

Συγχρονισμός Χρηματοοικονομικών Αγορών

ΚΥΝΗΓΩΝΤΑΣ ΜΙΑ ΧΙΜΑΙΡΑ ΣΤΟΝ S&P 500



Διατμηματικό Διδρυματικό
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας -
Διεθνές Πανεπιστήμιο της Ελλάδος

Κωνσταντίνος Ευαγγέλου Παπασταματίου

Επιβλέποντες καθηγητές:

Δρ. Γεώργιος Σαραφόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Οικονομικών Επιστημών, Δημοκρίτειο
Πανεπιστήμιο Θράκης

Δρ. Στέφανος Παπαδάμου Αναπληρωτής Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας – Τμ.
Οικονομικών Επιστημών

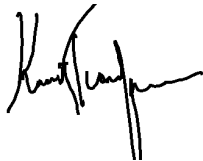
ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ ΠΡΩΤΟΤΥΠΙΑΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης, έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η διπλωματική εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών Οικονομικής Φυσικής και Χρηματοοικονομικών Προβλέψεων του Τμήματος.

Ημερομηνία : 07/01/2020

Όνοματεπώνυμο : Κωνσταντίνος Παπασταματίου

Υπογραφή :



Ευχαριστίες

Ξεκινώντας τις ευχαριστίες θα ήθελα αρχικά να αναφέρω την οικογένεια μου που με στήριξε σε όλη αυτή μου την προσπάθεια. Ιδιαίτερα τον πατέρα μου, που μου έμαθε να επιμένω και να μην τα παρατάω όσο ανυπέβλητα και αν φαντάζουν τα εμπόδια που πρέπει αν υπερκεράσω για να πραγματοποιήσω τους στόχους μου.

Σε συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Αθανάσιο Φράγκου και Θεόδωρο Καρακασίδη που μου έδωσαν την ευκαιρία να συμμετάσχω σε αυτό το εξαιρετικά ενδιαφέρον και πρωτοπόρο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών. Η όλη αυτή διαδρομή εκτός από τα εφόδια και τις ευκαιρίες που μου έδωσε με έφερε σε επαφή με το εξαιρετικό και άρτια καταρτισμένο διδακτικό προσωπικό του προγράμματος, από τους οποίους και έλαβα τόσο σημαντικές γνώσεις όσο απαραίτητα εφόδια για την περαιτέρω καλλιέργειά μου.

Τέλος ειδική μνεία θέλω να κάνω στους αξιότιμους κυρίους Γεώργιο Σαραφόπουλο και Στέφανο Παπαδάμου, που πέραν των εφοδίων που μου προσέφεραν με την διδασκαλία τους, δέχθηκαν να επιβλέψουν μία τόσο ευφάνταστη και φιλόδοξη διπλωματική εργασία.

Περίληψη

Ο συγχρονισμός σε μία αγορά κεφαλαίου είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά που μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε την δημιουργία των τάσεων ένα χρηματιστήριο. Η μεθοδολογία που προτείνουμε για την μελέτη αυτού του φαινομένου αποτελεί μία εφαρμογή μεθόδων που έχει αναπτυχθεί σε διάφορους άλλους επιστημονικούς τομείς όπως στην φυσική, την βιολογία, την νευροεπιστήμη, την κοινωνιολογία και αλλού. Μεθόδων που μας βοηθούν να χωρίσουμε το πεδίο τιμών των μετοχών σε δύο υποσύνολα ένα που να αφορά στην συνάφεια, μετοχές που βρίσκονται σε συγχρονισμό και έναν που να αφορά την ασυνάφεια. Με αυτό τον τρόπο παρέχουμε ένα ακόμη αποδεικτικό στοιχείο στην επικρατούσα υπόθεση πως οι αγορές σε περιόδους κρίσεων τείνουν να έχουν έναν μεγαλύτερο βαθμό συγχρονισμού, ενώ επεκτείνοντας αυτή την υπόθεση καταδεικνύουμε το γεγονός πως η αύξηση του συγχρονισμού μπορεί να λειτουργήσει ως προάγγελος της αύξησης της διασποράς.

Λέξεις κλειδιά: Συγχρονισμός, Kuramoto, Ginzburg – Landau, Διαφορικές εξισώσεις, Συνάφεια-Ασυνάφεια

Abstract

Synchronization in a capital market is one of the key features that can help us understand the trends of a stock market. The methodology we propose for the study of this phenomenon is an application of methods that has been developed in various other scientific fields such as physics, biology, neuroscience, sociology and elsewhere. These methods will help us to divide the stock price domain into two subsets, one related to coherence, shares that are in sync, and one related to incoherence. In this way we provide another piece of evidence in the prevailing hypothesis that markets in times of crisis tend to have a greater degree of synchronization, while extending this hypothesis we demonstrate the fact that increased synchronization can serve as a harbinger of increased volatility.

Keywords: Synchronization, Kuramoto, Ginzburg – Landau, Coherence – Incoherence, Differential Equations.

Πίνακας περιεχομένων

1. Εισαγωγή	6
2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	9
2.1 Συγχρονισμός Χρηματαγορών με γραμμικά στοχαστικά μοντέλα.....	9
2.2 Δίκτυα Αγορών Κεφαλαίου.....	11
2.3 Ντετερμινιστικό Χάος στις Χρηματαγορές.....	12
3. Δεδομένα	14
4. Θεωρητικό Υπόβαθρο	15
4.1 Το σύστημα <i>Ginzburg – Landau</i>	15
4.2 Η θεωρία.....	20
5. Εμπειρικά Αποτελέσματα	23
5.1 Το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσης εφαρμογής.	23
5.2 Προσδιορισμός παραμέτρων συστήματος.....	27
5.3 Διερεύνηση των δυναμικών του συστήματος.....	29
6. Συμπεράσματα	32
7. Βιβλιογραφία	34
Παράρτημα Α	38
Παράρτημα Β	44

1. Εισαγωγή

Τα χρηματιστήρια αποτελούν ένα αρκετά πολύπλοκο και συνεχώς εξελισσόμενο σύστημα σύμφωνα με τους (Mantegna & Stanley, 2000), με αποτέλεσμα να προσελκύουν ένα συνεχώς αυξανόμενο πλήθος ερευνητών από διάφορους επιστημονικούς χώρους που έχουν ως στόχο την μελέτη και μοντελοποίηση των δυναμικών που αναπτύσσονται. Ο συγχρονισμός των αγορών κεφαλαίου, που θα μελετήσουμε στη παρούσα εργασία είναι εκείνο το εργαλείο που αποτυπώνει το βαθμό συνάφειας των στοιχείων που συνθέτουν μία χρηματαγορά. Αποτελεί δε ένα από τα θέματα που απασχολεί σε μεγάλο βαθμό την επιστημονική κοινότητα, καθώς είναι ένα από τα κριτήρια που θέτει σε αμφισβήτηση την κυρίαρχη θεωρία των Αποτελεσματικών Αγορών όπως αυτή διατυπώθηκε από τον (Fama, 1970). Καταδεικνύοντας κατά αυτόν τον τρόπο την αγελαία συμπεριφορά τόσο μεταξύ των επενδυτών που αλληλοεπιδρούν σε επίπεδο χώρας, όσο στην παγκόσμια σκακιέρα της διακίνησης κεφαλαίου.

Είναι άραγε όμως η αγελαία συμπεριφορά αυτό που καθ' ολοκληρία ερμηνεύει τις κινήσεις των επενδυτών; Οι (A. Johansen & Sornette, 1999) στην εργασία που πραγματοποίησαν, με θέμα τη δημιουργία προβλέψεων χρηματοοικονομικών καταστροφών, ως επακόλουθο της υπερβολικής διόγκωσης των τιμών των μετοχών, δέχονται στις υποθέσεις τους πως η συμπεριφορά αγέλης εμφανίζεται μόνο σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και δεν εκφράζει το σύνολο των κινήσεων που πραγματοποιούνται σε μία αγορά κεφαλαίου. Δηλαδή σε περιόδους ομαλότητας οι συναλλαγές μεταξύ των επενδυτών χαρακτηρίζονται από στοχαστικές, τυχαίες, συμπεριφορές, ενώ αντίθετα σε περιόδους 'φούσκας' και κατάρρευσης των τιμών οι αγοραπωλησίες μετοχών ακολουθούν ένα μοτίβο. Με άλλα λόγια οι κινήσεις των εμπλεκομένων είναι σε συντονισμό. Γεγονότα σαν αυτό αποτέλεσαν επιτακτική την ανάγκη της διερεύνησης των σχέσεων συντονισμού τόσο μεταξύ μετοχών όσο και χρηματιστηρίων.

Τα εργαλεία που έχουν αναπτυχθεί για τη διερεύνηση αυτού του φαινομένου, προσεγγίζουν το θέμα από διάφορες οπτικές γωνίες. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση γραμμικών, γραμμικών στοχαστικών μεθόδων, μη γραμμικών δυναμικών, τη χρήση δικτύων για διάφορους χρονικούς ορίζοντες και συχνότητες δεδομένων. Μία συνοπτική παρουσίαση όλων των μεθόδων που αναφέραμε, θα πραγματοποιηθεί στο κεφάλαιο 2 όπου θα έχουμε μία περιληπτική παρουσίαση της βιβλιογραφίας που μελετήθηκε. Το τμήμα αυτό αποτελεί ένα αναπόσπαστο κομμάτι της εργασίας, καθώς η μεθοδολογία με την οποία θα προσεγγισθεί το θέμα από εμάς είναι σχετικά πρωτότυπη. Είναι λοιπόν προφανές ότι η αναφορά σε υφιστάμενα εργαλεία και μεθόδους είναι επιτακτική μίας και έτσι θα μπορέσουμε να καταδείξουμε την καινοτομία που εισηγούμαστε.

Η μελέτη τους συγχρονισμού με τη μέθοδο που εισηγούμαστε στην παρούσα εργασία έρχεται να προσθέσει μία ακόμη παράμετρο επιπλέον του χρόνου. Έτσι η εξέλιξη της πορείας μία μετοχής δεν εξαρτάται μόνο από την χρονική στιγμή αλλά και από μία χωρική διάσταση, δηλαδή τη θέση που αυτή καταλαμβάνει στο δίκτυο των μετοχών που συμμετέχει. Για να το επιτύχουμε θα κάνουμε χρήση του μοντέλου των Ginzburg – Landau, ένα μοντέλο που βρίσκει πληθώρα εφαρμογών σε συστήματα που προσπαθούν να εξηγήσουν συλλογικές συμπεριφορές. Το συγκεκριμένο μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε μελετήθηκε αρχικά από τους (Kuramoto & Battogtokh, 2002) σε ένα σύνολο από ταυτόσημους ταλαντωτές που βρίσκονται σε ένα δίκτυο με ασθενείς συνδέσεις. Στο μοντέλο αυτό είναι που παρατηρήθηκε και για πρώτη φορά η συνύπαρξη δύο υποχώρων, ενός που περιλαμβάνει τους ταλαντωτές που βρίσκονται σε συγχρονισμό και ενός που δεν υπάρχει συντονισμός. Σε αναλογία με τα δεδομένα μας, που περιλαμβάνουν τις τιμές των μετοχών που μετέχουν στον δείκτη S&P 500 του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι τιμές των μετοχών μας είναι προϊόν μιας ανάλογης διαδικασίας καθώς έχουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά μίας και αντιπροσωπεύουν τις μεγαλύτερες επιχειρήσεις που υπάρχουν στην παγκόσμια αγορά κεφαλαίου.

Το κεφάλαιο 3 περιλαμβάνει τα εμπειρικά αποτελέσματα όπως αυτά αποτυπώθηκαν από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Τα δεδομένα μας περιλαμβάνουν τις τιμές κλεισίματος 375 μετοχών που μετέχουν συνεχώς στον δείκτη S&P 500 του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης για την χρονική περίοδο από 01/01/2000 έως 25/10/2020, συγκεντρώνοντας έτσι ένα πλήθος 5238 ημερήσιων παρατηρήσεων. Σε αυτά τα δεδομένα έχουμε υπολογίσει τους πίνακες συσχέτισης σε κινούμενο παράθυρο μήκους $\Delta t = 54$ ημέρες με μετατόπιση $\Delta t = 1$ ημέρα παράγοντας έτσι 5184 πίνακες συσχέτισεων 375×375 που θα μας δώσουν και την τοπολογία του δικτύου των μετοχών καθώς αυτές εξελίσσονται στον χρόνο. Στη συνέχεια θα προσαρμόσουμε τους πίνακες αυτούς στο σύστημα έτσι ώστε να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις και να εξάγουμε τα συμπεράσματά μας. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε πως το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων, που κληθήκαμε να επιλύσουμε παρουσιάζει μία διαφοροποίηση σε σχέση με τα αναφερόμενα στην σχετική βιβλιογραφία (M. Brede, 2008),(Zhao et al., 2015),(Schmidt et al., 2015). Η διαφοροποίηση έγκειται στο γεγονός πως αντί να θεωρήσουμε συντελεστές σταθερούς, επιλέξαμε να κάνουμε χρήση συντελεστών που μεταβάλλονται ανά χρονικό διάστημα $\Delta t = 1$ έτσι ώστε να επιτύχουμε καλύτερη ακρίβεια στη λύση του συστήματος μας.

Για την επίλυση αυτού του συστήματος έγινε χρήση τριών γλωσσών προγραμματισμού τόσο με βάση τις επιδόσεις της κάθε γλώσσας σε συγκεκριμένες διαδικασίες, όσο και την ευκολία στην συγγραφή του απαιτούμενου κώδικα. Αρχικά χρησιμοποιήσαμε την γλώσσα προγραμματισμού Python για την συλλογή των δεδομένων από το yahoo finance και τη λήψη των ακρωνυμίων των μετοχών που μετέχουν στον S&P 500 από τη wikipedia. Η επίλυση του συστήματος έγινε με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Julia version 1.5.2 μίας και είναι μία σύγχρονη γλώσσα που είναι προσανατολισμένη στη βελτιστοποίηση των επιδόσεων ειδικά όσον αφορά την φυσική γραφή του κώδικα. Τέλος έγινε χρήση της γλώσσας προγραμματισμού R που είναι μία γλώσσα προσανατολισμένη στην επεξεργασία δεδομένων με πλήθος βιβλιοθηκών, άρθρα οργανωμένων με πλήρη στοιχειοθέτηση και επεξήγηση των αλγορίθμων και των διαδικασιών.

Στην συνέχεια της εργασίας, κεφάλαιο 4, θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τη μεθοδολογία μέσω της οποίας εμείς θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε το θέμα του συγχρονισμού στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και συγκεκριμένα στις μετοχές του δείκτη S&P 500 με το μοντέλο των (Zhao et al., 2015).

Το κεφαλαίο 5 περιλαμβάνει τα εμπειρικά αποτελέσματα όπως αυτά αποτυπώθηκαν από την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Ενώ το τελευταίο μέρος, κεφάλαιο 6, περιλαμβάνει τα συμπεράσματα όπως αυτά προέκυψαν από την ανάλυσή μας και τους προβληματισμούς που τίθενται προς μελλοντική διερεύνηση.

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Στο παρόν κεφαλαίο θα αναφερθούμε περιληπτικά σε χαρακτηριστικές εργασίες που μελετήθηκαν στο θέμα του συγχρονισμού των αγορών κεφαλαίου με τη χρήση διαφόρων μεθόδων, για διαφορετικές χρονικές περιόδους και για διαφορετική συχνότητα λήψης δεδομένων. Οι εργασίες που θα παρουσιάσουμε επιλεχθήκαν με κριτήριο την συνάφειά τους με το θέμα που ερευνούμε.

2.1 Συγχρονισμός Χρηματαγορών με γραμμικά στοχαστικά μοντέλα

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε εργασίες που ως βασική μεθοδολογία έχουν τον έλεγχο συνολοκλήρωσης του (S. Johansen, 1991) καθώς και διανυσματικές μεθόδους. Το κοινό όλων αυτών των εργασιών, είναι ότι αντιμετωπίζουν της οικονομικές χρονοσειρές ως γραμμικές στοχαστικές διαδικασίες.

Ξεκινώντας τις αναφορές μας θα δούμε την εργασία των (Kwon & Shin, 1999) όπου μελετάτε η συνολοκλήρωση και η αιτιότητα μεταξύ μακροοικονομικών μεταβλητών και των αποδόσεων του δείκτη του χρηματιστηρίου της Νότιας Κορέας (KOSPI). Η περίοδος της έρευνας αφορά το χρονικό διάστημα από τον Ιανουάριο του 1980 έως τον Δεκέμβριο του 1992 ενώ τα δεδομένα έχουν ληφθεί σε μηνιαία βάση. Το γενικό συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν καταδεικνύει την ύπαρξη άμεσης σχέσης και αιτιότητας μεταξύ των τιμών του χρηματιστηρίου της Κορέας και του εμπορίου. Επίσης εκείνο σημειώνεται από τους ερευνητές είναι ότι οι τιμές στο χρηματιστήριο που μελετήθηκε δεν αποτελούν δείκτη οδηγό (leading indicator) για την πορεία της πραγματικής οικονομίας γεγονός που αντιβαίνει προηγούμενες υποθέσεις του Fama.

Στη συνέχεια έχουμε την εργασία του (Walti, 2005) με θέμα «Οι μακροοικονομικοί παράγοντες του συγχρονισμού των χρηματαγορών» που μελετώνται οι επιδράσεις μακροοικονομικών δεικτών στην πορεία τιμών των δεικτών χρηματιστηρίων. Η περίοδος της έρευνας είναι από 1973 έως το 1997 με μηνιαία συχνότητα δεδομένων. Τα συμπεράσματα είναι παρόμοια με αυτά της προηγούμενης εργασίας παρά το γεγονός ότι έχουμε την εισαγωγή και επιπλέον μεταβλητών όπως αυτό της τιμής του χρυσού. Εδώ επίσης αναδεικνύεται και το γεγονός ότι η αύξηση της έντασης του συγχρονισμού που προκύπτει από τη συνολοκλήρωση είναι προϊόν της αύξησης της αβεβαιότητας των αγορών. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι ο ίδιος ερευνητής (Wälti, 2011) επανέρχεται εξετάζοντας το θέμα του συγχρονισμού με την βοήθεια των μεθόδων συνολοκλήρωσης πριν και κατά την διάρκεια της Ευρωπαϊκής

νομισματικής ολοκλήρωσης καταλήγοντας σε παρόμοια συμπεράσματα που ενισχύουν τις προηγούμενες υποθέσεις του.

Στην εργασία των (Martens & Roon, 2001) εξετάζεται ο συγχρονισμός των ημερησίων αποδόσεων και η δυναμική του συσχετισμού μεταξύ διεθνών χρηματιστηριακών αγορών για την περίοδο από τον Αύγουστο του 1990 έως τον Νοέμβριο του 1998. Στην ουσία εξετάζονται με διάφορα εργαλεία οι συσχετίσεις που προκύπτουν όταν όλα τα χρηματιστήρια της έρευνας είναι ανοικτά (την ίδια χρονική στιγμή). Τα χρηματιστήρια που εξετάζονται είναι US (S&P 500), UK (FTSE 100), France (CAC 40). Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο συγχρονισμός εδώ είναι χρονικός και όχι χωρικός. Επίσης σημαντική επίδραση φαίνεται να έχουν μόνο οι μεγάλες αρνητικές αποδόσεις. Αυτές είναι που επηρεάζουν και την δυναμική του συστήματος. Μεγάλη σημασία δίνεται στην συνδιακύμανση.

Στην έρευνα των (Égert & Kočenda, 2011) μελετάτε η χρονική διαφοροποίηση του συγχρονισμού των Ευρωπαϊκών χρηματιστηρίων. Η μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία αφορά τη δυναμική υπό συνθήκη συσχέτισης και τη χρήση των μοντέλων GARCH. Η μελέτη περιλαμβάνει τα χρηματιστήρια της Γαλλίας, Γερμανίας, Αγγλίας, Ουγγαρία, Πολωνία, Τσεχία για την χρονική περίοδο 2003 έως 2006 λαμβάνοντας ημερήσια δεδομένα. Η επιλογή των αγορών δεν είναι τυχαία καθώς αφορούν σε τρεις χώρες που βρίσκονται στον ισχυρό πυρήνα της Ευρώπης και σε τρεις χώρες που είναι σχετικά νέα μέλη και αναπτυσσόμενες αγορές. Στα συμπεράσματα αναφέρετε ότι η Γερμανία με τη Γαλλία δείχνουν να έχουν ισχυρό συγχρονισμό (εδώ εκφράζεται με τη μορφή της υψηλής συσχέτισης) ενώ οι νέες χώρες(Ουγγαρία Πολωνία, Τσεχία) δεν δείχνουν να συγχρονίζονται ούτε μεταξύ τους ούτε με τις παλιές χώρες.

Στο ίδιο πνεύμα είναι και η εργασία των (Mylonidis & Kollias, 2010) όπου μελετάτε η δυναμική της σύγκλισης έξι μεγάλων Ευρωπαϊκών χρηματιστηρίων. Οι δείκτες που εξετάζονται είναι αυτοί της, Ιταλίας, Ισπανίας, Ηνωμένου Βασιλείου, Γερμανίας και Γαλλίας για την περίοδο 1999 έως 2009 λαμβάνοντας ημερήσιες παρατηρήσεις. Η περίοδος αυτή αφορά την περίοδο της νομισματικής ενοποίησης που αποτέλεσε μία μεγάλη δομική αλλαγή στην Ευρωπαϊκή ένωση. Σαν συμπέρασμα έχουμε ότι υπάρχουν δομικές αλλαγές που επηρεάζουν τα αποτελέσματα της συν-ολοκλήρωσης, τα σοκ μπορούν να διαδοθούν ευκολότερα, η σύγκλιση των αγορών που μελετήθηκαν είναι χρονικά εξαρτώμενη. Τέλος στην έρευνα αυτή τίθεται το ερώτημα για το αν θα πρέπει οι σειρές που περιλαμβάνουν μεγάλες δομικές αλλαγές πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ένα ενιαίο σύνολο ή θα πρέπει με κάποιο τρόπο να αντιμετωπίζεται το φαινόμενο.

Στο ίδιο πλαίσιο βρίσκεται και η εργασία των (Narayan & Smyth, 2005) μελετάτε η συνολοκλήρωση των χρηματιστηρίων μεταξύ της Νέας Ζηλανδίας, Αυστραλίας και των χωρών της G7 για την περίοδο 1975 έως 2003 λαμβάνοντας μηνιαία δεδομένα. Στην παρούσα έρευνα έγινε σύγκριση δύο μεθόδων Cointegration Johansen, Gregory and Hansen. Οι μέθοδοι αυτοί δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Το Johansen test δείχνει ότι το χρηματιστήριο της Νέας Ζηλανδίας δε συνδέεται με κανένα άλλο ενώ το Gregory & Hansen test δείχνει ότι το χρηματιστήριο της Ν. Ζηλανδίας και των ΗΠΑ συνολοκληρώνονται. Μία σημαντική παρατήρηση που αναφέρεται στη συνολοκλήρωση είναι ότι η ύπαρξη αυτού του φαινομένου δηλώνει ύπαρξη κοινής στοχαστικής τάσης.

2.2 Δίκτυα Αγορών Κεφαλαίου

Στην παρούσα παράγραφο θα αναφερθούμε σε μεθόδους που μελετούν το συγχρονισμό και τη συνάφεια των αγορών με τη χρήση της θεωρίας δικτύων. Ως κύριος δείκτης της έντασης των συνδέσεων χρησιμοποιείται η συσχέτιση.

Ως πρώτη εργασία θα αναφερθούμε στους (Garas et al., 2010) όπου πραγματοποιείται μία μοντελοποίηση των δεικτών χρηματιστηρίων σε δίκτυο δαχτυλίδι (ring network) για το έτος 2007. Δημιουργήθηκαν δύο διαφορετικά δίκτυα δύο διαφορετικές βάσεις δεδομένων με σημαντικότερο εκείνο που δημιουργήθηκε από τις εμπορικές συναλλαγές. Στον εσωτερικό του πυρήνα περιέχονται 12 χώρες, που δεν είναι όλες «μεγάλες». Έκπληξη για τους ερευνητές αποτέλεσε η ύπαρξη του Βελγίου στον εσωτερικό πυρήνα που αποτελεί μία σχετικά μικρή πληθυσμιακά χώρα. Στη συνέχεια εφαρμόστηκε το μοντέλο SIR (Susceptible -Infected – Recovered model) που αφορά στην διάδοση των επιδημιών. Από την προσομοίωση φάνηκε πως η χώρα του πυρήνα αποτελούν σημαντικό παράγοντα, καθώς αν μία μεγάλη οικονομική κρίση ξεκινήσει από εκεί έχει διασπορά που αγγίζει μεγάλα Ποσοστά.

Στην εργασία των (Roy & Sarkar, 2011) έχουμε την ομαδοποίηση των μετοχών σε δίκτυο με τη χρήση του MST χρησιμοποιώντας μετοχές από 20 δείκτες σε 13 χώρες, (εβδομαδιαίες τιμές) για την περίοδο Ιαν. 1998 -Ιαν. 2011. Σκοπός της εργασίας είναι να κατατάξουμε τις μετοχές σε ομάδες με βάση την δημοφιλεία τους και να δούμε αν υπάρχουν μετοχές που η πορεία της τιμής τους να επηρεάζει την πορεία των μετοχών συνολικά. Σημειώνουμε ότι η περίοδος επιλέχθηκε έτσι ώστε να περιλαμβάνει την κατάρρευση της επενδυτικής τράπεζας Lehmann Brothers που θεωρείται κομβικό γεγονός στην εξέλιξη της πορείας των αγορών.

Στην εργασία των (Minello et al., 2020) με τίτλο «Open system quantum thermodynamics of time-varying graphs» μελετώνται μετοχές του NYSE, γονίδια από την Fruit Fly, επιπλέον

οικονομικό δίκτυο USSM με περίοδο έρευνας Σετ 1 Μάιος 1987 – Φεβ. 2011 Σετ 3 Ιαν. 1995 - Δεκ. 2016 . Η μεθοδολογία αφορά τη χρήση των Schrödinger equation, Hamiltonian, Laplacian, time varying networks για μία σειρά μεταβλητών που αφορά τις μετοχές του NYSE, τα γονίδια από τη Fruit Fly και το οικονομικό δίκτυο USSM. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις διασυσχετίσεις των μετοχών και κάνουμε το δίκτυο κρατώντας τις συνδέσεις που υπερβαίνουν κάποιο κατώτερο όριο στην τιμή της διασυσχέτισης. Αυτή είναι και η συνήθης πρακτική στη δημιουργία δικτύων από χρονοσειρές μετοχών. Εδώ επίσης παρουσιάζεται και συσχετισμός των διακυμάνσεων με σημαντικά γεγονότα όπως κυβερνητικές αποφάσεις και αλλαγές στη διεθνή πολιτική σκηνή, τις οποίες το μοντέλο φαίνεται να εντοπίζει με ακρίβεια.

2.3 Ντετερμινιστικό Χάος στις Χρηματαγορές

Στην εργασία των (Pandey et al., 1998) έχουμε τη διερεύνηση της ύπαρξης ντετερμινιστικού χάους στα χρηματιστήρια για την περίοδο Φεβρουάριος 1978 – Απρίλιος 1986 (ημερήσιες τιμές). Ένα από τα σημαντικά σημεία της εργασίας είναι η παρουσίαση του BDS τεστ για την εξέταση των υπολοίπων. Το τεστ δείχνει αν τα υπόλοιπα είναι iid ή περιέχουν πληροφορία. Εδώ κανείς πρέπει να προσέξει καθώς υπάρχει περίπτωση να απορρίπτεται μεν η μηδενική υπόθεση όχι όμως λόγω της ύπαρξης το χάους. Για την ανάλυση των δεδομένων προτείνεται να εφαρμόσουμε μία AR διαδικασία πρώτα για να απαλείψουμε τη γραμμική επίδραση και στη συνέχεια να δούμε τα υπόλοιπα αν περιέχουν μη γραμμική δυναμική. Σα γενικό συμπέρασμα έχουμε ότι δε μπορούμε να δεχθούμε πως οι μη γραμμικές μέθοδοι έχουν μεγαλύτερη επεξηγηματική ικανότητα από τις γραμμικές μεθόδους.

Η έρευνα των (Kim et al., 2010) ελέγχει το arbitrage μεταξύ των τιμών του δείκτη S&P 500 και των παραγώγων του δείκτη για το έτος 1993. Η διαφορά εδώ είναι ότι τα δεδομένα είναι ανά λεπτό. Σα συμπέρασμα της εργασίας έχουμε ότι τα future οδηγούν τις τιμές του δείκτη τόσο βραχυχρόνια όσο και μακροχρόνια. Έτσι μπορούμε να πούμε πως τα future είναι ένας ασθενείς εξωγενείς παράγοντας ενάντια στις διαφοροποιήσεις των τιμών, ενώ παράλληλά οι τιμές των future δε δείχνουν να ανταποκρίνονται στις μεταβολές των τιμών του δείκτη.

Στην εργασία των (Jabbarzadeh et al., 2016) μελετώνται οι τιμές των δεικτών S&P 500, NASDAQ για την περίοδο Μάρτιος 2011 έως Οκτώβριος 2014. Στόχος της εργασίας είναι να ελέγξει την αποτελεσματικότητα της τεχνικής ανάλυσης και των δεικτών που αυτή χρησιμοποιεί με τη χρήση μη γραμμικών μεθόδων. Στη συνέχεια να συγκρίνει τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την προαναφερθείσα μέθοδο με τα αποτελέσματα μη γραμμικών μεθόδων. Πολύ διαφορετική προσέγγιση καθώς αντί να προβλέψει τις τιμές

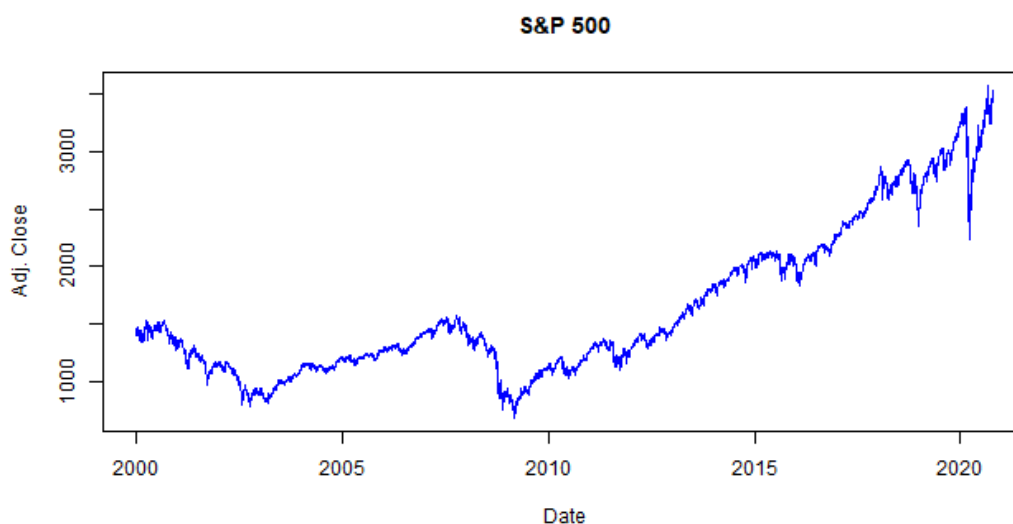
απευθείας κάνει πρώτα μία αξιολόγηση των δεικτών που προκύπτουν από την τεχνική ανάλυση, με τη χρήση μη γραμμικών μεθόδων. Στα τελικά συμπεράσματα έχουμε ότι τα αποτελέσματα δεν έδειξαν σημαντική διαφορά μεταξύ των μη γραμμικών πιθανοτικών μοντέλων και των άλλων τεχνικών.

Τέλος στην εργασία των (Madaleno & Pinho, 2012) με τίτλο “International stock market indices comovements: a new look” έχουμε τη χρήση της Continuous time wavelet μεθόδου για τη διερεύνηση της συνάφειας μεταξύ των δεικτών FTSE100, DJIA30 NIKKEI25, BOVESPA για την περίοδο από Οκτώβριο 1997 έως Μάρτιο 2009. Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου της cross-wavelet coherency-phase analysis είναι η ικανότητα της ανάλυσης μεταβατικών δυναμικών για τη σχέση μεταξύ δύο χρονοσειρών. Στα συμπεράσματα έχουμε ότι οι λιγότερο ανεπτυγμένες χώρες έχουν μικρότερη συσχέτιση με τους δείκτες που βρίσκονται μακριά από γεωγραφικής άποψης. Τα αποτελέσματα από την απλή διασυσχέτιση των χρηματιστηριακών δεικτών δείχνουν ότι αυτές οι αγορές εμφανίζουν σημαντικά μεγαλύτερο βαθμό ολοκλήρωσης μεταξύ τους. Τα "τοπικά" γεγονότα δε διαδίδονται με τόση ευκολία και παρουσιάζουν χρονική υστέρηση στην μετάδοσή τους. Υπάρχει επίσης ισχυρή σχέση μεταξύ συνοχής και γεωγραφικής θέσης, χώρες που γειτονεύουν έχουν μεγαλύτερη συνοχή.

3. Δεδομένα

Τα δεδομένα μας αναφέρονται στις μετοχές του δείκτη S&P 500 του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης. Για τη μελέτη μας επιλέξαμε 375 από τις 503 μετοχές που μετέχουν στη διαμόρφωση του δείκτη, καθώς αυτές ήταν που είχαν μία συνεχή παρουσία στην περίοδο της έρευνας. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε πως ο δείκτης S&P 500 θεωρείται στη βιβλιογραφία ως ο σημαντικότερος και αντιπροσωπευτικότερος δείκτης της αγοράς κεφαλαίου των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Τα δεδομένα μας ελήφθησαν από την διαδικτυακό ιστότοπο Yahoo Finance¹, ενώ τα ονόματα των μετοχών που μετέχουν στο δείκτη ελήφθησαν από τη Wikipedia.

Ως περίοδο έρευνας επιλέξαμε το χρονικό διάστημα από 01/01/2000 έως 25/10/2020. Εδώ αξίζει να αναφέρουμε ότι υπάρχει ένα κενό στη λειτουργία της συγκεκριμένης αγοράς από την 11/09/2000 έως 17/11/2000 καθώς είχαμε την τρομοκρατική επίθεση τις 11/09/2000. Το χρονικό αυτό διάστημα το χρηματιστήριο έμεινε κλειστό. Στην εικόνα (3.1) παρουσιάζουμε την πορεία του δείκτη στο χρονικό διάστημα που επιλέξαμε.



Εικόνα 3.1 Οι προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P 500 για την περίοδο από 01/01/2000 έως 25/10/2020

Στην παρούσα μελέτη για την επεξεργασία των δεδομένων επιλέχθηκαν οι προσαρμοσμένες τιμές κλεισίματος (Adjusted Close Values) των μετοχών που μετέχουν στην παρούσα έρευνα. Τα ακρωνύμια των μετοχών που επιλέχθηκαν στην παρούσα βρίσκονται στο παράρτημα Α. Η επεξεργασία των δεδομένων έγινε με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού R v. 4.0.3 στο προγραμματιστικό περιβάλλον RStudio.

¹ Η διεύθυνση από την οποία λάβαμε τις τιμές των δεδομένων <https://finance.yahoo.com>

4. Θεωρητικό Υπόβαθρο

Εφαλτήριο για την εμπειρική ανάλυση που θα ακολουθήσει στο επόμενο κεφάλαιο αποτέλεσαν οι εργασίες των (Kuramoto & Battogtokh, 2002), (Abrams & Strogatz, 2006) και (Zhao et al., 2015). Σε αυτές τις εργασίες θεμελιώνεται το νέο αυτό φαινόμενο, που στη βιβλιογραφία καλείται χμιαρική κατάσταση μεταξύ ταλαντωτών που βρίσκονται σε μη τοπική σύζευξη. Το όνομα αυτό, που εμφανίζεται για πρώτη φορά στην εργασία των (Abrams & Strogatz, 2004) δόθηκε ως αναφορά στο μυθικό τέρας Χίμαιρα της ελληνικής μυθολογίας μίας και αντιπροσωπεύει την πολυμορφία στην σωματοδομή. Σε αντιστοιχία με το όνομα, το φαινόμενο βασίζεται στην συνύπαρξη περιοχών συνάφειας και ασυνάφειας (coherence – incoherence) μεταξύ ταυτόσημων ταλαντωτών που βρίσκονται σε δίκτυο με μη ισχυρές συνδέσεις. Το θεωρητικό υπόβαθρο αυτού του φαινομένου είναι που θα αναλυθεί στον παρόν κεφάλαιο κάνοντας αναφορά στις αρχικές εργασίες που το θεμελίωσαν.

Το βασικό σύστημα που θα μελετήσουμε είναι αυτό των Ginzburg-Landau, που στην βιβλιογραφία αναφέρετε και ως ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει συλλογικές συμπεριφορές, αποτελώντας παράλληλα ένα από τα βασικά συστήματα στην αναγνώριση μοτίβων (Abrams & Strogatz, 2006). Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την εργασία των (Schmidt et al., 2015), που έγινε εφαρμογή του συστήματος στην διερεύνηση των νευρωνικών κόμβων (neural hubs) και του δυναμικού συγχρονισμού στον ανθρώπινο εγκέφαλο, καθώς και την διδακτορική διατριβή του (Stosic, 2018). Πλήθος άλλων εφαρμογών μπορούμε επίσης να βρούμε και στο βιβλίο (Zakharova, 2020) όπου περιγράφονται αναλυτικά παραδείγματα χρήσης του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων Ginzburg-Landau καθώς και η εμφάνιση χμιαρικών καταστάσεων σε τέτοιου είδους συστήματα.

4.1 Το σύστημα Ginzburg – Landau

Το σύστημα Ginzburg - Landau αποτελεί το θεμέλιο λίθο στη διερεύνηση συστημάτων ταλαντωτών με μη τοπική σύζευξη στο οποίο εμφανίζονται φαινόμενα συνύπαρξης υποσυνόλων συνάφειας – ασυνάφειας μεταξύ των ταλαντωτών, καθώς είναι το πρώτο και απλούστερο σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο οποίο παρατηρήθηκε το φαινόμενο από τους (Kuramoto & Battogtokh, 2002).

Έστω A το μιγαδικό πλάτος της ταλάντωσης για μη τοπική σύζευξη που εκφράζεται από την εξίσωση (4.1)² σε μία χωρική και μία χρονική διάσταση. Στην εξίσωση (4.1) το πλάτος

² Ο συμβολισμός στις εξισώσεις ακολουθεί το πρότυπο της εργασίας των (Kuramoto & Battogtokh, 2002)

της ταλάντωσης ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο και αυτό γίνεται για να μπορέσουμε κατά τη διάρκεια της επίλυσής του να κάνουμε χρήση όλου εκείνου το «οπλοστασίου» της Θεωρίας των Μιγαδικών Συναρτήσεων με απώτερο στόχο τη διαμόρφωση μίας όσο το δυνατόν κομψότερης λύσης. Στην περίπτωση μας το πλάτος της ταλάντωσης A δίνεται να εκφράσει τη μεταβολή της τιμής μίας μετοχής που μετέχει στον δείκτη S&P 500, ενώ η πρώτη παράγωγος του πλάτους, την ταχύτητα με την οποία αυτή η μεταβολή πραγματοποιείται.

$$\frac{\partial}{\partial t}A(x, t) = (1 + i\omega_0)A - (1 + ib)|A|^2A + K(1 + ia)(Z(x, t) - A(x, t)) \quad (4.1)$$

με $x \in [0,1]$

Η σταθερά K στην εξίσωση (4.1) είναι εκείνη η παράμετρος που καθορίζει και την ισχύ της σύζευξης μεταξύ των ταλαντωτών, επηρεάζοντας άμεσα την συμπεριφορά τους συστήματος. Οι παράμετροι ω_0 και b είναι εκείνες, που όπως αναφέρεται στην εργασία των (Aranson & Kramer, 2002), καθορίζουν τη γραμμική και τη μη γραμμική διασπορά. Η εξίσωση (4.1) παρέχει μία μειωμένη, από άποψη πλήθους μεταβλητών, καθολική περιγραφή ενός ασθενούς μη γραμμικού χωροχρονικού φαινομένου μέσα σε ένα διευρυμένο συνεχές μέσο, του οποίου η γραμμική διασπορά μπορεί να περιγραφεί από ένα γενικό τύπο και είναι ανεξάρτητη κάτω από μία καθολική μεταβολή του πλάτους.

Η ποσότητα $Z(x, t)$ την οποία θα καλούμε μέσο πεδίο εκφράζει την επίδραση της μη τοπικής σύζευξης και δίνεται από την σχέση (4.2):

$$Z(x, t) = \int G(x - x')A(x', t)dx' \quad (4.2)$$

Ενώ η συνάρτηση G που μεταβάλλεται ως προς την απόσταση με βάση της σχέση (4.3)

$$G(y) = \frac{\kappa}{2} \exp(-\kappa|y|) \quad (4.3)$$

εκφράζει τον πυρήνα της σύζευξης και είναι κανονικοποιημένη. Η εξίσωση (4.3) είναι ο πυρήνας που χρησιμοποιήθηκε από τους (Kuramoto & Battogtokh, 2002), μέσω του οποίου έγινε για πρώτη φορά ορατή η εμφάνιση του φαινομένου που μελετούμε. Στην εργασία των (Abrams & Strogatz, 2006), σε μία προσπάθεια να αναλυθεί και να διερευνηθεί σε βάθος για πρώτη φορά το νεοεμφανισθέν αυτό φαινόμενο, ο πυρήνας εκφράζεται από την εξίσωση (4.4)

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} (1 + A \cos x) \quad \text{με } 0 \leq A \leq 1 \text{ και } -\pi \leq x \leq \pi \quad (4.4)$$

Το κοινό χαρακτηριστικό που προτείνεται από τους (Abrams & Strogatz, 2004) για τη μορφή των προαναφερθέντων συναρτήσεων, είναι ότι οι πυρήνες G θα πρέπει να έχουν τη μορφή

αναπτύγματος μίας πεπερασμένης σειράς Fourier. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (4.1) είναι που εκφράζει τη σύζευξη είναι με τέτοιο τρόπο διαμορφωμένος έτσι ώστε να μπορεί να εξαλειφθεί όταν το πλάτος A είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο χώρο. Αν το A δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένο, αλλά εμπεριέχει μία σαφώς μεγάλου μήκους κυματομορφή ο συγκεκριμένος όρος μπορεί να προσεγγιστεί από τον όρο της διάχυσης. Τότε η εξίσωση (4.1) μειώνεται σε ένα σύνηθες σύστημα μιγαδικών εξισώσεων Ginzburg – Landau.

Το σύστημα των εξισώσεων που εκφράζει η εξίσωση (4.1), με την προϋπόθεση ότι η σύζευξη είναι ασθενής, δηλαδή για σχετικά μικρές τιμές της σταθεράς K , έχει δειχθεί από τους (Shima & Kuramoto, 2004) ότι μπορεί να μειωθεί και άλλο στον χώρο των φάσεων παίρνοντας την μορφή που εκφράζει η εξίσωση (4.5)³

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \omega - \int G(x - x') \sin(\phi(x, t) - \phi(x', t) + \alpha) dx' \quad (4.5)$$

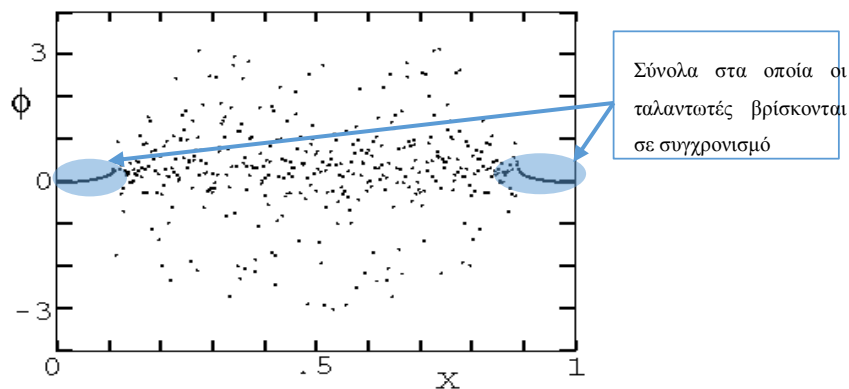
Όπου η χρονική κλίμακα έχει αλλάξει έτσι ώστε να κανονικοποιηθεί η ισχύς της σύζευξης, ω είναι η φυσική συχνότητα μεταφερόμενη σε αντίστοιχη κλίμακα, και η σταθερά φάσης α στην συνάρτηση φάσεως – σύζευξης σχετίζεται με τις αρχικές παραμέτρους μέσω της σχέσης (4.6). Η παράμετρος α είναι και αυτή που δίνει το μέτρο της ασυμμετρίας στο σύστημα. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε, όπως αναφέρεται και στην εργασία των (Abrams & Strogatz, 2006), το εύρος των τιμών που οδηγεί στην δημιουργία χμαιορικών καταστάσεων είναι στο διάστημα $\alpha \in (0, \pi/2)$.

$$\tan \alpha = \frac{b - a}{1 + ab}, \quad \alpha(b - a) > 0 \quad (4.6)^4$$

Κάτω από την συνθήκη των παραμέτρων που αντιστοιχούν σε προσομοιώσεις της εξίσωσης (4.1), όπως αυτές προέκυψαν από την εργασία των (Kuramoto & Battogtokh, 2002), προκύπτει η εικόνα (4.1) στην οποία μπορούμε να διακρίνουμε ένα χαρακτηριστικό γράφημα που αναπαριστά τους δύο χώρους συνάφειας και ασυνάφειας σε μία δεδομένη χρονική στιγμή.

³ Η εξίσωση (4.5) είναι γνωστή στην βιβλιογραφία και ως μοντέλο Kuramoto.

⁴ Με έντονα χρώματα έχουμε τον λατινικό χαρακτήρα a , ενώ με κανονική γραφή το ελληνικό άλφα.



Εικόνα 4.1 Στην εικόνα αυτή μπορούμε να διακρίνουμε τα δύο υποσύνολα συνάφειας – ασυνάφειας. Οι τιμές προέκυψαν μετά από προσομοίωση λύσεων της εξίσωσης (3.1) για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Η εικόνα είναι από την εργασία των (Kuramoto & Battogtokh, 2002). Παρόμοια είναι και η εικόνα που παρουσιάζεται στην εργασία των (Abrams & Strogatz, 2006). Στην εργασία αυτή δίνονται περισσότερες λεπτομέρειες για τις τιμές των παραμέτρων.

Επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στα μοτίβα των φάσεων που λαμβάνουμε από την εξίσωση (4.5) εισάγουμε την σχετική φάση ψ που ορίζεται από την σχέση (4.7)

$$\phi = \Omega t + \psi \quad (4.7)$$

που περιγράφει τη δυναμική των διακυμάνσεων των φάσεων από την κίνηση αναφοράς με κάποια ταχύτητα μετατόπισης Ω της οποίας η τιμή είναι ακόμη ανοικτή. Ξαναγράφοντας την εξίσωση (4.5) κάνοντας χρήση του ψ έχουμε την σχέση (4.8).

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \omega - \Omega - \int dx' G(x - x') \sin(\psi(x, t) - \psi(x', t) + \alpha) \quad (4.8)$$

Σε μία γενίκευση της θεωρίας της μετάβασης του συγχρονισμού ενός καθολικά συνδεδεμένου ταλαντωτή με κατανομή συχνοτήτων, θα εισάγουμε μια μιγαδικής τάξης παράμετρο με συντελεστή R και φάσης Θ μέσω της εξίσωσης (4.9).

$$\int dx' G(x - x') \exp[i\psi(x', t)] = R(x, t) \exp[i\Theta(x, t)] \quad (4.9)$$

Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.9) ουσιαστικά είναι μία κυλιόμενη μέση τιμή των $e^{i\theta}$ επάνω σε ένα παράθυρο με κέντρο το x , με το πλάτος του παραθύρου να καθορίζεται από τον πυρήνα G . Σε αντίθεση με την παράμετρο τάξης που ορίζεται για καθολική σύζευξη ταλαντωτών, η παραπάνω ποσότητα είναι χωρικά – εξαρτώμενη. Οι νέες αυτές παράμετροι R και Θ μας δείχνουν τον έλεγχο ενός πεδίου δυνάμεων σε ένα σύνολο ανεξάρτητων ταλαντωτών. Το γεγονός αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί από την εξίσωση (4.10) με όρους της παραμέτρου τάξεως σε μία εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός ταλαντωτή.

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \omega - \Omega - R(x, t) \sin(\psi(x, t) + \alpha + \Theta(x, t)) \quad (4.10)$$

Τα χωρικά προφίλ των $R(x)$ και $\Theta(x)$ μετά από ένα μακροχρόνιο μέσο όρο παρουσιάζονται στην εικόνα (4.2). Παρατηρούμε ότι ο εξαναγκασμός του μέσου πεδίου είναι ισχυρότερος στις άκρες από ότι στην μέση των διαγραμμάτων 3a και 4a της εικόνας (4.2). Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι οι συναρτήσεις R και Θ το κοινό πεδίο εξαναγκασμού (forcing field).

Τα χωρικά προφίλ των $R(x)$ και $\Theta(x)$ μετά από έναν μέσο όρο σε ένα αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα εμφανίζονται στην εικόνα (4.2) στις 3a και 3b. Μπορούμε να δούμε ότι το πλάτος του πεδίου εξαναγκασμού είναι ισχυρότερο στα άκρα και λιγότερο ισχυρό στην μέση του συστήματος. Αν η κατανομή των φάσεων παρομοιάζει σε αυτήν της εικόνας (4.1) και είναι στατιστικά στάσιμη με μία σταθερή καθολική ολίσθηση με ταχύτητα Ω , τότε τα R και Θ είναι χρονικά ανεξάρτητα. Η ασυμπτωτική τους σταθερότητα επιβεβαιώνεται και από το γεγονός ότι η κύμανση της χρονικής αλληλουχίας $R(x, t)$ που παρατηρείται στο μέσο του συστήματος για $x = 1/2$ δίνει μία τυπική απόκλιση της τάξης του 0.008, όπως

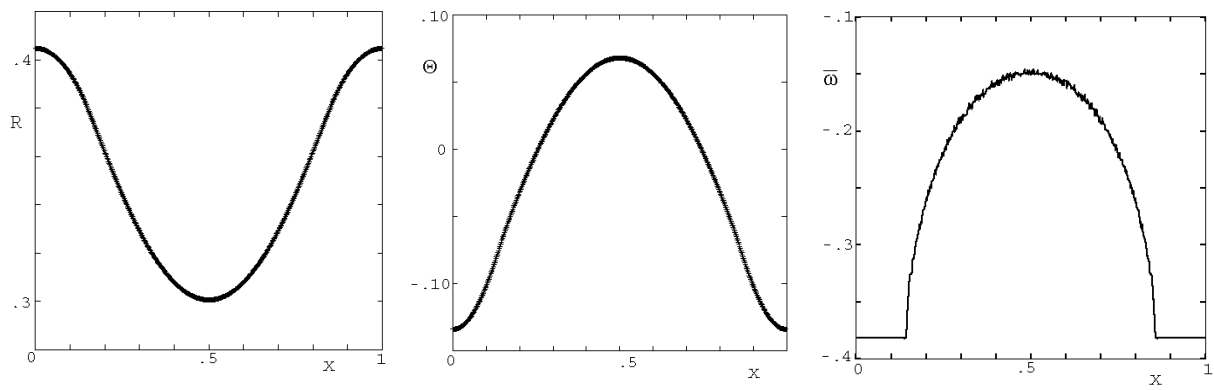


FIG. 3a

FIG. 3b

FIG. 3c

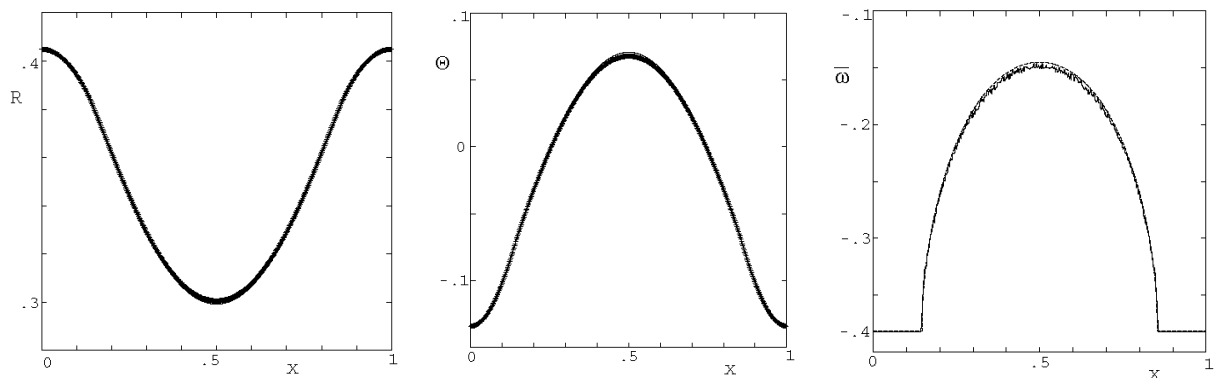


FIG. 4a

FIG. 4b

FIG. 4c

Εικόνα 4.2 Τα χαρακτηριστικά διαγράμματα των $R, \Theta, \bar{\omega}$. Οι εικόνες είναι από την εργασία των (Kuramoto & Battogtokh, 2002). Η αρίθμηση κάτω από τα γραφήματα είναι από το προαναφερθέν άρθρο. Αποτελούν δε χαρακτηριστικά γραφήματα συστημάτων στα οποία εμφανίζονται χιμαιρικές καταστάσεις. Στα παραπάνω γραφήματα διαπιστώνουμε μία ισχυρή επίδραση του πεδίου στα άκρα και μία ασθενής επίδραση του πεδίου σύζευξης στην μέση.

χαρακτηριστικά αναφέρεται στην εργασία των (Kuramoto & Battogtokh, 2002), γεγονός που αποδίδεται από τους ερευνητές σε επιδράσεις πεπερασμένου μεγέθους. Παρόμοιες ιδιότητες μπορούν να επιβεβαιωθούν και για την συνάρτηση $\Theta(x, t)$.

Το γράφημα 3c της εικόνας (4.2) δείχνει την κατανομή των πραγματικών συχνοτήτων $\bar{\omega}(x)$ ξεχωριστά για κάθε ταλαντωτή. Αυτό μπορούμε να το εξάγουμε και εάν εφαρμόσουμε το μέσο όρο για μεγάλο χρονικό διάστημα. Στην περιοχή συνάφειας, οι συχνότητες ταλάντωσης έχουν ταυτόσημες τιμές Ω , ενώ στην περιοχή ασυνάφειας είναι κατανεμημένες με τέτοιο τρόπο ώστε να δίνουν μία καλά ορισμένη καμπύλη.

Οι δυναμικές που διαμορφώνονται τώρα στο σύστημα είναι ξεκάθαρες. Το σύστημα χωρίζεται σε δύο υποομάδες ταλαντωτών. Στην πρώτη ομάδα, το εξαναγκασμένο πλάτος είναι αρκετά μεγάλο ώστε να παρασύρει τους ταλαντωτές, έτσι ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα Ω . Σε αντίθεση, στην δεύτερη ομάδα το εξαναγκασμένο πλάτος είναι αρκετά ασθενές για να συμπαρασύρει τους ταλαντωτές, έτσι οι πραγματικές συχνότητες των μεμονωμένων ταλαντωτών διαφέρουν από το Ω .

4.2 Η θεωρία

Υποθέτοντας ότι τα R και Θ είναι χρονικά ανεξάρτητα, θα προσπαθήσουμε να βρούμε αρχικά λύση στην εξίσωση (4.10) για τις φάσεις $\psi(x, t)$ κάθε μία από τις οποίες θα πρέπει να είναι συναρτήσεις των $R(x)$ και $\Theta(x)$. Αυτές οι λύσεις στην συνέχεια αντικαθίστανται στην εξίσωση (4.9), οδηγώντας σε μία εξίσωση για τον καθορισμό R και Θ σαν συνάρτηση των R , Θ σε ένα αυτο-συνεπή τρόπο. Εφόσον η συλλογική συχνότητα Ω μένει ακόμη να καθοριστεί, θα εργαστούμε με ένα μη γραμμικό πρόβλημα ιδιοτιμών.

Εδώ η ερώτηση που γεννάτε έγκειται στο πλαίσιο της αντίθεσης που παρατηρείται μεταξύ της υποτιθέμενης χρονικής ανεξαρτησίας των R και Θ και της προφανής χρονικής εξάρτησης της λύσης της εξίσωσης (4.10) που είναι αληθής όταν η $R(x)$ είναι μικρότερη από μία συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή. Το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίστηκε στη μετάβαση του συγχρονισμού σε ένα καθολικό σύστημα ταλαντωτών φάσεως με κατανομή συχνοτήτων. Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση είναι ότι ο παράγοντας $\exp[i\psi(x', t)]$ εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (4.9) και πρέπει να αντικατασταθεί από το στατιστικό μέσο $\langle \exp[i\psi(x', t)] \rangle$. Αυτός ο μέσος μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση ενός κατάλληλου αμετάβλητου μεγέθους που είναι αρκετά εύκολο να βρεθεί.

Τα επιτυχημένα βήματα μου πρέπει να ληφθούν ώστε να επιτύχουμε μία τελική λύση είναι τα ακόλουθα. Παρατηρούμε ότι πρώτα η εξίσωση (4.10) αποδέχεται δύο τύπους λύσεων που αφορούν τη θέση των ταλαντωτών που μας αφορούν. Είναι σταθερές λύσεις και λύσεις που περιέχουν ολίσθηση. Αν $|R/(\omega - \Omega)| \leq 1$, έχουμε χρονικά ανεξάρτητες λύσεις που δίνονται από της σχέση:

$$\theta_0(R) = \sin^{-1} \left(\frac{\omega - \Omega}{R(x)} \right) - \alpha \quad (4.11)$$

Αν $|R/(\omega - \Omega)| > 1$, σε αντίθεση, έχουμε τη λύση που περιλαμβάνει ολίσθηση. Η πραγματική συχνότητα $\bar{\omega}$ που αντιστοιχεί στον αποσυγχρονισμένο ταλαντωτή ως συνάρτηση του R δίνεται από την εξίσωση:

$$\bar{\omega} = \Omega + (\omega - \Omega) \sqrt{1 - \left(\frac{R}{\omega - \Omega} \right)^2} \quad (4.12)$$

που αντιστοιχεί στην συλλογική συχνότητα Ω προσαυξημένη κατά τη μέση ταχύτητα ολίσθησης του ψ . Αντί να κάνουμε χρήση αυτής της λύσης ολίσθησης της εξίσωσης (4.10), χρησιμοποιούμε ένα αμετάβλητο μέγεθος, για παράδειγμα την πυκνότητα πιθανότητας $p(\theta, R)$ έτσι ώστε το ψ να λαμβάνει τιμές του θ για δοσμένο R , που είναι αντιστρόφως ανάλογο της ταχύτητας ολίσθησης για ψ όταν $\psi = \theta$. Έτσι έχουμε την εξίσωση (4.13)

$$p(\theta, R) = C(\omega - \Omega - R \sin \theta)^{-1} \quad (4.13)$$

όπου C είναι μία κανονικοποιημένη σταθερά που δίνεται από τη σχέση $C = (2\pi)^{-1} \sqrt{(\omega - \Omega)^2 - R^2}$. Όπως σημειώσαμε νωρίτερα, αυτό το αμετάβλητο μέγεθος χρησιμοποιείται για να αντικαταστήσουμε τον εκθετικό παράγοντα στο αριστερό μέρος της εξίσωσης (4.9) με έναν στατιστικό μέσο. Η ιδέα που υποκινεί αυτή την αντικατάσταση είναι ότι η ισορροπία μπορεί να είναι εφαρμόσιμη σε μικρό τοπικό υποσύνολο καθώς άπειρες ταλαντώσεις που ταλαντώνονται ανεξάρτητα περιέχονται ήδη σε κάθε τέτοιο υποσύστημα.

Το χωρικό προφίλ των $R(x)$ στην εικόνα (4.2) υποδηλώνει ότι υπάρχουν χωρικά σημεία $x = \frac{1}{2} \pm x_c$ στα οποία το R παίρνει την κριτική τιμή διαχωρίζοντας τους δύο τύπους λύσεων που περιγράψαμε προηγούμενος. Ήτοι, στο εσωτερικό του συνόλου $\left(|x' - \frac{1}{2}| \geq x_c \right)$ οι λύσεις είναι ολίσθησης, ενώ στο εξωτερικό του συνόλου $\left(|x' - \frac{1}{2}| \geq x_c \right)$ είναι σταθερές στο χρόνο. Έτσι η εξίσωση (4.9) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\int_0^1 dx' G(|x - x'|) \exp[i\Theta(x') - \alpha] h(R(x')) = R(x) \exp[i\Theta(x)] \quad (4.14)$$

όπου

$$h(R) = \begin{cases} \exp[i\theta_0(R)], & \left| x' - \frac{1}{2} \right| \geq x_c \\ \int_0^{2\pi} \exp(i\theta) p(\theta, R) d\theta, & \left| x' - \frac{1}{2} \right| < x_c \end{cases} \quad (4.15)$$

Η ανωτέρω έκφραση του $h(R)$ σε κάθε διάστημα μπορεί να αναλυθεί περαιτέρω στις εξισώσεις:

$$\exp[i\theta_0(R)] = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega - \Omega}{R}\right)^2} + i \frac{\omega - \Omega}{R} \quad (4.16)$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\theta) p(\theta, R) d\theta = \frac{i}{R} \left\{ \omega - \Omega - \sqrt{(\omega - \Omega)^2 - R^2} \right\} \quad (4.17)$$

Η εξίσωση (4.14) έως (4.17) αποτελούν μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τις τιμές των $R(x)$, $\Theta(x)$ και Ω . Χρησιμοποιώντας τα $R(x)$ και Ω μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις πραγματικές συχνότητες των ταλαντωτών που δεν βρίσκονται σε συγχρονισμό από την εξίσωση (4.12).

Υπάρχει μία μοναδική τιμή του Ω για τη συλλογική συχνότητα για την οποία η ικανή και αναγκαία συνθήκη δίνει λύση. Αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί αριθμητικά και μπορεί να συγκριθεί με τα αριθμητικά αποτελέσματα των προσομοιώσεών μας, Βρίσκουμε λοιπόν υπάρχει μία σχεδόν πλήρης συμφωνία μεταξύ της θεωρίας και των αριθμητικών πειραμάτων για κάθε μία από τις ποσότητες $R(x)$, $\Theta(x)$, Ω και $\bar{\omega}(x)$.

5. Εμπειρικά Αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε τόσο στο τροποποιημένο θεωρητικό υπόβαθρο του μοντέλου που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, όσο και στα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή των μεθόδων στα δεδομένα. Το θεωρητικό υπόβαθρο βασίζεται στις εργασίες των (Gómez-Gardeñes et al., 2010), (Zhao et al., 2015), (Schmidt et al., 2015) και (Zakharova, 2020). Ενώ η επεξεργασία των δεδομένων έγινε κυρίως με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού R version 4.0.3 στο προγραμματιστικό περιβάλλον RStudio καθώς και την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Julia v1.5.2 .

5.1 Το θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσης εφαρμογής.

Ένα από τα μέτρα που θεωρείται ακρογωνιαίος λίθος στη μελέτη των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών είναι αυτό της συσχέτισης μεταξύ των τιμών των μετοχών. Για να μπορέσουμε να το ενσωματώσουμε, αρχικά θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις λογαριθμικές αποδόσεις των μετοχών $i = 1, \dots, N$ που ορίζονται από την σχέση:

$$G_i(t) = \ln P_i(t + \Delta t) - \ln P_i(t) \quad (5.1)$$

Εδώ το $P_i(t)$ δηλώνει την προσαρμοσμένη τιμή κλεισίματος της κάθε μετοχής i στον χρόνο t . Στην παρούσα εργασία θέτουμε ως χρονική κλίμακα $\Delta t = 1$. Παρατηρούμε επίσης ότι οι μετοχές έχουν διαφορετική διακύμανση, έτσι στην προσπάθειά μας να εντάξουμε τις τιμές στο διάστημα $[0,1]$ θα τις κανονικοποιήσουμε με την χρήση της σχέσης (5.2)

$$g_i(t) = \frac{G_i(t) - \langle G_i(t) \rangle}{\sigma_i} \quad (5.2)$$

Όπου $\langle G_i(t) \rangle$ είναι η μέση των λογαριθμικών αποδόσεων της μετοχής i και $\sigma_i \equiv \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$ η τυπική απόκλιση. Βασιζόμενοι σε αυτές τις σχέσεις λαμβάνουμε τη διασυσχέτιση για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα που δίνεται από την σχέση (5.3)⁵

$$R_{ij} \equiv \langle g_i(t)g_j(t) \rangle \quad (5.3)$$

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι οι τιμές του πίνακα R_{ij} βρίσκονται διάστημα $[-1,1]$ με το -1 και το 1 να δηλώνουν ισχυρά αρνητική και ισχυρά θετική διασυσχέτιση. Ενώ η τιμή μηδέν δηλώνει ότι οι κανονικοποιημένες τιμές των μετοχών είναι ασυσχέτιστες. Για να μπορέσουμε να χαρακτηρίσουμε τις συνδέσεις που δημιουργούνται θα εισάγουμε μία μετρική, όπως αυτή

⁵ Ο χρονικός ορίζοντας της διασυσχέτισης έχει οριστεί ως $\Delta t = 54$ ημέρες, χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί σε περίπου 2.5 μήνες διαπραγμάτευσης

ορίστηκε από τους (Mantegna & Stanley, 2000),(Coelho et al., 2007) και παρουσιάζεται στη σχέση (5.4).

$$C(i, j) = \sqrt{2 * (1 + R_{ij})} \quad (5.4)$$

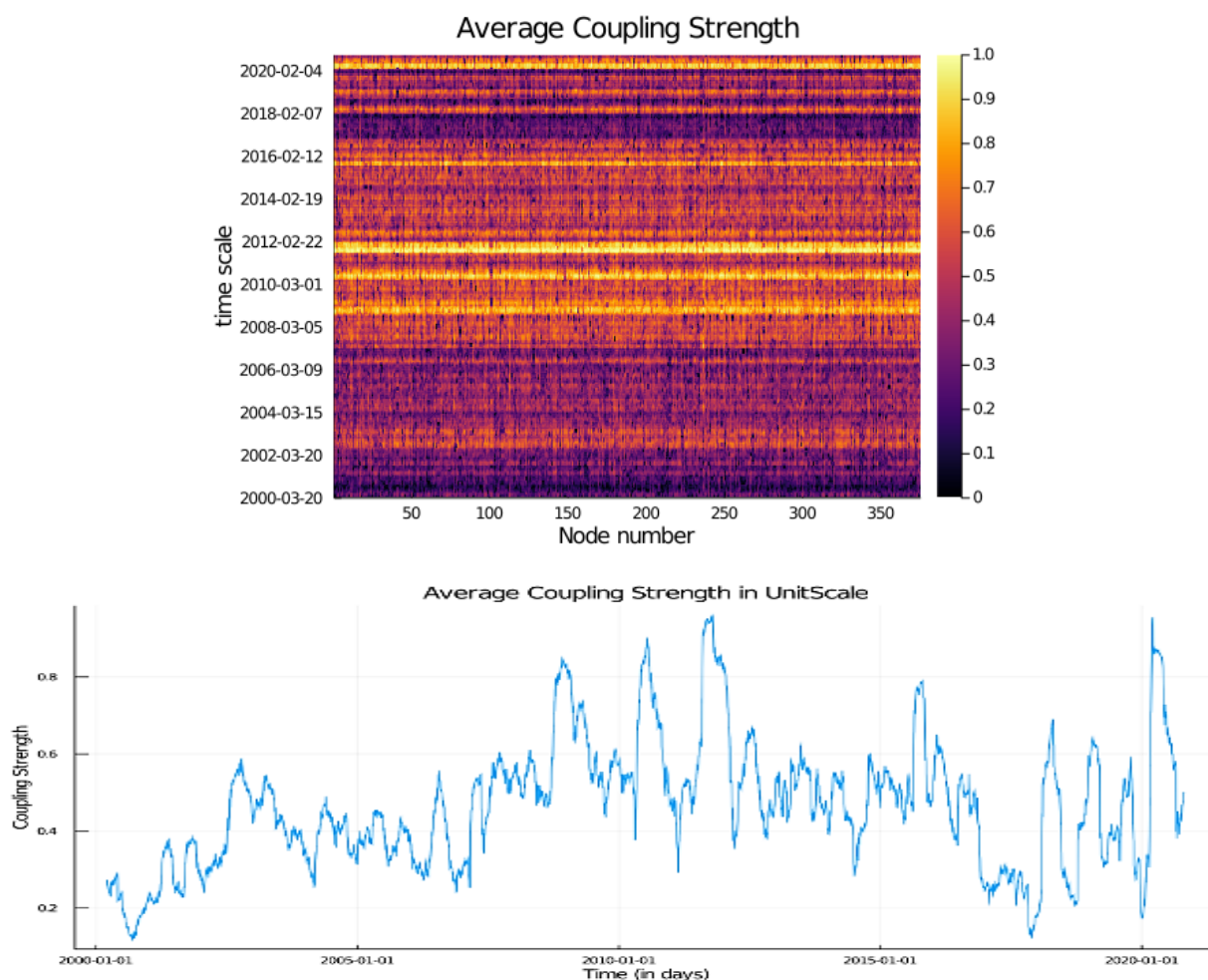
Από την παραπάνω σχέση είναι εμφανές ότι το εύρος των τιμών έχει πλέον μετατοπιστεί στο διάστημα $[0,2]$ με το μηδέν (0) να δηλώνει πλήρης αρνητική συσχέτιση, το ένα (1) δηλώνει ότι οι τιμές είναι ασυσχέτιστες και το δύο (2) πλήρης θετική συσχέτιση. Ο πίνακας $C(i, j)$ είναι επίσης και εκείνος που θα αποτελέσει τον πυρήνα στο διακριτό μοντέλο Kuramoto πάνω στο οποίο θα εργαστούμε για την ανεύρεση του συγχρονισμού των τιμών των μετοχών, δίνοντας θετικές τιμές στις μη τοπικές συζεύξεις. Ο συμμετρικός αυτός $N \times N$ πίνακας είναι εκείνος που θα μας δώσει επιπρόσθετα την ισχύ των συζεύξεων παρουσιάζοντάς μας μία εικόνα για την τοπολογία του δικτύου.

Για να μπορέσουμε να βρούμε τη δυναμική των συζεύξεων σε μία μακρά χρονική περίοδο κάναμε χρήση των δεδομένων όπως αυτά παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 3. Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση της διασυσχέτισης σε ένα κινούμενο παράθυρο $\Delta t = 54$ ημέρες, που αντιστοιχεί σε περίπου δυόμισι μήνες διαπραγμάτευσης στα χρηματιστήρια κεφαλαίου. Καθώς έχουμε 5237 παρατηρήσεις για κάθε μετοχή, το συνολικό πλήθος των πινάκων $N \times N$ είναι 5184, πίνακες οι οποίοι θα μας δώσουν την συλλογική δυναμική των μετοχών στην εξέλιξη του χρόνου⁶.

Ένα από τα πρώτα οπτικά, εικόνα (5.1), διαγνωστικά για τη μορφολογία του δικτύου αποτελεί η παράμετρος $S_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_{ij}$ ⁷ που μας δίνει την ένταση της καθολικής σύζευξης του i δείκτη. Αυτή η παράμετρος μας δείχνει το πόσο ισχυρά η επιλεγμένη μετοχή i συνδέεται με τις υπόλοιπες, μπορεί δε να χαρακτηριστεί ως η επιρροή της μετοχής στις υπόλοιπες μετοχές του δικτύου. Από τα γραφήματα της εικόνας (5.1) παρατηρούμε ότι η ισχύς των συνδέσεων μεταξύ των μετοχών είναι χρονικά μεταβαλλόμενη καθώς παρουσιάζει έντονη διαφοροποίηση μεταξύ διαφορετικών χρονικών περιόδων. Μία πιο αποκρυσταλλωμένη εικόνα στην ανάλυση μας θα διασφαλιστεί από την μοντελοποίηση και άλλων παραμέτρων που εκφράζουν τον συγχρονισμό μέσα στο δίκτυο όπως αυτές ορίζονται από τους (Markus Brede, 2008).

⁶ Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι ο τελικός πίνακας C_{ij} είναι τριών διαστάσεων $375 \times 375 \times 5184$ και το συνολικό του μέγεθος ανέρχεται σε 5.9 Gigabyte.

⁷ Η παράμετρος S_i είναι ένας πίνακας 375×5184 όπου σε κάθε στήλη έχει την ισχύ της σύζευξης της μετοχής i , ενώ σε κάθε γραμμή έχει την χρονική στιγμή της σύζευξης για την i μετοχή.



Εικόνα 5.1 (Επάνω) Η τιμή της παραμέτρου S_i στην διάρκεια του χρόνου. Στον οριζόντιο άξονα έχουμε τις τιμές του δείκτη που αντιστοιχούν σε μετοχές και στον κατακόρυφο της χρονικές στιγμές. Για την καλύτερη αναπαράσταση των τιμών τις έχουμε αναγάγει ανά γραμμή του πίνακα S_i στο διάστημα $[0,1]$ με το μηδέν να δηλώνει μικρή επιρροή και την μονάδα μεγάλη επιρροή της μετοχής στις υπόλοιπες. (κάτω) Η μέση τιμή της παραμέτρου S_i για κάθε χρονική στιγμή. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε τις χρονικές στιγμές που επικρατεί κρίση στην αγορά ισχύς των συνδέσεων αυξάνεται ενώ σε περιόδους «ομαλότητας» ισχύς αυτή εξασθενεί.

Για να αποκτήσουμε μία καλύτερη άποψη όσον αφορά στην δυναμική των ταλαντωτών που εισάγεται από την χρήση των συνδέσεων, όπως αυτή προκύπτει από τους πίνακες C_{ij} , θα εισάγουμε το διακριτό μοντέλο των (Kuramoto & Battogtokh, 2002) (εξίσωση (5.5)). Το σύστημα των εξισώσεων (5.5) έχει βρει πλήθος εφαρμογών στην περιγραφή συλλογικών συμπεριφορών σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, όπως η κοινωνιολογία, η φυσική, η νευροεπιστήμη και άλλοι. Η χρήση αυτού το συστήματος εξισώσεων είναι επίσης εκείνη που θα μας δώσει την δυνατότητα να κάνουμε την διάκριση μεταξύ των δύο υποχώρων συνάφειας – ασυνάφειας όπως αυτή εμφανίζονται στα δεδομένα μας. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η επιλογή του συγκεκριμένου συστήματος έγινε καθώς είναι εκείνο που με τον απλούστερο τρόπο μπορεί να περιγράψει τον διαχωρισμό των δύο υποχώρων, όπως αναφέρθηκε και σε

γραπτή επικοινωνία που είχαμε με τους (Fioriti & Chinnici, 2012), μίας αυτή η εργασία ήταν αρκετά συναφή με το ζητούμενο της παρούσης.

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N C_{ij} \sin(\theta_i(t) - \theta_j(t) + \alpha) \quad i, j = 1, \dots, N \quad (5.5)$$

Εδώ η φάση κλίμακας θ_i αναπαριστά την κατάσταση του i -th ταλαντωτή. Για να μπορέσουμε να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της εξίσωσης (5.5) ως αρχικές συνθήκες έχουμε λάβει τυχαίες τιμές για την θ_i από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Αυτό συμβαίνει καθώς εκεί που επιθυμούμε να επικεντρώνουμε την προσοχή μας είναι η σύζευξη των συνδέσεων που εκφράζουν οι πίνακες C_{ij} και όχι αυτές καθ' αυτές οι τιμές των φάσεων κλίμακας θ_i . Για την παράμετρο ω_i , ακολουθώντας την πρόταση των (Zhao et al., 2015) θέσαμε τις αρχικές τιμές ίσες με το μηδέν για κάθε $i = 1, \dots, N$. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι η συχνότητα ω_i δεν παίζει κανένα ρόλο στην διαμόρφωση των δυναμικών. Στην πραγματικότητα αν $\omega \neq 0$, κάποιος θα μπορούσε να θέσει το $\omega = 0$ χωρίς απώλεια πληροφορίας αντικαθιστώντας $\theta = \theta + \omega t$ στην εξίσωση (5.5).

Ακολουθώντας την προτροπή της μελέτης των (Kuramoto & Battogtokh, 2002), (Abrams & Strogatz, 2006) και (Zhao et al., 2015) θέσαμε την παράμετρο $\alpha = \pi/2 - 0.1$ έτσι ώστε να εμφανιστούν τα δύο σύνολα συντονισμού και αποσυντονισμού. Η παράμετρος α εκφράζει το μέγεθος της ασυμμετρίας της κατανομής των φάσεων των λογαριθμικών αποδόσεων των τιμών των μετοχών.

Προχωρώντας στην επίλυση και για να μπορέσουμε να πετύχουμε μία καλύτερη προσέγγιση στις λύσεις του συστήματος (5.5), καθώς τα θ προέρχονται από τυχαία επιλογή μέσω της ομοιόμορφης κατανομής, επαναλάβαμε την διαδικασία για $T = 500$ επαναλήψεις και κρατήσαμε ως λύση την μέση τιμή των λύσεων. Έτσι καταφέραμε να πετύχουμε μία μεγαλύτερη αντικειμενικότητα στα αποτελέσματα, διαφοροποιούμενοι από το πλαίσιο της εφαρμογής των (Zhao et al., 2015). Λόγω της φύσης του προβλήματος, καθώς η επίλυση του περιλαμβάνει αρκετά μεγάλο πλήθος υπολογισμών, κάναμε χρήση βιβλιοθηκών παράλληλου προγραμματισμού μέσω της γλώσσας προγραμματισμού R. Βιβλιοθήκες όπως οι `foreach` (Microsoft & Weston, 2020b) και `doParallel` (Microsoft & Weston, 2020a) χρησιμοποιήθηκαν έτσι ώστε να μειώσουμε τον χρόνο επεξεργασίας των δεδομένων κατά περίπου πέντε φορές.

Σε μία προσπάθεια να μειωθεί έτη περεταίρω ο χρόνος επεξεργασίας των δεδομένων ένα τμήμα της λύσης γράφτηκε στην γλώσσα προγραμματισμού Julia version 1.5.2⁸.

Τέλος για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων της (5.5) κάναμε χρήση της υπολογιστικής διαδικασίας Runge-Kutta (βλέπε Παράρτημα Β). Η μέθοδος αυτή είναι ενδεδειγμένη για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που καλούμαστε να επιλύσουμε καθώς το εύρος των λύσεων δεν παρουσιάζει σημεία απειρίας, γεγονός που θα δυσκόλευε τον αλγόριθμο στην ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων. Αποτελεί δε και πρόταση για την επίλυση από τους (Gómez-Gardeñes et al., 2010). Ως βήμα της εφαρμογής της μεθόδου δόθηκε ο αριθμός $t_{step} = 5$. Δηλαδή για την μετάβαση από τη χρονική στιγμή t έως την επόμενη χρονική στιγμή $t + 1$ παρεμβάλαμε 5 σημεία αυξάνοντας έτσι την ακρίβεια της λύσης. Για να μπορούμε να βρούμε τις τιμές των πινάκων C_{ij} κάναμε χρήση της γραμμικής παρεμβολής όπως αυτή δίνεται από την σχέση $y_i = x_t + \frac{i-1}{t_{step}}(x_{t+1} - x_t)$, $j = 1, \dots, t_{step}$, $t = 1, \dots, 5184$. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Julia καταφέραμε να περιορίσουμε την εκτέλεση της προσομοίωσης και των υπολογισμών σε λίγο περισσότερο από 85 ώρες από τις περίπου 400 ώρες που απαιτούσε η λύση με την εφαρμογή της R.

5.2 Προσδιορισμός παραμέτρων συστήματος

Για να μελετήσουμε τη συνάφεια των μετοχών όπως αυτές αποτυπώνονται στο μοντέλο που περιγράφει η εξίσωση (5.5) θα εισάγουμε μία νέα παράμετρο τάξης όπως αυτή ορίζεται στην εξίσωση (5.6) και περιγράφεται στην εργασία του (M. Brede, 2008).

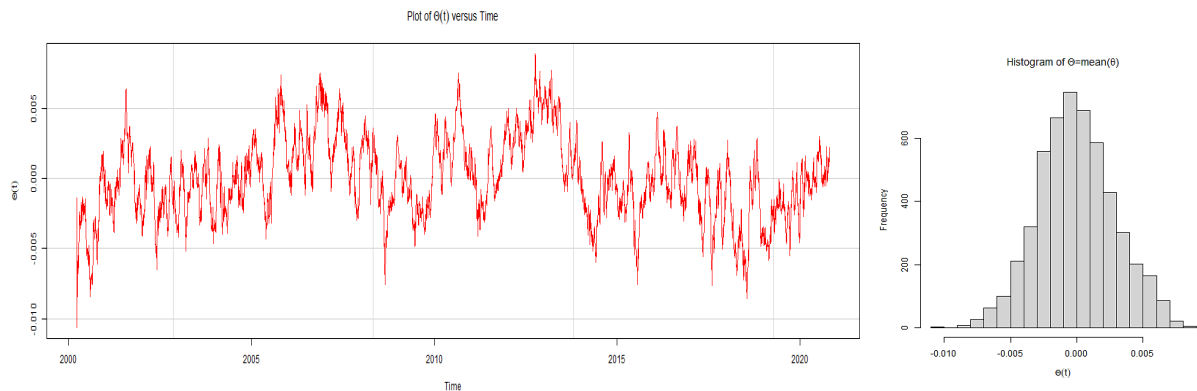
$$R(t) \cdot \exp(i\Theta(t)) = \frac{1}{N} \sum_j \exp(i\theta_j(t)) \quad (5.6)$$

όπου $\Theta(t)$ είναι ο η μέση φάση και $0 \leq R \leq 1$ είναι μία παράμετρος που εκφράζει την συνάφεια των τιμών που μελετούμε.

Σημειώνουμε ότι η τιμή μηδέν της παραμέτρου εκφράζει μία λύση ασυνάφειας, ενώ η τιμή ένα εκφράζει τον καθολικό συγχρονισμό. Η παράμετρος $R(t)$ μπορεί επίσης να υπολογιστεί ως το μέτρο της μιγαδικής ποσότητας $\frac{1}{N} \sum_j \exp(i\theta_j(t))$, όπως αναφέρεται από τους (Schmidt

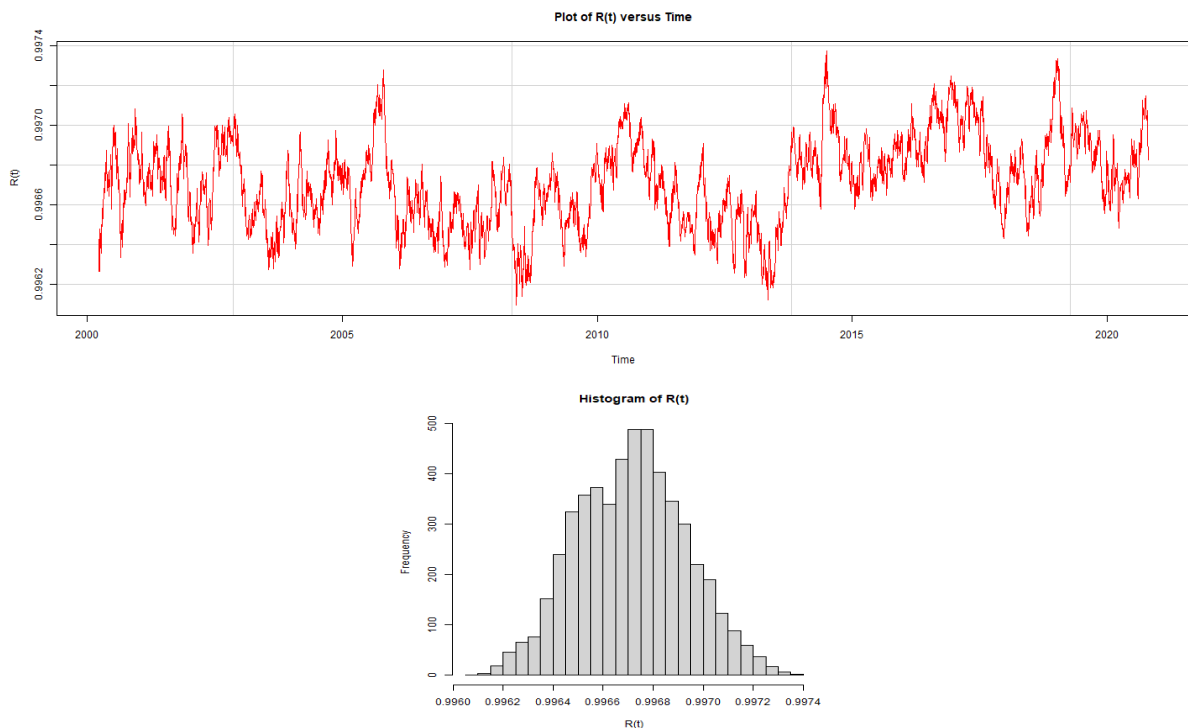
⁸ Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων και η προσομοίωση έγινε σε έναν iMac 2017 27'' με έναν επεξεργαστή Core i5 7ης γενιάς και 16GB Ram. Όλοι οι υπόλοιποι υπολογισμοί έγιναν σε ένα σταθερό υπολογιστή με επεξεργαστή AMD Fx 6300 και 16GB Ram

et al., 2015) μίας και το μέτρο των μιγαδικών $\exp(i\theta(t))$ είναι ίσο με την μονάδα. Η μέση τιμή ως προς το χρόνο θα μας δώσει και την τιμή της παραμέτρου πρώτης τάξης R .



Εικόνα 5.2 Η χρονική εξέλιξη (δεξιά) της τιμής της παραμέτρου θ για το χρονικό διάστημα από 2000 έως 2020. Το θ εκφράζει την μέση τιμή των λύσεων θ_i όπως αυτές προέκυψαν από την επίλυση του συστήματος (5.5). Στην αριστερή εικόνα παρουσιάζουμε το ιστόγραμμα της κατανομής των τιμών του θ . Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε τις περισσότερες χρονικές στιγμές οι ταλαντωτές βρίσκονται στην θέση μηδέν.

Στην εικόνα (5.2) παρουσιάζουμε την εξέλιξη της παραμέτρου θ ως συνάρτηση του χρόνου t . Παρόμοια συμπεριφορά έχουμε και στο γράφημα της εικόνας (5.3) όπου αναπαριστούμε την εξέλιξη του $R(t)$.



Εικόνα 5.3 (Επάνω) Η χρονική εξέλιξη της παραμέτρου $R(t)$ με μέση τιμή $\langle R(t) \rangle = 0.9967$. Από τα αποτελέσματα του γραφήματος έχουμε ότι υπάρχει ισχυρός συγχρονισμός μεταξύ των μετοχών καθώς η τιμή του $R(t)$ προσεγγίζει την μονάδα. (Κάτω) το ιστόγραμμα κατανομής των τιμών του R στην διάρκεια του χρόνου

Στην εικόνα (5.3) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το εύρος των τιμών της παραμέτρου $R(t)$ είναι σχετικά περιορισμένο με τις τιμές να προσεγγίζουν αρκετά την μονάδα. Αυτό μας

οδηγεί στο συμπέρασμα πως το σύστημα μας βρίσκεται σε ισχυρό συγχρονισμό καθ' όλη την διάρκεια της εξέλιξής του. Η μικρές όμως αυτές διακυμάνσεις είναι ικανές να επιφέρουν σημαντικές αλλαγές στα αποτελέσματα διαμορφώνοντας διαφορετικές συνθήκες στην αγορά κεφαλαίου που μελετούμε. Αναλυτικότερα θα αναφερθούμε στην επίδραση των τιμών του $R(t)$, σε σχέση με τις τιμές του δείκτη και την μεταβλητότητά του στο κεφάλαιο των συμπερασμάτων.

5.3 Διερεύνηση των δυναμικών του συστήματος

Ο συγχρονισμός των ακμών μεταξύ των κόμβων i και j , d_{ij} όπως προτείνεται από τους (Schmidt et al., 2015), δίνεται από την εξίσωση (5.7)

$$d_{ij} = \frac{1}{\Delta t} \left| \sum_{T_{rel}}^{T_{rel} + \Delta t} e^{i(\theta_i - \theta_j + \alpha)} \right| \quad (5.7)$$

όπου $T_{rel} = 100$ είναι ο χρόνος είναι χρόνος «χαλάρωσης» που εκφράζει το χρονικό διάστημα έως ότου το σύστημα ξεκινήσει να ταλαντώνεται και να αναπτύσσει την δυναμική του. Η σχέση (5.7) εκφράζει την μέση τιμή των $e^{i(\theta_i - \theta_j + \alpha)}$ στην διάρκεια του χρόνου μελέτης, ενώ το Δt είναι το χρονικό διάστημα έως το τέλος του δείγματος της έρευνας.

Το μέσο επίπεδο συγχρονισμού μεταξύ των κόμβων $r_{link} = 0.977$ δίνεται από τη σχέση (5.8) και εκφράζεται από τη μέση τιμή των τιμών της μετρικής C_{ij} , όπως αυτή ορίστηκε στην σχέση (5.4).

$$r_{link} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j} C_{ij} \quad (5.8)$$

Το αποτέλεσμα του r_{link} δείχνει ότι υπάρχει ισχυρός συγχρονισμός μεταξύ των μετοχών καθ' όλη την χρονική διάρκεια της μελέτης μας. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι το εύρος των τιμών για την παράμετρο r_{link} είναι μεταξύ των τιμών 0 και 1. Με το μηδέν να δηλώνει πλήρη αποσυγχρονισμό και την μονάδα να δηλώνει τέλειο συγχρονισμό.

Διευρύνοντας την μελέτη μας πέρα από την καθολική δυναμική, οι δυναμικές του συγχρονισμού μελετώνται επίσης σε ένα αρθρωτό επίπεδο, αναλύοντας τους κόμβους συνδυαστικά στη βάση της ανάθεσης συναρτησιακής ενότητας. Καθώς θέλουμε να αποκτήσουμε πρόσβαση στην πιθανοφάνεια συγκεκριμένοι κόμβοι να είναι σε συγχρονισμό, είναι επιτακτική η ανάγκη να κατηγοριοποιήσουμε τους κόμβους σε συγχρονισμένους και μη συγχρονισμένους. Υποθέτοντας ότι ένα κατώφλι συγχρονισμού, d_{ij} , υπάρχει πάνω από το

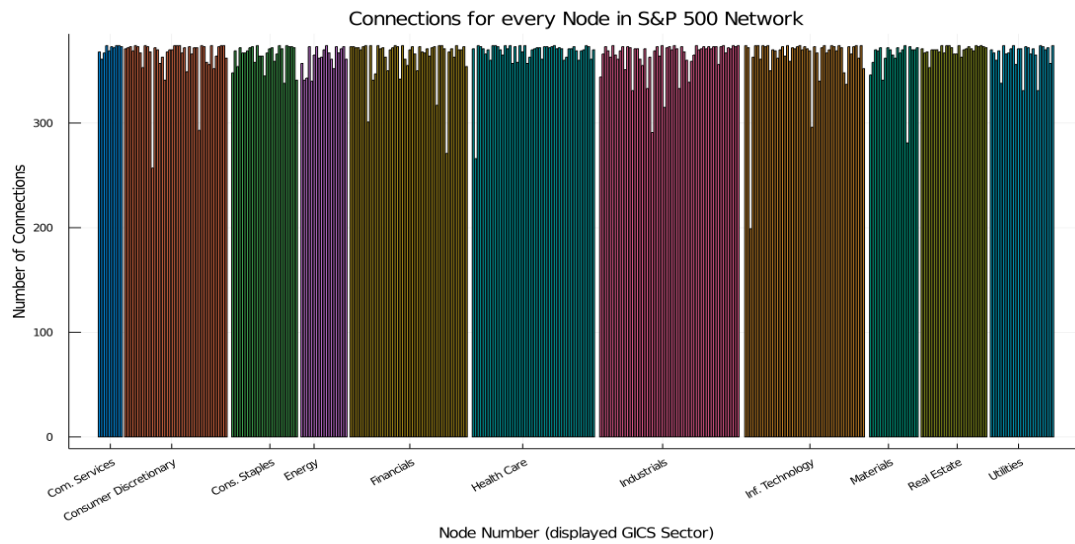
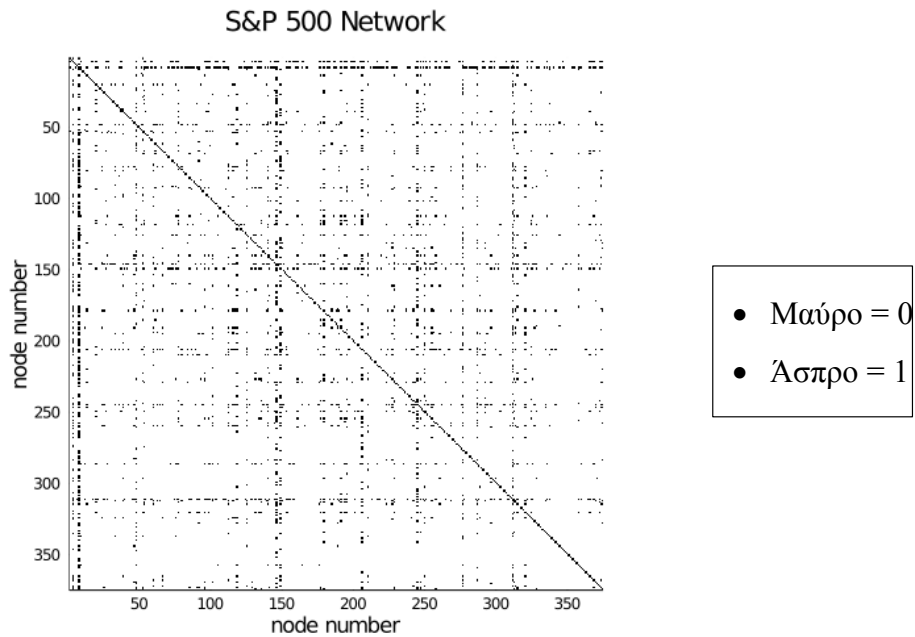
οποίο η συμπεριφορά ταλάντωσης των κόμβων συγκλίνει σε πλήρη συγχρονισμό, ένα θεωρητικό ισοδύναμο σύστημα με παράμετρο τάξης r_{link} , μπορεί αν δημιουργηθεί αποτελούμενο από $N(N - 1) \times r_{link}$ τέλεια συγχρονισμένα και $N(N - 1) \times (1 - r_{link})$ εντελώς ασύγχρονα ζεύγη κόμβων, περιγράφοντας ένα δυαδικό πίνακα συγχρονισμού F_{ij} , που θα δίνεται από την σχέση (5.9) και τα αποτελέσματα του αποτυπώνονται στην εικόνα (5.4)

$$F_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{για τα } N(N - 1) \times r_{link} \text{ μεγαλύτερα στοιχεία του } d_{ij} \\ 0, & \text{για τις μικρότερες τιμές του } d_{ij} \end{cases} \quad (5.9)$$

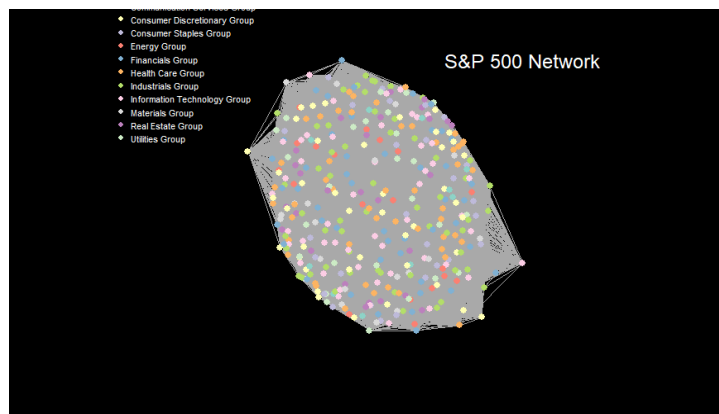
Από την σχέση (5.9) έχουμε ότι οι τιμές του πίνακα F_{ij} είναι ένα (1) για τις $N(N - 1) \times r_{link}$ μεγαλύτερες τιμές του πίνακα d_{ij} και μηδέν (0) για όλες τις υπόλοιπες. Ο πίνακας αυτός είναι και εκείνος ο οποίος θα μας δώσει την μορφολογία του δικτύου.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στην εικόνα (5.4) οι περισσότερες μετοχές μας είναι συγχρονισμένες με σχεδόν το σύνολο των υπολοίπων μετοχών του δείκτη που μελετήθηκαν. Η ίδια εικόνα μπορεί να αποτυπωθεί και στην σχηματική αναπαράσταση του δικτύου όπως αυτή αποτυπώνεται στην εικόνα (5.5). Στην εικόνα (5.5) έχει χρησιμοποιηθεί ως πίνακας συνδέσεων ο πίνακας που προέκυψε από τις τιμές του F_{ij} . Τέλος στην εικόνα (5.6) έγινε μία προσπάθεια να αποτυπωθεί το δίκτυο όπως αυτό δημιουργήθηκε με την χρήση του πίνακα F_{ij} . Στην εικόνα αυτή μπορούμε να διαπιστώσουμε ίσως με μεγαλύτερη ευκολία ότι το πλήθος των μετοχών που δεν είναι συνδεδεμένες με όλες τις υπόλοιπες είναι σχετικά μικρό(κουκίδες που βρίσκονται στα άκρα του δικτύου).

Το συμπέρασμα αυτό είναι σύμφωνο με την εμπειρική εικόνα που έχουμε για τις μετοχές που απαρτίζουν τον δείκτη S&P 500. Οι μικρές όμως αυτές αποκλίσεις είναι αυτές που μπορούν να οδηγήσουν στην μεταβολή των τιμών που παρατηρούμε καθώς και στην μεταβολή των καταστάσεων. Εδώ επίσης αξίζει να σημειώσουμε ότι η θεωρία η οποία αναπτύξαμε βασίζεται στην θεωρία του μέσου πεδίου, γεγονός που περιορίζει την οπτική μας σε μακροσκοπικό επίπεδο χωρίς να υπεισέρχεται σε επιμέρους διαφοροποιήσεις που τυχόν να παρατηρούνται σε μικροσκοπικό επίπεδο.



Εικόνα 5.5 (Επάνω) Ο πίνακας των συνδέσεων F_{ij} του δικτύου των μετοχών του δείκτη S&P 500. (κάτω) το ραβδόγραμμα που μας δείχνει το πλήθος των συνδέσεων κάθε μετοχής όπως αυτές κατανέμονται στους διάφορους κλάδους. Τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου έχουν τεθεί ίσα με το μηδέν καθώς δεν μας ενδιαφέρει η σύνδεση μίας μετοχής με τον εαυτό της.

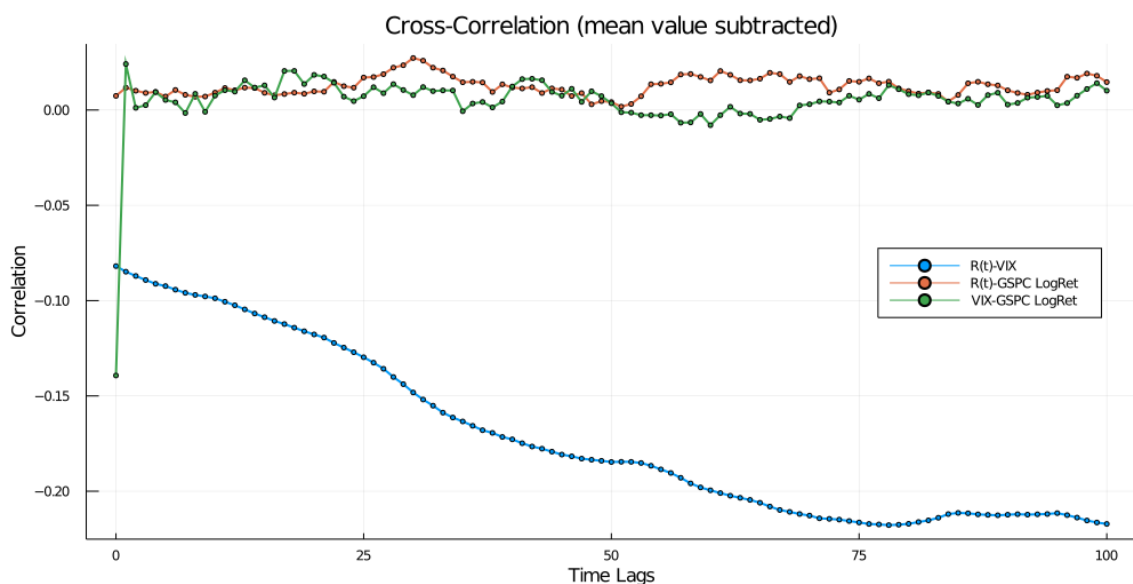


Εικόνα 5.6 Η εικόνα του δικτύου όπως αυτή αποτυπώθηκε με την χρήση του πίνακα συνδέσεων F_{ij} . Τα χρώματα αντιστοιχούν στις ομάδες των μετοχών ανάλογα με την κατηγοριοποίηση των μετοχών που μετέχουν στον δείκτη S&P 500. Το διάγραμμα έγινε στην γλώσσα προγραμματισμού R και ως διάταξη χρησιμοποιήθηκε η τυχαία.

6. Συμπεράσματα

Το πρώτο από τα συμπεράσματα που προέκυψε από την μελέτη του συγχρονισμού των μετοχών του δείκτη S&P 500 είναι η ισχυρή σχεδόν τέλεια συνάφεια μεταξύ των λογαριθμικών αποδόσεων των τιμών. Το στοιχείο αυτό αποτυπώνεται τόσο στην τιμή του δείκτη $R(t)$ όσο και στην τιμή του δείκτη r_{link} . Το αποτέλεσμα αυτό δεν έρχεται να προσθέσει κάτι νέο στις γνώσεις μας περί της διαμόρφωσης των τιμών των λογαριθμικών αποδόσεων του δείκτη, αλλά έρχεται να πιστοποιήσει το ως άνω αποτέλεσμα με την χρήση μίας διαφορετικής μεθόδου.

Το νέο στοιχείο που έρχεται να προσδώσει η παρούσα εργασία είναι η αρνητική συσχέτιση που παρατηρείται μεταξύ των τιμών του νέου αυτού δείκτη $R(t)$, που εκφράζει την συνάφεια των μετοχών και του δείκτη VIX του χρηματιστηρίου της Νέας Υόρκης. Ο δείκτης VIX εκφράζει την μεταβλητότητα των τιμών στον δείκτη S&P 500 και είναι γνωστός και ως δείκτης του φόβου που επικρατεί στην αγορά.



Εικόνα 6.1 Η διασυσχέτιση μεταξύ των τιμών της παραμέτρου $R(t)$ και του δείκτη VIX (μπλε), του $R(t)$ και του δείκτη S&P 500 (κόκκινο) και των δεικτών VIX και S&P 500 (πράσινο) για χρονικές υστερήσεις από $\tau = 0$ έως $\tau = 100$. Στο γράφημα αυτό παρατηρούμε ότι ο δείκτης VIX και ο δείκτης S&P 500 παρουσιάζουν την μέγιστη αρνητική διασυσχέτιση με χρονική υστέρηση $\tau = 0$. Επιπρόσθετα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διασυσχέτιση μεταξύ των τιμών της παραμέτρου $R(t)$ και VIX γίνεται ελάχιστη για χρονική υστέρηση $\tau = 78$.

Από τη εικόνα (6.1) είναι εμφανές ότι εμφανίζεται μία αρνητική διασυσχέτιση μεταξύ των τιμών της παραμέτρου $R(t)$ και του δείκτη VIX με μία χρονική υστέρηση $\tau = 78$. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η αύξηση ή μείωση της συνάφειας των τιμών λογαριθμικών αποδόσεων των τιμών των μετοχών που μελετήσαμε οδηγεί σε μείωση ή αύξηση, αντίστοιχα, των τιμών του δείκτη VIX και μάλιστα αυτή η μεταβολή των τιμών της παραμέτρου $R(t)$ προηγείται κατά 78 ημέρες. Το συμπέρασμα αυτό παρατηρείται για πρώτη φορά και δεν υπάρχουν αναφορές στην βιβλιογραφία. Έτσι γνωρίζοντας την πορεία της

συνάφειας των αποδόσεων των τιμών των μετοχών μπορούμε να έχουμε μία εικόνα για την πορεία των τιμών του δείκτη VIX. Το συμπέρασμα αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό καθώς υψηλές τιμές του δείκτη VIX τείνουν να εμφανίζονται σε περιόδους κρίσης, κάτι που γίνεται εμφανές με την παρατήρηση των τιμών του δείκτη στην εικόνα (6.2).



Εικόνα 6.2 Οι τιμές του δείκτη VIX από 01/03/2000 έως 10/25/2020. Παρατηρούμε ότι οι μέγιστες τιμές του δείκτη παρατηρούνται το έτος 2008 όπου και είναι το έτος εκδήλωσης της μεγάλης χρηματοοικονομικής κρίσης, καθώς και στις αρχές του 2020 όπου έχουμε την εμφάνιση του COVID-19

Σαν μελλοντική επέκταση της παρούσης μελέτης προτείνεται η ενσωμάτωση θορύβου στις εξισώσεις (5.1), καθώς όπως διαπιστώνεται στο βιβλίο της (Zakharova, 2020), η ύπαρξη του θορύβου τείνει να εντείνει το φαινόμενο της συνύπαρξης των υποσυνόλων ασυνάφειας. Με αυτό σαν δεδομένο αξίζει να διερευνηθεί η συμπεριφορά του συστήματος σε διάφορα επίπεδα Γκαουσιανού θορύβου.

Μία επίσης ενδιαφέρουσα κατεύθυνση της παρούσης έρευνας θα μπορούσε να είναι αυτή που παρουσιάζεται στην εργασία των (Moon et al., 2007) και που κάνοντας χρήση του συστήματος των εξισώσεων (5.1) με κάποιες προσθήκες, καταδεικνύει την συμπεριφορά των ομάδων και την επίδραση των ηγετών σε αυτές. Έτσι προσαρμόζοντας το σύστημα στα δικά μας δεδομένα θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε τόσο το πλήθος των εταιριών που μπορούν να χαρακτηριστούν ηγέτες στην αγορά κεφαλαίου του δείκτη S&P 500 όσο και την επίδραση που ασκούν στον δείκτη.

7. Βιβλιογραφία

Abrams, D. M., & Strogatz, S. H. (2004). Chimera States for Coupled Oscillators. *Physical Review Letters*, 93(17), 174102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.174102>

Abrams, D. M., & Strogatz, S. H. (2006). CHIMERA STATES IN A RING OF NONLOCALLY COUPLED OSCILLATORS. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 16(01), 21–37. <https://doi.org/10.1142/S0218127406014551>

Allen-Perkins, A., de Assis, T. A., Pastor, J. M., & Andrade, R. F. S. (2017). Relaxation time of the global order parameter on multiplex networks: The role of interlayer coupling in Kuramoto oscillators. *PHYSICAL REVIEW E*, 15.

Aranson, I. S., & Kramer, L. (2002). The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1), 45.

Brede, M. (2008). Locals vs. Global synchronization in networks of non-identical Kuramoto oscillators. *The European Physical Journal B*, 62(1), 87–94. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2008-00126-9>

Brede, Markus. (2008). Synchrony-optimized networks of non-identical Kuramoto oscillators. *Physics Letters A*, 372(15), 2618–2622. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.11.069>

Coelho, R., Hutzler, S., Repetowicz, P., & Richmond, P. (2007). Sector analysis for a FTSE portfolio of stocks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 373, 615–626. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.02.050>

Égert, B., & Kočenda, E. (2011). Time-varying synchronization of European stock markets. *Empirical Economics*, 40(2), 393–407. <https://doi.org/10.1007/s00181-010-0341-3>

Fama, E. F. (1970). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *The Journal of Finance*, 25(2), 383. <https://doi.org/10.2307/2325486>

Fioriti, V., & Chinnici, M. (2012). The synchronization of Kuramoto oscillator networks: Forecasting financial index critical points. *ResearchGate*, 5. <https://www.researchgate.net/publication/288049366>

Garas, A., Argyrakis, P., Rozenblat, C., Tomassini, M., & Havlin, S. (2010). Worldwide spreading of economic crisis. *New Journal of Physics*, 12(11), 113043. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/11/113043>

Gómez-Gardeñes, J., Zamora-López, G., Moreno, Y., & Arenas, A. (2010). From Modular to Centralized Organization of Synchronization in Functional Areas of the Cat Cerebral Cortex. *PLoS ONE*, 5(8), e12313. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0012313>

Jabbarzadeh, A., Shavvalpour, S., Khanjarpanah, H., & Dourvash, D. (2016). *A Multiple-Criteria Approach for Forecasting Stock Price Direction: Nonlinear Probability Models with Application in S&P 500 Index*. 11(6), 9.

Johansen, A., & Sornette, D. (1999). Critical Crashes. *ArXiv:Cond-Mat/9901035*. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/9901035>

Johansen, S. (1991). Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models. *Econometrica*, 59(6), 1551. <https://doi.org/10.2307/2938278>

Kim, B.-H., Chun, S.-E., & Min, H.-G. (2010). Nonlinear dynamics in arbitrage of the S&P 500 index and futures: A threshold error-correction model. *Economic Modelling*, 27(2), 566–573. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2009.11.011>

Kuramoto, Y., & Battogtokh, D. (2002). Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. *ArXiv:Cond-Mat/0210694*. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0210694>

Kwon, C. S., & Shin, T. S. (1999). Cointegration and causality between macroeconomic variables and stock market returns. *Global Finance Journal*, 10(1), 71–81. [https://doi.org/10.1016/S1044-0283\(99\)00006-X](https://doi.org/10.1016/S1044-0283(99)00006-X)

Madaleno, M., & Pinho, C. (2012). International stock market indices comovements: A new look. *International Journal of Finance & Economics*, 17(1), 89–102. <https://doi.org/10.1002/ijfe.448>

Mantegna, R. N., & Stanley, H. E. (2000). *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press.

Martens, M., & Poon, S.-H. (2001). *Returns synchronization and daily correlation dynamics between international stock markets*. 23.

Microsoft, & Weston, S. (2020a). *doParallel: Foreach Parallel Adaptor for the “parallel” Package* (1.0.16) [Computer software]. <https://CRAN.R-project.org/package=doParallel>

Microsoft, & Weston, S. (2020b). *foreach: Provides Foreach Looping Construct* (1.5.1) [Computer software]. <https://CRAN.R-project.org/package=foreach>

Minello, G., Torsello, A., & Hancock, E. R. (2020). Open system quantum thermodynamics of time-varying graphs. *Journal of Complex Networks*, 8(1), cnaa004. <https://doi.org/10.1093/comnet/cnaa004>

Moon, S. J., Nabet, B., Leonard, N. E., Levin, S. A., & Kevrekidis, I. G. (2007). Heterogeneous animal group models and their group-level alignment dynamics: An equation-free approach. *Journal of Theoretical Biology*, 246(1), 100–112. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2006.12.018>

Mylonidis, N., & Kollias, C. (2010). Dynamic European stock market convergence: Evidence from rolling cointegration analysis in the first euro-decade. *Journal of Banking & Finance*, 34(9), 2056–2064. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2010.01.012>

Narayan, P. K., & Smyth, R. (2005). COINTEGRATION OF STOCK MARKETS BETWEEN NEW ZEALAND, AUSTRALIA AND THE G7 ECONOMIES: SEARCHING FOR CO-MOVEMENT UNDER STRUCTURAL CHANGE. *Australian Economic Papers*, 44(3), 231–247. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8454.2005.00262.x>

Pandey, V., Kohers, T., & Kohers, G. (1998). Deterministic nonlinearity in the stock returns of major European equity markets and the United States. *The Financial Review*, 33(1), 45–64. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6288.1998.tb01606.x>

Roy, R. B., & Sarkar, U. K. (2011). A Social Network Approach to Examine the Role of Influential Stocks in Shaping Interdependence Structure in Global Stock Markets. *2011 International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining*, 567–569. <https://doi.org/10.1109/ASONAM.2011.87>

Schmidt, R., LaFleur, K. J. R., de Reus, M. A., van den Berg, L. H., & van den Heuvel, M. P. (2015). Kuramoto model simulation of neural hubs and dynamic synchrony in the human cerebral connectome. *BMC Neuroscience*, 16(1), 54. <https://doi.org/10.1186/s12868-015-0193-z>

Shima, S., & Kuramoto, Y. (2004). Rotating spiral waves with phase-randomized core in nonlocally coupled oscillators. *Physical Review E*, 69(3), 036213. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.036213>

Stosic, D. (2018). *High-performance Ginzburg-Landau simulations of superconductivity*. Universidade Federal de Pernambuco.

Walti, S. (2005). *The macroeconomic determinants of stock market synchronization*. 31.

Walti, S. (2011). Stock market synchronization and monetary integration. *Journal of International Money and Finance*, 30(1), 96–110. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2010.07.004>

Zakharova, A. (2020). *Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-21714-3>

Zhao, S., Xie, Q., Lu, Q., Jiang, X., & Chen, W. (2015). Coherence and incoherence collective behavior in financial market. *EPL (Europhysics Letters)*, 112(2), 28002. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/112/28002>

Παράρτημα Α

Τα ακρωνύμια των μετοχών που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα. Οι μετοχές που επιλέχθηκαν ήταν αυτές που είχαν όλες τις τιμές μέσα στο χρονικό διάστημα της έρευνας.

α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ.Παρατ.	Κατάστ.	α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ.Παρατ.	Κατάστ.
1	MMM	5237	1	KEEP	40	ADI	5237	1	KEEP
2	ABT	5237	1	KEEP	41	ANSS	5237	1	KEEP
3	ABBV	1968	0.375	OUT	42	ANTM	4780	0.912	OUT
4	ABMD	5237	1	KEEP	43	AON	5237	1	KEEP
5	ACN	4848	0.925	OUT	44	AOS	5237	1	KEEP
6	ATVI	5237	1	KEEP	45	APA	5237	1	KEEP
7	ADBE	5237	1	KEEP	46	AIV	5237	1	KEEP
8	AMD	5237	1	KEEP	47	AAPL	5237	1	KEEP
9	AAP	4759	0.908	OUT	48	AMAT	5237	1	KEEP
10	AES	5237	1	KEEP	49	APTV	2248	0.429	OUT
11	AFL	5237	1	KEEP	50	ADM	5237	1	KEEP
12	A	5237	1	KEEP	51	ANET	1609	0.307	OUT
13	APD	5237	1	KEEP	52	AJG	5237	1	KEEP
14	AKAM	5237	1	KEEP	53	AIZ	4210	0.803	OUT
15	ALK	5237	1	KEEP	54	T	5237	1	KEEP
16	ALB	5237	1	KEEP	55	ATO	5237	1	KEEP
17	ARE	5237	1	KEEP	56	ADSK	5237	1	KEEP
18	ALXN	5237	1	KEEP	57	ADP	5237	1	KEEP
19	ALGN	4966	0.948	OUT	58	AZO	5237	1	KEEP
20	ALLE	1746	0.333	OUT	59	AVB	5237	1	KEEP
21	LNT	5237	1	KEEP	60	AVY	5237	1	KEEP
22	ALL	5237	1	KEEP	61	BKR	5237	1	KEEP
23	GOOGL	4075	0.778	OUT	62	BLL	5237	1	KEEP
24	GOOG	4075	0.778	OUT	63	BAC	5237	1	KEEP
25	MO	5237	1	KEEP	64	BK	5237	1	KEEP
26	AMZN	5237	1	KEEP	65	BAX	5237	1	KEEP
27	AMCR	2126	0.405	OUT	66	BDX	5237	1	KEEP
28	AEE	5237	1	KEEP	67	BBY	5237	1	KEEP
29	AAL	3796	0.724	OUT	68	BIO	5237	1	KEEP
30	AEP	5237	1	KEEP	69	BIIB	5237	1	KEEP
31	AXP	5237	1	KEEP	70	BLK	5237	1	KEEP
32	AIG	5237	1	KEEP	71	BA	5237	1	KEEP
33	AMT	5237	1	KEEP	72	BKNG	5237	1	KEEP
34	AWK	3150	0.601	OUT	73	BWA	5237	1	KEEP
35	AMP	3804	0.726	OUT	74	BXP	5237	1	KEEP
36	ABC	5237	1	KEEP	75	BSX	5237	1	KEEP
37	AME	5237	1	KEEP	76	BMY	5237	1	KEEP
38	AMGN	5237	1	KEEP	77	AVGO	2825	0.539	OUT
39	APH	5237	1	KEEP	78	BR	3417	0.652	OUT

α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.	α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.
79	CHRW	5237	1	KEEP	122	ED	5237	1	KEEP
80	COG	5237	1	KEEP	123	STZ	5237	1	KEEP
81	CDNS	5237	1	KEEP	124	COO	5237	1	KEEP
82	CPB	5237	1	KEEP	125	CPRT	5237	1	KEEP
83	COF	5237	1	KEEP	126	GLW	5237	1	KEEP
84	CAH	5237	1	KEEP	127	CTVA	359	0.068	OUT
85	KMX	5237	1	KEEP	128	COST	5237	1	KEEP
86	CCL	5237	1	KEEP	129	CCI	5237	1	KEEP
87	CARR	153	0.029	OUT	130	CSX	5237	1	KEEP
88	CTLT	1571	0.299	OUT	131	CMI	5237	1	KEEP
89	CAT	5237	1	KEEP	132	CVS	5237	1	KEEP
90	CBOE	2610	0.498	OUT	133	DHI	5237	1	KEEP
91	CBRE	4123	0.787	OUT	134	DHR	5237	1	KEEP
92	CDW	1846	0.352	OUT	135	DRI	5237	1	KEEP
93	CE	3968	0.757	OUT	136	DVA	5237	1	KEEP
94	CNC	4749	0.906	OUT	137	DE	5237	1	KEEP
95	CNP	5237	1	KEEP	138	DAL	3395	0.648	OUT
96	CERN	5237	1	KEEP	139	XRAY	5237	1	KEEP
97	CF	3828	0.731	OUT	140	DVN	5237	1	KEEP
98	SCHW	5237	1	KEEP	141	DXCM	3911	0.746	OUT
99	CHTR	2721	0.519	OUT	142	FANG	2021	0.385	OUT
100	CVX	5237	1	KEEP	143	DLR	4025	0.768	OUT
101	CMG	3713	0.708	OUT	144	DFS	3366	0.642	OUT
102	CB	5237	1	KEEP	145	DISCA	3852	0.735	OUT
103	CHD	5237	1	KEEP	146	DISCK	3047	0.581	OUT
104	CI	5237	1	KEEP	147	DISH	5237	1	KEEP
105	CINF	5237	1	KEEP	148	DG	2755	0.526	OUT
106	CTAS	5237	1	KEEP	149	DLTR	5237	1	KEEP
107	CSCO	5237	1	KEEP	150	D	5237	1	KEEP
108	C	5237	1	KEEP	151	DPZ	4102	0.783	OUT
109	CFG	1533	0.292	OUT	152	DOV	5237	1	KEEP
110	CTXS	5237	1	KEEP	153	DOW	405	0.077	OUT
111	CLX	5237	1	KEEP	154	DTE	5237	1	KEEP
112	CME	4502	0.859	OUT	155	DUK	5237	1	KEEP
113	CMS	5237	1	KEEP	156	DRE	5237	1	KEEP
114	KO	5237	1	KEEP	157	DD	5237	1	KEEP
115	CTSH	5237	1	KEEP	158	DXC	5237	1	KEEP
116	CL	5237	1	KEEP	159	EMN	5237	1	KEEP
117	CMCSA	5237	1	KEEP	160	ETN	5237	1	KEEP
118	CMA	5237	1	KEEP	161	EBAY	5237	1	KEEP
119	CAG	5237	1	KEEP	162	ECL	5237	1	KEEP
120	CXO	3331	0.636	OUT	163	EIX	5237	1	KEEP
121	COP	5237	1	KEEP	164	EW	5179	0.988	OUT

α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.	α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.
165	EA	5237	1	KEEP	208	GD	5237	1	KEEP
166	EMR	5237	1	KEEP	209	GE	5237	1	KEEP
167	ETR	5237	1	KEEP	210	GIS	5237	1	KEEP
168	EOG	5237	1	KEEP	211	GM	2500	0.477	OUT
169	EFX	5237	1	KEEP	212	GPC	5237	1	KEEP
170	EQIX	5083	0.970	OUT	213	GILD	5237	1	KEEP
171	EQR	5237	1	KEEP	214	GL	5237	1	KEEP
172	ESS	5237	1	KEEP	215	GPN	4976	0.950	OUT
173	EL	5237	1	KEEP	216	GS	5237	1	KEEP
174	ETSY	1393	0.265	OUT	217	GWV	5237	1	KEEP
175	EVRG	5237	1	KEEP	218	HAL	5237	1	KEEP
176	ES	5237	1	KEEP	219	HBI	3559	0.679	OUT
177	RE	5237	1	KEEP	220	HIG	5237	1	KEEP
178	EXC	5237	1	KEEP	221	HAS	5237	1	KEEP
179	EXPE	3843	0.733	OUT	222	HCA	2424	0.462	OUT
180	EXPD	5237	1	KEEP	223	PEAK	5237	1	KEEP
181	EXR	4078	0.778	OUT	224	HSIC	5237	1	KEEP
182	XOM	5237	1	KEEP	225	HSY	5237	1	KEEP
183	FFIV	5237	1	KEEP	226	HES	5237	1	KEEP
184	FB	2123	0.405	OUT	227	HPE	1264	0.241	OUT
185	FAST	5237	1	KEEP	228	HLT	1729	0.330	OUT
186	FRT	5237	1	KEEP	229	HFC	5237	1	KEEP
187	FDX	5237	1	KEEP	230	HOLX	5237	1	KEEP
188	FIS	4868	0.929	OUT	231	HD	5237	1	KEEP
189	FITB	5237	1	KEEP	232	HON	5237	1	KEEP
190	FE	5237	1	KEEP	233	HRL	5237	1	KEEP
191	FRC	2486	0.474	OUT	234	HST	5237	1	KEEP
192	FISV	5237	1	KEEP	235	HWM	1002	0.191	OUT
193	FLT	2482	0.473	OUT	236	HPQ	5237	1	KEEP
194	FLIR	5237	1	KEEP	237	HUM	5237	1	KEEP
195	FLS	5237	1	KEEP	238	HBAN	5237	1	KEEP
196	FMC	5237	1	KEEP	239	HII	2416	0.461	OUT
197	F	5237	1	KEEP	240	IEX	5237	1	KEEP
198	FTNT	2752	0.525	OUT	241	IDXX	5237	1	KEEP
199	FTV	1086	0.207	OUT	242	INFO	1600	0.305	OUT
200	FBHS	2292	0.437	OUT	243	ITW	5237	1	KEEP
201	FOXA	411	0.078	OUT	244	ILMN	5093	0.972	OUT
202	FOX	410	0.078	OUT	245	INCY	5237	1	KEEP
203	BEN	5237	1	KEEP	246	IR	870	0.166	OUT
204	FCX	5237	1	KEEP	247	INTC	5237	1	KEEP
205	GPS	5237	1	KEEP	248	ICE	3760	0.717	OUT
206	GRMN	5000	0.954	OUT	249	IBM	5237	1	KEEP
207	IT	5237	1	KEEP	250	IP	5237	1	KEEP

α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ.Παρατ.	Κατάστ.	α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.
251	IPG	5237	1	KEEP	294	LUMN	153	0.029	OUT
252	IFF	5237	1	KEEP	295	LYB	2643	0.504	OUT
253	INTU	5237	1	KEEP	296	MTB	5237	1	KEEP
254	ISRG	5122	0.978	OUT	297	MRO	5237	1	KEEP
255	IVZ	5237	1	KEEP	298	MPC	2350	0.448	OUT
256	IPGP	3490	0.666	OUT	299	MKTX	4020	0.767	OUT
257	IQV	1880	0.358	OUT	300	MAR	5237	1	KEEP
258	IRM	5237	1	KEEP	301	MMC	5237	1	KEEP
259	JKHY	5237	1	KEEP	302	MLM	5237	1	KEEP
260	J	5237	1	KEEP	303	MAS	5237	1	KEEP
261	JBHT	5237	1	KEEP	304	MA	3630	0.693	OUT
262	SJM	5237	1	KEEP	305	MKC	5237	1	KEEP
263	JNJ	5237	1	KEEP	306	MXIM	5237	1	KEEP
264	JCI	5237	1	KEEP	307	MCD	5237	1	KEEP
265	JPM	5237	1	KEEP	308	MCK	5237	1	KEEP
266	JNPR	5237	1	KEEP	309	MDT	5237	1	KEEP
267	KSU	5237	1	KEEP	310	MRK	5237	1	KEEP
268	K	5237	1	KEEP	311	MET	5172	0.987	OUT
269	KEY	5237	1	KEEP	312	MTD	5237	1	KEEP
270	KEYS	1515	0.289	OUT	313	MGM	5237	1	KEEP
271	KMB	5237	1	KEEP	314	MCHP	5237	1	KEEP
272	KIM	5237	1	KEEP	315	MU	5237	1	KEEP
273	KMI	2442	0.466	OUT	316	MSFT	5237	1	KEEP
274	KLAC	5237	1	KEEP	317	MAA	5237	1	KEEP
275	KHC	1338	0.255	OUT	318	MHK	5237	1	KEEP
276	KR	5237	1	KEEP	319	TAP	5237	1	KEEP
277	LB	5237	1	KEEP	320	MDLZ	4873	0.930	OUT
278	LHX	5237	1	KEEP	321	MNST	5237	1	KEEP
279	LH	5237	1	KEEP	322	MCO	5237	1	KEEP
280	LRCX	5237	1	KEEP	323	MS	5237	1	KEEP
281	LW	995	0.189	OUT	324	MOS	5237	1	KEEP
282	LVS	3993	0.762	OUT	325	MSI	5237	1	KEEP
283	LEG	5237	1	KEEP	326	MSCI	3258	0.622	OUT
284	LDOS	3530	0.674	OUT	327	MYL	5237	1	KEEP
285	LEN	5237	1	KEEP	328	NDAQ	4613	0.881	OUT
286	LLY	5237	1	KEEP	329	NOV	5237	1	KEEP
287	LNC	5237	1	KEEP	330	NTAP	5237	1	KEEP
288	LIN	5237	1	KEEP	331	NFLX	4639	0.886	OUT
289	LYV	3736	0.713	OUT	332	NWL	5237	1	KEEP
290	LKQ	4294	0.820	OUT	333	NEM	5237	1	KEEP
291	LMT	5237	1	KEEP	334	NWSA	1852	0.353	OUT
292	L	5237	1	KEEP	335	NWS	1852	0.353	OUT
293	LOW	5237	1	KEEP	336	NEE	5237	1	KEEP

α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.	α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.
337	NLSN	2453	0.468	OUT	380	PRU	4749	0.906	OUT
338	NKE	5237	1	KEEP	381	PEG	5237	1	KEEP
339	NI	5237	1	KEEP	382	PSA	5237	1	KEEP
340	NSC	5237	1	KEEP	383	PHM	5237	1	KEEP
341	NTRS	5237	1	KEEP	384	PVH	5237	1	KEEP
342	NOC	5237	1	KEEP	385	QRVO	1464	0.279	OUT
343	NLOK	5237	1	KEEP	386	PWR	5237	1	KEEP
344	NCLH	1956	0.373	OUT	387	QCOM	5237	1	KEEP
345	NRG	4254	0.812	OUT	388	DGX	5237	1	KEEP
346	NUE	5237	1	KEEP	389	RL	5237	1	KEEP
347	NVDA	5237	1	KEEP	390	RJF	5237	1	KEEP
348	NVR	5237	1	KEEP	391	RTX	5237	1	KEEP
349	ORLY	5237	1	KEEP	392	O	5237	1	KEEP
350	OXY	5237	1	KEEP	393	REG	5237	1	KEEP
351	ODFL	5237	1	KEEP	394	REGN	5237	1	KEEP
352	OMC	5237	1	KEEP	395	RF	5237	1	KEEP
353	OKE	5237	1	KEEP	396	RSG	5237	1	KEEP
354	ORCL	5237	1	KEEP	397	RMD	5237	1	KEEP
355	OTIS	153	0.029	OUT	398	RHI	5237	1	KEEP
356	PCAR	5237	1	KEEP	399	ROK	5237	1	KEEP
357	PKG	5219	0.996	OUT	400	ROL	5237	1	KEEP
358	PH	5237	1	KEEP	401	ROP	5237	1	KEEP
359	PAYX	5237	1	KEEP	402	ROST	5237	1	KEEP
360	PAYC	1645	0.314	OUT	403	RCL	5237	1	KEEP
361	PYPL	1338	0.255	OUT	404	SPGI	5237	1	KEEP
362	PNR	5237	1	KEEP	405	CRM	4115	0.785	OUT
363	PBCT	5237	1	KEEP	406	SBAC	5237	1	KEEP
364	PEP	5237	1	KEEP	407	SLB	5237	1	KEEP
365	PKI	5237	1	KEEP	408	STX	4499	0.859	OUT
366	PRGO	5237	1	KEEP	409	SEE	5237	1	KEEP
367	PFE	5237	1	KEEP	410	SRE	5237	1	KEEP
368	PM	3176	0.606	OUT	411	NOW	2094	0.399	OUT
369	PSX	2149	0.410	OUT	412	SHW	5237	1	KEEP
370	PNW	5237	1	KEEP	413	SPG	5237	1	KEEP
371	PXD	5237	1	KEEP	414	SWKS	5237	1	KEEP
372	PNC	5237	1	KEEP	415	SLG	5237	1	KEEP
373	POOL	5237	1	KEEP	416	SNA	5237	1	KEEP
374	PPG	5237	1	KEEP	417	SO	5237	1	KEEP
375	PPL	5237	1	KEEP	418	LUV	5237	1	KEEP
376	PFG	4785	0.913	OUT	419	SWK	5237	1	KEEP
377	PG	5237	1	KEEP	420	SBUX	5237	1	KEEP
378	PGR	5237	1	KEEP	421	STT	5237	1	KEEP
379	PLD	5237	1	KEEP	422	STE	5237	1	KEEP

α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.	α/α	Ακρωνύμιο	Αρ. Παρατ.	Ποσ. Παρατ.	Κατάστ.
423	SYK	5237	1	KEEP	466	VTR	5237	1	KEEP
424	SIVB	5237	1	KEEP	467	VRSN	5237	1	KEEP
425	SYF	1571	0.299	OUT	468	VRSK	2782	0.531	OUT
426	SNPS	5237	1	KEEP	469	VZ	5237	1	KEEP
427	SYU	5237	1	KEEP	470	VRTX	5237	1	KEEP
428	TMUS	3405	0.650	OUT	471	VIAC	224	0.042	OUT
429	TROW	5237	1	KEEP	472	V	3174	0.606	OUT
430	TTWO	5237	1	KEEP	473	VNT	11	0.002	OUT
431	TPR	5044	0.963	OUT	474	VNO	5237	1	KEEP
432	TGT	5237	1	KEEP	475	VMC	5237	1	KEEP
433	TEL	3366	0.642	OUT	476	WRB	5237	1	KEEP
434	FTI	4871	0.930	OUT	477	WAB	5237	1	KEEP
435	TDY	5237	1	KEEP	478	WMT	5237	1	KEEP
436	TFX	5237	1	KEEP	479	WBA	5237	1	KEEP
437	TER	5237	1	KEEP	480	DIS	5237	1	KEEP
438	TXN	5237	1	KEEP	481	WM	5237	1	KEEP
439	TXT	5237	1	KEEP	482	WAT	5237	1	KEEP
440	TMO	5237	1	KEEP	483	WEC	5237	1	KEEP
441	TIF	5237	1	KEEP	484	WFC	5237	1	KEEP
442	TJX	5237	1	KEEP	485	WELL	5237	1	KEEP
443	TSCO	5237	1	KEEP	486	WST	5237	1	KEEP
444	TT	5237	1	KEEP	487	WDC	5237	1	KEEP
445	TDG	3680	0.702	OUT	488	WU	3541	0.676	OUT
446	TRV	5237	1	KEEP	489	WRK	1345	0.256	OUT
447	TFC	5237	1	KEEP	490	WY	5237	1	KEEP
448	TWTR	1753	0.334	OUT	491	WHR	5237	1	KEEP
449	TYL	5237	1	KEEP	492	WMB	5237	1	KEEP
450	TSN	5237	1	KEEP	493	WLTW	4874	0.930	OUT
451	UDR	5237	1	KEEP	494	WYNN	4531	0.865	OUT
452	ULTA	3273	0.624	OUT	495	XEL	5237	1	KEEP
453	USB	5237	1	KEEP	496	XRX	5237	1	KEEP
454	UAA	3758	0.717	OUT	497	XLNX	5237	1	KEEP
455	UA	1340	0.255	OUT	498	XYL	2273	0.434	OUT
456	UNP	5237	1	KEEP	499	YUM	5237	1	KEEP
457	UAL	3706	0.707	OUT	500	ZBRA	5237	1	KEEP
458	UNH	5237	1	KEEP	501	ZBH	4844	0.924	OUT
459	UPS	5237	1	KEEP	502	ZION	5237	1	KEEP
460	URI	5237	1	KEEP	503	ZTS	1947	0.371	OUT
461	UHS	5237	1	KEEP					
462	UNM	5237	1	KEEP					
463	VFC	5237	1	KEEP					
464	VLO	5237	1	KEEP					
465	VAR	5237	1	KEEP					

Παράρτημα Β

Η μέθοδος Runge – Kutta τέταρτης τάξης¹⁰ (RK4).

Έστω η συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με αρχική συνθήκη της γενικής μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = y_0 \quad (B.1)$$

Επιλέγουμε ως βήμα ένα αριθμό $h > 0$ και ορίζουμε:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (B.2)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \quad (B.3)$$

Για $n = 0, 1, 2, 3, \dots$;όπου:

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Εδώ το y_{n+1} είναι η RK4 προσέγγιση της τιμής του $y(x_{n+1})$, και η επόμενη τιμή y_{n+1} με βάση την τωρινή τιμή y_n προσαναυξημένο κατά ένα σταθμισμένο μέσο όρων των τεσσάρων παραμέτρων. Η κάθε αύξηση είναι προϊόν του μεγέθους του διαστήματος h και μίας εκτιμώμενης κλίσης που καθορίζεται από την συνάρτηση f στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης (B.1)

¹⁰ Πηγή https://en.wikipedia.org/wiki/Runge–Kutta_methods