



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ  
ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ**

**ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ  
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ**

**ΗΡΩ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπουσα**

**ΜΑΡΙΑ ΑΔΑΜ**

**Αναπληρώτρια Καθηγήτρια**

**Λαμία, Σεπτέμβριος 2021**





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ**

**ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ**  
**ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ**

**ΗΡΩ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

*Επιβλέπουσα*

**ΜΑΡΙΑ ΑΔΑΜ**

*Αναπληρώτρια Καθηγήτρια*

**Λαμία, Σεπτέμβριος 2021**





**UNIVERSITY OF THESSALY**  
**SCHOOL OF SCIENCE**  
**DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE AND**  
**BIOMEDICAL INFORMATICS**

**BOUNDS ON THE SPECTRAL RADIUS OF A NONNEGATIVE MATRIX**  
**AND APPLICATIONS IN GRAPH THEORY**

**IRO OIKONOMOU**

**DISSERTATION**

**Supervisor**

**MARIA ADAM**

**Associate Professor**

**Lamia, September 2021**

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις <sup>(1)</sup>, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περι-κλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία: 20/09/2021

Η Δηλούσα

Ηρώ Οικονόμου

(1) «Όποια/ος εν γνώσει της/τους δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν η/ο υπαίτια/ος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν της/του ή σε άλλη/ον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτη/ον ή σκόπευε να βλάψει άλλη/ον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

**ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΦΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ  
ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ**

**ΗΡΩ ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ**

**Τριμελής Επιτροπή:**

- 1. Μαρία Αδάμ**, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Π.Θ (επιβλέπουσα)
- 2. Ευριπίδης Μάρκου**, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Π.Θ
- 3. Βασίλειος Πλαγιανάκος**, Καθηγητής Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική του Π.Θ





*Στη νοιά μου, Άννα*



## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με το πέρας αυτής της εργασίας νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω:

Πρώτη απ' όλους την επιβλέπουσα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Μαρία Αδάμ, του Τμήματος Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική, για την αδιάκοπη ενθάρρυνση, την υπομονή της, και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου παρέχει. Είμαι ειλικρινά ευγνώμων, για χρόνο που αφιέρωσε.

Έπειτα, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Ευριπίδη Μάρκου, για τις εποικοδομητικές συζητήσεις περί αλγορίθμων και πολυπλοκότητας, και την συμμετοχή του στη τριμελή επιτροπή. Τον Καθηγητή, Βασίλειο Πλαγιανάκο, του ίδιου τμήματος, για τη συμμετοχή του στη τριμελή επιτροπή.

Την Δρ. Αικατερίνη Αρετάκη, για τις χρήσιμες παρατηρήσεις και υποδείξεις.

Το Τμήμα Πληροφορικής με Εφαρμογές στη Βιοϊατρική για το γόνιμο ακαδημαϊκό κλίμα. Παρά τις αντιξοότητες των τελευταίων χρόνων, τόσο το εκπαιδευτικό, όσο και το διοικητικό προσωπικό, δεν έπαψαν να φροντίζουν για τις/τους φοιτήτριες/ητές και να τις/τους εμπνέουν.

Την οικογένειά μου, για τη διαρκή και αμέριστη στήριξη που μου παρέχουν.

Ηρώ Οικονόμου



# Περίληψη

Στην παρούσα εργασία, πολλαπλά φράγματα άνωθεν και εκατέρωθεν της φασματικής ακτίνας μη-αρνητικού πίνακα αναπτύσσονται και αποδεικνύονται. Ύστερα της εκτενής συζήτησης των προαπαιτούμενων εννοιών και θεωρημάτων, τα πρώτα φράγματα που αναπτύσσονται ανακύπτουν από γενίκευση των προϋπάρχοντων μεγεθών average 2-row sums και average 3-row sums. Ειδικότερα, ορίζονται τα επονομαζόμενα average  $k$ -row sums. Μάλιστα, τα προαναφερθέντα μεγέθη διευρύνονται περισσότερο και προκειμένου να αποδειχθούν διάφορες ιδιότητες που τα διέπουν, θεωρούμε ορισμένες ακολουθίες ως προς  $k$ . Έπειτα, αναπτύσσονται νέες εκφράσεις φραγμάτων, οι οποίες αποτελούν γενίκευση φραγμάτων που προϋπάρχουν στη βιβλιογραφία. Τα νέα φράγματα συμπεριλαμβάνουν τα average  $k$ -row sums. Επιπρόσθετα, αποδεικνύονται και άλλες γενικές εκφράσεις που τα αποτελούν. Τα εν λόγω φράγματα αξιοποιούν αποκλειστικά τα στοιχεία του πίνακα και των δυνάμεών του. Εξετάζονται η υπολογιστική πολυπλοκότητα, οι περιπτώσεις ισότητας και άλλες ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν. Ακόμη, παρέχονται εμπειριστατωμένες συγκρίσεις με κάποια από τα φράγματα που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία. Κατασκευάζοντας πιο γενικές εκφράσεις φραγμάτων, ως εκ τούτου λαμβάνουμε εγγύτερα φράγματα στη φασματική ακτίνα, εν συγκρίσει με τα φράγματα από τα οποία προήλθαν. Τέλος, τα φράγματα αυτά εφαρμόζονται σε μη-αρνητικούς πίνακες, που αντιστοιχούν σε κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, ενώ αναφέρεται η συνεισφορά της φασματικής ακτίνας στη θεωρία γραφημάτων.

**Λέξεις κλειδιά:** φασματική ακτίνα, φάσμα, αθροίσματα γραμμών, κατευθυνόμενα γραφήματα, μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, average 2-row sums, average 3-row sums, average  $k$ -row sums



# Abstract

In this dissertation, multiple sharp upper and lower bounds for the spectral radius of a nonnegative matrix are developed and proved. Firstly, we examine existing bounds for the spectral radius, the so-called average 2-row sums, and average 3-row sums. These expressions exclusively involve the elements of the matrix and its powers. Expanding the latter quantities, we define the average  $k$ -row sums by considering the  $k$ th power of the matrix, and we prove sharp inequalities for the spectral radius. In the sequel, we develop new formulas which encompass the average  $k$ -row sums to generalize predated bounds. Subsequently, sequences emerge from the previous quantities, and we state basic analytic properties. Derive from our theoretical results, we construct and implement algorithms, while their computational complexity is investigated. In addition, we provide illustrative examples comparing the newly constructed bounds with enlisted, existing ones. Finally, we apply these bounds to adjacency matrices associated with undirected and directed graphs, whereas the contribution of the spectral radius to graph theory, and vice versa, is discussed.

**Keywords:** spectral radius, spectrum, row sums, directed graphs, undirected graphs, average 2-row sums, average 3-row sums, average  $k$ -row sums





# Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
<b>1 Φασματική ακτίνα μη-αρνητικού πίνακα</b>	<b>5</b>
1.1 Θεμελιώδεις ορισμοί μη-αρνητικών πινάκων . . . . .	5
1.2 Perron-Frobenius . . . . .	8
1.3 Αριθμητική προσέγγιση ιδιοδιανύσματος της φασματικής ακτίνας . . . . .	11
<b>2 Στοιχεία θεωρίας γραφημάτων</b>	<b>13</b>
2.1 Θεμελιώδεις ορισμοί γραφημάτων . . . . .	13
2.2 Γραφήματα και φάσμα . . . . .	19
2.3 Συνεκτικότητα και μονοπάτια . . . . .	20
2.4 Θετικότητα ιδιοδιανυσμάτων . . . . .	23
2.5 Φράγματα αναλλοίωτων μεγεθών στα γραφήματα . . . . .	26
<b>3 Φασματική ακτίνα και αθροίσματα γραμμών</b>	<b>29</b>
3.1 Βασικοί ορισμοί και φράγματα . . . . .	30
3.2 Ομοιότητα και φράγματα . . . . .	33
3.3 Αναλυτικές ιδιότητες των φραγμάτων της φασματικής ακτίνας . . . . .	36
3.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα προτεινόμενων φραγμάτων . . . . .	47
3.5 Εφαρμογές στα γραφήματα . . . . .	48
<b>4 Γενικευμένα φράγματα φασματικής ακτίνας</b>	<b>51</b>
4.1 Γενικευμένα φράγματα φασματικής ακτίνας συναρτήσει των $w_i^{(k)}(A)$ . . . . .	51
4.1.1 Σχετική βιβλιογραφική επισκόπηση . . . . .	51
4.1.2 Γενικευμένα άνω φράγματα . . . . .	62
4.1.3 Γενικευμένα κάτω φράγματα . . . . .	66
4.2 Ιδιότητες και υπολογιστική πολυπλοκότητα . . . . .	69

4.2.1	Αναλυτικές ιδιότητες . . . . .	69
4.2.2	Υπολογιστική πολυπλοκότητα . . . . .	70
4.3	Εφαρμογές στα γραφήματα . . . . .	75
	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>78</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>79</b>
	<b>Παράρτημα Α'</b>	<b>81</b>
	<b>Συμβολισμοί</b>	<b>88</b>
	<b>Ευρετήριο</b>	<b>89</b>





# Εισαγωγή

Η φασματική ακτίνα,  $\rho(A)$ , ενός  $n \times n$  τετραγωνικού πίνακα  $A$  με μη-αρνητικά στοιχεία, είναι ο μεγαλύτερος σε μέτρο αριθμός, που είναι ρίζα,  $\lambda$ , του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Το πρόβλημα του εντοπισμού της μέγιστης ιδιοτιμής μη-αρνητικού πίνακα είναι μεγάλης σημασίας, τόσο στα θεωρητικά μαθηματικά, όσο και στα υπολογιστικά, όπου μία επαναληπτική διαδικασία ενδέχεται να απαιτεί μία εκτίμηση της μέγιστης ιδιοτιμής. Τέτοιες εκτιμήσεις είναι χρήσιμες, καθώς ο ακριβής υπολογισμός της φασματικής ακτίνας, είναι πρακτικά ανέφικτος, δεδομένου ότι πρέπει να γίνουν υπολογισμοί της τάξης του  $n!$ , ενώ απλοποιούνται σημαντικά όταν τα φράγματα δύναται να υπολογιστούν συναρτήσει των στοιχείων του πίνακα, παραδείγματος χάριν μέσω των αθροισμάτων των γραμμών ή στηλών. Το πλήθος των άρθρων που φιλοδοξούν να δώσουν μία προσέγγιση της φασματικής ακτίνας είναι μία ένδειξη της σπουδαιότητας του προβλήματος. Τα πρώτα φράγματα συναρτήσει των στοιχείων μη-αρνητικού πίνακα προτάθηκαν από τον Frobenius ήδη από το 1912, αφού γενίκευσε το θεώρημα του Perron που αρχικά αφορούσε θετικούς πίνακες, σε μη-αρνητικούς πίνακες, απέδειξε ότι η φασματική ακτίνα φράσσεται άνω και κάτω από το μέγιστο και ελάχιστο άθροισμα αντίστοιχα [Fro12], [Min88] και επιπρόσθετα, διατύπωσε ότι το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο, αποτελεί κάτω φράγμα της φασματικής ακτίνας [HJ13]. Έπειτα οι Lenderman (1950), Ostrowski (1952) και Brauer (1957) [Min88] δημιούργησαν εκφράσεις φραγμάτων της  $\rho(A)$ , που περιλαμβάνουν το μέγιστο και το ελάχιστο  $i$ -άθροισμα των γραμμών του πίνακα,  $r_i(A)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Το 2013, οι Duan και Zhou στην εργασία [DZ13], όρισαν τις ποσότητες  $\phi_n, \Phi_i$  συναρτήσει των στοιχείων του πίνακα  $A$  και των  $r_i(A)$  και απέδειξαν ότι η φασματική ακτίνα ανήκει στο πραγματικό διάστημα με άκρα το  $\phi_n$  και το ελάχιστο των  $\Phi_i$ , τα οποία είναι φράγματα εγγύτερα στη  $\rho(A)$  από τα προαναφερθέντα.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα *average 2-row sums*,  $m_i(A)$ , που ορίστηκαν στο άρθρο [XZ14] από τους Xing και Zhou (2014), ως έκφραση των στοιχείων του πίνακα και των  $r_i(A)$ . Το ελάχιστο και το μέγιστο των  $m_i(A)$  φράσσουν τη φασματική ακτίνα κάτω και άνω αντίστοιχα. Βέβαια, δεν είναι η πρώτη φορά που εμφανίζεται η εν λόγω ποσότητα στη βιβλιογραφία, το 1968 ο Markham στην εργασία [Mar68] διατυπώνει τη συγκεκριμένη έκφραση, ωστόσο δεν αναφέρει

πως αυτή φράσσει τη φασματική ακτίνα. Στην εργασία [XZ14] οι Xing και Zhou προχώρησαν στον εντοπισμό άνω και κάτω φραγμάτων εγγύτερων από τα προαναφερθέντα στη  $\rho(A)$ , ήτοι  $\phi_i$  και  $\psi_n$  αντίστοιχα, αξιοποιώντας τα  $m_i(A)$  και τα στοιχεία του πίνακα.

Οι Lin και Zhou σε άρθρο που δημοσίευσαν το 2016 [LZ17], στο ίδιο πνεύμα με εκείνο των Xing και Zhou, όρισαν τα *average 3-row sums*,  $s_i(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , ως έκφραση των στοιχείων του πίνακα και των  $r_i(A)$  λαμβάνοντας την τετραγωνική ρίζα του μεγίστου και του ελαχίστου των  $s_i(A)$  προκύπτουν άνω και κάτω φράγματα της  $\rho(A)$ , τα οποία φέρεται να είναι ακριβέστερα από την περίπτωση του μεγίστου και του ελαχίστου  $r_i(A)$ . Επίσης όρισαν τις ποσότητες  $\Phi_i$  και  $\phi_n$  συναρτήσει των στοιχείων του πίνακα και των  $s_i(A)$  και απέδειξαν ότι  $\sqrt{\phi_n} \leq \rho(A) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{\sqrt{\Phi_i}\}$ .

Αξίζει να σημειωθεί ότι, παράλληλα με τα προαναφερόμενα θεωρητικά αποτελέσματα, αναπτύσσονται και αλγοριθμικοί μέθοδοι για την προσέγγιση της φασματικής ακτίνας επιζητώντας μικρό υπολογιστικό κόστος. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη μέθοδο των δυνάμεων [Var00], τον αλγόριθμο διαγώνιων μετασχηματισμών του Zhang [DZ06], τα χωρία του μιγαδικού επιπέδου του Brauer [Var04], τα χωρία του μιγαδικού επιπέδου του Melman [Mel10], από όπου αποδείχθηκαν τα αντίστοιχα φράγματα της φασματικής ακτίνας ενός μη αρνητικού πίνακα [Mel13], ο αλγόριθμος των Wen και Huang [WH11], κ.α.. Για περαιτέρω μελέτη ο αναγνώστης παραπέμπεται στις αντίστοιχες αναφορές.

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η δημιουργία εγγύτερων φραγμάτων, με μικρή υπολογιστική πολυπλοκότητα, για έναν  $n \times n$  μη-αρνητικό πίνακα  $A$ . Δια τούτο, γενικεύονται οι ποσότητες των *average 2, 3-row sums* σε *average k-row sums*, για  $k \geq 2$ , τα οποία σημειώνονται  $w_i^{(k)}(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , και διαμέσου της τη μελέτη αλγεβρικών ιδιοτήτων, που διέπουν τα  $w_i^{(k)}(A)$ , αποδεικνύονται φράγματα της φασματικής ακτίνας συναρτήσει των  $w_i^{(k)}(A)$ . Επιπρόσθετα, ορίζονται νέες ποσότητες  $z_n^{(k)}$  και  $Z_i^{(k)}$  συναρτήσει των στοιχείων του  $A$  και των  $w_i^{(k)}(A)$ , εξετάζονται οι αλγεβρικές τους ιδιότητες, προσδιορίζεται η υπολογιστική τους πολυπλοκότητα και αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα του  $A$  ανήκει στο θετικό πραγματικό ημιάξονα με άκρα  ${}^{k-1}\sqrt{z_n^{(k)}}$ ,  $\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ {}^{k-1}\sqrt{Z_i^{(k)}} \right\}$ . Τα θεωρητικά αποτελέσματα επαληθεύονται από παραδείγματα και δίνονται οι εφαρμογές τους σε μία κατηγορία μη-αρνητικών πινάκων, εκείνων που αντιστοιχούν σε κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.

Η πτυχιακή εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο της εργασίας υποδιαιρείται σε ενότητες οι οποίες αριθμούνται με δύο αριθμούς, ενώ μερικά αριθμούνται με τρεις. Ο πρώτος αναφέρεται στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος, όπου υπάρχει, στην υποδιαίρεση της ενότητας. Επίσης, οι ορισμοί, τα θεωρήματα, οι προτάσεις, τα πορίσματα και οι τύποι αριθμούνται με τρεις αριθμούς, απ' τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο, ο δεύτερος στην ενότητα και ο τρίτος στη σειρά εμφάνισης. Αντιθέτως, οι εικασίες, οι παρατηρήσεις, τα

---

σχήματα και τα παραδείγματα φέρουν δύο αριθμούς, απ' τους οποίους ο πρώτος αντιστοιχεί στο κεφάλαιο και ο δεύτερος στη σειρά εμφάνισής τους στο κεφάλαιο.

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζονται οι απαιτούμενοι ορισμοί, τα θεωρήματα και η σημειογραφία που αφορούν στους τετραγωνικούς πίνακες και δη τους μη-αρνητικούς, πάνω στα οποία οικοδομούνται οι προτάσεις που αναπτύσσονται στη συνέχεια.

Το Κεφάλαιο 2 περιλαμβάνει ορισμούς σχετικούς με μη-κατευθυνόμενα και κατευθυνόμενα γραφήματα. Επιπλέον, θεωρήματα, αρκετά εκ των οποίων συζητήθηκαν στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται υπό το πρίσμα της θεωρίας γραφημάτων. Το τέλος του κεφαλαίου αποτελείται από ορισμένες εφαρμογές της φασματικής ακτίνας σε γραφήματα, κατευθυνόμενα και μη, που αφορούν την προσέγγιση αναλλοίωτων ποσοτήτων σε αυτά.

Στο Κεφάλαιο 3 αναπτύσσονται τα average  $k$ -row sums, που έχουν μελετηθεί στην αρθρογραφία για τους πίνακες  $A$  και  $A^2$ , τα οποία εξαρτώνται από τα αθροίσματα γραμμών και τα στοιχεία ενός μη-αρνητικού πίνακα  $A$ . Έπειτα, οι ποσότητες γενικεύονται για τις μεγαλύτερες δυνάμεις του πίνακα  $A^k$ , για κάποιο  $k$  φυσικό αριθμό με  $k \geq 3$ , δια τούτο ορίζεται η ποσότητα average  $k$ -row sums. Στη συνέχεια, δημιουργούνται ακολουθίες, για τις οποίες αποδεικνύονται αναλυτικές ιδιότητες, όπως η σύγκλιση. Ακόμη, προσδιορίζεται ο υπολογιστικός φόρτος των προσεγγίσεων. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται εφαρμογές των νέων φραγμάτων της φασματικής ακτίνας σε κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Τα θεωρητικά αποτελέσματα επαληθεύονται μέσω παραδειγμάτων.

Το πρώτο μέρος του Κεφαλαίου 4 αφιερώνεται σε βιβλιογραφική επισκόπηση των άνω και κάτω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας ενός μη-αρνητικού πίνακα, που αναπτύχθηκαν στα άρθρα [DZ13], [XZ14], [LZ17]. Στη συνέχεια ορίζονται νέες ποσότητες και αποδεικνύεται ότι αυτές προσδιορίζουν νέα φράγματα για τη  $\rho(A)$ , τα οποία αποτελούν όρους ακολουθιών για τη φασματική ακτίνα. Ιδιότητες των ακολουθιών μελετώνται και εξετάζεται η υπολογιστική πολυπλοκότητά τους. Τέλος, πραγματοποιείται σύγκριση των φραγμάτων που αναπτύχθηκαν με τα προϋπάρχοντα, και τα αποτελέσματα επαληθεύονται μέσω παραδειγμάτων.

Στο τέλος της πτυχιακής εργασίας υπάρχουν τα συμπεράσματα, ένας κατάλογος με τα σχετικά συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο κείμενο που πολλά από αυτά είναι χρήσιμα για περαιτέρω μελέτη των προαναφερόμενων εννοιών και εμβάθυνση, και το Παράρτημα, όπου επισυνάπτονται προγράμματα Matlab στα οποία υλοποιούνται τα νέα φράγματα της φασματικής ακτίνας μη-αρνητικού πίνακα. Για διευκόλυνση του αναγνώστη στο τέλος υπάρχουν δύο κατάλογοι ένας με τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούνται, και ένας με το ευρετήριο των σημαντικότερων όρων.





# Κεφάλαιο 1

## Φασματική ακτίνα μη-αρνητικού πίνακα

### § 1.1 Θεμελιώδεις ορισμοί μη-αρνητικών πινάκων

Έστω  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{F})$  η άλγεβρα όλων των  $m \times n$  πινάκων με στοιχεία στο  $\mathbb{F}$ , όπου  $\mathbb{F}$  συμβολίζει το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$  ή των μιγαδικών  $\mathbb{C}$  αριθμών. Ιδιαίτερα, το σύνολο των θετικών αριθμών σημειώνεται  $\mathbb{R}_+^*$  και των μη-αρνητικών  $\mathbb{R}^+ \equiv \mathbb{R}_+^* \cup \{0\}$ . Στην περίπτωση των  $n \times n$  πινάκων με στοιχεία στο  $\mathbb{F}$ , η άλγεβρα σημειώνεται  $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ .

Ένας  $n \times n$  πίνακας με τα στοιχεία του σημειώνεται  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ , όπου  $1 \leq i, j \leq n$ , τα δε στοιχεία της δύναμής του  $A^k = [a_{ij}^{(k)}]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ορισμός 1.1.1.** Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών  $\lambda \in \mathbb{C}$  του  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  καλείται **φάσμα (spectrum)** του  $A$  και συμβολίζεται  $\sigma(A)$ . Η **φασματική ακτίνα (spectral radius)** του  $A$  είναι ο μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$\rho(A) = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}, \quad (1.1.1)$$

είναι δηλαδή, η ακτίνα του μικρότερου δίσκου που έχει κέντρο την αρχή του μιγαδικού επιπέδου και περιέχει όλες τις ιδιοτιμές του  $A$ .

**Ορισμός 1.1.2.** Έστω  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  και  $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m,n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  πίνακες πραγματικών στοιχείων. Αν  $a_{ij} \geq b_{ij}$  ( $> b_{ij}$ ) για κάθε  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , τότε σημειώνεται  $A \geq B$  ( $> B$ ). Αν για όλα τα στοιχεία του  $A$  ισχύει  $a_{ij} \geq 0$  ( $> 0$ ), τότε ο πίνακας  $A$  καλείται **μη-αρνητικός (θετικός)** και συμβολίζεται  $A \geq 0$  ( $A > 0$ ).

Ο συμβολισμός  $\mathbf{x} \geq 0$  ( $\mathbf{x} > 0$ ) χρησιμοποιείται και για τα διανύσματα-στήλες,  $\mathbf{x}$ , ως  $n \times 1$  πίνακες.

Αν  $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ , τότε ορίζεται ο μη-αρνητικός πίνακας  $|C|$  με στοιχεία  $|c_{ij}|$ , για κάθε

$$1 \leq i, j \leq n.$$

**Ορισμός 1.1.3.** Ένας πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  καλείται **αναγώγιμος (reducible)**, αν ισχύει ένα από τα παρακάτω

(i)  $n = 1$  και  $A = 0$

(ii)  $n \geq 2$ , υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , και ακέραιος  $r$  με  $1 \leq r \leq n - 1$ , τέτοιοι ώστε

$$P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad (1.1.2)$$

όπου  $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{F})$ ,  $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{F})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{r \times (n-r)}(\mathbb{F})$ , και  $0 \in \mathcal{M}_{(n-r) \times r}(\mathbb{R})$  είναι ο μηδενικός πίνακας. Αν ο πίνακας δεν είναι αναγώγιμος, τότε καλείται **μη-αναγώγιμος (irreducible)**.

Να σημειωθεί ότι, δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για τους υποπίνακες  $B$ ,  $C$ , και  $D$  να έχουν μη-μηδενικά στοιχεία, αρκεί να υπάρχει η δυνατότητα να πάρουμε  $(n - r) \times r$  υποπίνακα με μηδενικά στοιχεία στη θέση που υποδεικνύεται στην (1.1.2) και αυτό να συμβεί έπειτα από μία σειρά πεπερασμένων μεταθέσεων γραμμών και στηλών. Αν  $|A| > 0$ , προφανώς ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος. Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι αναγώγιμος, πρέπει να περιέχει τουλάχιστον  $(n - 1)$  μηδενικά στοιχεία.

Ακολουθεί ένα χρήσιμο θεώρημα για να αποφανθούμε σε πολυωνυμικό χρόνο, αν ο πίνακας είναι μη-αναγώγιμος, την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης μπορεί να βρεί στο [HJ13, Theorem 6.2.23].

**Θεώρημα 1.1.4.** Ένας πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  είναι μη-αναγώγιμος, αν και μόνο αν

$$(I + |A|)^{n-1} > 0. \quad (1.1.3)$$

**Ορισμός 1.1.5.** Ένας πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι **πρωταρχικός (primitive)**, αν είναι μη-αναγώγιμος και έχει μη-μηδενική φασματική ακτίνα.

**Ορισμός 1.1.6.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι πρωταρχικός πίνακας. Ο δείκτης πρωταρχικότητας του  $A$ , σημειώνεται με  $\gamma(A)$  και είναι ο ελάχιστος αριθμός  $k \in \mathbb{N}$ , τέτοιος ώστε  $A^k > 0$ .

**Θεώρημα 1.1.7.** [BP94, Theorem 2.1.] Ένας πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι μη-αναγώγιμος, αν και μόνο αν για κάθε  $i, j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , υπάρχει  $q \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε

$$a_{ij}^{(q)} > 0.$$

Θεωρούμε  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Για  $q \geq 2$ , ο  $A$  καλείται  $q$ -κυκλικός ( $q$ -cyclic), αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P$ , τέτοιος ώστε  $PAP^T$  έχει τη μορφή

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & C_{23} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & C_{q-1,q} \\ C_{q1} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.4)$$

όπου οι μηδενικοί υποπίνακες κατά μήκος της διαγωνίου είναι τετραγωνικοί. Ο πίνακας μετάθεσης διαμορφώνεται με βάση τη διατεταγμένη διαμέριση  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_q)$  των  $\{1, 2, \dots, n\}$  σε  $q$  διάζευκτα σύνολα προκειμένου να περιγράψουν την  $q$ -κυκλική δομή του  $A$ , ήτοι οι υποπίνακες του  $PAP^T$  των οποίων οι γραμμές και στήλες υποδεικνύονται από τα  $\pi_i$  και  $\pi_j$  είναι μηδενικοί, εκτός αν  $j = (i + 1) \bmod r$ . Ο μέγιστος θετικός ακέραιος  $q$  για τον οποίο ο  $A$  είναι  $q$ -κυκλικός καλείται **δείκτης κυκλικότητας** (cyclic index) του  $A$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος με δείκτη κυριαρχίας  $m$ , τότε είναι  $m$ -κυκλικός.

Το ακόλουθο Λήμμα ισχυρίζεται ότι αν  $A \geq 0$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $A^m$  είναι μη-αναγώγιμος, αν και μόνο αν ο  $A$  είναι  $m$ -κυκλικός.

**Λήμμα 1.1.8.** [BS13, Theorem 3.4.5] Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , μη-αναγώγιμος πίνακας με δείκτη πρωταρχικότητας  $h$ . Τότε,  $A^m \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  είναι μη-αναγώγιμος, αν και μόνο αν  $h, m$  είναι μεταξύ τους πρώτοι. Αν  $r = \gcd(h, m) > 1$ , τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P$  τέτοιος ώστε

$$PA^mP^T = C_1 \oplus C_2 \oplus \dots \oplus C_r,$$

όπου  $C_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$  είναι τετραγωνικοί μη-αναγώγιμοι πίνακες με δείκτη πρωταρχικότητας  $h/r$ . Σε αυτή την περίπτωση, ο  $A$  είναι ένας  $r$ -κυκλικός πίνακας στην υπερδιαγώνια μορφή (superdiagonal form) (1.1.4) και  $\rho(A) = \sqrt[r]{\rho(C_j)}$ ,  $j = 1, \dots, r$  όπου

$$C_j = (A_j A_{j+1} \cdots A_r A_1 \cdots A_{j-1})^{m/r}$$

## § 1.2 Perron-Frobenius

Εφόσον αναφερόμαστε στη φασματική ακτίνα μη-αρνητικών πινάκων, δεν μπορούμε να παραλείψουμε από τη συζήτηση το θεμελιώδες θεώρημα των Perron Frobenius. Ακολουθεί εκτενής αναφορά στο θεώρημα, μιας και τα αποτελέσματα αυτού αποτελούν ακρογωνιαίο λίθο στα φράγματα που προτείνονται παρακάτω.

Θεωρούμε  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  ένα μη-αναγώγιμο πίνακα, και  $\mathbf{x} > 0$  οποιοδήποτε θετικό διάνυσμα. Έστω

$$r_{\mathbf{x}} = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}, \quad (1.2.1)$$

όπου λαμβάνουμε το ελάχιστο ανάμεσα σε όλα τα  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Προφανώς,  $r_{\mathbf{x}}$  είναι ένας μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός και το άνω πέρασ (supremum) όλων των αριθμών  $\rho \geq 0$ , για το οποίο

$$A\mathbf{x} \geq \rho\mathbf{x}. \quad (1.2.2)$$

Θεωρούμε την ποσότητα  $r$ , η οποία ορίζεται ως

$$r = \sup_{\mathbf{x} > 0} \{r_{\mathbf{x}}\}. \quad (1.2.3)$$

Επειδή  $r_{\mathbf{x}}$  και  $r_{a\mathbf{x}}$  έχουν την ίδια τιμή για κάθε βαθμωτό μέγεθος  $a > 0$ , θεωρούμε διανύσματα  $\mathbf{x} \geq 0$  με  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , το σύνολο των οποίων σημειώνεται με  $\mathcal{P}$ . Αντίστοιχα τα διανύσματα  $\mathbf{y} = (I + A)^{n-1}\mathbf{x}$ , όπου  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$  ανήκουν στο σύνολο που σημειώνεται με  $\mathcal{Q}$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.4, το σύνολο  $\mathcal{Q}$  αποτελείται αποκλειστικά από θετικά διανύσματα. Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο μεριές της ανισότητας  $A\mathbf{x} \geq r_{\mathbf{x}}\mathbf{x}$  με  $(I + A)^{n-1}$ , λαμβάνουμε,

$$A\mathbf{y} \geq r_{\mathbf{x}}\mathbf{y},$$

και καταλήγουμε από την (1.2.2) ότι  $r_{\mathbf{y}} \geq r_{\mathbf{x}}$ . Επομένως, η ποσότητα  $r$  της (1.2.3) μπορεί να οριστεί ισοδύναμα

$$r = \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{Q}} \{r_{\mathbf{y}}\}. \quad (1.2.4)$$

Επειδή το  $\mathcal{P}$  είναι ένα συμπαγές σύνολο από διανύσματα, παρομοίως θα ισχύει και για το  $\mathcal{Q}$ , και καθώς  $r_{\mathbf{y}}$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $\mathcal{Q}$ , υπάρχει απαραίτητα θετικό διάνυσμα  $\mathbf{z}$  τέτοιο ώστε

$$A\mathbf{z} \geq r\mathbf{z}, \quad (1.2.5)$$

και δεν υπάρχει διάνυσμα  $\mathbf{w} \geq 0$  για το οποίο να ισχύει  $A\mathbf{w} > r\mathbf{w}$ . Καλούμε όλα τα μη-αρνητικά, μη-μηδενικά διανύσματα τα οποία ικανοποιούν την (1.2.5), **μεγιστικά διανύσματα** (extremal vectors) του πίνακα  $A$ .

**Λήμμα 1.2.1.** [Var00, Lemma 2.3.] Αν  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  μη-αναγωγίμος πίνακας, η ποσότητα  $r$  της (1.2.3) είναι θετική. Επιπλέον, κάθε μεγιστικό διάνυσμα  $\mathbf{z}$  είναι θετικό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα  $A$ , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $r$ , ήτοι  $A\mathbf{z} = r\mathbf{z}$  και  $\mathbf{z} > 0$ .

**Απόδειξη** Αν  $\xi$  είναι θετικό διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες του ίσες με μονάδα, επειδή ο  $A$  είναι μη-αναγωγίμος, καμία εκ των γραμμών του  $A$ , δεν δύναται να μηδενιστεί, ως εκ τούτου καμία από τις συνιστώσες του  $A\xi$  δεν μηδενίζεται. Επομένως,  $r_\xi > 0$ , το οποίο αποδεικνύει ότι  $r > 0$ .

Προκειμένου να αποδειχθεί το δεύτερο μέρος του Λήμματος, έστω  $\mathbf{z}$  αποτελεί μεγιστικό διάνυσμα με  $A\mathbf{z} - r\mathbf{z} = \boldsymbol{\eta}$ , όπου  $\boldsymbol{\eta} \geq 0$ . Αν  $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ , τότε κάποιες από τις συνιστώσες του  $\boldsymbol{\eta}$  είναι θετικές, και πολλαπλασιάζοντάς τες με τον πίνακα  $(I + A)^{n-1}$ , προκύπτει

$$A\mathbf{w} - r\mathbf{w} > 0,$$

όπου  $\mathbf{w} = (I + A)^{n-1}\mathbf{z} > 0$ . Άμεσο συμπέρασμα είναι ότι  $r_{\mathbf{w}} > r$ , το οποίο αντιβαίνει στον ορισμό της  $r$  στην (1.2.4). Επομένως,  $A\mathbf{z} = r\mathbf{z}$ , και εφόσον  $\mathbf{w} > 0$  και  $\mathbf{w} = (I + A)^{n-1}\mathbf{z}$ , τότε  $\mathbf{z} > 0$ . □

**Λήμμα 1.2.2.** [Var00, Lemma 2.4.] Αν  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι μη-αναγωγίμος πίνακας, και  $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , ένας πίνακας μιγαδικών στοιχείων, με  $|B| \leq A$ . Αν  $\beta$  αναπαριστά οποιαδήποτε ιδιοτιμή του  $B$ , τότε

$$|\beta| \leq r \tag{1.2.6}$$

όπου  $r$  είναι η θετική σταθερά της σχέσης (1.2.5). Επιπλέον, η ισότητα θα ισχύει στην (1.2.6), ήτοι  $\beta = re^{i\phi}$  όπου  $\phi$  πραγματική ποσότητα, αν και μόνο αν  $|B| = A$ , και όπου ο  $B$  είναι της μορφής

$$B = e^{i\phi} D A D^{-1}, \tag{1.2.7}$$

και όπου  $D$  είναι διαγώνιος πίνακας, του οποίου τα διαγώνια στοιχεία, έχουν διαιρέτη την μονάδα.

**Πόρισμα 1.2.3.** Αν  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι μη-αναγωγίμος πίνακας, τότε η θετική ιδιοτιμή  $r$  του Λήμματος 1.2.1 ισούται με τη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$  του  $A$ .

**Λήμμα 1.2.4.** [Var00, Lemma 2.6.] Αν  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι μη-αναγωγίμος πίνακας, και αν  $B$  είναι

οποιοσδήποτε κύριος τετραγωνικός υποπίνακας (principal square submatrix) του  $A$ , τότε  $\rho(B) < \rho(A)$ .

Συλλέγοντας τα άνωθι αποτελέσματα, μπορούμε να προβούμε στη διατύπωση του θεωρήματος των **Perron-Frobenius**.

**Θεώρημα 1.2.5.** [Var00, Theorem 2.7.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  μη-αναγώγιμος πίνακας. Τότε,

- (i) Ο  $A$  έχει θετική πραγματική ιδιοτιμή, η οποία ισούται με την φασματική ακτίνα.
- (ii) Στην  $\rho(A)$  αντιστοιχεί θετικό ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{x} > 0$ .
- (iii) Η  $\rho(A)$  αυξάνεται, όταν οιοδήποτε από τα στοιχεία του  $A$  αυξάνεται.
- (iv) Η  $\rho(A)$  είναι απλή ιδιοτιμή του  $A$ , δηλαδή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

**Απόδειξη** Τα δύο πρώτα, αποτελούν άμεση συνέπεια του Λήμματος 1.2.1 και του Πορίσματος 1.2.3. Προκειμένου να αποδείξουμε το τρίτο μέρος, έστω ότι αυξάνουμε κάποιο εκ των στοιχείων του πίνακα  $A$ , ως αποτέλεσμα, παίρνουμε ένα νέο μη-αναγώγιμο πίνακα  $\tilde{A}$ , όπου  $\tilde{A} \geq A$  και  $\tilde{A} \neq A$ . Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.2.2, συμπεραίνουμε ότι  $\rho(\tilde{A}) > \rho(A)$ . Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η  $\rho(A)$  είναι απλή ιδιοτιμή του  $A$ , ήτοι,  $\rho(A)$  δίνει μηδέν, με πολλαπλότητα ένα, από αντικατάσταση στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\phi(t) = \det(tI - A)$ , κάνουμε χρήση του γεγονότος ότι  $\phi'(t)$  είναι το άθροισμα των οριζουσών όλων των  $(n-1) \times (n-1)$  κύριων υποπινάκων του πίνακα  $tI - A$ . Αν  $A_i$  είναι κύριος υποπίνακας του  $A$ , τότε από το Λήμμα 1.2.4, το  $\det(tI - A_i)$ , δεν έχει ρίζες για  $t \geq \rho(A)$ . Από αυτό τον ισχυρισμό, προκύπτει ότι

$$\det(\rho(A)I - A_i) > 0,$$

και άρα

$$\phi'(\rho(A)) > 0.$$

Ως εκ τούτου, η  $\rho(A)$  δεν δύναται να αποτελεί ρίζα του  $\phi(t)$  πολλαπλότητας μεγαλύτερης της μονάδας, επομένως η  $\rho(A)$  είναι απλή ιδιοτιμή του  $A$ .

□

### § 1.3 Αριθμητική προσέγγιση ιδιοδιανύσματος της φασματικής ακτίνας

Έστω  $\mathbf{v}_0$  η αρχικοποίηση ενός  $n \times 1$  διανύσματος και ένας πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Θεωρούμε την ακολουθία των διανυσμάτων  $(\mathbf{v}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$\begin{aligned}
 A\mathbf{v}_0 &= \mathbf{v}_1 \\
 A\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 \Rightarrow A(A\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_2 \Rightarrow A^2\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_2 \\
 A\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_3 \Rightarrow A(A^2\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_3 \Rightarrow A^3\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_3 \\
 &\vdots \\
 A\mathbf{v}_{k-1} &= \mathbf{v}_k \Rightarrow A(A^{k-1}\mathbf{v}_0) = \mathbf{v}_k \Rightarrow A^k\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_k
 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Επιπλέον, από τη μέθοδο των δυνάμεων [Var00, Theorem] για το  $\mathbf{v}_k$  της (1.3.1) προκύπτει ότι

$$A\mathbf{v}_k = \rho(A)\mathbf{v}_k. \tag{1.3.2}$$

Τώρα, για  $\mathbf{v}_0 = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^t$  εξαιτίας της επιλογής του συγκεκριμένου  $\mathbf{v}_0$  είναι προφανές ότι το διάνυσμα  $A^k\mathbf{v}_0$  έχει την  $j$ -οστή συνιστώσα του ίση με το  $j$ -οστό άθροισμα γραμμών του  $A^k$ , το οποίο ισούται με την αντίστοιχη συνιστώσα του  $\mathbf{v}_k$  της σχέσης (1.3.1). Με άλλα λόγια, τα αθροίσματα των γραμμών ενός πίνακα σε κάποια δύναμη  $k$ , τείνουν όσο αυξάνεται το  $k$ , να προσεγγίσουν το ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας. Περισσότερη συζήτηση αναφορικά με το ιδιοδιάνυσμα μη-αρνητικού πίνακα ακολουθεί στο Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.4.

Εκμεταλλευόμενοι την έννοια της πρωταρχικότητας που αναφέρθηκε προηγούμενα (Ορισμός 1.1.5), η οποία μάλιστα γεννήθηκε από τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Perron-Frobenius, έχουμε το επόμενο θεώρημα για τα ιδιοδιανύσματα της φασματικής.

**Θεώρημα 1.3.1.** [HJ13, Theorem 8.5.1.] Αν ο  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι πρωταρχικός πίνακας, τότε αν  $\mathbf{x}$  και  $\mathbf{y}$  είναι το δεξί και αριστερό ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας  $\rho(A)$  (Perron διάνυσματα) του  $A$ , τότε

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho(A)^{-1}A)^m = \mathbf{x}\mathbf{y}^T,$$

το οποίο αποτελεί θετικό πίνακα βαθμού 1.

Ακολουθεί παράδειγμα που συγκεντρώνει ορισμένες από τις ιδιότητες που συζητήθηκαν παραπάνω και διέπουν μη-αρνητικούς ή/και μη-αναγωγίμους πίνακες.

**Παράδειγμα 1.1.** Έστω ο πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}^+)$ , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3.3)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1.1.3), του Θεωρήματος 1.1.4

$$(I + A)^4 = \begin{pmatrix} 379 & 432 & 642 & 162 & 459 \\ 1116 & 937 & 1536 & 513 & 1002 \\ 1315 & 792 & 1243 & 642 & 756 \\ 1908 & 1854 & 2043 & 1027 & 1464 \\ 420 & 623 & 504 & 252 & 451 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι,  $(I + A)^4 > 0$ , άρα, ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος πίνακας, επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.5.

Το φάσμα του πίνακα  $A$  είναι  $\sigma(A) = \{7.0257, -2.7955+3.0899i, -2.7955-3.0899i, -0.7174+2.3371i, -0.7174-2.3371i\}$  με φασματική ακτίνα  $\rho(A) \equiv \lambda_1 = 7.0257 \in \mathbb{R}$  και αλγεβρική πολλαπλότητα  $\nu = 1$ .

Ο ιδιόχωρος του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα είναι

$$\mathbf{v}_1 \in \mathcal{E} = \text{span}\{(0.1791, 0.4449, 0.4194, 0.7435, 0.2031)^T\}.$$

Μία καλή προσέγγιση του ιδιοδιανύσματος της φασματικής ακτίνας λαμβάνεται από τη σχέση (1.3.1), ήδη για  $k = 5$ . Προφανώς, το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα είναι θετικό.



## Κεφάλαιο 2

# Στοιχεία θεωρίας γραφημάτων

### § 2.1 Θεμελιώδεις ορισμοί γραφημάτων

Η βασική σημειογραφία της θεωρίας γραφημάτων είναι αρκετά διαισθητική, ωστόσο πρέπει να την αποδώσουμε με αυστηρότητα προκειμένου να τη χρησιμοποιήσουμε στις προτάσεις. Ακολουθούν, κάποιοι ορισμοί και βασικές ιδιότητες, που είναι απαραίτητα στη μελέτη των γραφημάτων.

**Ορισμός 2.1.1.** Ένα **μη-κατευθυνόμενο γράφημα** ή απλά **γράφημα** (*graph*),  $G \equiv G(V, E)$  αποτελείται από δύο πεπερασμένα σύνολα στοιχείων, τα  $V, E$ : τα στοιχεία του  $V$  αποκαλούνται **κορυφές** και σημειώνονται με  $v_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , τα δε στοιχεία του  $E$  ονομάζονται **ακμές** και είναι τα μη-διατεταγμένα ζεύγη  $(v_i, v_j)$  των κορυφών  $v_i, v_j$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ . Αν υπάρχει ακμή που προσπίπτει ή διέρχεται από τις κορυφές  $v_i, v_j$ , οι αντίστοιχες κορυφές χαρακτηρίζονται **γειτονικές** και αυτές σημειώνονται  $v_i \sim v_j$ . Στην περίπτωση όπου  $v_i \sim v_i$  η ακμή καλείται **βρόχος**.

Ένα **πολυγράφημα** (*multigraph*) διαφέρει από ένα απλό γράφημα, καθώς επιτρέπεται να περιέχει πολλαπλές ακμές. **Γράφημα με βάρη** (*weighted graph*) είναι εκείνο, όπου ανατίθενται βάρη στις ακμές του.

Ένα **υπογράφημα** του  $G$  είναι ένα γράφημα  $H \equiv H(W, E')$ , όπου  $W \subseteq V$  και  $E' \subseteq E$ . Αν  $W = V$ , το υπογράφημα  $H$  του  $G$  καλείται **παράγον υπογράφημα** (*spanning subgraph*), ήτοι το  $H$  περιέχει όλες τις κορυφές του  $G$ . Το υπογράφημα  $H$  καλείται **παραγόμενο υπογράφημα** (*induced subgraph*) του  $G$ , εάν κάθε ακμή του  $G$ , που ενώνει τις κορυφές του  $W$ , αποτελεί και ακμή του  $H$ .

Η **τάξη** (*order*) ενός γραφήματος  $G$  είναι ο πληθάρθρωμος του συνόλου των κορυφών του και σημειώνεται  $|V|$ .

Τα γραφήματα μπορούν να αναπαρασταθούν γεωμετρικά, απεικονίζοντας μία ακμή με μία ευθεία ή καμπύλη γραμμή, η οποία ενώνει δύο σημεία, τα οποία αποτελούν κορυφές, όπως φαίνεται

στο Σχήμα 2.1i.

Δύο ισομορφικά γραφήματα είναι επί της ουσίας δομικά ισοδύναμα. Ακολουθεί ο αυστηρός ορισμός του ισομορφισμού.

**Ορισμός 2.1.2.** Έστω δύο μη-κατευθυνόμενα γράφηματα  $G \equiv G(V, E)$  και  $H \equiv H(W, A)$ . Ένας **ισομορφισμός** (isomorphism) από το  $G$  στο  $H$  είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία  $\phi : V \rightarrow W$  τέτοια ώστε  $(v_i, v_j) \in E$ , αν και μόνο αν  $(\phi(v_i), \phi(v_j)) \in A$ .

Αν  $\phi$  αποτελεί ισομορφισμό από το  $G$  στο  $H$ , τότε προφανώς  $\phi^{-1} : W \rightarrow V$  είναι ισομορφισμός από το  $H$  στο  $G$ . Τα γράφηματα  $G$  και  $H$  είναι **ισομορφικά**, αν υπάρχει ισομορφισμός από το  $G$  στο  $H$ .

**Ορισμός 2.1.3.** Έστω ένα γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  τάξης  $n$ , ο **βαθμός** (degree) μίας κορυφής  $v_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  σημειώνεται με  $d_i$ , και ισούται με το πλήθος των προσπιπτουσών ακμών στην κορυφή αυτή. Επιπλέον, σημειώνονται με  $\Delta(G)$  και  $\delta(G)$  ο μέγιστος και ελάχιστος βαθμός, αντίστοιχα. Στην περίπτωση ύπαρξης βρόχου, αυτός συνεισφέρει 2 στο βαθμό της κορυφής.

Μάλιστα,

$$d_i = \sum_{\substack{v_i \sim v_j \\ 1 \leq j \leq n}} 1. \quad (2.1.1)$$

Επειδή, κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο βαθμό δύο κορυφών, ή στην περίπτωση ύπαρξης βρόχου 2, τότε έχουμε

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2|E|,$$

όπου  $|E|$  ο πληθάριθμος του συνόλου  $E$ .

**Ορισμός 2.1.4.** Ένα γράφημα  $G$  καλείται **κανονικό**, αν κάθε κορυφή έχει τον ίδιο βαθμό, ήτοι  $d_1 = d_2 = \dots = d_n$ . Αν ο βαθμός των κορυφών ενός κανονικού γραφήματος ισούται με  $k$ , τότε το γράφημα καλείται  $k$ -κανονικό.

**Ορισμός 2.1.5.** **Χρωματισμός κορυφών** σε ένα γράφημα  $G$  είναι η ανάθεση χρώματος σε καθεμία από τις κορυφές του  $G$ , ώστε σε γειτονικές κορυφές να ανατίθεται διαφορετικό χρώμα.

Ένα γράφημα είναι  $k$ -**χρωματίσιμο**, αν δύναται να χρωματιστεί με  $k$  χρώματα.

**Ορισμός 2.1.6.** Ένα γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  τάξης  $n$  καλείται **πλήρες** (complete) και σημειώνεται  $K_n$ , αν για οποιοσδήποτε κορυφές  $v_i, v_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , ισχύει  $v_i \sim v_j$ .

**Κλίκα** (clique) ενός γραφήματος  $G$  είναι ένα υπογράφημα  $H \equiv H(S, E')$ , όπου  $S \subseteq V$  έτσι ώστε το γράφημα  $H$  να είναι πλήρες.

**Ορισμός 2.1.7.** Έστω ένα γράφημα  $G \equiv G(V, E)$ , τότε ορίζονται οι ακόλουθες αναλλοίωτες ποσότητες:

- (i) Ο **αριθμός σταθερότητας** (*stability number*) του  $G$  είναι το μέγιστο πλήθος των κατά ζεύγη μη-γειτονικών κορυφών του  $G$  και σημειώνεται με  $\alpha(G)$ .
- (ii) Ο **αριθμός κλίκας** (*clique number*) του  $G$  είναι η τάξη της μεγαλύτερης κλίκας του  $G$  και σημειώνεται με  $\omega(G)$ .
- (iii) Ο **χρωματικός αριθμός** (*chromatic number*) του  $G$  είναι ο ελάχιστος αριθμός  $k$  για τον οποίο το  $G$  είναι  $k$ -χρωματίσιμο και σημειώνεται με  $\chi(G)$ .

Αξίζει να αναφερθεί ότι, ο χρωματικός αριθμός ενός πλήρους γραφήματος  $K_n$  ισούται με  $n$ . Επιπλέον, ο χρωματικός αριθμός ενός κύκλου είναι 2, αν το πλήθος των κορυφών που το αποτελούν είναι ζυγός αριθμός και, αν είναι περιττός αριθμός ισούται με 3. Τέλος, ο χρωματικός αριθμός ενός δέντρου, τάξης  $n \geq 2$ , ισούται με 2.

Σε ένα γράφημα, οι ακμές είναι μη-διατεταγμένα ζεύγη κορυφών και δεν υπάρχει η έννοια της κατεύθυνσης. Αντίθετα, στα κατευθυνόμενα γραφήματα, οι ακμές είναι διατεταγμένα ζεύγη κορυφών και επομένως έχουμε κατεύθυνση στις ακμές, από την πρώτη κορυφή προς τη δεύτερη του διατεταγμένου ζεύγους. Οι περισσότεροι από τους όρους που αναφέρθηκαν για τα γραφήματα στον Ορισμό 2.1.1, πιο συγκεκριμένα, εκείνοι του υπογραφήματος και της τάξης ισχύουν και στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων με ορισμένες τροποποιήσεις προκειμένου να λαμβάνεται υπόψη η κατεύθυνση της ακμής, ήτοι η εκκίνησή της και το πέρας της.

**Ορισμός 2.1.8.** Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** (*digraph*),  $D \equiv D(V, E)$ , αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο  $V$  με στοιχεία  $v_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , που καλούνται **κορυφές** και ένα σύνολο  $E$  αποτελούμενο από διατεταγμένα ζεύγη κορυφών, που καλούνται **κατευθυνόμενες ακμές**. Στο διατεταγμένο ζεύγος  $(v_i, v_j)$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , η κορυφή εκκίνησης σημειώνεται με  $v_i$ , η τελική κορυφή με  $v_j$ , και η αντίστοιχη κατευθυνόμενη ακμή σημειώνεται  $v_i \rightarrow v_j$ .

Στην περίπτωση όπου  $v_i \rightarrow v_i$  η ακμή καλείται **βρόχος**.

Ένα **πολυγράφημα**, διαφέρει από ένα κατευθυνόμενο γράφημα, καθώς δύναται να περιέχει ακμές με τις ίδιες κορυφές εκκίνησης και πέρατος. **Κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη** είναι το κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο ανατίθενται βάρη στις ακμές του.

Η **τάξη** ενός κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ο αριθμός  $|V|$ , δηλαδή ο πληθάρθρωμος του συνόλου των κορυφών.

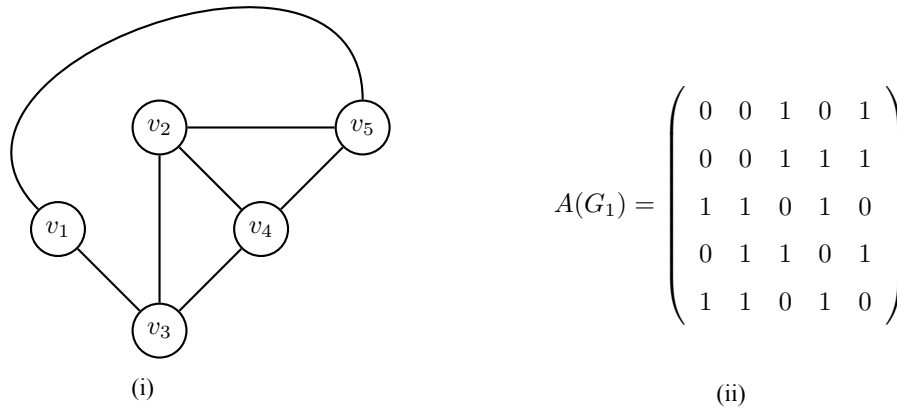
**Ορισμός 2.1.9.** Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D \equiv D(V, E)$  τάξης  $n$ . Ο **έξω-βαθμός** (*out-degree*) μίας κορυφής  $v_i$ , σημειώνεται με  $d^+(v_i)$  και ισούται με το πλήθος των ακμών, στις οποίες η κορυφή  $v_i$  αποτελεί σημείο εκκίνησης, ήτοι  $(v_i, v_j) \in E$ , για κάθε  $v_j$  που γειτονεύει με το  $v_i$ . Ο **έσω-βαθμός** (*in-degree*) μίας κορυφής  $v_i$ , σημειώνεται με  $d^-(v_i)$  και ισούται με το πλήθος των ακμών, στις οποίες η  $v_i$  αποτελεί τερματικό σημείο, ήτοι  $(v_j, v_i) \in E$ , για κάθε  $v_j$  που γειτονεύει με το  $v_i$ .

Ένας πίνακας με στοιχεία 0 ή 1, σημειώνεται **(0,1)-πίνακας**.

**Ορισμός 2.1.10.** Έστω ένα γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  τάξης  $n$ , χωρίς βρόχους και πολλαπλές ακμές. Ο πίνακας γειτνίασης που αντιστοιχεί στο  $G$  σημειώνεται  $A(G) = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v_i \sim v_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Πρόκειται για ένα συμμετρικό πίνακα με μηδενική διαγώνιο. Στο Σχήμα 2.1, φαίνεται ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G_1$  και ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης.



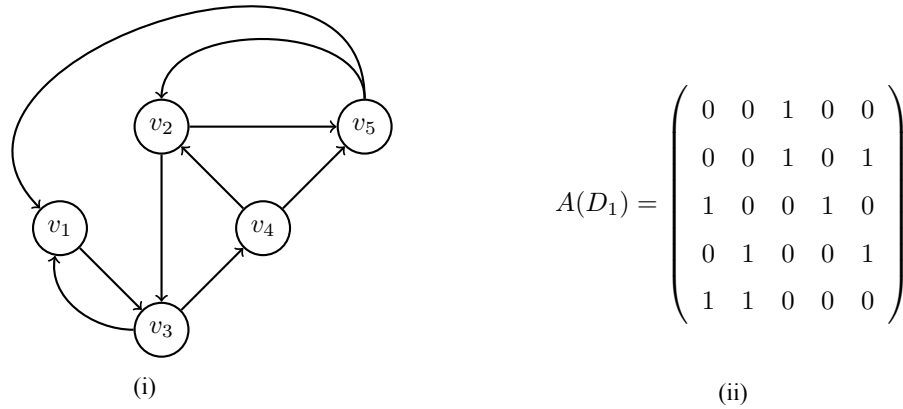
Σχήμα 2.1: Μη-κατευθυνόμενο γράφημα και ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης

Ο πίνακας γειτνίασης δύναται να οριστεί και στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

**Ορισμός 2.1.11.** Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D \equiv D(V, E)$  τάξης  $n$ , χωρίς βρόχους και πολλαπλές ακμές. Ο πίνακας γειτνίασης που αντιστοιχεί στο  $D$  σημειώνεται  $A(D) = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } v_i \rightarrow v_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Στο Σχήμα 2.2 που ακολουθεί, σχεδιάζεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D_1$  και ο πίνακας γειτνίασης που του αντιστοιχεί.



Σχήμα 2.2: Κατευθυνόμενο γράφημα και ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης

Υπάρχουν φυσικές συνδέσεις μεταξύ πινάκων και μη-κατευθυνόμενων γραφημάτων (κατευθυνόμενων γραφημάτων):

- (i) Η τάξη του  $G(D)$  είναι όσο ο αριθμός των γραμμών και στηλών του πίνακα γειτνίασης.
- (ii) Η διαγραφή μίας κορυφής του  $G(D)$  ισοδυναμεί με τη διαγραφή μίας γραμμής ή και της αντίστοιχης στήλης του πίνακα. Συνεπώς, δημιουργείται ένας υποπίνακας με μέγεθος κατά ένα λιγότερο από τον αρχικό πίνακα γειτνίασης.
- (iii) Υπάρχει συσχέτιση μεταξύ των διαγραφών πολλαπλών κορυφών ενός γραφήματος  $G(D)$  και μικρότερων κύριων υποπινάκων ενός πίνακα.
- (iv) Η αλλαγή σειράς των κορυφών ενός γραφήματος  $G(D)$  ισοδυναμεί με μετάθεση των αντίστοιχων γραμμών και στηλών του πίνακα γειτνίασης.

Εφεξής, όταν αναφερόμαστε σε γράφημα  $G$ , εννοούμε μη-κατευθυνόμενο γράφημα, χωρίς βρόχους ή πολλαπλές ακμές και χωρίς βάρη· με  $D$ , συμβολίζουμε τα κατευθυνόμενα γραφήματα χωρίς βρόχους ή πολλαπλές ακμές, εκτός και αν υποδειχθεί διαφορετικά. Επίσης, στη συνέχεια με τον όρο "ακμές" μπορεί να εννοούνται οι ακμές ενός γραφήματος ή/και οι κατευθυνόμενες ακμές, εξαρτάται από το είδος του γραφήματος  $G$  ή  $D$  που μελετάται.

**Ορισμός 2.1.12.** Έστω ένα γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  και μία πεπερασμένη ακολουθία στην οποία εναλλάσσονται οι ακμές του  $G$ , ως εξής

$$(v_i, v_{t_1}), (v_{t_1}, v_{t_2}), (v_{t_2}, v_{t_3}), \dots, (v_{t_{m-2}}, v_{t_{m-1}}), (v_{t_{m-1}}, v_j),$$

όπου  $v_i, v_j, v_{t_k} \in V, 1 \leq k \leq m - 1$ . Η παραπάνω ακολουθία ονομάζεται **δρόμος** (walk).

Αν κάθε ακμή του δρόμου εμφανίζεται άπαξ, τότε ο δρόμος καλείται **δρομίσκος**.

Ένας δρόμος στον οποίο κάθε κορυφή και κάθε ακμή του εμφανίζονται άπαξ λέγεται **μονοπάτι**.

Ένας δρόμος ή δρομίσκος που έχει σαν άκρα την ίδια κορυφή λέγεται **κλειστός δρόμος ή δρομίσκος**.

Τέλος, ένα κλειστό μονοπάτι λέγεται **κύκλος**.

Το πλήθος των ακμών ενός δρόμου, ενός μονοπατιού ή ενός κύκλου λέγεται **μήκος** του δρόμου, του μονοπατιού, του κύκλου, αντίστοιχα.

Ο ορισμός είναι ανάλογος για κατευθυνόμενο γράφημα  $D \equiv D(V, E)$ .

## § 2.2 Γραφήματα και φάσμα

Έστω  $G \equiv G(V, E)$ , τάξης  $n$ , ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, χωρίς βρόχους και πολλαπλές ακμές, και  $A(G)$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης σύμφωνα με τον Ορισμό 2.1.10. Οι ιδιοτιμές του  $A(G)$  είναι οι  $n$  ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\det(\lambda I - A(G))$ . Οι ιδιοτιμές είναι ανεξάρτητες της ονοματοδοσίας των κορυφών, λόγω της ομοιότητας και των ιδιοτήτων της Πρότασης 3.2.1, επειδή η μετάθεση των ετικετών των κορυφών οδηγεί σε όμοιο πίνακα με τον αρχικό πίνακα γειτνίασης. Αναλόγως αναφερόμαστε στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $G$ , το οποίο σημειώνεται  $P_G(\lambda)$ , και στο **φάσμα του γραφήματος**  $G$ , το οποίο συμβολίζεται  $\sigma(G)$  και αποτελείται από  $n$  ιδιοτιμές. Η μελέτη του γραφήματος ως προς το φάσμα και τα ιδιοδιανύσματα επιτυγχάνεται μέσω του αντίστοιχου πίνακα γειτνίασης, ως εκ τούτου η αναφορά στα χαρακτηριστικά μεγέθη του γραφήματος ταυτίζεται με την εύρεση των αντίστοιχων μεγεθών του πίνακα γειτνίασης. Παρόμοια ισχύει και για το φάσμα και τα ιδιοδιανύσματα ενός κατευθυνόμενου γραφήματος  $D$ .

Εφόσον ο  $A(G)$  ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  είναι συμμετρικός πίνακας με πραγματικά στοιχεία, προφανώς οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί. Συνήθως συμβολίζονται με  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , εκτός και αν υποδειχθεί διαφορετικά: εδώ θεωρείται ότι ισχύει  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , και σημειώνεται  $\lambda_i = \lambda_i(G)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή (φασματική ακτίνα)  $\lambda_1(G) \equiv \rho(G)$  καλείται και **δείκτης** του  $G$ .

Δύο γραφήματα ονομάζονται **ισοφασματικά** (cospectral) αν έχουν το ίδιο φάσμα. Αν δύο γραφήματα είναι ισομορφικά (Ορισμός 2.1.2), τότε είναι ισοφασματικά, ωστόσο το ανάποδο δεν ισχύει πάντα. Επομένως, το φάσμα αποτελεί αναλλοίωτη ποσότητα στα γραφήματα, δηλαδή διατηρείται για ισομορφικά γραφήματα.

### § 2.3 Συνεκτικότητα και μονοπάτια

Ιδιότητες που διέπουν τους μη-αρνητικούς πίνακες, όπως εκείνες της κυριαρχίας (primitivity) και της μη-αναγωγιμότητας (irreducibility) εξαρτώνται από το μοτίβο των μηδενικών του πίνακα. Μάλιστα, θα μπορούσαν χωρίς βλάβη της γενικότητας οι μη-αρνητικοί πίνακες να αναχθούν σε  $(0,1)$ -πίνακες με το ίδιο μοτίβο μηδενικών στοιχείων· δηλαδή, σε κάθε ένα  $(0,1)$ -πίνακα αντιστοιχεί ένα μοναδικό γράφημα(κατευθυνόμενο γράφημα) χωρίς βάρη στις ακμές του.

**Ορισμός 2.3.1.** Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  είναι **συνεκτικό**, αν για κάθε ζεύγος διακεκριμένων κορυφών  $(v_i, v_j)$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , υπάρχει μονοπάτι που ανήκει στο  $G$  και συνδέει τις κορυφές  $v_i$  και  $v_j$ . Ένα γράφημα, που δεν είναι συνεκτικό, καλείται **μη-συνεκτικό γράφημα**  $G$  και δύναται να αποτελείται από δύο ή περισσότερα συνεκτικά υπογραφήματα, που ονομάζονται **συνεκτικές συνιστώσες** του  $G$ .

Παρατηρήστε ότι, τα συνεκτικά γραφήματα αποτελούνται από ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα.

Στην περίπτωση των κατευθυνόμενων γραφημάτων ο ορισμός της συνεκτικότητας διατυπώνεται στη συνέχεια.

**Ορισμός 2.3.2.** Ένα κατευθυνόμενο γράφημα  $D$  είναι **ισχυρά συνεκτικό** αν για κάθε διατεταγμένο ζεύγος διακεκριμένων κορυφών,  $v_i$  και  $v_j$ , υπάρχει μονοπάτι που ανήκει στο  $D$  και συνδέει τις κορυφές  $v_i$  και  $v_j$ . Το κατευθυνόμενο γράφημα  $D$  είναι **ασθενές συνεκτικό**, αν το γράφημα  $D'$  που προκύπτει από το  $D$  αγνοώντας τις κατευθύνσεις είναι συνεκτικό.

Παρατίθενται ένα θεώρημα το οποίο εκμεταλλεύεται την αντιστοιχία που ορίστηκε μεταξύ γραφημάτων και πινάκων και χρησιμοποιείται εκτεταμένα στη συνέχεια.

**Θεώρημα 2.3.3.** Έστω κατευθυνόμενο γράφημα  $D \equiv D(V, E)$ . Αν  $A(D) = [a_{i,j}]$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης, τότε το πλήθος των διακριτών μονοπατιών μήκους  $k$ , που συνδέουν την κορυφή  $v_i$  με την κορυφή  $v_j$ , ισούται με το  $a_{ij}^{(k)}$ .

Η γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της μη-αναγωγιμότητας υπό το πρίσμα της θεωρίας γραφημάτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, μάλιστα παρατίθεται η απόδειξη για αντιληπτικούς σκοπούς.

Στο ακόλουθο θεώρημα του Wei φαίνεται πώς με την ύψωση του πίνακα γειτνίασης στη δύναμη  $k$ , και καθώς  $k \rightarrow \infty$ , επέρχεται σύγκλιση στο ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας, παρόμοια με τη σχέση (1.3.1) και για την απόδειξη αυτού ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην αντίστοιχη αναφορά.



**Θεώρημα 2.3.4.** [CRS97, 2.2.4 Theorem] Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$ . Έστω  $N_k(v_i)$  είναι ο αριθμός των μονοπατιών μήκους  $k$ , τα οποία εκκινούν από την κορυφή  $v_i$ , ενός μη-διμερούς συνεκτικού γραφήματος  $G$  με κορυφές  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Έστω

$$s_k(i) = N_k(i) \cdot \left( \sum_{j=1}^n N_k(j) \right)^{-1}.$$

Τότε, καθώς  $k \rightarrow \infty$ , το διάνυσμα  $(s_k(1) \ s_k(2) \ \dots \ s_k(n))^T$  τείνει στο ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στο δείκτη του γραφήματος,  $\rho(G)$ .

**Θεώρημα 2.3.5.** Ένας πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι μη-αναγώγιμος, αν και μόνο αν το αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα  $D \equiv D(V, E)$  είναι ισχυρά συνεκτικό.

**Απόδειξη (Μόνο αν  $\leftarrow$ ):** Ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 2.3.3, είναι ότι υπάρχει μονοπάτι μήκους  $k$ , που συνδέει τις κορυφές  $v_i$  και  $v_j$ , αν και μόνο αν  $a_{ij}^{(k)} > 0$ . Συνδυάζοντάς το με το Θεώρημα 1.1.7, αν το γράφημα  $D$  είναι ισχυρά συνεκτικό, τότε και ο πίνακας γειτνίασης  $A$  είναι μη-αναγώγιμος. **(Αν  $\rightarrow$ ):** Αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.7, υπάρχει κάποιο  $k$  για το οποίο  $a_{ij}^{(k)} > 0$  για κάθε  $1 \leq i, j \leq n$ . Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι στο  $D$  μήκους  $k$ , που συνδέει τις κορυφές  $v_i$  και  $v_j$ , το οποίο ισοδυναμεί με τον Ορισμό 2.3.2 του ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. □

**Πρόταση 2.3.6.** [BP94, Exercise 2.12.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  μη-αναγώγιμος πίνακας τότε, για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x} > 0$ ,

$$\rho(A) = \min_{\mathbf{x} > 0} \left\{ \max_{x_i > 0} \frac{(A\mathbf{x})_i}{x_i} \right\}. \quad (2.3.1)$$

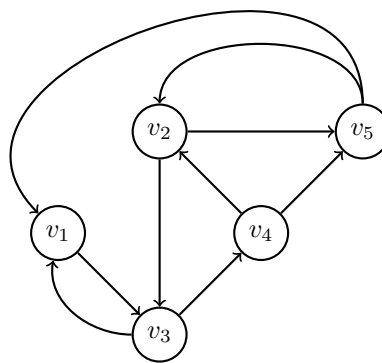
Επιπλέον, αν  $\rho(A) = \max \left\{ \frac{(A\mathbf{v})_i}{v_i} \right\}$ , τότε  $\mathbf{v}$  είναι ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην  $\rho(A)$ .

**Παράδειγμα 2.1.** Έστω ο ακόλουθος πίνακας γειτνίασης  $A = A(D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  του Σχήματος 2.2ii, και αντιστοιχεί στο γράφημα που εμφανίζεται στο Σχήμα 2.3,

$$A(D_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Το μοτίβο των μη-μηδενικών στοιχείων του πίνακα  $A$  ταυτίζεται με εκείνο του πίνακα  $A$ , του Παραδείγματος 1.1. Εφόσον η ιδιότητα της μη-αναγωγιμότητας δεν εξαρτάται από τις τιμές των μη-μηδενικών στοιχείων, επειδή ο  $A$ , του Παραδείγματος 1.1 είναι μη-αναγώγιμος, συνεπάγεται ότι και ο πίνακας  $A(D_1)$  είναι μη-αναγώγιμος, και αντίστροφα. Μάλιστα, εφαρμόζοντας τη σχέση (1.1.3) του Θεωρήματος 1.1.4 επαληθεύεται ότι ο  $A(D_1)$  είναι μη-αναγώγιμος.

Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.5, προκύπτει ότι το αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα ισχυρά συνεκτικό. Πράγματι, αν κάνουμε αναζήτηση πρώτα σε βάθος (DFS) για κάθε κορυφή του γραφήματος  $D_1$ , επαληθεύεται ότι το γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό (Ορισμός 2.3.2).



Σχήμα 2.3: Κατευθυνόμενο γράφημα  $D_1$

## § 2.4 Θετικότητα ιδιοδιανυσμάτων

Αν  $A \geq 0$  είναι αναγώγιμος, τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P_1$  τέτοιος ώστε ο πίνακας  $A$  είναι όμοιος με έναν block άνω τριγωνικό πίνακα της μορφής

$$P_1 A P_1^t = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad (2.4.1)$$

όπου  $B$  και  $D$  είναι τετραγωνικοί πίνακες. Αν είτε ο  $B$ , είτε ο  $D$  είναι αναγώγιμοι, τότε μπορούν να αναχθούν με παρόμοιο τρόπο, όπως ο  $A$ , έχει αναχθεί (reduced) στην (2.4.1). Πρέπει να σημειωθεί ότι η παραπάνω διατύπωση της αναγωγιμότητας ισοδυναμεί με τον Ορισμό 1.1.3.

Τελικά, με κατάλληλη μετάθεση ο  $A$  μπορεί να αναχθεί στην άνω τριγωνική μορφή (triangular block form)

$$P_1 A P_1^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}, \quad (2.4.2)$$

όπου κάθε υποπίνακας  $A_{ii}$  είναι τετραγωνικός  $n_i \times n_i$  και είναι είτε μη-αναγώγιμος, είτε  $1 \times 1$ , null πίνακας. Αξίζει να αναφερθεί ότι, ένας μη-αναγώγιμος πίνακας είναι σε τριγωνική μορφή, αποτελούμενος από ακριβώς έναν υποπίνακα, τον ίδιο τον πίνακα.

Για τη μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων ενός αναγώγιμου πίνακα θα κάνουμε χρήση της θεωρίας γραφημάτων.

**Ορισμός 2.4.1.** [BP94, Definition 3.7.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  και  $D \equiv D(V, E)$  το αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα του  $A$ . Για  $1 \leq i, j \leq n$ , λέμε ότι το  $i$  έχει **πρόσβαση (access)** στο  $j$ , αν υπάρχει μονοπάτι στο  $D$  από την κορυφή  $v_i$  στην  $v_j$ , επιπλέον, τα  $i$  και  $j$  λέμε ότι **επικοινωνούν (communicate)** αν το  $i$  έχει πρόσβαση στο  $j$  και παράλληλα το  $j$  έχει πρόσβαση στο  $i$ .

Η επικοινωνία (communication) είναι σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation).

**Ορισμός 2.4.2.** [BP94, Definition 3.8.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  και  $D$  το αντίστοιχο κατευθυνόμενο γράφημα. **Κλάσεις (classes)** του  $A$  ονομάζονται οι κλάσεις ισοδυναμίας (equivalence classes), της σχέσης επικοινωνίας, που δύνανται να εξαχθούν από το  $D$ . Μία κλάση  $\alpha$  έχει πρόσβαση στην κλάση  $\beta$  αν για  $i \in \alpha$  και  $j \in \beta$ , το  $i$  έχει πρόσβαση στο  $j$ . Μία κλάση καλείται **τελική (final)** αν δεν έχει πρόσβαση σε καμία άλλη κλάση. Ενώ, μία κλάση καλείται **βασική (basic)**, αν

$\rho(A[\alpha]) = \rho(A)$ , όπου  $A[\alpha]$  είναι υποπίνακας του  $A$ , με τη διαμέριση να βασίζεται στους δείκτες της κλάσης  $\alpha$ , και **μη-βασική (nonbasic)**, αν  $\rho(A[\alpha]) < \rho(A)$ .

Οι υποπίνακες  $A_{ii}$  της τριγωνικής μορφής (2.4.2) αντιστοιχούν στις κλάσεις του  $A$ . Είναι προφανές ότι κάθε πίνακας  $A \geq 0$  έχει τουλάχιστον μία βασική κλάση και μία τελική κλάση. Η αντίστοιχη κλάση του  $A_{ii}$  είναι βασική, αν και μόνο αν  $\rho(A_{ii}) = \rho(A)$ , και τελική, αν και μόνο αν  $A_{ij} = 0$ ,  $j = i + 1, \dots, n$ . Συγκεκριμένα, ο πίνακας  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, αν και μόνο αν έχει ακριβώς μία βασική, και συγχρόνως, τελική κλάση.

Στη θεωρία των γραφημάτων ή/και των μη-αρνητικών πινάκων ενδιαφερόμαστε να γνωρίζουμε τις περιπτώσεις όπου ένας πίνακας  $A \geq 0$  διαθέτει θετικό ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v}$ , διότι τέτοιοι πίνακες είναι εφοδιασμένοι με ιδιότητες, οι οποίες χρησιμοποιούνται στη συνέχεια. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να διαθέτει ο πίνακας  $A$  θετικό ιδιοδιάνυσμα, αναγώγιμος ή μη, διατυπώνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.4.3.** [BP94, Theorem 3.10.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , και  $\rho(A)$  η φασματική ακτίνα του πίνακα. Υπάρχει θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $\rho(A)$ , αν και μόνο αν οι τελικές κλάσεις του  $A$  είναι ακριβώς οι βασικές του κλάσεις.

**Απόδειξη (Μόνο αν  $\leftarrow$ ):** Υποθέτουμε ότι ο  $A$  είναι στην τριγωνική μορφή της σχέσης (2.4.2). Έστω  $\mathbf{v}$  ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του  $A$ , το οποίο αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα  $\rho(A)$ . Η διαμέριση

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_s \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

είναι σύμφωνη της (2.4.2). Τότε για  $k = 1, 2, \dots, s$ ,

$$A_{k1}\mathbf{v}_1 + A_{k2}\mathbf{v}_2 + \dots + A_{k,k-1}\mathbf{v}_{k-1} + A_{kk}\mathbf{v}_k = \rho(A)\mathbf{v}_k \quad (2.4.4)$$

Αν η κλάση αντιστοιχούσα στο  $A_{kk}$  είναι τελική, τότε  $A_{kk}\mathbf{v}_k = \rho(A)\mathbf{v}_k$ , οπότε η κλάση είναι βασική. Αν η κλάση αντιστοιχούσα στο  $A_{kk}$  δεν είναι τελική, τότε

$$A_{kk}\mathbf{v}_k < \rho(A)\mathbf{v}_k \quad (2.4.5)$$

άρα

$$\max_i \frac{(A_{kk}\mathbf{v}_k)_i}{v_{k,i}} \leq \rho(A) \quad (2.4.6)$$

Στην περίπτωση όπου  $A_{kk} = 0$ , η επιχειρηματολογία είναι προφανής. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.3.6 για τον μη-αναγώγιμο πίνακα  $A_{kk}$  έχουμε

$$\rho(A_{kk}) \leq \max_i \frac{(A_k \mathbf{v}_k)_i}{v_i^{(k)}}. \quad (2.4.7)$$

Από την ίδια Πρόταση και την ισότητα στις σχέσεις (2.4.6) και (2.4.7), υπονοείται ότι  $A_{kk} \mathbf{v}_k = \rho(A) \mathbf{v}_k$ , το οποίο αντιβαίνει στη (2.4.5).

**(Av →):** Υποθεθίστω ότι στην τριγωνική μορφή της (2.4.2), οι διαγώνιοι υποπίνακες παρατάσσονται σύμφωνα με τη φασματική τους ακτίνα, έτσι ώστε οι υποπίνακες  $A_{11}, \dots, A_{gg}$  είναι εκείνοι που αντιστοιχούν στις τελικές-βασικές κλάσεις.

Έστω  $\mathbf{v}_k$  είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του  $A_{kk}$ , το οποίο αντιστοιχεί στην  $\rho(A)$ ,  $k = 1, 2, \dots, g$ , και ορίζεται

$$\mathbf{v}_k = (\rho(A)I - A_{kk})^{-1} \sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} \mathbf{v}_h, \quad k = g+1, \dots, s. \quad (2.4.8)$$

Επειδή  $\rho(A) > \rho(A_{kk})$  για  $k > g$ ,  $(\rho(A)I - A_{kk})^{-1} > 0$ , από την [BP94, Exercise 3.4.]. Εφαρμόζοντας μαθηματική επαγωγή μπορεί να αποδειχθεί ότι όλα τα διανύσματα  $\mathbf{z}_k$  είναι θετικά. Έστω,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_s \end{bmatrix} \quad (2.4.9)$$

Τότε,  $A\mathbf{v} = \rho(A)\mathbf{v}$ , με  $\mathbf{v} > 0$ .

□

## § 2.5 Φράγματα αναλλοίωτων μεγεθών στα γραφήματα

Γενικά, το φάσμα δεν δύναται να χαρακτηρίσει πλήρως ένα γράφημα. Βέβαια, σε ορισμένες περιπτώσεις μία ιδιοτιμή μπορεί να δώσει πληροφορίες για σημαντικά “δομικά χαρακτηριστικά” που διέπουν ένα γράφημα. Σε αυτήν την ενότητα γίνεται συζήτηση για τον αριθμό σταθερότητας, τον αριθμό κλίκας και το χρωματικό αριθμό (Ορισμός 2.1.7) του γραφήματος, τα οποία ανήκουν στα “δομικά χαρακτηριστικά”. Τα φράγματα που ανακύπτουν από το φάσμα των γραφημάτων, και δη από τη φασματική τους ακτίνα, για τα εν λόγω μεγέθη παρουσιάζουν ενδιαφέρον σε σχέση με την πολυπλοκότητα, καθώς το πρόβλημα του προσδιορισμού των αναλλοίωτων είναι NP-complete, εν αντιθέσει με τον προσδιορισμό φραγμάτων τους φάσματος, ο οποίος μπορεί να πραγματοποιηθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.

**Θεώρημα 2.5.1.** [Nik02] Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  τάξης  $n$ , και  $m = |E|$ , ο πληθάριθμος των ακμών του. Αν  $\rho(G)$  είναι ο δείκτης του  $G$ , τότε

$$\rho(G) \leq \sqrt{2m \frac{\omega(G) - 1}{\omega(G)}},$$

ή ισοδύναμα

$$\omega(G) \geq \frac{2m}{2m - \rho(G)^2}.$$

Ακόμη, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα των Bollobas και Nikiforov, το οποίο αφορά τον αριθμό των κλικών αποτελούμενο από  $s$  κορυφές, το οποίο σημειώνεται  $k_s(G)$ . Για την απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική αναφορά.

**Θεώρημα 2.5.2.** [BN07] Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  τάξης  $n$ . Αν  $k_s(G)$  σημειώνει το πλήθος των κλικών αποτελούμενων από  $s$  κορυφές και  $\rho(G)$  είναι ο δείκτης του  $G$ , τότε για κάθε  $r \geq 2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , ισχύει

$$\rho(G)^{r+1} \leq (r+1)k_{r+1}(G) + \sum_{s=2}^r (s+1)k_s(G)\rho(G)^{r+1-s},$$

και δεδομένης της τάξης  $n$ ,

$$k_{r+1}(G) \geq \left( \frac{\rho(G)}{n} - 1 + \frac{1}{r} \right) \frac{r(r-1)}{r+1} \left( \frac{n}{r} \right)^{r+1}.$$

Προηγούμενα, ορίστηκε το πρόβλημα του χρωματισμού κορυφών (Ορισμός 2.1.5), όπου σε αυτό μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός του χρωματικού αριθμού. Ένα φασματικό φράγμα για το χρωματικό αριθμό, το οποίο βελτιώνει το ευρέως γνωστό φράγμα

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G),$$

όπου  $\Delta(G)$  σημειώνει το μέγιστο βαθμό του γραφήματος, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη σχετική αναφορά για την απόδειξη.

**Θεώρημα 2.5.3.** [Wil67] Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  τάξης  $n$  και  $\rho(G)$  ο δείκτης του γραφήματος. Τότε

$$\chi(G) \leq 1 + \rho(G),$$

με την ισότητα να ισχύει, αν και μόνο αν το  $G$  είναι πλήρες γράφημα ή αποτελεί κύκλο περιττού πλήθους κορυφών.

Στη μελέτη θα χρειαστούν και τα ακόλουθα θεωρήματα.

**Θεώρημα 2.5.4.** [CRS97] Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  τάξης  $n$ , με τουλάχιστον μία ακμή και  $\rho(G)$  ο δείκτης του γραφήματος. Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι ιδιοτιμές του γραφήματος με  $\rho(G) \equiv \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , τότε

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\rho(G)}{|\lambda_n|}.$$

Επιπλέον, το γνωστό θεώρημα του Brook ([Wil86]) για μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  τάξης  $n$  αναφέρεται στον αριθμό σταθερότητας, όπου αποδεικνύεται ένα φράγμα.

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)}.$$

Το παραπάνω φράγμα δίνει μία προσέγγιση της σταθερότητας του γραφήματος, ωστόσο η προσέγγισή της μέσω του δείκτη του γραφήματος είναι εγγύτερη. Για την απόδειξη της βέλτιστης προσέγγισης μπορούμε να ανατρέξουμε στην (3.5.2).

**Θεώρημα 2.5.5.** [Wil86] Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  τάξης  $n$  και  $\rho(G)$  ο δείκτης του γραφήματος. Τότε

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{1 + \rho(G)}.$$

Έχουν αναπτυχθεί πληθώρα φραγμάτων που εμπλέκουν το δείκτη ενός γραφήματος προκειμένου να προσεγγιστούν μεγέθη όπως ο αριθμός σταθερότητας, ο αριθμός κλίκας, ο χρωματικός

αριθμός και άλλα που διέπουν ένα γράφημα: εδώ παρατέθηκαν κάποια ενδεικτικά, ωστόσο, η εκτενής αναφορά σε αυτά ξεφεύγει από τα όρια αυτής της εργασίας. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [CRS97], [JS18], [BC09] για περισσότερες εφαρμογές και εκτενέστερη συζήτηση.



## Κεφάλαιο 3

# Φασματική ακτίνα και αθροίσματα γραμμών

Ο Frobenius στο [Fro12] το 1912, όπου διατυπώνει το περίφημο θεώρημα Perron-Frobenius, απέδειξε την πρόταση ότι το μέγιστο και το ελάχιστο των αθροισμάτων γραμμών (στηλών) ενός μη-αρνητικού πίνακα φράσσουν τη φασματική ακτίνα του άνω και κάτω. Έκτοτε, έχουν διατυπωθεί πληθώρα φραγμάτων, που αξιοποιούν τα αθροίσματα γραμμών και στηλών, όπως διαπιστώνεται από τη μελέτη των εργασιών [AAA19], [Min88], [BC09], [BP94], [Mel13], [BS13], [Var00], [Var04], [WH11] και στις εκεί αναφορές. Ανάμεσα σε αυτά διακρίνουμε τα φράγματα των average 2-row sums, που ορίζονται στην εργασία [XZ14] και αποτελούν ένα σταθμισμένο μέσο όρο αθροισμάτων γραμμών, αλλά και τα average 3-rows sums, ως μετεξέλιξη των προηγούμενων, τα οποία ορίζονται στο άρθρο [LZ17].

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται φράγματα, τα οποία αξιοποιούν τα αθροίσματα των γραμμών, αλλά και την ομοιότητα μη-αρνητικών πινάκων. Επιπλέον, γενικεύεται η έννοια των average 2, 3-row sums σε average  $k$ -row sums και αποδεικνύονται τα φράγματα που προκύπτουν από αυτά. Ακόμη, διατυπώνεται μία πιο γενική έκφραση των τελευταίων και αποδεικνύονται αναλυτικές ιδιότητες.

### § 3.1 Βασικοί ορισμοί και φράγματα

**Ορισμός 3.1.1.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Το

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1.1)$$

ονομάζεται *i-οστό άθροισμα γραμμής* του  $A$ .

Επιπλέον, ορίζονται οι εξής ποσότητες, οι οποίες εσωκλείουν τα αθροίσματα γραμμών της σχέσης (3.1.1).

**Ορισμός 3.1.2.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ .

(i) Το

$$m_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{r_j(A)}{r_i(A)} \quad (3.1.2)$$

ονομάζεται *i-οστό average 2-row sum* του  $A$ .

(ii) Το

$$s_i(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{u=1}^n a_{ju} \frac{r_u(A)}{r_i(A)} \quad (3.1.3)$$

ονομάζεται *i-οστό average 3-row sum* του  $A$ .

Αξίζει να αναφερθεί ότι, οι ποσότητες των σχέσεων (3.1.2), (3.1.3) ορίστηκαν στα άρθρα [XZ14], [LZ17] προκειμένου να αξιοποιηθούν για την κατασκευή εγγύτερων στη φασματική ακτίνα φραγμάτων. Επεκτείνοντας τους ορισμούς για  $k$ -row sums παρατίθεται ο ακόλουθος ορισμός.

**Ορισμός 3.1.3.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , και  $k \in \mathbb{N}$  με  $k \geq 2$ . Το

$$w_i^{(k)}(A) = \frac{1}{r_i(A)} \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{u=1}^n a_{ju} \cdots \sum_{p=1}^n a_{vp}}_{k-1} r_p(A) = \frac{1}{r_i(A)} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} r_j(A) \quad (3.1.4)$$

ονομάζεται *i-οστό average k-row sum* του  $A$ .

Παρατηρούμε ότι, τα επονομαζόμενα average 2-row sums,  $m_i \equiv w_i^{(2)}(A)$ , και τα average 3-row

sums,  $s_i \equiv w_i^{(3)}(A)$ , του Ορισμού 3.1.2 αποτελούν υποπεριπτώσεις των average  $k$ -row sums, για  $k = 2$ ,  $k = 3$ , αντίστοιχα.

Ίσως τα ευρέως διαδεδομένα φράγματα της  $\rho(A)$  που ανακύπτουν από το Perron-Frobenius (1.2.5) και προτάθηκαν από τον Frobenius το 1912 στο [Fro12], παρουσιάζονται στην ακόλουθη πρόταση και θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια σε αποδεικτικά βήματα άλλων προτάσεων.

**Πρόταση 3.1.4.** [Fro12] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A)$  για  $i = 1, \dots, n$ . Τότε,

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{r_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i(A)\}. \quad (3.1.5)$$

Αν ο  $A$  είναι επίσης μη-αναγώγιμος, τότε θα ισχύει η ισότητα αν και μόνον εάν  $r_1(A) = \dots = r_n(A)$ .

Ακόμη, ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ιδιότητες που εμφανίζονται στην ακόλουθη πρόταση και συνδέουν τα κάτω φράγματα της φασματικής ακτίνας με τα στοιχεία ενός μη-αρνητικού πίνακα.

**Πρόταση 3.1.5.** [HJ13, Corollary 8.1.20.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

(i)  $\max_{1 \leq i \leq n} \{a_{ii}\} \leq \rho(A)$

(ii) Αν ο  $\tilde{A}$  αποτελεί κύριο υποπίνακα του  $A$ , τότε  $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$ .

Κατά ανάλογο τρόπο, οι ποσότητες του Ορισμού 3.1.2 δύνανται να εντοπίσουν σε τμήμα του πραγματικού άξονα τη φασματική ακτίνα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1.8, προκύπτει η ισότητα. Για τις αποδείξεις αυτών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα σχετικά άρθρα.

**Πρόταση 3.1.6.** [XZ14; LZ17] Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Έστωσαν οι ποσότητες  $m_i$ ,  $s_i$ , όπως ορίζονται στις σχέσεις (3.1.2) και (3.1.3), αντίστοιχα. Τότε,

(i)

$$\min_{1 \leq i \leq n} \{m_i(A)\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{m_i(A)\}. \quad (3.1.6)$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι επίσης μη-αναγώγιμος, τότε ισχύει η ισότητα, αν και μόνον αν  $m_1(A) = \dots = m_n(A)$ .

(ii)

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt{s_i(A)} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt{s_i(A)} \right\}. \quad (3.1.7)$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει, αν και μόνον  $m_1(A) = \dots = m_n(A)$ , όταν  $A^2$  είναι μη-αναγώγιμος, και υπάρχει πίνακας μετάθεσης  $P$

τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 0_r & A_1 \\ A_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix},$$

$m_{\sigma(1)}(A) = \dots = m_{\sigma(r)}(A)$  και  $m_{\sigma(r+1)}(A) = \dots = m_{\sigma(n)}(A)$ , όταν ο  $A^2$  είναι αναγώγιμος, όπου  $\sigma$  είναι μία μετάθεση στο σύνολο  $\{1, \dots, n\}$  το οποίο αντιστοιχεί στον πίνακα μετάθεσης  $P$ .

### § 3.2 Ομοιότητα και φράγματα

Στην ακόλουθη πρόταση υπενθυμίζονται οι σημαντικότερες ιδιότητες, τόσο για τις ιδιοτιμές, όσο και για τη φασματική ακτίνα και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, που οφείλονται στην ομοιότητα των πινάκων, προς διευκόλυνση του αναγνώστη.

**Πρόταση 3.2.1.** Έστωσαν  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ ,  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  ένας αντιστρέψιμος πίνακας και ένας διαγώνιος πίνακας  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  με  $P = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i)  $\sigma(A) = \sigma(A^T)$ , όπου  $A^T$  ο ανάστροφος πίνακας του  $A$ .

(ii)  $\sigma(A) = \sigma(\hat{A})$ , όπου  $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ .

(iii)  $\rho(A) = \rho(\tilde{A})$ , όπου  $\tilde{A} = P^{-1}AP$ . Αν  $\mathbf{v} > 0$  ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην  $\rho(A)$ , τότε το διάνυσμα  $\tilde{\mathbf{v}} = P^{-1}\mathbf{v}$  αποτελεί ιδιοδιάνυσμα της  $\rho(\tilde{A})$ .

Εν συνεχεία, συνδυάζοντας τα φράγματα της Πρότασης 3.1.4 και εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες των ομοίων πινάκων, προκύπτουν τα ακόλουθα φράγματα για τη φασματική ακτίνα, για τις αποδείξεις των οποίων ο αναγνώστης δύναται να ανατρέξει στις αντίστοιχες αναφορές.

**Πρόταση 3.2.2.** [HJ13, Theorem 8.1.26] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Τότε για κάθε διάνυσμα  $\mathbf{x} = [x_i] > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ισχύει

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}, \quad (3.2.1)$$

και

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \right\}. \quad (3.2.2)$$

Παρατίθενται κάποια πορίσματα που ανακύπτουν από την Πρόταση 3.2.2, τα οποία θα φανούν χρήσιμα στη συνέχεια της μελέτης.

**Πόρισμα 3.2.3.** [HJ13, Corollary 8.1.29.] Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , και έστω το διάνυσμα  $\mathbf{x} > 0$ . Αν τα βαθμωτά μεγέθη  $\alpha, \beta \geq 0$  είναι τέτοια ώστε  $\alpha\mathbf{x} \leq A\mathbf{x} \leq \beta\mathbf{x}$ , τότε  $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$ . Αν  $\alpha\mathbf{x} < A\mathbf{x}$ , τότε  $\alpha < \rho(A)$ . Αν  $A\mathbf{x} < \beta\mathbf{x}$ , τότε  $\rho(A) < \beta$ .

**Πόρισμα 3.2.4.** [HJ13, Corollary 8.1.30.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Αν  $\lambda$  ιδιοτιμή του πίνακα  $A$  και  $\mathbf{v} > 0$  το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, τέτοια ώστε  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , τότε  $\lambda = \rho(A)$ .

Με αφορμή την Πρόταση 3.2.2 και τα πορίσματα αυτής, θελήσαμε να επεκτείνουμε και να γενικεύσουμε αυτά τα αποτελέσματα, προκειμένου να υπολογίσουμε νέα φράγματα πιο "κοντά" στη φασματική ακτίνα του πίνακα.

**Θεώρημα 3.2.5.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Τότε, για κάθε  $\mathbf{x} = [x_i] > 0$ , και για κάποια σταθερή τιμή του  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , έχουμε

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right\}. \quad (3.2.3)$$

**Απόδειξη** Θεωρούμε  $\tilde{A} = P^{-1}A^kP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{A} \geq 0$ , όπου  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $P = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , με  $x_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.1.4 για τον  $\tilde{A}$  καθώς και την Πρόταση 3.2.1(iii) αναφορικά με την ομοιότητα των πινάκων  $\tilde{A}$ ,  $A^k$ ,  $\rho(A^k) \equiv \rho(\tilde{A})$ , σε συνδυασμό με τη μορφή των στοιχείων του πίνακα  $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}] = [x_i^{-1}a_{ij}^{(k)}x_j]$  και τον Ορισμό 3.1.1 για το άθροισμα των γραμμών του  $\tilde{A}$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i(\tilde{A})\} &\leq \rho(\tilde{A}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i(\tilde{A})\} \\ \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i(\tilde{A})\} &\leq \rho(A^k) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{r_i(\tilde{A})\} \\ \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j \right\} &\leq \rho(A)^k \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j \right\} \\ \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right\} &\leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right\}. \end{aligned}$$

□

**Πρόταση 3.2.6.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , και  $\mathbf{x} = [x_i] > 0$ . Αν

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right\}, \quad (3.2.4)$$

τότε, η φασματική ακτίνα είναι ίση με

$$\rho(A) = \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j}, \quad (3.2.5)$$

για κάθε  $i = 1, \dots, n$ .

**Απόδειξη** Ο περιορισμός στην (3.2.4) οδηγεί στην ισότητα όλων των ποσοτήτων  $\sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j}$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , οπότε (3.2.3) καταλήγει

$$\rho(A) = \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j}.$$

□

Στο Θεώρημα 3.2.5 παρατηρούμε ότι, επιλέγοντας ως θετικό διάνυσμα  $\mathbf{x}$ , το διάνυσμα με συντεταγμένες το άθροισμα των γραμμών του  $A$ , ήτοι  $x_i = r_i$ , για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , στο αριστερό και δεξιό μέρος της ανισότητας (3.2.3) εμφανίζεται η ποσότητα  $w_i^{(k)}(A)$ , όπως ορίστηκε στη σχέση (3.1.4). Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στο ακόλουθο πόρισμα, το οποίο γενικεύει τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.1.6.

**Πόρισμα 3.2.7.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$ , για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Έστω,  $w_i^{(k)}(A)$ , όπως ορίστηκε στη (3.1.4),  $k \in \mathbb{N}$ , με  $k \geq 1$ . Τότε,

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)} \right\}. \quad (3.2.6)$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει:

(i) Αν  $A^k$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει, αν και μόνο αν  $w_1^{(2)}(A) = \dots = w_n^{(2)}(A)$ .

(ii) Αν  $A^k$  είναι αναγώγιμος, τότε η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει, αν και μόνο αν ο  $A$  είναι  $(k)$ -κυκλικός και  $w_{j_1}^{(2)}(A) = \dots = w_{j_{n_1}}^{(2)}(A)$ ,  $w_{j_{n_1+1}}^{(2)}(A) = \dots = w_{j_{n_1+n_2}}^{(2)}(A)$ ,  $\dots$ ,  $w_{j_{n_1+\dots+n_k+1}}^{(2)}(A) = \dots = w_{j_n}^{(2)}(A)$ , όπου τα  $k$  σύνολα δεικτών  $\{j_1, \dots, j_{n_1}\}$ ,  $\{j_{n_1+1}, \dots, j_{n_1+n_2}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{j_{n_1+\dots+n_k+1}, \dots, j_n\}$  διαμορφώνουν τη διατεταγμένη διαμέριση των  $\{1, \dots, n\}$ , η οποία περιγράφει την κυκλική δομή του  $A$ .

### § 3.3 Αναλυτικές ιδιότητες των φραγμάτων της φασματικής ακτίνας

Στο θεώρημα που ακολουθεί αποδεικνύεται ότι η ακολουθία  $\left( \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j} \right)_{k \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει και μάλιστα στη φασματική ακτίνα του μη-αρνητικού πίνακα  $A$ . Προηγείται του θεωρήματος, μία πρόταση της οποίας τα αποτελέσματα αξιοποιούνται κατά την απόδειξη αυτού.

**Πρόταση 3.3.1.** [HJ13, Corollary 8.1.33.] Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Αν ο  $A$  έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{v} = [v_i]$ , τότε για κάθε  $k = 1, 2, \dots$  και για κάθε  $i = 1, \dots, n$  ισχύει

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^{(k)} \leq \frac{\max_{1 \leq m \leq n} \{v_m\}}{\min_{1 \leq m \leq n} \{v_m\}} \rho(A)^k,$$

και

$$\frac{\min_{1 \leq m \leq n} \{v_m\}}{\max_{1 \leq m \leq n} \{v_m\}} \rho(A)^k \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^{(k)}.$$

Αν  $\rho(A) > 0$ , τότε, τα στοιχεία του  $[\rho(A)^{-1}A]^m$  είναι φραγμένα ομοιόμορφα για  $k = 1, 2, \dots$

**Θεώρημα 3.3.2.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με θετικό ιδιοδιάνυσμα. Τότε, για κάθε θετικό διάνυσμα  $\mathbf{x} = [x_i] > 0$  ισχύει

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j}, \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, n. \quad (3.3.1)$$

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τον  $\tilde{A} = P^{-1}AP$ , όπου  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $P = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , με  $x_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Ο πίνακας  $\tilde{A}$  είναι όμοιος του  $A$  και από την Πρόταση 3.2.1  $\rho(A) \equiv \rho(\tilde{A})$ . Επιπλέον,

$$\tilde{A}^k = \underbrace{P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP}_k = P^{-1}A^kP = [x_i^{-1}a_{ij}^{(k)}x_j] = [\tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}].$$

Ο  $A$  έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα,  $\mathbf{v} > 0$ , άρα και ο  $\tilde{A}$  θα διαθέτει θετικό ιδιοδιάνυσμα, έστω  $\tilde{\mathbf{v}}$ , επειδή από την Πρόταση 3.2.1,  $\tilde{\mathbf{v}} = P^{-1}\mathbf{v} > 0$  ως γινόμενο θετικών ποσοτήτων. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.3.1, για τον πίνακα  $\tilde{A}$  έχουμε ότι για κάθε  $i = 1, \dots, n$  ισχύουν



$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} &\leq \frac{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}} \rho(A)^k \\
 \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}} &\leq \sqrt[k]{\frac{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}} \rho(A)^k} \\
 \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}} &\leq \rho(A)^k \sqrt[k]{\frac{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}}.
 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}} \rho(A)^k &\leq \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)} \\
 \sqrt[k]{\frac{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}} \rho(A)^k} &\leq \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}} \\
 \rho(A)^k \sqrt[k]{\frac{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}} &\leq \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}},
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

όπου

$$\frac{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}, \frac{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}} \in \mathbb{R}^+.$$

Η οριακή τιμή των σχέσεων (3.3.2) και (3.3.3), καθώς  $k \rightarrow \infty$ , σε συνδυασμό με την τιμή του χαρακτηριστικού ορίου<sup>[1]</sup> δίνουν

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}} \leq \rho(A) \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}} = \rho(A), \tag{3.3.4}$$

<sup>[1]</sup>Υπενθυμίζεται ότι, αν  $a \in \mathbb{R}^+$ , για κάθε  $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a} = 1.$$

και

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}} \geq \rho(A) \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{\min_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}{\max_{1 \leq m \leq n} \{\tilde{v}_m\}}} = \rho(A). \quad (3.3.5)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις (3.3.4) και (3.3.5), προκύπτει

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^{(k)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j},$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

**Παρατήρηση 3.1.** Επειδή υποθέσαμε  $r_i(A) > 0$ , για κάθε  $1 \leq i \leq n$ , στο Θεώρημα 3.3.2 μπορούμε να επιλέξουμε  $\mathbf{x} = [r_1(A) \ r_2(A) \ \cdots \ r_n(A)]^T$  και εφαρμόζοντας τον Ορισμό 3.1.3 οδηγούμαστε άμεσα στην απόδειξη της ακόλουθης πρότασης.

**Πρόταση 3.3.3.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με θετικό ιδιοδιάνυσμα και με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$ , για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Τότε,

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)}, \quad \text{για κάθε } i = 1, \dots, n. \quad (3.3.6)$$

**Παρατήρηση 3.2.** Αναζητώντας στο Θεώρημα 3.3.2 ένα διάνυσμα  $\mathbf{x} > 0$ , το οποίο οδηγεί ταχύτερα στον υπολογισμό της φασματικής ακτίνας μέσω της λογικής που αναπτύχθηκε στην Παρατήρηση 3.1 και σκεπτόμενοι τα αποτελέσματα της Ενότητας 1.3, μπορούμε να επιλέξουμε ως διάνυσμα αυτό, του οποίου οι συντεταγμένες είναι ίσες με τα αθροίσματα των αντίστοιχων γραμμών του πίνακα  $A^\tau$ , όπου  $\tau \in \mathbb{N}$  μία σταθερά, ήτοι  $\mathbf{x}^{(\tau)} = [r_1^{(\tau)}(A) \ r_2^{(\tau)}(A) \ \cdots \ r_n^{(\tau)}(A)]^T$ . Τότε, είναι φανερό ότι μέσω του Θεωρήματος 3.3.2 οδηγούμαστε άμεσα στην απόδειξη της ακόλουθης πρότασης.

**Πρόταση 3.3.4.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n$ ,  $A \geq 0$ . Αν ο  $A$  έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα  $\mathbf{x}$ , τότε ισχύει

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{r_i^{(\tau)}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} r_j^{(\tau)}}, \quad (3.3.7)$$

όπου  $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\tau \leq k$  και  $r_i^{(\tau)}(A) = r_i^{(\tau)} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(\tau)}$ .

**Παράδειγμα 3.1.**

Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , ο οποίος μελετήθηκε στο [LZ17],

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Η φασματική ακτίνα ισούται με  $\rho(A) = 6$ , και τα αθροίσματα γραμμών  $r_1(A) = 7$ ,  $r_2(A) = 6$ ,  $r_3(A) = 6$ ,  $r_4(A) = 5$ . Εφόσον τα αθροίσματα των γραμμών είναι θετικά και ο  $A_2$  είναι μη-αναγώγιμος, ώστε δεν μηδενίζονται οι γραμμές του πίνακα στην  $\tau$  δύναμη, δυνάμεθα να κατασκευάσουμε φράγματα λαμβάνοντας τα μέγιστα και ελάχιστα της σχέσης  $\sqrt[k]{\frac{1}{r_i^{(\tau)}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} r_j^{(\tau)}}$ , της Πρότασης 3.3.4, για διάφορες τιμές των  $k$ ,  $k \geq 2$  και  $\tau$ ,  $\tau \geq 1$ . Στον Πίνακα 3.1, απεικονίζονται τα ελάχιστα φράγματα της προαναφερθείσας σχέσης, ενώ στον Πίνακα 3.2 τα μέγιστα.

Πίνακας 3.1: Κάτω φράγματα

$k \setminus \tau$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	5.9642							
3	5.9750	5.9939						
4	5.9811	5.9954	5.9990					
5	5.9848	5.9963	5.9992	5.9998				
6	5.9874	5.9969	5.9993	5.9999	6.0000			
7	5.9892	5.9974	5.9994	5.9999	6.0000	6.0000		
8	5.9905	5.9977	5.9995	5.9999	6.0000	6.0000	6.0000	
9	5.9916	5.9979	5.9996	5.9999	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000

Πίνακας 3.2: Άνω φράγματα

$k \setminus \tau$	2	3	4	5	6	7	8	9
2	6.0415							
3	6.0287	6.0062						
4	6.0217	6.0047	6.0010					
5	6.0173	6.0038	6.0008	6.0002				
6	6.0145	6.0031	6.0006	6.0001	6.0000			
7	6.0124	6.0027	6.0006	6.0001	6.0000	6.0000		
8	6.0108	6.0024	6.0005	6.0001	6.0000	6.0000	6.0000	
9	6.0096	6.0021	6.0004	6.0001	6.0000	6.0000	6.0000	6.0000

Παρατηρούμε ότι, όσο τα  $k$  και  $\tau$  αυξάνονται, τα φράγματα είναι εγγύτερα στη φασματική ακτίνα.

**Παρατήρηση 3.3.** Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  διαθέτει θετικό ιδιοδιάνυσμα, αν ικανοποιεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη του Θεωρήματος 2.4.3. Βέβαια, στην περίπτωση που ο πίνακας είναι μη-αναγωγίμος δεν χρειάζεται να διερευνήσουμε το πρόσημο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα, επειδή το θεώρημα Perron-Frobenius, Θεώρημα 1.2.5, εξασφαλίζει την ύπαρξη θετικού ιδιοδιανύσματος.

**Παρατήρηση 3.4.** Τα φράγματα της φασματικής ακτίνας μπορούν να υπολογιστούν από τα αθροίσματα των στηλών του πίνακα, θεωρώντας τον πίνακα  $A^T$  αντί  $A$ , μέσω της ιδιότητας της Πρότασης 3.2.1(i). Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη. Επιπλέον, σε μερικές περιπτώσεις λαμβάνουμε εγγύτερα φράγματα της φασματικής ακτίνας.

**Παρατήρηση 3.5.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ . Αν ο  $A$  έχει θετικό ιδιοδιάνυσμα, τότε

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{r_i(A^k)}, \quad (3.3.8)$$

για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.2, επιλέγοντας  $\mathbf{x} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ .

**Παρατήρηση 3.6.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  δεν διαθέτει θετικά αθροίσματα γραμμών. Δυνάμεθα να διαταράξουμε τη διαγώνιο του προηγούμενου, με θετική ποσότητα  $p \in \mathbb{R}^+$ , ήτοι  $B = A + \text{diag}(p)$ , ως εκ τούτου ο πίνακας  $B$  έχει φασματική ακτίνα  $\rho(B) = \rho(A) + p$ . Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε τα φράγματα του Πορίσματος 3.2.7 στον πίνακα  $B$  και έπειτα να αφαι-

ρέσουμε από τα φράγματα αυτού την ποσότητα  $p$ , ώστε τελικά να πάρουμε μία εκτίμηση για τη  $\rho(A)$ .

Στη συνέχεια, γίνεται συζήτηση περί της μονοτονίας της ακολουθίας  $\left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)} \right\} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , όπως ορίζεται στη σχέση (3.1.4). Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται η μονοτονία της ακολουθίας αυτής καθ' αυτής, παρά η μονοτονία υπακολουθιών αυτής.

**Πρόταση 3.3.5.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ ,  $x_i > 0$ ,  $1 \leq i \leq n$  και  $P = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Τότε, για  $k \geq 2$ ,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)} \right\} = \sqrt[k]{\|\tilde{A}^k\|_\infty}, \quad (3.3.9)$$

όπου  $\tilde{A} = P^{-1}AP$ , και  $\|\tilde{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |\tilde{a}_{ij}| \right\}$ .

**Απόδειξη** Από τον Ορισμό των  $w_i^{(k+1)}(A)$  στην (3.1.4) και τον ορισμό της άπειρης νόρμας του  $\tilde{A}$  προκύπτει άμεσα

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ w_i^{(k+1)}(A) \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} x_j \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \right\}^{(k)} = \|\tilde{A}^k\|_\infty.$$

Λαμβάνοντας  $k$ -τάξη ρίζα και στα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας, αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Αξιοποιώντας τις ιδιότητες της νόρμας πίνακα και συγκεκριμένα την υπο-πολλαπλασιαστική ιδιότητα, μπορούμε να αποφανθούμε για τη μονοτονία της ακολουθίας  $\left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)} \right\} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , όπως αυτό αποδεικνύεται στην πρόταση που ακολουθεί.

**Πρόταση 3.3.6.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , και η ακολουθία  $\left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{w_i^{(k+1)}(A)} \right\} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , με  $w_i^{(k)}(A)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  στην (3.1.4). Έστω η υπακολουθία  $\left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[b^k]{w_i^{(b^{k+1})}(A)} \right\} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , με τη σταθερά  $b \in \mathbb{N}^*$ . Τότε, η

$$\left( \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[b^k]{w_i^{(b^{k+1})}(A)} \right\} \right)_{k \in \mathbb{N}},$$

είναι φθίνουσα.

**Απόδειξη** Αξιοποιώντας το αποτέλεσμα της Πρότασης 3.3.5, η απόδειξη θα στηριχθεί στις ιδιότητες της νόρμας πίνακα και ιδιαίτερα θα χρησιμοποιηθεί η υπο-πολλαπλαστική ιδιότητα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \underbrace{\|\tilde{A}^{b^k} \tilde{A}^{b^k} \cdots \tilde{A}^{b^k}\|}_{b} &\leq (\|\tilde{A}^{b^k}\|_{\infty})^b \\ \|\tilde{A}^{b^{k+1}}\|_{\infty} &\leq (\|\tilde{A}^{b^k}\|_{\infty})^b \\ \left( \sqrt[b^{k+1}]{\|\tilde{A}^{b^{k+1}}\|_{\infty}} \right)^{b^{k+1}} &\leq \left( \sqrt[b^k]{\|\tilde{A}^{b^k}\|_{\infty}} \right)^{b^{k+1}} \\ \sqrt[b^{k+1}]{\|\tilde{A}^{b^{k+1}}\|_{\infty}} &\leq \sqrt[b^k]{\|\tilde{A}^{b^k}\|_{\infty}} \\ 1 &\leq \frac{\sqrt[b^k]{\|\tilde{A}^{b^k}\|_{\infty}}}{\sqrt[b^{k+1}]{\|\tilde{A}^{b^{k+1}}\|_{\infty}}} \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα επαληθεύει τον ορισμό της φθίνουσας ακολουθίας. □

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος προσέγγισης της φασματικής ακτίνας, ο οποίος υλοποιεί τα φράγματα του Θεωρήματος 3.2.5 και της Πρότασης 3.3.2.

**Algorithm 1:** Επαναληπτικός αλγόριθμος των θετικών διανυσμάτων

**Input:**  $A_{n \times n} \geq 0$ ,  $x_{n \times 1} > 0$ ,  $\epsilon$ ,  $itr, step$

**Output:**  $spectral\_approximation$ ,  $upper\_bound$ ,  $lower\_bound$

$P = diag(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

**for**  $k = 1 : step : itr$  **do**

**if**  $(upper\_bound - lower\_bound) < \epsilon$  **then**

$y_i = P^{-1}A^kP[11 \dots 1]^t$ ;

$upper\_bound = \sqrt[k]{\max_{1 \leq i \leq n} \{y_i\}}$ ;

$lower\_bound = \sqrt[k]{\min_{1 \leq i \leq n} \{y_i\}}$

**end**

**end**

**return**  $spectral\_approximation = \frac{1}{2}(upper\_bound + lower\_bound)$

**Παρατήρηση 3.7.** Μπορεί ο παραπάνω αλγόριθμος να περιλαμβάνει επαναληπτικό βρόχο, ωστόσο πρέπει να τονιστεί, ότι ο αλγόριθμος δεν είναι αναδρομικός, εν αντιθέσει με τον αλγόριθμο των δυνάμεων ή τον αλγόριθμο των Duan και Zhang [DZ06].

Στη συνέχεια μέσω παραδείγματος επαληθεύονται τα θεωρητικά αποτελέσματα αναφορικά με άνω και κάτω φράγματα της φασματικής ακτίνας συναρτήσει των average  $k$ -row sums. Για τον υπολογισμό των φραγμάτων χρησιμοποιείται ο αντίστοιχος πηγαίος κώδικας, (βλέπε, Παράρτημα Α-Κώδικας A1), ο οποίος υλοποιείται σε περιβάλλον Matlab- θεωρώντας ότι είναι κατάλληλος για τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

**Παράδειγμα 3.2.** (i) Έστω ο ακόλουθος θετικός πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , που μελετήθηκε στην εργασία [LZ17],

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τα αθροίσματα γραμμών του πίνακα είναι  $r_1(A) = 7$ ,  $r_2(A) = 6$ ,  $r_3(A) = 6$ ,  $r_4(A) = 5$ , και η φασματική ακτίνα  $\rho(A) = 6$ . Εφόσον τα αθροίσματα των γραμμών είναι θετικά, εφαρμόζουμε τον Ορισμό 3.1.3 και υπολογίζουμε τα average  $k$ -row sums για ποικίλες τιμές του  $k$ , με εύρος από 2 έως 200. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3 με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Με μπλε σημειώνεται το μέγιστο των average  $k$ -row sums της εκάστοτε δύναμης  $k$ , ενώ με απαλό μπλε το ελάχιστο, τα οποία φράσσουν τη φασματική ακτίνα άνω και κάτω, όπως διατυπώνεται στο Πρόγραμμα 3.2.7.

Πίνακας 3.3: Average  $k$ -row sums του πίνακα  $A$ .

$k$	$\sqrt[k-1]{w_1^{(k)}}(A)$	$\sqrt[k-1]{w_2^{(k)}}(A)$	$\sqrt[k-1]{w_3^{(k)}}(A)$	$\sqrt[k-1]{w_4^{(k)}}(A)$
2	6.2857	6.0000	5.8333	5.8000
3	6.1760	6.0000	5.8878	5.8822
4	6.1218	6.0000	5.9202	5.9193
5	6.0919	6.0000	5.9393	5.9391
6	6.0736	6.0000	5.9512	5.9512
7	6.0613	6.0000	5.9593	5.9593
8	6.0525	6.0000	5.9651	5.9651
9	6.0459	6.0000	5.9695	5.9695
10	6.0408	6.0000	5.9728	5.9728
11	6.0367	6.0000	5.9756	5.9756
12	6.0333	6.0000	5.9778	5.9778
13	6.0306	6.0000	5.9796	5.9796
14	6.0282	6.0000	5.9812	5.9812
15	6.0262	6.0000	5.9825	5.9825
20	6.0193	6.0000	5.9871	5.9871
30	6.0126	6.0000	5.9796	5.9796
40	6.0094	6.0000	5.9937	5.9937
50	6.0075	6.0000	5.9950	5.9950
70	6.0053	6.0000	5.9965	5.9965
90	6.0041	6.0000	5.9972	5.9972
110	6.0034	6.0000	5.9978	5.9978
200	6.0018	6.0000	5.9988	5.9988



Παρατηρούμε ότι, όσο το  $k$  αυξάνεται, τα φράγματα πλησιάζουν περισσότερο την πραγματική τιμή της φασματικής ακτίνας, ενώ παράλληλα τα average  $k$ -row sums τείνουν να εξισωθούν. Άλλωστε, αναμέναμε αυτά τα αποτελέσματα, αν αναλογιστούμε την Πρόταση 3.3.3.

Υπενθυμίζεται ότι, εφαρμόζοντας τη (3.1.4) για  $k = 2$  και  $k = 3$  υπολογίζονται τα average 2-row sums και 3-row sums, ποσότητες που προσδιορίζονται και από τις (3.1.2) και (3.1.3). Οι παραπάνω ποσότητες επαληθεύουν τα φράγματα της φασματικής ακτίνας του πίνακα  $A$ , όπως αυτά διατυπώνονται στην Πρόταση 3.1.6 στις σχέσεις (3.1.6) και (3.1.7), αντίστοιχα.

(ii) Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , όπως φαίνεται παρακάτω,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 17 & 1 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

με φασματική ακτίνα  $\rho(A) = 13.3702$ , και αθροίσματα γραμμών  $r_1(A) = 7$ ,  $r_2(A) = 13$ ,  $r_3(A) = 30$ ,  $r_4(A) = 12$ ,  $r_5(A) = 15$ . Εφόσον τα αθροίσματα των γραμμών είναι θετικά, δυνάμεθα να εφαρμόσουμε τα φράγματα της Πρότασης 3.2.7, για διάφορες τιμές του  $k$ ,  $k \geq 2$ .

Η ρίζα  $(k - 1)$ -τάξης των average  $k$ -row sums του Ορισμού 3.1.3, της σχέσης (3.1.4), για τιμές του  $k$ , αντιστοιχούσες σε δυνάμεις του 2, απεικονίζονται στον ακόλουθο πίνακα με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Πίνακας 3.4: Average  $k$ -row sums

$k$	$\sqrt[k-1]{w_1^{(k)}(A)}$	$\sqrt[k-1]{w_2^{(k)}(A)}$	$\sqrt[k-1]{w_3^{(k)}(A)}$	$\sqrt[k-1]{w_4^{(k)}(A)}$	$\sqrt[k-1]{w_5^{(k)}(A)}$	M.O
2	16.8571	15.9231	11.3000	9.6667	13.5333	13.4560
4	13.7836	14.2679	12.6228	12.6973	13.4930	13.3729
8	13.6056	13.7747	13.0041	13.0365	13.4135	13.3669
16	13.4790	13.5571	13.1977	13.2154	13.3904	13.3679
32	13.4228	13.4603	13.2865	13.2951	13.3800	13.3689
64	13.3960	13.4145	13.3289	13.3332	13.3750	13.3695
128	13.3830	13.3922	13.3497	13.3518	13.3726	13.3699

Με μπλε σημειώνεται το μέγιστο των average  $k$ -row sums της εκάστοτε δύναμης  $k$ , ενώ με απαλό μπλε το ελάχιστο, τα οποία φράσσουν τη φασματική ακτίνα άνω και κάτω, όπως διατυπώνεται στο Πρόσμα 3.2.7.

Παρατηρούμε ότι όσο το  $k$  αυξάνεται, τα φράγματα είναι εγγύτερα στη φασματική ακτίνα. Άλλωστε, αναμέναμε αυτά τα αποτελέσματα, αν αναλογιστούμε την Πρόταση 3.3.2.

### § 3.4 Υπολογιστική πολυπλοκότητα προτεινόμενων φραγμάτων

Είναι γνωστό ότι, ο υπολογισμός του γινομένου δύο πινάκων έχει πολυπλοκότητα της τάξης  $O(n^{2.3728596})$ , αναλογιζόμενοι τον πλέον αποδοτικότερο αλγόριθμο που έχει προταθεί από την Virginia Vassilevska Williams στο [Wil12]. Επιπλέον, μέσω της μεθόδου "Διαίρει και βασίλευε", δυνάμεθα να υπολογίσουμε τον  $A^k$  σε χρόνο  $O(\log k)$ , εν προκειμένω υπολογίζοντας αναδρομικά το  $A^{k/2}$  και  $A^k = A^{k/2} \times A^{k/2}$ . Συνδυάζοντας την πολυπλοκότητα που εισάγεται από το γινόμενο δύο πινάκων και το χρόνο υπολογισμού της δύναμης ενός πίνακα, καταλήγουμε ότι η συνολική πολυπλοκότητα είναι της τάξης του  $O(n^{2.3728596} \log k)$ .

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα των φραγμάτων του Θεωρήματος 3.2.5, έγκειται σε δύο σημεία: Αφενός μεν, εισάγεται πολυπλοκότητα από τον υπολογισμό της  $k$ -οστής δύναμης του πίνακα  $A$ , προκειμένου να λάβουμε τα  $a_{ij}^{(k)}$  της σχέσης (3.2.3). Αφετέρου, η επιλογή του  $\mathbf{x}$ , που είναι κατά βάση αυθαίρετο θετικό διάνυσμα, μπορεί να εισάγει πολυπλοκότητα. Πιο συγκεκριμένα, εάν επιλέξουμε για  $\mathbf{x}$ , τα αθροίσματα γραμμών του πίνακα  $A$ , λαμβάνοντας τα φράγματα του Πορίσματος 3.2.7, τα οποία δύνανται να υπολογιστούν σε  $n^2$  βήματα- καθώς αρκεί να σαρώσουμε άπαξ όλα τα στοιχεία του πίνακα- τότε θα σημειώνουμε  $O(n^{2.3728596} \log k)$  την πολυπλοκότητα, διότι η πράξη του υπολογισμού των αθροισμάτων γραμμών δεν επηρεάζει ασυμπτωτικά την τάξη πολυπλοκότητας  $O(n^{2.3728596} \log k)$ , όντας μικρότερη. Επιπρόσθετα, η επιλογή του  $\mathbf{x}$ , μπορεί να μην εισάγει καθόλου πολυπλοκότητα, παραδείγματος χάριν αν επιλέξουμε  $\mathbf{x} = [1, 1, \dots, 1]^T$ , όπου και σε αυτή την περίπτωση θα σημειώνουμε πολυπλοκότητα  $O(n^{2.3728596} \log k)$ . Αντίθετα, αν επιλέξουμε  $\mathbf{x} = [r_1^{(\tau)}, r_2^{(\tau)}, \dots, r_n^{(\tau)}]^T$ , όπως προτείνεται στην Πρόταση 3.3.4, τότε για  $\tau < k$ , η πολυπλοκότητα σημειώνεται  $O(n^{2.3728596} \log k)$ , ειδάλως παίρνουμε  $O(n^{2.3728596} \log \tau)$ , διότι λαμβάνουμε τα αθροίσματα των γραμμών του πίνακα στη δύναμη  $\tau$ . Πάντως, κατά τον υπολογισμό των φραγμάτων της Πρότασης 3.3.4, προτρέπει η επιλογή του  $\tau$  να συνάδει με εκείνη του  $k$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι, η αναζήτηση των μέγιστου και ελάχιστου φράγματος απαιτεί  $n$  βήματα, ενώ το γινόμενο των στοιχείων  $a_{ij}^{(k)}$  με τις συνιστώσες του διανύσματος  $\mathbf{x}$ ,  $n^2$  βήματα· αυτά, δεν επηρεάζουν την τάξη πολυπλοκότητας.

### § 3.5 Εφαρμογές στα γραφήματα

Σε αυτήν την ενότητα, θεωρούμε τα φράγματα που προτείνονται σε προτάσεις του τρέχοντος κεφαλαίου για πίνακες που αντιστοιχούν σε μη-κατευθυνόμενα και κατευθυνόμενα γραφήματα, αποδίδοντάς και ερμηνεύοντάς τα με όρους γραφημάτων.

Αρχικά ο ορισμός των αθροισμάτων γραμμών, Ορισμός 3.1.1, ταυτίζεται με τον ορισμό του βαθμού κορυφής ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος  $G$  τάξης  $n$ , ήτοι  $r_i \equiv d_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  και με το άθροισμα των έσω και έξω-βαθμών μίας κορυφής, στην περίπτωση κατευθυνόμενου γραφήματος  $D$  τάξης  $n$ , ήτοι  $r_i \equiv d^+(v_i) + d^-(v_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Ο ορισμός των average  $k$ -row sums μπορεί να αντιστοιχηθεί για μη-κατευθυνόμενα γράφημα και διατυπώνεται στη συνέχεια.

**Ορισμός 3.5.1.** Έστω μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  τάξης  $n$  και  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης. Θεωρούμε τους βαθμούς  $d_i(A) > 0$  για κάθε κορυφή  $v_i = 1, \dots, n$ , και  $k \in \mathbb{N}$ , με  $k \geq 2$ . Το

$$m_{v_i}^{(k)}(G) = \frac{1}{d_i} \underbrace{\sum_{v_i \sim v_j} \sum_{v_j \sim v_u} \cdots \sum_{v_b \sim v_p}}_{k-1} d_p = \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k-1)} d_j \quad (3.5.1)$$

αποτελεί το  $i$ -οστο average  $k$ -degree του  $G$ .

Για να οριστούν τα average  $k$ -degree σε κατευθυνόμενα γραφήματα, αρκεί να αντικατασταθεί το  $d_i$  με τη ποσότητα  $d^+(v_i) + d^-(v_i)$ , ήτοι με το άθροισμα των έξω και έσω βαθμών κάθε κορυφής.

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.1.3 και τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.1.4 μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση, που προσδιορίζει φράγματα για το δείκτη ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος.

**Πρόταση 3.5.2.** Έστω μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G$  τάξης  $n$ , με δείκτη  $\rho(G)$ , και  $\Delta(G)$ ,  $\delta(G)$  ο μέγιστος και ελάχιστος βαθμός αντίστοιχα. Τότε,

$$\delta(G) \leq \rho(G) \leq \Delta(G), \quad (3.5.2)$$

όπου η ισότητα και στις δύο πλευρές ισχύει, αν και μόνο αν το γράφημα είναι κανονικό.

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 3.5.1 και τα αποτελέσματα της Πρότασης 3.2.7 μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση, που προσδιορίζει φράγματα για το δείκτη ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος.

**Πρόταση 3.5.3.** Έστω μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$  τάξης  $n$  και  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης. Θεωρούμε τους βαθμούς  $d_i(A) > 0$  για κάθε κορυφή  $v_i = 1, \dots, n$ , και  $k \in \mathbb{N}$ , με  $k \geq 2$ . Έστω,  $m_{v_i}^{(k)}(G)$  όπως ορίστηκε στη (3.5.1),  $k \in \mathbb{N}$ , με  $k \geq 2$ . Τότε

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{m_{v_i}^{(k+1)}(G)} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k]{m_{v_i}^{(k+1)}(G)} \right\}. \quad (3.5.3)$$

(i) Αν  $G$  είναι συνεκτικό γράφημα, τότε η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει, αν και μόνο αν  $m_{v_1}^{(2)}(G) = \dots = m_{v_n}^{(2)}(G)$ .

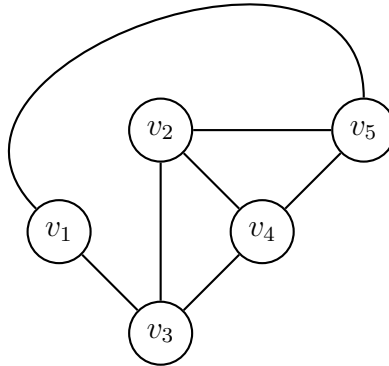
(ii) Αν το  $G$  είναι  $k$ -συνεκτικό, τότε η ισότητα και στα δύο μέλη ισχύει, αν και μόνο αν ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης του  $G$  είναι  $(k)$ -κυκλικός και  $m_{j_1}^{(2)}(G) = \dots = m_{j_{n_1}}^{(2)}(G)$ ,  $m_{j_{n_1+1}}^{(2)}(G) = \dots = m_{j_{n_1+n_2}}^{(2)}(G)$ ,  $\dots$ ,  $m_{j_{n_1+\dots+n_k+1}}^{(2)}(G) = \dots = m_{j_n}^{(2)}(G)$ , όπου τα  $k$  σύνολα δεικτών  $\{j_1, \dots, j_{n_1}\}$ ,  $\{j_{n_1+1}, \dots, j_{n_1+n_2}\}$ ,  $\dots$ ,  $\{j_{n_1+\dots+n_k+1}, \dots, j_n\}$  διαμορφώνουν τη διατεταγμένη διαμέριση των κορυφών  $\{1, \dots, n\}$ , η οποία περιγράφει την κυκλική δομή.

**Απόδειξη** Η απόδειξη είναι πανομοιότυπη με εκείνη του Θεωρήματος 3.2.5.

□

Ακολουθεί ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω φραγμάτων σε μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

**Παράδειγμα 3.3.** Έστω το μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G_1$ , του Σχήματος 2.1i, και  $A(G_1)$ , ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης.



Οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος, ήτοι τα αθροίσματα γραμμών του πίνακα γειτνίασης είναι  $d_1 = 2$ ,  $d_2(A) = 3$ ,  $d_3(A) = 3$ ,  $d_4(A) = 3$ ,  $d_5(A) = 3$ , και η φασματική ακτίνα  $\rho(A) = 2.8558$ .

Εφόσον το γράφημα δεν έχει απομονωμένες κορυφές και άρα  $d_i \geq 1$ , εφαρμόζουμε τον Ορισμό 3.5.1 και υπολογίζουμε τα average  $k$ -degree του  $G$  για ποικίλες τιμές του  $k$ , με εύρος από 2 έως 128. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.5 με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Με μπλε σημειώνεται το μέγιστο των average  $k$ -row sums της εκάστοτε δύναμης  $k$ , ενώ με απαλό μπλε το ελάχιστο, τα οποία φράσσουν τη φασματική ακτίνα άνω και κάτω, όπως διατυπώνεται στο Πρόσμα 3.2.7.

Πίνακας 3.5: Average  $k$ -degree

$k$	$\sqrt[k-1]{m_{v_1}^{(k)}(G)}$	$\sqrt[k-1]{m_{v_2}^{(k)}(G)}$	$\sqrt[k-1]{m_{v_3}^{(k)}(G)}$	$\sqrt[k-1]{m_{v_4}^{(k)}(G)}$	$\sqrt[k-1]{m_{v_5}^{(k)}(G)}$
2	3.0000	3.0000	2.6667	3.0000	2.6667
4	2.8845	2.8978	2.8020	2.8978	2.8020
8	2.8623	2.8711	2.8370	2.8711	2.8370
16	2.8576	2.8624	2.8480	2.8624	2.8480
32	2.8566	2.8589	2.8520	2.8589	2.8520
64	2.8562	2.8573	2.8539	2.8573	2.8539
128	2.8560	2.8565	2.8549	2.8565	2.8549

## Κεφάλαιο 4

# Γενικευμένα φράγματα φασματικής ακτίνας

### § 4.1 Γενικευμένα φράγματα φασματικής ακτίνας συναρτήσεως των $w_i^{(k)}(A)$

#### 4.1.1 Σχετική βιβλιογραφική επισκόπηση

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί ορισμένα φράγματα τα οποία αξιοποιούν τα αθροίσματα γραμμών, καθώς επίσης τα average  $k$ -row sums, όπως αυτά ορίστηκαν στην Πρόταση 3.1.4, προκειμένου να προσεγγίσουν τη φασματική ακτίνα, [DZ13], [XZ14], [LZ17]. Μάλιστα, ορισμένα από αυτά δύνανται να γενικευθούν.

Εν αρχή, παρουσιάζονται τα άνω φράγματα που πρότειναν οι Duan και Zhou, όπου αξιοποιούν τα αθροίσματα γραμμών και το μέγιστο στοιχείο της διαγωνίου και εκτός διαγωνίου του πίνακα, όπως διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.1.** [DZ13, Theorem 2.1.] Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με αθροίσματα γραμμών  $r_1, \dots, r_n$ , όπου  $r_1 \geq \dots \geq r_n$ . Έστω  $\mu$  να είναι το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\nu$  το μέγιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Θεωρούμε  $\nu > 0$ . Για  $1 \leq \ell \leq n$ , έστω

$$\Phi_\ell = \frac{r_\ell + \mu - \nu + \sqrt{(r_\ell - \mu + \nu)^2 + 4\nu \sum_{i=1}^{\ell-1} (r_i - r_\ell)}}{2}. \quad (4.1.1)$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \Phi_\ell \text{ για } 1 \leq \ell \leq n.$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $\rho(A) = \Phi_\ell$  αν και μόνο αν  $r_1 = \dots = r_n$  ή για κάποιο  $2 \leq t \leq \ell$ , ο  $A$  ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- (i)  $a_{ii} = \mu$  για  $1 \leq i \leq t - 1$ ,
- (ii)  $a_{ij} = \nu$  για  $1 \leq i \leq \ell - 1$ ,  $1 \leq k \leq t - 1$  με  $k \neq i$ ,
- (iii)  $r_t = \dots = r_n$ ,
- (iv)  $a_{ik} = \nu$  για  $\ell \leq i \leq n$  και  $1 \leq k \leq t - 1$ .

Τα φράγματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της Πρότασης 4.1.1 είναι αρκετά ικανοποιητικά, εν συγκρίσει με άλλα που ήταν γνωστά έως τότε στη βιβλιογραφία. Έπειτα, οι Xing και Zhou, ορμώμενοι από την ιδέα των Duan και Zhou, προτείνουν φράγματα για τη φασματική ακτίνα που υπολογίζονται σύμφωνα με την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.2.** [XZ14, Theorem 2.1.] Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με θετικά αθροίσματα γραμμών  $r_1, \dots, r_n$ , και με average 2-row sums  $m_1, \dots, m_n$  (Ορισμός 3.1.2), όπου  $m_1 \geq \dots \geq m_n$ . Έστω  $\mu$  να είναι το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\nu$  το μέγιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Θεωρούμε  $\nu > 0$ . Έστω  $b = \max \left\{ \frac{r_j(A)}{r_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n \right\}$ . Για  $1 \leq \ell \leq n$ , έστω

$$\phi_\ell = \frac{m_\ell + \mu - \nu b + \sqrt{(m_\ell - \mu + \nu b)^2 + 4\nu b \sum_{i=1}^{\ell-1} (m_i - m_\ell)}}{2}. \quad (4.1.2)$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \phi_\ell \text{ για } 1 \leq \ell \leq n.$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $\rho(A) = \phi_\ell$  για κάποιο  $\ell$ , με  $1 \leq \ell \leq n$  αν και μόνο εάν  $m_1 = \dots = m_n$  ή για κάποιο  $t$  με  $2 \leq t \leq \ell$ , ο  $A$  ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- (i)  $a_{ii} = \mu$  για  $1 \leq i \leq t - 1$ ,
- (ii)  $a_{ik} = \nu$  και  $\frac{r_k(A)}{r_i(A)} = b$  για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq t - 1$  και  $k \neq i$ ,
- (iii)  $m_t = \dots = m_n$ .

Μάλιστα, στο ίδιο άρθρο οι Xing και Zhou συγκρίνουν τα  $\phi_\ell$  με τα φράγματα  $\Phi_\ell$  των Duan και Zhou, μέσω παραδειγμάτων, όπου τα  $\phi_\ell$  φέρεται να είναι εγγύτερα στη φασματική ακτίνα από τα  $\Phi_\ell$ . Παρατηρήστε ότι στα φράγματα των Xing και Zhou τα αθροίσματα γραμμών  $r_i$  έχουν αντικατασταθεί από τα average 2-row sums,  $m_i$ , και το μέγιστο μη-διαγώνιο στοιχείο,  $\nu$ , που εμφανίζεται στον τύπο σταθμίζεται από την ποσότητα  $b$ .

Τέλος, κατά ανάλογο τρόπο με τους Xing και Zhou οι Lin και Zhou προτείνουν νέες ποσότητες και δημιουργούν φράγματα της φασματικής ακτίνας, όπου τη θέση των average 2-row sums



διαδέχονται τα average 3-row sums και τη διαφορά  $\mu - \nu b$  αντικαθιστά η ποσότητα  $\theta$ , τα οποία διατυπώνονται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.3.** [LZ17, Theorem 2.1.] Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με θετικά αθροίσματα γραμμών  $r_1, \dots, r_n$ , και με average 3-row sums  $s_1, \dots, s_n$  (Ορισμός 3.1.2), όπου  $s_1 \geq \dots \geq s_n$ . Έστω  $\mu$  να είναι το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο, και  $\nu$  το μέγιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Έστω  $b = \max \left\{ \frac{r_i(A)}{r_j(A)} : 1 \leq i, j \leq n \right\}$ , και  $\theta = \mu^2 + \nu^2(n-1) - 2\mu\nu b - (n-2)\nu^2 b$ . Θεωρούμε  $\nu > 0$  και τότε αν  $b = 1$ , τότε  $s_1 \geq \theta$ , ενώ αν  $b > 1$ , τότε  $s_1 > \theta$ . Για  $1 \leq \ell \leq n$ , έστω

$$\Phi_\ell = \frac{s_\ell + \theta + \sqrt{(s_\ell - \theta)^2 + 4(2\mu\nu + (n-2)\nu^2)b \sum_{k=1}^{\ell-1} (s_k - s_\ell)}}{2}. \quad (4.1.3)$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \sqrt{\Phi_\ell} \text{ για } 1 \leq \ell \leq n.$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $\rho(A) = \sqrt{\Phi_\ell}$  για κάποιο  $1 \leq \ell \leq n$ , αν και μόνο αν ικανοποιείται κάποια από τις παρακάτω συνθήκες:

- (i) αν  $\ell = 1$ , τότε  $m_1(A) = \dots = m_n(A)$ , όταν  $A^2$  είναι μη-αναγώγιμος, και  $PAP^T = \begin{pmatrix} 0_r & A_1 \\ A_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$  για κάποιον πίνακα μετάθεσης  $P$  με  $m_{\sigma(1)}(A) = \dots = m_{\sigma(r)}(A)$  και  $m_{\sigma(r+1)}(A) = \dots = m_{\sigma(n)}(A)$ , όταν ο  $A^2$  είναι αναγώγιμος, όπου  $\sigma$  είναι μία μετάθεση στο σύνολο  $\{1, \dots, n\}$  το οποίο αντιστοιχεί στον πίνακα μετάθεσης  $P$ ,
- (ii) αν  $2 \leq \ell \leq n$ , τότε  $s_1 = \dots = s_n$ .

Οι Lin και Zhou, προχωρούν σε σύγκριση των άνω φραγμάτων τους με εκείνα των Xing και Zhou, χωρίς όμως να αποφανθούν ποια είναι εγγύτερα στη φασματική ακτίνα.

Οι Duan και Zhou, διατύπωσαν την ακόλουθη πρόταση για τα κάτω φράγματα της φασματικής ακτίνας, σχολιάζοντας μάλιστα και τις περιπτώσεις ισότητας, κατά ανάλογο τρόπο με τα άνω φράγματα, με τη διαφορά ότι πλέον γίνεται αξιοποίηση του ελάχιστου στοιχείου της διαγωνίου και εκτός διαγωνίου του πίνακα.

**Πρόταση 4.1.4.** [DZ13, Theorem 2.2.] Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με αθροίσματα γραμμών  $r_1, \dots, r_n$ , όπου  $r_1 \geq \dots \geq r_n$ . Έστω  $s$  να είναι το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\tau$  το ελάχιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Έστω

$$\phi_n = \frac{r_n + s - \tau + \sqrt{(r_n - s + \tau)^2 + 4\tau \sum_{i=1}^{n-1} (r_i - r_n)}}{2}. \quad (4.1.4)$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \phi_n.$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $\rho(A) = \phi_n$ , αν και μόνο αν  $r_1 = \dots = r_n$  ή  $\tau > 0$ , και για κάποιο  $2 \leq t \leq n$ , ο  $A$  ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- (i)  $a_{ii} = s$  για  $1 \leq i \leq t - 1$ ,
- (ii)  $a_{ik} = \tau$  για  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $1 \leq k \leq t - 1$  με  $k \neq i$ ,
- (iii)  $r_t = \dots = r_n$ ,
- (iv)  $a_{nk} = \tau$  για  $1 \leq k \leq t - 1$ .

Ακολουθούν τα κάτω φράγματα των Xing και Zhou οι οποίοι, ορμώμενοι από την ιδέα των Duan και Zhou, αναφορικά με τα κάτω φράγματα αυτή τη φορά, προτείνουν τα εξής φράγματα, τα οποία μάλιστα φαίνεται μέσα από παραδείγματα να είναι πλησιέστερα της φασματικής ακτίνας σε σχέση με τα προαναφερθέντα.

**Πρόταση 4.1.5.** [XZ14, Theorem 2.3.] Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με θετικά αθροίσματα γραμμών  $r_1, \dots, r_n$ , και με average 2-row sums  $m_1, \dots, m_n$  (Ορισμός 3.1.2), όπου  $m_1 \geq \dots \geq m_n$ . Έστω  $s$  να είναι το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\tau$  το ελάχιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Έστω  $q = \min \left\{ \frac{r_j(A)}{r_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n \right\}$ . Έστω

$$\psi_n = \frac{m_n + s - \tau q + \sqrt{(m_n - s + \tau q)^2 + 4\tau q \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_n)}}{2}. \quad (4.1.5)$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \psi_n.$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $\rho(A) = \psi_n$ , αν και μόνο αν  $m_1 = \dots = m_n$  ή  $\tau > 0$  και για κάποιο  $t$  με  $2 \leq t \leq n$ , ο  $A$  ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

- (i)  $a_{ii} = s$  για  $1 \leq i \leq t - 1$ ,
- (ii)  $a_{ik} = \tau$ , και  $\frac{r_k(A)}{r_i(A)} = q$  για  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq k \leq t - 1$  και  $k \neq i$ ,
- (iii)  $m_t = \dots = m_n$ .

Τέλος, οι Lin και Zhou, κατά ανάλογο τρόπο με τους Xing και Zhou, προτείνουν νέα ποσότητα, όπου πλέον, τη θέση των average 2-row sums διαδέχονται τα average 3-row sums και τη διαφορά  $s - \tau q$  αντικαθιστά η ποσότητα  $\gamma$ .

**Πρόταση 4.1.6.** [LZ17, Theorem 2.3.] Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με θετικά αθροίσματα γραμμών  $r_1, \dots, r_n$ , και με average 3-row sums  $s_1, \dots, s_n$  (Ορισμός 3.1.2), όπου  $s_1 \geq \dots \geq s_n$ . Έστω  $s$  να είναι το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\tau$  το ελάχιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Έστω  $q = \min \left\{ \frac{r_i(A)}{r_j(A)} : 1 \leq i, j \leq n \right\}$ , και  $\gamma = s^2 + (n-1)\tau^2 - 2s\tau q - (n-2)\tau^2 q$ . Θεωρούμε  $s_n > \gamma$ . Έστω

$$\phi_n = \frac{s_n + \gamma + \sqrt{(s_n - \gamma)^2 + 4(2s\tau + (n-2)\tau^2)q \sum_{k=1}^{n-1} (s_k - s_n)}}{2}. \quad (4.1.6)$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \sqrt{\phi_n}.$$

Επιπλέον, αν ο  $A$  είναι μη-αναγώγιμος, τότε  $\rho(A) = \sqrt{\phi_n}$ , αν και μόνο αν ικανοποιείται κάποια από τις παρακάτω συνθήκες:

- (i) αν  $\tau = 0$ , τότε  $m_1(A) = \dots = m_n(A)$  όταν  $A^2$  είναι μη-αναγώγιμος, και  $PAP^T = \begin{pmatrix} 0_r & A_1 \\ A_2 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$  για κάποιον πίνακα μετάθεσης  $P$  με  $m_{\sigma(1)}(A) = \dots = m_{\sigma(r)}(A)$  και  $m_{\sigma(r+1)}(A) = \dots = m_{\sigma(n)}(A)$ , όταν ο  $A^2$  είναι αναγώγιμος, όπου  $\sigma$  είναι μία μετάθεση στο σύνολο  $\{1, \dots, n\}$  το οποίο αντιστοιχεί στον πίνακα μετάθεσης  $P$ ,
- (ii) αν  $\tau > 0$ , τότε  $s_1 = \dots = s_n$ .

Οι Lin και Zhou, προχωρούν σε σύγκριση των κάτω φραγμάτων τους με εκείνα των Xing και Zhou, χωρίς όμως να αποφανθούν ποια είναι εγγύτερα στη φασματική ακτίνα, μάλιστα τα χαρακτηρίζουν ασύγκριτα. Ας δούμε στη συνέχεια πώς αυτά μπορούν να γενικευθούν και έπειτα θα προχωρήσουμε σε μία πιο εμπειριστατωμένη σύγκριση και ερμηνεία αυτών.

Σε αυτή την ενότητα, παρουσιάζονται νέα φράγματα της φασματικής ακτίνας μέσα από τη γενίκευση των άνω φραγμάτων των Προτάσεων 4.1.2, 4.1.3 και των κάτω φραγμάτων των Προτάσεων 4.1.5, 4.1.6.

Προτού διατυπωθούν τα θεωρήματα των εν λόγω φραγμάτων, γίνεται γενίκευση των επιμέρους μεγεθών που τα συνθέτουν. Έχει ήδη συζητηθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, πώς τα average 2-row sums και average 3-row sums, γενικεύονται σε average  $k$ -row sums, (3.1.4). Στο θεώρημα που ακολουθεί διατυπώνεται και αποδεικνύεται ο γενικός τύπος των εκφράσεων  $\mu - \nu b$  της Πρότασης 4.1.2 και του αντίστοιχου  $s - \tau q$  της Πρότασης 4.1.5 για το κάτω φράγμα, καθώς και οι ποσότητες  $\theta$  και  $\gamma$  των Προτάσεων 4.1.3 και 4.1.6 αντίστοιχα.

**Θεώρημα 4.1.7.** Έστω  $B(x, y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^+$  ορίζεται ως

$$B(x, y) = yJ_n + (x - y)I_n, \quad (4.1.7)$$

όπου  $J_n$  είναι ένας  $n \times n$  πίνακας, όπου όλα τα στοιχεία του ισούνται με την μονάδα 1 και  $I_n$  είναι  $n \times n$  μοναδιαίος πίνακας. Τα στοιχεία του  $B^k(x, y) = (b_{ij}^{(k)}(x, y))_{i,j=1}^n$  δίνονται από τους εξής τύπους

$$b_{ii}^{(k)}(x, y) = \beta_1^{(k)}(x, y) = \frac{1}{n} \left( (x + (n-1)y)^k + (n-1)(x-y)^k \right), \quad (4.1.8)$$

$$b_{ij}^{(k)}(x, y) = \beta_2^{(k)}(x, y) = \frac{1}{n} \left( (x + (n-1)y)^k - (x-y)^k \right), \quad (4.1.9)$$

για  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $j \neq i$ .

Επιπλέον, για  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $A \geq 0$  ισχύει

$$B^k(s, \tau) \leq A^k \leq B^k(\mu, \nu), \quad (4.1.10)$$

όπου  $\mu$  είναι το μέγιστο στοιχείο της διαγωνίου και  $\nu$  το μέγιστο των στοιχείων εκτός της διαγωνίου του πίνακα  $A$ , και  $s$  είναι το ελάχιστο στοιχείο της διαγωνίου και  $\tau$  το ελάχιστο των στοιχείων εκτός της διαγωνίου του πίνακα  $A$ .

**Απόδειξη** Έστω  $A$  ένας  $n \times n$  μη-αρνητικός πίνακας και  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Θεωρώ τον  $n \times n$  πίνακα  $B$ , όπου  $\beta_{ij} = x$ ,  $\forall i = j$ , αλλιώς  $\beta_{ij} = y$ . Επομένως, ο πίνακας  $B$  είναι της μορφής:

$$B = \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{pmatrix}$$

Ο  $B$  είναι συμμετρικός, συνεπώς εφαρμόζοντας το φασματικό θεώρημα διαγωνοποιείται από διαγώνιο πραγματικό πίνακα  $D$ , και πίνακα ομοιότητας έναν ορθογώνιο πίνακα  $V$ , και η διαγώνια μορφή του είναι:  $B = VDV^{-1}$ .

Αναζητώ τις ιδιοτιμές του πίνακα  $B$ , οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα  $\det(B - \lambda_i I) = 0$ , ήτοι

$$\det \begin{vmatrix} x - \lambda & y & \cdots & y \\ y & x - \lambda & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Αφαιρώ την  $1^{\eta}$  γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές,  $-r_1 + r_i \rightarrow r_i$ ,  $\forall 1 < i \leq n$ , οπότε το σύστημα μετασχηματίζεται:

$$\det \begin{vmatrix} x - \lambda & y & \cdots & y \\ y - x + \lambda & x - y - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y - x + \lambda & 0 & \cdots & x - y - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Έπειτα, αθροίζω όλες τις στήλες  $c_j$  στην πρώτη στήλη:  $c_1 + c_j \rightarrow c_1$ ,  $\forall 1 < j \leq n$ . Το σύστημα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\det \begin{vmatrix} x + (n-1)y - \lambda & y & \cdots & y \\ 0 & x - y - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x - y - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies \chi_B(\lambda) = [x + (n-1)y - \lambda][x - y - \lambda]^{n-1}$$

Άρα

$$\sigma(B) = \{x + (n-1)y, x - y\},$$

όπου  $\lambda_1 = x + (n-1)y$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\nu_1 = 1$ , και  $\lambda_2 = x - y$  με αλγεβρική πολλαπλότητα  $\nu_2 = n - 1$ .

Επειδή ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος, οι αντίστοιχες γεωμετρικές πολλαπλότητες είναι:

$$\dim(V(x - (n-1)y)) = \nu_1 = 1, \text{ και } \dim(V(x - y)) = \nu_2 = n - 1$$

Για  $\lambda_1 = x + (n-1)y$ ,  $V(\lambda_1) = \{v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : (B - \lambda_1 I)v = 0\}$

$$\left[ \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x - (n-1)y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x - (n-1)y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x - (n-1)y \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -(n-1)y & y & \cdots & y \\ y & -(n-1)y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & -(n-1)y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Προφανώς,  $v_1 = v_2 = \cdots = v_n$ . Εκφράζω όλες τις συντεταγμένες συναρτήσει της  $v_n$ ,  $v_i = v_n$ ,  $1 \leq i < n$ , όπως φαίνεται στη συνέχεια

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n \\ v_n \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_n \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,  $V(x + (n-1)y) = \{v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : (1 \ 1 \ \cdots \ 1)^T v_n, v_n \in \mathbb{R}\}$ .

Για  $\lambda_2 = x - y$ ,  $V(\lambda_2) = \{v \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) : (B - \lambda_2 I)v = 0\}$

$$\left[ \begin{pmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x + y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -x + y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x + y \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} y & y & \cdots & y \\ y & y & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & \cdots & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Προκύπτει,  $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ . Λύνω ως προς  $-v_1 = v_2 + v_3 + \dots + v_n$ ,

$$v = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 + v_3 + \dots + v_n \\ -v_2 \\ -v_3 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επομένως,  $V(x - y) = \{v \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) : (1 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0)^T v_2 + (1 \ 0 \ -1 \ \dots \ 0)^T v_3 + (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ -1)^T v_n, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}$

Από τον ιδιόχωρο  $V(x + (n - 1)y)$  επιλέγω το διάνυσμα για  $v_n = 1$ , και το τοποθετώ στην  $1^{\eta}$  στήλη του πίνακα  $V$ . Από τον ιδιόχωρο  $V(x - y)$  επιλέγω τα διανύσματα που προκύπτουν για τις τιμές των παραμέτρων  $v_2 = v_3 = \dots = v_n = 1$ , και τα τοποθετώ στήλες στον  $V$ . Άρα, ο πίνακας  $V$  είναι της μορφής:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή ο  $B$  είναι διαγωνοποιήσιμος, ο  $V$  είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφός του είναι της μορφής:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{-(n-1)}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{-(n-1)}{n} & \ddots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{-(n-1)}{n} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2)$ . Συνεπώς, η διαγωνοποίηση του  $B$  γράφεται:  $B = VDV^{-1}$ .

Ακόμη, έχουμε ότι

$$B^k = \underbrace{VDV^{-1}VDV^{-1} \dots VDV^{-1}}_k = VD^kV^{-1}.$$

Μετά από στοιχειώδεις πράξεις ο  $B^k$  είναι της μορφής:

$$B^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\lambda_1^k + \frac{n-1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \cdots & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k \\ \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k + \frac{n-1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \cdots & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k \\ \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k + \frac{n-1}{n}\lambda_2^k & \ddots & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \cdots & \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k & \frac{1}{n}\lambda_1^k + \frac{n-1}{n}\lambda_2^k \end{pmatrix} \quad (4.1.11)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές στη σχέση (4.1.11) τα διαγώνια στοιχεία του  $B^k$ ,  $b_{ii}^{(k)}$ , είναι της μορφής

$$\begin{aligned} b_{ii}^{(k)}(x, y) &= \frac{1}{n}\lambda_1^k + \frac{n-1}{n}\lambda_2^k \\ &= \frac{1}{n} \left( (x + (n-1)y)^k + (n-1)(x-y)^k \right), \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

και τα μη-διαγώνια στοιχεία  $b_{ij}^{(k)}$ ,  $i \neq j$  είναι της μορφής

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(k)}(x, y) &= \frac{1}{n}\lambda_1^k - \frac{1}{n}\lambda_2^k \\ &= \frac{1}{n} \left( (x + (n-1)y)^k - (x-y)^k \right). \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

□

Από το παραπάνω θεώρημα, για  $k = 2$  και  $k = 3$ , προκύπτουν οι αντίστοιχες ποσότητες των Προτάσεων 4.1.2, 4.1.3, 4.1.5, 4.1.6, όπως φαίνεται στο πόρισμα που ακολουθεί.

**Πόρισμα 4.1.8.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ . Έστω  $\mu$  να είναι το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\nu$  το μέγιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ , με  $\nu > 0$ . Έστω  $s$  να είναι το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\tau$  το ελάχιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Οι ποσότητες  $b$  και  $q$  δίνονται

$$b = \max \left\{ \frac{r_j(A)}{r_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \right\}, \quad \text{και} \quad q = \min \left\{ \frac{r_j(A)}{r_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \right\}.$$

Θεωρούμε τις ποσότητες

$$\gamma = \beta_1^{(k-1)}(\mu, \nu) - b\beta_2^{(k-1)}(\mu, \nu), \quad (4.1.14)$$



και

$$\delta = \beta_1^{(k-1)}(s, \tau) - q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau), \quad (4.1.15)$$

με  $\beta_1^{(k-1)}(\mu, \nu)$ ,  $\beta_2^{(k-1)}(\mu, \nu)$ ,  $\beta_1^{(k-1)}(s, \tau)$ ,  $\beta_2^{(k-1)}(s, \tau)$  όπως ορίζονται στις σχέσεις (4.1.8), (4.1.9).

Παρατηρήστε ότι, για  $k = 2$ , οι σχέσεις (4.1.14) και (4.1.15) μετασχηματίζονται

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta_1^{(1)}(\mu, \nu) - b\beta_2^{(1)}(\mu, \nu) \\ &= \frac{1}{n} ((\mu + (n-1)\nu)^1 + (n-1)(\mu - \nu)^1) - b\frac{1}{n} ((\mu + (n-1)\nu)^1 - (\mu - \nu)^1) \\ &= \frac{1}{n}(n\mu - nb\nu) = \mu - \nu b, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο της έκφρασης  $\mu - \nu b$  της Πρότασης 4.1.2, και

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{n} ((s + (n-1)\tau)^1 + (n-1)(s - \tau)^1) - q\frac{1}{n} ((s + (n-1)\tau)^1 - (s - \tau)^1) \\ &= s - \tau q \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο της έκφρασης  $s - \tau q$  της Πρότασης 4.1.5.

Για  $k = 3$ , οι σχέσεις (4.1.14) και (4.1.15) μετασχηματίζονται

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta_1^{(2)}(\mu, \nu) - b\beta_2^{(2)}(\mu, \nu) \\ &= \frac{1}{n} ((\mu + (n-1)\nu)^2 + (n-1)(\mu - \nu)^2) - b\frac{1}{n} ((\mu + (n-1)\nu)^2 - (\mu - \nu)^2) \\ &= \mu^2 + \nu^2(n-1) - 2\mu\nu b - (n-2)\nu^2 b, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο της ποσότητας  $\theta$  της Πρότασης 4.1.3, και

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{n} ((s + (n-1)\tau)^2 + (n-1)(s - \tau)^2) - q\frac{1}{n} ((s + (n-1)\tau)^2 - (s - \tau)^2) \\ &= s^2 + \tau^2(n-1) - 2s\tau q - (n-2)s^2 q, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο της ποσότητας  $\gamma$  της Πρότασης 4.1.6.

### 4.1.2 Γενικευμένα άνω φράγματα

Έχοντας γενικεύσει όλες τις επιμέρους ποσότητες των Προτάσεων 4.1.2, 4.1.3, προχωράμε στη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος των γενικευμένων άνω φραγμάτων της φασματικής, εφεξής  $Z_\ell^{(k)}$ .

**Θεώρημα 4.1.9.** Έστω  $A = [a_{ij}] \geq 0$ ,  $n \times n$  πίνακας με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , και average  $k$ -row sums  $w_i^{(k)}(A)$  όπως ορίζονται στην (3.1.4) έτσι ώστε  $w_1^{(k)}(A) \geq w_2^{(k)}(A) \geq \dots \geq w_n^{(k)}(A)$ . Έστω  $\mu$  να είναι το μέγιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\nu$  το μέγιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ , με  $\nu > 0$ . Έστω  $b = \max \left\{ \frac{r_j(A)}{r_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \right\}$ , και

$$\gamma = \beta_1^{(k-1)}(\mu, \nu) - b\beta_2^{(k-1)}(\mu, \nu), \quad (4.1.16)$$

με  $\beta_1^{(k-1)}, \beta_2^{(k-1)}$ , όπως ορίζονται στις σχέσεις (4.1.8), (4.1.9). Θεωρούμε  $w_1^{(k)}(A) \geq \gamma$  και

$$Z_\ell^{(k)} = \frac{1}{2} \left( w_\ell^{(k)}(A) + \gamma + \sqrt{\Delta_\ell} \right), \quad \ell = 1, \dots, n, \quad (4.1.17)$$

όπου

$$\Delta_\ell = (w_\ell^{(k)}(A) - \gamma)^2 + 4b\beta_2^{(k-1)} \sum_{j=1}^{\ell-1} (w_j^{(k)}(A) - w_\ell^{(k)}(A)). \quad (4.1.18)$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \min \{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} : 1 \leq \ell \leq n \}. \quad (4.1.19)$$

**Απόδειξη** Προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, θεωρούμε  $r_i = r_i(A)$  και  $w_i = w_i(A)$  για  $1 \leq i \leq n$ .

Αν  $\ell = 1$ , τότε  $Z_1^{(k)} = \frac{1}{2} \left( w_1^{(k)} + \gamma + \sqrt{(w_1^{(k)} - \gamma)^2} \right) = \frac{w_1^{(k)} + \gamma + |w_1^{(k)} - \gamma|}{2} = w_1^{(k)}$ , και επομένως τα αποτελέσματα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.2.7.

Έστω  $2 \leq \ell \leq n$ . Αν  $b = 1$ , τότε  $r_1 = \dots = r_n$ , και άρα εξ'ορισμού,  $w_1^{(k)} = \dots = w_n^{(k)}$ . Επειδή  $w_1^{(k)} \geq \gamma$ , έχουμε  $Z_\ell^{(k)} = Z_1 = \frac{w_1^{(k)} + \gamma + |w_1^{(k)} - \gamma|}{2} = w_1^{(k)}$ . Από τη Πρόταση 3.1.4,

$$\rho(A) = r_1 = \sqrt[k-1]{w_1^{(k)}} = \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}}.$$

Υποθετίστω ότι  $b > 1$ .

Έστω  $U = \text{diag}(x_1 r_1, \dots, x_{\ell-1} r_{\ell-1}, r_\ell, \dots, r_n)$ , όπου  $x_i \geq 1$  είναι μία μεταβλητή που θα προσδιοριστεί στην πορεία για  $1 \leq i \leq \ell - 1$ . Έστω  $B = U^{-1} A^{k-1} U$ . Προφανώς,  $A^{k-1}$  και  $B$  έχουν

τις ίδιες ιδιοτιμές. Τότε

$$\rho(A) = \sqrt[k-1]{\rho(A^{k-1})} = \sqrt[k-1]{\rho(B)}.$$

Για  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , επειδή (4.1.8),  $\frac{r_s}{r_i} \leq b$  για  $1 \leq s \leq \ell - 1$  και  $s \neq i$ , και (4.1.9), έχουμε

$$\begin{aligned} r_i(B) &= r_i(U^{-1}A^{k-1}U) = \frac{1}{r_i x_i} \left( \sum_{s=1}^{\ell-1} a_{is}^{(k-1)} r_s x_s + \sum_{s=\ell}^n a_{is}^{(k-1)} r_s \right) \\ &= \frac{1}{x_i} \left( \sum_{s=1}^{\ell-1} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_i} (x_s - 1) + \frac{1}{r_i} \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k-1)} r_s \right) \\ &= \frac{1}{x_i} \left( \sum_{\substack{1 \leq s \leq \ell-1 \\ s \neq i}} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_i} (x_s - 1) + a_{ii}^{(k-1)} (x_i - 1) + w_i^{(k)} \right) \\ &\leq \frac{1}{x_i} \left( b\beta_2^{(k-1)} \sum_{\substack{1 \leq s \leq \ell-1 \\ s \neq i}} (x_s - 1) + \beta_1^{(k-1)} (x_i - 1) + w_i^{(k)} \right) \\ &= \frac{1}{x_i} \left( b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (x_s - 1) + (\beta_1^{(k-1)} - b\beta_2^{(k-1)}) (x_i - 1) + w_i^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Για  $\ell \leq i \leq n$ , επειδή  $w_i^{(k)} \leq w_\ell^{(k)}$ ,  $\frac{r_s}{r_i} \leq b$  για  $1 \leq s \leq \ell - 1$ , (4.1.8) και (4.1.9), έχουμε

$$\begin{aligned} r_i(B) &= r_i(U^{-1}A^{k-1}U) = \frac{1}{r_i} \left( \sum_{s=1}^{\ell-1} a_{is}^{(k-1)} r_s x_s + \sum_{s=\ell}^n a_{is}^{(k-1)} r_s \right) \\ &= \sum_{s=1}^{\ell-1} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_i} (x_s - 1) + \frac{1}{r_i} \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k-1)} r_s \\ &= \sum_{s=1}^{\ell-1} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_i} (x_s - 1) + w_i^{(k)} \\ &\leq b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (x_s - 1) + w_\ell^{(k)} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Για  $1 \leq \ell \leq n$ , από την έκφραση του  $Z_\ell^{(k)}$ , έχουμε

$$(Z_\ell^{(k)})^2 - Z_\ell^{(k)}(w_\ell^{(k)} + \gamma) + w_\ell^{(k)}\gamma - b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)}) = 0, \quad (4.1.22)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (w_\ell^{(k)} + \gamma)^2 - 4(w_\ell^{(k)}\gamma - b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)})) \\
 &= (w_\ell^{(k)})^2 + \gamma^2 - 2w_\ell^{(k)}\gamma + 4b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)}) \\
 &= (w_\ell^{(k)} - \gamma)^2 + 4b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)}). \tag{4.1.23}
 \end{aligned}$$

Επειδή  $w_s^{(k)} \geq w_\ell^{(k)}$ , είναι προφανές ότι  $\Delta > 0$ . Επομένως το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες εκ των οποίων η θετική ρίζα γράφεται

$$Z_\ell^{(k)} = \frac{w_\ell^{(k)} + \gamma + \sqrt{(w_\ell^{(k)} - \gamma)^2 + 4b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)})}}{2}, \tag{4.1.24}$$

και από την (4.1.22) μπορούμε να γράψουμε:

$$b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)}) = (Z_\ell^{(k)})^2 - Z_\ell^{(k)}(w_\ell^{(k)} + \gamma) + w_\ell^{(k)}\gamma = (Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)})(Z_\ell^{(k)} - \gamma) \tag{4.1.25}$$

Αν  $\sum_{s=1}^{\ell-1} (w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)}) > 0$ , τότε  $(Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)})(Z_\ell^{(k)} - \gamma) > 0$ , και  $Z_\ell^{(k)} \geq \frac{w_\ell^{(k)} + \gamma + |w_\ell^{(k)} - \gamma|}{2} = w_\ell^{(k)}, Z_\ell^{(k)} > \gamma$ . Για  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , έστω  $x_i = 1 + \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma}$ . Προφανώς,  $x_i \geq 1$  και από την αντικατάσταση της έκφρασης του  $x_i$  και την (4.1.25), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 b\beta_1^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} (x_s - 1) &= b\beta_2^{(k-1)} \sum_{s=1}^{\ell-1} \left(1 + \frac{w_s^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma} - 1\right) \\
 &= \frac{(Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)})(Z_\ell^{(k)} - \gamma)}{Z_\ell^{(k)} - \gamma} \\
 &= Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)} \tag{4.1.26}
 \end{aligned}$$

Επομένως, για  $1 \leq i \leq \ell - 1$ , από την αντικατάσταση της έκφρασης του  $x_i$  και της (4.1.26) στην (4.1.20)

$$\begin{aligned}
 r_i(B) &\leq \left( Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)} + (\beta_1^{(k-1)} - \beta_2^{(k-1)})b \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma} + w_i^{(k)} \right) \frac{1}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma}} \\
 &= \frac{Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)} + \gamma \left( \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma} \right) + w_i^{(k)} + \gamma - \gamma}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma}} \\
 &= \frac{Z_\ell^{(k)} + w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)} - \gamma}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma}} + \frac{\gamma \left( 1 + \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma} \right)}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)}}{Z_\ell^{(k)} - \gamma}} \\
 &= \frac{Z_\ell^{(k)} + w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)} - \gamma}{\frac{Z_\ell^{(k)} + w_i^{(k)} - w_\ell^{(k)} - \gamma}{Z_\ell^{(k)} - \gamma}} + \gamma \\
 &= Z_\ell^{(k)} - \gamma + \gamma \\
 &= Z_\ell^{(k)}
 \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

και για  $\ell \leq i \leq n$ , από αντικατάσταση της (4.1.26) στην (4.1.21),

$$r_i(B) \leq Z_\ell^{(k)} - w_\ell^{(k)} + w_i^{(k)} \leq Z_\ell^{(k)} \tag{4.1.28}$$

Όθεν,

$$\rho(A) = \sqrt[k-1]{\rho(B)} \leq \sqrt[k-1]{\max_{1 \leq i \leq n} r_i(B)} \leq \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}}.$$

□

### 4.1.3 Γενικευμένα κάτω φράγματα

Έχοντας γενικεύσει όλες τις επιμέρους ποσότητες των Προτάσεων 4.1.5, 4.1.6, προχωράμε στη διατύπωση και απόδειξη του Θεωρήματος των γενικευμένων κάτω φραγμάτων της φασματικής, εφεξής  $z_n^{(k)}$ .

**Θεώρημα 4.1.10.** Έστω  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  με αθροίσματα γραμμών  $r_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , και average  $k$ -row sums  $w_i^{(k)}(A)$  όπως ορίζονται στη σχέση (3.1.4) έτσι ώστε  $w_1^{(k)}(A) \geq w_2^{(k)}(A) \geq \dots \geq w_n^{(k)}(A)$ . Έστω  $s$  να είναι το ελάχιστο διαγώνιο στοιχείο και  $\tau$  το ελάχιστο μη-διαγώνιο στοιχείο του  $A$ . Συμβολίζεται με  $q$  η ποσότητα  $q = \min \left\{ \frac{r_j(A)}{r_i(A)} : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \right\}$ , και

$$\delta = \beta_1^{(k-1)}(s, \tau) - q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \quad (4.1.29)$$

με  $\beta_1^{(k-1)}(s, \tau), \beta_2^{(k-1)}(s, \tau)$ , όπως ορίζονται στις σχέσεις (4.1.8), (4.1.9). Θεωρούμε  $w_n^{(k)}(A) \geq \delta$  και

$$z_n^{(k)} = \frac{1}{2} \left( w_n^{(k)}(A) + \delta + \sqrt{\Delta_n} \right), \quad (4.1.30)$$

όπου

$$\Delta_n = (w_n^{(k)}(A) - \delta)^2 + 4q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{j=1}^{n-1} (w_j^{(k)}(A) - w_n^{(k)}(A)). \quad (4.1.31)$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}. \quad (4.1.32)$$

**Απόδειξη** Προκειμένου να απλοποιηθούν οι υπολογισμοί, θεωρούμε  $r_i = r_i(A)$  και  $w_i = w_i(A)$  για  $1 \leq i \leq n$ .

Αν  $\tau = 0$ , τότε  $z_n^{(k)} = \frac{1}{2}(w_n^{(k)} + \delta + \sqrt{(w_n^{(k)} - \delta)^2}) = \frac{w_n^{(k)} + \delta + |w_n^{(k)} - \delta|}{2} = w_n^{(k)}$ , και επομένως τα αποτελέσματα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.2.7.

Έστω  $U = \text{diag}(x_1 r_1, \dots, x_{n-1} r_{n-1}, r_n)$ , όπου  $x_i \geq 1$  είναι μία μεταβλητή που θα προσδιοριστεί στην πορεία για  $1 \leq i \leq n-1$ . Έστω  $B = U^{-1} A^{k-1} U$ . Προφανώς,  $A^{k-1}$  και  $B$  έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Τότε  $\rho(A) = \sqrt[k-1]{\rho(A^{k-1})} = \sqrt[k-1]{\rho(B)}$  Για  $1 \leq i \leq n-1$ , επειδή (4.1.8),  $\frac{r_s}{r_i} \geq q$  για  $1 \leq s \leq n-1$  και  $s \neq i$ , και (4.1.9), έχουμε

$$\begin{aligned} r_i(B) &= r_i(U^{-1} A^{k-1} U) = \frac{1}{r_i x_i} \left( \sum_{s=1}^{n-1} a_{is}^{(k-1)} r_s x_s + a_{is}^{(k-1)} r_n \right) \\ &= \frac{1}{x_i} \left( \sum_{s=1}^{n-1} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_i} (x_s - 1) + \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k-1)} r_s \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x_i} \left( \sum_{\substack{1 \leq s \leq n-1 \\ s \neq i}} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_i} (x_s - 1) + a_{ii}^{(k-1)} (x_i - 1) + w_i^{(k)} \right) \\
 &\geq \frac{1}{x_i} \left( q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{\substack{1 \leq s \leq n-1 \\ s \neq i}} (x_s - 1) + \beta_1^{(k-1)}(s, \tau) (x_i - 1) + w_i^{(k)} \right) \quad (4.1.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{x_i} \left( q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{s=1}^{n-1} (x_s - 1) + (\beta_1^{(k-1)}(s, \tau) - q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau)) (x_i - 1) + \right. \\
 &\quad \left. + w_i^{(k)} \right) \quad (4.1.34)
 \end{aligned}$$

Παρομοίως, έχουμε

$$r_n(B) = \sum_{s=1}^{n-1} a_{is}^{(k-1)} \frac{r_s}{r_n} (x_s - 1) + \frac{1}{r_n} \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k-1)} r_s \quad (4.1.35)$$

$$\leq q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{s=1}^{n-1} (x_s - 1) + w_n^{(k)} \quad (4.1.36)$$

Από την έκφραση του  $z_n^{(k)}$ , παίρνουμε  $z_n^{(k)} \geq \frac{w_n^{(k)} + \delta + |w_n^{(k)} - \delta|}{2} = w_n^{(k)} \geq \delta$ . Για  $1 \leq i \leq n-1$ , έστω  $x_i = 1 + \frac{w_i^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta}$ . Προφανώς,  $x_i \geq 1$  and

$$q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{s=1}^{n-1} (x_s - 1) = q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{s=1}^{n-1} \left( 1 + \frac{w_s^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta} - 1 \right) = z_n^{(k)} - w_n^{(k)}$$

Επομένως, για  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned}
 r_i(B) &\geq \frac{z_n^{(k)} - w_n^{(k)} + \delta \left( \frac{w_i^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta} \right) + w_i^{(k)} + \delta - \delta}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta}} \\
 &= \frac{z_n^{(k)} + w_i^{(k)} - w_n^{(k)} - \delta}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta}} + \frac{\delta \left( 1 + \frac{w_i^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta} \right)}{1 + \frac{w_i^{(k)} - w_n^{(k)}}{z_n^{(k)} - \delta}} \\
 &= \frac{z_n^{(k)} + w_i^{(k)} - w_n^{(k)} - \delta}{\frac{z_n^{(k)} + w_i^{(k)} - w_n^{(k)} - \delta}{z_n^{(k)} - \delta}} + \delta \\
 &= z_n^{(k)} - \delta + \delta = z_n^{(k)}, \quad (4.1.37)
 \end{aligned}$$

και

$$r_i(B) \geq z_n^{(k)} - w_n^{(k)} + w_n^{(k)} = z_n^{(k)}. \quad (4.1.38)$$

Όθεν,

$$\rho(A) = \sqrt[k-1]{\rho(B)} \geq \sqrt[k-1]{\min_{1 \leq i \leq n} r_i(B)} \geq \sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}.$$

□

**Πρόταση 4.1.11.** Έστω  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  είναι μη-αναγώγιμος πίνακας και έστω οι ποσότητες  $s, \tau, \delta, z_n^{(k)}, q$  και  $r_i(A), w_i^{(k)}(A), i = 1, \dots, n$ , όπως ορίστηκαν στο Θεώρημα 4.1.10 και ικανοποιούν τις προϋποθέσεις. Τότε

$$\rho(A) = \sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$$

για κάποιο  $\ell = 1, \dots, n$ , αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

- (i) Αν  $\tau = 0$ , τότε  $w_1^{(2)}(A) = \dots = w_n^{(2)}(A)$ , όταν  $A^{k-1}$  είναι μη-αναγώγιμος. Ειδιάλλως, αν  $A^{k-1}$  είναι αναγώγιμος, τότε  $w_{j_1}^{(2)}(A) = \dots = w_{j_{n_1}}^{(2)}(A)$ ,  $w_{j_{n_1}+1}^{(2)}(A) = \dots = w_{j_{n_1}+n_2}^{(2)}(A)$ ,  $\dots$ ,  $w_{j_{n_1}+\dots+n_{k-2}+1}^{(2)}(A) = \dots = w_{j_n}^{(2)}(A)$ , όπου τα  $k-1$  σύνολα των δεικτών  $\{j_1, \dots, j_{n_1}\}, \{j_{n_1+1}, \dots, j_{n_2}\}, \dots, \{j_{n_1+\dots+n_{k-2}+1}, \dots, j_n\}$  διαμορφώνουν τη διαμέριση των  $\{1, \dots, n\}$  η οποίς περιγράφει τη διαγώνια μορφή του  $A^{k-1}$ .
- (ii) Αν  $\tau > 0$ , τότε  $w_1^{(k)}(A) = \dots = w_n^{(k)}(A)$ .



## § 4.2 Ιδιότητες και υπολογιστική πολυπλοκότητα

### 4.2.1 Αναλυτικές ιδιότητες

Συγκρίνοντας τα άνω φράγματα του Πορίσματος 3.2.7 και του Θεωρήματος 4.1.9 για την ίδια δύναμη  $k$ , μπορούμε να αποφανθούμε ότι εκείνα του Θεωρήματος 4.1.9 δίνουν πάντοτε ίδια ή καλύτερη προσέγγιση της φασματικής ακτίνας, όπως φαίνεται στο παρακάτω Πρόρισμα.

**Πόρισμα 4.2.1.** Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  και  $w_i^{(k)}(A)$  όπως ορίστηκε στη (3.1.4),  $k \in \mathbb{N}$ , με  $k \geq 1$  και θεωρούμε τη διάταξη στα  $w_1^{(k)}(A) \geq w_2^{(k)}(A) \geq \dots \geq w_n^{(k)}(A)$ . Εάν εφαρμόζονται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.1.10, τότε

$$\rho(A) \leq \min_{1 \leq \ell \leq n} \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\} \leq \sqrt[k-1]{w_1^{(k)}(A)}. \quad (4.2.1)$$

Συγκρίνοντας τα κάτω φράγματα του Πορίσματος 3.2.7 και του Θεωρήματος 4.1.10 για την ίδια δύναμη  $k$ , μπορούμε να αποφανθούμε ότι εκείνα του Θεωρήματος 4.1.10 είναι πάντοτε πιο κοντά στη φασματική ακτίνα, όπως φαίνεται στο Πρόρισμα που ακολουθεί.

**Πόρισμα 4.2.2.** Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$  και  $w_i^{(k)}(A)$  όπως ορίστηκε στη (3.1.4), για σταθερό  $k \in \mathbb{N}$ , με  $k \geq 1$  και θεωρούμε τη διάταξη στα  $w_1^{(k)}(A) \geq w_2^{(k)}(A) \geq \dots \geq w_n^{(k)}(A)$ . Εάν εφαρμόζονται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 4.1.10, τότε

$$\sqrt[k-1]{w_n^{(k)}(A)} \leq \sqrt[k-1]{z_n^{(k)}} \leq \rho(A). \quad (4.2.2)$$

**Απόδειξη** Η ποσότητα  $q > 0$ , διότι  $r_i(A) > 0$ . Επιπλέον,

$$\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) = \frac{1}{n} \left( (s + (n-1)\tau)^{k-1} - (s - \tau)^{k-1} \right) \geq 0,$$

διότι  $((s + (n-1)\tau)^{k-1} \geq (s - \tau)^{k-1}$ , για κάθε  $k, s, \tau$ . Επειδή  $w_i^{(k)}(A) \geq 0$  και λόγω της διάταξης των  $w_i^{(k)}(A)$ , έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n-1} (w_j^{(k)}(A) - w_n^{(k)}(A)) \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω μη-αρνητικές ποσότητες συμπεραίνουμε ότι

$$4q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{j=1}^{n-1} (w_j^{(k)}(A) - w_n^{(k)}(A)) \geq 0.$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα και την υπόθεση  $w_i^{(k)}(A) \geq \delta$  μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
 z_n^{(k)} &= \frac{1}{2} \left( w_n^{(k)}(A) + \delta + \sqrt{(w_n^{(k)}(A) - \delta)^2 + 4q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{j=1}^{n-1} (w_j^{(k)}(A) - w_n^{(k)}(A))} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left( w_n^{(k)}(A) + \delta + \sqrt{(w_n^{(k)}(A) - \delta)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (w_n^{(k)}(A) + \delta + |(w_n^{(k)}(A) - \delta)|) \\
 &= \frac{1}{2} (w_n^{(k)}(A) + \delta + w_n^{(k)}(A) - \delta) \\
 &= w_n^{(k)}(A)
 \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 3.2.5 ισχύει ότι  $\sqrt[k-1]{w_n^{(k)}(A)} \leq \rho(A)$ , και από το Θεώρημα 4.1.10,  $\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}} \leq \rho(A)$ . Επομένως,

$$\begin{aligned}
 w_n^{(k)}(A) &\leq z_n^{(k)} \leq \rho(A)^{k-1} \\
 \sqrt[k-1]{w_n^{(k)}(A)} &\leq \sqrt[k-1]{z_n^{(k)}} \leq \rho(A).
 \end{aligned}$$

□

## 4.2.2 Υπολογιστική πολυπλοκότητα

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα των φραγμάτων που προτείνονται στα Θεωρήματα 4.1.9 και 4.1.10 είναι της τάξης του  $O(n^{2.3728596} \log k)$ , η οποία οφείλεται στον υπολογισμό των average k-row sums -ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην Ενότητα 3.4, όπου γίνεται εκτενής αναφορά στην υπολογιστική πολυπλοκότητα που εισάγουν τα average k-row sums-. Αξίζει να σημειωθεί ότι, υπάρχει η απαίτηση τα average k-row sums να έχουν παράταξη, ήτοι  $w_1^{(k)}(A) \geq w_2^{(k)}(A) \geq \dots \geq w_n^{(k)}(A)$ , εάν αυτό δεν ισχύει εξ'αρχής δοθέντος ενός πίνακα, τότε απαιτούνται μεταθέσεις γραμμών, προτού εφαρμοστούν οι σχέσεις (4.1.17) και (4.1.30). Η πολυπλοκότητα αυτών δεν ξεπερνά εκείνη του υπολογισμού των average k-row sums, επομένως δεν επηρεάζουν την ασυμπτωτική τάξη πολυπλοκότητας  $O(n^{2.3728596} \log k)$ . Ο υπολογισμός των λοιπών ποσοτήτων,  $\gamma$ ,  $\delta$ , δεν επηρεάζει την πολυπλοκότητα, καθώς έχει αποδειχθεί ότι είναι κλειστοί τύποι (4.1.14), (4.1.15), και δεν εξαρτώνται από την εκάστοτε δύναμη  $k$ .

**Παράδειγμα 4.1.** (i) Έστω ο πίνακας  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , ο οποίος έχει παρθεί από το το [LZ17],

όπως φαίνεται παρακάτω,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

με φασματική ακτίνα  $\rho(A) = 6$ , και αθροίσματα γραμμών  $r_1(A) = 7$ ,  $r_2(A) = 6$ ,  $r_3(A) = 6$ ,  $r_4(A) = 5$ . Εφόσον οι προϋποθέσεις των Θεωρημάτων 4.1.9 και 4.1.10 ικανοποιούνται, ήτοι τα αθροίσματα των γραμμών είναι θετικά, προκειμένου να μπορεί να εφαρμοστεί ο Ορισμός 3.1.4, και  $w_1^{(k)}(A) \geq \gamma$ ,  $w_n^{(k)}(A) \geq \delta$ , δυνάμεθα να υπολογίσουμε τα φράγματα  $\min \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\}$  και  $\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$ , για διάφορες τιμές του  $k$ ,  $k \geq 2$ , όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.1.

Στην περίπτωση όπου  $k = 2$ , λαμβάνουμε τα φράγματα των Xing και Zhou των Προτάσεων 4.1.5 και 4.1.2, για το κάτω και άνω φράγμα αντίστοιχα. Για  $k = 3$ , λαμβάνουμε τα φράγματα των Lin και Zhou των Προτάσεων 4.1.6 και 4.1.3, για το κάτω και άνω φράγμα αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι, όσο το  $k$  αυξάνεται, τα φράγματα είναι εγγύτερα στη φασματική ακτίνα, ενώ παράλληλα τα  $\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$  και  $\min \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\}$  τείνουν να εξισωθούν με την τιμή της φασματικής ακτίνας.

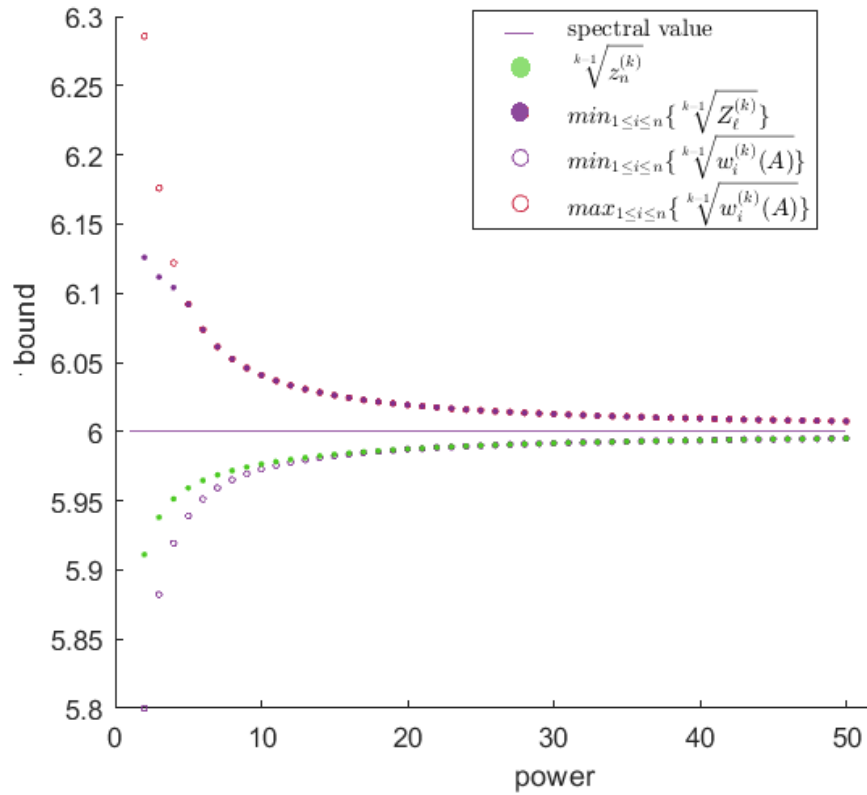
Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 δημιουργήθηκαν σε περιβάλλον Matlab- θεωρώντας ότι προσφέρεται για τη συγκεκριμένη εφαρμογή- και οι αντίστοιχοι πηγαίοι κώδικες επισυνάπτονται στο Παράρτημα A, κώδικας “Άνω φράγμα  $Z_\ell^{(k)}$ ” για τον υπολογισμό των άνω φραγμάτων, και κώδικας “Κάτω φράγμα  $z_n^{(k)}$ ” για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων.

Παρακάτω παρατίθενται ένα γράφημα όπου συγκρίνονται τα φράγματα των Θεωρημάτων 4.1.9 και 4.1.10, με εκείνα που δίνουν τα average k-row sums, για διαδοχικές δυνάμεις του  $k$ .

Παρατηρήστε ότι, τα φράγματα των Θεωρημάτων 4.1.9 και 4.1.10, ίσα ή και πλησιέστερα στη φασματική ακτίνα, φράγματα από εκείνα του Πορίσματος 3.2.7.

Πίνακας 4.1: Φράγματα  $\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$  και  $\min \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\}$

k	$\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$	$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\}$
2	5.9110	6.1258
3	5.9380	6.1117
4	5.9513	6.1041
5	5.9593	6.0919
6	5.9646	6.0735
7	5.9686	6.0613
8	5.9718	6.0525
9	5.9743	6.0459
10	5.9764	6.0408
11	5.9782	6.0367
12	5.9798	6.0333
13	5.9812	6.0306
14	5.9824	6.0282
15	5.9835	6.0262
20	5.9874	6.0193
30	5.9916	6.0126
40	5.9939	6.0094
50	5.9951	6.0075
70	5.9965	6.0053
90	5.9972	6.0041
110	5.9978	6.0034
200	5.9988	6.0018

Σχήμα 4.1: Σύγκριση average k-row sums και  $Z_l$  και  $z_n$ 

(ii) Έστω πίνακας  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ , όπως φαίνεται παρακάτω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 17 & 1 \\ 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

με φασματική ακτίνα  $\rho(A) = 13.3702$ , και αθροίσματα γραμμών  $r_1(A) = 7$ ,  $r_2(A) = 13$ ,  $r_3(A) = 30$ ,  $r_4(A) = 12$ ,  $r_5(A) = 15$ . Εφόσον τα αθροίσματα των γραμμών είναι θετικά, δυνάμεθα να εφαρμόσουμε τα φράγματα του Πορίσματος 3.2.7, για διάφορες τιμές του  $k$ ,  $k \geq 2$ .

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.2 δημιουργήθηκαν σε περιβάλλον Matlab- θεωρώντας ότι προσφέρεται για τη συγκεκριμένη εφαρμογή- και οι αντίστοιχοι πηγαίοι κώδικες επισυνά-

πτονται στο Παράρτημα Α, κώδικας “Άνω φράγμα  $Z_\ell^{(k)}$ ” για τον υπολογισμό των άνω φραγμάτων, και κώδικας “Κάτω φράγμα  $z_n^{(k)}$ ” για τον υπολογισμό των κάτω φραγμάτων.

Πίνακας 4.2: Φράγματα  $\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$  και  $\min \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\}$

k	$\sqrt[k-1]{z_n^{(k)}}$	$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sqrt[k-1]{Z_\ell^{(k)}} \right\}$
2	11.7260	14.7960
4	12.7408	14.0877
8	13.0471	13.7232
16	13.2085	13.5453
32	13.2891	13.4575
64	13.3296	13.4137

### § 4.3 Εφαρμογές στα γραφήματα

Σε αυτήν την ενότητα, θεωρούμε τα φράγματ των Θεωρημάτων 4.1.9, 4.1.10 του τρέχοντος κεφαλαίου για πίνακες που αντιστοιχούν σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα, αποδίδοντας και ερμηνεύοντάς τα με όρους της θεωρίας γραφημάτων. Ακόμη, περιλαμβάνεται ένα παράδειγμα, που συμβάλλει στην κατανόηση των αντίστοιχων προτάσεων.

Το άνω φράγμα της φασματικής ακτίνας του Θεωρήματος 4.1.9 με όρους μη-κατευθυνόμενου γραφήματος διατυπώνεται στην ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.3.1.** Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$ , τάξης  $n$ , χωρίς απομονωμένες κορυφές και βαθμούς κορυφών  $d_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , και average  $k$ -degrees  $m_{v_i}^{(k)}(G)$  όπως ορίζονται στην (3.5.1) έτσι ώστε  $m_{v_1}^{(k)}(G) \geq m_{v_2}^{(k)}(G) \geq \dots \geq m_{v_n}^{(k)}(G)$ . Οι ποσότητες  $b$  και  $\gamma$  δίνονται  $b = \frac{\Delta(G)}{\delta(G)}$ , και

$$\gamma = \beta_1^{(k-1)}(0, 1) - b\beta_2^{(k-1)}(0, 1), \quad (4.3.1)$$

με  $\beta_1^{(k-1)}, \beta_2^{(k-1)}$  ορίζονται όπως στις σχέσεις (4.1.8), (4.1.9). Θεωρούμε ότι  $m_{v_1}^{(k)}(G) \geq \gamma$  και

$$H_\ell^{(k)} = \frac{1}{2} \left( m_{v_\ell}^{(k)}(G) + \gamma + \sqrt{\Delta_\ell} \right), \quad \ell = 1, \dots, n, \quad (4.3.2)$$

όπου

$$\Delta_\ell = (m_{v_\ell}^{(k)}(G) - \gamma)^2 + 4b\beta_2^{(k-1)} \sum_{j=1}^{\ell-1} (m_{v_j}^{(k)}(G) - m_{v_\ell}^{(k)}(G)). \quad (4.3.3)$$

Τότε

$$\rho(A) \leq \min \{ \sqrt[k-1]{H_\ell^{(k)}} : 1 \leq \ell \leq n \}. \quad (4.3.4)$$

Τουναντίον, η διατύπωση του κάτω φράγματος της  $\rho(A)$  του Θεωρήματος 4.1.10 ταυτίζεται με την ποσότητα  $m_{v_n}^{(k)}(G)$ , αν θεωρήσουμε τη διάταξη των  $m_{v_i}^{(k)}(G)$  να είναι  $m_{v_1}^{(k)}(G) \geq m_{v_2}^{(k)}(G) \geq \dots \geq m_{v_n}^{(k)}(G)$ , όπου  $m_{v_i}^{(k)}(G)$  ορίζονται στην (3.5.1).

**Πρόταση 4.3.2.** Έστω μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G \equiv G(V, E)$ , τάξης  $n$ , χωρίς απομονωμένες κορυφές και βαθμούς κορυφών  $d_i(A) > 0$  για κάθε  $i = 1, \dots, n$ , και average  $k$ -degrees  $m_{v_i}^{(k)}(G)$ , όπως ορίζονται στην (3.5.1) έτσι ώστε  $m_{v_1}^{(k)}(G) \geq m_{v_2}^{(k)}(G) \geq \dots \geq m_{v_n}^{(k)}(G)$ . Οι ποσότητες  $q$  και  $\delta$  δίνονται  $q = \frac{\delta(G)}{\Delta(G)}$ , και

$$\delta = \beta_1^{(k-1)}(0, 0) - q\beta_2^{(k-1)}(0, 0), \quad (4.3.5)$$

με  $\beta_1^{(k-1)}, \beta_2^{(k-1)}$  ορίζονται όπως στις σχέσεις (4.1.8), (4.1.9). Θεωρούμε  $m_v^{(k)}(G) \geq \delta$  και

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{2} \left( w_n^{(k)}(A) + \delta + \sqrt{\Delta_n} \right), \quad (4.3.6)$$

όπου

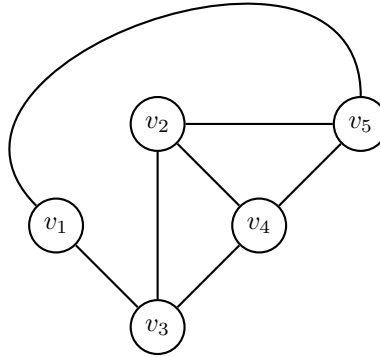
$$\Delta_n = (w_n^{(k)}(A) - \delta)^2 + 4q\beta_2^{(k-1)}(s, \tau) \sum_{j=1}^{n-1} (w_j^{(k)}(A) - w_n^{(k)}(A)). \quad (4.3.7)$$

Τότε

$$\rho(A) \geq \sqrt[k-1]{h_n^{(k)}} \equiv \sqrt[k-1]{w_n^{(k)}}. \quad (4.3.8)$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω φραγμάτων σε μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

**Παράδειγμα 4.2.** Έστω το μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G_1$ , το οποίο ορίστηκε στο Σχήμα 2.1i και αντιστοιχεί στο γράφημα που εμφανίζεται στο Σχήμα 4.2, και  $A(G_1)$  ο αντίστοιχος πίνακας γειτνίασης.



Σχήμα 4.2: Μη-κατευθυνόμενο γράφημα  $G_1$

Οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος, ήτοι τα αθροίσματα γραμμών του πίνακα γειτνίασης είναι  $d_1 = 2$ ,  $d_2(A) = 3$ ,  $d_3(A) = 3$ ,  $d_4(A) = 3$ ,  $d_5(A) = 3$ , και η φασματική ακτίνα  $\rho(A) = 2.8558$ . Εφόσον το γράφημα δεν έχει απομονωμένες κορυφές, άρα  $d_i \geq 1$ , εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.1 υπολογίζονται τα  $H_l^{(k)}$  για ποικίλες τιμές του  $k$ , με εύρος από 2 έως 128. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.3 με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Για τον υπολογισμό των φραγμάτων χρησιμοποιείται ο αντίστοιχος πηγαίος κώδικας, (βλέπε, Παράρτημα Α-Άνω φράγμα  $Z_\ell^{(k)}$ ), ο οποίος υλοποιείται σε περιβάλλον Matlab θεωρώντας ότι είναι



κατάλληλος για τη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Πίνακας 4.3:  $H_l^{(k)}$

k	$H_l^{(k)}$
2	2.8867
4	2.8751
8	2.8672
16	2.8619
32	2.8588
64	2.8573
128	2.8565

Τα φράγματα είναι ακριβέστερα, εν συγκρίσει με το μέγιστο average k-degree της εκάστοτε δύναμης του Παραδείγματος 3.3 (βλέπε, Πίνακα 3.5) για το ίδιο μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Αυτό επαληθεύεται και από την Πρόταση 4.2.1.

## Συμπεράσματα

Εν κατακλείδι, στην παρούσα πτυχιακή εργασία, ορίστηκαν και εξετάστηκαν, νέα, βέλτιστα άνω και κάτω φράγματα συναρτήσεως τόσο των αθροισμάτων γραμμών, όσο και των στοιχείων δυνάμεων μη-αρνητικών πινάκων. Αναλυτικότερα, μελετήθηκαν τα average row sums που έχουν αναπτυχθεί σε δυνάμεις πινάκων 1,2, και ορίστηκαν για μεγαλύτερες δυνάμεις πινάκων  $k \geq 3$ . Έπειτα, διατυπώθηκαν αναλυτικές ιδιότητες και μελετήθηκε η σύγκλιση ακολουθίας φραγμάτων της φασματικής ακτίνας, ορισμένης ως προς τις δυνάμεις των πινάκων. Με βάση τα θεωρητικά αποτελέσματα αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν αλγόριθμοι για τον υπολογισμό των νέων φραγμάτων, οι οποίοι έχουν πολυωνυμικό υπολογιστικό κόστος. Χρησιμοποιώντας τους ανωτέρω αλγορίθμους δημιουργήθηκαν παραδείγματα, που επαλήθευσαν τα θεωρητικά αποτελέσματα, για την υλοποίηση των οποίων αξιοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο Matlab. Τέλος, τα φράγματα προσαρμόστηκαν για την εκτίμηση του δείκτη ενός κατευθυνόμενου ή μη-κατευθυνόμενου γραφήματος και δόθηκαν σχετικές εφαρμογές.

Με την ολοκλήρωση της μελέτης, απαντήθηκαν ερωτήματα που συνδέονται με την ανάπτυξη κλειστών τύπων των άνω και κάτω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας, ωστόσο υπάρχουν ανοιχτά θέματα που χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης, όπως είναι η μελέτη μη-αναγωγίμων και μη-αρνητικών πινάκων, πρωταρχικών πινάκων, κ.α.. Επιπλέον, κρίνεται σκόπιμη η εμβάθυνση των αλγοριθμικών συμπερασμάτων που αναπτύχθηκαν, προκειμένου να εκφραστεί η ταχύτητα σύγκλισης και το σφάλμα προσέγγισης, συναρτήσεως της δύναμης  $k$  των ακολουθιών που κατασκευάστηκαν. Επιπρόσθετα, η μελέτη της μονοτονίας των ακολουθιών ή υπακολουθιών των άνω και κάτω φραγμάτων της φασματικής ακτίνας, ενδέχεται να δώσει απάντηση στην ταχύτητα σύγκλισης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, μία ενδιαφέρουσα προέκταση των φραγμάτων είναι η προσαρμογή τους σε τυχαίους πίνακες πραγματικών στοιχείων, καθώς και η εφαρμογή deflation μεθόδων σε ένα πίνακα, έτσι ώστε τα φράγματα να συγκλίνουν στις υπόλοιπες ιδιοτιμές, αν αυτό είναι εφικτό.

# Βιβλιογραφία

- [1] M. Adam, D. Aggeli, and Aik. Aretaki. “Some new bounds on the spectral radius of nonnegative matrices”. In: *AIMS Mathematics* 5 (2019), pp. 701–716. doi: 10.3934/math.2020047.
- [2] A. Berman and R.J Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [3] B. Bollobás and V Nikiforov. “Cliques and the spectral radius”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 97.5 (2007), pp. 859–865. doi: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.12.002>.
- [4] R.A. Brualdi and D. Cvetkovic. *A combinatorial approach to matrix theory and its applications*. Series Editor Kenneth H. Rosen. Taylor & Francis Group, LLC, 2009.
- [5] B. K. Butler and P. H. Siegel. “Sharp bounds on the spectral radius of nonnegative matrices and digraphs”. In: *Linear Algebra and its Applications* 439.5 (2013), pp. 1468–1478. doi: <https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.04.029>.
- [6] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, and S. Simic. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Series Editor Kenneth H. Rosen. Taylor & Francis Group, LLC, 2009.
- [7] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, and S. Simic. *Eigenspaces of Graphs*. Cambridge University Press, 1997.
- [8] F. Duan and K. Zhang. “An algorithm of diagonal transformation for Perron root of nonnegative irreducible matrices”. In: *Applied Mathematics and Computation* 175.1 (2006), pp. 762–772. doi: 10.1016/j.amc.2005.07.055.
- [9] X. Duan and B. Zhou. “Sharp bounds on the spectral radius of a nonnegative matrix”. In: *Linear Algebra and its Applications* 439 (2013), pp. 2961–2970. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2013.08.026>.
- [10] G. Frobenius. “Über Matrizen aus nicht negativen Elementen”. In: *Kon. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1912), pp. 465–477.
- [11] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. 2nd edition. Cambridge University Press, 2013.
- [12] C.R. Johnson and C.M Salago. *Eigenvalues, Multiplicities and Graphs*. Cambridge University Press, 2018.

- [13] H. Lin and B. Zhou. “On sharp bounds for spectral radius of nonnegative matrices”. In: *Linear and Multilinear Algebra* 65.8 (2017), pp. 1554–1565. doi: <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1246514>.
- [14] T. L. Markham. “An Iterative Procedure for Computing the Maximal Root of a Positive Matrix”. In: *Mathematics of Computation* 22.104 (1968), pp. 869–871.
- [15] A. Melman. “Generalizations of Gershgorin disks and polynomial zeros”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 138.7 (2010), pp. 2349–2364.
- [16] A. Melman. “Upper and lower bounds for the Perron root of a nonnegative matrix”. In: *Linear and Multilinear Algebra* 61.2 (2013), pp. 171–181. doi: <https://doi.org/10.1080/03081087.2012.667096>.
- [17] H. Minc. *Nonnegative Matrices*. John Wiley & Sons, 1988.
- [18] V. Nikiforov. “Some Inequalities for the Largest Eigenvalue of a Graph”. In: *Combinatorics, Probability and Computing* 11 (2002), pp. 179–189.
- [19] Y. Saad. *Numerical Methods for large eigenvalue Problems*. 2nd edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [20] R.S. Varga. *Gersgorin and his Circles*. Springer, 2004.
- [21] R.S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. 2nd edition. Springer, 2000.
- [22] C. Wen and T. Huang. “A modified algorithm for the Perron root of a nonnegative matrix”. In: *Applied Mathematics and Computation* 217.9 (2011), pp. 4453–4458. doi: 10.1016/j.amc.2010.10.048.
- [23] H. S. Wilf. “Spectral bounds for the clique and independence numbers of graphs”. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 40.1 (1986), pp. 113–117. doi: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(86\)90069-9](https://doi.org/10.1016/0095-8956(86)90069-9).
- [24] H. S. Wilf. “The Eigenvalues of a Graph and Its Chromatic Number”. In: *Journal of the London Mathematical Society* s1-42.1 (1967), pp. 330–332. doi: 10.1112/jlms/s1-42.1.330.
- [25] V.V. Williams. “Multiplying Matrices Faster than Coppersmith-Winograd”. In: *Association for Computing Machinery. STOC '12* (2012), pp. 887–898. doi: 10.1145/2213977.2214056.
- [26] R. Xing and B. Zhou. “Sharp bounds for the spectral radius of nonnegative matrices”. In: *Linear Algebra and its Applications* 449 (2014), pp. 194–209. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2014.02.031>.

# Παράρτημα Α

Οι κώδικες που ακολουθούν έχουν αναπτυχθεί σε περιβάλλον matlab -θεωρώντας ότι προσφέρεται για τις συγκεκριμένες εφαρμογές.

## Κώδικας Α1

```
1 function [ krow_sum ] = k_average_row_sum( A,k )
2 %K_AVERAGE_ROW_SUM It calculates the kth average row sum,
3 %   given the matrix A where k>1
4
5     if k>1
6         R=sum(A,2);
7         krow_sum=(A^(k-1))*R ./ R;
8     else
9         disp('k must be greater than 1!');
10    end
11 end
```

## Κώδικας A2

```
1 function [bounds] = xi_bounds_plotter(A,xi,itr)
2 %XI_BOUNDS_PLOTTER It calculates and draws itr iterations
3 % of upper and lower bounds of the spectral radius,
4 % given a nonnegative matrix and a positive vector xi.
5
6 % Pick random colors
7 ub_color=[rand rand rand];
8 lb_color=ub_color;
9 %lb_color=[rand rand rand];
10
11 %Assign random numbers
12 if (length(xi) == length(A))
13     for k=2:itr %k=2:itr
14
15         %Drawing the bounds
16         hold on;
17         kars = (A^k)*xi ./ xi;
18         kars = kars.^(1/k);
19
20         %Drawing bounds
21         scatter(k,max(kars),5,ub_color,'fill');
22         scatter(k,min(kars),5,lb_color,'fill');
23         drawnow
24     end
25
26     %Drawing a line where y=spectral value of A
27     k=1:itr; %k=2:itr;
28     r=ones(length(k),1).*abs(max(eig(A)));
29     plot(k,r);
30
31     %Name the axis
32     xlabel('power');
33     ylabel('bounds');
34
35     %Final answer
36     bounds = [max(kars) min(kars)];
37 else
38     disp('Unable to approximate the bounds.')
39 end
40 end
```

## Άνω φράγμα $Z_\ell^{(k)}$

```
1 function [ upper_bound, w1, gamma ] = upper_bound_approximation( A , power )
2 %UPPER_BOUND_APPROXIMATION It takes as an input a matrix A and a given power.
3 % It calculates an approximation of the upper bound for the spectral value
  of the matrix A
4 % using the maximum diagonal and off-diagonal elements of A^power
5 % as well as the average (power-1)th row sum
6
7 %% Initialization and precision
8 upper_bound = [];
9 digits(60);
10
11 if (nonnegative_check(A) == 1 & sum(sum(A,2) == 0) == 0)
12     %% it checks if wi>wi+1 for every i between 0<i<n
13     %and if not it finds a proper permutation
14     %Calculating the average-(k+1)-row sum
15     w_i = k_average_row_sum( A ,power+1 );
16
17     condition = krow_sum_comp( A , w_i );
18     if condition == 0
19         %Correction of the matrix so the theorem is applicable
20         P = p_matrix_general( A , w_i' );
21         A = P'*A*P;
22     end
23     %% calculation of useful matrices and variables
24     %%Dimensions of the matrix
25     n = length(A);
26
27     %%Maximum diagonal element
28     M = max(diag(A));
29
30     %%Maximum off-diagonal element
31     N = max(max(A-diag(diag(eye(n))*Inf)));
32
33     %Calculating the row sum
34     ri = sum(A,2);
35
36     %Average-(k+1)-row sums
37     w_i = vpa(k_average_row_sum( A , power+1 ));
38
39     %Quantity of b=max{ri/rj} ,where 1<= i,j <=n
```

```

40     b = vpa(max(ri)) / vpa(min(ri));
41
42     %Calculating aij_(k), aii_(k) which depend on M,N maximum elements
43     aii_k = (1/n)*((M+(n-1)*N)^power+(n-1)*(M-N)^power);
44     aij_k = (1/n)*((M+(n-1)*N)^power-(M-N)^power);
45
46     %Calculating u with respect to aii_k and aij_k
47     gamma = aii_k - b*aij_k;
48
49     %% calculating Phil (upper bound)
50     if(w_i(1) > (gamma)) %mandatory condition %(w_i(1)>abs(gamma))
51         %Initialization of Phil
52         Phil = zeros(1,n);
53
54         %Phil(1)=w_i(1),resulting from the proof
55         Phil(1)=w_i(1);
56         for j=2:n
57             sum_in_formula_Phil=0;
58             for k=1:j-1
59                 sum_in_formula_Phil=vpa(sum_in_formula_Phil+
60                     (w_i(k)-w_i(j)));
61             end
62             Phil(j)= vpa((vpa(w_i(j))+ gamma +
63                 vpa(sqrt((vpa(vpa(w_i(j))-vpa(gamma)))^2
64                     + 4*vpa(aij_k)*b*vpa(sum_in_formula_Phil))))/2);
65         end
66         %Finding the minimum of all Phil ,min{Phil(1)} for 1<l<n
67         vpa(Phil);
68         upper_bound=min(vpa(Phil))^(1/power);
69     else
70         disp('The theorem is not applicable.')

```



## Κάτω φράγμα $z_n^{(k)}$

```
1 function [ low_bound ] = lower_bound_approximation( A , power )
2 %LOWER_BOUND_APPROXIMATION It takes as an input a matrix A and a given power
3 % It calculates the lower bound for the spectral value of the matrix A
4 % using the minimum diagonal and off-diagonal elements of A^power
5 % as well as the average (power+1)th average row sum
6
7 %%Initialization
8 %initialization of the lower_bound
9 low_bound=[];
10
11 if (nonnegative_check(A)==1)
12     %% it checks if  $w_i > w_{i+1}$  for every  $i$  between  $0 < i < n$  and if not it finds
13     a proper permutation matrix
14     %Calculating the average-(k+1)-row sum
15     w_i=k_average_row_sum( A ,power+1 );
16
17     condition=krow_sum_comp( A , w_i );
18     if condition == 0
19         %Correction of the matrix so the theorem is applicable
20         P=p_matrix_general( A , w_i' );
21         A=P'*A*P;
22     end
23
24     %% calculation of useful matrices and variables
25     %Dimensions of the matrix
26     n=length(A);
27
28     %Minimum diagonal element
29     S=min(diag(A));
30
31     %Minimum off-diagonal element
32     T=min(min(A+diag(diag(eye(n))*Inf)));
33
34     %Calculating the row sum
35     ri=sum(A,2);
36
37     %Average-(k+1)-row sums
38     w_i=k_average_row_sum( A , power+1 );
39
```

```

40     %Quantity of  $q = \min\{r_i/r_j\}$  ,where  $1 \leq i, j \leq n$ 
41      $q = \min(r_i) / \max(r_i)$ ;
42
43     %% calculating  $a_{ij}(k)$  and  $a_{ii}(k) \rightarrow e_1 = a_{ii}(k) - q * a_{ij}(k)$ 
44
45     %Calculating  $a_{ij}(k), a_{ii}(k)$  which depend on S,T minimum elements
46      $a_{ii}(k) = (1/n) * ((S + (n-1) * T)^{\text{power}} + (n-1) * (S - T)^{\text{power}})$ ;
47      $a_{ij}(k) = (1/n) * ((S + (n-1) * T)^{\text{power}} - (S - T)^{\text{power}})$ ;
48
49     %Calculating thita with respect to  $a_{ii}(k)$  and  $a_{ij}(k)$ 
50      $e_1 = a_{ii}(k) - a_{ij}(k) * q$ ;
51
52     %% calculating  $\phi_n$  (lower bound)
53     if ( $w_i(n) > e_1$ )
54         %Initialization of Phil
55          $\phi = \text{zeros}(1, n)$ ;
56          $\phi(1) = -\text{inf}$ ;
57
58         for  $j = n : n$ 
59             sum_in_formula_Phil = 0;
60             for  $k = 1 : j - 1$ 
61                 sum_in_formula_Phil = sum_in_formula_Phil + ( $w_i(k) - w_i(j)$ );
62             end
63              $\phi(j) = (w_i(j) + e_1 + \text{sqrt}((w_i(j) - e_1)^2 + 4 * a_{ij}(k) * q$ 
64                 * sum_in_formula_Phil)) / 2;
65         end
66
67         %% Final Answer
68         low_bound =  $\phi(n)^{(1/\text{power})}$ ;
69
70     else
71         disp('The theorem is not applicable.')

```

## Σχεδίαση άνω και κάτω φραγμάτων των $Z_\ell^{(k)}$ και $z_n^{(k)}$

```
1 function [] = upper_lower_bounds_approximation_plotter_fun( A , itr )
2 %UPPER_BOUND_APPROXIMATION_PLOTTER_FUN It calls multiple times the
3 % function upper_bound_approximation( A , power )
4 % where power lies between [1,itr]
5
6 for k=1:itr
7     %k=2^ind;
8     hold on;
9     %Calling the upper_bound_approximation function for current kth power
10    approxyUP=upper_bound_approximation( A , k );
11
12    %Calling the lower_bound_approximation function for current kth power
13    approxyLOW=lower_bound_approximation( A , k );
14
15    %Drawing the upper bound approximation
16    scatter(k+1,approxyUP,5,[0.4940 0.1840 0.5560], 'fill');
17    scatter(k+1,approxyLOW,5,[0.2940 0.7940 0.130], 'fill');
18    drawnow;
19 end
20
21 %Drawing a line where y=spectral value of A
22 k=1:itr;
23 r=ones(length(k),1).*abs(max(eig(A)));
24 plot(k,r);
25
26 %Name the axis
27 xlabel('power');
28 ylabel('upper bound ');
29 end
```

# Συμβολισμοί

$\mathbb{R}$	το σύνολο των πραγματικών αριθμών
$\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$	η άλγεβρα των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{F}$
$\sigma(A)$	το φάσμα ενός πίνακα $A$
$\lambda_i$	οι ιδιοτιμές του πίνακα
$a_{ij}^{(k)}$	το στοιχείο του $A^k$
$\rho(A)$	η φασματική ακτίνα ενός πίνακα
$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$	διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $a_{11}, \dots, a_{nn}$
$e$	διάνυσμα μονάδων $[1 \dots 1]^T$
$A^{-1}$	ο αντίστροφος ενός πίνακα $A$
$D(A)$	ο κατευθυνόμενος γράφος που αντιστοιχεί στον πίνακα $A$
$G(A)$	ο μη-κατευθυνόμενος γράφος που αντιστοιχεί στον πίνακα $A$
$A(D)$	πίνακας γειτνίασης ενός γράφου $D$
$J_n$	$n \times n$ με όλα τα στοιχεία 1
$K_n$	το πλήρες γράφημα $n$ κορυφών
$\text{deg}(v)$	ο βαθμός κορυφής
$\Delta(G)$	ο μεγαλύτερος βαθμός του γραφήματος $G$
$\delta(G)$	ο μικρότερος βαθμός του γραφήματος $G$

# Ευρετήριο

$q$ -κυκλικός, 7

average 2-row sum, 30

average 3-row sum, 30

average  $k$ -row sum, 30

έξω-βαθμός κορυφής, 15

έσω-βαθμός κορυφής, 15

αναγώγιμος, 6

αριθμός κλίκα, 15

αριθμός σταθερότητας, 15

ασθενές συνεκτικό, 20

βαθμός κορυφής, 14

δείκτης γραφήματος, 19

δείκτης κυκλικότητας, 7

ισομορφισμός, 14

ισχυρά συνεκτικό, 20

κανονικό, 14

κατευθυνόμενο γράφημα, 15

κλίκα, 14

μη-αναγώγιμος, 6

μη-κατευθυνόμενο γράφημα, 13

πίνακας γειτνίασης, 16

πλήρες, 14

πρωταρχικός, 6

συνεκτικό, 20

φάσμα του γραφήματος, 19

φασματική ακτίνα, 5

χρωματικός αριθμός, 15

χρωματισμός κορυφών, 14

