_t^{(S,IS)}$ και $\hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)}$ είναι:

$$\hat{Q}_t^{(S,IS)} = (3 + 2\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2 \varphi_1) q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) q_{t-1}^{(R)} \quad (4.48)$$

$$\hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} = (3 + 2\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2) \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2 \varphi_1) q_{t-1}^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_2^2) q_{t-2}^{(R)} \quad (4.49)$$

Έτσι όπως και για την περίπτωση όπου $L_S=1$ έτσι και για την περίπτωση όπου $L_S=2$ η ποσότητα παραγγελίας θα ισούται :

$$\begin{aligned}
q_t^{(S)} &= q_t^{(R)} + \left(\hat{Q}_t^{(S,IS)} - \hat{Q}_{t-1}^{(S,IS)} \right) = q_t^{(R)} + (3 + 2\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)\delta + \\
&(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)q_{t-1}^{(R)} - \left[(3 + 2\varphi_1 + \right. \\
&\varphi_1^2 + \varphi_2)\delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)q_{t-1}^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)q_{t-2}^{(R)} \left. \right] = \\
&(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)q_t^{(R)} + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_2 - \\
&\varphi_1^3 - 2\varphi_2\varphi_1)q_{t-1}^{(R)} + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)q_{t-2}^{(R)} = (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + \\
&2\varphi_2\varphi_1)q_t^{(R)} + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)q_{t-1}^{(R)} + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \\
&\varphi_2^2)q_{t-2}^{(R)} \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια η διακύμανση θα ισούται:

$$\begin{aligned}
Var\left(q_t^{(S,IS)}\right) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \\
&+ (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \\
&+ (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \\
&+ 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 \\
&- \varphi_1^3)cov(q_t q_{t-1}) \\
&- 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 \\
&- \varphi_2^2)cov(q_t q_{t-2}) - 2(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 \\
&- \varphi_1^3)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)cov(q_{t-1} q_{t-2})
\end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (4.2) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
Var\left(q_t^{(S,IS)}\right) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&+ (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&+ (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&+ 2\gamma_0^{(S)}(-3\varphi_1\varphi_2 - 5\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 3\varphi_1^3 - 6\varphi_1^3\varphi_2 - 3\varphi_1^4 \\
&- 2\varphi_1^5 + 2\varphi_2^3 + 2\varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^6 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 4\varphi_1^4\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1^4\varphi_2^2 \\
&+ 2\varphi_1^2\varphi_2^3) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
&- 2\gamma_0^{(S)}(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 4\varphi_1\varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^3\varphi_2^2 \\
&- 2\varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^2 - \varphi_2^3 - \varphi_1^5\varphi_2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Επομένως το φαινόμενο Bullwhip στην πρώτη περίπτωση θα ισούται:

$$\begin{aligned}
BW_t &= \frac{Var(q_t^{(S,IS)})}{Var(d_t)} \\
&= \frac{\gamma_0^{(S)}(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 + \gamma_0^{(S)}(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2}{\gamma_0^{(R)}} \\
&\quad - \frac{\gamma_0^{(S)}(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2}{\gamma_0^{(R)}} \\
&\quad + \frac{2\gamma_0^{(S)}(-3\varphi_1\varphi_2 - 5\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 3\varphi_1^3 - 6\varphi_1^3\varphi_2 - 3\varphi_1^4)\left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}\right)}{\gamma_0^{(R)}} \\
&\quad + \frac{2\gamma_0^{(S)}(-2\varphi_1^5 + 2\varphi_2^3 + 2\varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^6 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 4\varphi_1^4\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1^4\varphi_2^2 + 2\varphi_1^2\varphi_2^3)\left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}\right)}{\gamma_0^{(R)}} \\
&\quad - \frac{2\gamma_0^{(S)}(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 4\varphi_1\varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^3\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^2 - \varphi_2^3 - \varphi_1^5\varphi_2)\left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}\right)}{\gamma_0^{(R)}}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Ενώ στην δεύτερη περίπτωση το φαινόμενο Bullwhip ισούται:

$$\begin{aligned}
BW_t &= \frac{Var(q_t^{(S,IS)})}{Var(q_t^{(R)})} \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \\
&\quad + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 - (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \\
&\quad + 2(-3\varphi_1\varphi_2 - 5\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 3\varphi_1^3 - 6\varphi_1^3\varphi_2 - 3\varphi_1^4 - 2\varphi_1^5 \\
&\quad + 2\varphi_2^3 + 2\varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^6 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 4\varphi_1^4\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1^4\varphi_2^2 \\
&\quad + 2\varphi_1^2\varphi_2^3)\left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}\right) \\
&\quad - 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 4\varphi_1\varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^3\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2^3 \\
&\quad - \varphi_2^2 - \varphi_2^3 - \varphi_1^5\varphi_2)\left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Από τις (4.21), (4.22), (4.38), (4.39) και (4.52),(4.53) αρχικά συνάγεται ότι οι παράγοντες οι οποίοι διαφοροποιούν τις τιμές του BW_t και στις δύο περιπτώσεις που αναφέρθηκαν είναι ο βαθμός συσχέτισης της ζήτησης σε διαφορετικές χρονικές υστερήσεις, ο οποίος εκφράζεται μέσω των παραμέτρων φ_1 και φ_2 , και ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας L_s .

Η επίδραση των παραγόντων αυτών στο φαινόμενο Bullwhip θα διερευνηθούν στο κεφάλαιο 5, όπου θα υπάρξουν αριθμητικά παραδείγματα και γραφήματα.

Κεφάλαιο 5: «Υπολογισμός του φαινομένου Bullwhip»

5.1 Η περίπτωση του Λιανοπωλητή

Σε μια εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων, ως φαινόμενο Bullwhip ορίζουμε την αύξηση της μεταβλητότητας της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής συγκριτικά με την μεταβλητότητα της ζήτησης του λιανοπωλητή. Δοθέντος όμως, ότι το μέγεθος της παραγγελίας του λιανοπωλητή q_t αποτελεί το μέγεθος της ζήτησης του προμηθευτή, συγκρίνοντας τη μεταβλητότητα του q_t με την μεταβλητότητα της ζήτησης d_t του λιανοπωλητή μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια μορφή μέτρησης των συνεπειών που έχει το φαινόμενο Bullwhip, η οποία για τη χρονική περίοδο t δίνεται από τον λόγο: $BW_t = \frac{Var(q_t)/E(q_t)}{Var(d_t)/E(d_t)}$ (Michna et al., 2013). Για τιμές του BW ίσες ή μικρότερες της μονάδας γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι το φαινόμενο Bullwhip δεν υφίσταται. Στο κεφάλαιο αυτό θα διερευνηθεί η επίδραση των παραμέτρων φ_1 και φ_2 και του χρόνου παράδοσης L , στο φαινόμενο Bullwhip $B(L, \varphi_1, \varphi_2)$. Η επίδραση των παραμέτρων αυτών θα γίνει αντιληπτή μέσα από διαγράμματα που θα προκύψουν για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων φ_1 και φ_2 και για διαφορετικούς χρόνους παράδοσης.

Αρχικά, για τις τιμές που θα δοθούν στις παραμέτρους φ_1 και φ_2 είναι απαραίτητο να ισχύουν οι εξής περιορισμοί:

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -1 < \varphi_2 < 1$$

ώστε να διασφαλίζουν ότι η διαδικασία AR(2), θα παραμείνει στάσιμη, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, σύμφωνα με την (2.9).

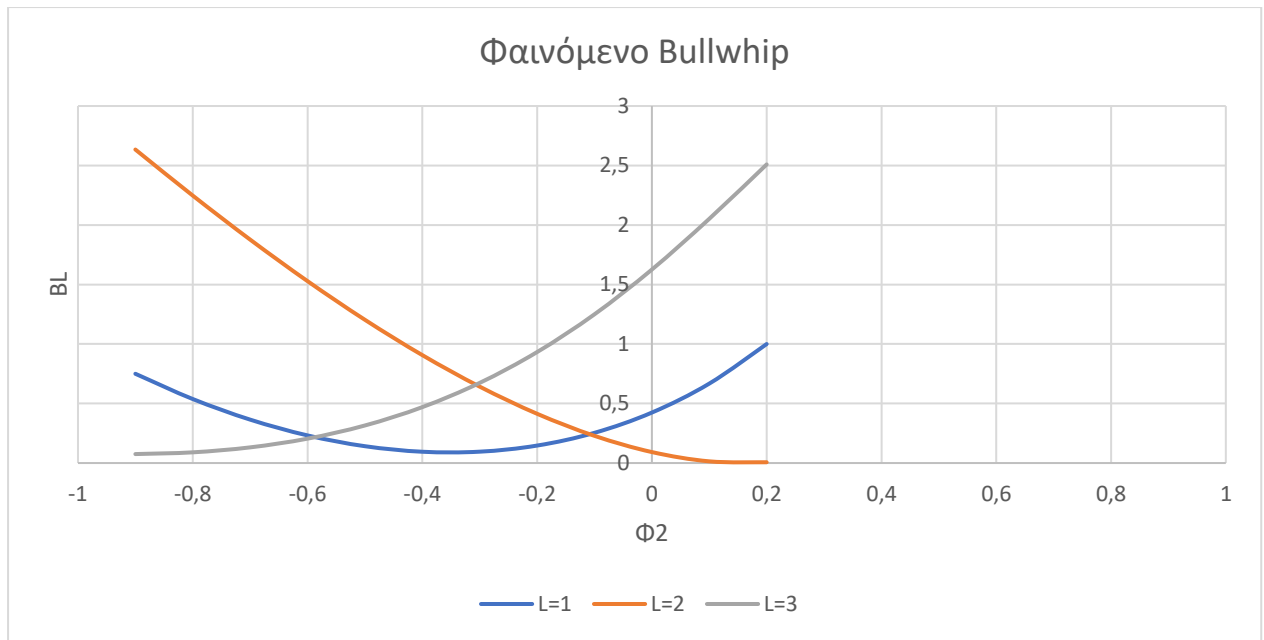
Όταν το $\varphi_1 < 0$

Στο διάγραμμα 5.1 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = -0,8$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,2$ και ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Παρατηρείται ότι:

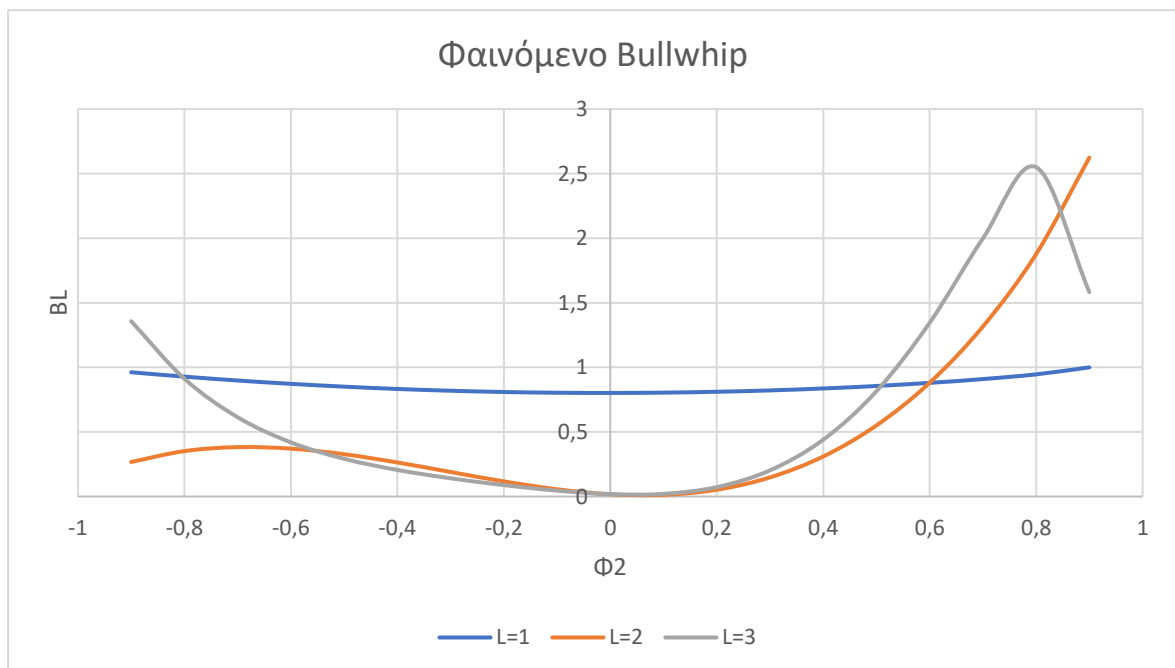
- Όταν $L=1$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται μόνο όταν $\varphi_2 = 0,2$.
- Όταν $L=2$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 < -0,5$ και όσο αυξάνεται το φ_2 , υπάρχει μείωση του Bullwhip.
- Όταν $L=3$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > -0,1$ και αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 .

Διάγραμμα 5.1: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = -0,8$



Στο διάγραμμα 5.2 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = -0,1$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ και ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.2: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = -0,1$



Παρατηρείται ότι:

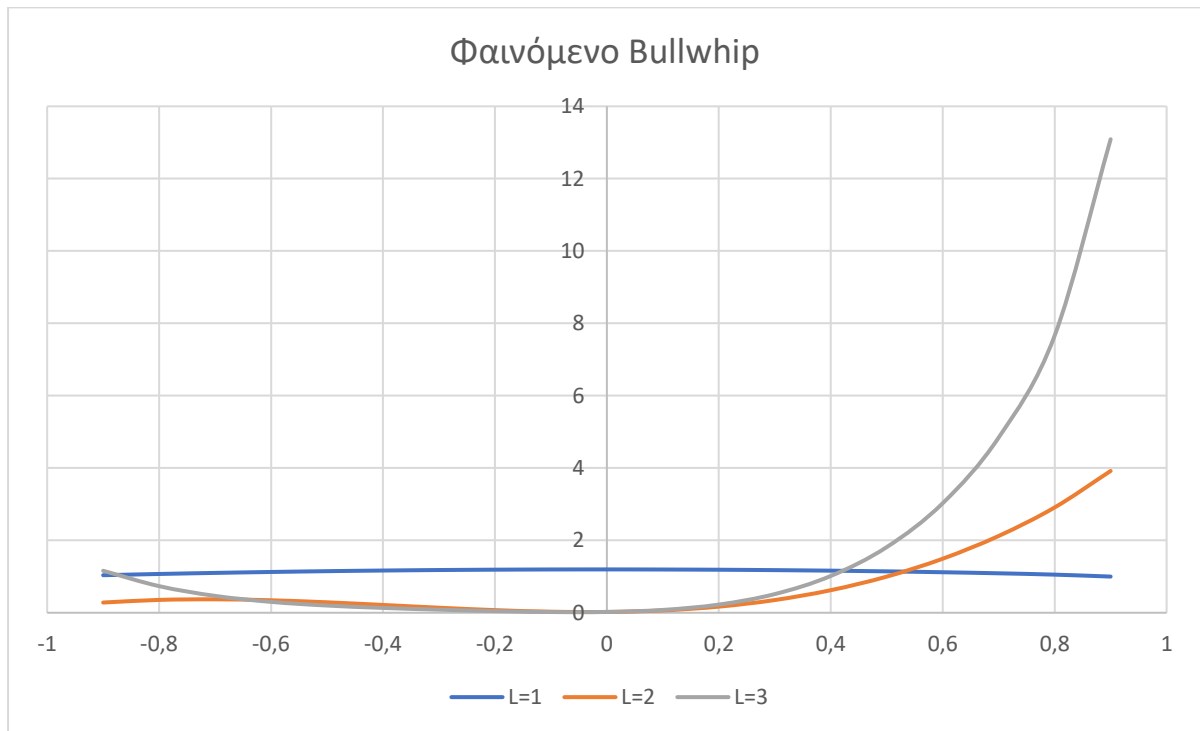
- Όταν $L=1$, το φαινόμενο Bullwhip δεν υπάρχει.
- Όταν $L=2$, το φαινόμενο Bullwhip παρατηρείται όταν $\varphi_2 > 0,7$, επίσης όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και ο λόγος Bullwhip.

- Όταν $L=3$, το φαινόμενο Bullwhip υφίσταται για τις υψηλές τιμές του $|\varphi_2|$.

Όταν $\varphi_1 > 0$

Στο διάγραμμα 5.3 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1=0,1$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ και ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.3: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1=0,1$



Παρατηρείται ότι:

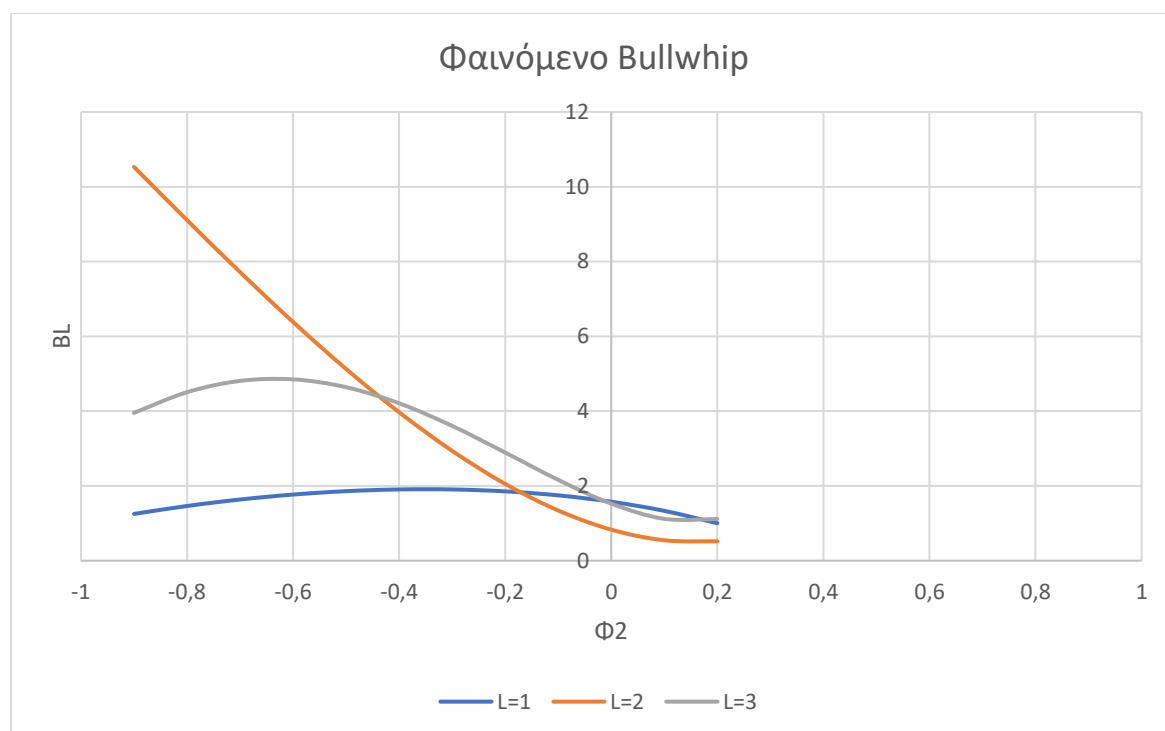
- Όταν $L=1$, η τιμή του λόγου Bullwhip κυμαίνεται από 1 έως 2.
- Όταν $L=2$, ο λόγος Bullwhip αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 και εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0,6$.
- Όταν $L=3$, ο λόγος Bullwhip αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 και εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0,4$.

Στο διάγραμμα 5.4 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1=0,8$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,2$ και ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Παρατηρείται ότι:

- Όταν $L=1$, η τιμή του λόγου Bullwhip κυμαίνεται από 1 έως 2.
- Όταν $L=2$, ο λόγος Bullwhip μειώνεται όσο αυξάνεται το φ_2 .
- Όταν $L=3$, ο λόγος Bullwhip μειώνεται όσο αυξάνεται το φ_2 .

Διάγραμμα 5.4: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1=0,8$



Λαμβάνοντας υπόψιν τα διαγράμματα και τους πίνακες του παραρτήματος προκύπτει ότι όσο ο χρόνος παράδοσης L αυξάνεται, δεν συνεπάγεται απαραίτητα και την αύξηση του φαινομένου bullwhip. Επιπλέον όταν ο συντελεστής φ_2 είναι αρνητικός (και το φ_1 θετικό) τότε όσο αυξάνεται το L δεν αυξάνεται και το φαινόμενο bullwhip, όμως όταν το φ_2 είναι θετικό (και το φ_1 θετικό) τότε όταν υπάρχει αύξηση του χρόνου παράδοσης υπάρχει και αύξηση της τιμής του λόγου Bullwhip. Ωστόσο είναι σημαντικό ότι η παραπάνω τάση δεν είναι γενική, καθώς οι υψηλότερες τιμές του Bullwhip εμφανίζονται όταν $L=2$ ($\varphi_1=0,9$ και $\varphi_2=-0,9$), παρατηρείται ότι υπάρχει μια σημαντική αύξηση όταν το L αυξάνεται από 1 σε 2, ωστόσο στην συνέχεια υπάρχει μια μικρή μείωση, όταν $L=3$. Η περίπλοκη «συμπεριφορά» του φαινομένου Bullwhip σε αυτές τις καταστάσεις προέρχεται από το γεγονός ότι το d_{t-1} και το d_t συσχετίζονται θετικά, ενώ το d_{t-2} και το d_t συσχετίζονται αρνητικά. Ωστόσο λόγω της περίπλοκης μορφής του φαινομένου Bullwhip (L, φ_1, φ_2) είναι αδύνατο να προσδιοριστεί το εύρος των τιμών των φ_1 και φ_2 στις οποίες το φαινόμενο Bullwhip δεν θα αυξάνεται, όταν αυξάνεται το L .

5.2 Η περίπτωση του Προμηθευτή

Όπως και στην περίπτωση του λιανοπωλητή, έτσι και στην περίπτωση του προμηθευτή, θα δοθούν τιμές των παραμέτρων φ_1 και φ_2 , ώστε να διερευνηθεί η επίδραση των παραμέτρων φ_1 και φ_2 και του χρόνου παράδοσης L , στις δύο περιπτώσεις (που έχουν εξεταστεί στο κεφάλαιο 4) του φαινομένου Bullwhip $B(L, \varphi_1, \varphi_2)$. Οι τιμές αυτές θα πρέπει να είναι σύμφωνες με τους εξής περιορισμούς:

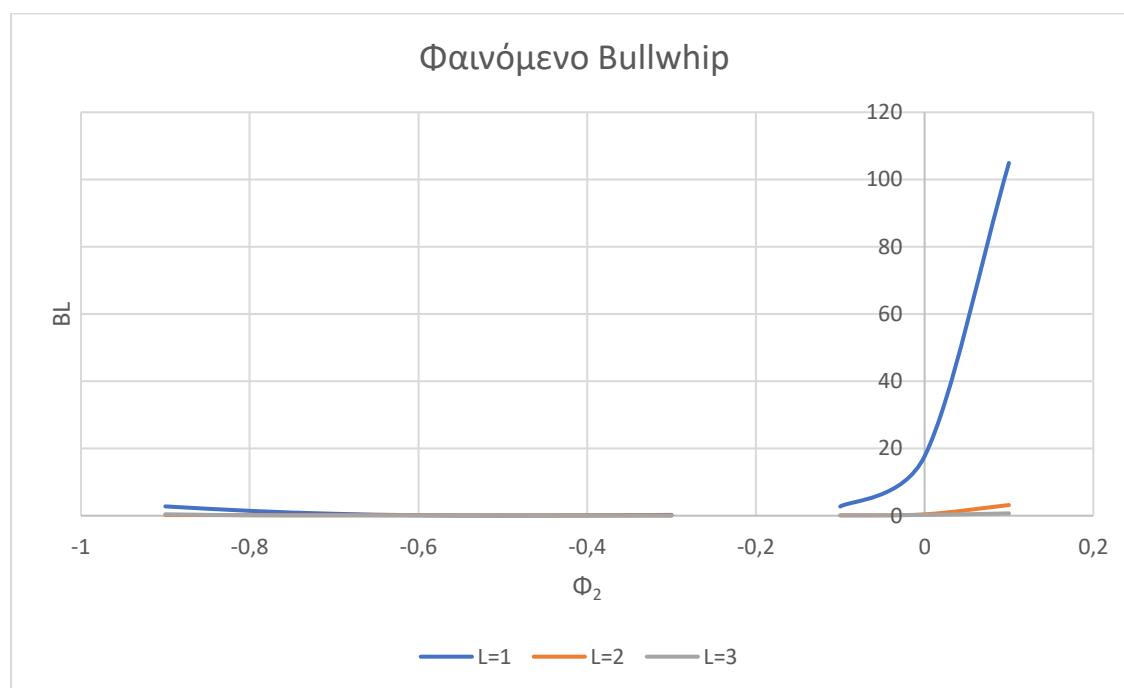
$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -\varphi_1 + \varphi_2 < 1, -1 < \varphi_2 < 1$$

5.2.1 Πρώτη περίπτωση, όπου $BW_t = \frac{Var(q_t^{(S,IS)})}{Var(d_t)}$

Όταν $\varphi_1 < 0$

Στο διάγραμμα 5.5 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = -0,8$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ και ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.5: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = -0,1$

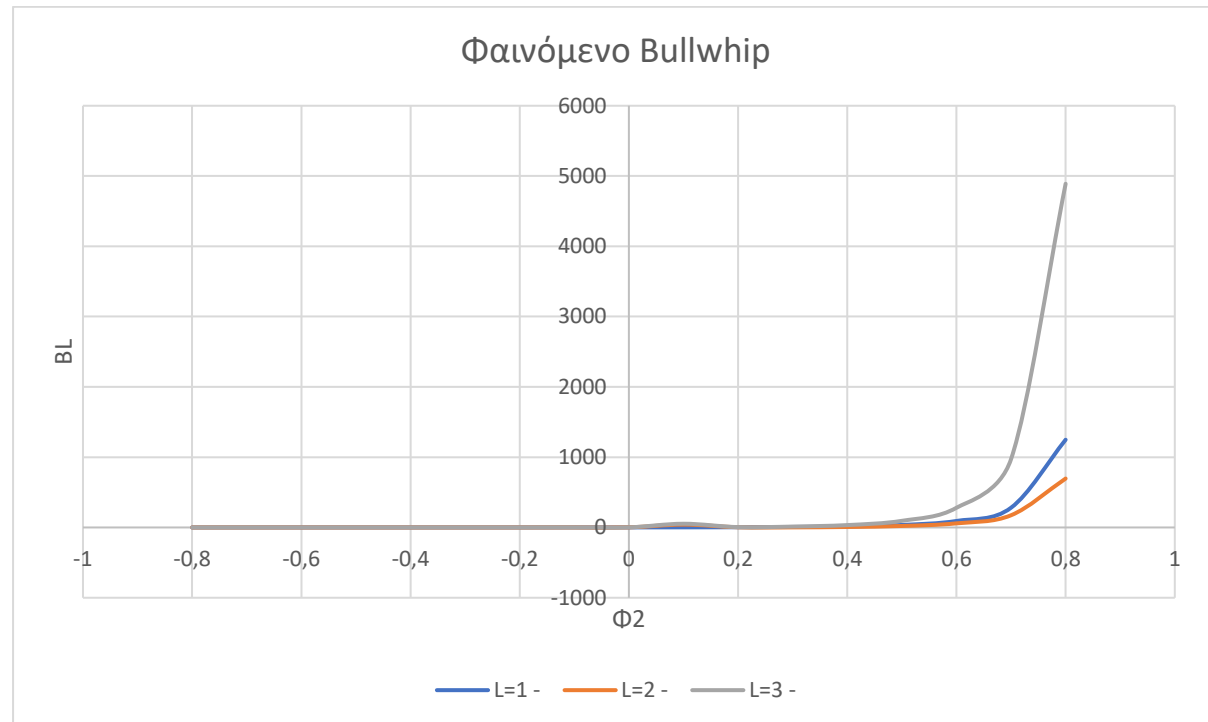


Είναι εμφανές ότι:

- Όταν $L=1$, οι υψηλότερες τιμές του Bullwhip εμφανίζονται για υψηλές τιμές του $|\varphi_2|$.
- Όταν $L=2$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται μόνο όταν $\varphi_2=0,1$.
- Όταν $L=3$, το φαινόμενο Bullwhip δεν εμφανίζεται.

Στο διάγραμμα 5.6 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = -0,1$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.6: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = -0,1$



Είναι εμφανές ότι:

- Όταν $L=1$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0$ και όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και ο λόγος Bullwhip.
- Ομοίως όταν $L=2$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > -0,1$ και όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και ο λόγος Bullwhip.
- Ομοίως και όταν $L=3$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > -0,1$ και όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και ο λόγος Bullwhip.

Όταν $\varphi_1 > 0$

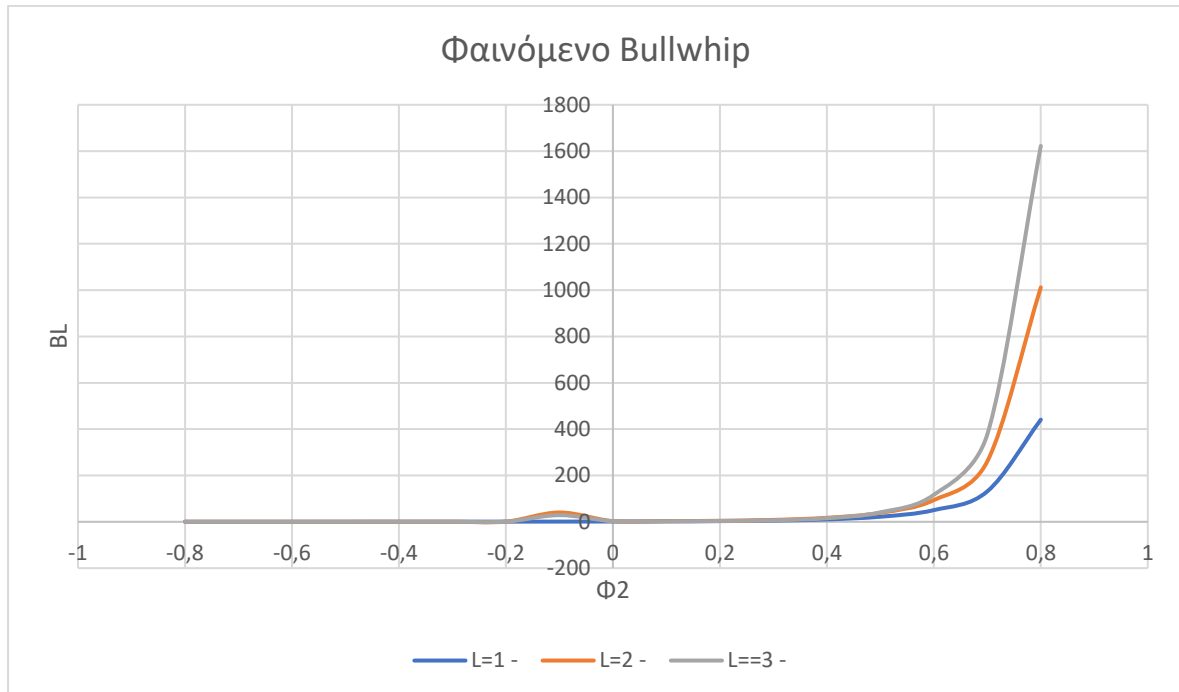
Στο διάγραμμα 5.7 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = 0,1$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Παρατηρείται ότι:

- Όταν $L=1$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > -0,1$ και όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και αυτό.
- Ομοίως όταν $L=2$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > -0,1$ και όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και αυτό.

- Ομοίως και όταν $L=3$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > -0,1$ και όσο αυξάνεται το φ_2 αυξάνεται και αυτό.

Διάγραμμα 5.7: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1=0,1$

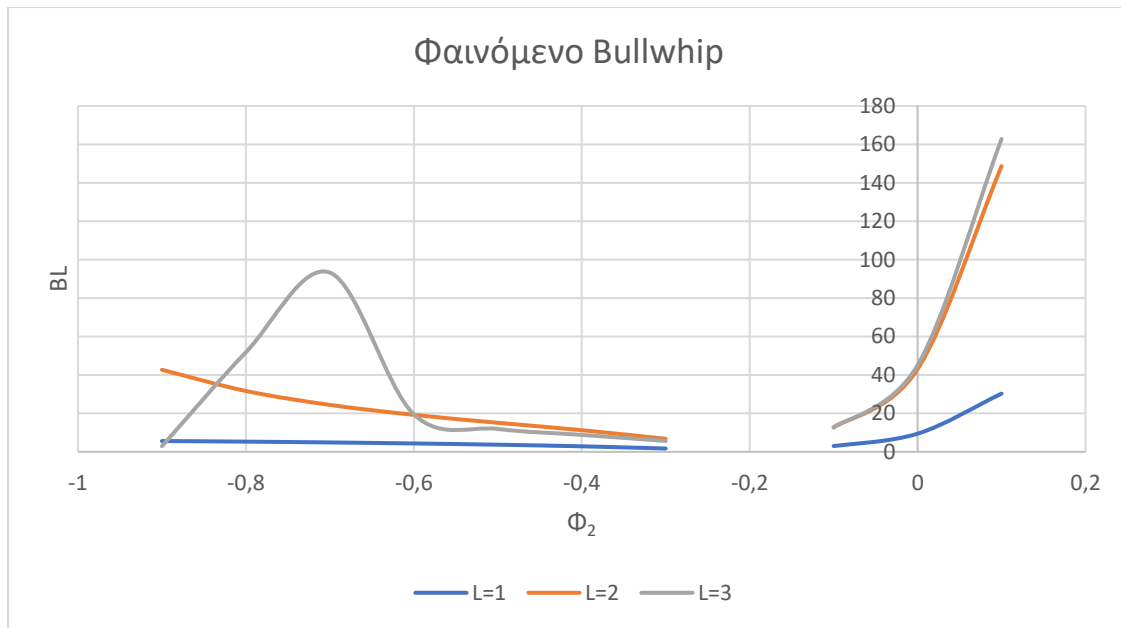


Στο διάγραμμα 5.8 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1=0,8$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$

Είναι εμφανές ότι:

- Όταν $L=1$, οι τιμές του Bullwhip όσο το $\varphi_2 < 0$, αυξάνονται όσο το φ_2 μειώνεται, ενώ όταν $\varphi_2 > 0$, αυξάνονται όσο αυξάνεται το φ_2 .
- Ομοίως και όταν $L=2$, οι τιμές του Bullwhip όσο το $\varphi_2 < 0$, αυξάνονται όσο το φ_2 μειώνεται, ενώ όταν $\varphi_2 > 0$, αυξάνονται όσο αυξάνεται το φ_2 .
- Ομοίως και όταν $L=3$, οι τιμές του Bullwhip όσο το $\varphi_2 < 0$, αυξάνονται όσο το φ_2 μειώνεται, ενώ όταν $\varphi_2 > 0$, αυξάνονται όσο αυξάνεται το φ_2 .

Διάγραμμα 5.8: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του ϕ_2 όταν $\phi_1=0,8$



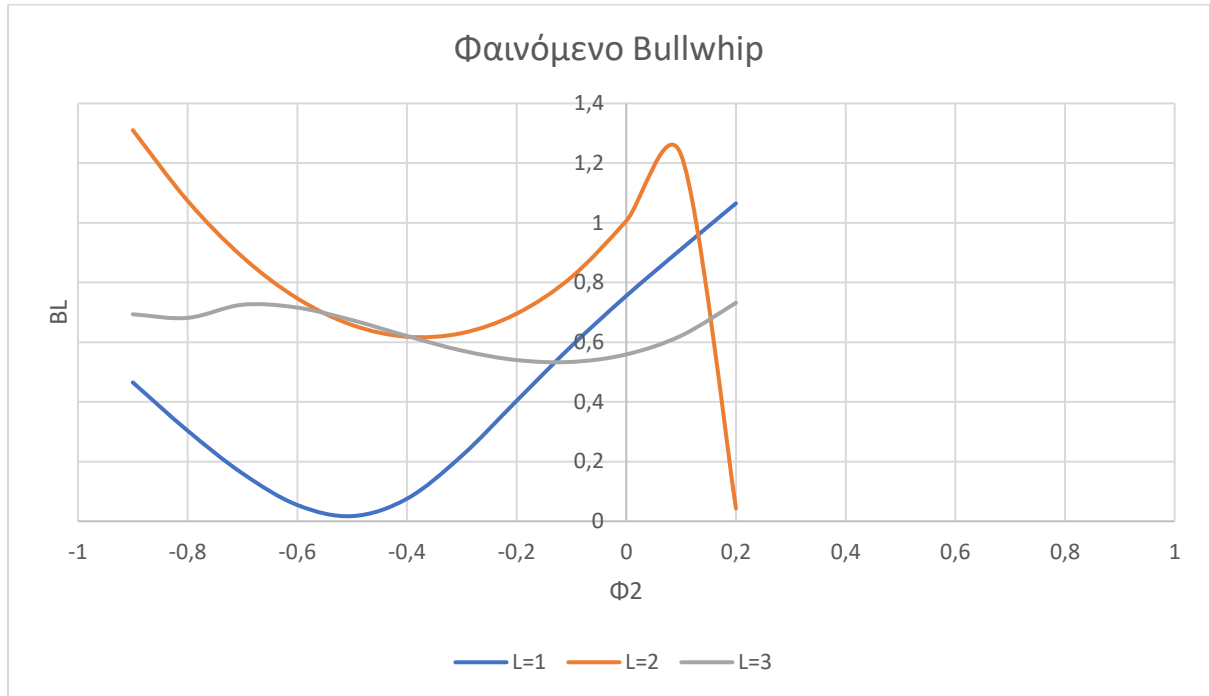
Όπως γίνεται αντιληπτό από τα παραπάνω διαγράμματα και από τους πίνακες του παραρτήματος όταν το $\phi_1 < 0$, τότε η αύξηση του Bullwhip παρατηρείται όταν οι τιμές του ϕ_2 είναι υψηλές. Αντίθετα όταν $\phi_1 > 0$ παρατηρούνται δύο διαφορετικές περιπτώσεις, στην πρώτη όταν $\phi_2 < 0$, τότε όσο το ϕ_2 αυξάνεται, υπάρχει μείωση του λόγου Bullwhip, ενώ στην δεύτερη περίπτωση όταν $\phi_2 > 0$, τότε όσο το ϕ_2 αυξάνεται υπάρχει και αύξηση του λόγου Bullwhip. Επιπλέον και στις δύο περιπτώσεις όσο ο χρόνος παράδοσης αυξάνεται, αυξάνεται και ο λόγος Bullwhip, παρατηρείται δηλαδή αύξηση της μεταβλητότητας της ζήτησης όσο κατευθυνόμαστε από τα τελευταία στάδια προς τα αρχικά μιας εφοδιαστικής αλυσίδας.

5.2.2 Δεύτερη περίπτωση, όπου $BW_t = \frac{var(q_t^{(S,IS)})}{var(q_t^{(R)})}$

Όταν $\varphi_1 < 0$

Στο διάγραμμα 5.9 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = -0,8$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,2$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.9: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = -0,8$



Παρατηρείται ότι:

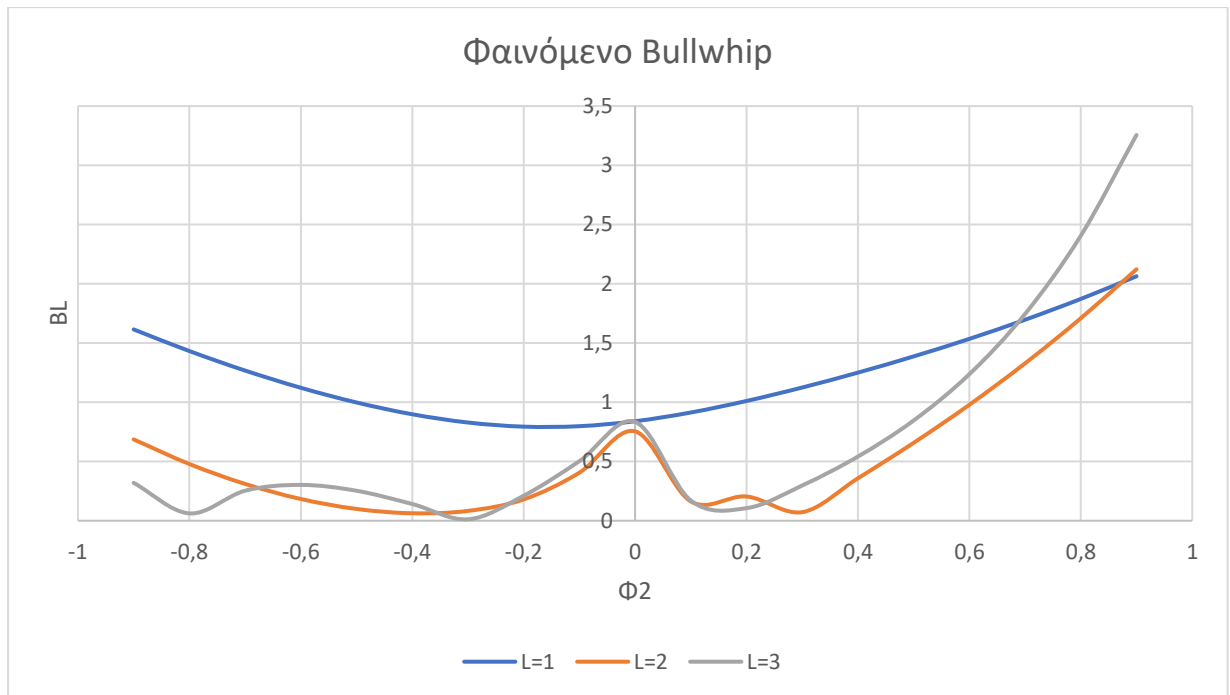
- Όταν $L=1$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται μόνο όταν $\varphi_2 = 0,1$.
- Όταν $L=2$, το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται όταν $\varphi_2 = -0,9, -0,8$ και $\varphi_2 = 0, 0,1$.
- Όταν $L=3$, το φαινόμενο Bullwhip δεν υφίσταται.

Στο διάγραμμα 5.10 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = 0,1$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Παρατηρείται ότι:

- Όταν $L=1$, οι υψηλότερες τιμές του λόγου Bullwhip προκύπτουν όταν το $[\varphi_2]$ είναι υψηλό.
- Όταν $L=2$, ο λόγος Bullwhip μειώνεται όσο αυξάνεται το φ_2 και εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0,7$.
- Όταν $L=3$, ο λόγος Bullwhip αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 , και εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0,6$.

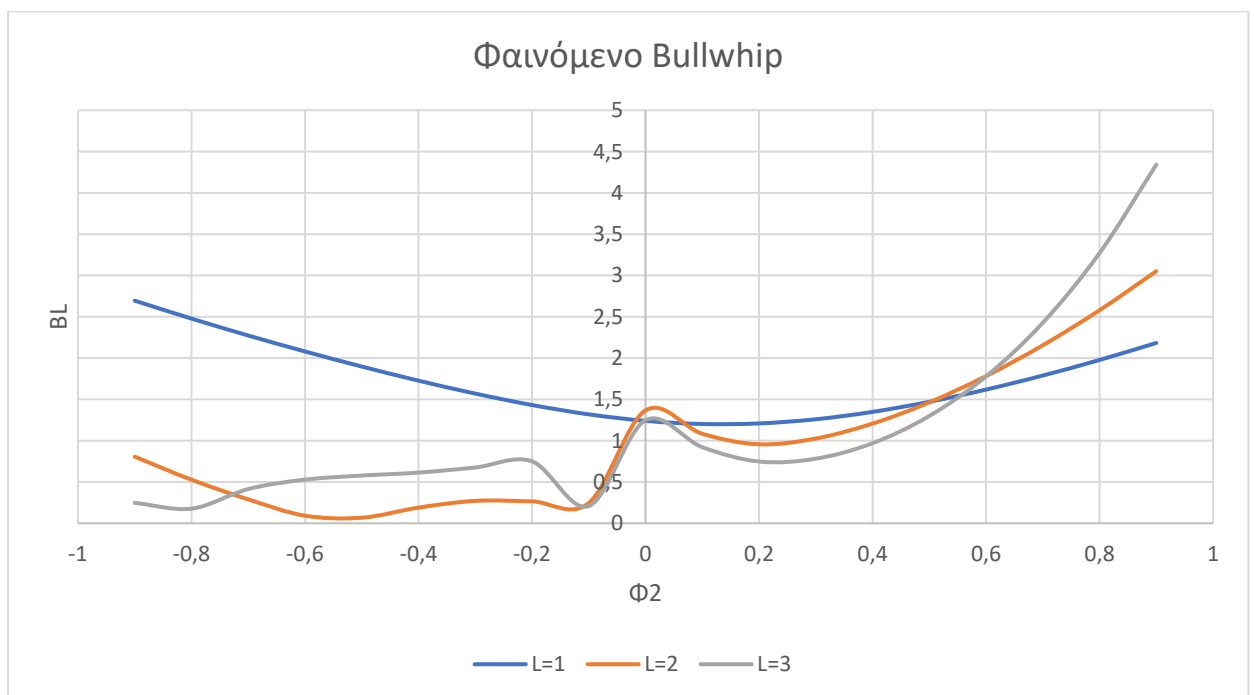
Διάγραμμα 5.10: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = -0,1$



Όταν $\varphi_1 > 0$

Στο διάγραμμα 5.11 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1 = 0,1$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,9$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.11: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1 = 0,1$

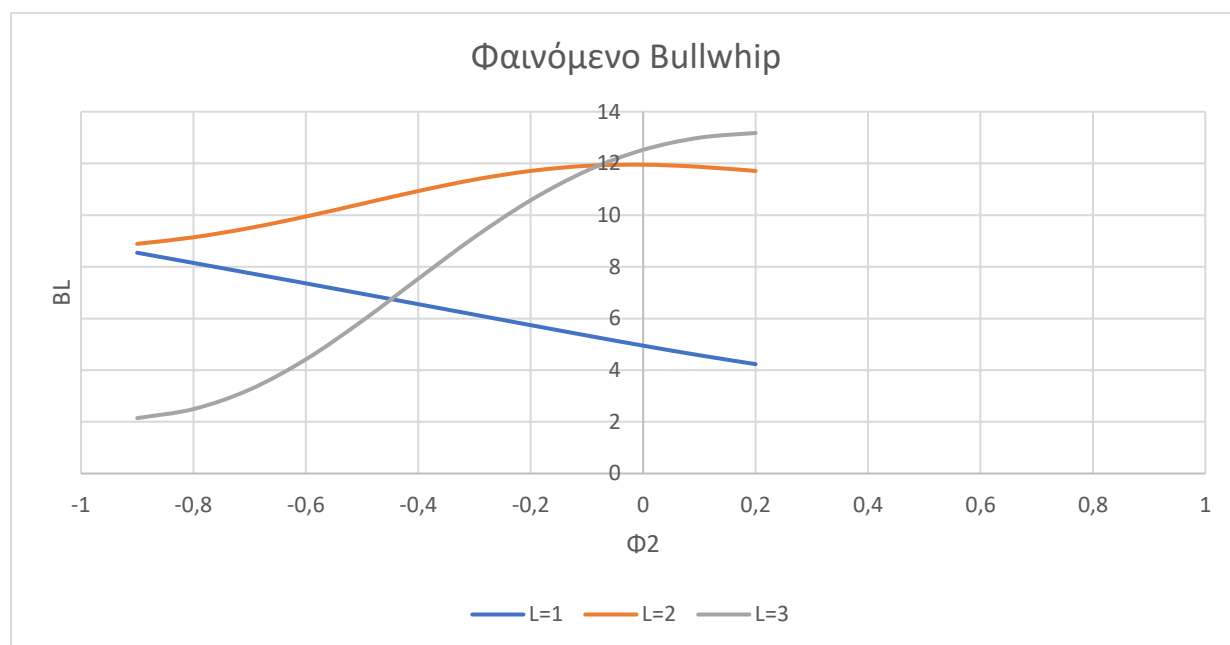


Είναι εμφανές ότι:

- Όταν $L=1$, οι υψηλότερες τιμές του λόγου Bullwhip προκύπτουν όταν το $[\varphi_2]$ είναι υψηλό.
- Όταν $L=2$, ο λόγος Bullwhip μειώνεται όσο αυξάνεται το φ_2 και εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0$.
- Όταν $L=3$, ο λόγος Bullwhip αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 , και εμφανίζεται όταν $\varphi_2 > 0$.

Στο διάγραμμα 5.12 παρουσιάζονται οι τιμές του φαινομένου Bullwhip όταν το $\varphi_1=0,8$ και $-0,9 < \varphi_2 < 0,2$ για τις περιπτώσεις όπου ο χρόνος παράδοσης είναι $L=1,2,3$.

Διάγραμμα 5.12: Το φαινόμενο Bullwhip για διαφορετικές τιμές του χρόνου παράδοσης και του φ_2 όταν $\varphi_1=0,8$



Είναι εμφανές ότι:

- Όταν $L=1$, ο λόγος Bullwhip μειώνεται όσο αυξάνεται το φ_2 .
- Όταν $L=2$, ο λόγος Bullwhip αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 .
- Όταν $L=3$, ο λόγος Bullwhip αυξάνεται όσο αυξάνεται το φ_2 .

Λαμβάνοντας υπόψιν τα διαγράμματα και τους πίνακες του παραρτήματος προκύπτει ότι όσο ο χρόνος παράδοσης L αυξάνεται, υπάρχει και αύξηση του φαινομένου Bullwhip. Επιπλέον όταν το φ_1 είναι αρνητικό τότε το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται για υψηλές τιμές του $[\varphi_2]$. Ενώ στην περίπτωση όπου το φ_1 είναι θετικό όσο αυξάνεται το φ_1 υπάρχει και αύξηση του λόγου Bullwhip.

Κεφάλαιο 6: «Συμπεράσματα»

Το φαινόμενο Bullwhip σύμφωνα με την βιβλιογραφία, είναι ένα σημαντικό θέμα το οποίο απασχολεί τους ερευνητές και την βιομηχανία, διότι η εμφάνιση του συνδέεται συχνά με την διαστρέβλωση της ζήτησης και κατ' επέκταση την εμφάνιση επιπλέον κόστους για μια εφοδιαστική αλυσίδα. Ένας σημαντικός παράγοντας που συμβάλλει ώστε να υπάρξει η μείωση του φαινομένου, είναι η ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των σταδίων μιας εφοδιαστικής αλυσίδας. Η ανταλλαγή πληροφοριών βελτιώνει την συνολική απόδοση μιας εφοδιαστικής αλυσίδας και συμβάλλει στην μείωση του κόστους της.

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται και εξετάζεται μια ειδική περίπτωση του συστήματος περιοδικής επιθεώρησης του αποθέματος, η πολιτική «παραγγελιών αναπλήρωσης στοχευμένου επιπέδου αποθέματος» (Order-up-to level), μελετήθηκε μια εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων (λιανοπωλητή, προμηθευτή), στην οποία έγινε η υπόθεση ότι η ζήτηση ακολουθεί ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα δεύτερης τάξης AR(2). Με δεδομένο ότι ο προμηθευτής γνωρίζει τα στοιχεία ζήτησης του λιανοπωλητή και τις τιμές των παραμέτρων του AR(2), αποδείχθηκε ότι η ζήτηση που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής περιγράφεται από το υπόδειγμα ARMA(2,2). Αρχικά έγινε η μαθηματική διατύπωση του φαινομένου Bullwhip στην περίπτωση του λιανοπωλητή και στην περίπτωση του προμηθευτή, όταν ο χρόνος παράδοσης είναι ($L_S=L_R=1,2,3$). Στην συνέχεια εξετάστηκε η συμπεριφορά του φαινομένου Bullwhip σύμφωνα με διαφορετικές τιμές που δόθηκαν στις παραμέτρους φ_1 και φ_2 , λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς ώστε η ζήτηση να είναι στάσιμη, στην περίπτωση του λιανοπωλητή και στην περίπτωση του προμηθευτή.

Στην περίπτωση του λιανοπωλητή, όταν ο συντελεστής φ_1 είναι αρνητικός το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται για υψηλές τιμές του $|\varphi_2|$. Ενώ όταν φ_1 είναι θετικό τότε το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται για υψηλές τιμές του $|\varphi_2|$ και του φ_1 . Ακόμα παρατηρείται ότι, όταν ο χρόνος παράδοσης είναι $L=2$ ($\varphi_1=0,9$ και $\varphi_2=-0,9$) τότε παρουσιάζεται η υψηλότερη τιμή του λόγου Bullwhip (13,39143), πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η διακύμανση της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο προμηθευτής είναι περίπου 13 φορές μεγαλύτερη από τη διακύμανση της ζήτησης του λιανοπωλητή. Διαπιστώνεται λοιπόν ότι και με χρόνους παράδοσης όχι ιδιαίτερα μεγάλους, η αύξηση της διακύμανσης της ζήτησης από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή εμφανίζεται ως πολύ σημαντική με συνέπεια οι προβλέψεις των παραγγελιών του

λιανοπωλητή να χαρακτηρίζονται από σχετικά χαμηλή ακρίβεια. Επιπλέον, παρατηρείται ότι οι τιμές του Bullwhip όταν $L=2$ είναι υψηλότερες σε σχέση με τις τιμές, όταν $L=3$, έτσι όταν ο χρόνος παράδοσης αυξάνεται δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι αυξάνεται και το φαινόμενο Bullwhip. Η περίπλοκη «συμπεριφορά» του φαινομένου σε αυτές τις καταστάσεις προέρχεται από το γεγονός ότι το d_{t-1} και το d_t συσχετίζονται θετικά, ενώ το d_{t-2} και το d_t συσχετίζονται αρνητικά.

Στην περίπτωση του προμηθευτή, μελετήθηκαν δύο διαφορετικοί τύποι,

$$\text{ο πρώτος } BW_t = \frac{\text{var}(q_t^{(S,IS)})}{\text{var}(d_t)}, \text{ και ο δεύτερος } BW_t = \frac{\text{var}(q_t^{(S,IS)})}{\text{var}(q_t^{(R)})}.$$

Όπως και στην περίπτωση του Λιανοπωλητή, έτσι και στην περίπτωση του προμηθευτή παρατηρείται ότι όταν ο συντελεστής ϕ_1 είναι αρνητικός το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται για υψηλές τιμές του $|\phi_2|$. Ενώ όταν ϕ_1 είναι θετικό τότε το φαινόμενο Bullwhip εμφανίζεται για υψηλές τιμές του $|\phi_2|$ και του ϕ_1 . Αντίθετα όμως με την περίπτωση του λιανοπωλητή, στον προμηθευτή όσο αυξάνεται ο χρόνος παράδοσης της παραγγελίας αυξάνεται και το φαινόμενο Bullwhip και για τους δύο τύπους. Η υψηλότερη τιμή του λόγου Bullwhip (12.134,09) εμφανίζεται στην πρώτη περίπτωση, όταν $L=3$ ($\phi_1=0$ και $\phi_2=0,9$), γεγονός που σημαίνει ότι η διακύμανση της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο κατασκευαστής είναι περίπου 12.134 φορές υψηλότερη από την τη διακύμανση της ζήτησης του λιανοπωλητή. Έτσι, η αύξηση της διακύμανσης της ζήτησης από τον λιανοπωλητή στον κατασκευαστή είναι ιδιαίτερα ψηλή, με συνέπεια οι προβλέψεις των παραγγελιών του λιανοπωλητή να χαρακτηρίζονται από ιδιαίτερα χαμηλή ακρίβεια. Στην δεύτερη περίπτωση, η υψηλότερη τιμή του λόγου Bullwhip (215,8087) εμφανίζεται όταν $L=3$ ($\phi_1=0$ και $\phi_2=0,9$), γεγονός που σημαίνει ότι η διακύμανση της ζήτησης που αντιμετωπίζει ο κατασκευαστής είναι περίπου 215 φορές υψηλότερη από την τη διακύμανση της ζήτησης του προμηθευτή. Έτσι, η αύξηση της διακύμανσης της ζήτησης από τον προμηθευτή στον κατασκευαστή είναι ιδιαίτερα ψηλή, με συνέπεια οι προβλέψεις των παραγγελιών του λιανοπωλητή να χαρακτηρίζονται και σε αυτή την περίπτωση από ιδιαίτερα χαμηλή ακρίβεια.

Παρατηρείται ότι η αύξηση της διακύμανσης της ζήτησης από τον λιανοπωλητή στον κατασκευαστή, συγκριτικά με την αύξηση της διακύμανσης της ζήτησης από τον λιανοπωλητή στον προμηθευτή είναι ιδιαίτερα υψηλή. Η αύξηση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι σε μια εφοδιαστική αλυσίδα κάθε στάδιο βασίζεται στις προβλέψεις που

έχει κάνει, αν λάβουμε υπόψιν το γεγονός ότι η πρόβλεψη εμπεριέχει και ένα ποσοστό λάθους τότε η παραγγελία που θα προκύψει θα εμπεριέχει το λάθος αυτό. Με αποτέλεσμα οι προβλέψεις που θα προκύψουν από το αμέσως επόμενο στάδιο να μην είναι ακριβείς. Κάτι που σημαίνει ότι είναι πολύ δυσκολότερο για τον λιανοπωλητή να προχωρήσει σε έγκυρη πρόβλεψη της ποσότητας παραγγελίας όταν διαθέτει τα δεδομένα ζήτησης του κατασκευαστή, συγκριτικά με το ενδεχόμενο να διαθέτει τα δεδομένα ζήτησης του προμηθευτή.

Βιβλιογραφία

1. Aviv Y, Federgruen A (1998): The operational benefits of information sharing and vendor managed inventory (VMI) programs. Working paper, Olin School of Business, Washington University, St. Louis, MO
2. Beamon B.M (1998): Supply chain design and analysis: Models and methods, *International Journal of Production Economics*, (281-294)
3. Box G.E.P., Jenkins G.M. (1970): Time series analysis, forecasting and control Holden-Day, San Francisco (575)
4. Box, G.E.P, Jenkins, G.M and Reinsel, G.C (1994) Time Series Analysis, Forecasting and Control. 3rd Edition, Prentice Hall, Englewood Cliff, New Jersey
5. Bridgefield Group. (2006). Bridgefield group erp/Supply Chain (SC) glossary. [Online] Available: <http://bridgefieldgroup.com/bridgefieldgroup/glos7.htm#P> (June 2, 2011).
6. Chatfield D.C, Kim J.G, Harrison T.P, Hayya J.C (2004): The bullwhip effect – impact of stochastic lead time, information type, and information sharing: a simulation study, *Prod. Oper. Manag.*, 13 (4), (340-353)
7. Chen L., Lee H.L. (2012): Bullwhip effect measurement and its implications, *Operations Research*, 60 , (771-784)
8. Chen.F , Drezner Z. , Ryan J.K. , Simchi-Levi D. (2000): Quantifying the bullwhip effect in a simple supply chain: The impact of forecasting, lead times, and information, *Management Science*, 46 (2000), (436-443)
9. Dai H ,Li J, Yan N, Zhou W,(2016): Bullwhip effect and supply chain costs with low-and high-quality information on inventory shrinkage , *European Journal of Operational Research* (457-469)
10. Deziel D.P., Eilon S. (1967): A linear production-inventory control rule *Production Engineer*, 43 , (93-104)
11. Disney O, Funda S, Jeff S, Stri V. S (2019): Is there a performance trade off in managing order fulfillment and the bullwhip effect in supply chains? The role of information sharing and information type.” *International Journal of Production Economics* (529-543)
12. Disney S.M, Towill D.R (2003): On the bullwhip and inventory variance produced by an ordering policy, *Omega*, 31 (2003), (157-167)

13. Disney S.M., Lambrecht M., Towill D.R., Van de Velde W. (2008),:The value of coordination in a two echelon supply chain: sharing information, policies and parameters,IIE Transactions, 40 (3) (341-355)
14. Druker, P. F. (1958), Marketing and Economic Development, Journal of Marketing.
15. Forrester J. (1958): Industrial Dynamics: A Major Breakthrough for Decision Makers, Harvard Business Review, (36),(37-38).
16. Gavirneni S, Kapuscinski R, Tayur S (1999): Value of Information in Capacitated Supply Chains, Management Science 45, (16-24)
17. Goodwin P. (2009), Assessing the true cost of forecast errors Foresight: The International Journal of Applied Forecasting, 15 (8-11)
18. Graves S.C. ,(1999): A single-item inventory model for a nonstationary demand process, Manufacturing & Service Operations Management, (1) (50-61)
19. Hamilton, J.D. (1994). Time Series Analysis. Princeton: Princeton University Press,Princeton,NJ
20. Harland, C.M., Lamming R. C, Cousins, P. D, 1999. Developing the concept of supply strategy. International Journal of Operations and Production Management 19 (7), (650-673
21. Hosoda T., Disney S.M. (2009),:Impact of market demand mis-specification on a two-level supply chain, International Journal of Production Economics, 121 (2) (739-751)
22. Huang, G. Q., J. S. K. Lau, et al. (2003). 'The Impact of Sharing Production Information on Supply chain dynamics: A review of the literature , International Journal of Production Research, 41(7), (1483-1517)
23. Hussain M., Shome A., Lee D.M. (2012): Impact of forecasting methods on variance ratio in order-up-to level policy,International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 59 (1--4) , (413-420)
24. Janvier-James A.M (2012): A New Introduction to Supply Chains and Supply Chain Management: Definitions and Theories Perspective , Glorious Sun School of Business and Management, Donghua University
25. Kurt Salmon Associates (1993). Efficient Consumer Response: Enhancing Consumer Value in the Grocery Industry. Washington, D.C., Food Marketing Institute.

26. Lambert, D.M. (2004):The Eight Essential Supply Chain Management Processes. *Supply Chain Management Review*, Vol. 8, No. 6 , (18-26)
27. Langley, C., Coyle, J., Gibson, B., Novack, R., & Bardi, E. (2008). *Managing Supply Chains: A Logistics Approach*. Canada: South-Western Cengage Learning.
28. Lee H.L., Padmanabhan P., Whang S. (1997): Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect, *Management Science*, 43, (546-558)
29. Lee H.L., Padmanabhan P. , Whang S: (1997):The bullwhip effect in supply chains, *Sloan Management Review*, 38 , (93-102),(810)
30. Lee H.L., So K.C., Tang C.S.(2000):The value of information sharing in a two-level supply chain, *Management Science*, 46 (5) ,(626-643)
31. Luong H.T. , (2007): Measure of bullwhip effect in supply chains with autoregressive demand process *European Journal of Operational Research*, 180 (1086-1097)
32. Luong, H.T. (2007): Measure of bullwhip effect in supply chains with autoregressive demand process. *European journal of Operational Research* 180,1086-1097
33. New, S.J., Payne, P., 1995. Research frameworks in logistics: three models, seven dinners and a survey. *International Journal of Physical Distribution and Logistics Management* 25 (10), (60 -77).
34. Patnayakuni R, Rai A, Seth N(2006):Relational antecedents of information flow integration for supply chain coordination, *J. Manag. Inf. Syst.*, 23 (1) , (13-49)
35. Pienaar W.J, Vog J.J (2009): *Business Logistics Management: a supply chain*, Oxford University Press Southern Africa, 3rd ed,
36. Rushton A, Croucher P, Baker P (2014): *The handbook of logistics and distribution management*, Fiveth Edition, The Chartered Institute of Logistics and Transport (UK).
37. Sahin F, Robinson P.J (2005): Information sharing and coordination in make-to- order supply chains, *Journal of Operations Management*, (579-598)
38. Shockley J, Fetter G (2015): Distribution co-opetition and multi-level inventory management performance: an industry analysis and simulation *J. Purch. Supply Manag.*, 21 (1) , (51-63)

39. Silver, E.A, Pyke D.F & Thomas D.J (2017): Inventory and Production Management in Supply Chains. Fourth Edition. CRC Press, Tylor & Francis Group
40. Stadtler, H., (2005). Supply chain management and advanced planning—basics, overview and challenges. *European Journal of Operational Research*, 163(3),(575–588).
41. Sterman J.D (1992): *System Dynamics Modeling For Project Management*. System Dynamics Group Sloan, School of Management, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
42. Syntetos A.A, Babai Z, Boylan J.E, Kolassa S, Nikolopoulos K. (2016): Supply chain forecasting: Theory, practice, their gap and the future, *European Journal of Operational Research* (1-26)
43. Syntetos A.A. , R.H.Teunter et al. " Determining order-up-to levels under periodic review for compound binomial (intermittent) demand." *European Journal of Operational Research* 203.3 (2010): (619-624).
44. Tan K.C (2001): A framework of supply chain management literature, *European journal of Purchasing & Supply Management* 7, (39-48)
45. Tan K.C, Kannan, V.J Handfield, R.B, 1998b. Supply chain management: supplier performance and firm performance. *International Journal of Purchasing and Meterials Management* 34 (3) (2-9)
46. Wang X, Disney S.M. (2016):The bullwhip effect: Progress, trends and directions , *European Journal of Operational Research*, (691-701)
47. Zhang X (2004):The impact of forecasting methods on the bullwhip effect, *International Journal of Production Economics*, 88 , (15-27)
48. Zhang X.L., Burke G.L. (2011): Analysis of compound bullwhip effect causes ,*European Journal of Operational Research*, 210 , (514-526)
49. Κεβόρκ ,Η.Σ, (2018), “Ένα μικροοικονομικό υπόδειγμα εφοδιαστικής αλυσίδας δυο σταδίων με αυτοσυσχετιζόμενη ζήτηση, σελ. 419-449, κεφάλαιο στο Βιβλίο “Κείμενα στην οικονομική της άμυνας και της ασφάλειας”, Επιμέλεια Η.Κεβόρκ & Χ.Κόλλιας, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας

Παράρτημα Κεφάλαιο 3

Απόδειξη (3.19)

$$\begin{aligned}
 Var(q_t^{(R)}) &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^R + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^R + \varphi_2^2 \gamma_0^R + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) cov(d_t d_{t-1}) \\
 &\quad - 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2) cov(d_t d_{t-2}) - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2) cov(d_{t-1} d_{t-2}) \\
 &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^R + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^R + \varphi_2^2 \gamma_0^R + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \gamma_1 \\
 &\quad - 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2) \gamma_2 - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2) \gamma_1 \\
 &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^R + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^R + \varphi_2^2 \gamma_0^R + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \gamma_0^R \rho_1 \\
 &\quad - 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2) \gamma_0^R \rho_2 - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2) \gamma_0^R \rho_1 \\
 &= (1 + 2\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2) \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \gamma_0^R \rho_1 - 2(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2) \gamma_0^R \rho_2 \\
 &\quad - 2(\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \gamma_0^R \rho_1 \\
 &= \gamma_0^R (1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) \\
 &\quad + \gamma_0^R \rho_1 (2\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2) \\
 &\quad + \gamma_0^R \rho_2 (-2\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2)
 \end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (3.6) η διακύμανση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 Var(q_t^{(R)}) &= \gamma_0^R [(1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) \\
 &\quad + \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}\right) (2\varphi_2 + 4\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_2^2) \\
 &\quad + \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2}\right) (-2\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2)] \\
 &= \gamma_0^R [(1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) + \frac{\varphi_1^2(-2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2)}{1 - \varphi_1} \\
 &\quad + \frac{\varphi_2^2(-2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_2)}{1 - \varphi_1} + \frac{\varphi_1\varphi_2(2 - 2\varphi_2 - 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2)}{1 - \varphi_1}]
 \end{aligned}$$

Απόδειξη (3.28)

$$\begin{aligned}
 Var(q_t^{(R)}) &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) cov(d_t d_{t-1}) \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) cov(d_t d_{t-2}) \\
 &\quad - 2(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) cov(d_{t-1} d_{t-2}) \\
 &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \gamma_1 \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \gamma_2 \\
 &\quad - 2(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \gamma_1 \\
 &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \rho_1 \gamma_0^R \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \rho_2 \gamma_0^R \\
 &\quad - 2(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \rho_1 \gamma_0^R
 \end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (3.6) η διακύμανση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(q_t^{(R)}) &= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \right. \\
&\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \\
&\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \right) \\
&\quad \left. - 2(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right] \\
&= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \right. \\
&\quad + 2(\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3 + \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^4 + \varphi_2^2\varphi_1 - \varphi_1\varphi_2 \\
&\quad \left. - \varphi_1^2\varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right. \\
&\quad - 2(-\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^2) \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \right) \\
&\quad \left. - 2(-\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right] \\
&= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \right. \\
&\quad + 2(-\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 + \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^4 + \varphi_2^2\varphi_1 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \\
&\quad - 2(-\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^2) \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_2^2 + \varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \right) \\
&\quad \left. - 2(-\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right] \\
&= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)^2 \right. \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^3(-1 - 2\varphi_1 - \varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_2^3(-1 - \varphi_2 - 2\varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^2\varphi_2(-2 + 5\varphi_2 - \varphi_1)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1\varphi_2^2(3\varphi_1^2 + 1 - \varphi_2^2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad \left. + \frac{2\varphi_1^3\varphi_2(2\varphi_1 - \varphi_2^2 + \varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} \right]
\end{aligned}$$

Απόδειξη (3.30)

$$\begin{aligned}
d_{t+3} &= \delta + \varphi_1 d_{t+2} + \varphi_2 d_{t+1} + \varepsilon_{t+3} \\
&= \delta + \varphi_1 [\delta(1 + \varphi_1) + (\varphi_1^2 + \varphi_2)d_t + \varphi_1\varphi_2 d_{t-1} + \varphi_1\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2}] \\
&\quad + \varphi_2(\delta + \varphi_1 d_t + \varphi_2 d_{t-1} + \varepsilon_{t+1}) + \varepsilon_{t+3} \\
&= \delta + \varphi_1\delta + \varphi_1^2\delta + \varphi_1^3 d_t + \varphi_1^2\varphi_2 d_{t-1} + \varphi_1^2\varepsilon_{t+1} + \varphi_1\varphi_2 d_t + \varphi_1\varepsilon_{t+2} \\
&\quad + \varphi_2\delta + \varphi_2\varphi_1 d_t + \varphi_2^2 d_{t-1} + \varphi_2\varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+3} \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)\delta + (\varphi_1^3 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1)d_t + (\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)d_{t-1} \\
&\quad + (\varphi_1^2 + \varphi_2)\varepsilon_{t+1} + \varphi_1\varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3}
\end{aligned}$$

Απόδειξη (3.37)

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(q_t^{(R)}) &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \text{cov}(d_t d_{t-1}) \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \text{cov}(d_t d_{t-2}) \\
 &\quad - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \text{cov}(d_{t-1} d_{t-2}) \\
 &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \gamma_1 \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \gamma_2 \\
 &\quad - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \gamma_1 \\
 &= (\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^R + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^R + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^R \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \rho_1 \gamma_0^R \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \rho_2 \gamma_0^R \\
 &\quad - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \rho_1 \gamma_0^R
 \end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (3.6) η διακύμανση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(q_t^{(R)}) &= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \right. \\
 &\quad + 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \\
 &\quad - 2(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \right) \\
 &\quad \left. - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right] \\
 &= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \right. \\
 &\quad + 2(\varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3 + \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^4 + \varphi_2^2 \varphi_1 - \varphi_1 \varphi_2 \\
 &\quad - \varphi_1^2 \varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \\
 &\quad - 2(-\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2^2) \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \right) \\
 &\quad \left. - 2(-\varphi_1 \varphi_2^2 - \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1^3 \varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right] \\
 &= \gamma_0^R \left[(\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \right. \\
 &\quad + 2(-\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 + \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_1^4 + \varphi_2^2 \varphi_1 - \varphi_1 \varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \\
 &\quad - 2(-\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2^2) \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_2^2 + \varphi_1^2}{1 - \varphi_2} \right) \\
 &\quad \left. - 2(-\varphi_1 \varphi_2^2 - \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2 + 2\varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1^3 \varphi_2) \left(\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma_0^R \left[(\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)^2 \right. \\
&\quad - (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2)^2 + \frac{2\varphi_1^4(8\varphi_2^2 - \varphi_1^3 - 2\varphi_1^2 - 2 - 3\varphi_1)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_2^4(-\varphi_1 - 3\varphi_1^3 - 4\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad + \frac{2\varphi_1^3\varphi_2(-4\varphi_1 - 5 + 2\varphi_1^3 + \varphi_1^4)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_1\varphi_2^3(5\varphi_1 + 5 + 4\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3)}{1 - \varphi_2} \\
&\quad \left. + \frac{2\varphi_1^2(6\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_2 + 5\varphi_1^3\varphi_2^2)}{1 - \varphi_2} + \frac{2\varphi_2^2(\varphi_1^2 - \varphi_1^5\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)}{1 - \varphi_2} \right]
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Απόδειξη (4.4)

$$\begin{aligned}
q_t^{(R)} &= (1 + \varphi_1)d_t + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-1} - \varphi_2d_{t-2} \\
&= (\delta + \varphi_1d_{t-1} + \varphi_2d_{t-2} + \varepsilon_t)(1 + \varphi_1) \\
&\quad + (\delta + \varphi_1d_{t-2} + \varphi_2d_{t-3} + \varepsilon_{t-1})(\varphi_2 - \varphi_1) \\
&\quad - (\delta + \varphi_1d_{t-3} + \varphi_2d_{t-4} + \varepsilon_{t-2})(\varphi_2) \\
&= \delta + \varphi_1d_{t-1} + \varphi_2d_{t-2} + \varepsilon_t + \delta\varphi_1 + \varphi_1\varphi_1d_{t-1} + \varphi_1\varphi_2d_{t-2} + \varphi_1\varepsilon_t \\
&\quad + \delta\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1d_{t-2} + \varphi_2\varphi_2d_{t-3} + \varphi_2\varepsilon_{t-1} - \varphi_1\delta - \varphi_1\varphi_1d_{t-2} \\
&\quad - \varphi_1\varphi_2d_{t-3} - \varphi_1\varepsilon_{t-1} - \varphi_2\delta - \varphi_2\varphi_1d_{t-3} - \varphi_2\varphi_2d_{t-4} - \varphi_2\varepsilon_{t-2} \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)\delta + (\varphi_1 + \varphi_1\varphi_1)d_{t-1} \\
&\quad + (\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 - \varphi_1\varphi_1)d_{t-2} + (\varphi_2\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1)d_{t-3} \\
&\quad - \varphi_2\varphi_2d_{t-4} + (1 + \varphi_1)\varepsilon_t + (\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} - \varphi_2\varepsilon_{t-2} \\
&= \delta + (\varphi_1 + \varphi_1^2)d_{t-1} + (\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2)d_{t-2} \\
&\quad + (\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2)d_{t-3} - \varphi_2\varphi_2d_{t-4} + (1 + \varphi_1)\varepsilon_t + (\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} \\
&\quad - \varphi_2\varepsilon_{t-2} \\
&= \delta + \varphi_1[(1 + \varphi_1)d_{t-1} + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-2} + (-\varphi_2)d_{t-3}] \\
&\quad + \varphi_2[(1 + \varphi_1)d_{t-2} + (\varphi_2 - \varphi_1)d_{t-3} + (-\varphi_2)d_{t-4} + (1 + \varphi_1)\varepsilon_t \\
&\quad + (\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} - \varphi_2\varepsilon_{t-2}
\end{aligned}$$

Απόδειξη (4.10)

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης γ_0 του ARMA (2,2) θέτοντας $p=2$, $q=2$ και για $k=0,1,2,3$ και $\psi_0 = 1$ θα ισχύει ότι:

Για $k=0$ και $\psi_0=1$:

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \varphi_1\gamma_{-1} + \varphi_2\gamma_{-2} - \sigma_v^2(-\psi_0 + \theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2) \\
&= \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)
\end{aligned} \tag{1}$$

Για $k=1$ και $\psi_0=1$:

$$\gamma_1 = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_{-1} - \sigma_v^2(\theta_0\psi_0 + \theta_2\psi_1) = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1 - \sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1) \tag{2}$$

Για $k=2$ και $\psi_0=1$:

$$\gamma_2 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 - \sigma_v^2(\theta_2\psi_0) = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 - \theta_2\sigma_v^2 \quad (3)$$

Από τη σχέση (2) λύνοντας ως προς γ_1 προκύπτει:

$$\gamma_1 = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1 - \sigma_v^2(\theta_1 - \theta_2\psi_1) \Leftrightarrow \gamma_1 = \frac{\varphi_1\gamma_0 - \sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2} \quad (4)$$

Στην συνέχεια κάνοντας αντικατάσταση στην (3) το γ_1 σύμφωνα με την (4), το γ_2 είναι ίσο :

$$\gamma_2 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_0 - \theta_2\sigma_v^2 = \varphi_1\left(\frac{\varphi_1\gamma_0 - \sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2}\right) + \varphi_2\gamma_0 - \theta_2\sigma_v^2 \quad (5)$$

Έτσι προκυμμένον να βρεθεί το γ_0 γίνεται αντικατάσταση στην (1) των γ_1 και γ_2 από τις (4) και (5) αντίστοιχα:

$$\gamma_0 = \varphi_1\gamma_1 + \varphi_2\gamma_2 + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 = \varphi_1\left[\frac{\varphi_1\gamma_0 - \sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2}\right] + \varphi_2\left[\varphi_1\left(\frac{\varphi_1\gamma_0 - \sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2}\right) + \varphi_2\gamma_0 - \theta_2\sigma_v^2\right] + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 = \varphi_1\left[\frac{\varphi_1\gamma_0 - \sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2}\right] + \varphi_2\left[\left(\frac{\varphi_1^2\gamma_0 - \varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2}\right) + \varphi_2\gamma_0 - \theta_2\sigma_v^2\right] + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{\gamma_0\varphi_1^2 - \varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2} + \frac{\varphi_1^2\gamma_0\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)}{1 - \varphi_2} + \varphi_2^2\gamma_0 - \varphi_2\theta_2\sigma_v^2 + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{\gamma_0\varphi_1^2(1 + \varphi_2) - [\varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)](1 + \varphi_2)}{1 - \varphi_2} + \varphi_2^2\gamma_0 - \varphi_2\theta_2\sigma_v^2 + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{(1 + \varphi_2)\{\gamma_0\varphi_1^2 - [\varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)]\}}{1 - \varphi_2} + \varphi_2^2\gamma_0 - \varphi_2\theta_2\sigma_v^2 + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 - \frac{(1 + \varphi_2)(\gamma_0\varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} - \varphi_2^2\gamma_0 = \frac{(1 + \varphi_2)[-\varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)]}{1 - \varphi_2} - \varphi_2\theta_2\sigma_v^2 + \sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma_0(1 - \varphi_2)}{1 - \varphi_2} - \frac{(1 + \varphi_2)(\gamma_0\varphi_1^2)}{1 - \varphi_2} - \frac{\varphi_2^2\gamma_0(1 - \varphi_2)}{1 - \varphi_2} = \frac{(1 + \varphi_2)[-\varphi_1\sigma_v^2(\theta_1 + \theta_2\psi_1)]}{1 - \varphi_2} - \frac{\varphi_2\theta_2\sigma_v^2(1 - \varphi_2)}{1 - \varphi_2} + \frac{\sigma_v^2(1 - \theta_1\psi_1 - \theta_2\psi_2)(1 - \varphi_2)}{(1 - \varphi_2)}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \gamma_0 \left(\frac{(1-\varphi_2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)-\varphi_2^2(1-\varphi_2)}{(1-\varphi_2)} \right) = \\
&\frac{(1+\varphi_2)[- \varphi_1 \sigma_v^2(\theta_1+\theta_2\psi_1)]-\varphi_2\theta_2 \sigma_v^2(1-\varphi_2)+\sigma_v^2(1-\theta_1\psi_1-\theta_2\psi_2)(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2} \\
&\Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{(1+\varphi_2)[- \varphi_1 \sigma_v^2(\theta_1+\theta_2\psi_1)]-\varphi_2\theta_2 \sigma_v^2(1-\varphi_2)+\sigma_v^2(1-\theta_1\psi_1-\theta_2\psi_2)(1-\varphi_2)}{(1-\varphi_2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)-\varphi_2^2(1-\varphi_2)} \\
&\Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{(1+\varphi_2)[- \varphi_1 \sigma_v^2(\theta_1+\theta_2\psi_1)]+(1-\varphi_2)[- \varphi_2\theta_2 \sigma_v^2+\sigma_v^2(1-\theta_1\psi_1-\theta_2\psi_2)]}{(1-\varphi_2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)-\varphi_2^2(1-\varphi_2)} \\
&\Leftrightarrow \gamma_0 = \frac{(1+\varphi_2)[- \varphi_1 \sigma_v^2(\theta_1+\theta_2\psi_1)]+(1-\varphi_2)[- \varphi_2\theta_2 \sigma_v^2+\sigma_v^2(1-\theta_1\psi_1-\theta_2\psi_2)]}{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)} \quad (6)
\end{aligned}$$

Ο προσδιορισμός των ψ_1 και ψ_2 σύμφωνα με τους (Box et all,1994) προκύπτει από την σχέση:

$$\psi_j = \varphi_1\psi_{j-1} + \varphi_2\psi_{j-2} + \dots \dots + \varphi_p\psi_{j-p}$$

Έτσι για j=1 ισχύει:

$$\psi_1 = \varphi_1\psi_0 - \theta_1 = \varphi_1 - \theta_1 \quad (7)$$

Και για j=2 ισχύει:

$$\psi_2 = \varphi_1\psi_1 - \varphi_2\psi_0 - \theta_2 = \varphi_1(\varphi_1 - \theta_1) + \varphi_2 - \theta_2 = \varphi_1^2 - \theta_1\varphi_1 + \varphi_2 - \theta_2 \quad (8)$$

Σύμφωνα με τις (7) και (8) η γ_0 θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{(s)} &= \frac{(1+\varphi_2)[- \varphi_1 \sigma_v^2(\theta_1+\theta_2\psi_1)]+(1-\varphi_2)[- \varphi_2\theta_2 \sigma_v^2+\sigma_v^2(1-\theta_1\psi_1-\theta_2\psi_2)]}{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)} \\
&= \frac{(1+\varphi_2)(-\varphi_1\sigma_v^2\theta_1-\varphi_1\sigma_v^2\theta_2\psi_1)+(1-\varphi_2)(-\varphi_2\theta_2 \sigma_v^2+\sigma_v^2-\theta_1\psi_1\sigma_v^2-\theta_2\psi_2\sigma_v^2)}{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)} \\
&= \sigma_v^2 \left[\frac{(1+\varphi_2)(-\varphi_1\theta_1-\varphi_1\theta_2\psi_1)+(1-\varphi_2)(-\varphi_2\theta_2+1-\theta_1\psi_1-\theta_2\psi_2)}{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)} \right] \\
&= \sigma_v^2 \left\{ \frac{(1+\varphi_2)[- \varphi_1\theta_1-\varphi_1\theta_2(\varphi_1-\theta_1)]+(1-\varphi_2)[- \varphi_2\theta_2+1-\theta_1(\varphi_1-\theta_1)-\theta_2(\varphi_1^2-\theta_1\varphi_1+\varphi_2-\theta_2)]}{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)} \right\} \\
&= \sigma_v^2 \frac{(1+\varphi_2)(-\varphi_1\theta_1-\varphi_1^2\theta_2+\varphi_1\theta_2\theta_1)+(1-\varphi_2)(-\varphi_2\theta_2+1-\theta_1\varphi_1+\theta_1^2-\theta_2\varphi_1^2+\theta_2\theta_1\varphi_1-\theta_2\varphi_2+\theta_2^2)}{(1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-(1+\varphi_2)(\varphi_1^2)}
\end{aligned}$$

Απόδειξη (4.20)

$$\begin{aligned} Var(q_t^{(S,IS)}) &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} + (-\varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\ &\quad + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) cov(q_t q_{t-1}) - 2(1 + \varphi_1)(-\varphi_2) cov(q_t q_{t-2}) \\ &\quad - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(-\varphi_2) cov(q_{t-1} q_{t-2}) \\ &= (1 + \varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} + (-\varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\ &\quad + 2(1 + \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) \gamma_1 - 2(1 + \varphi_1)(-\varphi_2) \gamma_2 \\ &\quad - 2(\varphi_2 - \varphi_1)(-\varphi_2) \gamma_1 \\ &= (1 + 2\varphi_1 + \varphi_1^2) \gamma_0^{(S)} + (\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1 + \varphi_1^2) \gamma_0^{(S)} + (\varphi_2^2) \gamma_0^{(S)} \\ &\quad + 2(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 - 2(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_2 \\ &\quad - 2(-\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\ &= \gamma_0^{(S)} [(1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) \\ &\quad + 2\gamma_0^{(S)} \rho_1 (\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \\ &\quad - 2\gamma_0^{(S)} \rho_2 (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2)] \end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (3.6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} Var(q_t^{(S,IS)}) &= \gamma_0^{(S)} \left[(1 + 2\varphi_1 + 2\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 - 2\varphi_2\varphi_1) \right. \\ &\quad \left. + 2(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Απόδειξη (4.24)

$$\begin{aligned} q_t^{(R)} &= [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2](\delta + \varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2 d_{t-2} + \varepsilon_t) \\ &\quad + [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2](\delta + \varphi_1 d_{t-2} + \varphi_2 d_{t-3} + \varepsilon_{t-1}) \\ &\quad + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2](\delta + \varphi_1 d_{t-3} + \varphi_2 d_{t-4} + \varepsilon_{t-2}) \\ &= \delta\varphi_1 + \varphi_1^2 d_{t-1} + \varphi_1\varphi_2 d_{t-2} + \varphi_1 \varepsilon_t + \varphi_1^2 \delta + \varphi_1^3 d_{t-1} + \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-2} \\ &\quad + \varphi_1^2 \varepsilon_t + \delta\varphi_2 + \varphi_2\varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2^2 d_{t-2} + \varphi_2 \varepsilon_t + \varphi_1\varphi_2 \delta + \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-2} \\ &\quad + \varphi_2^2 \varphi_1 d_{t-3} + \varphi_1\varphi_2 \varepsilon_{t-1} - \varphi_1 \delta - \varphi_1^2 d_{t-2} - \varphi_1\varphi_2 d_{t-3} - \varphi_1 \varepsilon_{t-1} - \varphi_1^2 \delta \\ &\quad - \varphi_1^3 d_{t-2} - \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-3} - \varphi_1^2 \varepsilon_{t-1} - \delta\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1 d_{t-3} - \varphi_2^2 d_{t-4} - \varphi_2 \varepsilon_{t-2} \\ &\quad - \varphi_1\varphi_2 \delta - \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-3} - \varphi_2^2 \varphi_1 d_{t-4} - \varphi_1\varphi_2 \varepsilon_{t-2} \\ &= \delta\varphi_1 + \varphi_1^2 \delta + \delta\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 \delta - \varphi_1 \delta - \varphi_1^2 \delta - \delta\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 \delta + \varphi_1^2 d_{t-1} \\ &\quad + \varphi_1^3 d_{t-1} + \varphi_2\varphi_1 d_{t-1} + \varphi_1\varphi_2 d_{t-2} + \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-2} + \varphi_2^2 d_{t-2} + \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-2} \\ &\quad - \varphi_1^3 d_{t-2} - \varphi_1^2 d_{t-2} - \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-3} - \varphi_2\varphi_1 d_{t-3} - \varphi_1^2 \varphi_2 d_{t-3} + \varphi_2^2 \varphi_1 d_{t-3} \\ &\quad - \varphi_1\varphi_2 d_{t-3} - \varphi_2^2 d_{t-4} - \varphi_2^2 \varphi_1 d_{t-4} + \varphi_1 \varepsilon_t + \varphi_1^2 \varepsilon_t + \varphi_2 \varepsilon_t + \varphi_1\varphi_2 \varepsilon_{t-1} \\ &\quad - \varphi_1^2 \varepsilon_{t-1} - \varphi_1 \varepsilon_{t-1} - \varphi_2 \varepsilon_{t-2} - \varphi_1\varphi_2 \varepsilon_{t-2} \\ &= \varphi_1 [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] d_{t-1} + \varphi_1 [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2] d_{t-2} \\ &\quad + \varphi_1 [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2] d_{t-2} + \varphi_2 [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] d_{t-2} \\ &\quad + \varphi_2 [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2] d_{t-3} + \varphi_2 [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2] d_{t-3} + [\varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2] \varepsilon_t \\ &\quad + [\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1] \varepsilon_{t-1} + [-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2] \varepsilon_{t-2} \end{aligned}$$

Απόδειξη (4.37)

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(q_t^{(S,IS)}) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
 &\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
 &\quad + 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \text{cov}(q_t q_{t-1}) \\
 &\quad - 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \text{cov}(q_t q_{t-2}) \\
 &\quad - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \text{cov}(q_{t-1} q_{t-2}) \\
 &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
 &\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} + 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2) \gamma_1 \\
 &\quad - 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \gamma_2 \\
 &\quad - 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \gamma_1 \\
 &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
 &\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
 &\quad + 2(\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 + \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3 + \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^4 \\
 &\quad + \varphi_2^2 \varphi_1 - \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
 &\quad - 2(-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_2^2 \\
 &\quad - \varphi_1 \varphi_2^2) \gamma_0^{(S)} \rho_2 - 2(-\varphi_2^2 \varphi_1 - \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2 \\
 &\quad + \varphi_1^3 \varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_1
 \end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (3.6) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(q_t^{(S,IS)}) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 \gamma_0^{(S)} + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
 &\quad + 2\gamma_0^{(S)}(-\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 + \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_1^4 + \varphi_2^2 \varphi_1 + \varphi_2^2 \varphi_1 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 \\
 &\quad - \varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^3 \varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 \theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
 &\quad - 2\gamma_0^{(S)}(-\varphi_2 - 2\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2^2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
 &= \gamma_0^{(S)} [(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_1^2)^2 + (-\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2)^2 \\
 &\quad + 2(-\varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3 - \varphi_1^4 + 2\varphi_2^2 \varphi_1 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2 \\
 &\quad - 2\varphi_1^2 \varphi_2) \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 \theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\
 &\quad - 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2^2) \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right)]
 \end{aligned}$$

Απόδειξη (4.41)

$$\begin{aligned}
q_t^{(R)} &= (\delta + \varphi_1 d_{t-1} + \varphi_2 d_{t-2} + \varepsilon_t)(\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2) \\
&\quad + (\delta + \varphi_1 d_{t-2} + \varphi_2 d_{t-3} + \varepsilon_{t-1})(\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 \\
&\quad - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1) \\
&\quad - (\delta + \varphi_1 d_{t-3} + \varphi_2 d_{t-4} + \varepsilon_{t-2})(\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2) \\
&= (\varphi_1^3\delta + \varphi_1^2\delta + 2\varphi_1\varphi_2\delta + \varphi_1\delta + \varphi_2\delta + \varphi_1^4 d_{t-1} + \varphi_1^3 d_{t-1} \\
&\quad + 2\varphi_1^2\varphi_2 d_{t-1} + \varphi_1^2 d_{t-1} + \varphi_1\varphi_2 d_{t-1} + \varphi_1^3\varphi_2 d_{t-2} + \varphi_1^2\varphi_2 d_{t-2} \\
&\quad + 2\varphi_1\varphi_2^2 d_{t-2} + \varphi_1\varphi_2 d_{t-2} + \varphi_2^2 d_{t-2} + \varphi_1^3\varepsilon_t + \varphi_1^2\varepsilon_t + 2\varphi_1\varphi_2\varepsilon_t \\
&\quad + \varphi_1\varepsilon_t + \varphi_2\varepsilon_t) \\
&\quad + (\varphi_1\varphi_2\delta + \varphi_1^2\varphi_2\delta + \varphi_2^2\delta - \varphi_1^3\delta - \varphi_1^2\delta - 2\varphi_1\varphi_2\delta - \varphi_1\delta \\
&\quad + \varphi_1^2\varphi_2 d_{t-2} + \varphi_1^3\varphi_2 d_{t-2} + \varphi_2^2\varphi_1 d_{t-2} - \varphi_1^4 d_{t-2} - \varphi_1^3 d_{t-2} \\
&\quad - 2\varphi_1^2\varphi_2 d_{t-2} - \varphi_1^2 d_{t-2} + \varphi_2^2\varphi_1 d_{t-3} + \varphi_1^2\varphi_2^2 d_{t-3} + \varphi_2^3 d_{t-3} \\
&\quad - \varphi_1^3\varphi_2 d_{t-3} - \varphi_1^2\varphi_2 d_{t-3} - 2\varphi_1\varphi_2^2 d_{t-3} - \varphi_1\varphi_2 d_{t-3} + \varphi_1\varphi_2\varepsilon_{t-1} \\
&\quad + \varphi_1^2\varphi_2\varepsilon_{t-1} + \varphi_2^2\varepsilon_{t-1} - \varphi_1^3\varepsilon_{t-1} - \varphi_1^2\varepsilon_{t-1} - 2\varphi_1\varphi_2\varepsilon_{t-1} - \varphi_1\varepsilon_{t-1}) \\
&\quad + (-\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1\varphi_2 - \delta\varphi_1^2\varphi_2 - \delta\varphi_2^2 - \varphi_2\varphi_1 d_{t-3} - \varphi_1^2\varphi_2 d_{t-3} \\
&\quad - \varphi_1^3\varphi_2 d_{t-3} - \varphi_2^2\varphi_1 d_{t-3} - \varphi_2^2 d_{t-4} - \varphi_2^2\varphi_1 d_{t-4} - \varphi_1^2\varphi_2^2 d_{t-4} \\
&\quad - \varphi_2^3 d_{t-4} - \varphi_2\varepsilon_{t-2} - \varphi_1\varphi_2\varepsilon_{t-2} - \varphi_1^2\varphi_2\varepsilon_{t-2} - \varphi_2^2\varepsilon_{t-2}) \\
&= (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 \\
&\quad - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)\delta \\
&\quad + (\varphi_1^4 + \varphi_1^3 + 2\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2)d_{t-1} \\
&\quad + (\varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + 2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_2^2\varphi_1 \\
&\quad - \varphi_1^4 - \varphi_1^3 - 2\varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^2)d_{t-2} \\
&\quad + (\varphi_2^2\varphi_1 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_2^3 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1 \\
&\quad - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_2^2\varphi_1)d_{t-3} + (-\varphi_2^2 - \varphi_2^2\varphi_1 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_2^3)d_{t-4} \\
&\quad + (\varphi_1^3 + \varphi_1^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_2)\varepsilon_t \\
&\quad + (\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_1)\varepsilon_{t-1} + (-\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)\varepsilon_{t-2}
\end{aligned}$$

Απόδειξη (4.51)

$$\begin{aligned}
Var(q_t^{(S,IS)}) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2\gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2\gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2\gamma_0^{(S)} \\
&\quad + 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 \\
&\quad - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)cov(q_t q_{t-1}) \\
&\quad - 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_2^2)cov(q_t q_{t-2}) \\
&\quad - 2(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_2^2)cov(q_{t-1} q_{t-2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 \\
&\quad - \varphi_1^2 - \varphi_1^3) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&\quad - 2(1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_2^2) \gamma_0^{(S)} \rho_2 \\
&\quad - 2(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_2^2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + 2(-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2^2 \\
&\quad - \varphi_1^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^4 - \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^4\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1^3 - \varphi_1^4 - \varphi_1^5 - \varphi_1\varphi_2^2 \\
&\quad + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_2^3 - \varphi_2\varphi_1 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2\varphi_1^3 - \varphi_1^4\varphi_2 + \varphi_1^5\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2^2 \\
&\quad - \varphi_1^4 - \varphi_1^5 - \varphi_1^6 - 2\varphi_1^2\varphi_2^2 + 2\varphi_1^3\varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 2\varphi_2\varphi_1^2 - 2\varphi_1^3\varphi_2 \\
&\quad - 2\varphi_1^4\varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&\quad - 2(-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2^2 \\
&\quad - \varphi_2\varphi_1^2 - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^4\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_2^3 \\
&\quad - \varphi_1^3\varphi_2 - \varphi_1^4\varphi_2 - \varphi_1^5\varphi_2 - \varphi_1^3\varphi_2^2 - 2\varphi_2^2\varphi_1 - 2\varphi_1^2\varphi_2^2 - 2\varphi_1^3\varphi_2^2 \\
&\quad - 2\varphi_1\varphi_2^3) \gamma_0^{(S)} \rho_2 \\
&\quad - 2(\varphi_2^2\varphi_1 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1^3\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_1^2\varphi_2^2 - \varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^4\varphi_2^2 \\
&\quad - \varphi_1^2\varphi_2^3 - \varphi_2^3 - \varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_1^2\varphi_2^3 - \varphi_2^4 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2 \\
&\quad + \varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^4\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1^3\varphi_2 + \varphi_1^4\varphi_2 + \varphi_1^5\varphi_2 \\
&\quad + \varphi_1^3\varphi_2^2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + 2(-2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 3\varphi_1^3 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 3\varphi_1^4 \\
&\quad - 2\varphi_1^5 + \varphi_2^3 + \varphi_1^5\varphi_2 + 3\varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^6 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 2\varphi_1^4\varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&\quad - 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 4\varphi_1\varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^3\varphi_2^2 \\
&\quad - 2\varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^2 - \varphi_2^3 - \varphi_1^5\varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_2 \\
&\quad - 2(2\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_1^4\varphi_2^2 - 2\varphi_1^2\varphi_2^3 + \varphi_1\varphi_2 + 2\varphi_1^2\varphi_2 + 3\varphi_1^3\varphi_2 + 2\varphi_1^4\varphi_2 \\
&\quad - \varphi_2^3 - \varphi_2^4 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1^5\varphi_2 + \varphi_1^3\varphi_2^2) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\
&\quad + 2(-3\varphi_1\varphi_2 - 5\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 3\varphi_1^3 - 6\varphi_1^3\varphi_2 - 3\varphi_1^4 \\
&\quad - 2\varphi_1^5 + 2\varphi_2^3 + 2\varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^6 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 4\varphi_1^4\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1^4\varphi_2^2 \\
&\quad + 2\varphi_1^2\varphi_2^3) \gamma_0^{(S)} \rho_1 \\
&\quad - 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 4\varphi_1\varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^3\varphi_2^2 \\
&\quad - 2\varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^2 - \varphi_2^3 - \varphi_1^5\varphi_2) \gamma_0^{(S)} \rho_2
\end{aligned}$$

Κάνοντας αντικατάσταση τα ρ_1 και ρ_2 σύμφωνα με την (3.6) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(q_t^{(S,IS)} \right) &= (1 + \varphi_1 + \varphi_1^2 + \varphi_2 + \varphi_1^3 + 2\varphi_2\varphi_1)^2 \gamma_0^{(S)} \\ &+ (-\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - \varphi_1^2 - \varphi_1^3)^2 \gamma_0^{(S)} \\ &+ (-\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2 - \varphi_1^2\varphi_2 - \varphi_2^2)^2 \gamma_0^{(S)} \\ &+ 2(-3\varphi_1\varphi_2 - 5\varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_2^2 - \varphi_1 - 2\varphi_1^2 - 3\varphi_1^3 - 6\varphi_1^3\varphi_2 - 3\varphi_1^4 \\ &- 2\varphi_1^5 + 2\varphi_2^3 + 2\varphi_1^3\varphi_2^2 - \varphi_1^6 + 2\varphi_1\varphi_2^3 - 4\varphi_1^4\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2^2 + \varphi_1^4\varphi_2^2 \\ &+ 2\varphi_1^2\varphi_2^3)\gamma_0^{(S)} \left(\frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \\ &- 2(-\varphi_2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 3\varphi_1^2\varphi_2 - 3\varphi_1^3\varphi_2 - 4\varphi_1\varphi_2^2 - 4\varphi_1^2\varphi_2^2 - 3\varphi_1^3\varphi_2^2 \\ &- 2\varphi_1\varphi_2^3 - \varphi_2^2 - \varphi_2^3 - \varphi_1^5\varphi_2)\gamma_0^{(S)} \left(\frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \right) \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 5

Λιανοπωλητής

➤ L=1

	ϕ_1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϕ_2	-0,9	0,734737	0,749895	0,770105	0,794737	0,823158	0,854737	0,888842	0,924842	0,9621053
-0,8		0,514	0,537778	0,572222	0,616	0,667778	0,726222	0,79	0,857778	0,9282222
-0,7		0,339294	0,364706	0,407059	0,464235	0,534118	0,614588	0,703529	0,798824	0,8983529
-0,6		0,2125	0,232	0,2755	0,34	0,4225	0,52	0,6295	0,748	0,8725
-0,5		0,136	0,141333	0,178667	0,244	0,333333	0,442667	0,568	0,705333	0,8506667
-0,4		0,112857	0,094857	0,118	0,177143	0,267143	0,382857	0,519143	0,670857	0,8328571
-0,3		0,147077	0,095385	0,095385	0,140615	0,224615	0,340923	0,483077	0,644615	0,8190769
-0,2		0,244	0,146667	0,113333	0,136	0,206667	0,317333	0,46	0,626667	0,8093333
-0,1		0,410909	0,253818	0,175273	0,165455	0,214545	0,312727	0,450182	0,617091	0,8036364
0		0,658	0,424	0,286	0,232	0,25	0,328	0,454	0,616	0,802
0,1		1	0,667556	0,452444	0,34	0,315556	0,364444	0,472	0,623556	0,8044444
0,2			1	0,685	0,496	0,415	0,424	0,505	0,64	0,811
0,3				1	0,710286	0,554286	0,509714	0,554286	0,665714	0,8217143
0,4					1	0,743333	0,626667	0,622	0,701333	0,8366667
0,5						1	0,784	0,712	0,748	0,856
0,6							1	0,832	0,808	0,88
0,7								1	0,886667	0,9093333
0,8									1	0,946
0,9										1

	ϕ_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ϕ_2	-0,9	1	1,037895	1,075158	1,111158	1,145263	1,176842	1,205263	1,229895	1,2501053	1,2652632
	-0,8	1	1,071778	1,142222	1,21	1,273778	1,332222	1,384	1,427778	1,4622222	1,486
	-0,7	1	1,101647	1,201176	1,296471	1,385412	1,465882	1,535765	1,592941	1,6352941	1,6607059
	-0,6	1	1,1275	1,252	1,3705	1,48	1,5775	1,66	1,7245	1,768	1,7875
	-0,5	1	1,149333	1,294667	1,432	1,557333	1,666667	1,756	1,821333	1,8586667	1,864
	-0,4	1	1,167143	1,329143	1,480857	1,617143	1,732857	1,822857	1,882	1,9051429	1,8871429
	-0,3	1	1,180923	1,355385	1,516923	1,659077	1,775385	1,859385	1,904615	1,9046154	1,8529231
	-0,2	1	1,190667	1,373333	1,54	1,682667	1,793333	1,864	1,886667	1,8533333	1,756
	-0,1	1	1,196364	1,382909	1,549818	1,687273	1,785455	1,834545	1,824727	1,7461818	1,5890909
	0	1	1,198	1,384	1,546	1,672	1,75	1,768	1,714	1,576	1,342
	0,1	1	1,195556	1,376444	1,528	1,635556	1,684444	1,66	1,547556	1,3324444	1
	0,2	1	1,189	1,36	1,495	1,576	1,585	1,504	1,315	1	
	0,3	1	1,178286	1,334286	1,445714	1,490286	1,445714	1,289714	1		
	0,4	1	1,163333	1,298667	1,378	1,373333	1,256667	1			
	0,5	1	1,144	1,252	1,288	1,216	1				
	0,6	1	1,12	1,192	1,168	1					
	0,7	1	1,090667	1,113333	1						
	0,8	1	1,054	1							
	0,9	1	1								

➤ $L=2$

	ϕ_1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϕ_2	-0,9	2,634632	2,634404	2,479869	2,193347	1,809158	1,371221	0,930657	0,543385	0,2677263
	-0,8	2,19046	2,247111	2,163344	1,95584	1,653278	1,293938	0,9233	0,591644	0,3516511
	-0,7	1,778301	1,877341	1,850471	1,708969	1,476118	1,184795	0,875082	0,591859	0,3824047
	-0,6	1,4004	1,52832	1,54548	1,458	1,284	1,0512	0,79452	0,55368	0,3708
	-0,5	1,05928	1,203493	1,252773	1,20832	1,083333	0,900613	0,69016	0,486773	0,3276533
	-0,4	0,757843	0,906606	0,97698	0,965486	0,880643	0,740571	0,570591	0,400823	0,2637857
	-0,3	0,499514	0,641815	0,723046	0,735286	0,682615	0,578714	0,444462	0,305538	0,1900246
	-0,2	0,28846	0,413867	0,496367	0,52384	0,496167	0,422827	0,3205	0,210667	0,1172067
	-0,1	0,129927	0,228356	0,302989	0,337745	0,328545	0,280909	0,207556	0,126007	0,0561818
	0	0,03078	0,09216	0,14994	0,18432	0,1875	0,16128	0,11466	0,06144	0,01782
	0,1	0,0004	0,014142	0,045769	0,072	0,081556	0,072756	0,05112	0,026969	0,0130222
	0,2		0,0064	0,0015	0,01104	0,0205	0,02496	0,0267	0,0328	0,05274
	0,3			0,0324	0,014811	0,016286	0,028903	0,051943	0,089486	0,1480114
	0,4				0,1024	0,084833	0,098133	0,13882	0,208213	0,3100333
	0,5					0,25	0,25128	0,30216	0,40144	0,55032
	0,6						0,5184	0,56322	0,68448	0,8811
	0,7							0,9604	1,080267	1,3165067
	0,8								1,6384	1,87734
	0,9									2,6244

	ϕ_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ϕ_2	-0,9	0,162	0,282126	0,679225	1,397217	2,470421	3,921158	5,757347	7,9701095	10,531364	13,39143
	-0,8	0,256	0,354971	0,694044	1,3115	2,236018	3,484278	5,05856	6,9443444	9,1079111	11,49394
	-0,7	0,294	0,371525	0,655059	1,177482	1,962075	3,020118	4,348489	5,9272706	7,7173412	9,657981
	-0,6	0,288	0,345	0,57672	1,01088	1,6656	2,547	3,6468	4,93992	6,38208	7,9074
	-0,5	0,25	0,288613	0,473493	0,82744	1,363653	2,083333	2,97328	4,0034933	5,1247733	6,26632
	-0,4	0,192	0,215586	0,359863	0,642951	1,073371	1,647643	2,347886	3,13942	3,9683657	4,759243
	-0,3	0,126	0,139145	0,250338	0,473262	0,811994	1,258615	1,790806	2,3694462	2,9362154	3,411194
	-0,2	0,064	0,072527	0,159467	0,3343	0,596907	0,935167	1,32256	1,7157667	2,0522667	2,24794
	-0,1	0,018	0,028982	0,101847	0,242116	0,445709	0,696545	0,964145	1,2012291	1,3413164	1,296327
	0	0	0,02178	0,09216	0,21294	0,37632	0,5625	0,73728	0,84966	0,82944	0,58482
	0,1	0,022	0,064222	0,145209	0,26328	0,407156	0,553556	0,6648	0,6864089	0,5447022	0,1444
	0,2	0,096	0,16966	0,276	0,4101	0,55744	0,6915	0,77136	0,7393	0,5184	
	0,3	0,234	0,351531	0,499886	0,671143	0,847783	1,000286	1,084731	1,0404		
	0,4	0,448	0,623433	0,832853	1,06558	1,301333	1,507833	1,6384			
	0,5	0,75	0,99928	1,29216	1,61544	1,94632	2,25				
	0,6	1,152	1,4937	1,89792	2,34918	2,8224					
	0,7	1,666	2,123227	2,677867	3,3124						
	0,8	2,304	2,91106	3,6864							
	0,9	3,078	3,9204								

➤ L=3

	ϕ_1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϕ_2	-0,9	0,026346	0,075182	0,177076	0,341159	0,561174	0,813682	1,060867	1,256947	1,3571699
	-0,8	0,061337	0,089884	0,156577	0,265318	0,411519	0,578685	0,739617	0,861212	0,911857
	-0,7	0,13236	0,131574	0,166542	0,232978	0,324935	0,429847	0,52816	0,596578	0,6138928
	-0,6	0,251469	0,204941	0,203954	0,23328	0,282825	0,341152	0,393608	0,424051	0,419173
	-0,5	0,430497	0,315596	0,267832	0,258515	0,270833	0,291911	0,309474	0,312111	0,2921299
	-0,4	0,680636	0,469709	0,358936	0,303872	0,278646	0,266606	0,25556	0,236632	0,205695
	-0,3	1,011821	0,673488	0,479326	0,367076	0,2997	0,254658	0,217786	0,180775	0,1412455
	-0,2	1,431809	0,932395	0,631706	0,447846	0,330742	0,250095	0,187945	0,134827	0,0885227
	-0,1	1,944747	1,249931	0,818405	0,547057	0,371155	0,251018	0,163314	0,095941	0,0455073
	0	2,548892	1,625702	1,039751	0,665395	0,421875	0,258765	0,146039	0,067738	0,0182182
	0,1	3,232804	2,052182	1,291358	0,80112	0,483589	0,276503	0,142105	0,059628	0,0203791
	0,2		2,509056	1,559385	0,94615	0,553575	0,306778	0,159533	0,085632	0,0728334
	0,3			1,811716	1,07879	0,619843	0,346949	0,205041	0,162185	0,2024584
	0,4				1,149184	0,649408	0,380075	0,27735	0,303753	0,4399937
	0,5					0,5625	0,354845	0,352474	0,513178	0,8152632
	0,6						0,135424	0,346934	0,757555	1,345231
	0,7							0,007396	0,895851	1,9981677
	0,8								0,389376	2,5503174
	0,9									1,582564

	$\phi 1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\phi 2$	-0,9	1,3284	1,160278	0,875949	0,541349	0,272046	0,236626	0,655609	1,7948997	3,9527544	7,439262
	-0,8	0,8704	0,735707	0,53578	0,335435	0,241539	0,404781	1,016986	2,3029554	4,5058276	7,864947
	-0,7	0,5684	0,465891	0,337214	0,244392	0,284297	0,588865	1,320846	2,6640896	4,8073384	7,920544
	-0,6	0,3744	0,300375	0,229005	0,218068	0,353376	0,747475	1,533888	2,8558818	4,8487552	7,614639
	-0,5	0,25	0,199366	0,171633	0,21911	0,415705	0,854167	1,638861	2,8730717	4,6398283	6,975239
	-0,4	0,1664	0,133773	0,137384	0,223076	0,452242	0,897654	1,634816	2,7278598	4,2089472	6,050192
	-0,3	0,1044	0,085259	0,110457	0,218606	0,458206	0,8821	1,537468	2,4503455	3,603664	4,907803
	-0,2	0,0544	0,046321	0,087125	0,207667	0,443409	0,827558	1,379738	2,0891857	2,8914773	3,637755
	-0,1	0,0164	0,020421	0,075995	0,205942	0,43279	0,770645	1,212591	1,712611	2,1610447	2,352541
	0	0	0,022178	0,098406	0,243445	0,467251	0,765625	1,106381	1,4100534	1,5241216	1,189744
	0,1	0,0244	0,077709	0,189108	0,365551	0,605065	0,886211	1,153088	1,2948577	1,1187943	0,315844
	0,2	0,1184	0,225211	0,39744	0,634799	0,924326	1,228725	1,470234	1,509027	1,115136	
	0,3	0,3204	0,516046	0,789527	1,134231	1,527515	1,917957	2,208154	2,232036		
	0,4	0,6784	1,016914	1,452663	1,974086	2,550613	3,118892	3,564544			
	0,5	1,25	1,814633	2,504966	3,30651	4,183171	5,0625				
	0,6	2,1024	3,028077	4,119501	5,362342	6,718464					
	0,7	3,3124	4,844016	6,596661	8,561476						
	0,8	4,9664	7,660447	10,6537							
	0,9	7,1604	13,08992								

Προμηθευτής

Περίπτωση 1^η

➤ $L=1$

	$\phi 1$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$\phi 2$	-0,9	16,09917	2,768046	0,850252	0,379425	0,233325	0,164764	0,10776	0,050153	-
	-0,8	9,149451	1,439819	0,38702	0,163891	0,111811	0,085514	0,049006	-	0,050514
	-0,7	4,419572	0,571883	0,101931	0,035694	0,036707	0,030176	-	0,05048	0,109555
	-0,6	1,870991	0,139091	0,020359	0,013462	0,00498	-	0,034355	0,093248	0,166443
	-0,5	1,028741	0,031414	0,028955	0,011351	-	0,014213	0,057675	0,127511	0,216857
	-0,4	1,3763	0,103946	0,006514	-	0,00575	0,030579	0,081358	0,159589	0,263146
	-0,3	2,950733	0,231533	-	0,037688	0,052236	0,076968	0,125286	0,203857	0,315605
	-0,2	5,284252	-	0,277464	0,259547	0,222388	0,206434	0,225968	0,28771	0,39625
	-0,1	-	2,7249	1,672726	1,084283	0,746796	0,553296	0,466783	0,468434	0,549349
	0	82,46405	17,67388	7,109203	3,744769	2,25	1,466598	1,054777	0,878029	0,868785
	0,1	-	104,9033	27,77129	11,99099	6,401652	3,820883	2,493732	1,827505	1,563832
	0,2		-	128,5079	39,50302	18,11099	9,896296	6,016058	4,052222	3,113116
	0,3			-	164,1251	55,0703	26,36955	14,83985	9,351874	6,641659
	0,4				-	217,6499	77,36598	38,47301	22,48686	14,93557
	0,5					-	300,8859	111,7951	57,81822	35,54481
	0,6						-	438,7817	169,7427	92,15598
	0,7							-	691,3951	280,2861
	0,8								-	1247,714
	0,9									-

	ϕ_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ϕ_2	-0,9	0,02489	-	0,105759	0,331409	0,72639	1,354334	2,298627	3,670752	5,623167	8,369876
	-0,8	0,084416	0,077757	-	0,187958	0,536923	1,11405	2,009812	3,348724	5,306472	8,138422
	-0,7	0,16016	0,179859	0,139367	-	0,290149	0,801921	1,633855	2,926175	4,884036	7,818189
	-0,6	0,239319	0,291965	0,297174	0,217363	-	0,429394	1,178372	2,406048	4,355405	7,413269
	-0,5	0,314815	0,405057	0,463443	0,454472	0,325864	-	0,64029	1,776545	3,700722	6,907271
	-0,4	0,385932	0,516317	0,634525	0,708636	0,688272	0,49417	-	1,001356	2,865199	6,243254
	-0,3	0,459884	0,630968	0,815265	0,986897	1,100506	1,078816	0,789642	-	1,724795	5,273339
	-0,2	0,555272	0,765823	1,022993	1,311034	1,595547	1,80949	1,825573	1,395734	-	3,606828
	-0,1	0,709986	0,956434	1,295135	1,727075	2,240202	2,79641	3,304271	3,551684	3,004344	-
	0	1	1,272625	1,704967	2,324917	3,165255	4,261111	5,64868	7,364592	9,445613	11,92851
	0,1	1,584347	1,854274	2,396833	3,282451	4,636596	6,683683	9,896505	15,60711	30,29532	-
	0,2	2,811067	2,995314	3,668869	4,97282	7,24361	11,25801	19,27467	42,38938	-	-
	0,3	5,470526	5,34443	6,176197	8,249664	12,48359	21,74305	50,2906	-	-	-
	0,4	11,4398	10,40956	11,469	15,32156	25,12445	57,4929	-	-	-	-
	0,5	25,5	21,95384	23,62609	33,21858	69,70406	-	-	-	-	-
	0,6	61,26556	50,47652	55,58448	97,43989	-	-	-	-	-	-
	0,7	165,145	131,386	170,1764	-	-	-	-	-	-	-
	0,8	553,8536	440,8446	-	-	-	-	-	-	-	-
	0,9	3243,672	-	-	-	-	-	-	-	-	-

➤ L=2

	ϕ_1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϕ_2	-0,9	0,340737	0,197081	0,114757	0,064367	0,033351	0,015258	0,005774	0,001528	-
	-0,8	0,307972	0,175883	0,102404	0,057714	0,029826	0,013145	0,004153	-	0,001633
	-0,7	0,276504	0,15282	0,086605	0,047145	0,022585	0,007849	-	0,003402	0,004548
	-0,6	0,248799	0,12993	0,068952	0,033852	0,01249	-	0,006136	0,007953	0,007356
	-0,5	0,22552	0,108078	0,05028	0,018527	-	0,010219	0,014276	0,013539	0,008835
	-0,4	0,203998	0,085515	0,029299	-	0,016276	0,024745	0,027108	0,023332	0,010931
	-0,3	0,175604	0,055252	-	0,02737	0,042364	0,050887	0,054157	0,049469	0,025828
	-0,2	0,120947	-	0,053404	0,078824	0,094404	0,107726	0,120225	0,125556	0,094209
	-0,1	-	0,118621	0,1677	0,190796	0,211011	0,240472	0,284653	0,337999	0,344525
	0	0,28208	0,40256	0,44544	0,46592	0,5	0,57408	0,71456	0,95744	1,35792
	0,1	-	3,160973	1,822763	1,579928	1,56927	1,770201	2,331512	3,930458	40,56946
	0,2	-	-	304,4514	24,53143	12,93438	9,759376	95,48662	21,28689	2,412909
	0,3	-	-	-	37,14506	43,67951	32,06925	14,64186	4,230503	0,945938
	0,4	-	-	-	-	5,021846	6,074057	1,533203	3,091692	6,906317
	0,5	-	-	-	-	-	28,16184	17,94731	18,09691	21,08841
	0,6	-	-	-	-	-	-	91,55532	61,3382	58,38161
	0,7	-	-	-	-	-	-	-	242,8057	173,4339
	0,8	-	-	-	-	-	-	-	-	695,6291
	0,9	-	-	-	-	-	-	-	-	-

	$\phi 1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\phi 2$	-0,9	0,000399	-	0,006816	0,073615	0,786128	16,53699	373,5294	51,29517	42,6826	50,08198
	-0,8	0,00237	0,00297	-	0,060943	1,170584	130,4285	50,39649	28,62749	31,66732	42,36962
	-0,7	0,005232	0,007255	0,013776	-	1,919208	103,7787	17,50271	17,87755	24,42677	36,71076
	-0,6	0,006	0,006669	0,027421	0,220196	-	7,15035	7,65199	11,67476	19,24052	32,44321
	-0,5	0	0,011781	0,028249	1,775836	15,60412	-	3,048386	7,41288	15,11341	29,05627
	-0,4	-0,01763	0,074528	0,03975	442,0956	6,080644	2,331299	-	3,831615	11,26733	25,98845
	-0,3	-0,04871	0,250556	2,005527	11,84513	5,145774	4,055538	2,846407	-	6,772416	22,30348
	-0,2	-0,08533	0,852881	19,75882	5,894817	5,664552	6,178008	6,42727	5,226417	-	15,84937
	-0,1	-0,0964	40,17169	5,013293	5,618216	7,232773	9,447686	11,9516	13,90415	12,79501	-
	0	-	3,00608	4,54656	6,84944	10,20992	15	21,67808	30,79856	43,02144	59,12192
	0,1	0,39437	2,891727	5,617183	9,567026	15,61771	25,16229	40,97818	70,50893	148,694	-
	0,2	1,512	4,370641	8,413042	14,94896	25,98393	45,82112	86,67758	207,7288	-	
	0,3	4,304327	8,232742	14,66652	26,18341	48,14646	96,06263	246,0409	-		
	0,4	10,976	17,25913	28,83196	51,98223	104,7811	276,3621	-			
	0,5	27	38,72228	63,34326	121,6729	316,7468	-				
	0,6	67,584	93,86428	161,302	394,2808	-					
	0,7	183,4187	260,9808	563,4792	-						
	0,8	606,528	1011,945	-							
	0,9	3456,936	-								

➤ L=3

	$\phi 1$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$\phi 2$	-0,9	1,033084	0,428485	0,180988	0,167661	0,072875	0,017274	0,002383	0,003696	-
	-0,8	0,239442	0,111657	0,072859	0,112741	0,069363	0,027968	0,006772	-	0,00085
	-0,7	0,216225	0,08411	0,001041	0,040747	0,033749	0,01387	-	0,006183	0,008624
	-0,6	0,198148	0,095118	0,026602	0,00457	0,008305	-	0,008504	0,014209	0,018896
	-0,5	0,170853	0,096775	0,038408	0,00826	-	0,002999	0,0094	0,016868	0,026876
	-0,4	0,138245	0,080395	0,030928	-	0,012933	0,013891	0,007905	0,004143	0,025406
	-0,3	0,103639	0,048016	-	0,036228	0,058203	0,066967	0,063718	0,045849	0,003684
	-0,2	0,06346	-	0,055363	0,105301	0,146908	0,176873	0,190847	0,178268	0,109341
	-0,1	-	0,074954	0,143257	0,215221	0,290738	0,365937	0,433931	0,476973	0,426944
	0	0,140704	0,223667	0,303371	0,403098	0,53125	0,692198	0,893673	1,152717	1,502212
	0,1	-	0,694248	0,702568	0,809149	1,021957	1,384161	2,029829	3,6026	52,49925
	0,2	-	-	2,361599	1,987108	2,251579	3,186245	6,00763	32,97366	4,80986
	0,3	-	-	-	7,418542	6,194757	9,033095	28,16746	2030,849	12,43217
	0,4	-	-	-	-	27,55542	37,49666	256,2533	295,8446	33,85087
	0,5	-	-	-	-	-	281,117	5879,134	459,0297	93,9978
	0,6	-	-	-	-	-	-	6507619	1171,388	279,981
	0,7	-	-	-	-	-	-	-	4718,524	970,7003
	0,8	-	-	-	-	-	-	-	-	4889,546
	0,9	-	-	-	-	-	-	-	-	-

	ϕ_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ϕ_2	-0,9	0,001549	-	0,000307	0,00673	0,021293	0,029779	0,013817	0,111707	2,933279	439,669
	-0,8	0,001213	0,002014	-	0,009317	0,025034	0,035856	0,020128	0,599076	51,81872	129,8394
	-0,7	0,010629	0,012386	0,010493	-	0,020329	0,046977	0,000289	9,117139	93,3004	39,59359
	-0,6	0,024615	0,030973	0,03383	0,025981	-	0,062214	1,170492	48,96945	19,5365	27,02353
	-0,5	0,041667	0,06167	0,083316	0,099458	0,103523	-	10,5295	6,891635	11,9035	23,49918
	-0,4	0,061802	0,121009	0,214247	0,398383	0,947905	4,868862	-	2,890862	8,819051	22,18162
	-0,3	0,084722	0,267969	0,722769	3,527061	6,195133	3,150154	2,110166	-	5,678492	20,63381
	-0,2	0,105139	0,810826	9,445977	5,257854	4,338794	4,66189	5,033691	4,378337	-	15,91424
	-0,1	0,100879	28,6826	4,329093	4,527626	5,721046	7,622032	10,12397	12,62071	12,61115	-
	0	-	2,742612	3,885619	5,672623	8,474906	12,84375	19,57745	29,80501	45,08859	67,54668
	0,1	0,408568	2,457653	4,658062	7,931447	13,25444	22,31268	38,5813	71,31077	162,8299	-
	0,2	1,714241	3,477742	6,609485	12,07407	21,96463	41,08022	83,26757	215,4407	-	-
	0,3	5,536024	6,66904	11,10648	20,4456	39,91071	85,56513	237,0854	-	-	-
	0,4	16,38214	15,56229	22,32537	40,16406	85,49016	243,2433	-	-	-	-
	0,5	47,41071	40,76827	53,44848	97,31291	260,6511	-	-	-	-	-
	0,6	140,6955	116,6913	153,9115	340,7856	-	-	-	-	-	-
	0,7	454,3465	377,6551	608,3104	-	-	-	-	-	-	-
	0,8	1789,348	1622,314	-	-	-	-	-	-	-	-
	0,9	12134,09	-	-	-	-	-	-	-	-	-

2^η Περίπτωση

➤ L=1

	ϕ_1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϕ_2	-0,9	0,622439	0,465349	0,361702	0,338302	0,40918	0,577042	0,838072	1,186082	1,614867
	-0,8	0,44697	0,303529	0,206216	0,184762	0,255306	0,42069	0,676377	1,01561	1,432062
	-0,7	0,287407	0,16037	0,073103	0,056061	0,127179	0,289574	0,538246	0,866232	1,26747
	-0,6	0,166522	0,054545	0,021304	0,033846	0,035806	0,191579	0,428723	0,74069	1,122113
	-0,5	0,118095	0,017368	0,048421	0,060476	0	0,139677	0,355897	0,643469	0,998033
	-0,4	0,165238	0,075556	0,020588	0,004444	0,043333	0,150769	0,330606	0,580952	0,898679
	-0,3	0,295652	0,219474	0,181176	0,165294	0,176842	0,236957	0,362759	0,56027	0,828936
	-0,2	0,470741	0,403636	0,382632	0,377778	0,374211	0,389091	0,452963	0,585882	0,794186
	-0,1	0,65697	0,587037	0,572174	0,579524	0,579048	0,57087	0,585185	0,654848	0,798049
	0	0,839756	0,755294	0,732069	0,741538	0,75	0,741538	0,732069	0,755294	0,839756
	0,1	1,018039	0,91186	0,87027	0,870606	0,882581	0,882903	0,871515	0,871622	0,913488
	0,2		1,065185	1,000638	0,984762	0,992564	1	0,996667	0,992381	1,010851
	0,3			1,134237	1,099057	1,097143	1,106596	1,11234	1,113673	1,124528
	0,4				1,22303	1,208361	1,215172	1,227193	1,237241	1,250328
	0,5					1,333333	1,334225	1,348986	1,367101	1,387042
	0,6						1,468837	1,483253	1,507317	1,535301
	0,7							1,633535	1,661134	1,696495
	0,8								1,830877	1,872124
	0,9									2,063511

	ϕ_1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
ϕ_2	-0,9	2,11916	2,694834	3,338786	4,048731	4,823004	5,660398	6,560036	7,521278	8,54366	9,626841
	-0,8	1,920702	2,47782	3,100779	3,78774	4,537426	5,348952	6,221705	7,15526	8,149317	9,203669
	-0,7	1,737475	2,273162	2,872482	3,534088	4,257104	5,040957	5,885274	6,789813	7,754415	8,778979
	-0,6	1,569302	2,079903	2,652459	3,286084	3,980241	4,734607	5,548991	6,423279	7,35741	8,35135
	-0,5	1,416667	1,897582	2,439725	3,042481	3,705497	4,428571	5,211592	6,054498	6,957259	7,919863
	-0,4	1,281212	1,72679	2,234286	2,802991	3,432464	4,122422	4,872688	5,683146	6,553719	7,484359
	-0,3	1,166271	1,569863	2,037865	2,568972	3,162283	3,817181	4,533237	5,310151	6,147709	7,045759
	-0,2	1,077037	1,431493	1,854634	2,344141	2,898305	3,515899	4,196049	4,938128	5,741682	6,606379
	-0,1	1,019804	1,31873	1,691558	2,135054	2,646577	3,224122	3,866209	4,571751	5,339951	6,170216
	0	1	1,239836	1,557838	1,950899	2,415849	2,95	3,551233	4,217929	4,948866	5,743122
	0,1	1,019804	1,201967	1,463151	1,802299	2,216796	2,703802	3,26078	3,885644	4,576738	5,33277
	0,2	1,077037	1,20873	1,415135	1,699195	2,060392	2,496723	3,005797	3,585346	4,233407	
	0,3	1,166271	1,259104	1,417273	1,648539	1,955825	2,33916	2,797153	3,327898		
	0,4	1,281212	1,348356	1,468293	1,652796	1,908679	2,238926	2,644058			
	0,5	1,416667	1,470123	1,563258	1,709899	1,92009	2,2				
	0,6	1,569302	1,618352	1,69551	1,814486	1,987119					
	0,7	1,737475	1,78835	1,85844	1,959658						
	0,8	1,920702	1,977009	2,046557							
	0,9	2,11916	2,182556								

➤ L=2

	ϕ_1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϕ_2	-0,9	1,474056	1,310495	1,191138	1,0857	0,979814	0,873045	0,776394	0,708089	0,686332
	-0,8	1,243581	1,073652	0,958351	0,864	0,772522	0,679169	0,590041	0,5184	0,478731
	-0,7	1,06738	0,885704	0,769538	0,682166	0,60222	0,520991	0,439794	0,366482	0,310617
	-0,6	0,945558	0,746893	0,625045	0,540636	0,469462	0,399265	0,326736	0,253805	0,183378
	-0,5	0,878291	0,657595	0,525375	0,440018	0,375	0,31502	0,252424	0,182653	0,099378
	-0,4	0,865891	0,618419	0,471288	0,381169	0,31985	0,269649	0,219103	0,156714	0,062969
	-0,3	0,908977	0,630424	0,463959	0,365284	0,305309	0,264914	0,229908	0,182103	0,083
	-0,2	1,008968	0,695605	0,50523	0,39388	0,332687	0,302433	0,288406	0,268643	0,179887
	-0,1	1,169971	0,818079	0,597755	0,468011	0,401512	0,380554	0,393766	0,426	0,405565
	0	1,4104	1,0064	0,7424	0,5824	0,5	0,4784	0,5104	0,5984	0,7544
	0,1	0,0102	1,227692	0,897292	0,683087	0,555	0,484719	0,436798	0,316119	0,163148
	0,2		0,0432	0,349609	0,4	0,27	0,115815	0,06953	0,256985	0,204526
	0,3			0,1062	0,252133	0,247857	0,262857	0,26087	0,170139	0,072469
	0,4				0,2112	0,050769	0,094171	0,035769	0,110769	0,358415
	0,5					0,375	0,253837	0,283539	0,420732	0,657305
	0,6						0,6192	0,620404	0,745937	0,978784
	0,7							0,9702	1,090619	1,328296
	0,8								1,4592	1,70885
	0,9									2,1222

	$\phi 1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\phi 2$	-0,9	0,72	0,806254	0,951069	1,208864	1,698153	2,570616	3,973306	6,037618	8,886892	12,6461
	-0,8	0,48	0,527352	0,646576	0,918729	1,476368	2,460253	3,992679	6,18275	9,139874	12,98188
	-0,7	0,28	0,289629	0,393193	0,704859	1,362642	2,480227	4,147712	6,454205	9,500575	13,40202
	-0,6	0,12	0,091929	0,1952	0,583076	1,377129	2,642558	4,436586	6,837331	9,944995	13,8766
	-0,5	0	0,0673	0,063287	0,581188	1,544109	2,951923	4,844278	7,303792	10,43755	14,3669
	-0,4	0,08	0,189477	0,025143	0,744512	1,88246	3,393213	5,334798	7,808725	10,93137	14,8273
	-0,3	0,12	0,271171	0,1532	1,127649	2,378428	3,915	5,846636	8,292517	11,37252	15,21013
	-0,2	0,12	0,265357	0,603981	1,725015	2,943096	4,422735	6,299813	8,690736	11,70926	15,4735
	-0,1	0,08	0,244768	1,413483	2,330146	3,410117	4,805968	6,620497	8,952227	11,90502	15,59073
	0	-	1,3664	1,8944	2,6344	3,6464	5	6,7744	9,0584	11,9504	15,5584
	0,1	0,12	1,083783	1,817229	2,632774	3,672614	5,028117	6,78461	9,032064	11,86818	15,39944
	0,2	0,28	0,956246	1,694277	2,551651	3,617415	4,977633	6,718184	8,929275	11,70799	
	0,3	0,48	1,026071	1,702686	2,540807	3,597213	4,942027	6,653964	8,819495		
	0,4	0,72	1,206613	1,836431	2,641967	3,671163	4,985189	6,656206			
	0,5	1	1,463349	2,069953	2,852789	3,856647	5,138158				
	0,6	1,32	1,781687	2,385116	3,161288	4,151933					
	0,7	1,68	2,15465	2,770761	3,556267						
	0,8	2,08	2,578535	3,220056							
	0,9	2,52	3,051214								

➤ L=3

	$\phi 1$	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
$\phi 2$	-0,9	0,82137	0,790589	0,73911	0,676201	0,596987	0,461144	0,124752	0,985308	7,267353
	-0,8	0,69169	0,679044	0,637431	0,572996	0,477768	0,303335	0,127746	1,572569	10,26835
	-0,7	0,585169	0,592451	0,566572	0,509778	0,411581	0,220832	0,24841	1,803313	11,2538
	-0,6	0,49703	0,521965	0,513723	0,470338	0,379232	0,19032	0,274381	1,79325	11,03937
	-0,5	0,426646	0,463146	0,470734	0,442962	0,365444	0,191195	0,242118	1,650928	10,27517
	-0,4	0,376003	0,414683	0,43308	0,419918	0,35898	0,206829	0,182135	1,458934	9,390243
	-0,3	0,343411	0,372789	0,395204	0,393693	0,3499	0,223398	0,116986	1,267622	8,611668
	-0,2	0,286936	0,297863	0,323555	0,334849	0,310804	0,214175	0,072802	1,101437	8,002821
	-0,1	0,260884	0,194764	0,073278	0,010768	0,040802	0,005717	0,216242	1,051038	7,328711
	0	29,40921	11,3954	6,342852	4,370122	3,622596	3,627852	4,459642	6,976822	16,07755
	0,1	10,12522	31,30542	77,37359	163,2084	215,8087	137,995	56,46971	19,49738	0,489459
	0,2		4,780462	6,754525	7,587499	7,119766	5,432417	2,722555	0,432386	1,500608
	0,3			2,745192	2,956975	2,442753	1,260321	0,31081	1,237725	3,015785
	0,4				1,327659	0,834233	0,176173	1,205729	1,35136	3,768709
	0,5					0,2219	1,084494	1,78144	1,533987	4,393698
	0,6						1,927015	2,391991	1,84207	5,127768
	0,7							3,152726	2,289756	6,105149
	0,8								2,896314	7,427998
	0,9									9,186378

	$\phi 1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\phi 2$	-0,9 -	8,481773	2,164658	1,040397	0,58617	0,185815	0,397077	1,356883	3,008583	5,866232	
	-0,8 -	13,94535	3,717484	1,741015	0,925061	0,295454	0,495531	1,742511	3,80869	6,395578	
	-0,7 -	16,12625	4,415289	2,059308	1,031895	0,200724	0,873546	2,486976	4,423278	3,941029	
	-0,6 -	16,45887	4,594246	2,105485	0,899418	0,222861	1,648479	3,094935	3,310761	119,663	
	-0,5 -	15,95975	4,469186	1,876439	0,363922	1,123591	2,225754	2,452433	372,1412	185,8598	
	-0,4 -	15,17551	4,035028	1,119318	0,80425	1,604878	1,90194	15997,79	137,9111	88,63662	
	-0,3 -	14,08637	2,795393	0,622354	0,844165	4,364433	537,032	91,59033	68,25793	60,88313	
	-0,2 -	11,32908	0,532965	1,882512	179,2203	106,3844	57,27748	48,96632	46,09494	44,66254	
	-0,1 -	0,502554	34,56587	95,01211	41,43182	33,85919	32,66427	32,9744	33,66496	35,2508	
	0 -	26,35828	18,1051	16,99098	18,0033	19,94335	22,13693	24,29422	26,74348	30,28325	
	0,1 -	11,02906	2,591389	7,157413	10,54831	13,67729	16,65781	19,68314	23,26182	28,09332	
	0,2 -	15,34656	1,306687	3,621969	7,269396	10,6275	13,9515	17,55134	21,92503		
	0,3 -	16,58254	2,640321	2,230902	5,886179	9,346416	12,93252	16,99045			
	0,4 -	17,02414	2,960107	1,899364	5,59016	9,176848	13,02528				
	0,5 -	17,19597	2,711989	2,237483	6,030213	9,790471					
	0,6 -	17,36287	2,075585	3,076997	7,038572						
	0,7 -	17,74901	1,148049	4,336733							
	0,8 -	18,58337	0,003658								
	0,9 -	20,10896									

*(Οι τιμές που δεν έχουν συμπληρωθεί δεν είναι σύμφωνες με τους περιορισμούς της (3.2), μέσω των οποίων διασφαλίζεται η στασιμότητα της ζήτησης)