



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση  
διατεταγμένων παρατηρήσεων και κανόνων ροής**

**Οικονόμου Ηρακλής**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Υπεύθυνος**

**Ιωάννης Σ.Τριανταφύλλου**

**Επίκουρος καθηγητής**

**Λαμία, 2020**





**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ  
ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση  
διατεταγμένων παρατηρήσεων και κανόνων ροής**

**Οικονόμου Ηρακλής**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπων  
Ιωάννης Σ. Τριανταφύλλου  
Επίκουρος καθηγητής**

**Λαμία, 2020**

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις <sup>(1)</sup>, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια.
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία: ...../...../20.....

Ο – Η Δηλ.

(Υπογραφή)

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

**Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου με χρήση  
διατεταγμένων παρατηρήσεων και κανόνων ροής**

**Οικονόμου Ηρακλής**

**Τριμελής Επιτροπή:**

**Επιβλέπων :** Ιωάννης Τριανταφύλλου, Επίκουρος Καθηγητής

**Μέλος :** Σανδαλίδης Χαρίλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής

**Μέλος :** Τσουκάτος Κωνσταντίνος, Επίκουρος Καθηγητής

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Συντομογραφίες και ακρωνύμια .....	x
Περίληψη .....	x
<b>Κεφάλαιο 1 - Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου .....</b>	<b>1</b>
1.1 Εισαγωγικές έννοιες περί των Διαγραμμάτων Ελέγχου .....	1
1.2 Διαγράμματα ελέγχου .....	2
1.3 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου .....	4
1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου .....	5
1.5 Αναγνώριση μοτίβων .....	6
1.6 Μέτρα απόδοσης διαγραμμάτων ελέγχου .....	7
1.6.1 Μέσο μήκος ροής (ARL) .....	8
1.6.1.1 Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL <sub>in</sub> ) .....	8
1.6.1.2 Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL <sub>out</sub> ) .....	8
1.6.2 Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR) .....	9
1.6.3 Πιθανότητα ορθού συναγερμού (AR) .....	9
1.7 Φάσεις I και II .....	9
1.8 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών .....	10
1.8.1 $\bar{X}$ και R Διαγράμματα Ελέγχου .....	11
1.8.2 $\bar{X}$ και S Διαγράμματα Ελέγχου .....	13
1.8.3 Το $S^2$ Διάγραμμα Ελέγχου .....	14
1.8.4 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις .....	14
<b>Κεφάλαιο 2 - Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου .....</b>	<b>16</b>
2.1 Εισαγωγή .....	16
2.2 Ορισμός, Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου .....	16
2.2.1 Ορολογία και Προβλήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου ...	17
2.3 Μονομεταβλητά Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου .....	19
2.3.1 Σημαντικά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου .....	20
2.4 Μη παραμετρικά Δ.Ε. με χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων .....	23
2.4.1 Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη διάμεσο .....	23

2.4.2 Διάγραμμα ελέγχου με χρήση συνάρτησης προτεραιότητας .....	26
2.4.3 Διάγραμμα ελέγχου ελεύθερο κατανομής βασισμένο σε διατεταγμένες παρατηρήσεις .....	28
2.4.4 Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου βασισμένα σε διατεταγμένες παρατηρήσεις και μερικές επεκτάσεις του .....	33
<b>Κεφάλαιο 3 - Αλγόριθμος μελέτης μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με την χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων .....</b>	<b>36</b>
3.1 Περιγραφή αλγορίθμου .....	36
3.2.1 Εντός ελέγχου απόδοση αλγορίθμου με συνθήκη ελέγχου $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ .....	37
3.2.1.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ .....	39
3.2.2 Εντός ελέγχου απόδοση αλγορίθμου με συνθήκη ελέγχου $Y_{jn}, r$ .....	39
3.2.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, r$ .....	42
<b>Κεφάλαιο 4 - Παρουσίαση Προτεινόμενου αλγορίθμου για την μελέτη μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση κανόνων ροής .....</b>	<b>43</b>
4.1 Εισαγωγή 43 .....	43
4.2 Περιγραφή αλγορίθμων στο νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου 43 .....	43
4.2.1.1 <i>ARLin</i> και <i>ARLout</i> με χρήση του κανόνα ροής 2-3(αλγόριθμος $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ ) ...	43
4.2.1.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-3 .....	46
4.2.2.1 <i>ARLin</i> και <i>ARLout</i> με χρήση του κανόνα ροής 2-3(αλγόριθμος $Y_{jn}, r$ ) .....	47
4.2.2.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-3 .....	50
4.3.1 <i>ARLin</i> και <i>ARLout</i> με χρήση του κανόνα ροής 2-4(αλγόριθμος $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ ) ...	52
4.3.1.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-4 .....	55
4.3.2 <i>ARLin</i> και <i>ARLout</i> με χρήση του κανόνα ροής 2-4(αλγόριθμος $Y_{jn}, r$ ) .....	57
4.3.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-4 .....	59
4.4.1 <i>ARLin</i> και <i>ARLout</i> με χρήση του κανόνα ροής 3-4(αλγόριθμος $Y_{jn}, Y_{kn}, r$ ) ....	61

<b>4.4.2 ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 3-4(αλγόριθμος <math>Y_{j:n}, r</math>)</b> .....	<b>64</b>
--	-----------

<b>Βιβλιογραφία</b> .....	<b>68</b>
---------------------------	-----------

### **Κατάλογος Πινάκων**

<b>Πίνακας 1</b> Αποφάσεις ελέγχου υποθέσεων .....	<b>9</b>
<b>Πίνακας 2</b> Πιθανότητα σωστής μη ειδοποίησης σε εντός ελέγχου δείγμα (πηγή: Janacek & Meikle (1997)) .....	<b>25</b>
<b>Πίνακας 3</b> Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR) Διάγραμμα ελέγχου Janacek & Meikle (1997) .....	<b>26</b>
<b>Πίνακας 4</b> Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR) για το διάγραμμα των Chakraborti et al. (2004), (πηγή: Chakraborti et al.(2004)). .....	<b>28</b>
<b>Πίνακας 5</b> Πιθανότητες λανθασμένου συναγερμού (FAR) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου των Balakrishnan et al.(2010) πηγή: Balakrishnan et al.(2010) .....	<b>30</b>
<b>Πίνακας 6</b> Πιθανότητα ορθού συναγερμού (AR) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου των Balakrishnan et al. (2010) (πηγή: Balakrishnan et al. (2010)) .....	<b>31</b>
<b>Πίνακας 7</b> Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLin) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου των Balakrishnan et al. (2010) (πηγή: Balakrishnan et al. (2010)) .....	<b>32</b>
<b>Πίνακας 8</b> Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου Triantafyllou (2018) - (πηγή: Triantafyllou (2018)) .....	<b>33</b>
<b>Πίνακας 9</b> Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου Triantafyllou (2018) - (πηγή: Triantafyllou (2018)) .....	<b>34</b>
<b>Πίνακας 10</b> Πιθανότητα ορθού συναγερμού (AR) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου Triantafyllou (2018) - (πηγή: Triantafyllou (2018)) .....	<b>35</b>
<b>Πίνακας 11</b> Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ .....	<b>37</b>
<b>Πίνακας 12</b> Αποτελέσματα προσομοίωσης στην R για εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARLin.( $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ ) .....	<b>39</b>
<b>Πίνακας 13</b> Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ .....	<b>39</b>
<b>Πίνακας 14</b> Αποτελέσματα προσομοίωσης που στην R για εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARLin( $Y_{j:n}, r$ ) .....	<b>42</b>
<b>Πίνακας 15</b> Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ και κανόνα ροής 2-3 .	<b>43</b>
<b>Πίνακας 16</b> Σύγκριση τιμών ARLout με χρήση κανόνα ροής 2-3 .....	<b>46</b>
<b>Πίνακας 17</b> Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, r$ και κανόνα ροής 2-3 .....	<b>48</b>



<b>Πίνακας 18</b> <i>Comparison of the ARLout with 2-of-3 run rules of control charts with approximately the same ARLin.</i> .....	<b>50</b>
<b>Πίνακας 19</b> <i>Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου <math>Y_{j:n}, Y_{k:n}, r</math> και κανόνα ροής 2-4</i> ..	<b>52</b>
<b>Πίνακας 20</b> <i>Σύγκριση τιμών ARLout <math>Y_{j:n}, Y_{k:n}, r</math> με χρήση του κανόνα ροής 2-4</i> .....	<b>55</b>
<b>Πίνακας 21</b> <i>Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου <math>Y_{j:n}, r</math> και κανόνα ροής 2-4</i> .....	<b>57</b>
<b>Πίνακας 22</b> <i>Comparison of the ARLout with 2-of-4 run rules of control charts with approximately the same ARLin.</i> .....	<b>60</b>
<b>Πίνακας 23</b> <i>Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου <math>Y_{j:n}, Y_{k:n}, r</math> και κανόνα ροής 3-4</i> ..	<b>62</b>
<b>Πίνακας 24</b> <i>Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου <math>Y_{j:n}, r</math> και κανόνα ροής 3-4</i> .....	<b>65</b>

## Κατάλογος Σχημάτων

<b>Σχήμα 1:</b> <i>Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart</i> .....	<b>3</b>
<b>Σχήμα 2:</b> <i>Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου.</i> ....	<b>5</b>
<b>Σχήμα 3:</b> <i>Διάφοροι τύποι μοτίβων διαγραμμάτων ελέγχου</i> .....	<b>7</b>

## Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

**τ.μ** - Τυχαία μεταβλητή ή τυχαίες μεταβλητές

**CUSUM** - Συσσωρευμένο άθροισμα(*Cumulative sum*)

**EWMA** - Εκθετικά σταθμισμένος κινητός μέσος(*Exponentially weighted moving average*)

**Δ.Ε.** - Διάγραμμα Ελέγχου

**CL** - Κεντρική γραμμή στο διάγραμμα ελέγχου(*Center line*)

**AR** - Alarm rate

**FAR** - Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού(*False alarm rate*)

**ARL** - Μέσο Μήκος Ροής (*Average run length*)

**ARL<sub>out</sub>** - Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (*Out of control average run length*)

**ARL<sub>in</sub>** - Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (*In control average run length*)

## Περίληψη

Σκοπός της πτυχιακής εργασίας είναι η παρουσίαση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Τα διαγράμματα ελέγχου χωρίζονται σε παραμετρικά και σε μη παραμετρικά. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τα διαγράμματα ελέγχου όπου ισχύει η υπόθεση ότι η κατανομή των δεδομένων του υπό μελέτη πληθυσμού είναι κάποια γνωστή κατανομή. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τα διαγράμματα ελέγχου στα οποία η κατανομή των δεδομένων του υπό μελέτη πληθυσμού είναι άγνωστη. Ειδικότερα, θα γίνει μια παρουσίαση στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που συνδυάζουν τη χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων και κανόνων ροής.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από 4 κεφάλαια. Αρχικά, πραγματοποιείται μια εισαγωγή στις βασικές έννοιες της ποιότητας, του στατιστικού ελέγχου ποιότητας και των εργαλείων ποιότητας, όπως είναι το διάγραμμα ελέγχου. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα διαγράμματα ελέγχου, ο τρόπος κατασκευής τους, τα είδη τους. Επίσης, γίνεται αναφορά στα μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου. Επιπλέον, πραγματοποιείται μια ανασκόπηση στα σημαντικά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Ειδικότερα, παρουσιάζονται τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που κάνουν χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο, πραγματοποιείται μελέτη μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση μεθόδων προσομοίωσης με κατάλληλο λογισμικό. Στο τέταρτο κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν διατεταγμένες παρατηρήσεις και κανόνες ροής. Τέλος, ολοκληρώνουμε με τα συμπεράσματα από την υλοποίηση του αλγόριθμου.

## Κεφάλαιο 1

### Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

#### 1.1 Εισαγωγικές έννοιες περί των Διαγραμμάτων Ελέγχου

Ο κύριος στόχος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η άμεση ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία έτσι, ώστε να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητες διορθωτικές ενέργειες πριν κατασκευαστεί μεγάλο πλήθος προϊόντων που δεν είναι συμμορφωμένα (non conforming) με τις προδιαγραφές. Για την επίτευξη του στόχου αυτού, η πιο διαδεδομένη τεχνική που χρησιμοποιείται είναι τα Διαγράμματα Ελέγχου Διεργασιών (control charts), τα οποία μπορούν να ανιχνεύσουν σε πραγματικό χρόνο τις ειδικές αιτίες Μεταβλητότητας (on-line process-monitoring). Επίσης, μπορούν να εκτιμήσουν τις παραμέτρους μιας παραγωγικής διαδικασίας, να προσδιορίσουν την ικανότητα μιας διεργασίας και να παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τη βελτίωσή της. Συνεπώς, τα Διαγράμματα Ελέγχου αποτελούν, εάν όχι το σημαντικότερο εργαλείο, ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών, διότι μειώνουν τη Μεταβλητότητα όσο το δυνατόν περισσότερο, δεδομένου ότι η αυτή δεν μπορεί να εξαλειφθεί τελείως.

Τα διαγράμματα ελέγχου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο μεγάλες κλάσεις:

**A.** στα διαγράμματα ελέγχου ποσοτικών μεταβλητών (variable control charts), όπου το υπό εξέταση χαρακτηριστικό (που θα παρίσταται από τη τυχαία μεταβλητή  $X$ ) μπορεί να μετρηθεί και να εκφραστεί ποσοτικά ως ένας αριθμός ή σε κάποια συνεχή κλίμακα μέτρησης. Στην περίπτωση αυτή τα διαγράμματα ελέγχου συνήθως παριστάνουν γραφικά τα μέτρα κεντρικής τάσης (όπως συμβαίνει στο διάγραμμα  $\bar{X}$  τύπου Shewhart) και τα μέτρα διασποράς (όπως στην περίπτωση του διαγράμματος  $R$ ).

**B.** στα διαγράμματα ελέγχου ποιοτικών μεταβλητών (attribute control charts), όπου το υπό εξέταση χαρακτηριστικό μπορεί να πάρει δύο δυνατές τιμές: ελαττωματικό και μη ελαττωματικό, χαρακτηρισμός που στη γενικευμένη περίπτωση άπτεται στην παρουσία ή όχι κάποιας συγκεκριμένης ιδιότητας (attribute). Σημαντικότεροι εκπρόσωποι των διαγραμμάτων τύπου Shewhart αυτής της κατηγορίας είναι τα διαγράμματα ελέγχου για το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων τύπου  $p$  ( $p$ -charts), τα διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωμάτων τύπου  $c$  και τα διαγράμματα ελέγχου για το μέσο αριθμό ελαττωμάτων τύπου  $u$  ( $c$ -charts και  $u$ -charts αντίστοιχα).

Εάν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό, τότε αναφερόμαστε σε **μονομεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (univariate control charts).

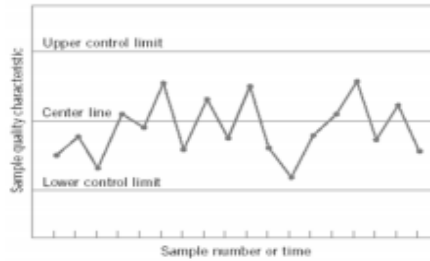
Αν οι μετρήσεις αφορούν περισσότερα χαρακτηριστικά, τότε αναφερόμαστε σε **πολυμεταβλητά διαγράμματα ελέγχου** (multivariate control charts).

Όταν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν κάποια γνωστή κατανομή, τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου** (parametric control charts). Αντίθετα, εάν δε γνωρίζουμε ποια κατανομή ακολουθούν οι μετρήσεις που λαμβάνονται, τότε αναφερόμαστε σε **μη παραμετρικά (ή ελεύθερα κατανομής) διαγράμματα ελέγχου** (non parametric or distribution free control charts).

Στην περίπτωση που οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι εξαρτημένες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται στο χρόνο  $t-1$ , τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (control charts for autocorrelated processes). Αν οι μετρήσεις είναι ανεξάρτητες, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για ασυσχέτιστες διεργασίες** (control charts for uncorrelated processes). Τέλος, αν από την παραγωγική διαδικασία λαμβάνουμε μία μέτρηση (παρατήρηση) σε κάθε χρονική στιγμή, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις** (control charts for individual observations). Αντίθετα, εάν τα δείγματα μετρήσεων που λαμβάνονται από την παραγωγική διαδικασία είναι μεγαλύτερα της μονάδας ( $n > 1$ ), τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου για δείγματα ή ομάδες** (control charts for rational subgroups). Εάν τα σημεία που σχεδιάζονται σε ένα διάγραμμα ελέγχου βασίζονται μόνο σε πληροφορίες που δίνει μόνο το πιο πρόσφατο δείγμα, αγνοώντας τις πληροφορίες που περιέχονται σε προηγούμενα δείγματα, τότε αναφερόμαστε σε **διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη** (control charts without memory). Σε αυτή την κατηγορία ταξινομούνται τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart (Shewhart-type control charts), τα οποία χρησιμοποιούνται κυρίως όταν οι αλλαγές του μέσου επιπέδου που ανιχνεύουμε είναι

## 1.2 Διαγράμματα ελέγχου

Το διάγραμμα ελέγχου είναι μια τεχνική του ΣΕΔ που χρησιμοποιείται ευρέως για την ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία (on-line monitoring). Εφευρέθηκε από τον Walter A. Shewhart ενώ εργαζόταν στα Bell Labs τη δεκαετία του 1920. Οι μηχανικοί της εταιρείας είχαν στόχο τη βελτίωση της αξιοπιστίας των συστημάτων μετάδοσης της τηλεφωνίας. Το διάγραμμα ελέγχου παρουσιάζει μια γραφική παράσταση ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στη σταθερότητα ή την αστάθεια της διεργασίας σε συνάρτηση με το χρόνο. Τα διαγράμματα ελέγχου είναι δημοφιλή κυρίως διότι: είναι μια αποδεδειγμένη τεχνική για την βελτίωση της παραγωγικότητας, είναι αποτελεσματικά στην πρόβλεψη ελαττωμάτων, αποτρέπουν άσκοπη διαδικασία προσαρμογής, παρέχουν διαγνωστικές πληροφορίες και πληροφορίες σχετικά με την ικανότητα της διεργασίας



Σχήμα 1 Τυπικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart

Το διάγραμμα ελέγχου περιέχει μια κεντρική γραμμή (center line, CL) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας που παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (average value) του ποιοτικού χαρακτηριστικού που αντιστοιχεί στην εντός ελέγχου κατάσταση. Επίσης διακρίνονται δύο άλλες οριζόντιες γραμμές, τα άνω και κάτω όρια ελέγχου (upper and lower control limits, UCL and LCL). Τα όρια ελέγχου επιλέγονται έτσι ώστε αν η διαδικασία είναι εντός ελέγχου, τότε σχεδόν όλα τα σημεία του δείγματος να βρίσκονται μεταξύ αυτών των δύο γραμμών. Όσο τα σημεία κατανέμονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι «τυχαία», η διαδικασία είναι εντός ελέγχου οπότε και δεν απαιτείται καμία διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός ορίων ελέγχου τότε η διαδικασία καθίσταται εκτός ελέγχου και παράγεται ένας συναγερμός (alarm) και απαιτούνται ενέργειες για να βρεθούν οι ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που προκαλούν το πρόβλημα. Συνήθως, τα σημεία του δείγματος συνδέονται με μια τεθλασμένη γραμμή για να απεικονίζεται ευκολότερη η εξέλιξη της ακολουθίας στο χρόνο. Ακόμη και αν όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου

Παρακάτω δίνεται ένα γενικό μοντέλο για το διάγραμμα ελέγχου:

$$UCL = \mu_w + L_{\sigma_w}$$

$$CL = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - L_{\sigma_w}$$

όπου  $\mu_w$  είναι η μέση τιμή και  $\sigma_w$  η τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης  $W$  που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, η οποία μετρά κάποιο ποιοτικό χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει, και  $L$  είναι η «απόσταση» των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή, εκφρασμένη σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Συνήθως,  $L=3$  και στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στην κατασκευή διαγράμματος ελέγχου  $3\sigma$ . Το μοντέλο ορίων σίγμα ( $\sigma_{z_{\alpha/2}}$ )  $\sigma$  για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου προτάθηκε από τον Shewhart (1931) και καλείται διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο διάγραμμα ελέγχου λόγω της

απλότητας στην κατασκευή και στην ερμηνεία του . Επιπρόσθετα, για την κατασκευή ορίων ελέγχου σε ένα διάγραμμα ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας (probability limits model). Για κανονική, ή προσεγγιστικά κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $W$  η κεντρική τιμή και τα άνω και κάτω όρια ελέγχου για το μοντέλο ορίων πιθανότητας  $\alpha$  της στατιστικής συνάρτησης  $W$  είναι:

$$UCL = \mu_w + z_{\alpha/2} \sigma_w = w_{\alpha/2}$$

$$CL = \mu_w$$

$$LCL = \mu_w - z_{\alpha/2} \sigma_w = w_{1-(\alpha/2)}$$

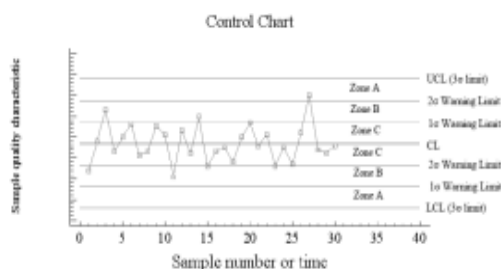
όπου  $w_\alpha$  το άνω  $\alpha$  ποσοστιαίο σημείο της  $W$  . Για εντός ελέγχου διεργασίες (με κανονική κατανομή για την  $W$  ) ισχύει ότι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού σε κάθε πλευρά των ορίων ελέγχου ισούται με  $\alpha /2$  (  $\alpha$  είναι η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερμού). Για  $\alpha/2=0.001$  (δηλαδή μοντέλο με όρια πιθανότητας 0.002), ισχύει ότι  $z_{\alpha/2} = 3.09024$  . Στην περίπτωση που η κατανομή της  $W$  δεν είναι κανονική (ή δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος), είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής  $W$  , αντί των ποσοστιαίων σημείων της τυπικής κανονικής κατανομής [ (1) Ατζουλάκος (2008)].

### 1.3 Προειδοποιητικά Όρια Ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται στα διαγράμματα ελέγχου με σκοπό την πιο έγκαιρη ανίχνευση ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία. Τα εξωτερικά προειδοποιητικά όρια (outer warning limits) σχεδιάζονται σε απόσταση  $2\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (ΣΧΗΜΑ 2). Αν ένα ή περισσότερα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται μεταξύ των εξωτερικών προειδοποιητικών ορίων και των ορίων ελέγχου (προς τη μια πλευρά της κεντρικής γραμμής) τότε υπάρχουν ενδείξεις ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Τα εσωτερικά προειδοποιητικά όρια (inner warning limits) σχεδιάζονται σε απόσταση  $1\sigma$  από την κεντρική γραμμή του διαγράμματος (ΣΧΗΜΑ 2). Τα όρια ελέγχου μαζί με τα προειδοποιητικά όρια (εσωτερικά και εξωτερικά) χωρίζουν το διάγραμμα σε τρεις ζώνες. Τα όρια που βρίσκονται σε απόσταση  $3\sigma$  από την κεντρική γραμμή ονομάζονται φυσικά όρια ανοχής της διεργασίας (Natural tolerance limits, NTL) . Η χρήση των προειδοποιητικών ορίων αυξάνει και κατ' επέκταση βελτιώνει την ευαισθησία (sensitivity) του διαγράμματος ελέγχου, διότι εντοπίζονται γρηγορότερα

πιθανές μετατοπίσεις του μέσου της διαδικασίας, αλλά οδηγεί επίσης σε αυξημένο κίνδυνο εσφαλμένων συναγερωμών/σημάτων [ (2) **Montgomery (2009)** ].



Σχήμα 2 : Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου.

#### 1.4 Κανόνες ευαισθητοποίησης για τα διαγράμματα ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται συνήθως μαζί με τους κανόνες ευαισθητοποίησης (sensitizing rules), οι οποίοι περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας τότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου χωρίς την ύπαρξη απαραίτητως κάποιου σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου, όπως αναφέρονται από τον **Montgomery (2009)**, είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη A (σε μια από τις δύο ζώνες A).
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές).
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C.
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω- κάτω”.
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Οι τέσσερις πρώτοι κανόνες είναι γνωστοί ως Western Electric Rules (Western Electric (1956)). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι παραπάνω κανόνες μπορούν να φανούν χρήσιμοι ώστε να ανιχνεύσουμε γρηγορότερα τις εκτός ελέγχου διεργασίες. Ωστόσο, η ταυτόχρονη χρήση πολλών από αυτούς τους κανόνες μπορεί να

προκαλέσει λανθασμένους συναγερμούς, με αποτέλεσμα να έχουμε λανθασμένες διακοπές της παραγωγικής διαδικασίας, οι οποίες θα γίνονται με σκοπό να βρεθούν οι ειδικές αιτίες που προκάλεσαν την εκτός ελέγχου κατάσταση. Τελικά, κάτι τέτοιο θα επιφέρει αύξηση του κόστους της παραγωγής.

### 1.5 Αναγνώριση μοτίβων

Αν τα προκαταρκτικά δείγματα συλλέγονται από μια σταθερή διεργασία η σειρά των σημείων στο διάγραμμα ελέγχου θα παρουσιάζει ένα φυσικό (κανονικό (normal)) μοτίβο (βλ. **Σχήμα 3(α)**), το οποίο χαρακτηρίζεται από μια διακύμανση των σημείων γύρω από την μέση τιμή έχοντας τα περισσότερα σημεία πλησιέστερα στην κεντρική γραμμή, μερικά σημεία απλωμένα και να προσεγγίζουν τα όρια ελέγχου και κανένα από τα σημεία (ή τουλάχιστον ένα πολύ σπάνιο σημείο) που υπερβαίνουν τα όρια ελέγχου. Από την άλλη πλευρά, εάν τα προκαταρκτικά δείγματα λαμβάνονται από μια ασταθή διεργασία, η σειρά των σημείων του διαγράμματος θα εκθέτουν σχεδόν πάντα ένα αφύσικο μοτίβο.

Το Statistical Quality Control Handbook της Western Electric επισημαίνει διάφορους τύπους αφύσικων μοτίβων που μπορεί να εμφανιστούν σε μια ασταθή διεργασία. Μεταξύ αυτών, υπάρχουν επτά αφύσικα μοτίβα, τα οποία συνήθως παρατηρούνται στα διαγράμματα ελέγχου. Αυτά είναι (βλ. **Σχήμα 3 (β)-(η)**):

**(β)** το μοτίβο έλλειψης μεταβλητότητας (stratification), στο οποίο τα σημεία του διαγράμματος κινούνται με τεχνητό τρόπο γύρω από την κεντρική γραμμή χωρίς να υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη μεταβλητότητα,

**(γ)** το συστηματικό μοτίβο (systematic), όταν μια σειρά σημείων στο διάγραμμα ελέγχου δεν παρουσιάζει οποιοδήποτε κυκλικό μοτίβο, αλλά ακόμα εμφανίζεται να είναι προβλέψιμη σε ένα συστηματικό (περίπου) τρόπο,

**(δ)** το κυκλικό μοτίβο (cyclic), που αντιπροσωπεύεται από μια ημιτονοειδή μορφή, με τις σύντομες ανοδικές και καθοδικές τάσεις στα δεδομένα που εμφανίζονται επανειλημμένα,

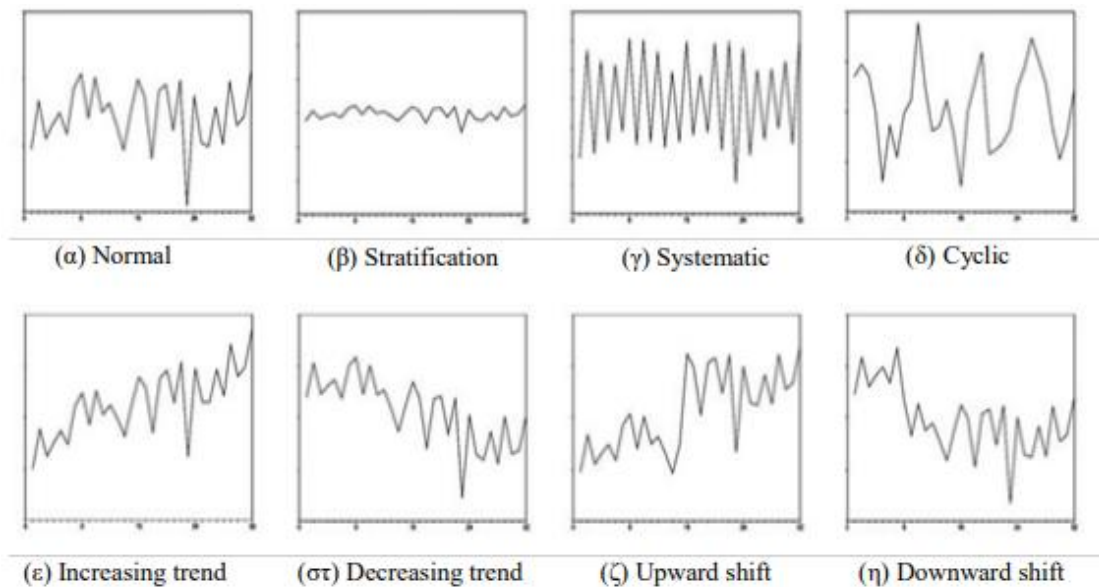
**(ε)** το μοτίβο αυξανόμενης τάσης (increasing trend), το οποίο αποτελείται από μια σειρά σημείων που δείχνουν μια βαθμιαία ανοδική μεταβολή στο μέσο όρο,

**(στ)** το μοτίβο μειούμενης τάσης (decreasing trend), το οποίο περιέχει μια σειρά σημείων που αντιπροσωπεύουν μια βαθμιαία καθοδική μεταβολή στο μέσο όρο,

**(ζ)** το μοτίβο ανοδικής μεταβολής (upward shift), το οποίο περιέχει μια σειρά σημείων που παρουσιάζει απότομη αλλαγή από ένα χαμηλότερο επίπεδο σε ένα υψηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά και



(η) το μοτίβο καθοδικής μεταβολής (downward shift), αποτελείται από μια σειρά σημείων που έχει μια απότομη αλλαγή από ένα υψηλότερο επίπεδο σε ένα χαμηλότερο επίπεδο μέσα στη σειρά.



Σχήμα 3: Διάφοροι τύποι μοτίβων διαγραμμάτων ελέγχου

Άλλα αφύσικα μοτίβα είναι ειδικές ή μικτές μορφές δύο ή περισσότερων αυτών των επτά κύριων τύπων αφύσικων μοτίβων [ (3) **Gauri and Chakraborty (2008)** ].

### 1.6 Μέτρα απόδοσης διαγραμμάτων ελέγχου

Παρακάτω θα γίνει εκτενής αναφορά στα βασικά χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων ελέγχου τα οποία χρησιμεύουν ως μέτρα απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου καθώς και στον τρόπο υπολογισμού τους . Επιγραμματικά θα αναλυθούν :

- Μέσο μήκος ροής – Average run length (ARL)
  - i. Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLin)
  - ii. Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLout)
- Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού – False Alarm Rate(FAR)

- Πιθανότητα ορθού συναγερμού – Alarm rate (AR)

### 1.6.1 Μέσο μήκος ροής (ARL)

Η απόδοση του διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται από το μέσο μήκος ροής (average run length, ARL) του διαγράμματος. Το ARL είναι ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου. Αν οι παρατηρήσεις της διεργασίας είναι ασυσχέτιστες, τότε για οποιοδήποτε Shewhart διάγραμμα ελέγχου, το ARL ορίζεται ως εξής:

$$ARL_{out} = \frac{1}{1-\beta}$$

όπου  $\beta$  είναι η πιθανότητα ότι ένα σημείο υπερβαίνει τα όρια ελέγχου.

#### 1.6.1.1 Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLin)

Στην περίπτωση κατά την οποία η διεργασία που μελετάμε βρίσκεται εντός ελέγχου, θα έχουμε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARLin. Αν έχουμε ένα Δ.Ε.  $\bar{X}$  (τύπου Shewhart) και τα δεδομένα μας προέρχονται από κανονική κατανομή (η σ.σ.  $W$  ακολουθεί κανονική κατανομή) και χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου στο διάγραμμα, τότε το εντός ελέγχου μέσο μήκος ARLin (ή ARLout) είναι ίσο με:

$$ARLin = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,0027} = 370$$

Προφανώς, σε εντός ελέγχου διεργασίες είναι επιθυμητό να έχουμε μεγάλο ARLin.

#### 1.6.1.2 Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLout)

Όταν μία διεργασία βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου, χρησιμοποιούμε το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (out of control Average Run Length, ARLout), το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$ARL_{out} = \frac{1}{1-\beta}$$

αφού η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίση με  $\beta$ , οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα  $1-\beta$ . Το ARLout δηλώνει τον αναμενόμενο μέσο αριθμό συνεχόμενων δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η αλλαγή της διεργασίας από τη στιγμή που αυτή συνέβη. Στην πράξη θέλουμε να έχουμε μεγάλο

εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLin) και μικρό εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLout).

### 1.6.2 Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR)

Τα σφάλματα στα οποία μπορούμε να υποπέσουμε είναι δύο. Αυτά είναι το Σφάλμα τύπου I (ή ρίσκο  $\alpha$ ) και το Σφάλμα τύπου II (ή ρίσκο  $\beta$ ). Σε έναν έλεγχο υποθέσεων θα έχουμε δύο (αντικρουόμενες) υποθέσεις: την μηδενική υπόθεση ( $H_0$ ) και την εναλλακτική υπόθεση ( $H_1$ ). Το Σφάλμα τύπου I (ή ρίσκο  $\alpha$ ) συμβαίνει όταν απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση, ενώ στην πραγματικότητα ισχύει η μηδενική υπόθεση. Το Σφάλμα τύπου II (ή ρίσκο  $\beta$ ) συμβαίνει όταν αποδεχτούμε την μηδενική υπόθεση, ενώ ισχύει η εναλλακτική υπόθεση. Οι δυνατές αποφάσεις και οι συνέπειές τους σε έναν έλεγχο υποθέσεων απεικονίζονται στον πίνακα 1.

Απόφαση	Πραγματικότητα	
	Ισχύει η $H_0$	Ισχύει η $H_1$
Αποδεκτή η $H_0$	Σωστή απόφαση με πιθανότητα = $1 - \alpha$	Σφάλμα τύπου II με πιθανότητα = $\beta$
Αποδεκτή η $H_1$	Σφάλμα τύπου I με πιθανότητα = $\alpha$	Σωστή απόφαση με πιθανότητα = $1 - \beta$

Πίνακας 1 – Αποφάσεις ελέγχου υποθέσεων

Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (false alarm rate, FAR) είναι η πιθανότητα, ένα διάγραμμα ελέγχου να δώσει σήμα ότι η διεργασία βρίσκεται πλέον εκτός στατιστικού ελέγχου, ενώ στην πραγματικότητα παραμένει εντός ελέγχου. Το Σφάλμα τύπου I μας δίνει αυτή την πιθανότητα.

### 1.6.3 Πιθανότητα ορθού συναγερμού (AR)

Η πιθανότητα ορθού συναγερμού, είναι η πιθανότητα το διάγραμμα ελέγχου να δώσει σωστά σήμα ότι υπάρχει μετατόπιση από την τιμή στόχο της διεργασίας από τη στιγμή που έχει συμβεί αυτή η μετατόπιση. Η πιθανότητα αυτή είναι η συμπληρωτική της πιθανότητας να υποπέσουμε σε Σφάλμα τύπου II. Δηλαδή η πιθανότητα ορθού συναγερμού ισούται με  $1 - \beta$ .

## 1.7 Φάσεις I και II

Στη Φάση I (Phase I), συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία που αναλύονται όλα μαζί ταυτόχρονα, για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να «φέρει» τη διεργασία εντός ελέγχου με τη χρήση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου (trial control

limits). Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) που προκύπτουν είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective).

Στη Φάση II, σκοπός είναι ο έλεγχος μελλοντικών δεδομένων ώστε να διαπιστωθεί αν η διεργασία συνεχίζει να παραμένει εντός ελέγχου ή αν έχει μετατοπιστεί σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Η πιο συνήθης μέθοδος για τη λήψη απόφασης είναι η εφαρμογή ενός διαγράμματος ελέγχου. Κάθε νέα παρατήρηση ή δείγμα παρατηρήσεων ελέγχεται και με τη βοήθεια συγκεκριμένων κανόνων διαπιστώνεται αν η κατάσταση της υπό παρακολούθηση διεργασίας έχει αλλάξει ή έχει μείνει σταθερή [(4) **Τριανταφύλλου (2009)**].

Ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει έγκαιρα μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Επίσης ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό. Το ARL συμβάλει στην αξιολόγηση της απόδοσης ενός διαγράμματος ελέγχου στη Φάση II [(1) **Ατζουλάκος(2008)**].

## 1.8 Διαγράμματα Ελέγχου Μεταβλητών

Πολλά ποιοτικά χαρακτηριστικά μπορούν να εκφραστούν υπό τους όρους μιας αριθμητικής μέτρησης. Ένα απλό μετρήσιμο ποιοτικό χαρακτηριστικό όπως η διάσταση, το βάρος, ή ο όγκος καλείται μεταβλητή (variable) ((2)**Montgomery (2009)**). Τα διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών αναπτύχθηκαν το 1930 και χρησιμοποιούνται τόσο στη βιομηχανία όσο και σε πολλές επιστημονικές περιοχές. Ο έλεγχος του δειγματικού μέσου γίνεται συνήθως με τα διαγράμματα ελέγχου για τους μέσους, δηλ. το X διάγραμμα. Ο έλεγχος της διασποράς της διεργασίας μπορεί να ελεγχθεί είτε με ένα διάγραμμα ελέγχου για την τυπική απόκλιση, δηλαδή το S διάγραμμα, ή ένα διάγραμμα ελέγχου για το εύρος, ήτοι το R διάγραμμα. ((2)**Montgomery (2009)**, (6)**Mitra (2008)**, (5)**Γεωργακάκος (2002)** και (1)**Αντζουλάκος (2008)**).

### 1.8.1 $\bar{X}$ και R Διαγράμματα Ελέγχου

Έστω το χαρακτηριστικό  $X$  των προϊόντων που παράγονται, ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  και  $\sigma$  γνωστά. Αν  $X = (X_{i1}, \dots, X_{in}), i \geq 1$  είναι τυχαία δείγματα μεγέθους  $n$  το καθένα, τότε ο δειγματικός μέσος (sample average):

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2} \quad \bar{X}_i = \frac{1}{n} (X_{i1} + \dots + X_{in})$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/n)$  και είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής  $\mu$  του χαρακτηριστικού  $X$ . Ο δειγματικός μέσος  $\bar{X}_i$  παίρνει τιμές στο διάστημα  $[\mu - z_{\alpha/2} \sigma_{\bar{X}}], \sigma_{\bar{X}} = \sigma / \sqrt{n}$  με πιθανότητα  $1-\alpha$  [(7)Κουκουβίνος, X. (2008).

“Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας”. ΕΜΠ]

Όρια ελέγχου στο διάγραμμα για το δειγματικό μέσο:

$$UCL = \mu + 3\sigma_{\bar{X}_i}$$

$$CL = \mu$$

$$LCL = \mu - 3\sigma_{\bar{X}_i}$$

Οι τιμές των  $\mu$  και  $\sigma$  είναι άγνωστες, και πρέπει να εκτιμηθούν. Για να επιτευχθεί αυτό, επιλέγονται  $m = 20$  έως  $25$  ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους  $n = 4$  έως  $6$  το καθένα, υποθέτοντας ότι η επιλογή των δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου[(7)Κουκουβίνος, X. (2008)]

- Εκτίμηση του  $\mu$  :

Έστω  $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$  οι δειγματικοί μέσοι των  $m$  δειγμάτων.

$$\text{Θέτουμε: } \bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}$$

Τότε ανεξάρτητα από την κατανομή του πληθυσμού, από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ισχύει  $E(\bar{\bar{X}}) = \mu$  και  $\text{Var}(\bar{\bar{X}}) = \sigma^2/nm$ . Η ποσότητα  $\bar{\bar{X}}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2/nm)$  και ισχύει ότι  $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$  [(7)Κουκουβίνος, X. (2008)]

- Εκτίμηση του  $\sigma$  :

1. Μέθοδος R :

Έστω  $R_1, R_2, \dots, R_m$  τα εύρη των  $m$  δειγμάτων

$$R_i = \max\{X_{i1}, \dots, X_{in}\} - \min\{X_{i1}, \dots, X_{in}\}, i = 1, \dots, m$$

με  $\mu_{R_i} = E(R_i) = \sigma d_2$  και  $\sigma_{R_i} = \sqrt{\text{Var}(R_i)} = \sigma d_3$ . Θέτοντας

$\bar{R} = \frac{1}{m}(R_1 + R_2 + \dots + R_m)$  προκύπτει  $E(\bar{R}) = \sigma d_2$ . Δηλαδή  $\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$ .

2. Μέθοδος S :

$$\text{Έστω } S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$$

με  $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$  και  $\sigma_{S_i} = \sqrt{\text{Var}(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$ , όπου  $c_4$  σταθερά εξαρτάται από το μέγεθος  $n$  των δειγμάτων. Θέτουμε  $\bar{S} = \frac{1}{m}(S_1 + S_2 + \dots + S_m)$  οπότε  $E(\bar{S}) = \sigma c_4$ .

Δηλαδή  $\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4$

Όρια ελέγχου  $\bar{X}$  διαγράμματος (Φάση I):

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$$

Όρια ελέγχου R διαγράμματος (Φάση I):

$$UCL = D_4 \bar{R}$$

$$CL = \bar{R}$$

$$LCL = D_3 \bar{R}$$

όπου  $A_2 = A_2(n) = 3 / (d_2 \sqrt{n})$ ,  $D_3 = D_3(n) = 1 - 3(d_3 / d_2)$  και  
 $D_4 = D_4(n) = 1 + 3(d_3 / d_2)$  σταθερές

### 1.8.2 $\bar{X}$ και S Διαγράμματα Ελέγχου

Τα  $\bar{X}$  και S διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται κυρίως όταν το μέγεθος του δείγματος είναι σχετικά μεγάλο ( $n > 10$  ή  $12$ ) ή είναι μεταβλητό. Για τη διασπορά του ποιοτικού χαρακτηριστικού  $X$  χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2} \text{ με } \mu_{s_i} = E(S_i) = \sigma c_4 \text{ και}$$

$$\sigma_{s_i} = \sqrt{\text{Var}(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$$

όπου  $c_4$  σταθερά εξαρτάται από το μέγεθος  $n$  των δειγμάτων.

Όρια ελέγχου S διαγράμματος (Φάση II):

$$UCL = B_6 \sigma$$

$$CL = c_4 \sigma$$

$$LCL = B_5 \sigma$$

όπου  $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$  και  $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$ .

Όμως, η ποσότητα  $\sigma$  είναι άγνωστη, αλλά η εκτίμηση της είναι:  $\hat{\sigma} = \bar{S} / c_4$ .

Όρια ελέγχου  $\bar{X}$  διαγράμματος (Φάση I):

$$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$$

$$CL = \bar{\bar{X}}$$

$$LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$$

Όρια ελέγχου S διαγράμματος (Φάση I):

$$UCL = B_4 \bar{S}$$

$$CL = \bar{S}$$

$$LCL = B_3 \bar{S}$$

Όπου  $B_3 = 1 - (3/c_4)\sqrt{1-c_4^2}$  ,  $B_4 = 1 + (3/c_4)\sqrt{1-c_4^2}$  (ισχύει  $B_4 = B_6/c_4$  και  $B_3 = B_5/c_4$ ) και  $A_3 = 3/(c_4\sqrt{1-c_4^2})$  , σταθερές  $B_4$  ,  $B_5$  ,  $B_6$  και  $A$ .

### 1.8.3 Το $S^2$ Διάγραμμα Ελέγχου

Όρια ελέγχου  $S^2$  διαγράμματος (Φάση I)

$$UCL = \frac{\bar{S}^2}{n-1} X_{\alpha/2, n-1}$$

$$CL = \bar{S}^2$$

$$LCL = \frac{\bar{S}^2}{n-1} X_{1-(\alpha/2), n-1}$$

Μια τυπική τιμή  $\sigma^2$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της  $\bar{S}^2$  στις παραπάνω παραμέτρους αν η τελευταία δεν είναι γνωστή [(8)Montgomery, D. C.(2005). “Introduction to Statistical Quality Control”. John Wiley and Sons, New York.]

### 1.8.4 Διαγράμματα Ελέγχου για μεμονωμένες παρατηρήσεις

Στις περιπτώσεις που το μέγεθος του δείγματος είναι ίσο με 1, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις (individual observations). Έστω το χαρακτηριστικό  $X$  ακολουθεί κανονική κατανομή  $N(\mu, \sigma^2)$  με  $\mu$  και  $\sigma$  γνωστά. Καλείται  $X$  ή  $I$  διάγραμμα ελέγχου .

Όρια ελέγχου  $X$  διαγράμματος, για  $n=1$  (Φάση II):

$$UCL_x = \bar{X} + 3\sigma$$

$$CL_x = \bar{X}$$

$$LCL_x = \bar{X} - 3\sigma$$

Οι παρατηρήσεις που απεικονίζονται στο διάγραμμα είναι οι μεμονωμένες.

Επειδή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το  $R$  διάγραμμα ελέγχου για  $n=1$ , χρησιμοποιείται το κινούμενο εύρος (moving range, MR) των μεμονωμένων παρατηρήσεων που ορίζεται από τη σχέση



$$MR_i = |X_i - X_{i-1}| = \max\{X_{i-1}, X_i\} - \min\{X_{i-1}, X_i\}, i \geq 2$$

και ισχύει ότι  $\sigma_{MR_i} = E(MR_i) = \sigma d_2$  και  $\sigma_{MR_i} = \sqrt{V(MR_i)} = \sigma d_3$ , όπου οι σταθερές  $d_2, d_3$  υπολογίζονται για  $n=2$ .

Όρια ελέγχου MR διαγράμματος (Φάση II):

$$UCL_{MR} = D_2 \sigma$$

$$CL_{MR} = d_2 \sigma$$

$$LCL_{MR} = D_1 \sigma$$

όπου οι σταθερές  $2 d, 3 d$  υπολογίζονται για  $n = 2$

Αν  $\mu$  και  $\sigma$  άγνωστα, πρέπει να εκτιμηθούν. Έστω ότι διαθέτουμε  $m$  ανεξάρτητες παρατηρήσεις  $X_1, \dots, X_m$  από το χαρακτηριστικό  $X$ . Τότε  $\hat{\mu} = \bar{X} = (\sum_{i=1}^m X_i) / m$  και αν  $\overline{MR} = (MR_1 + \dots + MR_{i-1}) / (m-1)$ , προκύπτει ότι  $E(\overline{MR}) = \sigma d_2$  και  $\hat{\sigma} = \overline{MR} / d_2$ .

Όρια ελέγχου X διαγράμματος (Φάση I):

$$UCL_X = \bar{X} + 3(\overline{MR} / d_2)$$

$$CL_X = \bar{X}$$

$$LCL_X = \bar{X} - 3(\overline{MR} / d_2)$$

Όρια ελέγχου MR διαγράμματος (Φάση I):

$$UCL_{MR} = D_4 \overline{MR}$$

$$CL_{MR} = \overline{MR}$$

$$LCL_{MR} = D_3 \overline{MR}$$

όπου  $D_3 = 1 - 3(d_3 / d_2)$  και  $D_4 = 1 + 3(d_3 / d_2)$  υπολογίζονται για  $n=2$ . Η αποτελεσματικότερη εκτίμηση της τυπικής απόκλισης  $\sigma$  προκύπτει από τη σχέση  $\hat{\sigma} = S / c_4$ , όπου η σταθερά  $c_4$  υπολογίζεται για  $n=m$  και όπου

$$S = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}.$$

## Κεφάλαιο 2

### Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

#### 2.1 Εισαγωγή

Τα μη παραμετρικά ή ελεύθερα κατανομής διαγράμματα ελέγχου (non-parametric or distribution-free control charts), όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχουν ιδιότητες που δεν εξαρτώνται από την κανονικότητα ή κάποια άλλη συγκεκριμένη παραμετρική κατανομή. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος «μη παραμετρικά» δεν δηλώνει ότι στο σχεδιασμό των διαγραμμάτων αυτών δεν περιλαμβάνονται παράμετροι και κατά συνέπεια ο όρος «ελεύθερα κατανομής» φαίνεται να προσδιορίζει καλύτερα τη φύση των διαγραμμάτων αυτών. Για την ανάπτυξη και θεωρητική μελέτη των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιούνται κατά βάση οι κλασικές μη παραμετρικές τεχνικές συμπερασματολογίας που αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά το πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων όταν η κατανομή δεν έχει καθορισθεί [(4)Τριανταφύλλου (2009)].

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται τα σημαντικότερα μονομεταβλητά (univariate) ή μονοδιάστατα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τα οποία είναι: τύπου Shewhart, τύπου CUSUM και τύπου EWMA και δεν δίνεται έμφαση στα λεγόμενα πολυμεταβλητά (multivariate) μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου. Τα πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, είναι τα αντίστοιχα των μονομεταβλητών μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, για την περίπτωση κατά την οποία οι παρατηρήσεις που συλλέγονται είναι πολυδιάστατες. Για τα πολυμεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, αξίζει να σημειωθεί ότι χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση μιας διεργασίας η οποία περιλαμβάνει περισσότερα του ενός μετρήσιμα χαρακτηριστικά ή ένα διάνυσμα συγκεκριμένου πλήθους μετρήσιμων χαρακτηριστικών, δεν υποθέτουν συγκεκριμένη πολυδιάστατη κατανομή για τα δεδομένα και χρησιμοποιούν ειδικές τεχνικές του κλάδου της μη παραμετρικής Στατιστικής, αλλά τις εφαρμόζουν σε πολυδιάστατα δεδομένα [(9)Qiu and Hawkins (2003)].

Ο κύριος σκοπός των πολυμεταβλητών διαγραμμάτων ελέγχου είναι, να ελέγξουν έγκαιρα, αν κάποια στατιστική παράμετρος (δηλαδή κάποιο διάνυσμα παραμέτρων) της πολυδιάστατης κατανομής των δεδομένων παρέμεινε ίδια ή μεταβλήθηκε.

#### 2.2 Ορισμός, Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου

Οι Chakraborti, Van der Laan και Bakir παρείχαν ένα συστηματικό και λεπτομερές απολογισμό της βιβλιογραφίας των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου ορίζεται από την άποψη της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής του. Εάν η κατανομή του εντός ελέγχου μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η ίδια για κάθε συνεχή κατανομή, το διάγραμμα καλείται μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομής. Οι Chakraborti, Van der Laan και Bakir

συνόψισαν τα **πλεονεκτήματα** των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου ως εξής:

- 1) απλότητα
- 2) καμία ανάγκη υπόθεσης μιας συγκεκριμένης παραμετρικής κατανομής για την υποκείμενη διεργασία
- 3) η κατανομή του ARL<sub>0</sub> είναι ίδια για όλες τις συνεχείς κατανομές
- 4) μεγαλύτερη ανθεκτικότητα και ανοχή στις έκτροπες τιμές (outliers)
- 5) μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην ανίχνευση αλλαγών όταν η πραγματική κατανομή είναι αισθητά μη κανονική, ιδιαίτερα με βαρύτερες ουρές, και
- 6) καμία ανάγκη εκτίμησης της διακύμανσης για το καθορισμό των διαγραμμάτων για την παράμετρο θέσης.

Αξίζει να τονιστεί ότι από τεχνικής απόψεως οι περισσότερες μη παραμετρικές διαδικασίες απαιτούν ο πληθυσμός να είναι συνεχής ώστε να είναι ελεύθερες κατανομής και έτσι στο πλαίσιο του ΣΕΔ θεωρούμε τα λεγόμενα «διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών».

Ορισμένα **μειονεκτήματα** των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι τα ακόλουθα:

- 1) θα είναι «λιγότερο αποτελεσματικά» από τα παραμετρικά ομόλογα τους όταν κάποιος έχει μια πλήρη γνώση της κατανομής της διεργασίας για την οποία η παραμετρική μέθοδος έχει ειδικά σχεδιαστεί,
- 2) συνήθως απαιτούνται ειδικοί πίνακες όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μικρά, και
- 3) οι μη παραμετρικές μέθοδοι δεν είναι πολύ γνωστές ανάμεσα σε όλους τους ερευνητές και τους επαγγελματίες της ποιότητας.

### **2.2.1 Ορολογία και Προβλήματα των Μη Παραμετρικών Διαγραμμάτων Ελέγχου**

Στον Παραμετρικό Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας ενδιαφερόμαστε για την κατασκευή διαγραμμάτων που ανιχνεύουν τις αλλαγές στο μέσο της διεργασίας (process mean) ή/και στη μεταβλητότητα της διεργασίας (process variation), όπως το εύρος (range), η διακύμανση (variance) και η τυπική απόκλιση (standard deviation). Στην μη παραμετρική στατιστική, γενικότερα, εξετάζουμε την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης (location) ή/και της παραμέτρου κλίμακας (scale parameter) της κατανομής της διεργασίας. Η παράμετρος θέσης είναι π.χ. η μέση τιμή (mean) ή η

διάμεσος (median) ή κάποιο ποσοστημόριο της κατανομής, τα τελευταία είναι ιδιαίτερα ελκυστικά όταν η κατανομή αναμένεται να είναι ασύμμετρη (skewed, asymmetric).

Στο Μη Παραμετρικό Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας, έμμεσα, υποθέτουμε ότι πολλές διεργασίες ακολουθούν:

α) ένα μοντέλο θέσης (location model), με μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)  $F(x, \theta)$ , όπου  $\theta$  είναι μια άγνωστη παράμετρος θέσης ή

β) ένα μοντέλο κλίμακας (scale model), με α.σ.κ.  $F(x/\tau)$ , όπου  $\tau > 0$  είναι η άγνωστη παράμετρος κλίμακας ή πιο γενικά,

γ) το μοντέλο θέσης - κλίμακας (location-scale model), με α.σ.κ.  $F((x - \theta)/\tau)$ , όπου  $\theta$  και  $\tau$  είναι οι παράμετροι θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα.

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις μοντέλων, το πρόβλημα είναι ο εντοπισμός των  $\theta$  και  $\tau$  (ή και των δύο), βάσει τυχαίων δειγμάτων που συλλέγονται (συνήθως) σε ισαπέχοντα χρονικά σημεία. Στους συνήθεις υπολογισμούς της κατανομής του μήκους ροής η  $F$  υποτίθεται ότι είναι η α.σ.κ.  $\Phi$  της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην μη παραμετρική στατιστική, για τις μεταβλητές, η  $F$  υποτίθεται ότι είναι μια αυθαίρετη συνεχής α.σ.κ. Μολονότι το μοντέλο θέσης - κλίμακας φαίνεται να είναι ένα φυσικό μοντέλο προς εξέταση, μιας και παραλληλίζει τη κανονική περίπτωση με άγνωστους αμφοτέρωτα το μέσο και τη διακύμανση, το μεγαλύτερο μέρος της έως σήμερα διαθέσιμης βιβλιογραφίας του Μη Παραμετρικού Στατιστικού Έλεγχου Διεργασίας (ΜΣΕΔ) (Non parametric Statistical Process Control, NSPC) αναφέρεται στο μοντέλο θέσης και ελάχιστα στο μοντέλο ή στο μοντέλο θέσηςκλίμακας [(10)Chakraborti, Van der Laan and Bakir (2001)].

Όπως στον Παραμετρικό Έλεγχο Ποιότητας, έτσι και στο Μη Παραμετρικό, υπάρχουν δύο διακριτές Φάσεις. Στη Φάση I (Phase I), γίνεται εκτίμηση των ορίων ελέγχου, όταν η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου, με σκοπό τα όρια αυτά να χρησιμοποιηθούν για τη μελλοντική παρακολούθηση της διεργασίας. Στη Φάση II ή Φάση Παρακολούθησης (Phase II or Monitoring Phase), χρησιμοποιούνται τα όρια ελέγχου της Φάσης I για να διαπιστώσουμε εάν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου, όταν συλλέγονται μελλοντικά δείγματα. Όταν οι εντός ελέγχου παράμετροι, που ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε, είτε είναι γνωστές (ιστορικά) είτε μπορούν να προσδιοριστούν αναφερόμαστε στην περίπτωση γνωστών προτύπων ή Περίπτωση K (“standards-known” case or Case K). Όμως, υπάρχουν και περιπτώσεις που δεν υπάρχει αρκετή διαθέσιμη πληροφορία και ως εκ τούτου οι παράμετροι δεν είναι γνωστές και πρέπει να εκτιμηθούν, πράγμα που γίνεται στη Φάση I. Αυτό αναφέρεται ως περίπτωση άγνωστων προτύπων ή Περίπτωση U (“standards-unknown” case or Case U). Στη δεύτερη περίπτωση, οι παράμετροι εκτιμώνται από κάποια δεδομένα αναφοράς (reference data), όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στην Περίπτωση U, γίνεται πρώτα ανάλυση Φάσης I και μετά ξεκινά

η ανάλυση Φάσης II, ενώ αυτό δε γίνεται στην Περίπτωση K. Τέλος, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις U και K, υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες διαγραμμάτων: τα διαγράμματα τύπου Shewhart, CUSUM και EWMA [(11)Chakraborti (2011)].

### 2.3 Μονομεταβλητά Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου

Στα μονομεταβλητά (ή μονοδιάστατα) διαγράμματα απεικονίζονται οι μετρήσεις ενός μόνο ποιοτικού χαρακτηριστικού. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, έχουν αναπτυχθεί περισσότερα διαγράμματα για την παρακολούθηση της θέσης μιας συνεχούς διεργασίας, ενώ ελάχιστα είναι διαθέσιμα για την κλίμακα. Στην περίπτωση K, η κατασκευή των διαγραμμάτων για την παράμετρο θέσης βασίζεται σε δύο κυρίως μη παραμετρικούς ελέγχους: τον προσημικό έλεγχο (sign test or SN test) και τον προσημικό βαθμολογικό έλεγχο του Wilcoxon (Wilcoxon's signed-rank test or SR test). Ο προσημικός βαθμολογικός έλεγχος του Wilcoxon είναι σχεδόν τόσο αποτελεσματικός όσο και ο έλεγχος για τη μέση τιμή (t-test), ακόμα και αν η κατανομή είναι κανονική. Ωστόσο, ο SN έλεγχος είναι πιο αποτελεσματικός από τον SR, όταν η κατανομή είναι συμμετρική και έχει παχιές ουρές, όπως η διπλή εκθετική. Επίσης, ο SN έλεγχος εφαρμόζεται σε όλα τα ποσοστημόρια (percentiles), ενώ ο SR έλεγχος προτείνεται μόνο για τη διάμεσο (50th percentile or second quartile Q2).

Στην πρόσφατη βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετά μονομεταβλητά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, τα οποία βασίζονται σε διάφορες μη παραμετρικές μεθόδους. Για παράδειγμα, οι (12) **Human, Chakraborti and Smit (2010)** παρουσίασαν μια σειρά από μονόπλευρα και δίπλευρα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart που βασίζονται στην προσημική στατιστική συνάρτηση και σε κανόνες ροών (Shewhart-Type Sign Charts with Runs-Type Signaling Rules). Οι (13) **Chakraborti and Eryilmaz (2007)** παρουσίασαν μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart που βασίζονται στην προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση και σε κανόνες ροών (Shewhart-Type Signed-Rank Charts with Runs-Type Signaling Rules) ως απλές παραλλαγές του δίπλευρου μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου (Shewhart-Type Signed-Rank Chart) που είχε προτείνει ο Bakir το 2004 για την παρακολούθηση της διάμεσου (παράμετρος θέσης). Επιπλέον, οι (14) **Amin, Reynolds and Bakir (1995)** ανέπτυξαν ένα προσημικό διάγραμμα τύπου CUSUM (CUSUM-type Sign chart), οι (15) **Bakir and Reynolds (1979)** ένα προσημικό βαθμολογικό διάγραμμα τύπου CUSUM για τη διάμεσο (CUSUM-type Signed-Rank chart) και οι (16) **Amin and Searcy (1991)** ένα διάγραμμα τύπου EWMA που βασίζεται στον έλεγχο SR (EWMA-type Signed Rank chart). Τα παραπάνω διαγράμματα είναι διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης και χρησιμοποιούνται στην Περίπτωση K.

Αντίστοιχα διαγράμματα Φάσης II έχουν προταθεί και για την Περίπτωση U. Συγκεκριμένα, οι (17) **Janacek and Meikle (1997)** παρουσίασαν ένα διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης II (Shewhart-type precedence chart) που βασίζεται στη διάμεσο με όρια που υπολογίζονται με τη βοήθεια ενός εντός ελέγχου δείγματος αναφοράς και με την εφαρμογή στατιστικών ελέγχων προτεραιότητας (precedence

tests), ενώ οι **(18)Chakraborti, van der Laan and van de Wiel (2004)** μελέτησαν το παραπάνω διάγραμμα, υπολογίζοντας το μέσο μήκος ροής του με τη βοήθεια μιας τεχνικής δέσμευσης και προτείνοντας ταυτόχρονα πρόσθετες γενικεύσεις του. Το 2010 οι **(19)Balakrishnan, Triantafyllou and Koutras** πρότειναν ένα βελτιωμένο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart Φάσης II (Shewhart-type Precedence chart with enhancement), που και αυτό βασίζεται στους στατιστικούς ελέγχους προτεραιότητας. Σύμφωνα με την τεχνική αυτή, με βάση το δείγμα αναφοράς, προσδιορίζονται συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις, οι οποίες συνιστούν τα όρια ελέγχου του διαγράμματος. Η κατάσταση της διεργασίας κρίνεται από το εάν η παράμετρος θέσης διαδοχικών τυχαίων δειγμάτων της διεργασίας βρίσκεται μεταξύ των ορίων και από το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος που βρίσκονται εκτός των ορίων. Το 2009, οι ίδιοι συγγραφείς είχαν προτείνει τρία νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης II που βασίζονται στη βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του Wilcoxon. Τέλος, οι **(18)Chakraborti and Van de Wiel (2004)** παρουσίασαν ένα διάγραμμα τύπου Shewhart και ένα διάγραμμα τύπου EWMA, τα οποία βασίζονται στον έλεγχο των Mann Whitney-Wilcoxon (Shewhart-type and EWMA-type Mann-Whitney-Wilcoxon Rank-Sum charts).

Επιπρόσθετα, έχουν προταθεί και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης I για την παρακολούθηση της παραμέτρου θέσης στην Περίπτωση U. Συγκεκριμένα, οι **(20)Jones-Farmer, Jordan and Champ (2009)** πρότειναν ένα διάγραμμα τύπου Shewhart, το οποίο βασίζεται στον απαραμετρικό έλεγχο Kruskal-Wallis και ονομάζεται διάγραμμα mean-rank. Οι **(21)Graham, Human and Chakraborti (2010)** παρουσίασαν διάγραμμα τύπου Shewhart, το οποίο βασίζεται στον έλεγχο της διαμέσου (median test) και ονομάζεται διάγραμμα median. Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι υπάρχει πληθώρα μονομεταβλητών ή μονοδιάστατων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, τα οποία έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία, γεγονός που συνιστά ερευνητικά ζωντανό το συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο.

### **2.3.1 Σημαντικά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου**

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αναφερθούμε στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που χρησιμοποιούν διατεταγμένες παρατηρήσεις (order statistics), καθώς και σε αυτά που έχουν συνδυάσει και κανόνες ροής. Πριν προχωρήσουμε όμως σε αυτήν την κατηγορία διαγραμμάτων ελέγχου, θα πραγματοποιήσουμε μια σύντομη ανασκόπηση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου που έχουν προταθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Θα δούμε μη παραμετρικά Δ.Ε. που προέρχονται από τις τρεις βασικές κατηγορίες διαγραμμάτων ελέγχου, τα διαγράμματα τύπου Shewhart, τα διαγράμματα τύπου CUSUM και τα διαγράμματα EWMA. Γενικά, στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου μελετάμε τη διεργασία μέσω της κεντρικής γραμμής ή χρησιμοποιώντας την παράμετρο θέσης (location parameter) ή την παράμετρο κλίμακας (scale parameter). Η παράμετρος θέσης συνήθως αντιπροσωπεύει μια ποσότητα (μια παρατήρηση από την κατανομή) που μας ενδιαφέρει και μπορεί να είναι ο μέσος (mean), η διάμεσος (median) ή οποιοδήποτε

άλλο ποσοστημόριο (percentile). Σε περιπτώσεις που έχουμε λοξές ή με βαριά ουρά κατανομές επιλέγεται η διάμεσος. Μια αρκετά διαδεδομένη μέθοδος κατασκευής μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης (sign statistic). Συνήθως, ως κεντρική γραμμή επιλέγεται η διάμεσος μιας και αντιπροσωπεύει καλύτερα το κέντρο μιας κατανομής. Οι **(14)Amin, Reynolds JR, & Bakir (1995)** πρότειναν ένα μη παραμετρικό Δ.Ε. τύπου Shewhart (ονομάζεται SN chart) με χρήση της προσημικής στατιστικής συνάρτησης (sign test). Έστω ότι μελετάμε τη διάμεσο  $\theta$  μιας συνεχούς κατανομής και ότι η τιμή στόχος για εντός ελέγχου διεργασία είναι  $\theta_0$ . Η σ.σ. για το διάγραμμα είναι

$$SN_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0)$$

Όπου,  $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$  και  $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$  για  $i=1,2,3,\dots,n$  είναι οι παρατηρήσεις

του  $i$ -οστού δείγματος με  $n > 1$ . Τα όρια ελέγχου του παραπάνω μη παραμετρικού Δ.Ε. είναι  $UCL = c$ ,  $CL=0$  και  $LCL=-c$ , όπου  $c$  είναι θετικός ακέραιος ( $0 < c < n$ ). Τα όρια αυτά προκύπτουν από τη σχέση:

$$SN_i = 2T_i - n \quad SN_i = 2T_i - n$$

όπου  $T_i$  είναι η συνήθης στατιστική προσημική συνάρτηση (usual sign test statistic) η οποία μετράει το πλήθος των παρατηρήσεων των δειγμάτων που είναι μεγαλύτερες από  $\theta_0$ .

Ένα ακόμα μη παραμετρικό Δ.Ε. που προτάθηκε από τους **(14)Amin, Reynolds JR, & Bakir (1995)** είναι τύπου Shewhart με χρήση προσημικής στατιστικής συνάρτησης, προειδοποιητικών ορίων ελέγχου και κανόνων ροής (SN chart with warning limits and runs-rules). Τα όρια ελέγχου ορίστηκαν συμμετρικά γύρω από την κεντρική γραμμή (0) στο  $\pm a$ . Τα προειδοποιητικά όρια ελέγχου ορίστηκαν στο  $\pm w$  με  $0 \leq w < a$ . Σε αυτή την περίπτωση θα λαμβάνουμε σήμα για εκτός ελέγχου διεργασίας, όταν  $r$  συνεχόμενα σημεία βρίσκονται εντός της περιοχής  $[w, a]$  ή  $[-a, -w]$  ή όποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, δηλαδή εκτός  $\pm a$ .

Οι **(14)Amin, Reynolds JR, & Bakir (1995)** επίσης πρότειναν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου CUSUM σκοπό την παρακολούθηση της διαμέσου μιας διεργασίας που ακολουθεί κάποια συνεχή κατανομή με γνωστή παράμετρο  $\theta_0$ . Το συγκεκριμένο διάγραμμα βασίζεται στη σ.σ. SN με μέγεθος υποομάδας  $n$ . Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $\theta = 0$ , τότε έχουμε δύο μονόπλευρα μη παραμετρικά προσημικά διαγράμματα CUSUM. Ένα για το άνω σωρευτικό άθροισμα (one-sided upper CUSUM sign chart) και ένα για το κάτω σωρευτικό άθροισμα (one-sided lower CUSUM sign chart). Το πρώτο χρησιμοποιεί τη σ.σ.  $SN_i^+ = \max(0, SN_{i-1}^+ + SN_i - k)$  για την  $i$ -οστή υποομάδα, τιμή εκκίνησης  $SN_0^+ = 0$

και λαμβάνουμε σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία, όταν βρεθεί η πρώτη παρατήρηση εκτός του λεγόμενου διαστήματος από  $P = (X_{j:N} < \hat{m} < X_{N-j+1:N}) = 1 - a$  φάσεις, δηλαδή όταν  $SN_0^+ \geq h$ . Ομοίως, για το δεύτερο ισχύει η σχέση  $SN_i^- = \min(0, SN_{i-1}^+ + SN_i + k)$  με τιμή εκκίνησης  $SN_i^- = 0$ . Σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία έχουμε όταν  $SN_i^- \leq -h$ .

Μια άλλη κατηγορία μη παραμετρικών Δ.Ε. για την παρακολούθηση της διαμέσου είναι εκείνα που χρησιμοποιούν προσημικές βαθμολογικές συναρτήσεις (SR sign-ranked statistics). Ο **(22)Bakir (2004)** πρότεινε ένα μη παραμετρικό Δ.Ε. τύπου Shewhart (SR chart) που βασίστηκε στη στατιστική συνάρτηση SR. Η σ.σ. που απεικονίζεται σε ένα τέτοιο διάγραμμα είναι η  $SR_i = \sum_{j=1}^n \text{sign}(X_{ij} - \theta_0)R_{ij}$  όπου  $R_{ij}$  είναι ο βαθμός της ποσότητας  $|X_{ij} - \theta_0|$  για  $j=1,2,\dots,n$  μεταξύ των  $n$  απόλυτων αποκλίσεων από τη διάμεσο. Η τιμή στόχος για εντός ελέγχου διεργασία είναι η  $\theta_0$ . Για εντός ελέγχου διεργασία τα όρια του δίπλευρου διαγράμματος ελέγχου ορίζονται ως εξής:  $UCL=d$  και  $CL=0$  και  $LCL=-d$ , όπου  $d$  είναι θετικός ακέραιος ( $1 \leq d \leq \frac{n(n+1)}{2}$ ).

Ένα ακόμη μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση προσημικής βαθμολογικής πρότειναν οι **(15)Bakir & Reynolds (1979)**. Πιο συγκεκριμένα, πρότειναν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου CUSUM με άνω σωρευτικό άθροισμα  $SR^+ = \max(0, SR_{i-1}^+ + SR_i - k)$  και τιμή εκκίνησης  $SR^+ = 0$ . Γνωρίζουμε ότι στα διαγράμματα τύπου CUSUM, λαμβάνουμε σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία, όταν βρεθεί η πρώτη παρατήρηση ( $i$ -οστή) εκτός του λεγόμενου διαστήματος απόφασης δηλαδή όταν  $SR_i^+ \geq h$ .

Στη συνέχεια της σύντομης ανασκόπησής μας στα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου θα ξαναφερθούμε στο διάγραμμα που πρότειναν οι **(16)Amin & Searcy (1991)**. Πρόκειται για ένα διάγραμμα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου (EWMA) με χρήση προσημικής βαθμολογικής συνάρτησης. Το συγκεκριμένο μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου EWMA χρησιμοποιεί τη σ.σ.  $Z_i = \lambda SR_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$  με  $0 < \lambda \leq 1$  και τιμή στόχο  $Z_0 = 0$ . Η κεντρική γραμμή του διαγράμματος είναι  $CL= 0$  και τα  $L$  όρια ελέγχου (άνω και κάτω) δίνονται από τη σχέση:

$$\pm L \sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) \times \sqrt{1-(1-\lambda)^{2i}}}$$



όπου όσο αυξάνεται το  $i$  (ο χρόνος δηλαδή) η ποσότητα  $\sqrt{1-(1-\lambda)^{2i}}$  τείνει στη μονάδα και τα παραπάνω όρια σταθεροποιούνται. Οπότε η παραπάνω σχέση που δίνει τα όρια ελέγχου γίνεται  $\pm L\sqrt{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}$ .

Στην επόμενη ενότητα θα αναφερθούμε σε μερικά ακόμα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, εκείνα που κάνουν χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων. Αυτού του είδους τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου θα μας απασχολήσουν και στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας εργασίας.

## 2.4 Μη παραμετρικά Δ.Ε. με χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου που χρησιμοποιούν διατεταγμένες παρατηρήσεις, θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε σε μερικές βασικές έννοιες της θεωρίας διατεταγμένων παρατηρήσεων (Theory of Order Statistics). Θεωρούμε λοιπόν, την τυχαία μεταβλητή (τ.μ)  $X_i$  με  $i = 1, 2, \dots, n$  και έστω ότι  $X_{i:n}$  είναι η μικρότερη παρατήρηση από αυτές. Αν διαταχθούν σε αύξουσα σειρά, δηλαδή  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$  τότε έχουμε τις διατεταγμένες παρατηρήσεις της τ.μ  $X_i (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Οπότε ισχύει  $X_{i:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n}$ . Σε αυτό το σημείο καλό είναι να αναφέρουμε ότι η μικρότερη διατεταγμένη παρατήρηση (ή πρώτη διατεταγμένη παρατήρηση)  $X_{1:n}$  είναι και η μικρότερη τιμή του δείγματος. Δηλαδή ισχύει ότι  $X_{1:n} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ . Αντίστοιχα, η μεγαλύτερη παρατήρηση του δείγματος μεγέθους  $n$ , θα είναι και η μεγαλύτερη διατεταγμένη παρατήρηση (δηλαδή είναι  $X_{n:n} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ). Το δειγματικό εύρος (Range) ισούται με  $\text{Range}\{X_1, \dots, X_n\} = X_{n:n} - X_{1:n}$ . Τέλος, η διάμεσος  $\delta$  (median) είναι η μεσαία παρατήρηση του διατεταγμένου δείγματος. Αν το πλήθος  $n$  των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, δηλαδή  $n=2m+1$  (όπου  $m$  θετικός ακέραιος), διάμεσος είναι η μεσαία διατεταγμένη παρατήρηση  $X_{m+1:n}$ . Αντίθετα, όταν το πλήθος είναι άρτιος αριθμός ( $n=2m$ ) η διάμεσος είναι το ημίθροισμα των δύο μεσαίων διατεταγμένων παρατηρήσεων που ισούται με  $\frac{X_{m:m} + X_{m+1:n}}{2}$ .

Σκόπιμο να αναφερθεί ότι σε αρκετά μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου που κάνουν χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων, επιλέγεται η διάμεσος ως στατιστική συνάρτηση για τη μελέτη της διεργασίας.

### 2.4.1 Διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη διάμεσο

Οι (17) **Janacek & Meikle (1997)** πρότειναν ένα μη παραμετρικό διάγραμμα τύπου Shewhart που βασίζεται στη διάμεσο και τα όρια υπολογίζονται με χρήση ενός εντός ελέγχου δείγματος αναφοράς. Η επιλογή της διαμέσου παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα, τα οποία σύμφωνα με τους συγγραφείς είναι τα ακόλουθα:

- Η διάμεσος (median) είναι λιγότερο ευαίσθητη από ότι η μέση τιμή (mean) σε σφάλματα μετρήσεων που είναι πιθανό να προκύψουν κατά τη συλλογή των δεδομένων.
- Οι τάξεις παρατηρήσεων και συνεπώς η διάμεσος, μπορεί να προκύψει τόσο από σχετικές όσο και από απόλυτες μετρήσεις (του χαρακτηριστικού που μελετάμε). Οπότε η χρήση διαμέσων εξυπηρετεί και περιπτώσεις όπου οι μετρήσεις δεν μπορούν να είναι ακριβείς. Η χρήση τάξεων (ranks) επιτρέπει την εφαρμογή διαγραμμάτων ελέγχου σε διεργασίες που μέχρι πρότινος, δεν ήταν εφικτό να απεικονιστούν σε διάγραμμα.
- Ο καθορισμός της διαμέσου δεν απαιτεί ακριβείς μετρήσεις για όλες τις μεμονωμένες παρατηρήσεις. Ειδικά αν το μέγεθος % του δείγματος είναι περιττός αριθμός, τότε είναι αρκετές τόσες μετρήσεις όσες θα μας επιτρέψουν την ταξινόμηση των παρατηρήσεων, με ακριβή μέτρηση για την μεσαία παρατήρηση (τη διάμεσο).

Για την κατασκευή του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου, βασίστηκαν στην υπόθεση ότι λαμβάνουμε ένα δείγμα μεγέθους  $n$  από διεργασία που βρίσκεται εντός στατιστικού ελέγχου. Έστω δηλαδή ότι έχουμε το δείγμα αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_N$  και στη συνέχεια λαμβάνουμε τυχαία δείγματα ελέγχου (test samples) μεγέθους  $n$ , τα οποία είναι ανεξάρτητα τόσο μεταξύ τους όσο και με το δείγμα αναφοράς. Για να ελέγξουμε αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου θα εξετάσουμε μέσω των ορίων ελέγχου του δείγματος αναφοράς αν η διάμεσος  $\hat{m}$  του τυχαίου δείγματος ελέγχου παραμένει εντός ορίων. Αν όχι, τότε έχουμε μετατόπιση στη διεργασία. Προφανώς οι παρατηρήσεις κάθε τυχαίου δείγματος διατάσσονται σε αύξουσα σειρά ώστε να προκύπτει ένα διατεταγμένο δείγμα.

Τα όρια ελέγχου από το δείγμα αναφοράς είναι απλά ένα ζεύγος διατεταγμένων παρατηρήσεων. Δηλαδή διατάσσοντας τις παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς έχουμε

$$X_{1:N} < X_{2:N} < \dots < X_{N:N}$$

όπου για δεδομένη παράμετρο θέσης  $j (1 \leq j \leq N)$ , τα συμμετρικά όρια ελέγχου είναι τα ακόλουθα

$$LCL = X_{j:N} \text{ και } UCL = X_{N-j+1:N}$$

Υπολόγισαν για δεδομένα μεγέθη δειγμάτων  $N, n$  και τιμές της παραμέτρου  $j$ , την πιθανότητα το διάγραμμα ελέγχου να δίνει τη σωστή απόφαση σε δείγμα εντός ελέγχου. Δηλαδή να μην ειδοποιεί για αλλαγή όταν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου. Η πιθανότητα αυτή είναι:  $P = (X_{j:N} < \hat{m} < X_{N-j+1:N}) = 1 - a$  και τα αποτελέσματα παρατίθενται στον πίνακα 2.

Table for medias charts, N = 25 – 50, n = 5 - 9?						
J	P( $x \bar{N} < m < x \bar{N-j} + n$ ) for the values of N :					
	25	30	35	40	45	50
n = 5						
1	0.99507	0.99694	0.99798	0.99859	0.99898	0.99924
2	0.98139	0.98835	0.99223	0.99456	0.99605	0.99704
3	0.95613	0.97227	0.98138	0.98690	0.99044	0.99281
4	0.91739	0.94726	0.96433	0.97477	0.98151	0.98605
5	0.86413	0.91233	0.94026	0.95751	0.96873	0.97632
6	0.79605	0.86691	0.90860	0.93462	0.95166	0.96327
7	0.71353	0.81085	0.86902	0.90574	0.92999	0.94661
8	0.61753	0.74431	0.82142	0.87067	0.90348	0.92612
9	0.50954	0.6678	0.76589	0.82935	0.87200	0.90165
10	0.39144	0.58207	0.70270	0.78181	0.83551	0.87309
n = 7						
1	0.99805	0.99894	0.99937	0.99961	0.99974	0.99982
2	0.99110	0.99509	0.99707	0.99815	0.99877	0.99915
3	0.97565	0.98615	0.99178	0.99476	0.99650	0.99758
4	0.94832	0.97058	0.98207	0.98847	0.99226	0.99461
5	0.90623	0.94574	0.96655	0.97830	0.98533	0.98974
6	0.84729	0.91010	0.94390	0.96328	0.97500	0.98241
7	0.77043	0.86237	0.91301	0.94252	0.96058	0.97210
8	0.67559	0.80176	0.87302	0.91528	0.94146	0.95832
9	0.56382	0.72804	0.82336	0.88093	0.91709	0.94061
10	0.43715	0.64154	0.76377	0.83907	0.88703	0.91857
n = 9						
1	0.99909	0.99956	0.99977	0.99987	0.99992	0.99995
2	0.99519	0.99763	0.99873	0.99927	0.99955	0.99972
3	0.98515	0.99254	0.99593	0.99763	0.99855	0.99907
4	0.96520	0.98215	0.99012	0.99418	0.99640	0.99768
5	0.93144	0.96404	0.97978	0.98795	0.99248	0.99511
6	0.88038	0.93580	0.96329	0.97787	0.98604	0.99086
7	0.80948	0.89522	0.93905	0.96278	0.97630	0.98436
8	0.71743	0.84056	0.90557	0.94156	0.96241	0.97499
9	0.60447	0.77072	0.86163	0.91317	0.944355	0.96213
10	0.47238	0.68536	0.80635	0.87673	0.91898	0.94518

The table gives the  $P(x\bar{0} < m < x(\bar{N-j} + n))$  which is the probability signalling no change for an in-control sample

Πίνακας 2 Πιθανότητα σωστής μη ειδοποίησης σε εντός ελέγχου δείγμα (πηγή: (17)Janacek & Meikle (1997))

Από τα παραπάνω δεδομένα μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR) που σε εντός ελέγχου διεργασία είναι ίση με  $\alpha$  (στον Πίνακα 2 έχουμε την πιθανότητα  $1 - N$ ). Να αναφέρουμε ότι συνήθως η παράμετρος  $j$  προσδιορίζεται έτσι ώστε το FAR, να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο  $f$ . Οι τιμές του FAR για αντίστοιχα μεγέθη δειγμάτων  $N, n$  και τιμές της παραμέτρου  $j$  απεικονίζονται στον Πίνακα 3

		N 25	N 30	N 35	N 40
j		FAR	FAR	FAR	FAR
n=5	1	0.0049	0.0031	0.0020	0.0014
	2	0.0186	0.0117	0.0078	0.0054
	3	0.0439	0.0277	0.0186	0.0131
	4	0.0826	0.0527	0.0357	0.0252
	5	0.1359	0.0877	0.0597	0.0425
	6	0.2040	0.1331	0.0914	0.0654
	7	0.2865	0.1892	0.1310	0.0943
	8	0.3825	0.2557	0.1786	0.1293
	9	0.4905	0.3322	0.2341	0.1707
	10	0.6086	0.4179	0.2973	0.2182
n=7	1	0.0020	0.0011	0.0006	0.0004
	2	0.0089	0.0049	0.0029	0.0019
	3	0.0244	0.0137	0.0082	0.0052
	4	0.0517	0.0294	0.0179	0.0115
	5	0.0938	0.0543	0.0335	0.0217
	6	0.1527	0.0899	0.0561	0.0367
	7	0.2296	0.1376	0.0870	0.0575
	8	0.3244	0.1982	0.1270	0.0847
	9	0.4362	0.2720	0.1766	0.1191
	10	0.5629	0.3585	0.2362	0.1609
n=9	1	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001
	2	0.0048	0.0024	0.0013	0.0007
	3	0.0149	0.0075	0.0041	0.0024
	4	0.0348	0.0179	0.0099	0.0058
	5	0.0686	0.0360	0.0202	0.0121
	6	0.1196	0.0642	0.0367	0.0221
	7	0.1905	0.1048	0.0609	0.0372
	8	0.2826	0.1594	0.0944	0.0584
	9	0.3955	0.2293	0.1384	0.0868
	10	0.5276	0.3146	0.1937	0.1233

Πίνακας 3 Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR) Διάγραμμα ελέγχου (17) Janacek & Meikle (1997)

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 3 μπορούν να αποδειχθούν ιδιαίτερα σημαντικά. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε δείγμα αναφοράς μεγέθους  $N=30$  και δείγματα ελέγχου μεγέθους  $n=7$ , τότε με χρήση της 5ης και της 26ης διατεταγμένης παρατήρησης από το δείγμα αναφοράς ως όρια ελέγχου, το διάγραμμα που προκύπτει παρουσιάζει FAR ίσο με 0,0543. Δηλαδή επιλέγουμε κατάλληλα τις παραμέτρους σχεδιασμού ώστε να επιτύχουμε το επιθυμητό FAR.

#### 2.4.2 Διάγραμμα ελέγχου με χρήση συνάρτησης προτεραιότητας

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart που πρότειναν οι **(18)Chakraborti, van der Laan & van de Wiel (2004)**. Όπως και στο διάγραμμα που συναντήσαμε στην προηγούμενη ενότητα (2.4.1), έτσι και σε αυτό, τα όρια ελέγχου προκύπτουν από το διατεταγμένο δείγμα αναφοράς. Δηλαδή επιλέγουμε κατάλληλα τις δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις  $X_{a:m}$  και  $X_{b:m}$

(με  $1 \leq a \leq b \leq m$ ) ως κάτω (LCL) και άνω (UCL) όριο ελέγχου αντίστοιχα. Στη συνέχεια συλλέγουμε τυχαίο δείγμα ελέγχου μεγέθους  $n$ , έστω το  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Διατάσσοντας τις παρατηρήσεις του τυχαίου δείγματος ελέγχου λαμβάνουμε το διατεταγμένο δείγμα  $Y_{1:n}, Y_{2:n}, \dots, Y_{n:n}$  και υπολογίζουμε την  $j$ -οστή διατεταγμένη παρατήρηση  $Y_{j:n}$ . Αν η παρατήρηση  $Y_{j:n}$  βρίσκεται εντός των ορίων ελέγχου  $LCL = X_{a:m}, UCL = X_{b:m}$  τότε η διεργασία θεωρούμε ότι παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου, η διεργασία πλέον είναι εκτός στατιστικού ελέγχου και πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν ειδικά αίτια στη διεργασία.

Η πιθανότητα τώρα το προτεινόμενο διάγραμμα να μην παράγει «σήμα» ότι η διεργασία είναι πλέον εκτός στατιστικού ελέγχου, γίνεται με χρήση της στατιστικής συνάρτησης προτεραιότητας  $P_{(j)}$ , οι τιμές της οποίας πρέπει να βρίσκονται μεταξύ  $a$  και  $b-1$ . Δηλαδή ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$f(1 - P_o) \quad p = P(X_{a:m} \leq Y_{j:n} \leq X_{b:m}) = P(a \leq P_{(j)} \leq b-1)$$

Εδώ να αναφέρουμε ότι λόγω της συνέχειας της κατανομής και της παραπάνω σχέσης, η ανίσωση ισχύει αν και μόνο αν το πολύ  $b-1$   $X$ -παρατηρήσεις προηγούνται (είναι δηλαδή μικρότερες αφού το δείγμα είναι διατεταγμένο) της  $Y_{j:n}$ . Όμοια, ισχύει η ανίσωση  $X_{a:m} \leq Y_{j:n}$  αν και μόνο αν τουλάχιστον  $a$   $X$ -παρατηρήσεις προηγούνται της  $Y_{j:n}$ . Οι παράμετροι  $m, n$  και  $j$  προσδιορίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερωμού (FAR) να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο όριο  $f$ . Τα αποτελέσματα για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού και τιμές του  $f(1 - P_o)$  απεικονίζονται στον Πίνακα 4 που ακολουθεί.

1-Po	n	j	Results for the following values of m :			
			50	100	500	1000
0.0100	5	3	(3.48)	(7.94)	(40.461)	(82.919)
			(0.0036)	(0.00432)	(0.00477)	(0.00499)
			635.7	214.9	114.5	104.6
	11	6	(7.44)	(15.86)	(83.418)	(167.834)
			(0.00465)	(0.00428)	(0.00494)	(0.00487)
			642.2	245.0	113.3	108.4
	25	13	(10.41)	(23.78)	(127.374)	(258.743)
			(0.00305)	(0.00402)	(0.00473)	(0.00497)
			10990.0	510.8	128.3	109.8
0.0050	5	3	(2.49)	(5.96)	(31.470)	(64.937)
			(0.0015)	(0.00176)	(0.00233)	(0.00246)
			5671.0	678.4	242.3	215.1
	11	6	(5.46)	(13.88)	(72.429)	(146.855)
			(0.00125)	(0.00225)	(0.0024)	(0.00244)
			9503.0	574.5	240.9	219.8
	25	13	(9.42)	(21.80)	(118.383)	(239.762)
			(0.00155)	(0.002)	(0.00243)	(0.00245)
			44750.0	1488.0	261.0	227.5
0.0027	5	3	(1.50)	(4.97)	(25.476)	(51.950)
			(0.0004)	(0.00102)	(0.00127)	(0.00129)
			$\infty$	1550.0	460.2	419.5
	11	6	(5.46)	(11.90)	(64.437)	(130.871)
			(0.000125)	(0.00106)	(0.00131)	(0.00131)
			9503.0	1630.0	456.1	409.8
	25	13	(8.43)	(19.82)	(110.391)	(224.777)
			(0.00075)	(0.00092)	(0.00127)	(0.00133)
			173700.0	5183.0	526.2	430.2

Πίνακας 4 Πιθανότητα λανθασμένου συναγεμού (FAR) για το διάγραμμα των Chakraborti et al. (2004), (πηγή: Chakraborti et al.(2004)).

Και σε αυτό το παράδειγμα, τα αποτελέσματα μπορούν να αποδειχθούν ιδιαίτερα χρήσιμα για τον πειραματιστή που θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσει συγκεκριμένες παραμέτρους σχεδιασμού εφαρμόζοντας το παραπάνω διάγραμμα ελέγχου. Για παράδειγμα, για προκαθορισμένη πιθανότητα  $f = 0,005$ , δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 100$ , τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n = 5$  και παράμετρο  $j = 3$ , τα κάτω και άνω όρια ελέγχου είναι η 5η και 96η αντίστοιχα. Τότε, προκύπτει πιθανότητα λανθασμένου συναγεμού (FAR) ίση με 0,00176 σε μονόπλευρο έλεγχο (ή  $0,00176 \times 2 = 0,00352$ ) σε δίπλευρο έλεγχο).

#### 2.4.3 Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου βασισμένο σε διατεταγμένες παρατηρήσεις

Σε αυτή την υποενότητα θα αναφερθούμε στο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart ελεύθερο κατανομής (όπως επίσης ονομάζονται τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου) βασισμένο σε διατεταγμένες παρατηρήσεις, που πρότειναν οι **(23)Balakrishnan et al. (2010)**. Και εδώ έχουμε ένα αρχικό δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m$ , από το οποίο επιλέγουμε κατάλληλα δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις,

ως τα όρια ελέγχου της διεργασίας. Δηλαδή, έχουμε το διατεταγμένο δείγμα αναφοράς

$$X_{1:m} \leq X_{2:m} \leq \dots \leq X_{m:m}$$

και τα συμμετρικά όρια ελέγχου

$$LCL = X_{\alpha:m}, UCL = X_{m-\alpha+1:m}$$

Η παράμετρος σχεδιασμού  $\alpha$ , ( $1 \leq \alpha \leq m$ ) επιλέγεται με τέτοιο τρόπο, ώστε η πιθανότητα λανθασμένου συναγερωμού (FAR) να μην υπερβαίνει ένα προκαθορισμένο επίπεδο  $f$ . Δηλαδή ισχύει

$$1 - FAR = P(LCL \leq m \leq UCL | H_0) \leq 1 - f$$

Στην παραπάνω σχέση  $m$  είναι η διάμεσος του τυχαίου δείγματος, ενώ η  $H_0$  υποδηλώνει την μηδενική υπόθεση στον έλεγχο υποθέσεων που πραγματοποιούμε για την κατανομή που ακολουθεί το δείγμα.

Πιο συγκεκριμένα, το δείγμα αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_m$  υποθέτουμε ότι προέρχεται από την εντός ελέγχου αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_x(x) = F(x)$ . Αντίστοιχα η αθροιστική συνάρτηση κατανομής του τυχαίου δείγματος (test sample)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ , είναι η  $F_y(x) = G(x)$ . Ο έλεγχος υποθέσεων που πραγματοποιούμε για να εξετάσουμε αν υπάρχει αλλαγή στην κατανομή (από  $F_x(x)$  σε  $G(x)$ ) του δείγματος (και κατά συνέπεια μετατόπιση στη διεργασία), είναι ο εξής:

$$H_0 : F(x) = G(x) \text{ έναντι της } H_1 : F(x) \neq G(x)$$

Επιπλέον της παραπάνω συνθήκης στο συγκεκριμένο διάγραμμα προτείνεται και ο έλεγχος του πλήθους  $L$  των παρατηρήσεων του τυχαίου δείγματος που βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου. Δηλαδή για να αποφασίσουμε αν η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου, εξετάζουμε όχι μόνο τη στατιστική συνάρτηση  $Y_{j:n}$  (διατεταγμένη παρατήρηση από το τυχαίο δείγμα, συνήθως η διάμεσος), αλλά και την στατιστική συνάρτηση  $L$ , σύμφωνα με την παρακάτω συνθήκη

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL \text{ έναντι } L \geq r, \text{ όπου } r \text{ είναι θετικός ακέραιος}$$

Οι συγγραφείς υπολόγισαν την πιθανότητα λανθασμένου συναγερωμού (FAR), βάσει συγκριμένων τιμών των παραμέτρων σχεδιασμού,  $m, n, \alpha, b, j, r$ . Δηλαδή επιλέγοντας κατάλληλα τις τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού μπορούμε να επιτύχουμε το επιθυμητό FAR. Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε δείγμα αναφοράς  $m = 60$ , τυχαίο δείγμα ελέγχου  $n=25$  και ο στόχος είναι η πιθανότητα λανθασμένου συναγερωμού FAR να μην υπερβαίνει την τιμή  $f \leq 0,05$ . Αυτό επιτυγχάνεται σε τρεις περιπτώσεις

- FAR=0,0324 για  $\alpha=15, r=7$

- FAR=0,0287 για  $\alpha=12, r=10$
- FAR=0,0327 για  $\alpha=10, r=1$

Τα αποτελέσματα παρατίθενται παρακάτω στον Πίνακα 5

False alarm rates for a given design ( $b=m-a+1, j=(n+1)/2$ )									
		Reference sample size m							
		40		60		100		200	
n	R	a	FAR	a	FAR	a	FAR	a	FAR
5	1	5	0.0425	9	0.0616	16	0.0689	30	0.0559
		6	0.0654	10	0.0800	17	0.0805	33	0.0719
		7	0.0943	11	0.1011	18	0.0931	37	0.0971
	2	5	0.0482	8	0.0531	14	0.0572	27	0.0495
		6	0.0759	9	0.0721	15	0.0690	30	0.0665
		7	0.1116	10	0.0950	16	0.0821	34	0.0942
	3	4	0.0647	6	0.0626	10	0.0608	19	0.0520
		5	0.1091	7	0.0911	11	0.0773	21	0.0674
		6	0.1656	8	0.1252	12	0.0959	24	0.0946
11	3	8	0.0459	13	0.0558	23	0.0653	44	0.0481
		9	0.0737	14	0.0770	24	0.0796	48	0.0737
		10	0.1129	15	0.1039	25	0.0961	51	0.0988
	4	7	0.0363	11	0.0384	20	0.0517	40	0.0472
		8	0.0642	12	0.0574	21	0.0657	43	0.0687
		9	0.1061	13	0.0895	22	0.0824	46	0.0968
	5	6	0.0375	10	0.0530	17	0.0532	34	0.0496
		7	0.0715	11	0.0807	18	0.0696	37	0.0750
		8	0.1228	12	0.1172	19	0.0892	39	0.0962
25	7	9	0.0211	15	0.0324	27	0.0475	55	0.0462
		10	0.0431	16	0.0536	28	0.0652	57	0.0651
		11	0.0825	17	0.0857	29	0.0881	59	0.0900
	10	7	0.0144	12	0.0287	22	0.0500	45	0.0525
		8	0.0364	13	0.0526	23	0.0714	47	0.0761
		9	0.0798	14	0.0898	24	0.0991	49	0.1070
	12	6	0.0212	10	0.0327	18	0.0462	37	0.0490
		7	0.0539	11	0.0611	19	0.0675	39	0.0726
		8	0.1148	12	0.1048	20	0.0953	41	0.1036

Πίνακας 5 Πιθανότητες λανθασμένου συναγερού (FAR) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου των Balakrishnan et al.(2010) πηγή: (23)Balakrishnan et al.(2010)

Θεωρούμε σκόπιμο για τη συνέχεια να παρουσιάσουμε στον Πίνακα 5 και τα αποτελέσματα των συγγραφέων για την πιθανότητα ορθού συναγερού (AR) για το συγκεκριμένο διάγραμμα. Δηλαδή την πιθανότητα να λάβουμε σωστά σήμα ότι η διεργασία πλέον είναι εκτός ελέγχου. Στις παραμέτρους σχεδιασμού συμπεριλαμβάνουν και την παράμετρο  $\gamma$  (όπου  $\gamma$  θετικός ακέραιος) από την εναλλακτική υπόθεση τύπου Lehmann (Lehmann alternatives) [(24)Lehmann, 1953], η οποία αφορά την εκτός ελέγχου κατανομή και είναι της μορφής  $ARL_m$   
 $G(x)=[F(x)]^\gamma$ . Ενημερωτικά, η εναλλακτική υπόθεση τύπου Lehmann δηλώνει ότι οι  $Y$  – μεταβλητές κατανομονται ως η μεγαλύτερη (μικρότερη) από το πλήθος  $\gamma$   $X$  – μεταβλητών, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου  $\gamma$ .



Alarm rates (AR) for a given design ( $b = m - a + 1, j = (n + 1)/2$ ). Each cell contains the AR's attained for $\gamma = 0.4$ (upper entry) and $\gamma = 4$ (lower entry)									
		Reference sample size m							
		40		60		100		200	
n	r	a	AR	a	AR	a	AR	a	AR
5	1	5	0.3637	9	0.4298	16	0.4580	30	0.4388
			0.3448		0.4371		0.4874		0.4517
		6	0.4238	10	0.4678	17	0.4805	33	0.4734
			0.4278		0.5040		0.5283		0.5167
		7	0.4797	11	0.5041	18	0.5024	37	0.5172
		0.5226		0.5674		0.5677		0.5975	
	2	5	0.3718	8	0.3993	14	0.4215	27	0.4122
			0.3292		0.3681		0.4021		0.3845
		6	0.4359	9	0.4421	15	0.4471	30	0.4510
			0.4279		0.4372		0.4452		0.4517
		7	0.4969	10	0.4834	16	0.4722	34	0.5010
		0.5227		0.5040		0.4874		0.5376	
	3	4	0.3660	6	0.3728	10	0.3785	19	0.3646
			0.2324		0.2313		0.2298		0.2070
		5	0.4518	7	0.4312	11	0.4142	21	0.4010
		0.3300		0.2992		0.2720		0.2498	
6		0.5317	8	0.4871	12	0.4490	24	0.4539	
	0.4294		0.3689		0.3153		0.3169		
11	3	8	0.5389	13	0.5943	23	0.6382	44	0.6193
			0.6379		0.7301		0.8029		0.7902
		9	0.6052	14	0.6373	24	0.6633	48	0.6707
			0.7319		0.7878		0.8337		0.8547
		10	0.6667	15	0.6780	25	0.6875	51	0.7067
		0.8085		0.8362		0.8607		0.8921	
	4	7	0.4797	11	0.5145	20	0.5744	40	0.5810
			0.5287		0.5876		0.6870		0.7078
		8	0.5561	12	0.5660	21	0.6047	43	0.6266
			0.6379		0.6631		0.7300		0.7713
		9	0.6123	13	0.6156	22	0.6343	46	0.6702
		0.6381		0.7301		0.7682		0.8246	
	5	6	0.4349	10	0.5049	17	0.5252	34	0.5314
			0.4101		0.5054		0.5381		0.5521
		7	0.5288	11	0.5656	18	0.5623	37	0.5875
		0.6123		0.5877		0.5908		0.6343	
8		0.6381	12	0.6239	19	0.5985	39	0.6236	
	0.6365		0.6632		0.6406		0.6844		
25	7	9	0.7714	15	0.7338	27	0.8057	55	0.8311
			0.7148		0.8901		0.9572		0.9791
		10	0.8534	16	0.7805	28	0.8303	57	0.8542
			0.7833		0.9263		0.9688		0.9859
		11	0.9112	17	0.8223	29	0.8530	59	0.8753
		0.4817		0.9521		0.9776		0.9907	
	10	7	0.5345	12	0.6050	22	0.7053	45	0.7387
			0.5345		0.7001		0.8314		0.8850
		8	0.5898	13	0.6759	23	0.7451	47	0.7775
			0.6638		0.7781		0.8680		0.9152
		9	0.6910	14	0.7412	24	0.7822	49	0.8130
		0.7714		0.8412		0.8981		0.9386	
	12	6	0.4594	10	0.5638	18	0.6518	37	0.6925
			0.3940		0.5069		0.6180		0.6815
		7	0.5910	11	0.6519	19	0.7031	39	0.7425
		0.5347		0.6087		0.6810		0.7456	
8		0.7100	12	0.7313	20	0.503	41	0.7876	
	0.6643		0.7004		0.7381		0.8009		

Πίνακας 6 Πιθανότητα ορθού συναγεμμού (AR) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου των Balakrishnan et al. (2010) (πηγή: (23)Balakrishnan et al. (2010))

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να φανούν πολύ σημαντικά, ειδικά αν λάβουμε υπόψη ότι συνήθως μας ενδιαφέρει όχι μόνο να διατηρήσουμε χαμηλό το FAR αλλά και να επιτύχουμε και υψηλό AR. Άλλωστε, πρέπει ένα διάγραμμα ελέγχου να μας ειδοποιεί έγκαιρα ότι υπάρχει μετατόπιση στη διεργασία, όταν αυτή πράγματι έχει συμβεί. Δηλαδή αν συνεχίσουμε το παράδειγμα με τις τρεις περιπτώσεις του προηγούμενου πίνακα με το FAR, ο σχεδιασμός  $\alpha=15$ ,  $r=7$  μας δίνει υψηλότερο AR από τις άλλες δύο περιπτώσεις. Δηλαδή με την τιμή της παραμέτρου  $\gamma=0,4$  έχουμε  $AR=0,7338$  και με  $\gamma=4$  τότε  $AR=0,8901$ .

Τέλος, στον Πίνακα 7 που ακολουθεί παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για ένα ακόμα μέτρο απόδοσης για το διάγραμμα των **(23)Balakrishnan et al.(2010)**, το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLin).

ARL values for a specified false alarm rate f and a given design ( $b = m - a + 1, j = (n + 1)/2$ )						
f	m	n	(LCL,UCL)	r	Exact FAR	ARL
0.01	50	5	(3,48)	1	0.0072	635.7
		11	(7,44)	1	0.0093	642.2
		25	(6,45)	13	0.0097	3957820
	100	5	(7,94)	1	0.0086	214.9
		11	(6,95)	7	0.0091	518.8
		25	(8,93)	16	0.0082	4820
	500	5	(38,463)	2	0.0091	121
		11	(33,468)	7	0.00999	127.7
		25	(120,381)	7	0.0095	221
	1000	5	(79,922)	2	0.00997	105.2
		11	(96,905)	6	0.0098	113.2
		25	(243,758)	7	0.00994	115.6
0.005	50	5	(2,49)	1	0.003	5671
		11	(5,46)	2	0.0025	9503.1
		25	(7,44)	11	0.0048	9073150
	100	5	(5,96)	1	0.00352	678.4
		11	(5,96)	7	0.0046	1700.2
		25	(15,86)	11	0.00445	6223
	500	5	(20,481)	3	0.00477	254.1
		11	(56,445)	5	0.0049	260.1
		25	(90,411)	10	0.00499	319.8
	1000	5	(62,939)	2	0.0049	217.7
		11	(136,865)	4	0.0049	223.9
		25	(129,872)	13	0.00497	258.7
0.0027	50	5	(1,50)	1	0.0008	$\infty$
		11	(5,46)	2	0.0025	9503.1
		25	(7,44)	10	0.0021	29347500
	100	5	(4,97)	2	0.00214	1508
		11	(9,92)	5	0.0023	2504.4
		25	(12,89)	12	0.0019	45381
	500	5	(16,485)	3	0.0026	503.8
		11	(64,437)	2	0.00263	456
		25	(101,400)	8	0.0026	599.1
	1000	5	(49,952)	2	0.0025	442.7
		11	(49,952)	7	0.00267	449.7
		25	(189,812)	9	0.00269	476.1

Πίνακας 7 Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARLin) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου των Balakrishnan et al. (2010) (πηγή(23) Balakrishnan et al. (2010))

#### 2.4.4 Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου βασισμένα σε διατεταγμένες παρατηρήσεις και μερικές επεκτάσεις του

Σε αυτή την υποενότητα θα αναφερθούμε στο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart που πρότεινε ο (25)Triantafyllou (2018) και είναι μια επέκταση του μη παραμετρικού Δ.Ε. (ή ελεύθερου κατανομής) που συναντήσαμε στην υποενότητα 2.4.3.

Στο νέο αυτό διάγραμμα αφού ορίσουμε τα όρια ελέγχου από το αρχικό δείγμα αναφοράς  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , στη συνέχεια λαμβάνουμε το τυχαίο δείγμα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  και επιλέγουμε ως σ.σ. δύο διατεταγμένες παρατηρήσεις, τις  $Y_{j:n}$  και  $Y_{k:n}$  (προφανώς  $Y_{j:n} \leq Y_{k:n}$ ). Όπως και στο Δ.Ε. της υποενότητας 2.4.3, έτσι και εδώ λαμβάνουμε υπόψη και την τιμή  $r$ , που υποδηλώνει το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου που έχουμε ορίσει. Οπότε η υπό μελέτη διεργασία θα χαρακτηρίζεται ως εντός στατιστικού ελέγχου αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq Y_{k:n} \leq UCL \text{ και } R \geq r, \text{ όπου } r \text{ θετικός ακέραιος}$$

Στους πίνακες που ακολουθούν παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών των μέτρων απόδοσης του μη παραμετρικού διαγράμματος που προτείνει ο (25)Triantafyllou (2018) για δεδομένο σχεδιασμό. Για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού,  $m, n, a, b, k$  και  $r$  (και  $\gamma$  στο υπολογισμό του AR) θα δούμε τις τιμές που λαμβάνουν η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού (FAR), το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) και η πιθανότητα ορθού συναγερμού (AR).

False alarm rates for a given design ( $b = m - a + 1$ ).								
Reference sample size $m$								
	40		60		100		200	
$n$	$(n, j, k, r)$	FAR	$(n, j, k, r)$	FAR	$(n, j, k, r)$	FAR	$(n, j, k, r)$	FAR
5	(1,3,4,2)	0.0108	(2,3,4,1)	0.0149	(3,3,4,3)	0.0119	(7,2,3,2)	0.0132
	(1,2,3,3)	0.0114	(1,2,4,1)	0.0096	(2,2,4,1)	0.0107	(6,3,4,2)	0.0099
	(3,2,3,2)	0.0615	(2,2,4,4)	0.0436	(5,2,4,3)	0.0505	(10,2,4,2)	0.0479
	(2,2,4,3)	0.0575	(4,3,4,2)	0.0478	(1,2,5,2)	0.0494	(14,3,4,2)	0.0476
	(3,2,4,2)	0.1090	(4,2,4,3)	0.0865	(1,1,5,3)	0.0934	(15,2,4,2)	0.0988
	(4,3,4,2)	0.0999	(6,3,4,2)	0.0969	(2,2,5,4)	0.0985	(21,3,4,2)	0.1008
11	(2,4,8,4)	0.0116	(4,4,7,5)	0.0108	(4,3,8,5)	0.0146	(8,3,6,4)	0.0105
	(3,5,8,4)	0.0186	(5,4,7,4)	0.0199	(4,3,7,6)	0.0127	(16,4,6,3)	0.0106
	(1,2,4,5)	0.0431	(7,4,7,4)	0.0518	(7,3,7,6)	0.0460	(25,5,8,4)	0.0515
	(1,6,10,5)	0.0432	(4,5,9,4)	0.0453	(7,3,8,5)	0.0524	(26,4,6,3)	0.0498
	(2,5,10,5)	0.1146	(6,5,9,4)	0.1072	(10,3,7,6)	0.1044	(26,4,8,4)	0.0955
	(2,6,10,5)	0.1137	(6,3,6,5)	0.1030	(19,5,7,4)	0.1012	(20,3,6,4)	0.0941
25	(4,8,12,4)	0.0139	(12,12,14,14)	0.0130	(14,14,17,5)	0.0111	(39,11,14,4)	0.0093
	(5,14,17,5)	0.0137	(9,10,14,5)	0.0097	(19,11,14,4)	0.0113	(19,7,9,5)	0.0110
	(7,14,17,5)	0.0511	(15,12,13,5)	0.0499	(24,11,14,4)	0.0490	(39,14,17,4)	0.0491
	(9,11,14,4)	0.0558	(11,9,14,5)	0.0546	(19,14,17,5)	0.0504	(45,13,16,6)	0.0479
	(7,8,11,4)	0.0960	(17,12,14,5)	0.1031	(27,11,14,4)	0.0982	(29,15,17,7)	0.0097
	(10,11,14,4)	0.0928	(15,11,15,4)	0.1037	(22,14,17,5)	0.0986	(45,14,17,4)	0.0995

Πίνακας 8 Πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου Triantafyllou (2018) - (πηγή(25) Triantafyllou (2018))

Οι συνδυασμοί των παραμέτρων σχεδιασμού μαζί με την αντίστοιχη τιμή του FAR που παρουσιάζονται στον Πίνακα 8 προσφέρουν ευελιξία στον πειραματιστή, ο οποίος μπορεί να επιλέξει τον κατάλληλο σχεδιασμό ώστε να κατασκευάσει το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου ανάλογα με τις ανάγκες του. Π.χ. για δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 100$  και τυχαία δείγματα ελέγχου  $n = 5$ , η τιμή του FAR περίπου ίση με 0,05, μπορεί να επιτευχθεί με δύο συνδυασμούς παραμέτρων

- $\alpha=5$  και  $(j,k,r) = (2,4,3)$  δίνει  $FAR=0,0505$
- $\alpha=1$  και  $(j,k,r) = (2,5,2)$  δίνει  $FAR=0,0494$

Design for a specific in-control ARL-value (ARL <sub>0</sub> )					
ARL <sub>0</sub>	m	n	(LCL,UCL)	(j,k,r)	exact ARL <sub>n</sub>
370	200	5	(2,188)	(2,3,2)	376.4
		11	(3,180)	(2,3,3)	367.7
		15	(2,146)	(2,5,4)	379.7
		25	(14,178)	(6,9,14)	369.9
	300	5	(5,287)	(2,3,2)	358.9
		11	(19,285)	(4,7,4)	372.6
		15	(13,244)	(4,7,5)	366.0
		25	(20,213)	(6,9,7)	367.2
	400	5	(5,379)	(2,3,2)	378.7
		11	(12,366)	(3,6,4)	384.8
		15	(17,326)	(4,7,5)	368.3
		25	(33,296)	(7,10,9)	373.0
	500	5	(6,473)	(2,3,2)	369.8
		11	(15,440)	(3,5,4)	369.1
		15	(22,395)	(4,6,4)	368.4
		25	(32,362)	(6,9,6)	369.4
500	200	5	(2,189)	(2,3,2)	453.5
		11	(2,158)	(2,4,2)	502.2
		15	(7,159)	(4,7,5)	503.8
		25	(1,146)	(6,10,6)	497.1
	300	5	(5,291)	(2,3,2)	492.6
		11	(18,288)	(4,7,4)	499.0
		15	(12,246)	(4,7,5)	503.0
		25	(4,153)	(3,5,4)	492.2
	400	5	(4,380)	(2,3,2)	503.4
		11	(3,312)	(2,4,3)	(489.7)
		15	(17,342)	(4,7,5)	502.3
		25	(33,312)	(7,10,9)	502.8
	500	5	(6,478)	(2,3,2)	504.6
		11	(14,470)	(3,5,4)	500.8
		15	(21,413)	(4,6,4)	500.5
		25	(21,346)	(5,8,6)	498.8

Πίνακας 9 Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ( $ARL_{in}$ ) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου Triantafyllou (2018) - (πηγή: (25)Triantafyllou (2018))

Στον Πίνακα 9 παρουσιάζεται το ακριβές εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (exact  $ARL_{in}$ ) για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού. Για παράδειγμα, για προκαθορισμένο επίπεδο εντός ελέγχου απόδοσης του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου,  $ARL_0 = 370$ , δείγμα αναφοράς μεγέθους  $m = 300$ , ανάλογα με το μέγεθος του τυχαίου δείγματος ελέγχου προκύπτει μικρή διαφοροποίηση στο  $ARL_{in}$ . Επιπλέον παρατηρούμε ότι όταν  $n = 11$ , η μεγαλύτερη τιμή του  $ARL_{in} = 372,6$  επιτυγχάνεται με τον σχεδιασμό  $(j,h,r) = (4, 7, 4)$  και άνω και κάτω όρια ελέγχου την 19η και την 285η διατεταγμένη παρατήρηση αντίστοιχα.

Alarm rates for a given design ( $b = m - a + 1$ )								
Reference sample size $m$								
n	40		60		100		200	
	(n,j,k,r)	AR	(n,j,k,r)	AR	(n,j,k,r)	AR	(n,j,k,r)	AR
5	(1,3,4,2)	0.3946	(2,3,4,1)	0.4739	(3,3,4,3)	0.4783	(7,2,3,2)	0.8154
		0.2778		0.3931		0.3669		0.1733
	(1,2,3,3)	0.7041	(1,2,4,1)	0.6536	(2,2,4,1)	0.1759	(6,3,4,2)	0.4800
		0.1191		0.1818		0.2281		0.3794
	(3,2,3,2)	0.8842	(2,2,4,4)	0.7890	(5,2,4,3)	0.8530	(10,2,4,2)	0.8609
		0.4943		0.3931		0.6062		0.6331
	(2,2,4,3)	0.8284	(4,3,4,2)	0.6267	(1,2,5,2)	0.5943	(14,3,4,2)	0.6549
		0.5448		0.7161		0.3333		0.8002
	(3,2,4,2)	0.8853	(4,2,4,3)	0.8800	(1,1,5,3)	0.8798	(15,2,4,2)	0.9056
		0.7351		0.7161		0.3333		0.8300
	(4,3,4,2)	0.7083	(6,3,4,2)	0.7180	(2,2,5,4)	0.239	(21,3,4,2)	0.7422
		0.8541		0.8835		0.5570		0.9393
11	(2,4,8,4)	0.8883	(4,4,7,5)	0.9408	(4,3,8,5)	0.9661	(8,3,6,4)	0.9724
		0.5357		0.5949		0.4735		0.1552
	(3,5,8,4)	0.8483	(5,4,7,4)	0.9608	(4,3,7,6)	0.9661	(16,4,6,3)	0.9682
		0.556		0.7379		0.3041		0.6288
	(1,2,4,5)	0.9592	(7,4,7,4)	0.9812	(7,3,7,6)	0.9588	(25,5,8,4)	0.9577
		0.0513		0.9076		0.6670		0.9936
	(1,6,10,5)	0.3661	(4,5,9,4)	0.8412	(7,3,8,5)	0.9588	(26,4,6,3)	0.9895
		0.5238		0.8588		0.8133		0.9394
	(2,5,10,5)	0.7563	(6,5,9,4)	0.9135	(10,3,7,6)	0.9954	(26,4,8,4)	0.9895
		0.8162		0.9678		0.8809		0.9953
	(2,6,10,5)	0.5678	(6,3,6,5)	0.9941	(19,5,7,4)	0.9512	(20,3,6,4)	0.9962
		0.8162		0.7226		0.9982		0.8042
25	(4,8,12,4)	0.9963	(12,12,14,4)	0.9938	(14,14,17,5)	0.9013	(39,11,14,4)	0.9989
		0.6355		0.9982		0.9983		0.9999
	(5,14,17,5)	0.8336	(9,10,14,5)	0.9971	(19,11,14,4)	0.9982	(19,7,9,5)	0.9998
		0.9609		0.9759		0.9994		0.3938
	(7,14,17,5)	0.9271	(15,12,13,5)	0.9981	(24,11,14,4)	0.9996	(39,14,17,4)	0.9696
		0.9961		0.9998		0.9999		1.0000
	(19,11,14,4)	0.9983	(11,9,14,5)	0.9997	(19,14,17,5)	0.9610	(45,13,16,6)	0.9942
		0.9978		0.9995		0.9999		1.0000
	(7,8,11,4)	0.9995	(17,12,14,5)	0.9992	(27,11,14,4)	0.9998	(29,15,17,7)	0.8441
		0.9319		0.9999		0.9999		0.9999
	(10,11,14,4)	0.9991	(15,11,15,4)	0.9995	(22,14,17,5)	0.9779	(45,14,17,4)	0.9832
		0.9993		0.9999		0.9999		1.0000

Each cell contains the AR's attained for  $\gamma = 0.2$  (upper entry) and  $\gamma = 10$  (lower entry)

Πίνακας 10 Πιθανότητα ορθού συναγερού (AR) για συγκεκριμένο σχεδιασμό Διάγραμμα ελέγχου Triantafyllou (2018) - (πηγή: (25)Triantafyllou (2018))

Τέλος, στον Πίνακα 10 έχουν υπολογιστεί οι τιμές της πιθανότητας ορθού συναγερού (AR) για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού. Αν συνεχίσουμε το παράδειγμα που αναφέραμε παραπάνω για τον Πίνακα 2.7 με τους δύο διαφορετικούς σχεδιασμούς, ο σχεδιασμός  $\alpha = 5, (j,k,r) = (2, 4, 3)$  μας δίνει συγκριτικά υψηλότερο AR από ότι ο σχεδιασμός  $\alpha = 1, (j,k,r) = (2, 5, 2)$ . Δηλαδή με την τιμή της παραμέτρου  $\gamma = 0,2$  έχουμε  $AR = 0,8530$  και με  $\gamma = 10$  τότε  $AR = 0,6062$ .

## Κεφάλαιο 3

### Αλγόριθμος μελέτης μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με την χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων

#### 3.1 Περιγραφή αλγορίθμου

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιαστεί ο αλγόριθμος, βάσει του οποίου θα υλοποιηθεί η μελέτη μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με την χρήση μη διατεταγμένων παρατηρήσεων. Οι αλγόριθμοι που θα παρουσιαστούν είναι δύο, και αφορούν την εντός ελέγχου απόδοση (incontrol performance) του διαγράμματος ελέγχου με διαφορετική συνθήκη ελέγχου. Ο κάθε αλγόριθμος υπολογίζει προσεγγιστικά για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων σχεδιασμού, τις τιμές των μέτρων απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου που μας ενδιαφέρουν.

Πιο συγκεκριμένα, για την εντός ελέγχου απόδοση υπολογίζεται η λανθασμένη πιθανότητα συναγερού FAR, και το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARLin. Όπως θα δούμε και παρακάτω η λογική των αλγορίθμων είναι η ίδια για οποιαδήποτε συνθήκη από τις δύο χρησιμοποιήσουμε. Ο αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί με τη βοήθεια της γλώσσας προγραμματισμού R. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου θα παρουσιάζεται η υλοποίησή του στην R.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν σε πίνακα τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την προσομοίωση και θα γίνει σύγκριση με τα δημοσιευμένα αποτελέσματα της εργασίας του **(25)Triantafyllou (2018)**. Να υπενθυμίσουμε ότι η συνθήκες στους αντίστοιχους αλγορίθμους που ελέγχουμε για τον χαρακτηρισμό ενός τυχαίου δείγματος ως εντός ελέγχου είναι

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq Y_{k:n} \leq UCL \text{ και } R \geq r, \text{ όπου } r \text{ θετικός ακέραιος}$$

για τον πρώτο, και για τον δεύτερο αλγόριθμο

$$Y_{j:n}, Y_{k:n} \quad LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL \text{ και } R \geq r, \text{ όπου } r \text{ θετικός ακέραιος}$$

όπου τα LCL και UCL προέρχονται από το δείγμα αναφοράς που ακολουθεί μία τυχαία κατανομή F και τα  $Y_{j:n}, Y_{k:n}$  από μία τυχαία κατανομή G. Προφανώς, στην εντός ελέγχου κατάσταση θα ισχύει η μηδενική υπόθεση, :  $H_0:F=G$ .

### 3.2.1 Εντός ελέγχου απόδοση αλγορίθμου με συνθήκη ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$

Ο αλγόριθμος αναλύεται παρακάτω:

Πίνακας 11 Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$

Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$		
	Περιγραφή αλγορίθμου	Κώδικας σε R
Βήμα 1	<p>Αρχικοποιούνται οι αρχικές συνθήκες του αλγορίθμου.</p> <p>Απαραίτητη για συνθήκη επανάληψης της παρακάτω διαδικασίας</p>	<pre>lm=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του            #δείγματος αναφοράς  ln=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του            #δείγματος ελέγχου  m=100;     #Μέγεθος δείγματος αναφοράς  r=3;       #Μέγεθος μεταβλητής R n=11;      #Μέγεθος δείγματος ελέγχου a=8;       #Μέγεθος μεταβλητής a (δείγμα αναφοράς) b=70;      #Μέγεθος μεταβλητής b (δείγμα αναφοράς) j=3;       #Μέγεθος μεταβλητής j (δείγμα ελέγχου) k=4;       #Μέγεθος μεταβλητής k (δείγμα ελέγχου)  z=100;     #Αριθμός δειγμάτων αναφοράς (reference            #samples) l=10000;   #Αριθμός δειγμάτων ελέγχου (test            #samples) q=100;  AR1L=0;    #για το Yj,Yk,R  for (p in 1:z){</pre>
Βήμα 2	<p>Παραγωγή των εκάστοτε reference samples</p> <p>Καθορισμός LCL,CL,UCL</p> <p>Σύγκριση των εκάστοτε παραπάνω παραγόμενων</p>	<pre>#παραγωγή referce sample x=rexp(m,lm); x=sort(c(x));  #ορισμός LCL,CL,UCL LCL=x[a]; UCL=x[b]; CL=(x[a]+x[b])/2;  R11L=0;#για το Yj,Yk,R  #το δοκιμάζω με q l-αδες for(co in 1:q){</pre>

	reference sample	
Βήμα 3		<pre>R1L=0;#για το Yj,Yk,R  f1=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,Yk,R</pre>
Βήμα 4	<p>Παραγωγή test samples και ταξινόμησή τους</p> <p>Υπολογισμός R του τρέχοντος test sample</p>	<pre>for(t in 1:l){   #παραγωγή test sample   y = rexp(n,ln)   y=sort(c(y));    #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample   R=0;   for(i in 1:n){     if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){       R=R+1;      #εξετάζονται πόσα δείγματα απο το       δείγμα αναφοράς μεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για       κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η       μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.     }   }    #with Yj,Yk,R   if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) &amp;&amp;   (y[k]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[k]&lt;UCL) ){      if(f1==0){       R1L=R1L+1;     }     }else{       f1=1;     }   } }</pre>
Βήμα 5	Υπολογισμός των ARLin	<pre>R11L=R11L+(R1L/q);  }  AR1L=AR1L+(R11L/z);  }</pre>
Βήμα 6	Εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R	<pre>print("ARL-in is (with Yj,Yk,R) :") AR1L      #εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R</pre>
Βήμα 7	Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο "Βήμα 1"	<pre>lm=2;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς ln=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου</pre>

Ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του παραπάνω αλγόριθμου στην γλώσσα προγραμματισμού R, εξαρτάται από το πλήθος και το μέγεθος n των τυχαίων δειγμάτων ελέγχου και των τυχαίων δειγμάτων αναφοράς m και κυμαίνεται από 30 δευτερόλεπτα για τυχαία δείγματα ελέγχου και αναφοράς μεγέθους n = 5 και m=100



αντίστοιχα , μέχρι και 2 ώρες περίπου για  $1 \times 10^8$  επαναλήψεων για τα ίδια μεγέθη όπως στον κώδικα που παρατίθεται παραπάνω.

Ο αριθμός των τυχαίων αριθμών που παράγουμε από την κατανομή P (έστω την εκθετική με παράμετρο  $\lambda$ ) από την οποία προκύπτουν τα διατεταγμένα τυχαία δείγματα  $Y_{j:n}, Y_{k:n}$ , είναι σημαντικά μεγαλύτερος. Μετά από δοκιμές ως προς το χρόνο εκτέλεσης, καταλήξαμε ότι τα  $1 \times 10^8$  τυχαία δείγματα επαρκούν ώστε να προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Προφανώς, όσο αυξάνεται το πλήθος των τυχαίων δειγμάτων θα αυξάνεται και ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου στην R.

### 3.2.1.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα συγκρίνουμε ενδεικτικά, μερικές από τις τιμές των ARLin , όπως αυτές δημοσιεύονται στην εργασία του Triantafyllou (2017) στους Πίνακες Table8(p.39) με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην R για συγκεκριμένες παραμέτρους σχεδιασμού.

Πρώτα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που εκτελέσαμε στην R για εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARLin.

Πίνακας 12 αποτελέσματα προσομοίωσης στην R για εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARLin. ( $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ )

m	n	(LCL,UCL)	(j,k,r)	ARLin	Simulation ARLin
100	5	(3,99)	(2,3,2)	368,5	377,0
100	11	(4,81)	(3,4,3)	375,6	380,8
500	5	(9,485)	(2,3,2)	371,4	370,0
500	11	(17,426)	(4,6,4)	368,2	360,0
100	5	(2,96)	(2,3,2)	435,9	430,8
100	11	(4,84)	(3,4,3)	500,4	505,1
500	5	(8,487)	(2,3,2)	495,8	498,5
500	11	(17,431)	(4,6,4)	500,3	500,0

Ενδεικτικά, τρία παραδείγματα από τον Πίνακα 3.2.1 για διαφορετικούς συνδυασμούς, δειγμάτων αναφοράς (m), τυχαίων δειγμάτων (n) και παραμέτρων σχεδιασμού (a,b,j,k,r).

- $m=100, n=5, (a,b,j,k,r)=(3,99,2,3,2)$  και η τιμή του ARLin=377,0
- $m=500, n=5, (a,d,j,k,r)=(9,485,2,3,2)$  και η τιμή του ARLin=370,0
- $m=500, n=11, (a,d,j,k,r)=(17,431,4,6,4)$  και η τιμή του ARLin=500,0

### 3.2.2 Εντός ελέγχου απόδοση αλγορίθμου με συνθήκη ελέγχου $Y_{j:n}, r$

Πίνακας 13 Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου  $Y_{j:n}, r$

Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, r$	
	Κώδικας σε R
Βήμα	Αρχικοποιούνται οι $lm=1;$ #Παράμετρος $\lambda$ εκθετικής κατανομής του

1	<p>αρχικές συνθήκες του αλγορίθμου.</p> <p>Απαραίτητη για συνθήκη επανάληψης της παρακάτω διαδικασίας</p>	<p>δείγματος αναφοράς</p> <p>ln=1; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου</p> <p>m=100; #Μέγεθος δείγματος αναφοράς</p> <p>r=3; #Μέγεθος μεταβλητής R</p> <p>n=11; #Μέγεθος δείγματος ελέγχου</p> <p>a=8; #Μέγεθος μεταβλητής a (δείγμα αναφοράς)</p> <p>b=70; #Μέγεθος μεταβλητής b (δείγμα αναφοράς)</p> <p>j=3; #Μέγεθος μεταβλητής j (δείγμα ελέγχου)</p> <p>z=100; #Αριθμός δειγμάτων αναφοράς (reference samples)</p> <p>l=10000; #Αριθμός δειγμάτων ελέγχου (test samples)</p> <p>q=100;</p> <p>AR1L=0; #για το Yj ,R</p> <p>for (p in 1:z){</p>
Βήμα 2	<p>Παραγωγή των εκάστοτε reference samples</p> <p>Καθορισμός LCL,CL,UCL</p> <p>Σύγκριση των εκάστοτε παραπάνω παραγόμενων reference sample</p>	<p>#παραγωγή referce sample</p> <p>x=rexp(m,lm);</p> <p>x=sort(c(x));</p> <p>#ορισμός LCL,CL,UCL</p> <p>LCL=x[a];</p> <p>UCL=x[b];</p> <p>CL=(x[a]+x[b])/2;</p> <p>R11L=0;#για το Yj, R</p> <p>#το δοκιμάζω με q l-αδες</p> <p>for(co in 1:q){</p>
Βήμα 3		<p>R1L=0;#για το Yj,R</p> <p>f1=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,R</p>
Βήμα 4	<p>Παραγωγή test samples και ταξινόμησή τους</p>	<p>for(t in 1:l){</p> <p>#παραγωγή test sample</p>

	Υπολογισμός R του τρέχοντος test sample	<pre> y = rexp(n,ln) y=sort(c(y));  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample R=0; for(i in 1:n){   if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){     R=R+1;    #εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράς μεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.   } }  #with Yj,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL)){    if(f1==0){     R1L=R1L+1;   }   }else{     f1=1;   } } </pre>
Βήμα 5	Υπολογισμός των ARLin	<pre> R11L=R11L+(R1L/q);  }  AR1L=AR1L+(R11L/z);  } </pre>
Βήμα 6	Εμφανίζεται το ARLin with Yj ,R	<pre> print("ARL-in is (with Yj ,R) :") AR1L    #εμφανίζεται το ARLin with Yj ,R </pre>
Βήμα 7	Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο “Βήμα 1”	<pre> ln=2;    #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς ln=1;    #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου </pre>

Ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση του παραπάνω αλγόριθμου στην γλώσσα προγραμματισμού R, εξαρτάται από το πλήθος και το μέγεθος n των τυχαίων δειγμάτων ελέγχου και των τυχαίων δειγμάτων αναφοράς m και κυμαίνεται από 30 δευτερόλεπτα για τυχαία δείγματα ελέγχου και αναφοράς μεγέθους n = 5 και m=100 αντίστοιχα , μέχρι και 2 ώρες περίπου για  $1 \times 10^8$  επαναλήψεων για τα ίδια μεγέθη όπως στον κώδικα που παρατίθεται παραπάνω.

Ο αριθμός των τυχαίων αριθμών που παράγουμε από την κατανομή P (έστω την εκθετική με παράμετρο λ) από την οποία προκύπτουν τα διατεταγμένα τυχαία δείγματα  $Y_{jn}$ , είναι σημαντικά μεγαλύτερος. Μετά από δοκιμές ως προς το χρόνο

εκτέλεσης, καταλήξαμε ότι τα  $1 \times 10^8$  τυχαία δείγματα επαρκούν ώστε να προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Προφανώς, όσο αυξάνεται το πλήθος των τυχαίων δειγμάτων θα αυξάνεται και ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου στην R.

### 3.2.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{j:n}, r$

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα συγκρίνουμε ενδεικτικά, μερικές από τις τιμές των ARLin, όπως αυτές δημοσιεύονται στην εργασία (A distribution-Free Control Chart Based on Order Statistics, (19)N.Balakrishnan, I.S.Triantafyllou, V.Koutras) στους

Πίνακες Table5(p.3670) με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην R για συγκεκριμένες παραμέτρους σχεδιασμού.

Πρώτα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης που εκτελέσαμε στην R για εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARLin.

Πίνακας 14 αποτελέσματα προσομοίωσης που στην R για εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARLin( $Y_{j:n}, r$ )

<b>m</b>	<b>n</b>	<b>j</b>	<b>(LCL,UCL)</b>	<b>r</b>	<b>ARLin</b>	<b>Simulation ARLin</b>
200	5	(n+1)/2	(11,190)	2	363,6	356,959
200	11	(n+1)/2	(22,179)	5	367,8	370,267
300	5	(n+1)/2	(11,290)	3	369,5	390,71
300	11	(n+1)/2	(24,277)	6	372,6	380
400	5	(n+1)/2	(21,380)	2	379,8	381,987
500	25	(n+1)/2	(89,412)	10	366,2	370,543
200	5	(n+1)/2	(7,194)	3	500,2	500,0
300	5	(n+1)/2	(10,291)	3	501,9	500,958

Ενδεικτικά, τρία παραδείγματα από τον Πίνακα 3.2.1 για διαφορετικούς συνδυασμούς, δειγμάτων αναφοράς (m), τυχαίων δειγμάτων (n) και παραμέτρων σχεδιασμού (a,b,j,r).

- **m=200,n=5,(a,b,j,r)=(11,190,(n+1)/2,2)** και η τιμή του ARLin=356,959
- **m=200,n=11,(a,b,j,r)=(22,179,(n+1)/2,5)** και η τιμή του ARLin=370,267
- **m=300,n=5,(a,b,j,r)=(11,290,(n+1)/2,3)** και η τιμή του ARLin=390,71

## Κεφάλαιο 4

### Παρουσίαση Προτεινόμενου αλγόριθμου για την μελέτη μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση κανόνων ροής

#### 4.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα προχωρήσουμε ένα βήμα παρακάτω τη μελέτη των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων. Θα παρουσιάσουμε ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου με χρήση διατεταγμένων παρατηρήσεων και ενσωμάτωση κανόνων ροής.

Πιο αναλυτικά, οι κανόνες απόφασης που χρησιμοποιήσαμε και παραπάνω  $LCL \leq Y_{j:n} \leq Y_{k:n} \leq UCL, LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL$  με  $R \geq r$  (όπου  $r$  θετικός ακέραιος), ο οποίος χαρακτηρίζει ένα δείγμα ως εντός ή εκτός ελέγχου, παραμένει ίδιος. Θα ενσωματώσουμε κανόνες ροής. Αν ισχύουν οι κανόνες ροής θα δεχόμαστε ότι η υπό μελέτη διεργασία είναι πλέον εκτός ελέγχου. Εδώ να αναφέρουμε ότι θα υπάρξουν μερικές προσθήκες στον αλγόριθμο και αντίστοιχα στον κώδικα της R, αλλά σε γενικές γραμμές η λογική και τα βήματα του αλγόριθμου παραμένουν ίδια με το κεφάλαιο 3.

Τέλος, θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης με τον κανόνα ροής σε έναν πίνακα για τις τιμές  $ARLin$  και  $ARLout$  των διαγραμμάτων ελέγχου.

#### 4.2 Περιγραφή αλγορίθμων στο νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγόριθμου και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχα και την υλοποίηση κάθε βήματος, στον κώδικα της R. Θα παρουσιάσουμε μόνο τα βήματα που υπάρχει διαφοροποίηση σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο.

##### 4.2.1.1 $ARLin$ και $ARLout$ με χρήση του κανόνα ροής 2-3(αλγόριθμος $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ )

Ο κανόνας ροής, σύμφωνα με τον οποίο θα ελέγχουμε στην συνέχεια αν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, είναι ο κανόνας 2/3 (ή 2-of-3). Δηλαδή σε μια τριάδα (συνεχόμενων) τυχαίων δειγμάτων ελέγχου, θα ελέγχουμε αν τουλάχιστον 2 δείγματα έχουν χαρακτηριστεί ως εκτός ελέγχου. Τότε, θα δεχόμαστε ότι η διεργασία έχει «μετατοπιστεί» σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Στη συνέχεια προχωράμε στον έλεγχο με επόμενη τριάδα δειγμάτων. Δηλαδή πλέον θα ελέγχουμε διεργασίες (τριάδες συνεχόμενων δειγμάτων) και όχι τυχαία δείγματα, όπως στο Κεφάλαιο 3, όπου ο σκοπός ήταν να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα από την εργασία του **(25)Triantafyllou (2018)** μέσω της προσομοίωσης.

Πίνακας 15 Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$  και κανόνα ροής 2-3

Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ και κανόνα ροής 2-3		
	Περιγραφή αλγορίθμου	Κώδικας σε R
Βήμα 1	Αρχικοποίηση μεταβλητών	$l_m=1;$ #Παράμετρος $\lambda$ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς $l_n=1;$ #Παράμετρος $\lambda$ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου $m=100;$ #Μέγεθος δείγματος αναφοράς

	<p>Μεταβλητή για το ARL χωρίς κανόνα ροής</p> <p>Μεταβλητή για το ARL με κανόνα ροής</p>	<pre> r=2;      #Μέγεθος μεταβλητής R n=5;      #Μέγεθος δείγματος ελέγχου a=3;      #Μέγεθος μεταβλητής a (δείγμα αναφοράς) b=99;     #Μέγεθος μεταβλητής b (δείγμα αναφοράς) j=2;      #Μέγεθος μεταβλητής j (δείγμα ελέγχου) k=3;      #Μέγεθος μεταβλητής k (δείγμα ελέγχου)  z=100;    #Αριθμός δειγμάτων αναφοράς (reference samples) l=10000;  #Αριθμός δειγμάτων ελέγχου (test samples) q=100;  AR1L=0;#για το Yj,Yk,R  MAR1L=0;#για το 2-3  for (p in 1:z){ </pre>
Βήμα 2	Παραγωγή referce sample	<pre> x=rexp(m,ln); x=sort(c(x)); #ορισμός LCL,CL,UCL LCL=x[a]; UCL=x[b]; CL=(x[a]+x[b])/2;  R11L=0;#για το Yj,Yk,R MR11L=0;#για το 2-3 for(co in 1:q){ </pre>
Βήμα 3		<pre> R1L=0;#για το Yj,Yk,R  f1=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,Yk,R f2=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,Yk,R AND 2-3  te1=0;#1ο στοιχείο της 3αδας te2=0;#2ο στοιχείο της 3αδας te3=0;#3ο στοιχείο της 3αδας f23=0;#Αν το νέο στειχείο της 3αδας είναι εντός(συμφωνα με το Yj,Yk,R),τοτε βάλε 0 αλλιώς 1 MR1L=0;#RL του 2-3  for(t in 1:l){ </pre>
Βήμα 4	<p>Παραγωγή test sample</p> <p>εξετάζονται πόσα δείγματα</p>	<pre> y = rexp(n,ln) y=sort(c(y));  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample </pre>

	<p>απο το δείγμα αναφοράς μεγέθους n είναι εντός UCL και LCL. Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.</p>	<pre> R=0; for(i in 1:n){   if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){     R=R+1;   } }  #with Yj,Yk,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) &amp;&amp; (y[k]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[k]&lt;UCL) ){   if(f1==0){     R1L=R1L+1;   }   f23=0; }else{   f1=1;   f23=1; }  #Modified 2 to 3 te1=te2; te2=te3; te3=f23; if( ((te1+te2+te3)&lt;2) &amp;&amp; (f2==0) ){   MR1L=MR1L+1; }else{   f2=1; }  if( (f2==1) &amp;&amp; (f1==1) ) {   t=1; } } </pre>
<p>Βήμα 5</p>	<p>Υπολογισμός ARL χωρίς κανόνα ροής 2-3</p> <p>Υπολογισμός ARL με κανόνα ροής 2-3</p>	<pre> MR11L=MR11L+(MR1L/q); R11L=R11L+(R1L/q); } MAR1L=MAR1L+(MR11L/z); AR1L=AR1L+(R11L/z); } </pre>
<p>Βήμα 6</p>	<p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R AND 2-3</p>	<pre> print("ARL-in is (with Yj,Yk,R AND 2-3) :") MAR1L </pre>
<p>Βήμα 7</p>	<p>Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή</p>	<pre> lm=2; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς </pre>

στο "Βήμα 1"	$ln=1$ ; #Παράμετρος $\lambda$ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου
--------------	--

#### 4.2.1.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-3

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα συγκρίνουμε ενδεικτικά, μερικές από τις τιμές ARLout χωρίς κανόνες ροής, με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην R, για τις ίδιες παραμέτρους, σχεδιασμού με χρήση του κανόνα ροής 2-3 χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές κατανομές, την κανονική κατανομή ( $N(\theta, \delta)$ ) και την Laplace κατανομή ( $Laplace(\theta, \delta)$ ).

Πίνακας 16 Σύγκρισης τιμών ARLout  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$  με χρήση του κανόνα ροής 2-3

$\theta$	$\delta$	Chart 4(Normal distribution)	Chart 5(Normal distribution)	Chart 4(Laplace distribution)	Chart 5(Laplace distribution)
0	1	446.6	<b>540</b>	446.6	<b>459.7278</b>
0.25	1	163.9	<b>127.8939</b>	276.9	<b>232.3025</b>
0.5	1	51.64	<b>26.62522</b>	159.2	<b>77.42</b>
1	1	7.4	<b>3.827333</b>	45.7	<b>16.906</b>
1.5	1	2.1	<b>1.442947</b>	12.2	<b>1.9425</b>
2	1	1.2	<b>1.060632</b>	3.6	<b>1.24</b>
0	1.25	61.4	<b>94.303</b>	107.5	<b>110.32</b>
0.25	1.25	35.7	<b>35.07</b>	75.9	<b>50.1025</b>
0.5	1.25	17.9	<b>13.72344</b>	50.4	<b>32.4075</b>
1	1.25	5.0	<b>3.853778</b>	19.6	<b>6.0675</b>
1.5	1.25	2.1	<b>1.662333</b>	7.2	<b>1.895</b>
2	1.25	1.3	<b>1.138333</b>	2.9	<b>1.34</b>
0	1.5	20.2	<b>29.252</b>	43.1	<b>62.4875</b>
0.25	1.5	15.0	<b>17.77244</b>	33.2	<b>31.39</b>
0.5	1.5	9.8	<b>9.434111</b>	24.3	<b>18.52</b>
1	1.5	4.1	<b>3.647778</b>	11.7	<b>4.6475</b>



1.5	1.5	2.1	<b>1.849</b>	5.3	<b>2.15</b>
2	1.5	1.4	<b>1.259444</b>	2.6	<b>1.445</b>
0	1.75	10.0	<b>13.0136</b>	22.8	<b>15.9</b>
0.25	1.75	8.5	<b>10.245</b>	18.7	<b>11.392</b>
0.5	1.75	6.5	<b>7.6396</b>	14.7	<b>10.1625</b>
1	1.75	3.5	<b>3.492</b>	8.2	<b>6.9</b>
1.5	1.75	2.1	<b>1.9152</b>	4.4	<b>2.063</b>
2	1.75	1.5	<b>1.3549</b>	2.4	<b>1.29</b>
0	2	6.2	<b>7.0303</b>	14.3	<b>17.2775</b>
0.25	2	5.7	<b>5.9253</b>	12.2	<b>13.745</b>
0.5	2	4.8	<b>5.4987</b>	10.0	<b>9.495</b>
1	2	3.1	<b>3.1951</b>	6.3	<b>4.1175</b>
1.5	2	2.0	<b>2.0038</b>	3.8	<b>2.1675</b>
2	2	1.5	<b>1.4512</b>	2.3	<b>1.47</b>

\* ARL values of 4 different control charts under the *Laplace* ( $\vartheta, \delta$ ) distribution ( $m = 100, n = 5$ ) and the *N*( $\vartheta, \delta$ ) distribution ( $m = 100, n = 5$ ).

**Chart 4:** Communication in Statistics (2018)  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, R$

**Chart 5:** Communication in Statistics (2018)  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, R$  with 2-of-3 runs rule

#### 4.2.2.1 ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 2-3(αλγόριθμος $Y_{j:n}, r$ )

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγόριθμου και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχα και την υλοποίηση κάθε βήματος, στον κώδικα της R. Θα παρουσιάσουμε μόνο τα βήματα που υπάρχει διαφοροποίηση σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο.

Ο κανόνας ροής, σύμφωνα με τον οποίο θα ελέγχουμε στην συνέχεια αν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, είναι ο κανόνας 2/3 (ή 2-of-3). Δηλαδή σε μια τριάδα (συνεχόμενων) τυχαίων δειγμάτων ελέγχου, θα ελέγχουμε αν τουλάχιστον 2 δείγματα έχουν χαρακτηριστεί ως εκτός ελέγχου. Τότε, θα δεχόμαστε ότι η διεργασία έχει «μετατοπιστεί» σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Στη συνέχεια προχωράμε στον έλεγχο με επόμενη τριάδα δειγμάτων. Δηλαδή πλέον θα ελέγχουμε διεργασίες (τριάδες συνεχόμενων δειγμάτων) και όχι τυχαία δείγματα, όπως στο Κεφάλαιο 3, όπου ο σκοπός ήταν να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα από την εργασία του **(25)Triantafyllou (2018)** μέσω της προσομοίωσης.



		<pre> te2=0;#2ο στοιχείο της 3αδας te3=0;#3ο στοιχείο της 3αδας f23=0;#Αν το νέο στοιχείο της 3αδας είναι εντός(συμφωνα με το Yj,R),τοτε βάλε 0 αλλιώς 1 MR1L=0;#RL του 2-3  for(t in 1:l){ </pre>
<p>Βήμα 4</p>	<p>Παραγωγή test sample</p> <p>εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.</p>	<pre> #παραγωγή test sample y = rexp(n,ln) y=sort(c(y));  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample R=0; for(i in 1:n){   if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){     R=R+1; #εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.   } }  #with Yj,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) ){   if(f1==0){     R1L=R1L+1;   }   f23=0; }else{   f1=1;   f23=1; }  #Modified 2 to 3 te1=te2; te2=te3; te3=f23; if( ((te1+te2+te3)&lt;2) &amp;&amp; (f2==0) ){   MR1L=MR1L+1; }else{   f2=1; }  if( (f2==1) &amp;&amp; (f1==1) ) {   t=l; }  } </pre>
Βήμα		

5	Υπολογισμός ARL χωρίς κανόνα ροής 2-3  Υπολογισμός ARL με κανόνα ροής 2-3	MR11L=MR11L+(MR1L/q); R11L=R11L+(R1L/q);  } MAR1L=MAR1L+(MR11L/z); AR1L=AR1L+(R11L/z);  }
Βήμα 6	Εμφανίζεται το ARLin with Yj,R  Εμφανίζεται το ARLin with Yj,R AND 2-3	print("ARL-in is (with Yj,R) :") AR1L #εμφανίζεται το ARLin with Yj,R  print("ARL-in is (with Yj,R AND 2-3) :") MAR1L #εμφανίζεται το ARLin with Yj,R AND 2-3
Βήμα 7	Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο "Βήμα 1"	lm=2; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς ln=1; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου

#### 4.2.2.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-3

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα συγκρίνουμε ενδεικτικά, μερικές από τις τιμές των ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 2-3, με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην R για συγκεκριμένες παραμέτρους σχεδιασμού.

Πίνακας 18 .Comparison of the  $ARL_{out}$  with 2-of-3 run rules of control charts with approximately the same  $ARL_{in}$ .

Underlying distributions:  $N(0, 1)$  (in-control) and  $N(0, \theta)$  (out-of-control).  
Each  $ARL_{out}$  cell contains the values attained for  $\theta = 1.1, 1.2$  and  $1.3$ , respectively

$ARL_0$	$m$	$n$	Chart 1				Chart 2			
			(LCL, UCL)	$r$	Exact $ARL_{in}$	$ARL_{out}$	(LCL, UCL)	$(j, r)$	Exact $ARL_{in}$	$ARL_{out}$
370	200	5	(11,190)	2	363.6	150.2	(4,161)	(3,2)	330.686	98.76
						75.5			4	60.58
						43.6				41.96
		11	(22,179)	5	367.8	114.2	(22,154)	(6,5)	364.996	94.958
						47.2			7	39.15
						23.9				17.762

	25	(43,158)	8	374.1	<b>108.6</b>	(43,137)	(13,8)	320.892	<b>95.33</b>
					<b>42.0</b>				<b>25.72</b>
					<b>20.1</b>				<b>13.50</b>
500	5	(18,473)	3	350.4	<b>124.9</b>	(18,430)	(3,3)	376.029	<b>120.01</b>
					<b>56.7</b>			4	<b>51.46</b>
					<b>30.6</b>				<b>25.18</b>
	11	(39,462)	2	373.8	<b>106.4</b>	(22,367)	(6,2)	330.014	<b>90.15</b>
					<b>41.6</b>			7	<b>32.10</b>
					<b>20.3</b>				<b>18.10</b>
	25	(89,412)	10	366.2	<b>88.2</b>	(91,367)	(13,10)	372.097	<b>72.124</b>
					<b>31.1</b>				<b>22.563</b>
					<b>14.3</b>				<b>10.894</b>
500	200	(7,194)	3	500.2	<b>164.3</b>	(6,171)	(3,3)	491.09	<b>160.3</b>
					<b>70.5</b>				<b>60.2</b>
					<b>36.5</b>				<b>30.190</b>
	11	(21,180)	5	496.8	<b>146.2</b>	(21,155)	(6,5)	530.40	<b>105.64</b>
					<b>58.0</b>				<b>41.73</b>
					<b>28.5</b>				<b>25.79</b>
	25	(26,175)	13	497.8	<b>86.1</b>	(27,157)	(13,13)	530.081	<b>60.72</b>
					<b>25.3</b>			2	<b>19.01</b>
					<b>10.6</b>				<b>8.09</b>
500	5	(16,485)	3	503.8	<b>168.8</b>	(10,425)	(3,3)	490.077	<b>165.9</b>
					<b>73.1</b>			5	<b>69.9</b>
					<b>38.0</b>				<b>31.6</b>
	11	(37,464)	6	500.7	<b>134.9</b>	(30,400)	(6,6)	491.002	<b>112.29</b>
					<b>50.6</b>				<b>42.1</b>
					<b>23.9</b>				<b>20.1</b>
	25	(87,414)	10	483.8	<b>110.2</b>	(87,365)	(13,10)	511.96	<b>92.56</b>
					<b>37.3</b>				<b>30.1</b>
					<b>16.6</b>				<b>9.07</b>

**Chart 1:** Communication in Statistics (2010)  $Y_{j:n}, R$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει βελτίωση στην απόδοση του διαγράμματος ελέγχου, δεδομένου ότι για περίπου ίδιες τιμές του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής χωρίς κανόνα ροής ARLin και με τον κανόνα ροής 2/3, ARLin-2/3, υπάρχει μείωση στις αντίστοιχες τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής με τον κανόνα ροής ARLout σε σχέση με τις αντίστοιχες χωρίς τον κανόνα ροής. Π.χ.

• για σχεδιασμό  $(m,n,j,r,(LCL,UCL))=(200,5,3,2,(11,190))$  που έχουμε ARLin κοντά στο 370 (ARLin=363.6 και ARLin-2-3=330.6864), το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής μειώνεται

- για  $N(0.1.1)$  : από 150.2 σε 98.76
- για  $N(0.1.2)$  : από 75.5 σε 60.58
- για  $N(0.1.3)$  : από 43.6 σε 41.96

• για σχεδιασμό  $(m,n,j,r,(LCL,UCL))=(200,11,6,5,(11,190))$  που έχουμε ARLin κοντά στο 370 (ARLin=367.8 και ARLin-2-3=364.9967), το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής μειώνεται

- για  $N(0.1.1)$  : από 114.2 σε 94.968
- για  $N(0.1.2)$  : από 47.2 σε 39.15
- για  $N(0.1.3)$  : από 23.9 σε 17.762
- 

#### 4.3.1 ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 2-4 (αλγόριθμος $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ )

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγόριθμου και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχα και την υλοποίηση κάθε βήματος, στον κώδικα της R. Θα παρουσιάσουμε μόνο τα βήματα που υπάρχει διαφοροποίηση σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο.

Ο κανόνας ροής, σύμφωνα με τον οποίο θα ελέγχουμε στην συνέχεια αν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, είναι ο κανόνας 2/4 (ή 2-of-4). Δηλαδή σε μια τετράδα (συνεχόμενων) τυχαίων δειγμάτων ελέγχου, θα ελέγχουμε αν τουλάχιστον 2 δείγματα έχουν χαρακτηριστεί ως εκτός ελέγχου. Τότε, θα δεχόμαστε ότι η διεργασία έχει «μετατοπιστεί» σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Στη συνέχεια προχωράμε στον έλεγχο με επόμενη τετράδα δειγμάτων. Δηλαδή πλέον θα ελέγχουμε διεργασίες (τετράδες συνεχόμενων δειγμάτων) και όχι τυχαία δείγματα, όπως στο Κεφάλαιο 3, όπου ο σκοπός ήταν να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα από την εργασία του **(25)Triantafyllou (2018)** μέσω της προσομοίωσης.

Πίνακας 19 Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$  και κανόνα ροής 2-4

Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ και κανόνα ροής 2-4		
	Περιγραφή αλγορίθμου	Κώδικας σε R
Βήμα	Αρχικοποίηση	lm=1; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του



		<pre> MR1L=0;#RL του 2-4  for(t in 1:l){ </pre>
<p>Βήμα 4</p>	<p>Παραγωγή test sample</p> <p>εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.</p>	<pre> #παραγωγή test sample y = rexp(n,ln) y=sort(c(y));  if( (f2==1) &amp;&amp; (f1==1) ) {   t=1; }  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample R=0; for(i in 1:n){   if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){     R=R+1; #εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.   } }  #with Yj,Yk,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) &amp;&amp; (y[k]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[k]&lt;UCL) ){   if(f1==0){     R1L=R1L+1;   }   f24=0; }else{   f1=1;   f24=1; }  #Modified 2 to 4 te1=te2; te2=te3; te3=te4; te4=f24; if( ((te1+te2+te3+te4)&lt;2) &amp;&amp; (f2==0) ){   MR1L=MR1L+1; }else{   f2=1; }  } </pre>
Βήμα		



5	Υπολογισμός ARL χωρίς κανόνα ροής 2-4  Υπολογισμός ARL με κανόνα ροής 2-4	MR11L=MR11L+(MR1L/q); R11L=R11L+(R1L/q);  } MAR1L=MAR1L+(MR11L/z); AR1L=AR1L+(R11L/z);  }
Βήμα 6	Εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R  Εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R AND 2-4	print("ARL-in is (with Yj,Yk,R) :") AR1L #εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R  print("ARL-in is (with Yj,Yk,R AND 2-4) :") MAR1L #εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R AND 2-4
Βήμα 7	Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο "Βήμα 1"	lm=2; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς ln=1; #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου

#### 4.3.1.2 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{j,n}, Y_{k,n}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-4

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα συγκρίνουμε ενδεικτικά, μερικές από τις τιμές ARLout χωρίς κανόνες ροής, με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην R, για τις ίδιες παραμέτρους, σχεδιασμού με χρήση του κανόνα ροής 2-3 χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές κατανομές, την κανονική κατανομή ( $N(\theta, \delta)$ ) και την Laplace κατανομή ( $Laplace(\theta, \delta)$ ).

Πίνακας 20 Σύγκριση τιμών ARLout  $Y_{j,n}, Y_{k,n}, r$  με χρήση του κανόνα ροής 2-4

$\theta$	$\delta$	Chart 4(Normal distribution)	Chart 6(Normal distribution)	Chart 4(Laplace distribution)	Chart 6(Laplace distribution)
0	1	446.6	<b>480.1</b>	446.6	<b>489.7024</b>
0.25	1	163.9	<b>90.9888</b>	276.9	<b>190.7104</b>
0.5	1	51.64	<b>26.0005</b>	159.2	<b>57.5728</b>
1	1	7.4	<b>3.44</b>	45.7	<b>5.8496</b>
1.5	1	2.1	<b>1.09</b>	12.2	<b>1.816</b>
2	1	1.2	<b>1.0433</b>	3.6	<b>1.168</b>
0	1.25	61.4	<b>74.1744</b>	107.5	<b>95.9</b>
0.25	1.25	35.7	<b>29.81</b>	75.9	<b>35.31</b>

0.5	1.25	17.9	<b>9.01</b>	50.4	<b>25.9</b>
1	1.25	5.0	<b>3.3344</b>	19.6	<b>3.8448</b>
1.5	1.25	2.1	<b>1.5980</b>	7.2	<b>14.899</b>
2	1.25	1.3	<b>1.1088</b>	2.9	<b>1.005</b>
0	1.5	20.2	<b>21.9984</b>	43.1	<b>36.2256</b>
0.25	1.5	15.0	<b>15.60</b>	33.2	<b>19.0896</b>
0.5	1.5	9.8	<b>7.001</b>	24.3	<b>12.0368</b>
1	1.5	4.1	<b>3.6208</b>	11.7	<b>4.432</b>
1.5	1.5	2.1	<b>1.5901</b>	5.3	<b>2.04</b>
2	1.5	1.4	<b>1.23839</b>	2.6	<b>1.2864</b>
0	1.75	10.0	<b>11.3472</b>	22.8	<b>25.3008</b>
0.25	1.75	8.5	<b>9.15</b>	18.7	<b>16.8576</b>
0.5	1.75	6.5	<b>7.09</b>	14.7	<b>9.5984</b>
1	1.75	3.5	<b>3.2064</b>	8.2	<b>4.298</b>
1.5	1.75	2.1	<b>1.1982</b>	4.4	<b>1.9</b>
2	1.75	1.5	<b>1.29</b>	2.4	<b>1.004</b>
0	2	6.2	<b>6.901</b>	14.3	<b>12.8</b>
0.25	2	5.7	<b>5.106</b>	12.2	<b>9.19</b>
0.5	2	4.8	<b>4.607</b>	10.0	<b>7.7968</b>
1	2	3.1	<b>3.0017</b>	6.3	<b>2.979</b>
1.5	2	2.0	<b>1.9</b>	3.8	<b>1.9952</b>
2	2	1.5	<b>1.3972</b>	2.3	<b>1.4368</b>

\* *ARL* values of 4 different control charts under the *Laplace*  $(\theta, \delta)$  distribution ( $m = 100, n = 5$ ) and the  $N(\theta, \delta)$  distribution ( $m = 100, n = 5$ ).

**Chart 4:** Communication in Statistics (2018)  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, R$

**Chart 6:** Communication in Statistics (2018)  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, R$  with 2-of-4 runs rule

### 4.3.2 ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 2-4(αλγόριθμος $Y_{j:n}, r$ )

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγόριθμου και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχα και την υλοποίηση κάθε βήματος, στον κώδικα της R. Θα παρουσιάσουμε μόνο τα βήματα που υπάρχει διαφοροποίηση σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο.

Ο κανόνας ροής, σύμφωνα με τον οποίο θα ελέγχουμε στην συνέχεια αν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, είναι ο κανόνας 2/4 (ή 2-of-4). Δηλαδή σε μια τετράδα (συνεχόμενων) τυχαίων δειγμάτων ελέγχου, θα ελέγχουμε αν τουλάχιστον 2 δείγματα έχουν χαρακτηριστεί ως εκτός ελέγχου. Τότε, θα δεχόμαστε ότι η διεργασία έχει «μετατοπιστεί» σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Στη συνέχεια προχωράμε στον έλεγχο με επόμενη τετράδα δειγμάτων. Δηλαδή πλέον θα ελέγχουμε διεργασίες (τετράδες συνεχόμενων δειγμάτων) και όχι τυχαία δείγματα, όπως στο Κεφάλαιο 3, όπου ο σκοπός ήταν να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα από την εργασία του **(25)Triantafyllou (2018)** μέσω της προσομοίωσης.

Πίνακας 21 Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου  $Y_{j:n}, r$  και κανόνα ροής 2-4

Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, r$ και κανόνα ροής 2-4		
	Περιγραφή αλγορίθμου	Κώδικας σε R
Βήμα 1	Αρχικοποίηση μεταβλητών  Μεταβλητή για το ARL χωρίς κανόνα ροής  Μεταβλητή για το ARL με κανόνα ροής	<pre>#rnorm(n,mean,sd) = rnorm(m,mer,lm) ; met=0; # mean for test sample(θ) mer=0; #mer for reference sample(θ) lm=1;#Παράμετρος (δ) lm κανονικής κατανομής του (reference sample)δείγματος αναφοράς ln=1.1;#Παράμετρος (δ) sd κανονικής κατανομής του (test sample) δείγματος ελέγχου m=500; #Μέγεθος δείγματος αναφοράς r=6; #Μέγεθος μεταβλητής R n=11; #Μέγεθος δείγματος ελέγχου a=30; #Μέγεθος μεταβλητής a (δείγμα αναφοράς) b=404; #Μέγεθος μεταβλητής b (δείγμα αναφοράς) j=((n+1)/2); #Μέγεθος μεταβλητής j (δείγμα ελέγχου) z=80; #Αριθμός δειγμάτων αναφοράς (reference samples) l=10000; #Αριθμός δειγμάτων ελέγχου (test samples) q=80;  AR1L=0;##για το Yj,R  MAR1L=0;#για το 2-4  for (p in 1:z){</pre>
Βήμα 2	Παραγωγή referce sample	<pre>#παραγωγή reference sample x=rnorm(m,mer,lm);</pre>

		<pre> x=sort(c(x)); #ορισμός LCL,CL,UCL LCL=x[a]; UCL=x[b]; CL=(x[a]+x[b])/2;  R1L=0;#για το Yj,R MR1L=0;#για το 2-4  #το δοκιμάζω με q l-αδες for(co in 1:q){ </pre>
Βήμα 3		<pre> R1L=0;#για το Yj,R f1=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,R  f2=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,R AND 2-4  te1=0;#1ο στοιχείο της 4αδας te2=0;#2ο στοιχείο της 4αδας te3=0;#3ο στοιχείο της 4αδας te4=0;#3ο στοιχείο της 4αδας f24=0;#Αν το νέο στοιχείο της 4αδας είναι εντός(συμφωνα με το Yj,R),τοτε βάλε 0 αλλιώς 1 MR1L=0;#RL του 2-4  for(t in 1:l){ </pre>
Βήμα 4	<p>Παραγωγή test sample</p> <p>εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.</p>	<pre> #παραγωγή test sample y = rnorm(n,met,ln) y=sort(c(y));  if( (f2==1) &amp;&amp; (f1==1) ) { t=l; }  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample R=0; for(i in 1:n){ if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){ R=R+1; } }  #with Yj,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) ){ if(f1==0){ R1L=R1L+1; } } f24=0; </pre>

		<pre> }else{   f1=1;   f24=1; }  #Modified 2 to 4 te1=te2; te2=te3; te3=te4; te4=f24; if( ((te1+te2+te3+te4)&lt;2) &amp;&amp; (f2==0) ){   MR1L=MR1L+1; }else{   f2=1; } } </pre>
<p>Βήμα 5</p>	<p>Υπολογισμός ARL χωρίς κανόνα ροής 2-4</p> <p>Υπολογισμός ARL με κανόνα ροής 2-4</p>	<pre> MR11L=MR11L+(MR1L/q); R11L=R11L+(R1L/q);  } MAR1L=MAR1L+(MR11L/z); AR1L=AR1L+(R11L/z); } </pre>
<p>Βήμα 6</p>	<p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,R</p> <p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,R AND 2-4</p>	<pre> print("ARL-in is (with Yj,R) :") AR1L      #εμφανίζεται το ARLin with Yj,R  print("ARL-in is (with Yj,R AND 2-4) :") MAR1L     #εμφανίζεται το ARLin with Yj,R AND 2-4 </pre>
<p>Βήμα 7</p>	<p>Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο “Βήμα 1”</p>	<pre> met=0; # mean for test sample(θ) mer=0; #mer for reference sample(θ) lm=1;#Παράμετρος (δ) lm κανονικής κατανομής του (reference sample)δείγματος αναφοράς ln=1;#Παράμετρος (δ) sd κανονικής κατανομής του (test sample) δείγματος ελέγχου </pre>

#### 4.3.2.1 Σύγκριση αποτελεσμάτων $Y_{jn}, r$ με χρήση του κανόνα ροής 2-4

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θα συγκρίνουμε ενδεικτικά, μερικές από τις τιμές των ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 2-3, με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης στην R για συγκεκριμένες παραμέτρους σχεδιασμού.

Πίνακας 22. Comparison of the  $ARL_{out}$  with 2-of-4 run rules of control charts with approximately the same  $ARL_{in}$ .

Underlying distributions:  $N(0, 1)$  (in-control) and  $N(0, \theta)$  (out-of-control).

Each  $ARL_{out}$  cell contains the values attained for  $\theta = 1.1, 1.2$  and  $1.3$ , respectively

$ARL_0$	$m$	$n$	<i>Chart 1</i>				<i>Chart 3</i>					
			(LCL, UCL)	$r$	Exact $ARL_{in}$	$ARL_{out}$	(LCL, UCL)	( $j, r$ )	Exact $ARL_{in}$	$ARL_{out}$		
370	200	5	(11,190)	2	363.6	150.2	(11,168)	(3,2)	358.1	147.9		
						75.5			387	74.6		
						43.6				40.90		
	500	11	11	(22,179)	5	367.8	114.2	(22,157)	(6,5)	340.9	96.74	
							47.2			206	30.1	
							23.9				10.9	
		25	25	25	(43,158)	8	374.1	108.6	(40,137)	(13,8)	372.9	78.9
								42.0			36	20.6
								20.1				11.9
500	500	5	(18,473)	3	350.4	124.9	(18,436)	(3,3)	340.7	116.16		
						56.7			793	49.3		
						30.6				22.1		
	11	11	11	(39,462)	2	373.8	106.4	(22,372)	(6,2)	380.3	83.60	
							41.6			489	32.1	
							20.3				18.9	
		25	25	25	(89,412)	10	366.2	88.2	(91,368)	(13,10)	365.9	67.50
								31.1			208	27.10
								14.3				9.09
500	200	5	(7,194)	3	500.2	164.3	(6,173)	(3,3)	480.7	130.9		
						70.5			344	50.1		
						36.5				22.98		
	11	11	11	(21,180)	5	496.8	146.2	(21,159)	(6,5)	510.4	108.9	
							58.0			522	42.1	
							28.5				27.1	

25		(26,175)	13	497.8	86.1	(27,159)	(13,13)	450.0 594	49.1
					25.3				10.7
					10.6				4.9
500	5	(16,485)	3	503.8	168.8	(10,428)	(3,3)	480.7 967	117.07
					73.1				60.21
					38.0				28.90
11		(37,464)	6	500.7	134.9	(38,417)	(6,6)	480.4 4178	90.68
					50.6				30.57
					23.9				12.38
25		(87,414)	10	483.8	110.2	(87,369)	(13,10)	453.9 411	97.8
					37.3				34.9
					16.6				10.04

**Chart 1:** Communication in Statistics (2010)  $Y_{j:n}, R$

**Chart 3:** Communication in Statistics (2010)  $Y_{j:n}, R$  with 2-of-4 runs rule

Παρατηρούμε ότι υπάρχει βελτίωση στην απόδοση του διαγράμματος ελέγχου, δεδομένου ότι για περίπου ίδιες τιμές του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής χωρίς κανόνα ροής ARLin και με τον κανόνα ροής 2/4, ARLin-2/4, υπάρχει μείωση στις αντίστοιχες τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής με τον κανόνα ροής ARLout σε σχέση με τις αντίστοιχες χωρίς τον κανόνα ροής. Π.χ.

• για σχεδιασμό  $(m,n,j,r,(LCL,UCL))=(200,5,3,2,(11,190))$  που έχουμε ARLin κοντά στο 370 (ARLin=363.6 και ARLin-2-3=358.1387), το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής μειώνεται

- για  $N(0.1.1)$  : από 150.2 σε 147.9
- για  $N(0.1.2)$  : από 75.5 σε 96.6
- για  $N(0.1.3)$  : από 43.6 σε 40.90

• για σχεδιασμό  $(m,n,j,r,(LCL,UCL))=(200,11,6,5,(22,179))$  που έχουμε ARLin κοντά στο 370 (ARLin=367.8 και ARLin-2-3=340.9206), το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής μειώνεται

- για  $N(0.1.1)$  : από 114.2 σε 96.74
- για  $N(0.1.2)$  : από 47.2 σε 30.1
- για  $N(0.1.3)$  : από 23.9 σε 10.9

#### 4.4.1 ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 3-4 (αλγόριθμος $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ )

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγόριθμου και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχα και την υλοποίηση κάθε βήματος, στον κώδικα της R. Θα

παρουσιάσουμε μόνο τα βήματα που υπάρχει διαφοροποίηση σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο.

Ο κανόνας ροής, σύμφωνα με τον οποίο θα ελέγχουμε στην συνέχεια αν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, είναι ο κανόνας 3/4 (ή 3-of-4). Δηλαδή σε μια τετράδα (συνεχόμενων) τυχαίων δειγμάτων ελέγχου, θα ελέγχουμε αν τουλάχιστον 3 δείγματα έχουν χαρακτηριστεί ως εκτός ελέγχου. Τότε, θα δεχόμαστε ότι η διεργασία έχει «μετατοπιστεί» σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Στη συνέχεια προχωράμε στον έλεγχο με επόμενη τετράδα δειγμάτων. Δηλαδή πλέον θα ελέγχουμε διεργασίες (τετράδες συνεχόμενων δειγμάτων) και όχι τυχαία δείγματα, όπως στο Κεφάλαιο 3, όπου ο σκοπός ήταν να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα από την εργασία του **(25)Triantafyllou (2018)** μέσω της προσομοίωσης.

Πίνακας 23 Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου  $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$  και κανόνα ροής 3-4

Περιγραφή αλγορίθμου με συνθήκες ελέγχου $Y_{j:n}, Y_{k:n}, r$ και κανόνα ροής 3-4		
	Περιγραφή αλγορίθμου	Κώδικας σε R
Βήμα 1	<p>Αρχικοποίηση μεταβλητών</p> <p>Μεταβλητή για το ARL χωρίς κανόνα ροής</p> <p>Μεταβλητή για το ARL με κανόνα ροής</p>	<pre>lm=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του             δείγματος αναφοράς ln=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του             δείγματος ελέγχου m=100;     #Μέγεθος δείγματος αναφοράς r=2;       #Μέγεθος μεταβλητής R n=5;       #Μέγεθος δείγματος ελέγχου a=3;       #Μέγεθος μεταβλητής a (δείγμα αναφοράς) b=99;      #Μέγεθος μεταβλητής b (δείγμα αναφοράς) j=2;       #Μέγεθος μεταβλητής j (δείγμα ελέγχου) k=3;       #Μέγεθος μεταβλητής k (δείγμα ελέγχου)  z=100;     #Αριθμός δειγμάτων αναφοράς (reference             samples) l=10000;   #Αριθμός δειγμάτων ελέγχου (test             samples) q=100;  AR1L=0;###για το Yj,Yk,R  MAR1L=0;#για το 3-4  for (p in 1:z){</pre>
Βήμα 2	Παραγωγή referce sample	<pre>#παραγωγή referce sample x=rexp(m,lm); x=sort(c(x)); #ορισμός LCL,CL,UCL LCL=x[a]; UCL=x[b]; CL=(x[a]+x[b])/2;</pre>



		<pre> R1L=0;#για το Yj,Yk,R MR1L=0;#για το 3-4  #το δοκιμάζω με q l-αδες for(co in 1:q){ </pre>
Βήμα 3		<pre> R1L=0;#για το Yj,Yk,R   f1=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των   προυποθεσεων with Yj,Yk,R    f2=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των   προυποθεσεων with Yj,Yk,R AND 3-4    te1=0;#1ο στοιχείο της 4αδας   te2=0;#2ο στοιχείο της 4αδας   te3=0;#3ο στοιχείο της 4αδας   te4=0;#3ο στοιχείο της 4αδας   f34=0;#Αν το νέο στοιχείο της 4αδας είναι   εντός(συμφωνα με το Yj,Yk,R),τοτε βάλε 0 αλλιώς 1   MR1L=0;#RL του 3-4    for(t in 1:l){ </pre>
Βήμα 4	<p>Παραγωγή test sample</p> <p>εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.</p>	<pre> #παραγωγή test sample y = rexp(n,ln) y=sort(c(y));  if( (f2==1) &amp;&amp; (f1==1) ) {   t=l; }  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample R=0; for(i in 1:n){   if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){     R=R+1;   } }  #with Yj,Yk,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) &amp;&amp; (y[k]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[k]&lt;UCL) ){   if(f1==0){     R1L=R1L+1;   }   f34=0; }else{   f1=1;   f34=1; } </pre>

		<pre>#Modified 3 to 4 te1=te2; te2=te3; te3=te4; te4=f34; if( ((te1+te2+te3+te4)&lt;3) &amp;&amp; (f2==0) ){   MR1L=MR1L+1; }else{   f2=1; } }</pre>
Βήμα 5	<p>Υπολογισμός ARL χωρίς κανόνα ροής 3-4</p> <p>Υπολογισμός ARL με κανόνα ροής 3-4</p>	<pre>MR11L=MR11L+(MR1L/q); R11L=R11L+(R1L/q);  } MAR1L=MAR1L+(MR11L/z); AR1L=AR1L+(R11L/z);  }</pre>
Βήμα 6	<p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R</p> <p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R AND 3-4</p>	<pre>print("ARL-in is (with Yj,Yk,R) :") AR1L      #εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R  print("ARL-in is (with Yj,Yk,R AND 3-4) :") MAR1L     #εμφανίζεται το ARLin with Yj,Yk,R AND 3-4</pre>
Βήμα 7	<p>Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο "Βήμα 1"</p>	<pre>lm=2;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του             δείγματος αναφοράς ln=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του             δείγματος ελέγχου</pre>

#### 4.4.2 ARLin και ARLout με χρήση του κανόνα ροής 3-4(αλγόριθμος $Y_{jn}, r$ )

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε τα βήματα του αλγόριθμου και θα παρουσιάσουμε αντίστοιχα και την υλοποίηση κάθε βήματος, στον κώδικα της R. Θα παρουσιάσουμε μόνο τα βήματα που υπάρχει διαφοροποίηση σε σχέση με τον αρχικό αλγόριθμο.

Ο κανόνας ροής, σύμφωνα με τον οποίο θα ελέγχουμε στην συνέχεια αν η υπό μελέτη διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου, είναι ο κανόνας 3/4 (ή 3-of-4). Δηλαδή σε μια τετράδα (συνεχόμενων) τυχαίων δειγμάτων ελέγχου, θα ελέγχουμε αν τουλάχιστον 3 δείγματα έχουν χαρακτηριστεί ως εκτός ελέγχου. Τότε, θα δεχόμαστε ότι η διεργασία έχει «μετατοπιστεί» σε εκτός ελέγχου κατάσταση. Στη συνέχεια προχωράμε στον έλεγχο με επόμενη τετράδα δειγμάτων. Δηλαδή πλέον θα ελέγχουμε



		<pre> f2=0; #Μεταβλητή για ελεγχου πληρότητας των προυποθεσεων with Yj,R AND 3-4  te1=0;#1ο στοιχείο της 4αδας te2=0;#2ο στοιχείο της 4αδας te3=0;#3ο στοιχείο της 4αδας te4=0;#3ο στοιχείο της 4αδας f34=0;#Αν το νέο στοιχείο της 4αδας είναι εντός(συμφωνα με το Yj,R),τοτε βάλε 0 αλλιώς 1 MR1L=0;#RL του 3-4  for(t in 1:l){ </pre>
<p>Βήμα 4</p>	<p>Παραγωγή test sample</p> <p>εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.</p>	<pre> #παραγωγή test sample y = rexp(n,ln) y=sort(c(y));  if( (f2==1) &amp;&amp; (f1==1) ) {   t=1; }  #υπολογισμός R του τρέχοντος test sample R=0; for(i in 1:n){   if( ( y[i] &gt; LCL ) &amp;&amp; ( y[i] &lt; UCL ) ){     R=R+1; #εξετάζονται πόσα δείγματα απο το δείγμα αναφοράςμεγέθους n είναι εντός UCL και LCL.Για κάθε ένα δείγμα που βρίσκεται εντός αυτών των ορίων η μεταβλητή R αυξάνει κατά 1.   } }  #with Yj,R if( R&gt;=r &amp;&amp; (y[j]&gt;LCL) &amp;&amp; (y[j]&lt;UCL) ){   if(f1==0){     R1L=R1L+1;   }   f34=0; }else{   f1=1;   f34=1; }  #Modified 3 to 4 te1=te2; te2=te3; te3=te4; te4=f34; if( ((te1+te2+te3+te4)&lt;3) &amp;&amp; (f2==0) ){   MR1L=MR1L+1; }else{ </pre>

		<pre>f2=1; } }</pre>
<p>Βήμα 5</p>	<p>Υπολογισμός ARL χωρίς κανόνα ροής 3-4</p> <p>Υπολογισμός ARL με κανόνα ροής 3-4</p>	<pre>MR11L=MR11L+(MR1L/q); R11L=R11L+(R1L/q); } MAR1L=MAR1L+(MR11L/z); AR1L=AR1L+(R11L/z); }</pre>
<p>Βήμα 6</p>	<p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,R</p> <p>Εμφανίζεται το ARLin with Yj,R AND 3-4</p>	<pre>print("ARL-in is (with Yj,R) :") AR1L      #εμφανίζεται το ARLin with Yj,R  print("ARL-in is (with Yj,R AND 3-4) :") MAR1L     #εμφανίζεται το ARLin with Yj,R AND 3-4</pre>
<p>Βήμα 7</p>	<p>Για τον υπολογισμό του <b>ARLout</b> αρκεί η αλλαγή στο "Βήμα 1"</p>	<pre>ln=2;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος αναφοράς ln=1;      #Παράμετρος λ εκθετικής κατανομής του δείγματος ελέγχου</pre>

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική:

- (1) Αντζουλάκος, Δ. (2009). Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις (2η εκδ.). Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- (4) Τριανταφύλλου, Ι. Σ. (2009). Συμβολή στη μελέτη ιδιοτήτων γήρανσης συστημάτων αξιοπιστίας και μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου με χρήση της Θεωρίας διατεταγμένων παρατηρήσεων, Διδακτορική Διατριβή. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- (5) Γεωργακάκος, Γ. Σ. (2002). Προηγμένα Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο Ποιότητας, Τόμος Α: Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας. Πάτρα: Εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου.
- (7) Κουκουβίνος, Χ. (2008). : “Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας”. ΕΜΠ

### Ξένη

- (2) Montgomery, D. C. (2013). Introduction to statistical quality control (7th Edition εκδ.). Hoboken, NJ: Wiley.
- (3) Gauri, S. K. and Chakraborty, S. (2008). Feature Based Recognition of Control Chart Patterns: A Generalized Approach, *Quality Technology & Quantitative Management* , 5, No. 3, 203-220.
- (6) Mitra, A. (2008). Control Charts for the Standard Deviation, *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. New York.: John Wiley and Sons.
- (8) Montgomery, D. C. (2005) .“Introduction to Statistical Quality Control”. New York: John Wiley and Sons.
- (9) Qiu, P. and Hawkins, D.M. (2003). A non parametric multivariate CUSUM procedure for detecting shifts in all directions, *Statistician*, 52, 151-164.
- (10) Chakraborti, S., Van Der Laan, P., & Bakir, S. (2001). Nonparametric Control Charts: An Overview and Some Results. *Journal of Quality Technology* , 33 (3), 304-315.
- (11) Chakraborti, S. (2011). Nonparametric (Distribution-Free) Quality Control Charts, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 1-27, New York : John Wiley and Sons..
- (12) Human, S., Chakraborti, S., & Smit, C. (2010). Nonparametric Shewhart-type sign control charts based on runs. *Communications in Statistics* , 39, 2046-2062.
- (13) Chakraborti, S. and Eryilmaz, S. (2007). A Nonparametric Shewhart-Type Signed-Rank Control Chart Based on Runs, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 36, Issue 2, 335-356.
- (14) Amin, R. W., Reynolds JR, M., & Bakir, S. (1995). Nonparametric control charts based on the sign statistic. *Communications in Statistics: Theory and Methods* , 24, 1597-1623.

- (15) BAKIR, S. T. and REYNOLDS, M. R., JR. (1979). A Nonparametric Procedure for Process Control Based on Within-Group Ranking". *Technometrics* 21, pp. 175-183.
- (16) AMIN, R. and SEARCY, A. J. (1991). "A Nonparametric Exponentially Weighted Moving Average Control Scheme". *Communications in Statistics Simulation and Computation* 20, pp. 1049--1072.
- (17) JANACEK, C. J. and MEIKLE, S. E. (1997). "Control Charts Based on Medians". *The Statistician* 46, pp. 19-31.
- (18) Chakraborti, S., van der Laan, P., & van de Wiel, M. (2004). A class of distributionfree control charts. *Journal of the Royal Statistical Society Series* , 53 (3), 443-462.
- (19) Balakrishnan, N., Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2009). Nonparametric control charts based on runs and Wilcoxon-type rank-sum statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3177-3192.
- (20) Jones-Farmer, L. A., Jordan, V. and Champ, C. W. (2009). Distribution-Free Phase I Control Charts for Subgroup Location, *Journal of Quality Technology*, **41**, 317-330.
- (21) Graham, M. A., Human, S. W. and Chakraborti, S. (2010). A Phase I nonparametric Shewhart-type control chart based on the median, *Journal of Applied Statistics*, **37**, 1795-1813.
- (22) BAKIR, S. T. (2004). "A distribution-free Shewhart quality control chart based on signed-ranks". *Quality Engineering* 16, 613-623.
- (23) Balakrishnan, N., Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2010). A Distribution-Free Control Chart Based on Order Statistics, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **39**, Issue 20, 3652-3677.
- (24) Lehmann, E. L. (1953). The power of rank tests. *The Annals of Mathematical Statistics* , 24, 23-43.
- (25) Triantafyllou, I. S. (2018). Nonparametric control charts based on order statistics: some advances. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* , 47 (9), 2684-2702.





