



## **ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**Τομέας Δομοστατικής**

### **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

## **ΕΝΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΟΞΩΝ ΥΠΟ ΣΗΜΕΙΑΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ**

**Φοιτήτρια**

**Κλεοπάτρα-Μυρσίνη Βαμβακούση**

**Επιβλέπων**

**Δημήτριος Σοφιανόπουλος Καθηγητής Π.Θ.**

**Βόλος, Σεπτέμβριος 2020**

## **Ευχαριστίες**

Ευχαριστώ θερμά τον Καθηγητή Δημήτριο Σοφιανόπουλο, Επιβλέποντα της Διπλωματικής Εργασίας μου για την επιστημονική καθοδήγηση του, την εμπιστοσύνη του και την υπομονή που μου προσέφερε σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους για την ψυχολογική και ηθική υποστήριξη τους και κυρίως για την υπομονή τους.

Βόλος, Σεπτέμβριος 2020

Κλεοπάτρα-Μυρσίνη Βαμβακούση

## **ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ**

<b><u>Περιεχόμενο</u></b>	<b><u>σελίδα</u></b>
<b>Σκοπός, Αντικείμενο και Διάρθρωση της Εργασίας</b>	1
<b>Κεφάλαιο 1: Τοξωτοί Φορείς: Ιστορική Αναδρομή, Μορφές και Φορτίσεις</b>	3
1.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή	3
1.2 Γεωμετρικές τόξων – Αδιαστατοποίηση	11
1.2.1 Κυκλικό και Παραβολικό τόξο	11
1.2.2 Ελλειπτικό τόξο	13
1.2.3 Ημιτονοειδές τόξο	14
1.2.4 Τόξο ανεστραμμένης αλυσοειδούς	14
1.3 Συνήθη στατικά φορτία σε επίπεδους τοξωτούς φορείς	17
1.4 Βιβλιογραφία	19
<b>Κεφάλαιο 2: Εντός Επιπέδου Ελαστική Ευστάθεια Τοξωτών Φορέων</b>	20
2.1 Σύντομη Βιβλιογραφική Ανασκόπηση-Γενικές Επισημάνσεις	20
2.2 Χαμηλά και Ψηλά Τόξα: Διαφορές και Διευκρινήσεις	25
2.3 Βιβλιογραφία	26
<b>Κεφάλαιο 3: Ευστάθεια ελαστικού τόξου υπό κατακόρυφο σημειακό φορτίο</b>	30
3.1 Καθορισμός του προβλήματος	30
3.2 Συναρτησιακό συνολικού δυναμικού	31
3.3 Εφαρμογή της Μεθόδου Galerkin	33
3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός	35
3.4.1 Αριθμητικά αποτελέσματα	35
3.4.2 Σχολιασμός και ποιοτική ερμηνεία των αποτελεσμάτων	51
3.5 Βιβλιογραφία	52
<b>Κεφάλαιο 4: Συμπεράσματα – Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα</b>	53
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	54

## Σκοπός, Αντικείμενο και Διάρθρωση της Εργασίας

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία πραγματεύεται την ελαστική ευστάθεια χαμηλών τόξων με απλές στηρίξεις, υπό την επήρεια κατακόρυφου φορτίου βαρύτητας. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος και των συνήθων τοξωτών κατασκευών της καθημερινής πράξης το πρόβλημα εστιάζεται σε παραβολικά τόξα με το φορτίο να δρα μέχρι την κορυφή αυτών.

Πιο συγκεκριμένα, εξετάζεται η επιρροή της θέσης του φορτίου στα κρίσιμα φορτία λυγισμού του τόξου και παράλληλα η διαφοροποίηση αυτών σε σχέση με την λυγηρότητα του φορέα και το ύψος στην στέψη.

Αναλυτικότερα, η Εργασία απαρτίζεται από τέσσερα Κεφάλαια και Παράρτημα. Στο Κεφάλαιο 1, που τιτλοφορείται «Τοξωτοί Φορείς: Ιστορική Αναδρομή, Μορφές και Φορτίσεις», πραγματοποιείται εκτενής αναφορά στην χρήση τοξωτών φορέων (ιδιαίτερα γεφυρών) παγκοσμίως και ιστορικά, ενώ επίσης παρατίθενται οι συνηθέστερες φορτίσεις των τόξων. Επιπρόσθετα, προσφέρονται οι συνηθέστερες γεωμετρικές τόξων και οι εξισώσεις των αντίστοιχων καμπυλών με αρχή των αξόνων στην αριστερή στήριξη.

Στη συνέχεια, το Κεφάλαιο 2, με τίτλο «Εντός Επιπέδου Ελαστική Ευστάθεια Τοξωτών Φορέων» περιέχει εκτενή αναφορά περί των διαφόρων τρόπων απώλειας της ευστάθειας των τόξων (ανάλογα με την φόρτιση), και προσδιορίζει τις διαφορές μεταξύ συμμετρικού και αντισυμμετρικού λυγισμού (ακαριαίου και διακλαδικού αντίστοιχα). Πέραν σύντομης ανασκόπησης σχετικών ευρημάτων άλλων ερευνητών, στο εν λόγω Κεφάλαιο περιγράφεται η διαφορά μεταξύ χαμηλών και ψηλών τόξων (και των τρόπων της ανάλυσης της ευστάθειας αυτών).

Στο Κεφάλαιο 3, το οποίο αποτελεί την κύρια συνεισφορά της παρούσας Εργασίας («Ευστάθεια ελαστικού τόξου υπό κατακόρυφο σημειακό φορτίο») μετά τον καθορισμό του προβλήματος, δηλαδή παραβολικό τόξο υπό σημειακό κατακόρυφο φορτίο, βρίσκεται μέσω ενεργειακής προσέγγισης η διαφορική εξίσωση ισορροπίας, η οποία αδιαστατοποιείται κατάλληλα. Η έντονα μη γραμμική αυτή εξίσωση επιλύεται μέσω της μεθόδου Galerkin με χρήση δύο συναρτήσεων βάσης και υπολογίζονται συμβολικά οι εκφράσεις των προσεγγιστικών κρίσιμων φορτίων τόσο για αμφιαρθρωτό όσο και για αμφίπακτο τόξο. Τα παραχθέντα αποτελέσματα, υπό μορφή καμπυλών θέσης φορτίου-κρίσιμου φορτίου βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με υφιστάμενα τοιαύτα (Plaut, R. H. (1979) “Influence of Load Position on the Stability

of Shallow Arches” *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 30, pp. 548-552.).

Τα σχετικά συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα αποτελούν το περιεχόμενο του Κεφαλαίου 4, η δε εργασία ολοκληρώνεται με Παράρτημα, στο οποίο δίδονται οι λίστες των προγραμμάτων του *Mathematica* βάσει των οποίων πραγματοποιήθηκε η όλη ανάλυση.

Τέλος τα Κεφάλαια 1-3 συνοδεύονται από Βιβλιογραφία σε χρονολογική σειρά.

## Κεφάλαιο 1 Τοξωτοί Φορείς: Ιστορική Αναδρομή, Μορφές και Φορτίσεις

### 1.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Το τόξο ως φορέας αποτελεί ένα ανθεκτικό, λειτουργικό και σίγουρα καλαίσθητο δομικό στοιχείο από την εποχή ακόμη της αρχαιότητας. Ενδεχομένως ο πιο παλιός υπάρχων τοξωτός φορέας είναι στις Μυκήνες και χρονολογείται περίπου στο 1300 π.Χ. Παρόλο που τα τόξα ως φορείς ήταν γνωστά και στους Ετρούσκους και στους αρχαίους Έλληνες, ήταν τελικά οι Ρωμαίοι που πλήρως συνειδητοποίησαν την προοπτική τους. Βέβαια το υλικό με το οποίο κατασκευάστηκαν οι τοξωτοί φορείς στις μακρινές, χρονικά, εκείνες εποχές ήταν οι λίθοι με ή χωρίς κονίαμα σύνδεσης.

Τα τόξα και γενικότερα οι τοξωτοί φορείς διαθέτουν μια ευρεία γκάμα εφαρμογών σε γέφυρες, σε φράγματα και σε κτίρια βιομηχανικά, εμπορικά και αναψυχής. Εκπροσωπούν τα κύρια δομικά στοιχεία σημαντικών και δαπανηρών κατασκευών, πολλές εκ των οποίων είναι μοναδικές. Οι σύγχρονες τάσεις στην αρχιτεκτονική εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό σε τοξωτά κτιριακά στοιχεία, λόγω της αντοχής τους και της ανυπέβλητης αισθητικής τους. Αυτή η υπεροχή τους αναδείχτηκε εμφαντικά όταν ο χυτοσίδηρος αρχικά και ο χάλυβας μεταγενέστερα κατέστησαν κύρια δομικά υλικά, με τα γνωστά του πλεονεκτήματα (υψηλή αντοχή, ολκιμότητα, ομοιομορφία, ευκολία ανέγερσης κλπ.). Αρκετά εντυπωσιακές είναι και μερικές ξύλινες τοξωτές κατασκευές, αυτές όμως δεν θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, λόγω της φύσης του προβλήματος που αναλύεται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία. Επίσης ο συνδυασμός χάλυβα και οπλισμένου σκυροδέματος σε τοξωτούς φορείς τυγχάνει σημαντικής εφαρμογής, πλην όμως εκφεύγει των σκοπών της Εργασίας.

Δεν είναι τυχαίο, ότι ορισμένες εφαρμογές χυτοσιδηρών και χαλύβδινων τοξωτών φορών αποτελούν σημείο αναφοράς της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, όπως αυτές που παρατίθενται ενδεικτικά αλλά όχι και δεσμευτικά στις παρακάτω Εικόνες, ενώ τα στοιχεία τους φαίνονται στα περιεχόμενα του Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1 Στοιχεία ορισμένων μνημειωδών τοξωτών φορέων από χυτοσίδηρο ή χάλυβα

Όνομασία	Έτος Κατασκευής	Υλικό	Περιοχή	Στοιχεία	Εικόνα
Alford	1824	Χυτοσίδηρος	Ποταμός Dee, Cheshire, England	Άνοιγμα 50 m	1.1
King	1880	Χυτοσίδηρος	Cleveland, Ohio, USA	Μεσαίο άνοιγμα 520 ft., αμφίπλευρα ακραία ανοίγματα 250 ft.	1.2
Dom Lui I	1886	Χυτοσίδηρος	Ποταμός Duro, μεταξύ Porto και Vila Nova de Gaia, Portugal	Άνοιγμα 172 m	1.3
San Michele (Padern)	1889	Χυτοσίδηρος	Bergamo, Italy, Adda river	Ως Εικόνα 1.5	1.4,1.5
Chaotianmen	2009	Δομικός Χάλυβας	Chingping, China	Μέγιστο άνοιγμα 552 m	1.6
Bayonne	1931	Δομικός Χάλυβας	Ποταμός Kill van Kull, σύνδεση μεταξύ New Jersey και Staten Island NY, USA	Μέγιστο άνοιγμα 510.54 m	1.7
Hell Gate	1912	Δομικός Χάλυβας	Bronx, Queens, NY, USA	Άνοιγμα 310 m	1.8
New River Gorge	1977	Δομικός Χάλυβας	Fayetteville, West Virginia, United States	Άνοιγμα 518 m	1.9



*Εικόνα 1.1 Γέφυρα Alford*



*Εικόνα 1.2 Γέφυρα King*

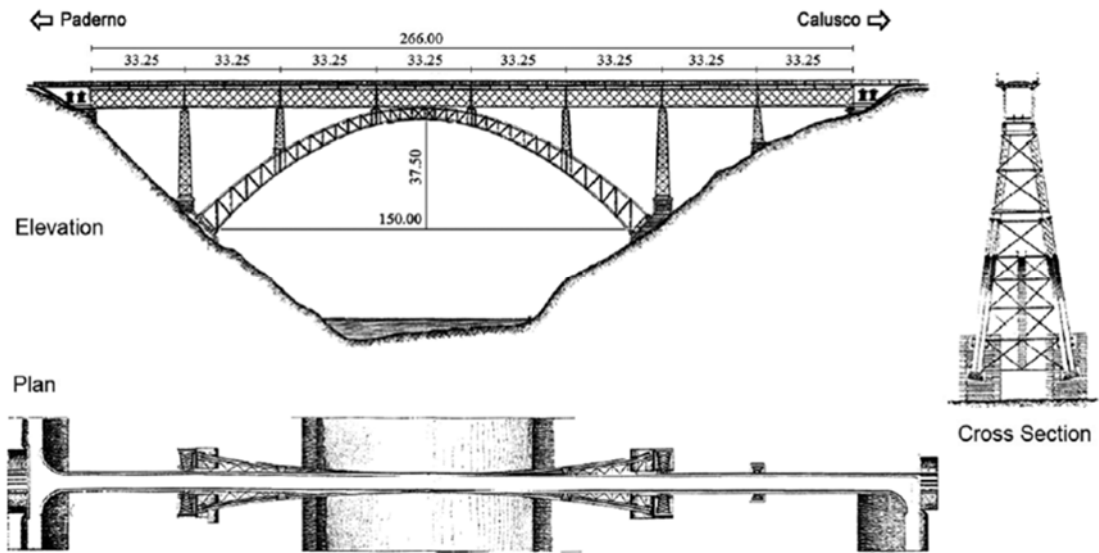




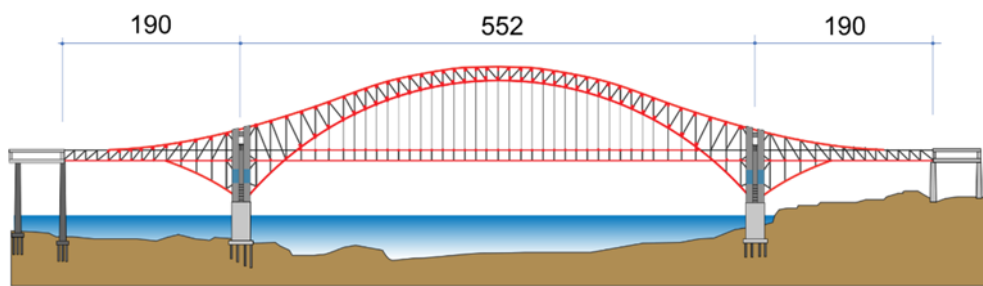
*Εικόνα 1.3 Γέφυρα Dom de Lui I*



*Εικόνα 1.4 Γέφυρα San Michele*



Εικόνα 1.5 Γέφυρα San Michele (Όψη – Τομή)



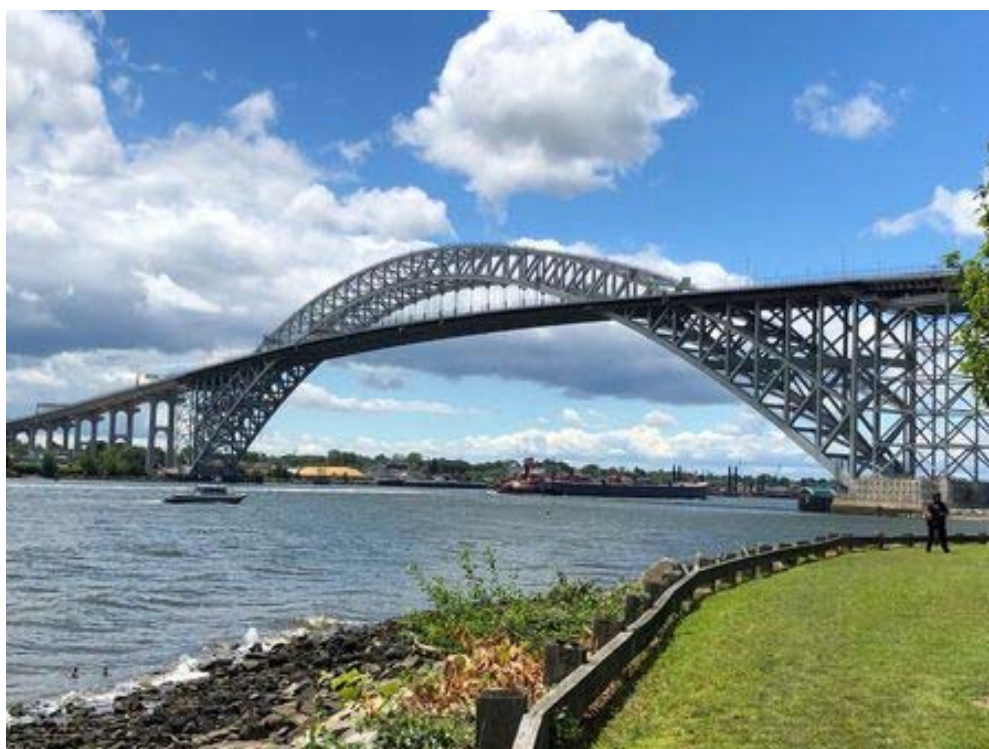
(α)



(β)

Εικόνα 1.6 Γέφυρα Chaotianmen: (α) όψη, (β) φωτογραφία



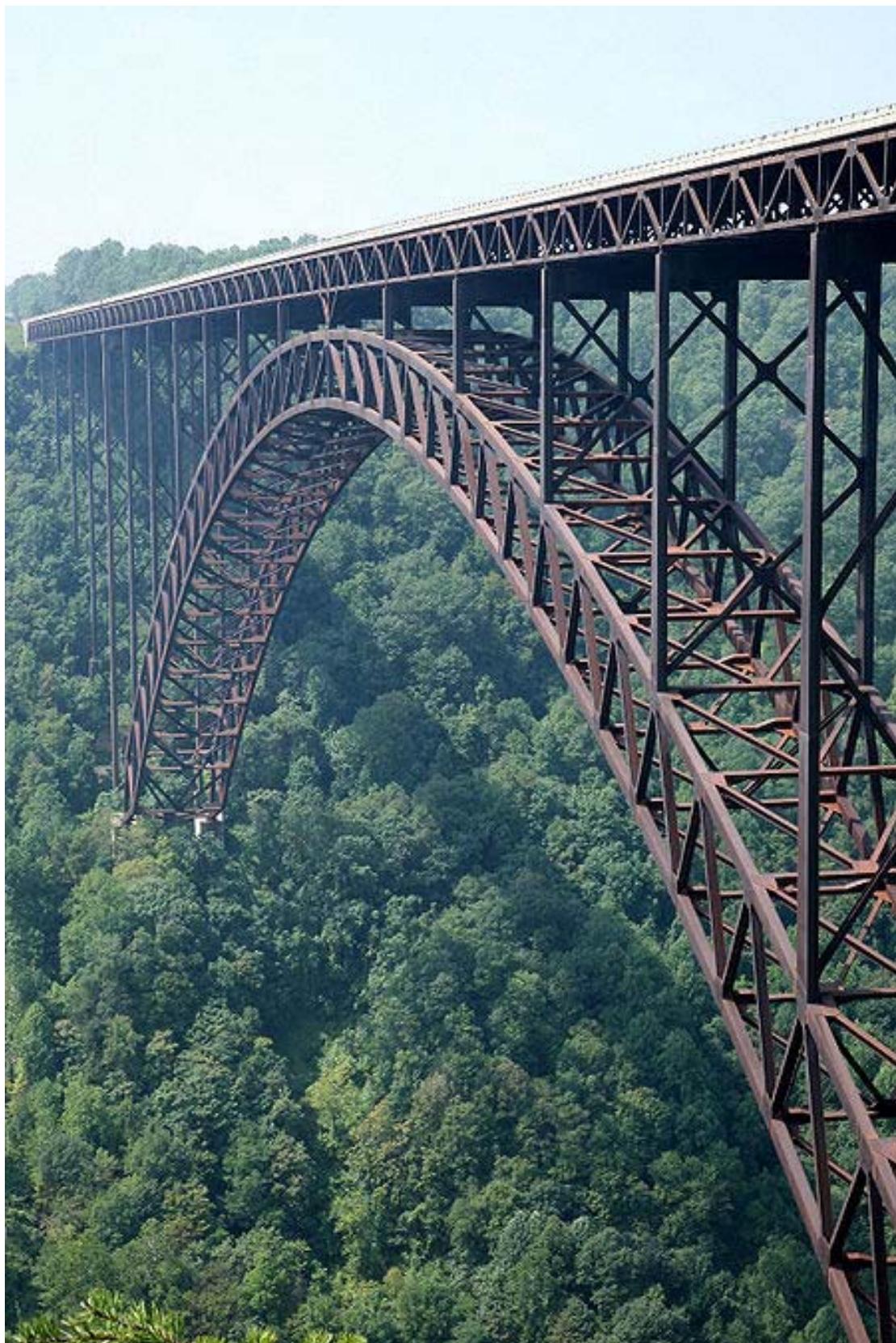


*Εικόνα 1.7 Γέφυρα Bayonne*



*Εικόνα 1.8 Γέφυρα Hell Gate*





*Εικόνα 1.9 Γέφυρα New River Gorge*

Φυσικά, υπάρχουν και άλλες εφαρμογές τοξωτών φορέων, πέραν αυτών της γεφυροποιίας. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μνημειακή τοξωτή κατασκευή γνωστή ως *Gateway to the West* (Πύλη για τη Δύση), κατασκευασμένη από ανοξείδωτο χάλυβα στο Saint Louis, Missouri, USA. Ολοκληρώθηκε το 1965, έχει σχήμα δύο συμμετρικών ημι-μερών ανεστραμμένης ελικοειδούς, με ύψος στη στέψη (κορυφή) 192 m και απόσταση στηρίζεων επί του εδάφους (άνοιγμα) επίσης 192 m. Η κατασκευή απεικονίζεται στην Εικόνα 1.10 και στο εικονίδιο του Σχήματος 1.1.



*Εικόνα 1.10 Πύλη για τη Δύση – φωτογραφία*



*Σχήμα 1.1 Πύλη για τη Δύση – clipart*



Περαιτέρω εφαρμογές τόξων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού είναι η αντιστήριξη του όγκου των γαιών σε σήραγγες, με μορφή συνήθως παραβολική ή ελλειψοειδή (σπάνια κυκλική). Επίσης, τα τοξωτά δομικά στοιχεία έχουν ευρεία εφαρμογή σε στάδια (ως π.χ. το Ολυμπιακό Αθλητικό Κέντρο της Αθήνας, το στάδιο Webley στο Λονδίνο, η Kölnarena στην Κολωνία, χωρίς να παραλειφθεί και το Ludwig Erhard Haus (Charlottenburg, στην ανατολική πλευρά του Βερολίνου), αμφότερα στη Γερμανία.

## **1.2 Γεωμετρικές τόξων - Αδιαστατοποίηση**

Θεωρώντας αρχή καρτεσιανών συντεταγμένων εντός επιπέδου στην αριστερή στήριξη ενός τόξου, οι σχετικές γεωμετρικές καμπύλες από πλευράς σχήματος και εξίσωσης παρατίθενται σε ό,τι ακολουθεί. Με βάση το πρόβλημα που αφορά την παρούσα Εργασία, η θέση του κατακόρυφου σημειακού φορτίου βαρύτητας χαρακτηρίζεται ως  $X_P$ , η εξίσωση της καμπύλης ως  $Y_0(X)$ , το ύψος στη στέψη του τόξου ως  $f$  και το άνοιγμα (οριζόντια απόσταση στηρίξεων)  $L$ . Υφίστανται τρεις βασικοί τύποι γεωμετριών. Ο πρώτος αφορά κωνικές τομές (κύκλους, ελλείψεις, παραβολές, υπερβολές), ο δεύτερος την ανεστραμμένη βαρυτική αλυσοειδή και ο τρίτος την ημιτονοειδή μορφή. Το τόξο υπερβολής δεν θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, καθόσον δεν τυγχάνει εφαρμογών, εξ όσων γνωρίζουμε. Για κάθε μορφή τόξου καταγράφεται η εξίσωση της καμπύλης και κατόπιν όλα τα γεωμετρικά μεγέθη αδιαστατοποιούνται ως προς το άνοιγμα  $L$ . Κατά συνέπεια, σε κάθε περίπτωση, εισάγεται η αδιάστατη συντεταγμένη

$$x = \frac{X}{L} \quad (1.1)$$

η αδιάστατη θέση του φορτίου

$$x_P = \frac{X_P}{L} \quad (1.2)$$

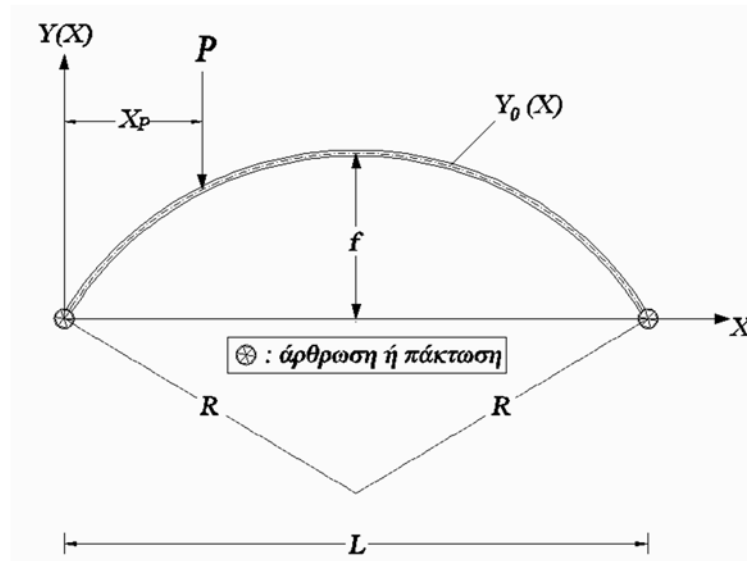
και η αδιαστοποιημένη εξίσωση της καμπύλης του τόξου

$$y_0(x) = Y_0(X)/L \quad (1.3)$$

### **1.2.1 Κυκλικό και Παραβολικό τόξο**

Σύμφωνα με τη γεωμετρία και τη σύμβαση προσήμων του Σχήματος 1.2, η εξίσωση ενός κυκλικού τόξου γράφεται ως

$$Y_0(X) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - X\right)^2} - R + f, 0 \leq X \leq L \quad (1.4)$$

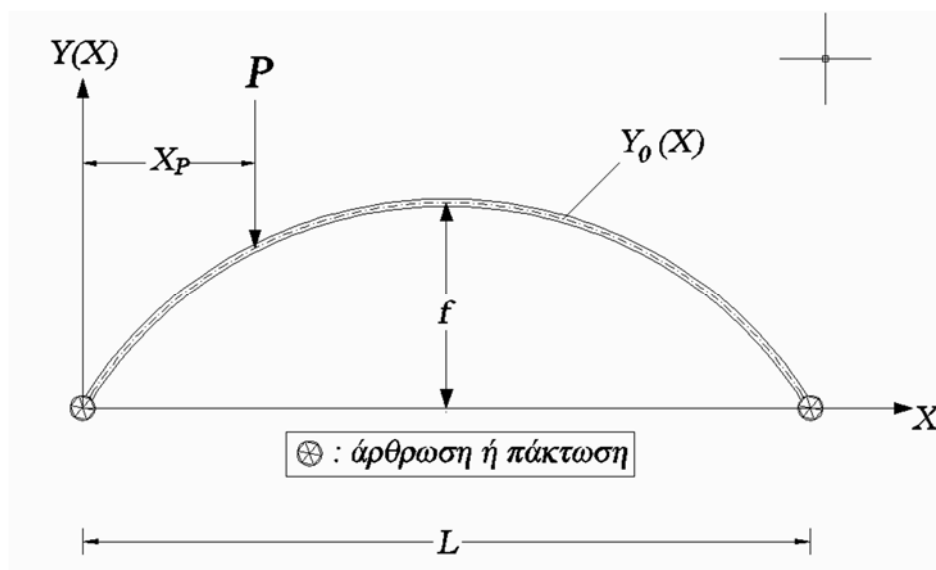


Σχήμα 1.2 Κυκλικό τόξο

η οποία, με κατάλληλες τροποποιήσεις λαμβάνει τη μορφή

$$Y_0(X) = -\frac{4f}{L^2}X(X - L), 0 \leq X \leq L \quad (1.5)$$

που επίσης αναπαριστά την εξίσωση καμπύλης ενός παραβολικού τόξου, όπως αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα 1.3, που έπεται. Τούτο ήταν αναμενόμενο, καθόσον η παραβολή αποτελεί υπερσύνολο του κύκλου, ως κωνική τομή.



Σχήμα 1.3 Παραβολικό τόξο

Αν τεθεί  $c = f/L$ , η αδιάστατη έκφραση αμφοτέρων των καμπυλών λαμβάνει τη μορφή

$$y_0(x) = 4cx(1 - x), 0 \leq x \leq 1 \quad (1.6)$$

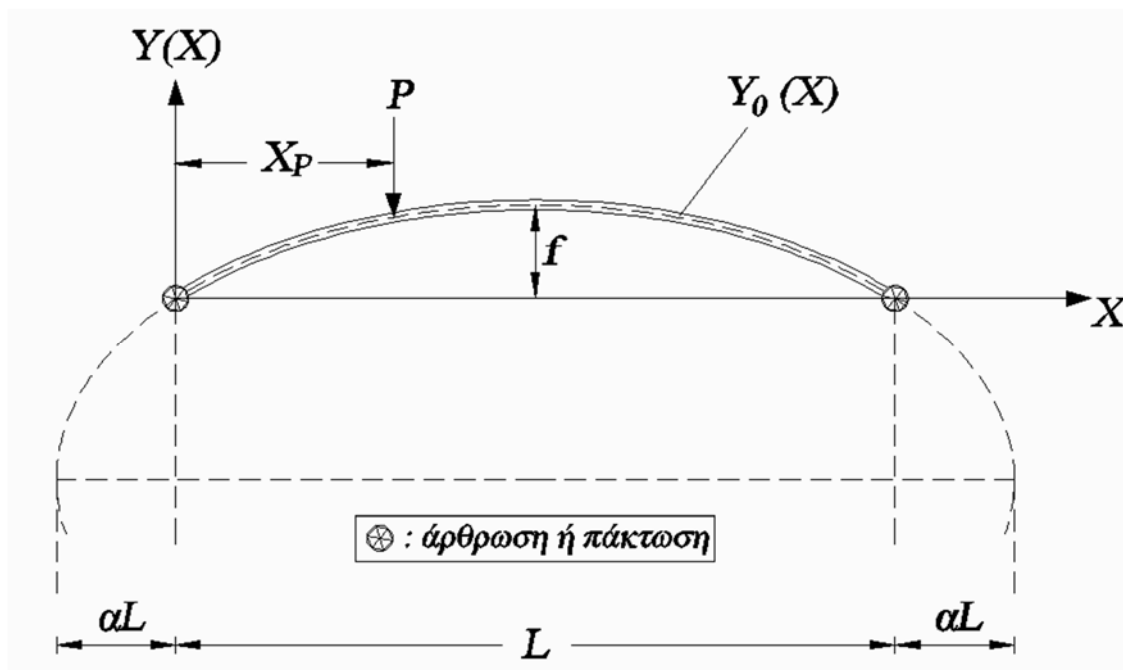
### 1.2.2 Ελλειπτικό τόξο

Αυτή η μορφή τόξου αποτελεί ιδιαίζουσα περίπτωση, καθόσον στην εξίσωση της σχετικής καμπύλης υπεισέρχεται και ο παράγων  $\alpha$ , σύμφωνα με το Σχήμα 1.4. Πιο συγκεκριμένα, η μισή έλλειψη θεωρείται υλοποιήσιμη κατασκευαστικά, προς αποφυγή αρνητικών καμπυλοτήτων. Το μήκος της «μεγάλης» διαμέτρου της έλλειψης ισούται με  $L(2\alpha + 1)$ , με αποτέλεσμα η τελική αδιάστατη έκφραση της καμπύλης του τόξου να προκύπτει ως

$$y_0(x) = c - \gamma(\gamma/\varepsilon) \left[ \varepsilon^2 - \left\{ x - \frac{1}{2} \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (1.7)$$

όπου

$$\gamma = \frac{\varepsilon c}{\varepsilon - (\alpha + \alpha^2)^{1/2}}, \varepsilon = \frac{1 + 2\alpha}{2}, c = f/L \quad (1.8)$$



Σχήμα 1.4.Ελλειπτικό τόξο

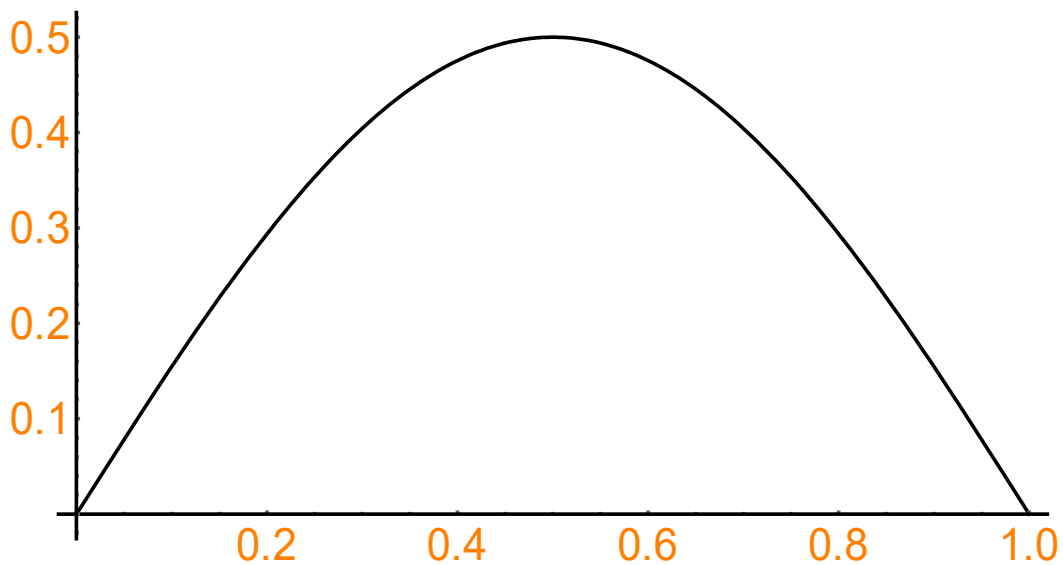


### 1.2.3 Ημιτονοειδές τόξο

Η αδιάστατη καμπύλη ενός ημιτονοειδούς ημικύματος με μήκος  $L$  και μέγιστη κατακόρυφη συντεταγμένη ίση με  $f$ , σύμφωνα με τα ήδη εισαχθέντα αδιάστατα μεγέθη, γράφεται ως

$$y_0(x) = c \sin(\pi x), 0 \leq x \leq 1 \quad (1.9)$$

Χαρακτηριστική μορφή ενός τέτοιου τόξου δίνεται στο Σχήμα 1.5, προϊόν του *Mathematica* [1], για  $c = 0.5$ .



Σχήμα 1.5 Ημιτονοειδές τόξο

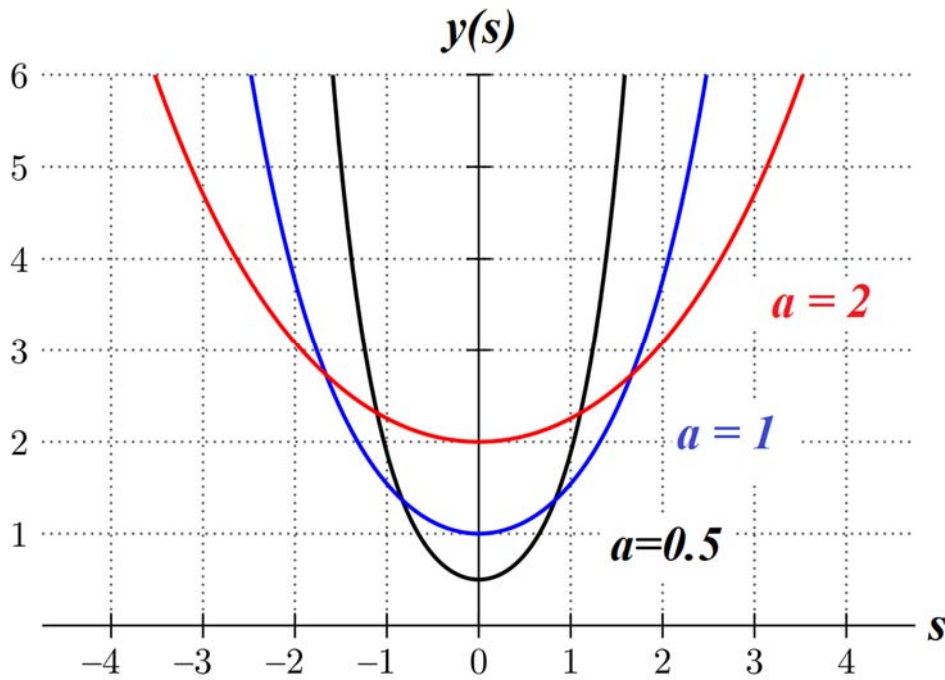
### 1.2.4 Τόξο ανεστραμμένης αλυσοειδούς

Η αλυσοειδής (catenary) είναι η καμπύλη που λαμβάνει μια αλυσίδα ή ένα καλώδιο, όταν αναρτάται από τα άκρα, λόγω μόνο του ίδιου βάρους.

Η εξίσωση που περιγράφει την αλυσοειδή είναι:

$$y(s) = a \cosh\left(\frac{s}{a}\right) \quad (1.10)$$

όπου η οριζόντια συντεταγμένη  $s$  μετριέται από το χαμηλότερο σημείο της καμπύλης. Δηλαδή η όλη καμπύλη διαθέτει ένα ελάχιστο στη θέση  $s=0$ , ενώ η τιμή  $a=0$  οδηγεί σε απροσδιόριστη κατάσταση. Πλην όμως, αν χαραχθούν καμπύλες αλυσοειδούς σύμφωνα με τη σχέση (1.10), για διάφορες μη μηδενικές τιμές της παραμέτρου  $a$ , διαπιστώνεται άμεσα ότι αυτή λειτουργεί ως παράγων κλίμακας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6 Αλυσσοειδείς για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $a$

Η ανεστραμμένη αλυσσοειδής θα είναι η συμμετρική της πραγματικής ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ελάχιστο της. Τότε, με το υφιστάμενο σύστημα αξόνων, η καμπύλη θα είναι προφανώς  $y(s) = -a \cosh\left(\frac{s}{a}\right)$ . Έστω ότι το σχετικό τόξο στηρίζεται συμμετρικά και έχει οριζόντιο άνοιγμα ίσο με  $L$ . Τότε η αριστερή στήριξη θα έχει τετμημένη  $s_a = -L/2$  και η δεξιά  $s_d = L/2$ . Άρα η απόσταση από την κορυφή του τόξου μέχρι την οριζόντια γραμμή στήριξης θα είναι ίση με

$$y\left(\pm\frac{L}{2}\right) = -a \cosh\left(\frac{L}{2a}\right) \quad (1.11\alpha)$$

Για να μεταφερθεί η αρχή των αξόνων στην αριστερή στήριξη, με τον αρχικό προσανατολισμό τους, θα πρέπει να εκτελεστεί ένας ομαλός μετασχηματισμός συντεταγμένων, και η συνάρτηση  $Y_0(x)$  που θα προκύψει, όπου  $x$  η νέα τετμημένη, θα πρέπει να διαθέτει τις εξής ιδιότητες:

$$Y_0(0) = Y_0(L) = 0 \quad (1.11\beta)$$

$$Y_0\left(\frac{L}{2}\right) = a \cosh\left(\frac{L}{2a}\right) \quad (1.11\gamma)$$

Μια τέτοια συνάρτηση είναι η ακόλουθη

$$Y_0(X) = a * \cosh\left[\frac{L}{2a}\right] \left(2 - \cosh\left[\frac{2abX/L-ab}{a}\right]\right), b = \text{ArcCosh}[2] \quad (1.12)$$

η οποία, όπως φαίνεται από τους παρακάτω συμβολικούς υπολογισμούς [1], ικανοποιεί όλες τις συνθήκες.

```
ClearAll[a,L,t1,t2,t3,X,Y0]
```

```
b=ArcCosh[2];
```

```
Y0=FullSimplify[a*Cosh[L/(2a)](2-Cosh[(2a b X/L- a b)/a])];
```

```
t1=Y0/.X->0
```

```
t2=Y0/.X->L
```

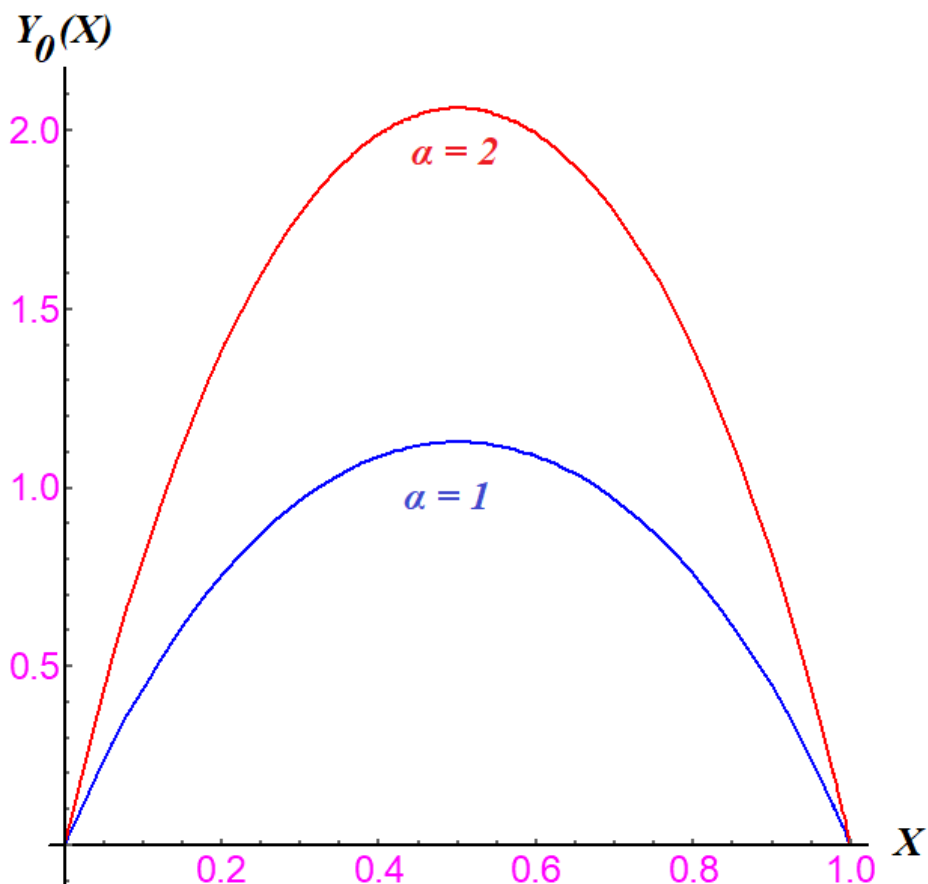
```
t3=Y0/.X->L/2
```

```
0
```

```
0
```

```
a Cosh[L/(2 a)]
```

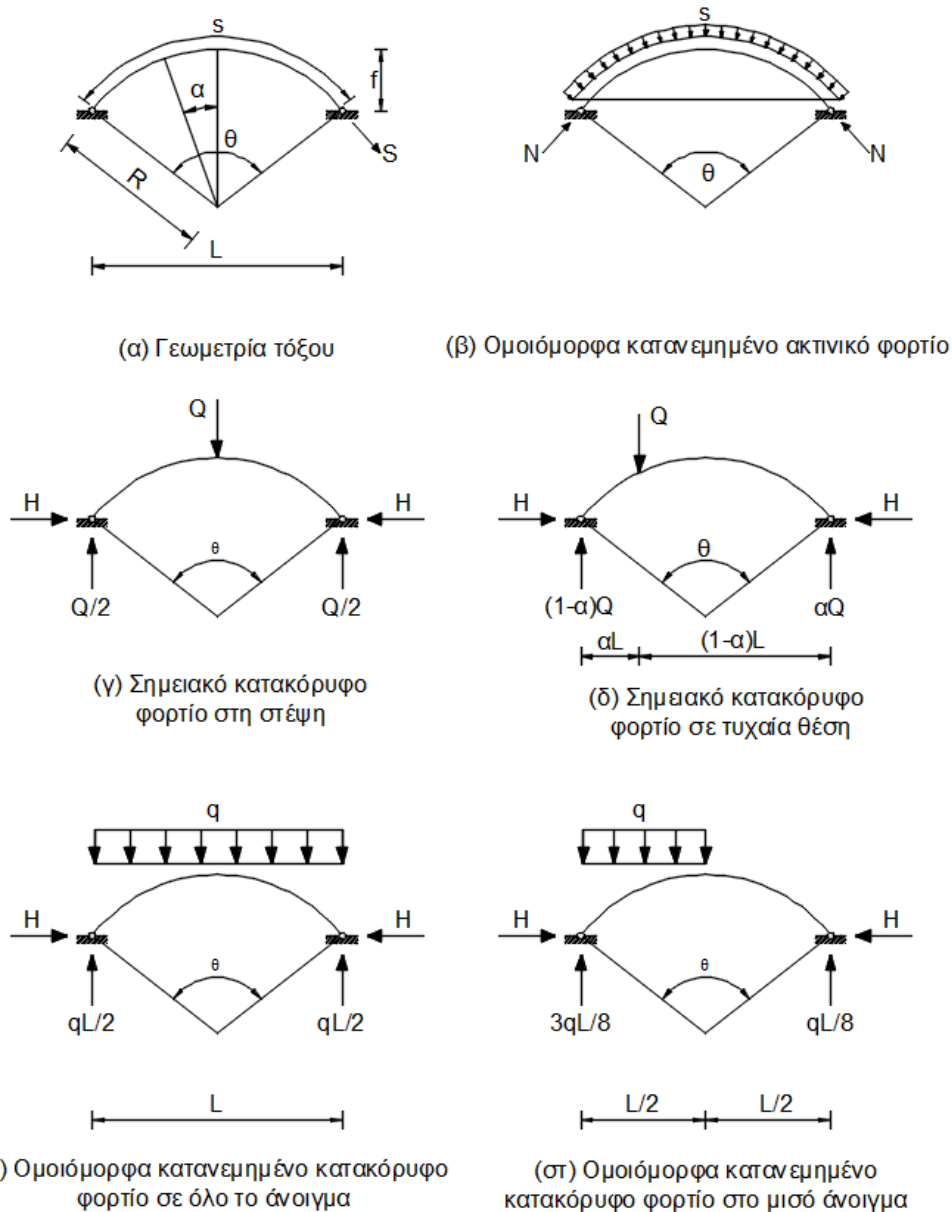
ενώ δύο χαρακτηριστικές σχετικές καμπύλες φαίνονται στο Σχήμα 1.7.



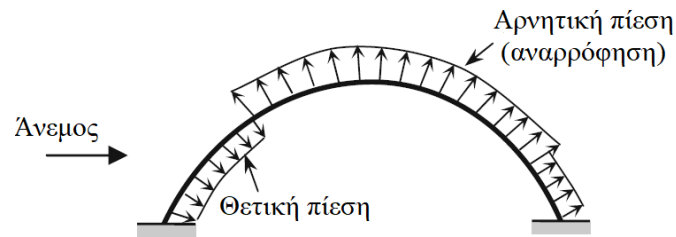
Σχήμα 1.7 Τόξα ανεστραμμένης ελικοειδούς για δύο τιμές της παραμέτρου  $\alpha$

### 1.3 Συνήθη στατικά φορτία σε επίπεδους τοξωτούς φορείς

Αν θεωρηθεί και η ανεμοπίεση ως ψευδο-στατικό φορτίο, ένας τοξωτός φορέας μπορεί να φορτιστεί με διάφορους (συνήθως έμμεσους και σπανιότερα άμεσους) τρόπους. Στο Σχήμα 1.8 παρατίθενται έξι (6) κλασσικές περιπτώσεις τέτοιων φορτίσεων, ενώ στο Σχήμα 1.9 η δράση της πλευρικής ανεμοπίεσης, που κάλλιστα μπορεί να δρα ταυτόχρονα με κάποιες από τις άλλες καταστάσεις. Τα τόξα μπορεί να είναι είτε αμφιαρθρωτά είτε αμφίπακτα, οπότε τα εν λόγω Σχήματα είναι απόλυτα ενδεικτικά [2].

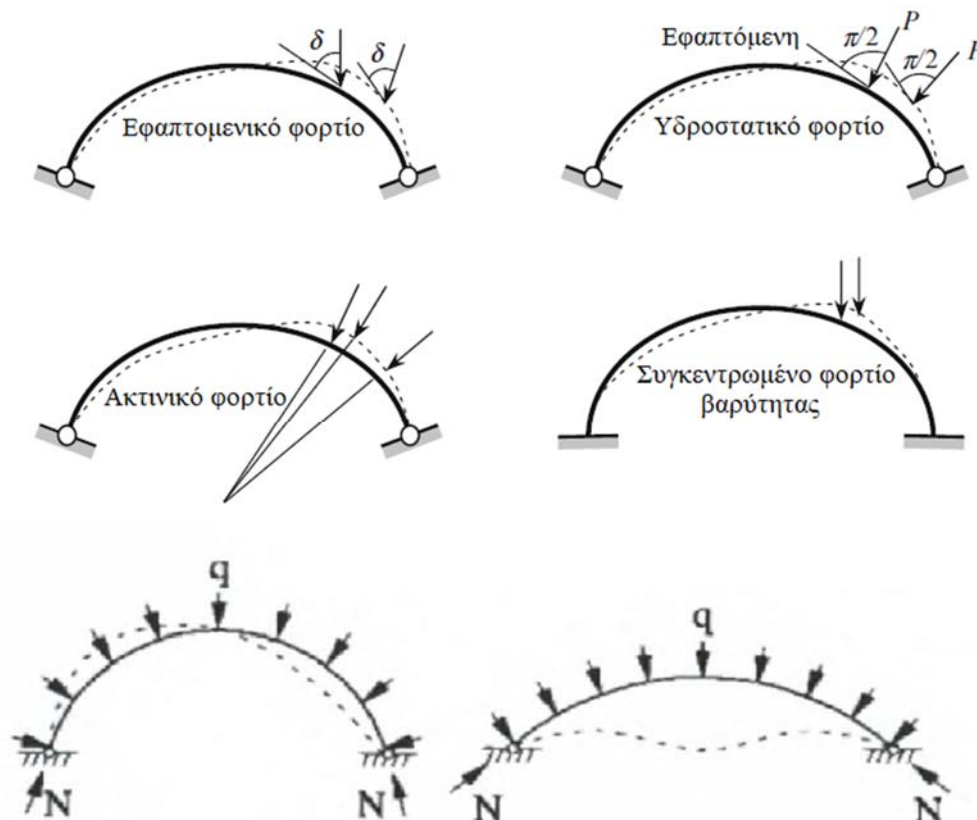


Σχήμα 1.8 Κλασσικές περιπτώσεις στατικών φορτίσεων τοξωτών φορέων εντός του επιπέδου τους



Σχήμα 1.9 Κατανομή πλευρικής ανεμοπίεσης σε τόξα

Οι πραγματικές (ρεαλιστικές) στατικές φορτίσεις, χωρίς απώλεια της γενικότητας, είναι είτε συμμετρικές ή μη συμμετρικές. Αυτές, ανάλογα με τη γεωμετρία του τόξου, τα αδρανειακά και άλλα χαρακτηριστικά του απαραμόρφωτου φορέα αλλά και το είδος της διατομής μπορούν να οδηγήσουν σε διάφορων τύπων παραμορφώσεις, στις οποίες θα υπάρξει διεξοδική αναφορά, σε σχέση με τον ελαστικό λυγισμό, στο Κεφάλαιο 2. Ενδεικτικά, στο Σχήμα 2.10, φαίνονται κάποιες τέτοιες παραμορφώσεις [2, 3].



Σχήμα 1.10 Ενδεικτικές παραμορφώσεις τόξων λόγω διάφορων φορτιακών καταστάσεων [2]

#### 1.4 Βιβλιογραφία

- [1] Mathematica 12, *The world's definitive system for modern technical computing*, Wolfram Research Inc., The Wolfram Centre, Lower Road, Long Hanborough, Oxfordshire, OX29 8FD, United Kingdom. [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)
- [2] Karnovsky, I.A. (2012), *Theory of Arched Structures*, Strength, Stability, Vibration, Springer Science, DOI:10.1007/978-1-4614-0469-9.
- [3] Bazant, Z.P., Cedolin, L. (2003 unabridged republication of the original, published by Oxford University Press Inc., 1991), *Stability of Structures*, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, Dover Publications Inc., Mineola, New York, USA.

## Κεφάλαιο 2      Εντός Επιπέδου Ελαστική Ευστάθεια Τοξωτών Φορέων

### 2.1      Σύντομη Βιβλιογραφική Ανασκόπηση – Γενικές Επισημάνσεις

Ο ελαστικός (και όχι μόνο) λυγισμός καμπύλων φορέων γενικότερα αλλά και των τόξων ειδικότερα απασχολεί επί μακρόν την επιστημονική κοινότητα των Μηχανικών. Σύμφωνα με τις συστηματικές πληροφορίες από το πρόσφατο βιβλίο του του Karnovsky [28], η μαθηματική βάση της θεωρίας ευστάθειας των τόξων δόθηκε από τον Kirchhoff το 1876, ενώ η πρώτη συστηματική ανάλυση της ευστάθειας ισορροπιών των φορέων αυτών πραγματοποιήθηκε από τον Bryan το 1888. Άλλοι διακεκριμένοι ερευνητές με σημαντική συνεισφορά στο όλο θέμα ήταν οι Southwell, Nikolai, Timoshenko [1], Dinnik, Morgaevsky, Smirnov και Pavlenko.

Από την «ηρωική» εκείνη εποχή της Μηχανικής και των Μαθηματικών και μετά, έχει δημοσιευθεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός εργασιών που αφορούν το τρέχον αντικείμενο, με αποτέλεσμα μια διεξοδική επ' αυτών αναφορά να μην είναι δυνατή, τουλάχιστον στα πλαίσια της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας. Πλην όμως, όλες αυτές οι εργασίες, παρόλο που βασίστηκαν σε μοντέρνες υπολογιστικές τεχνικές και μεθόδους, είχαν και θα συνεχίσουν να έχουν ως υπόβαθρο τα ευρήματα των παραπάνω πρωτοπόρων. Από τις πλέον σημαντικές συνεισφορές της βιβλιογραφίας μνημονεύεται το εξαιρετικό βιβλίο των Bazant και Cedolin [19], από το περιεχόμενο του οποίου αντλήθηκαν σημαντικές πληροφορίες.

Ο μεγαλύτερος αριθμός δημοσιεύσεων σχετικών με το τρέχον επιστημονικό αντικείμενο αφορούν κυρίως κυκλικά και δευτερευόντως άλλου σχήματος (παραβολικά ή ελλειπτικά) τόξα, τα οποία έχουν μικρό λόγο ύψους στη στέψη προς άνοιγμα. Αυτά τα τόξα καλούνται *χαμηλά* (shallow, flat arches) και διαφέρουν από πλευράς συμπεριφοράς σε ευστάθεια και μεθόδου ανάλυσης της με τα *ψηλά τόξα* (high arches). Οι διαφορές αυτές θα καταδειχθούν στη συνέχεια.

Ιδιαίτερη ώθηση με εξαιρετικά ευρήματα για τον λυγισμό των τόξων δόθηκε τα τελευταία 30 χρόνια από την ερευνητική ομάδα του School of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney Australia. Η ομάδα αυτή απαρτιζόταν και ακόμα συνεχίζει σε κάποιο βαθμό να απαρτίζεται από τους Ομότιμους Καθηγητές N.S. Trahair και F. Tin-Loi και τους εν ενεργεία Καθηγητές M.A. Bradford και B. Uy. Με χρονολογική σειρά, οι Papangelis και Trahair το 1988 [8] μελέτησαν μέσω διαδικασίας πεπερασμένων στοιχείων τον στρεπτοκαμπτικό λυγισμό κυκλικών

τόξων μονοσυμμετρικών διατομών υπό συγκεντρωμένα φορτία. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης συγκρίθηκαν με πειραματικά και βρέθηκαν σε πολύ καλή συμφωνία.

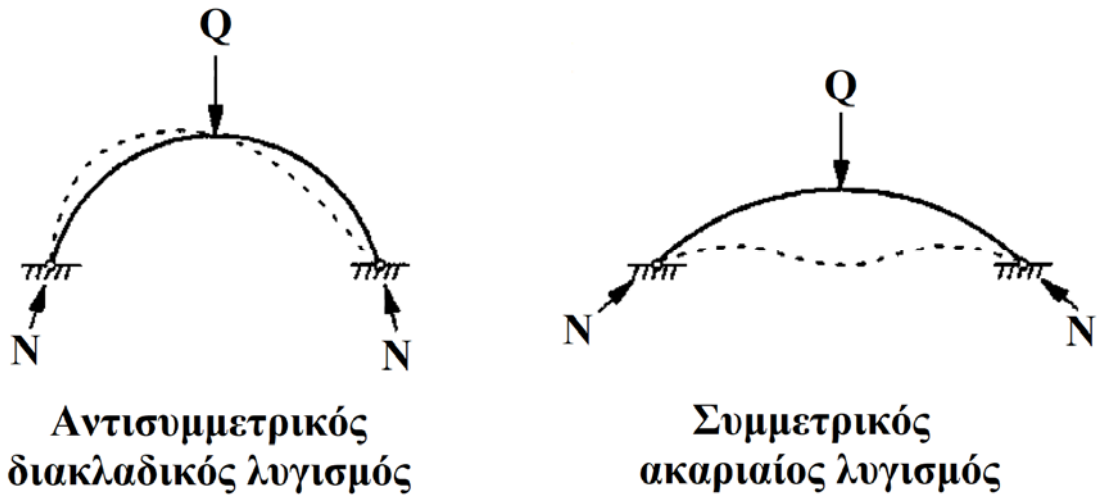
Αργότερα, το 1996, οι Pi και Trahair [12] προέβησαν σε τρισδιάστατη μη γραμμική ανάλυση ελαστικών τόξων με χρήση ενός μοντέλου καμπύλων πεπερασμένων στοιχείων, καμπυλότητες υψηλής τάξης και πολυωνυμικές συναρτήσεις χαμηλής τάξης για τις μετατοπίσεις. Το μοντέλο αποδείχτηκε αξιόπιστο, συγκρίθηκε αποτελεσματικά με υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα και, μεταξύ άλλων, εφαρμόστηκε για την ελαστική μεταλυγισμική συμπεριφορά τόξων. Ειδικότερα, για χαμηλά τόξα υπό κατακόρυφο σημειακό φορτίο κοντά στη στέψη, βρέθηκαν με ικανοποιητική ακρίβεια οι δρόμοι ισορροπίας (με ένα ή περισσότερα οριακά σημεία) τόσο σε απλές όσο και πιο σύνθετες προσομοιώσεις

Δύο χρόνια αργότερα, οι Pi και Trahair [14] μελέτησαν την εντός επιπέδου λυγισμική και μεταλυγισμική απόκριση αμφιαρθρωτών ελαστικών τόξων, εκ νέου με χρήση του προαναφερθέντος μοντέλου καμπύλων πεπερασμένων στοιχείων. Εξετάστηκαν οι πιθανοί τύποι μεταλυγισμικής συμπεριφοράς υπό ακτινικό ομοιόμορφα κατανομημένο κυκλικής μορφής χαμηλών τόξων, απλό οριακό σημείο, ακαριαίος λυγισμός, απώλεια της ευστάθειας μέσω διακλάδωσης, γεγονός που βρέθηκε ότι λαμβάνει χώραν πέραν μιας συγκεκριμένης τιμής του λόγου ύψους προς άνοιγμα.

Λίγο αργότερα, οι ίδιοι συγγραφείς [15] ασχολήθηκαν με την ανελαστική πλευρική αντοχή και την σχετική απόκριση (πριν και μετά το λυγισμό) και κατέδειξαν τη διαφορά μεταξύ ελαστικού και ανελαστικού λυγισμού, με έμφαση στην ταυτόχρονη δράση κάμψης και θλίψης.

Η εργασία των Bradford κ.α. [16] είχε ως αντικείμενο την εντός επιπέδου ελαστική ευστάθεια χαμηλών τόξων συμμετρικής διατομής υπό κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο στη στέψη. Τονίστηκε ότι (α) οι κλασικές μέθοδοι πρόβλεψης των ελαστικών φορτίων λυγισμού θεωρούν διακλάδωση από έναν προλυγισμικό δρόμο ισορροπίας σε έναν ορθογωνικό μεταλυγισμικό, (β) ο δρόμος ισορροπίας πριν το λυγισμό περιλαμβάνει τόσον αξονικές όσο και εγκάρσιες μετατοπίσεις, οπότε το τόξο υπόκειται τόσο σε αξονική θλίψη όσο και σε κάμψη πριν το λυγισμό, και η απόκριση μπορεί να καταστεί μη γραμμική. Για την αντιμετώπιση των προαναφερθέντων οι συγγραφείς ανέπτυξαν μια μεθοδολογία βασισμένη στην αρχή των δυνατών έργων και ελήφθησαν αναλυτικές λύσεις για τον αντισυμμετρικό διακλαδικό λυγισμό αλλά και τον συμμετρικό ακαριαίο λυγισμό υπό τη συγκεκριμένη φόρτιση. Οι δύο αυτές μορφές λυγισμού απεικονίζονται στο Σχήμα 2.1, μετάφραση του σχήματος 2 της εργασίας.





*Σχήμα 2.1 Μορφές λυγισμού χαμηλού τόξου υπό σημειακό κατακόρυφο φορτίο στην κορυφή*

Το ίδιο έτος, οι Pi κ.α. [17] ασχολήθηκαν με την εντός επιπέδου ευστάθεια κυκλικών τόξων τυχαίας διατομής (τόσο αμφιαρθρωτών όσο και αμφίπακτων) υπό ακτινικό φορτίο, όπου και πάλι διαπιστώθηκαν οι δύο μορφές λυγισμού που προαναφέρθηκαν, μέσω εφαρμογής της ενεργειακής μεθόδου και μη γραμμικής ανάλυσης. Αφού επαληθεύθηκαν τα ευρήματα της θεωρητικής ανάλυσης με παρόμοια της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, καθορίστηκαν και τα κριτήρια για την εμφάνιση των θεμελιωδών αυτών μορφών λυγισμού

Ένα έτος αργότερα, το 2003, οι Pi και Bradford [18] παρουσίασαν (και εν μέρει επεξεργάζονται) ένα ορθολογιστικό καμπύλο πεπερασμένο στοιχείο για την τρισδιάστατη μη γραμμική ελαστο-πλαστική ανάλυση τόξων υπό κεντρικό κατακόρυφο φορτίο. Παρόμοια ήταν και η εργασία του Dawe [4]. Τα σπουδαία ευρήματα της εν λόγω εργασίας μπορούν να ληφθούν από το πλήρες κείμενο αυτής, εκφεύγουν όμως των σκοπών της Διπλωματικής.

Οι Pi κ.α. (2007) [20] είχαν ως αντικείμενο της έρευνας τους την μη γραμμική ανάλυση και το λυγισμό ελαστικά εδραζόμενων κυκλικών χαμηλών τόξων, τα οποία φορτίζονταν από ομοιόμορφο ακτινικό φορτίο. Εφάρμοσαν εκ νέου ενεργειακή προσέγγιση και έδωσαν αναλυτικές λύσεις για τη μη γραμμική απόκριση και τον μη γραμμικό λυγισμό τόξων με ίδιες οι διαφορετικές ελαστικές στηρίξεις. Βρέθηκε ότι η ευκαμψία (flexibility) και η «χαμηλότητα» του τόξου διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην όλη δομική συμπεριφορά. Υπολογίστηκε το όριο της τιμής της χαμηλότητας, το

οποίο διαφοροποιεί την απόκριση σε λυγισμό (μεταξύ διακλαδικού και ακαριαίου). Τα αποτελέσματα της έρευνας συγκρίθηκαν με επιτυχία με αυτά της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Οι Pi κ.α. [21] προέβησαν σε μη γραμμικές αναλύσεις γεωμετρίας και υλικού ελαστικά δεσμευμένων τόξων, την ίδια ως άνω χρονολογία. Τονίστηκε ότι ένα τόξο συχνά συνδέεται με άλλα δομικά στοιχεία, τα οποία συμμετέχουν στην απόκριση τους και μπορεί να την επηρεάσουν σημαντικά. Επίσης, τονίστηκε η δυνατότητα επεξεργασίας του προβλήματος μέσω της θεωρίας των καμπύλων δοκών.

Οι Gengshu κ.α. [23] ανέλυσαν το πρόβλημα του εντός επιπέδου μη γραμμικού λυγισμού μη χαμηλών (deep) τόξων, λαμβάνοντας υπόψη διαμήκειες τάσεις. Το φορτίο ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένο ακτινικό και οι φορείς κυκλικοί. Καταδείχτηκαν οι ανεπάρκειες μερικών απλουστευτικών υποθέσεων άλλων ερευνών και ιδιαίτερα αυτής του μη εκτατού (inextensibility) του άξονα του τόξου.

Στην εργασία των Pi κ.α.[24], του 2008, έλαβε χώραν έρευνα του μη γραμμικού λυγισμού χαμηλών κυκλικών τόξων υπό κεντρικό συγκεντρωμένο φορτίο, με στροφικής μορφής περιορισμούς στα άκρα. Βρέθηκε ότι τα φορτία λυγισμού αυξάνουν, όταν επίσης αυξάνεται και η στροφική δυσκαμψία των στηρίξεων, η οποία επίσης επηρεάζει τη μορφή του λυγισμού (διακλαδικού ή ακαριαίου).

Λίγο αργότερα, το 2010, οι Pi και Bradford [27] ασχολήθηκαν με τις επιρροές των προλυγισμικών αναλύσεων στην εύρεση των κρίσιμων φορτίων αμφιαρθρωτών κυκλικών τόξων. Τονίστηκε εκ νέου η συνδυασμένη παρουσία θλιπτικών και καμπτικών τάσεων και δόθηκαν νέες αναλυτικές λύσεις για τα κρίσιμα φορτία.

Στην σύντομη αυτή βιβλιογραφική ανασκόπηση, πρέπει να τονιστεί η επιστημονική συνεισφορά κάποιων σχετικά παλαιότερων εργασιών (1979 – 1989) από Άγγλους ερευνητές και συνεργάτες τους. Ιδιαίτερη μνεία δίνεται εδώ στη δημοσίευση του Plaut [5], που αφορούσε την επιρροή της θέσης ενός κατακόρυφου σημειακού φορτίου στην ευστάθεια χαμηλών ελαστικών κυκλικών τόξων, καθόσον το αντικείμενο άπτεται άμεσα αυτού της παρούσας Διπλωματικής. Οι στηρίξεις των τόξων που λήφθηκαν υπόψη ήταν είτε αρθρώσεις είτε πακτώσεις είτε μια και μια. Μετά την κατάστρωση της εξίσωσης ισορροπίας και την αδιαστατοποίηση της, τα αποτελέσματα οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι καθώς το «ύψος» του τόξου αυξάνεται εκ του μηδενός, λαμβάνουν χώραν τα ακόλουθα φαινόμενα: (α) αρχικά δεν είναι δυνατόν να συμβεί ακαριαίος λυγισμός, (β) εμφανίζονται οριακά σημεία, με το μικρότερο κρίσιμο φορτίο να αντιστοιχεί σε φορτίο στην κορυφή.

Το 1981, οι Cassidy και Plaut [6] ασχολήθηκαν με τον λυγισμό χαμηλών ημιτονοειδούς μορφής τόξων υπό την συνδυασμένη επιρροή κατανεμημένων και συγκεντρωμένων φορτίων. Αφού καταστρώθηκε η εξίσωση ισορροπίας βρέθηκαν όρια ευστάθειας σε τρεις διαστάσεις εξαρτώμενα από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Ο λυγισμός και η ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες τόξων με ή χωρίς προένταση μελετήθηκε από τους Thompson και Hunt [7]. Βασισμένοι στη θεωρία της μη εκτατότητας (αλλαγής μήκους, inextensional) θεώρησαν χαμηλά τόξα, αρθρωτά σε σταθερά ακρόβαθρα, υπό ονομαστικά κεντρικό φορτίο βαρύτητας. Μετά τον υπολογισμό της ενέργειας παραμόρφωσης (strain energy) και του έργου της δύναμης, μορφώθηκε τελικά το συνολικό δυναμικό. Έλαβε χώραν παραδοχή ότι η αρχική γεωμετρία του τόξου ήταν ημιτονοειδούς μορφής απλού ημι-κύματος, ενώ η τελική μορφή άθροισμα όρων Fourier, από τους οποίους κρατήθηκαν οι δύο πρώτοι. Μετά και την επιβολή της συνθήκης περιορισμού (constraint condition), δηλαδή της διατήρησης του μήκους του τόξου, ελήφθησαν αποτελέσματα κρίσιμων φορτίων λυγισμού. Αυτά συγκρίθηκαν με ικανοποιητική επιτυχία σε σχέση με τα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα του Roorda.

Οι Panketgorn κ.α. [9] διερεύνησαν τον ακαριαίο λυγισμό τόξων υπό τυχηματικό φορτίο, κάνοντας χρήση πιθανοτικών μεθόδων (όπως η προσομοίωση Monte Carlo). Τα αποτελέσματα που ελήφθησαν, παρόλο σημαντικά, δεν θα σχολιαστούν περαιτέρω, καθώς η μελέτη της παρούσας εργασίας είναι ντετερμινιστική.

Εκκινώντας από την δημοσίευση του Hyseyin [2], που εκτίμησε τα όρια ευστάθειας συμμετρικών δομικών συστημάτων (όπως τα τόξα), οι Masur και Lo [3] ανέλυσαν διεξοδικά τον λυγισμό και την ευαισθησία σε αρχικές ατέλειες χαμηλών κυκλικών τόξων. Βρέθηκαν διαδικασίες για τον υπολογισμό διακλαδικών φορτίων και δρόμων ισορροπίας υπό συμμετρικές φορτίσεις. Σημαντική επίσης υπήρξε και η συνεισφορά του Scholz [10] στον εντός επιπέδου λυγισμό χαμηλών τόξων. Ο συγγραφέας έδωσε πρακτικούς κανόνες σχεδιασμού για την κάλυψη της απώλειας της ευστάθειας χαμηλών χαλύβδινων τόξων, έτσι ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η απλή θεωρία της πλαστικότητας.

Πέραν των ανωτέρω, ορισμένοι Ασιάτες ερευνητές, όπως ο Chen [11], ο Chai κ.α. [25], ο Chen κ.α. [26] και ο Xu κ.α. [30] ασχολήθηκαν με το πρόβλημα για ελαστικά και ελαστοπλαστικά τόξα διαφόρων γεωμετριών, όπως άλλωστε και οι Dimopoulos και Gantes [22], ο Patricio κ.α. [13] και Virgin κ.α. [29].

Κοινή διαπίστωση, πέραν άλλων ειδικότερων, όλων των εργασιών που μνημονεύθηκαν ανωτέρω ήταν ότι ο *εντός επιπέδου ελαστικός λυγισμός τόξων* αποτελεί ένα πολυπαραμετρικό πρόβλημα ευστάθειας, καθόσον εξαρτάται από:

- (α) Τη γεωμετρία του τόξου (σχήμα, λόγος ύψους προς άνοιγμα),
- (β) Το είδος του φορτίου,
- (γ) Τη θέση του φορτίου,
- (δ) Τα γεωμετρικά και αδρανειακά χαρακτηριστικά της διατομής
- (ε) Τις συνθήκες στήριξης του τόξου

Στη διεθνή βιβλιογραφία υφίσταται ένα κορυφαίο σύγγραμμα για την θεωρία πολυπαραμετρικής ευστάθειας<sup>1</sup>, αλλά το περιεχόμενο του άπτεται περισσότερο στην ευστάθεια δυναμικών συστημάτων, και απέχει πολύ από το αντικείμενο της Διπλωματικής.

Πάντως, οι δύο τυπικές μορφές απώλειας της εντός επιπέδου ευστάθειας ελαστικών τόξων, ανεξάρτητα των παραμέτρων, είναι η διακλαδική και αυτή του ακαριαίου λυγισμού.

## **2.2 Χαμηλά και Ψηλά Τόξα: Διαφορές και Διευκρινήσεις**

Από την οπτική γωνία της ανάλυσης σε λυγισμό, είναι χρήσιμο να διακρίνουμε δύο βασικούς τύπους τόξων, τα χαμηλά και τα υψηλά. Πέραν από τον προφανή διαχωρισμό τους ανάλογα με το λόγο ύψους προς άνοιγμα (με μη καθαρά προκαθορισμένο το σχετικό όριο), υψηλά τόξα είναι αυτά των οποίων η κεντροβαρική γραμμή (center line) θεωρείται ασυμπιέστη (incompressible). Κατά κανόνα, αλλά όχι πάντοτε, τα χαμηλά τόξα θεωρούνται ότι αστοχούν μέσω συμμετρικής μορφής, ενώ τα υψηλά τόξα διέπονται από την ασυμμετρία παραμόρφωσης λόγω κάμψης. Για τον λόγο αυτό η ευστάθεια των χαμηλών τόξων αντιμετωπίζεται με ενεργειακές μεθόδους, ενώ των υψηλών μέσω κυρίως της απ' ευθείας κατάστροφης των εξισώσεων ισορροπίας, χωρίς όμως να αποκλείεται και η εφαρμογή προσεγγιστικών ενεργειακών τεχνικών [19]. Για το πρόβλημα της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας θα εφαρμοστούν ενεργειακές μέθοδοι και συμβολικά μαθηματικά.

---

<sup>1</sup> Seyranaian, A.P., Mailybaev, A.A.: *Multiparameter Stability Theory with Mechanical Applications*, World Scientific, Singapore, 2003.

### **2.3. Βιβλιογραφία**

- [1] Timoshenko, S., Gere, J.M. (1961), *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, Inc., Singapore.
- [2] Huseyin, K. (1972) “On the estimation of the stability boundary of symmetric structural systems” *International Journal of Non-Linear Mechanics* 7(1), pp. 31-50. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(72\)90020-0](https://doi.org/10.1016/0020-7462(72)90020-0)
- [3] Masur, E.F., Lo, D.L.C. (1972) “The Shallow Arch-General Buckling, Postbuckling, and Imperfection Analysis” *Journal of Structural Mechanics* 1(1), pp. 91-112. <https://doi.org/10.1080/03601217208905335>
- [4] Dawe, D.J. (1974) “Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches” *Computers & Structures* 4(3), pp. 559-580. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(74\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(74)90007-8)
- [5] Plaut, R. H. (1979) “Influence of Load Position on the Stability of Shallow Arches” *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 30, pp. 548-552. <https://doi.org/10.1007/BF01588902>
- [6] Cassidy, J.R., Plaut, R.H. (1981) “Buckling of shallow arches under combined distributed and concentrated loads” *Mechanics Research Communications* 8(1), pp. 41-45. [https://doi.org/10.1016/0093-6413\(81\)90049-5](https://doi.org/10.1016/0093-6413(81)90049-5)
- [7] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. (1983) “On the buckling and imperfection-sensitivity of arches with and without prestress” *International Journal of Solids and Structures* 19(5), pp. 445-459. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(83\)90055-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(83)90055-0)
- [8] Papangelis, J.P., Trahair, N.S. (1988) “Buckling of monosymmetric arches under point loads” *Engineering Structures* 10(4), pp. 257-264. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(88\)90047-8](https://doi.org/10.1016/0141-0296(88)90047-8)
- [9] Penketgorn, T., Rojiani, K.B., Plaut, R.H. (1989) “Snap-through of a shallow arch under random loading” *Probabilistic Engineering Mechanics* 4(3), pp. 114-119. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(89\)90016-7](https://doi.org/10.1016/0266-8920(89)90016-7)
- [10] Scholz, H. (1990) “A Contribution to the In-plane Stability of Shallow Arches” *J. Construct. Steel Research* 15(4), pp. 287-302. [https://doi.org/10.1016/0143-974X\(90\)90051-H](https://doi.org/10.1016/0143-974X(90)90051-H)

- [11] Chen, C.-N. (1996) “A finite element study on bifurcation and limit point buckling of elastic-plastic arches,” *Computers & Structures* **60**(2), pp. 189-196.  
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00396-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00396-7)
- [12] Pi, Y.-L., Trahair, N.S. (1996) “Three-dimensional nonlinear analysis of elastic arches” *Engineering Structures* **18**(1), pp. 49-63.  
[https://doi.org/10.1016/0141-0296\(95\)00039-3](https://doi.org/10.1016/0141-0296(95)00039-3)
- [13] Patricio, P., Adda-Bedia, M., Ben Amar, M. (1998) “An *elastica* problem: instabilities of an elastic arch” *Physica D: Nonlinear Phenomena* **124**(1-3), pp. 285-295.  
[https://doi.org/10.1016/S0167-2789\(98\)00203-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00203-6)
- [14] Pi, Y.-L., Trahair, N.S. (1998) “Non-linear buckling and postbuckling of elastic arches” *Engineering Structures* **20**(7), pp. 571-579.  
[https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00067-9](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00067-9)
- [15] Pi, Y.-L., Trahair, N.S. (2000) “Inelastic lateral buckling strength and design of steel arches” *Engineering Structures* **22**(8), pp. 993–1005.  
[https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(99\)00032-2](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(99)00032-2)
- [16] Bradford, M.A., Uy, B., Pi Y.-L. (2002) “In-plane stability of arches under a central concentrated load,” *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* **128**(7), pp. 710-719.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:7\(710\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:7(710))
- [17] Pi, Y.-L., Bradford, M.A., Uy, B (2002) “In-plane stability of arches” *International Journal of Solids and Structures* **39**(1), pp. 105-125.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00209-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00209-8)
- [18] Pi, Y.-L., Bradford, M.A. (2003) “Elasto-plastic buckling and postbuckling of arches subjected to a central load” *Computers and Structures* **81**(18-19), pp. 1811–1825. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00204-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00204-9)
- [19] Bazant, Z.P., Cedolin, L. (2003 unabridged republication of the original, published by Oxford University Press Inc., 1991), *Stability of Structures*, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, Dover Publications Inc., Mineola, New York, USA.
- [20] Pi, Y.-L., Bradford, M.A., Tin-Loi, F. (2007), “Nonlinear analysis and buckling of elastically supported circular shallow arches,” *International Journal of Solids and Structures* **44**(7-8), pp. 2401-2425.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.07.011>

- [21] Pi, Y.-L., Bradford, M.A., Tin-Loi, F., Gilbert, R.I. (2007) “Geometric and material nonlinear analyses of elastically restrained arches” *Engineering Structures* **29**(3), pp. 283–295.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.01.016>
- [22] Dimopoulos, C.A., Gantes, C.J. (2008) “Nonlinear in-plane behavior of circular steel arches with hollow circular cross-section” *Journal of Constructional Steel Research* **64**(12), pp. 1436–1445.  
<https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2008.01.005>
- [23] Gengshu, T., Pi, Y.-L., Bradford, M.A., Tin-Loi, F. (2008) “In-plane nonlinear buckling analysis of deep circular arches incorporating transverse stresses” *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)* **134**(5), pp. 362–373.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2008\)134:5\(362\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2008)134:5(362))
- [24] Pi, Y.-L., Bradford, M.A., Tin-Loi, F. (2008) “Non-linear in-plane buckling of rotationally restrained shallow arches under a central concentrated load” *International Journal of Non-Linear Mechanics* **43**(1), pp. 1 – 17.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2007.03.013>
- [25] Chai, J.-G., Feng, J., Chen, Y. and Huang, L.-F. (2009) “In-plane elastic stability of fixed parabolic shallow arches,” *Science in China Series E: Technological Sciences* **52**(3), pp. 596–602.  
<https://doi.org/10.1007/s11431-009-0057-9>
- [26] Chen, J.-S., Ro, W.-C., Lin, J.-S. (2009) “Exact static and dynamic critical loads of a sinusoidal arch under a point force at the midpoint,” *International Journal of Non-Linear Mechanics* **44**(1), pp. 66–70.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.08.006>
- [27] Pi, Y.-L., Bradford, M.A. (2010) “Effects of prebuckling analyses on determining buckling loads of pin-ended circular arches” *Mechanics Research Communications* **37**(6), pp. 545–553.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2010.07.016>
- [28] Karnovsky, I.A. (2012), *Theory of Arched Structures*, Strength, Stability, Vibration, Springer Science, DOI:10.1007/978-1-4614-0469-9.
- [29] Virgin, L.N., Wiebe, R. Spottswood, S.M., Eason, T.G. (2014) “Sensitivity in the structural behavior of shallow arches” *International Journal of Non Linear Mechanics* **58**, pp. 212–221.  
<http://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.10.003>

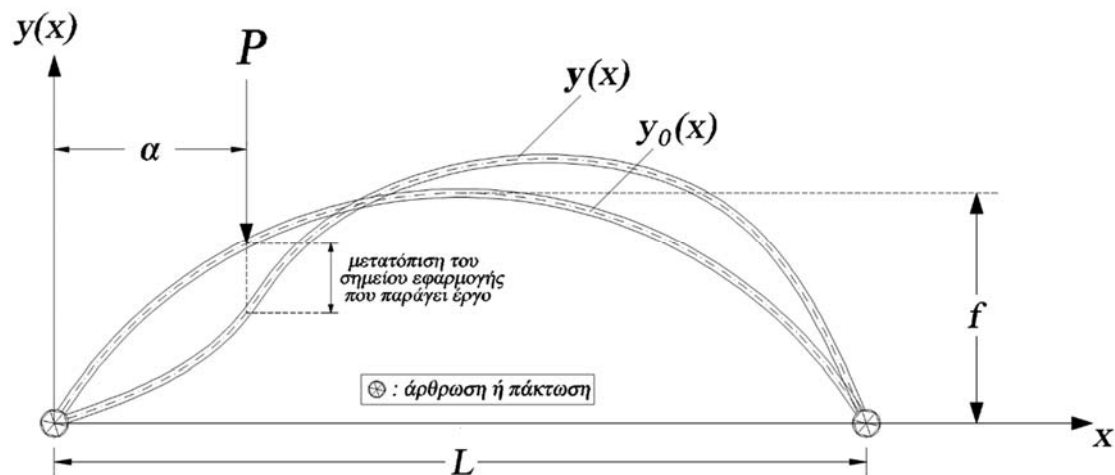
- [30] Xu, Y., Gui, X., Zhao, B., Zhou, R. (2014) “In-Plane Elastic Stability of Arches under a Radial Concentrated Load” *Engineering*, **6**(9), pp. 572-583.  
<http://doi.org/10.4236/eng.2014.69058>



### Κεφάλαιο 3 Ευστάθεια ελαστικού τόξου υπό κατακόρυφο σημειακό φορτίο

#### 3.1 Καθορισμός του προβλήματος

Θεωρούμε ένα τόξο ανοίγματος  $L$ , που εδράζεται είτε μέσω αρθρώσεων είτε μέσω πακτώσεων στα άκρα του, έχει ύψος στη στέψη (κορυφή) ίσο με  $f$  και είναι συμμετρικό ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσο του ανοίγματος του. Η αρχική του γεωμετρία (πριν οποιαδήποτε εξωτερική φόρτιση) χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση  $y_0(x)$ , σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων του Σχήματος 3.1. Το φορτίο που επενεργεί στον φορέα είναι κατακόρυφο σημειακό μεγέθους  $P$ , το σημείο εφαρμογής του οποίου απέχει οριζόντια από την αρχή των αξόνων κατά  $a$ , οπότε η κατακόρυφη συντεταγμένη αυτού ισούται με  $y_0(a)$ . Το υλικό του τόξου είναι γραμμικά ελαστικό, και η διατομή του κλειστή συμμετρική σταθερής ροπής αδράνειας  $I$  και επιφάνειας  $A$ . Μετά την επιβολή του φορτίου  $P$ , το τόξο παραμορφώνεται και η συνάρτηση που χαρακτηρίζει πλέον τον κεντροβαρικό άξονα καλείται  $y(x)$ .



Σχήμα 3.1 Ελαστικό τόξο υπό συγκεντρωμένο κατακόρυφο φορτίο βαρύτητας

Στο παραπάνω Σχήμα, η καμπύλη της  $y(x)$  είναι ενδεικτική, αλλά σίγουρα το σημείο εφαρμογής του φορτίου, ανεξάρτητα από την  $y(x)$  θα μετατοπιστεί προς τα κάτω (μπορεί και εγκάρσια), αλλά η προς τα κάτω μετατόπιση του είναι αυτή που θα παράξει έργο. Χωρίς απώλεια της γενικότητας, στην ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα θεωρηθεί συμπεριφορά χαμηλού τόξου, δηλαδή μη ασυμπίεστοτητα (αλλαγή μήκους)

της κεντροβαρικής γραμμής. Ο όρος που αφορά αυτή την ιδιότητα μπορεί είτε να ληφθεί υπόψη είτε να παραλειφθεί.

### 3.2 Συναρτησιακό συνολικού δυναμικού

Για τον υπολογισμό της εξίσωσης ισορροπίας – λυγισμού και των σχετικών κρίσιμων σημείων θα εφαρμοστούν ενεργειακές μέθοδοι, οι οποίες κατά κανόνα απαιτούν την εύρεση του συναρτησιακού του συνολικού δυναμικού (total potential energy functional). Αυτή ισούται με το άθροισμα της ενέργειας παραμόρφωσης (strain energy)  $U$  και του έργου των εξωτερικών δυνάμεων (work of external forces)  $\Omega$ .

Η ενέργεια παραμόρφωσης αποτελείται από δύο όρους,  $U_1$  και  $U_2$ , οι οποίοι οφείλονται στην μεταβολή της καμπυλότητας ο πρώτος και στην αλλαγή του μήκους της κεντροβαρικής γραμμής του τόξου ο δεύτερος.

Γενικότερα, το μήκος  $\ell$  μιας συνεχούς καμπύλης  $f(x)$ , που ορίζεται τουλάχιστον στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , ισούται με

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (3.1)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς  $x$ . Κατά συνέπεια, το αρχικό και το τελικό μήκος του τόξου ( $\ell_0, \ell_d$ ) θα είναι

$$\ell_0 = \int_0^L \sqrt{1 + [y_0'(x)]^2} dx \quad (3.2\alpha)$$

$$\ell_d = \int_0^L \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (3.2\beta)$$

οπότε η αλλαγή του μήκους της κεντροβαρικής γραμμής του τόξου  $\Delta\ell$  θα δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\ell = \ell_d - \ell_0 = \int_0^L \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx - \int_0^L \sqrt{1 + [y_0'(x)]^2} dx \quad (3.3)$$

Μετά τα παραπάνω, ο όρος  $U_2$  της ενέργειας παραμόρφωσης, που σύμφωνα με τις αρχές της Μηχανικής είναι ίσος με

$$U_2 = \frac{1}{2} EA \left( \frac{\Delta\ell}{L} \right)^2 L \quad (3.4)$$

με την έκφραση του  $\Delta\ell$  από την (3.3).

Η μη γραμμική θεωρία ευστάθειας μεγάλων μετατοπίσεων βασίζεται στην ακόλουθη ακριβέστερη μορφή της καμπυλότητας [5, 6]

$$\kappa = \frac{w''}{[1+w'^2]^{3/2}} \quad (3.5)$$

αντί της κλασσικής έκφρασης  $-w''$ .

Καθόσον για τα χαμηλά τόξα υφίσταται αξονική επιβράχυνση / επιμήκυνση, δεν ισχύει η απλουστευμένη έκφραση της καμπυλότητας  $\kappa = \frac{w''}{[1-w'^2]^{1/2}}$ , οπότε δεν θα γίνει χρήση

αυτής. Η έκφραση της  $U_1$  γράφεται ως [2]:

$$U_1 = \frac{1}{2}EI \int_0^L (\Delta\kappa)^2 dx = \frac{1}{2}EI \int_0^L (\kappa - \kappa_0)^2 dx \quad (3.6)$$

όπου

$$\kappa = \frac{y(x)''}{[1+y(x)'^2]^{3/2}}, \kappa_0 = \frac{y_0(x)''}{[1+y_0(x)'^2]^{3/2}} \quad (3.7)$$

σύμφωνα με την (3.5)

Τέλος, το έργο της δύναμης ισούται με

$$\Omega = -P[y_0(a) - y(a)] \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας τις ευρεθείσες εκφράσεις, το συνολικό δυναμικό του συστήματος λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$V_T = U_1 + U_2 + \Omega = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left( \frac{y(x)''}{[1+y(x)'^2]^{3/2}} - \frac{y_0(x)''}{[1+y_0(x)'^2]^{3/2}} \right)^2 dx + \frac{1}{2}EA \left( \frac{\int_0^L \sqrt{1+[y'(x)]^2} dx - \int_0^L \sqrt{1+[y_0'(x)]^2} dx}{L} \right)^2 L - P[y_0(a) - y(a)] \quad (3.9)$$

Εφαρμόζοντας το ενεργειακό κριτήριο,  $\delta V_T = 0$  και μερικές απλουστεύσεις μέσω αναπτυγμάτων Taylor και κολόβωσης όρων ανώτερης τάξης, η διαφορική εξίσωση ισορροπίας είναι:

$$EI(y'''' - y_0'''' ) + \left\{ \frac{EA}{2L} \int_0^L [y_0'^2 - y'^2] dx \right\} y'' = -P\delta(x - a) \quad (3.10)$$

όπου  $\delta$  η συνάρτηση του Dirac.

Κάνοντας χρήση των αδιάστατων ποσοτήτων που ακολουθούν

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \xi_p = \frac{a}{L} \\ p &= \frac{PL^3}{2\pi^4 EI} \sqrt{\frac{A}{I}} \\ Y(\xi) &= \frac{y(L\xi)}{2} \sqrt{\frac{A}{I}} \\ Y_0(\xi) &= \frac{y_0(L\xi)}{2} \sqrt{\frac{A}{I}} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

η αδιαστατοποιημένη έκφραση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας, με τον τόνο να υποδηλώνει πλέον παραγωγή ως προς  $\xi$  είναι:

$$Y'''' - Y_0'''' + 2Y'' \int_0^1 (Y_0'^2 - Y'^2) d\xi = -\pi^4 p \delta(\xi - \xi_p) \quad (3.12)$$

Κάθε στήριξη ( $\xi = 0, 1$ ) μπορεί να είναι είτε άρθρωση ( $Y = 0, Y'' = Y_0''$ ) είτε πάκτωση ( $Y = 0, Y' = Y_0'$ ).

Το μη γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων 4<sup>ης</sup> τάξης [3], που σχετίζεται με την εξίσωση (3.12) και τις εκάστοτε συνθήκες στα άκρα δεν διαθέτει αναλυτική λύση, οπότε είτε προσεγγιστικά είτε αριθμητικά (είτε σε συνδυασμό των δύο) μπορεί να επιλυθεί. Επιπρόσθετα, ανάλογα με την αρχική γεωμετρία του τόξου διαφοροποιείται η εν λόγω εξίσωση, σε σχέση με τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 1 αλλά και την τελική διαμόρφωση της αδιαστατοποίησης [σχέσεις (3.11)]. Για τις ανάγκες της Διπλωματικής θα λάβει χώραν ανάλυση ευστάθειας σε παραβολικό τόξο, το οποίο αποτελεί υπερσύνολο του κυκλικού, και γενικότερα είναι μια κλασική συμμετρική κωνική τομή. Γενικότερα πάντως, οποιαδήποτε γεωμετρία τόξου θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, αλλά τα βήματα της ανάλυσης θα είναι παρόμοια.

Για τη μόρφωση της (3.12) έτσι ώστε να αφορά το παραβολικό τόξο χρησιμοποιείται η εξίσωση (1.5), σε συνδυασμό με τις σχέσεις (3.11), ενώ εισάγονται και δύο επιπρόσθετοι αδιάστατοι παράγοντες  $\lambda$  και  $c$ , σύμφωνα με τις εκφράσεις

$$\lambda^2 = L^2 \frac{A}{I} \rightarrow \lambda = L \sqrt{A/I} \quad (3.13\alpha)$$

$$c = f/L \quad (3.13\beta)$$

Η νέα αδιάστατη μορφή της εξίσωσης του τόξου θα είναι, μετά από αλγεβρικές πράξεις

$$Y_0(\xi) = -2c\xi^2\lambda + 2c\xi\lambda \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας αυτή στην εξίσωση (3.12) λαμβάνουμε τελικά

$$Y'''' + Y'' \frac{8}{3} c^2 \lambda^2 - 2Y'' \int_0^1 Y'^2 d\xi = -\pi^4 p \delta(\xi - \xi_p) \quad (3.15)$$

όπου, εκ νέου, ο τόνος υποδηλώνει παραγωγή ως προς  $\xi$ .

Επιπρόσθετα, το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 Y'^2 d\xi$  με βάση την παραγοντική ολοκλήρωση, μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_0^1 Y'^2 d\xi = y'(1)y(0) - y'(0)y(1) - \int_0^1 y''y d\xi = - \int_0^1 y''y d\xi \quad (3.16)$$

Η τελευταία αυτή έκφραση δεν φαίνεται να οδηγεί σε απλούστευση την (3.15), οπότε δεν θα χρησιμοποιηθεί περαιτέρω.

### **3.3 Εφαρμογή της Μεθόδου Galerkin**

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή [4, 6] αναζητούμε μια προσεγγιστική λύση της (3.15) της μορφής

$$\tilde{y}(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i g_i(\xi) \quad (3.17)$$

στην οποία, οι λεγόμενες συναρτήσεις βάσεις  $g_i(\xi)$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους προσεγγιστικές συναρτήσεις, οι οποίες πρέπει να ικανοποιούν όλες τις φυσικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

Αν  $\mathbf{L}$  είναι ο διαφορικός τελεστής που σχετίζεται με την εξίσωση ισορροπίας, ορίζεται στη συνέχεια η συνάρτηση σφάλματος, που δίνεται από τη σχέση

$$E(\xi, \alpha_k) = \sum_k \alpha_k \mathbf{L}g_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.18)$$

και απαιτείται όπως αυτή είναι ορθογωνική προς όλες τις συναρτήσεις βάσης, εντός του διαστήματος  $(a, b)$  που ορίζεται το πρόβλημα, δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις

$$\int_a^b E(\xi, \alpha_k) g_i(\xi) d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

Έχει αποδειχθεί ότι η χρήση δύο συναρτήσεων βάσης οδηγεί σε πολύ καλά άνω φράγματα των κρίσιμων φορτίων. Προς τούτο, και επειδή για το πρόβλημα της παρούσας Διπλωματικής το διάστημα ορισμού είναι από 0 έως 1, οι απαραίτητες αλγεβρικές πλέον εξισώσεις έχουν ως εξής:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \int_0^1 g_1(\xi) \mathbf{L}g_1(\xi) d\xi + \alpha_2 \int_0^1 g_1(\xi) \mathbf{L}g_2(\xi) d\xi &= 0 \\ \alpha_1 \int_0^1 g_2(\xi) \mathbf{L}g_1(\xi) d\xi + \alpha_2 \int_0^1 g_2(\xi) \mathbf{L}g_2(\xi) d\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

και υπό μητρική γραφή

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 0, \quad g_{ik} = \int_0^1 g_i \mathbf{L}g_k d\xi \quad (3.21)$$

Για μη τετριμμένη λύση, η ορίζουσα ευστάθειας του ανωτέρω ομογενούς συστήματος θα πρέπει να μηδενιστεί, οπότε:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 0 \quad (3.22)$$

Επιλέγονται δύο μορφές στηρίξεων – συνοριακών συνθηκών του τόξου, το αμφιαρθωτό (βέλος και ροπή στα άκρα μηδέν) και το αμφίπακτο (βέλος και στροφή στα άκρα μηδέν).

Οι επιλεγείσες συναρτήσεις βάσης για τον μεν αμφιαρθωτό τόξο είναι:

$$g_1(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi \quad (3.23)$$

$$g_2(\xi) = 3\xi^5 - 10\xi^3 + 7\xi \quad (3.24)$$

ενώ για το αμφίπακτο είναι:

$$g_1(\xi) = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2 \quad (3.25)$$

$$g_2(\xi) = \xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2 \quad (3.26)$$

οι οποίες, προφανώς, ικανοποιούν τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

Υπολογίζονται κατόπιν, μέσω συμβολικών υπολογισμών στο λογισμικό *Mathematica*, οι εκφράσεις των ποσοτήτων  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{21}$  και  $g_{22}$ , σύμφωνα με το

Παράρτημα στο τέλος της παρούσας, και μέσω της (3.22) τελικά βρίσκονται οι εκφράσεις των κρίσιμων φορτίων. Πιο συγκεκριμένα, για το αμφιαρθρωτό τόξο

$$p_{cr} = - \frac{4(-249+7c^2\lambda^2)(-9687+2380c^2\lambda^2)}{49\pi^4(-1+\xi p)\xi p(9(427813-282442\xi p)\xi p^2 - 461013(1+\xi p)+140c^2\lambda^2(118+\xi p(118+3\xi p(-334+221\xi p))))} \quad (3.27)$$

και για το αμφίπακτο τόξο

$$p_{cr} = - \frac{2(-2027+60c^2\lambda^2)(-2207+140c^2\lambda^2)}{1575\pi^4(-1+\xi p)^2\xi p^2(17062-19935\xi p+420c^2\lambda^2(-2+3\xi p))} \quad (3.28)$$

Με βάση τα ανωτέρω, λαμβάνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα του επόμενου εδάφιου.

### **3.4 Αριθμητικά αποτελέσματα και σχολιασμός**

#### **3.4.1 Αριθμητικά αποτελέσματα**

Σύμφωνα με τις παραπάνω εκφράσεις (3.27) και (3.28) των προσεγγιστικών κρίσιμων φορτίων, έγινε επιλογή παραγωγής αριθμητικών αποτελεσμάτων για ορισμένους χαρακτηριστικούς συνδυασμούς παραμέτρων, με τη θέση του φορτίου  $\xi_p$  να λαμβάνει τιμές από 0.001 έως 0.50, με βήμα 0.001. Λόγω συμμετρίας του προβλήματος τα γραφήματα  $(\xi_p, p_{cr})$  που προκύπτουν είναι συμμετρικά ως προς την κατακόρυφο  $\xi_p = 0.50$ .

Για μεν το αμφιαρθρωτό τόξο οι παράμετροι επιλογής ήταν:

$$c = 0.10, 0.15, 0.20 \text{ και } \lambda = 30, 90, 150$$

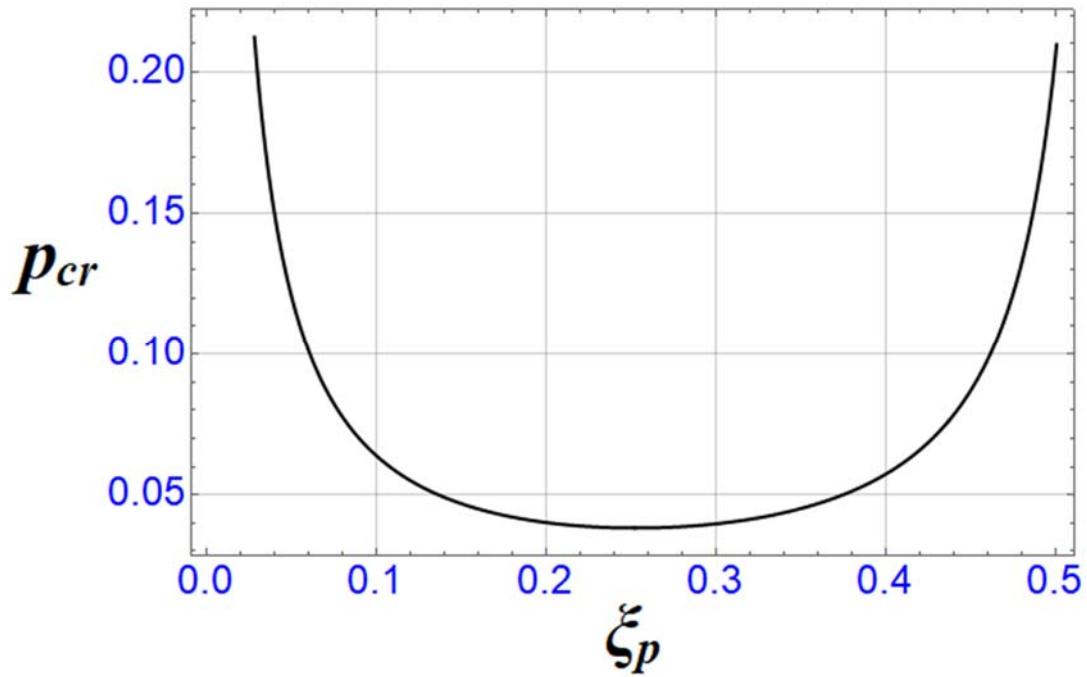
για δε το αμφίπακτο τόξο ήταν:

$$c = 0.15, 0.20, 0.25 \text{ και } \lambda = 30, 90, 150$$

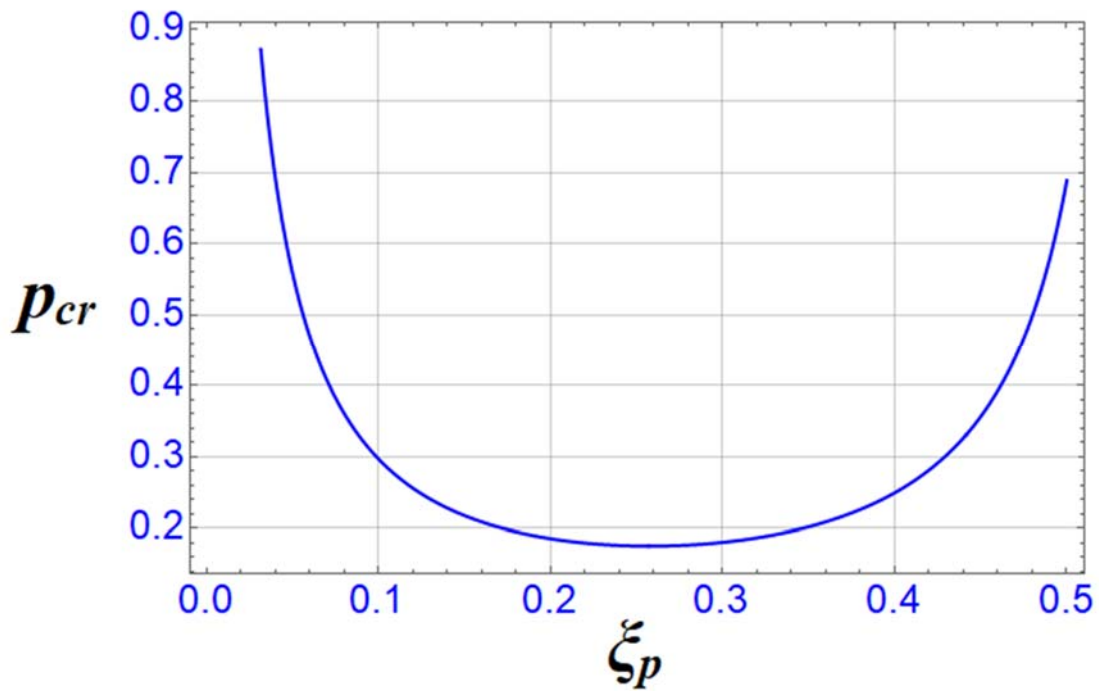
Η μικρή αύξηση της εναρκτήριας τιμής του  $c$  για το αμφίπακτο τόξο έγινε με γνώμονα την δυσκολία παραμόρφωσης του (λόγω μηδενικής στροφής στο αριστερό άκρο) για μικρές τιμές της θέσης του φορτίου.

Με βάση τις παραπάνω ρεαλιστικές επιλογές, που αντικατοπτρίζουν όλες χαμηλά τόξα με διάφορες λυγηρότητες, παρήχθησαν οι εξής συνδυασμοί παραμέτρων. Ο ένας με σταθερό  $\lambda$  και μεταβλητό  $c$ , και ο άλλος με σταθερό  $c$  και μεταβλητό  $\lambda$ . Τα αποτελέσματα που λήφθηκαν από τις ισχυρές δυνατότητες του λογισμικού Mathematica παρατίθενται ανά απλό συνδυασμό αλλά και συνολικά στα Σχήματα που έπονται.

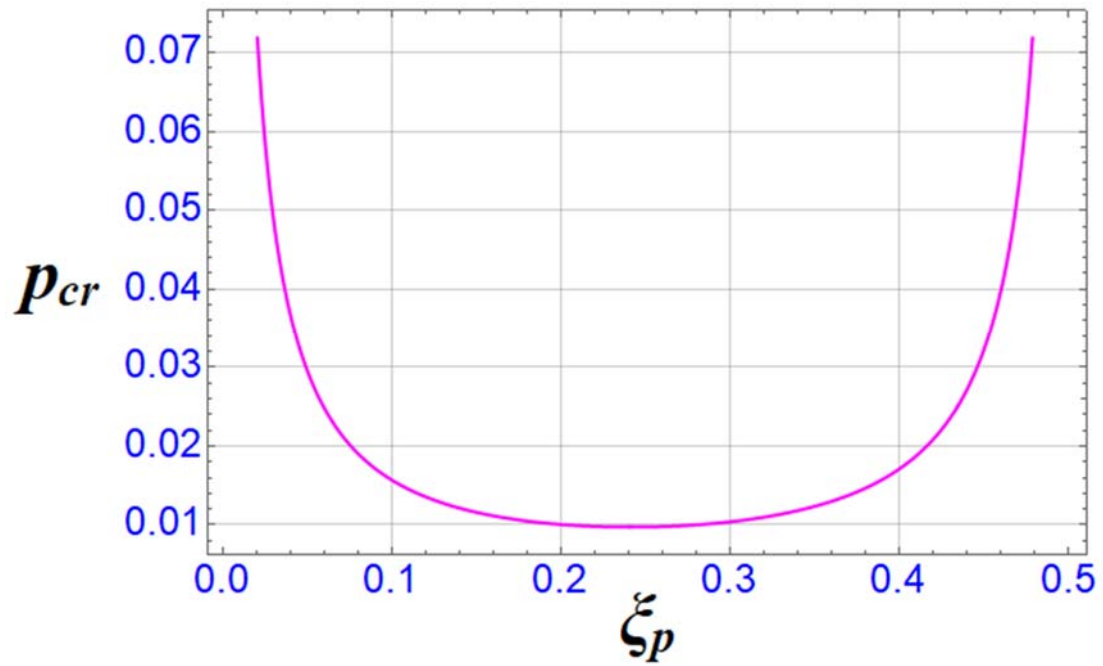
Αμφιαρθρωτό τόξο



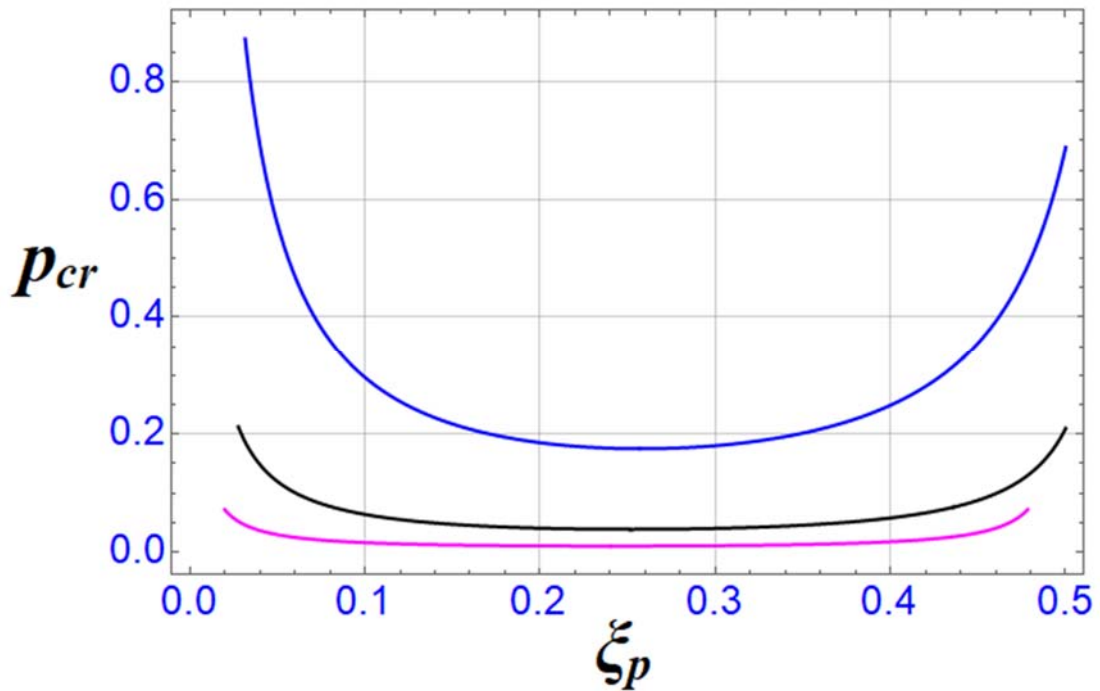
Σχήμα 3.2 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθρωτό τόξο με  $\lambda = 30, c = 0.10$



Σχήμα 3.3 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθρωτό τόξο με  $\lambda = 30, c = 0.15$

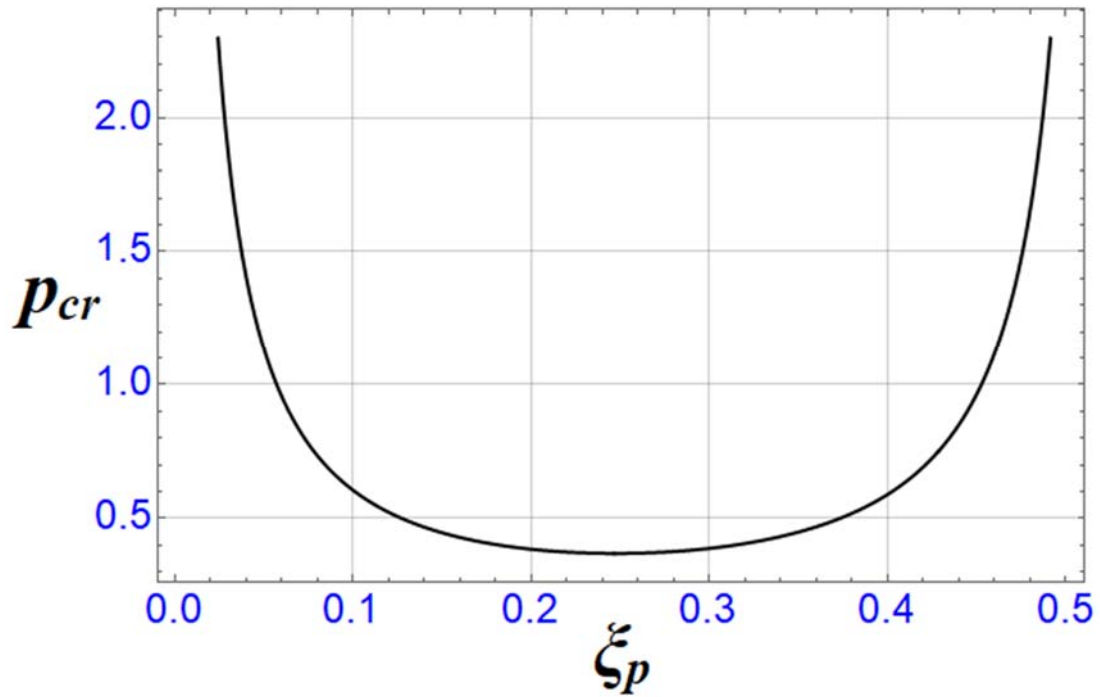


Σχήμα 3.4 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 30, c = 0.20$

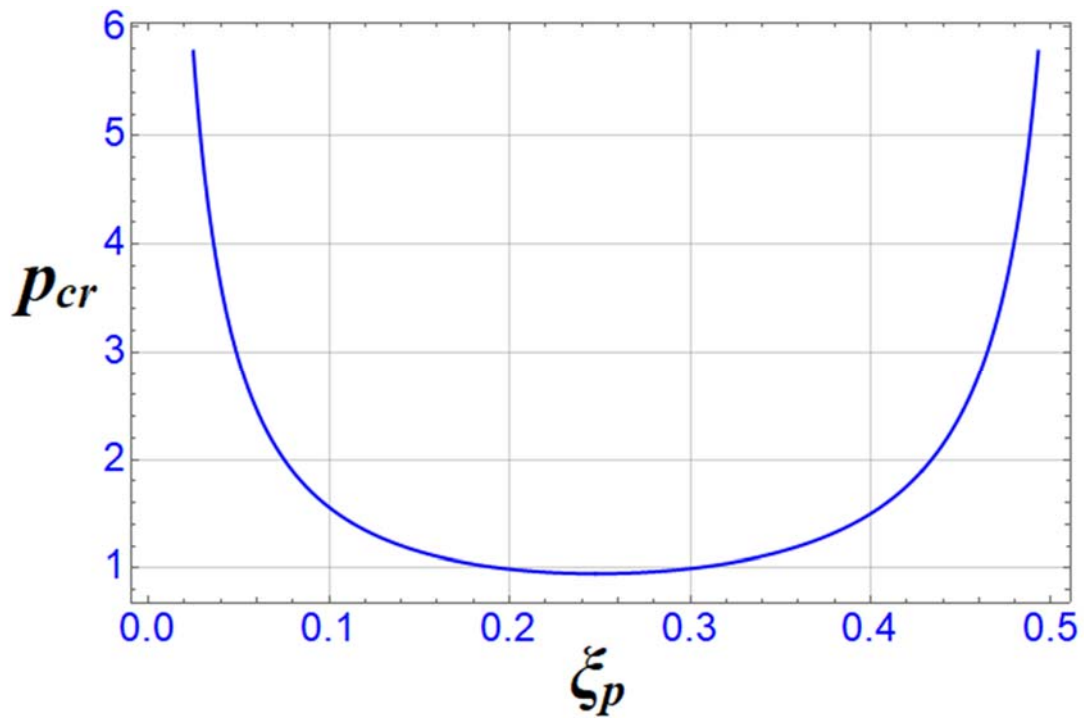


Σχήμα 3.5 Συνολική απεικόνιση των παραπάνω τριών διαγραμμάτων

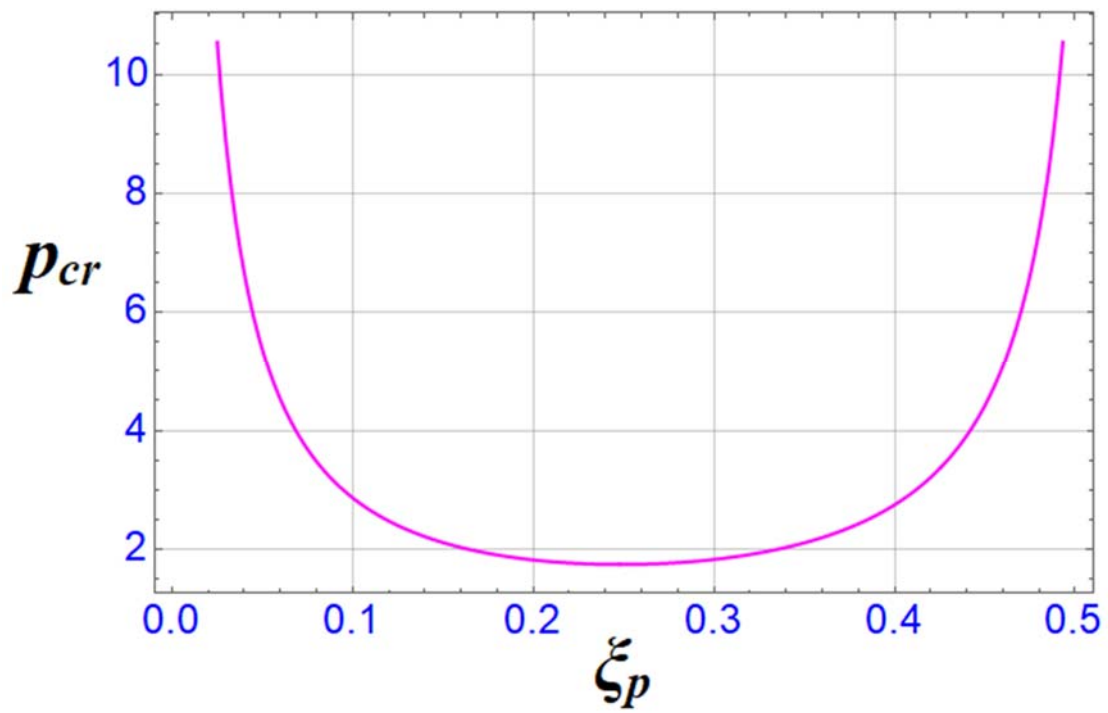




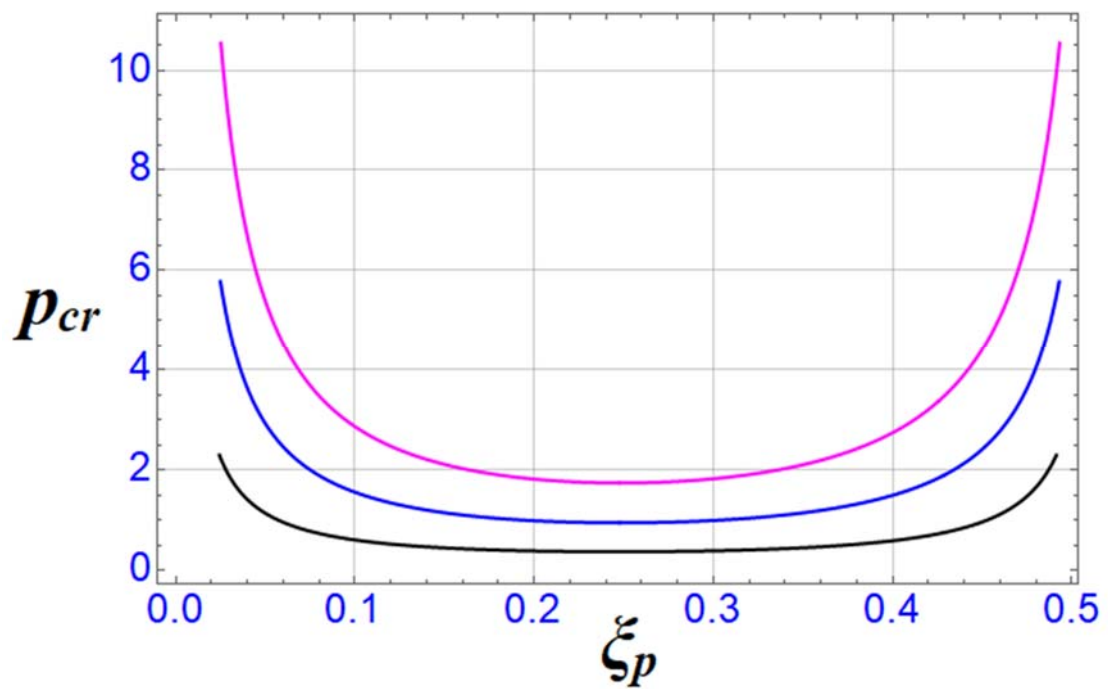
Σχήμα 3.6 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 90, c = 0.10$



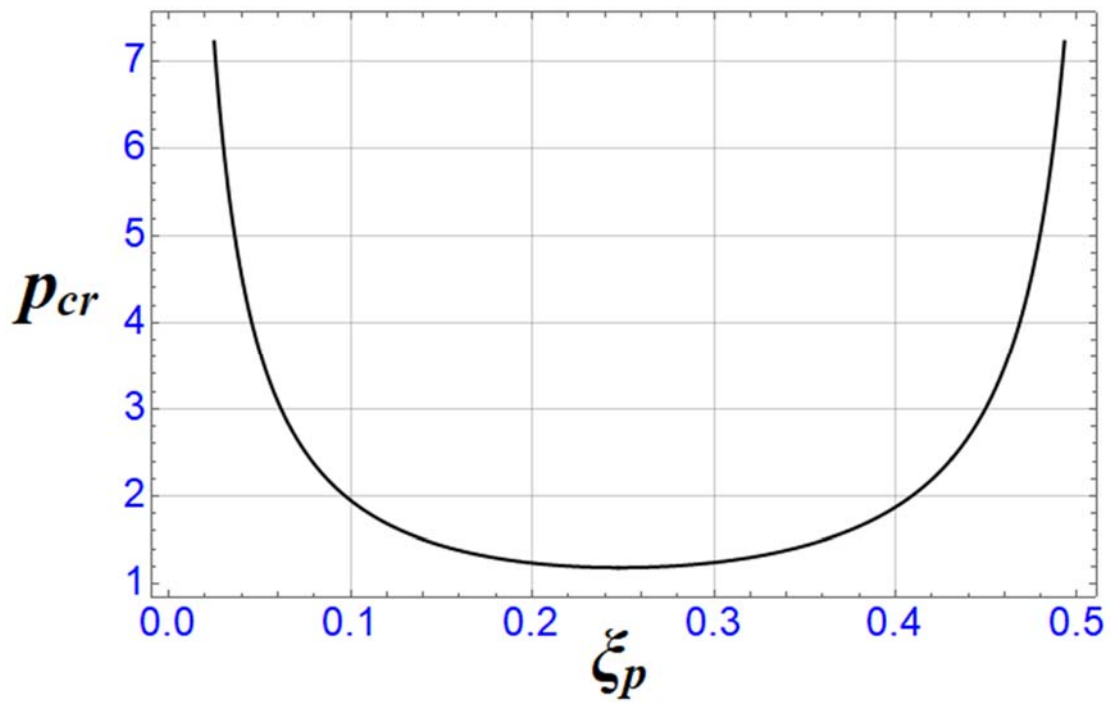
Σχήμα 3.7 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 90, c = 0.15$



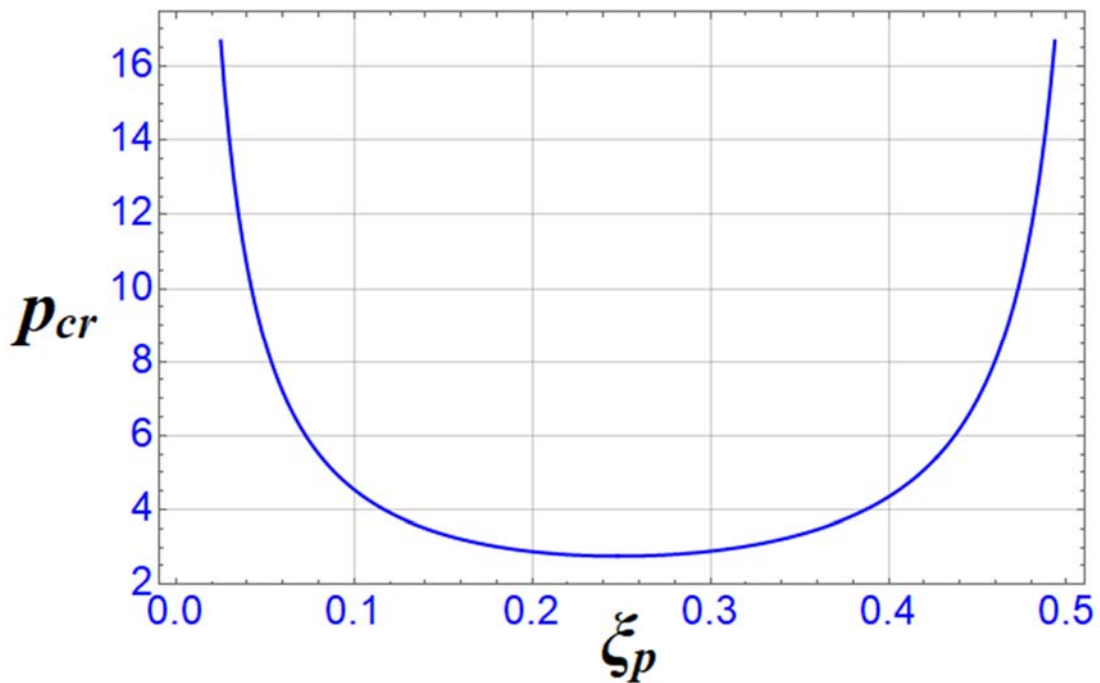
Σχήμα 3.8 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 90, c = 0.20$



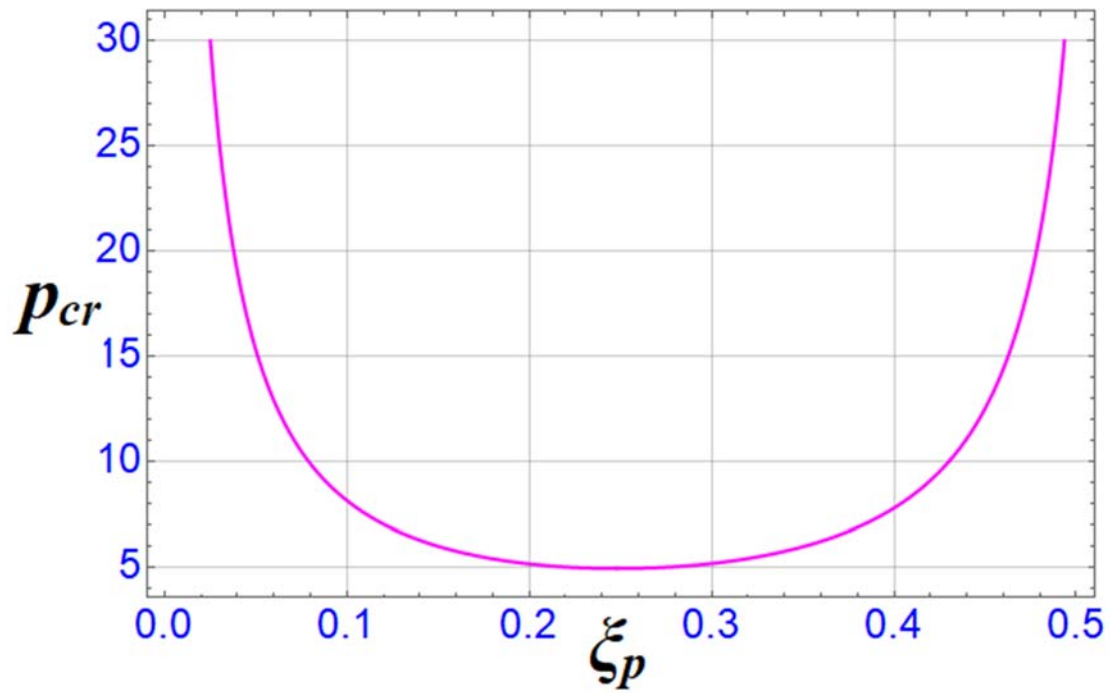
Σχήμα 3.9 Συνολική απεικόνιση των παραπάνω τριών διαγραμμάτων



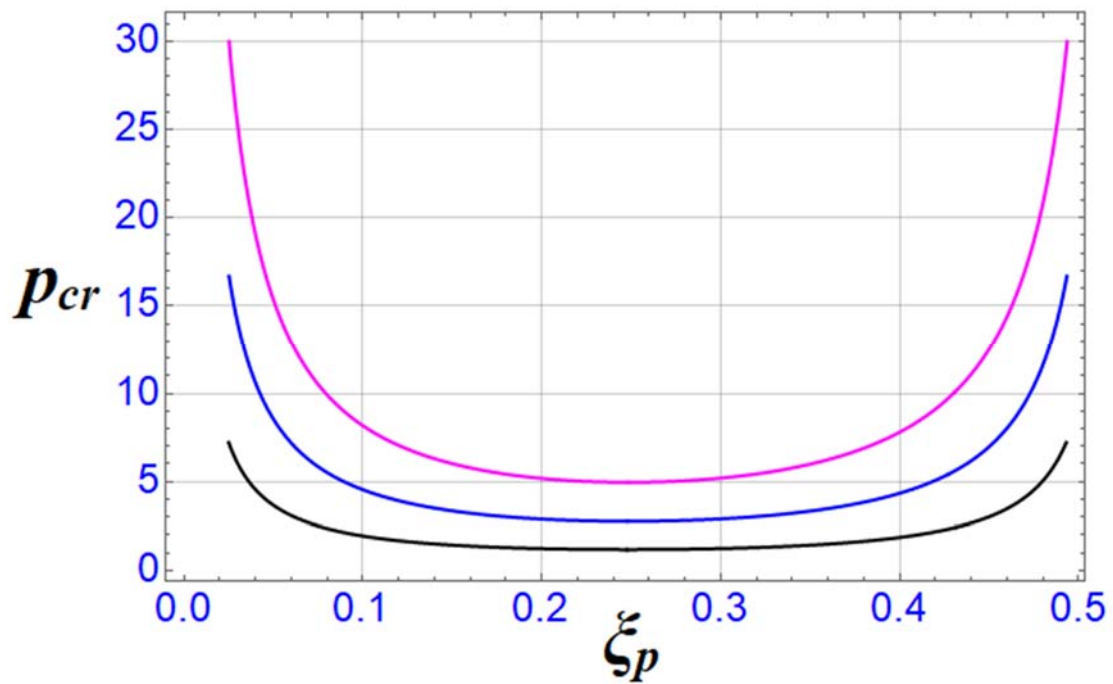
Σχήμα 3.10 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 150, c = 0.10$



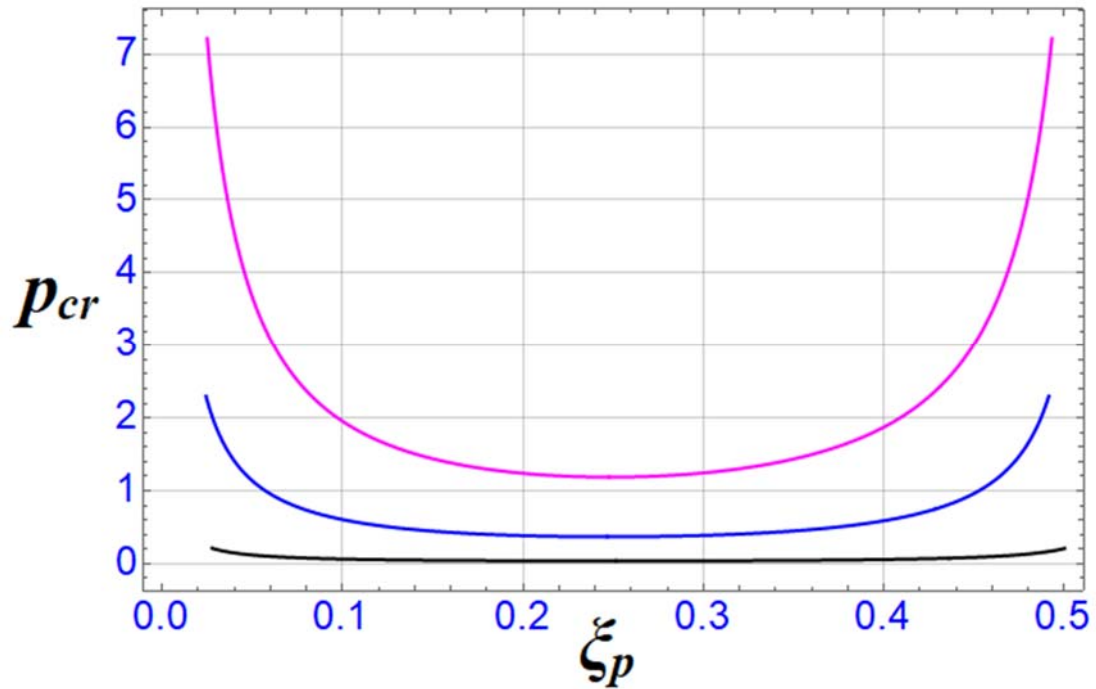
Σχήμα 3.11 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 150, c = 0.15$



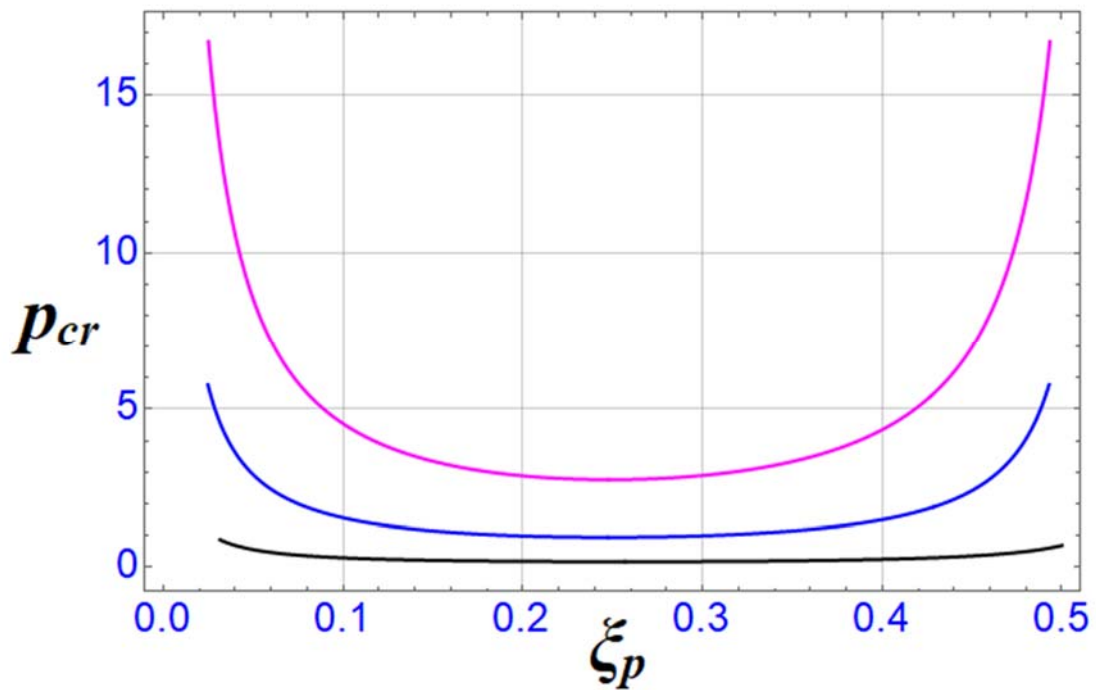
Σχήμα 3.12 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $\lambda = 150, c = 0.20$



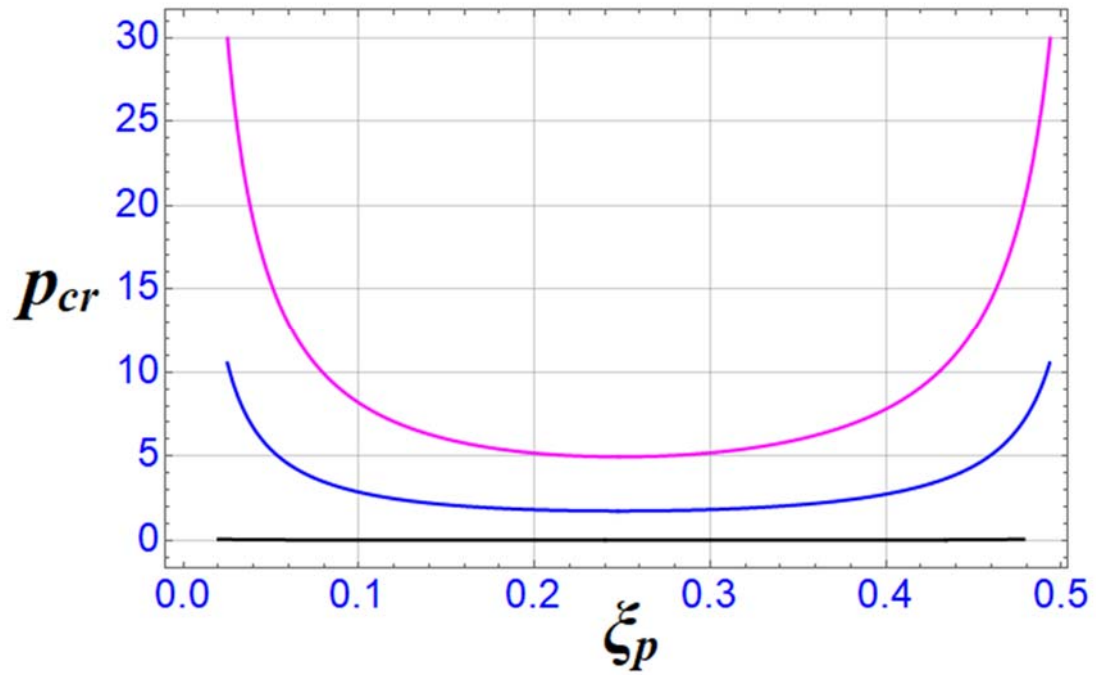
Σχήμα 3.13 Συνολική απεικόνιση των παραπάνω τριών διαγραμμάτων



Σχήμα 3.14 Συνολικά διαγράμματα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $c = 0.10, \lambda = 30, 90, 150$  (μαύρο, μπλε, magenta)

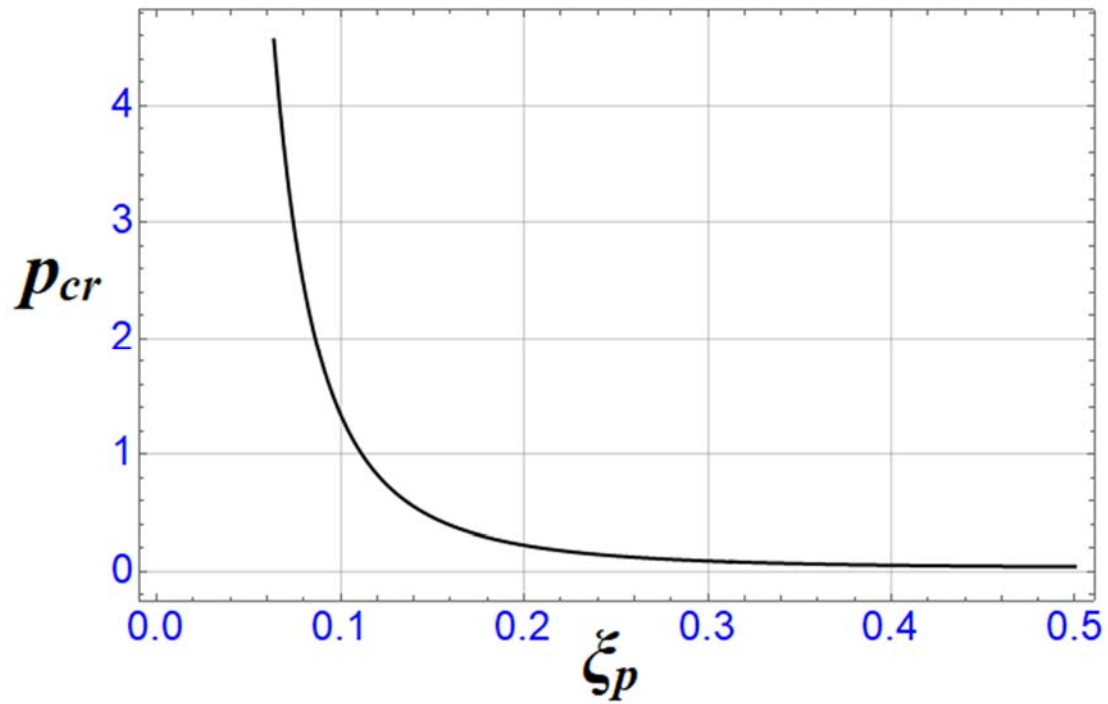


Σχήμα 3.15 Συνολικά διαγράμματα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  $c = 0.15, \lambda = 30, 90, 150$  (μαύρο, μπλε, magenta)

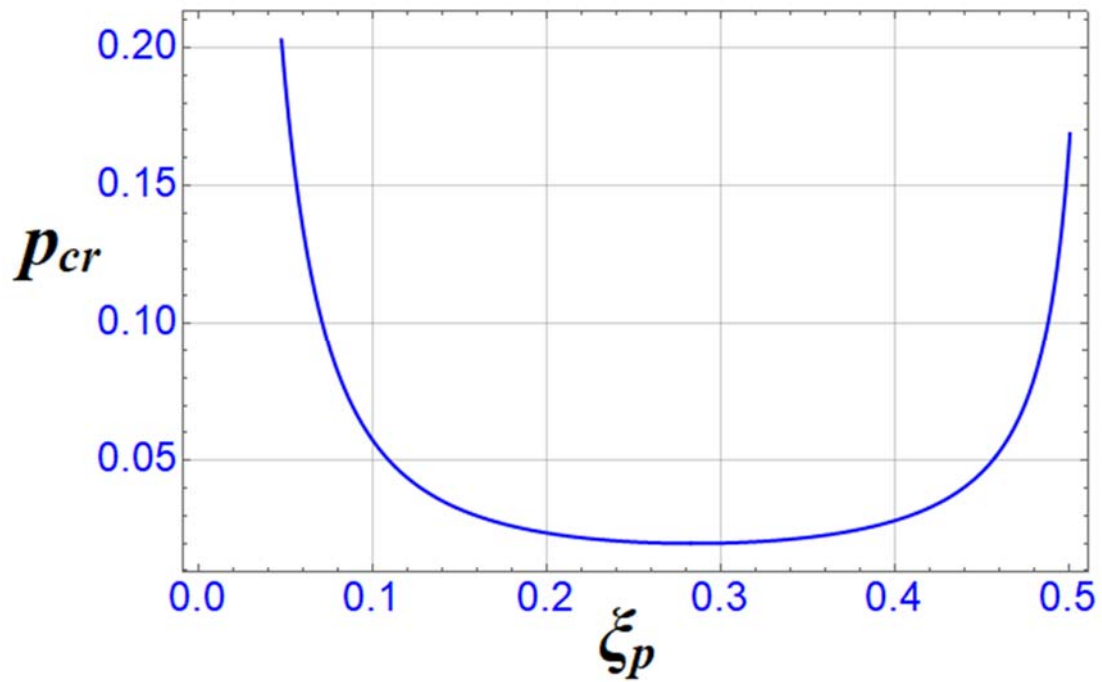


Σχήμα 3.16 Συνολικά διαγράμματα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφιαρθωτό τόξο με  
 $c = 0.20, \lambda = 30, 90, 150$  (μαύρο, μπλε, magenta)

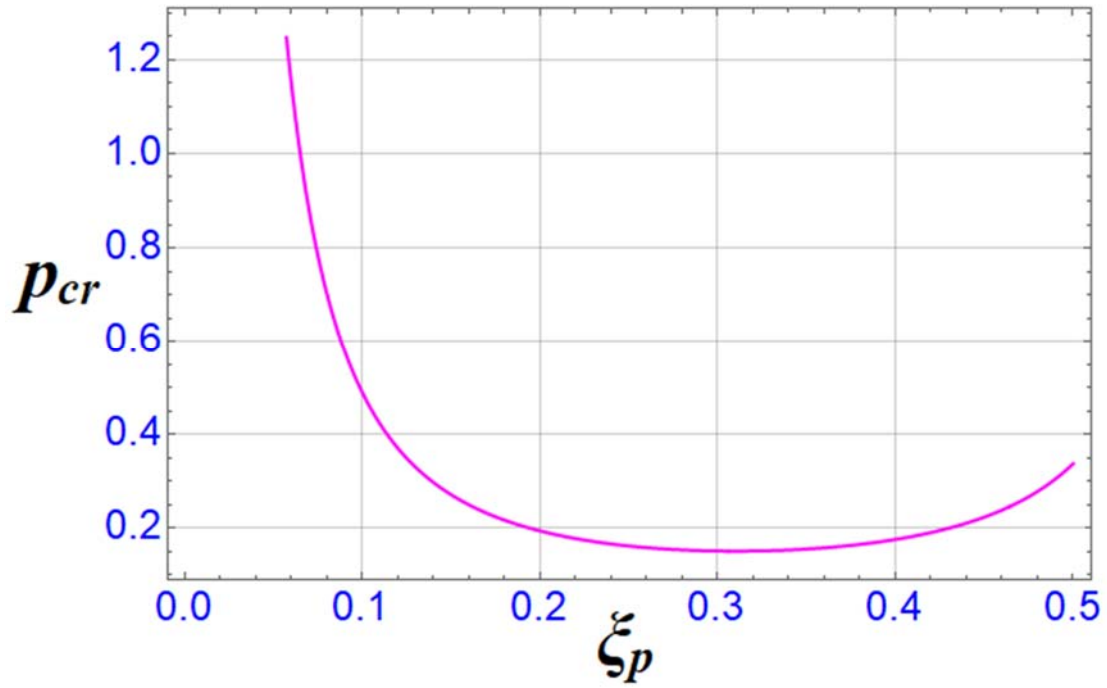
Αμφίπακτο τόξο



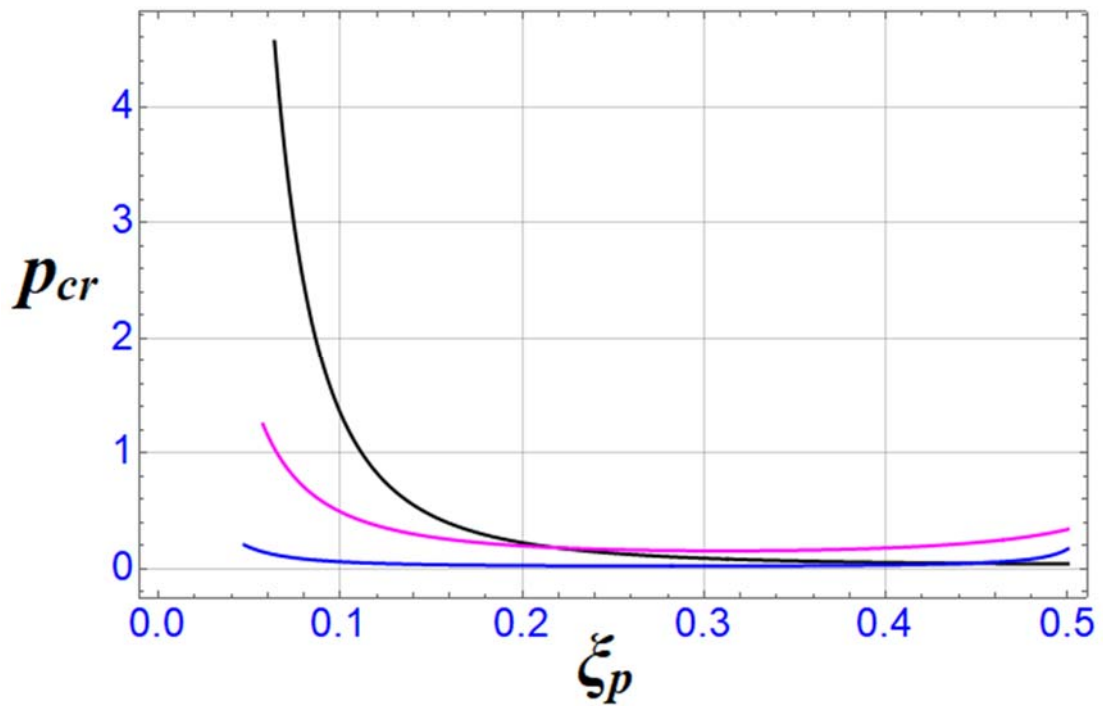
Σχήμα 3.17 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 30, c = 0.15$



Σχήμα 3.18 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 30, c = 0.20$

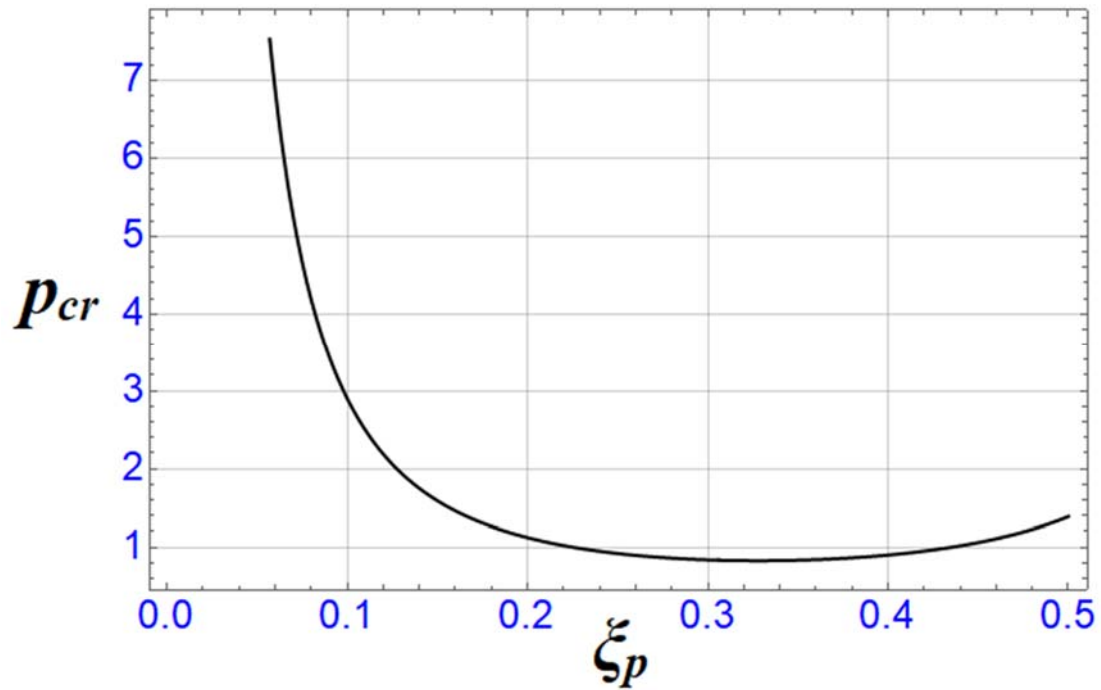


Σχήμα 3.19 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 30, c = 0.25$

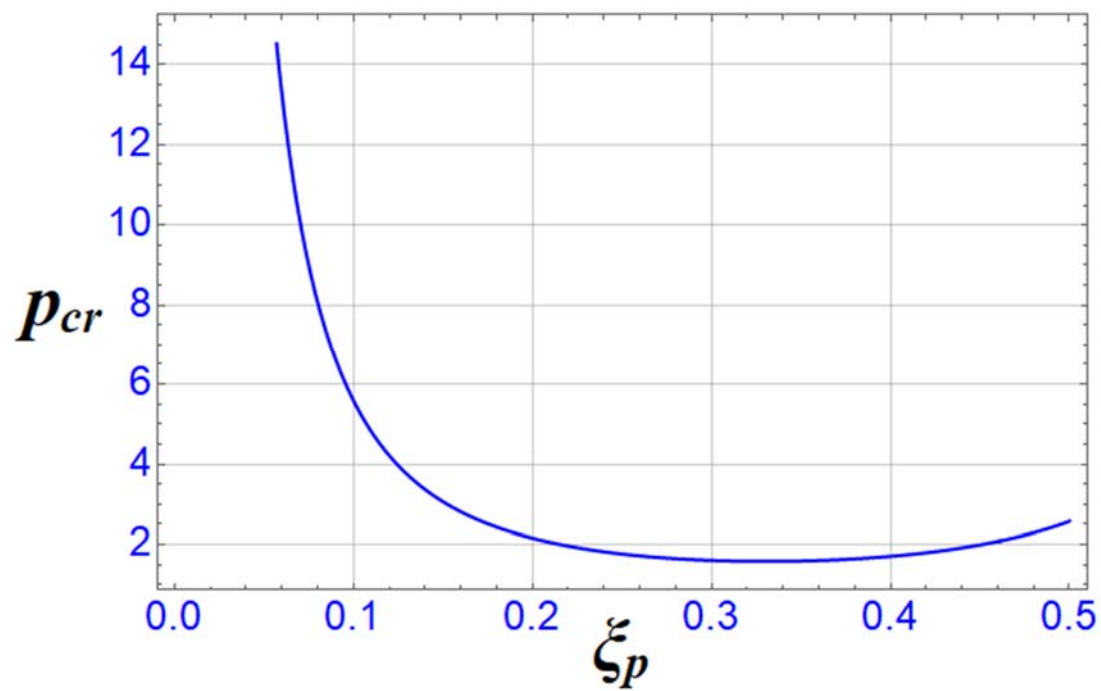


Σχήμα 3.20 Συνολική απεικόνιση των παραπάνω τριών διαγραμμάτων

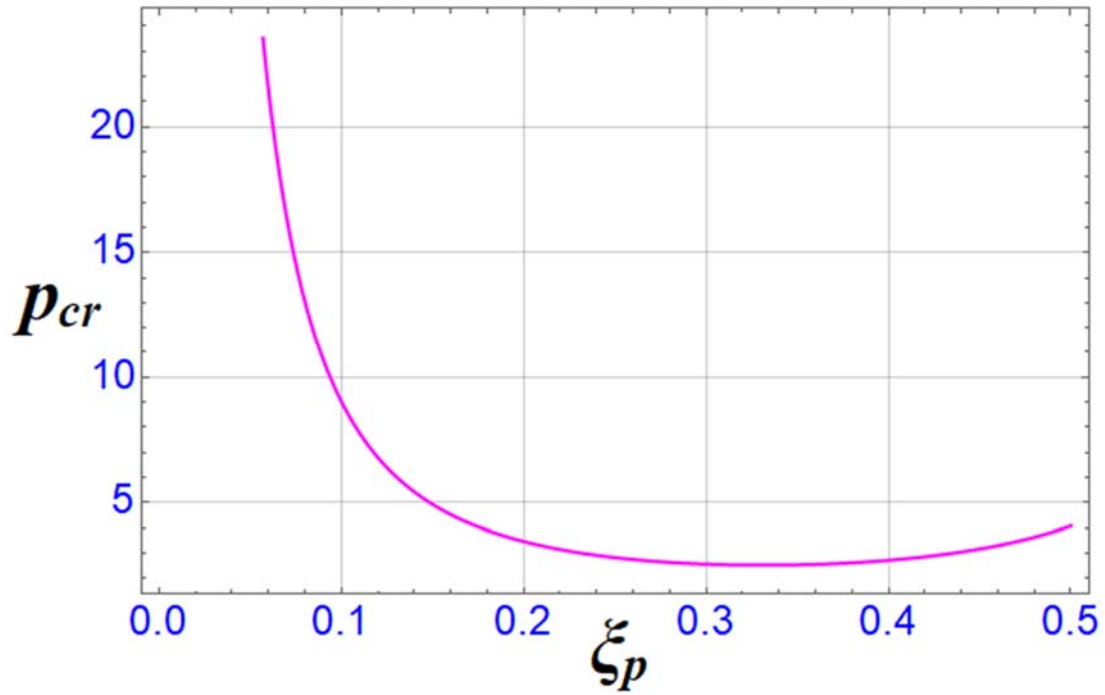




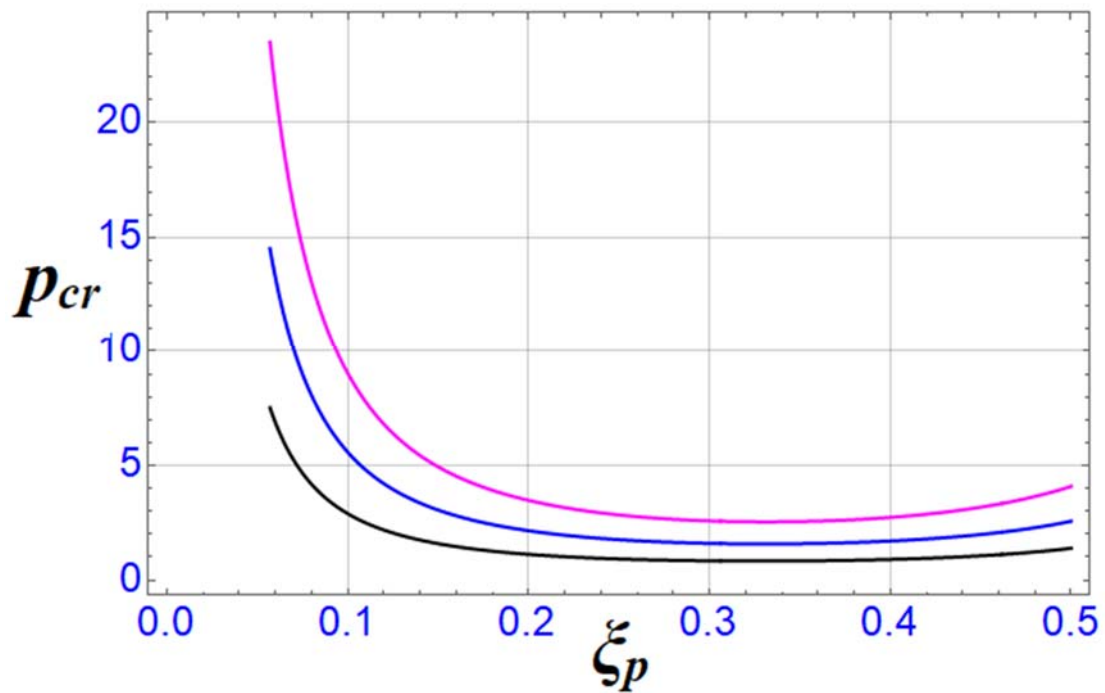
Σχήμα 3.21 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 90, c = 0.15$



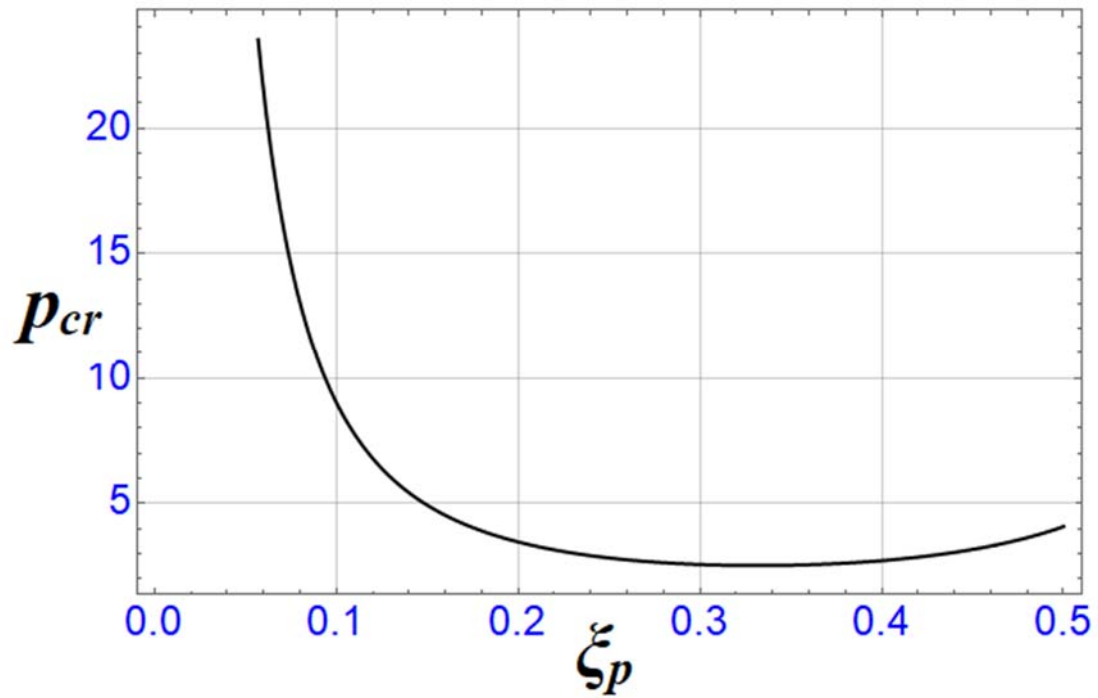
Σχήμα 3.22 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 90, c = 0.20$



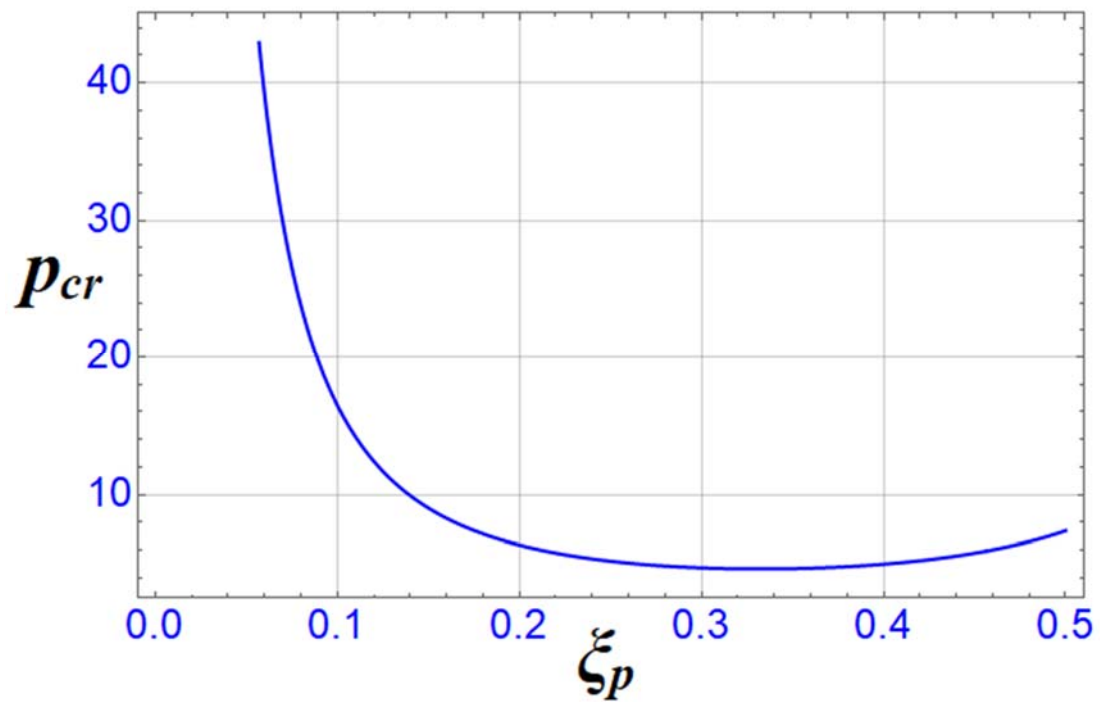
Σχήμα 3.23 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 90, c = 0.25$



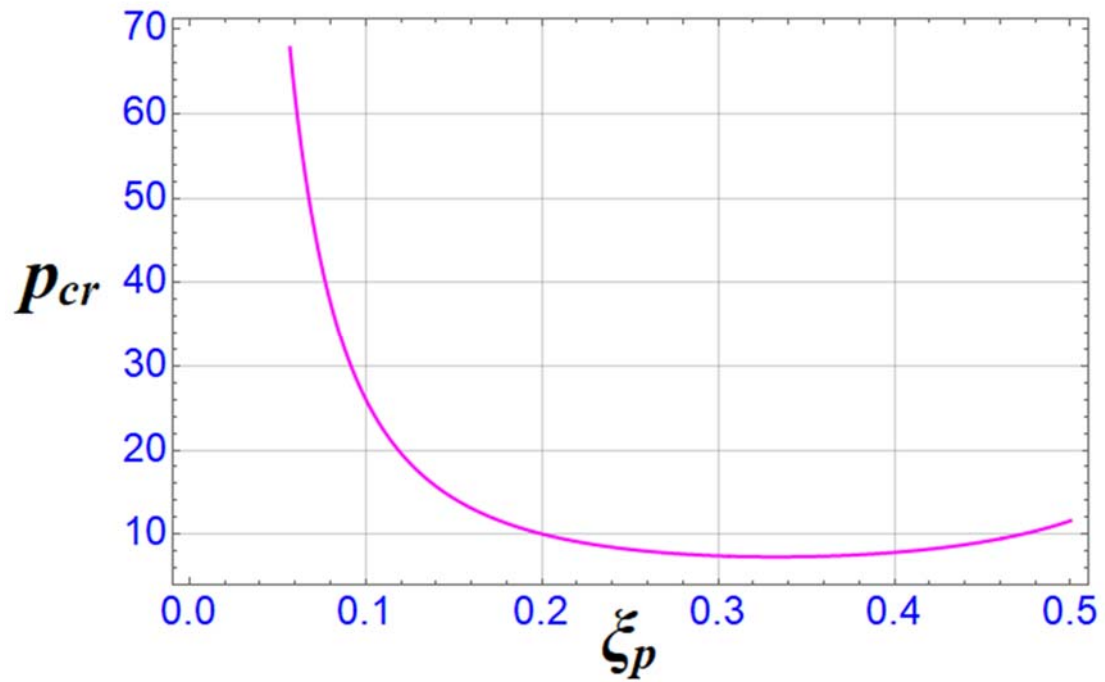
Σχήμα 3.24 Συνολική απεικόνιση των παραπάνω τριών διαγραμμάτων



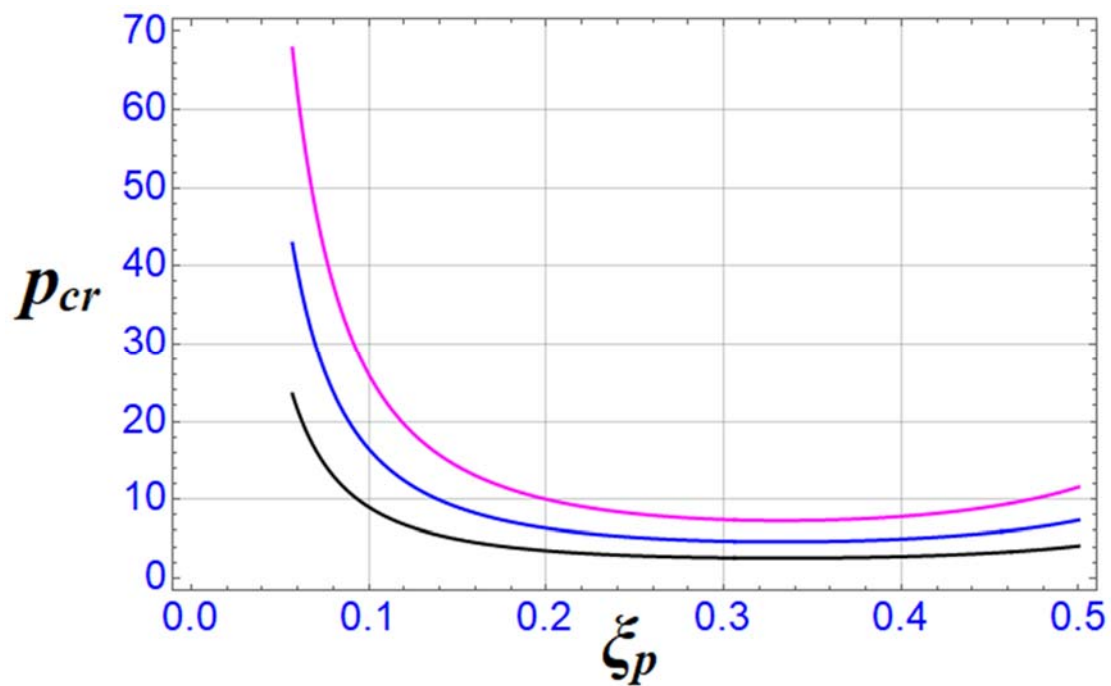
Σχήμα 3.25 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 150, c = 0.15$



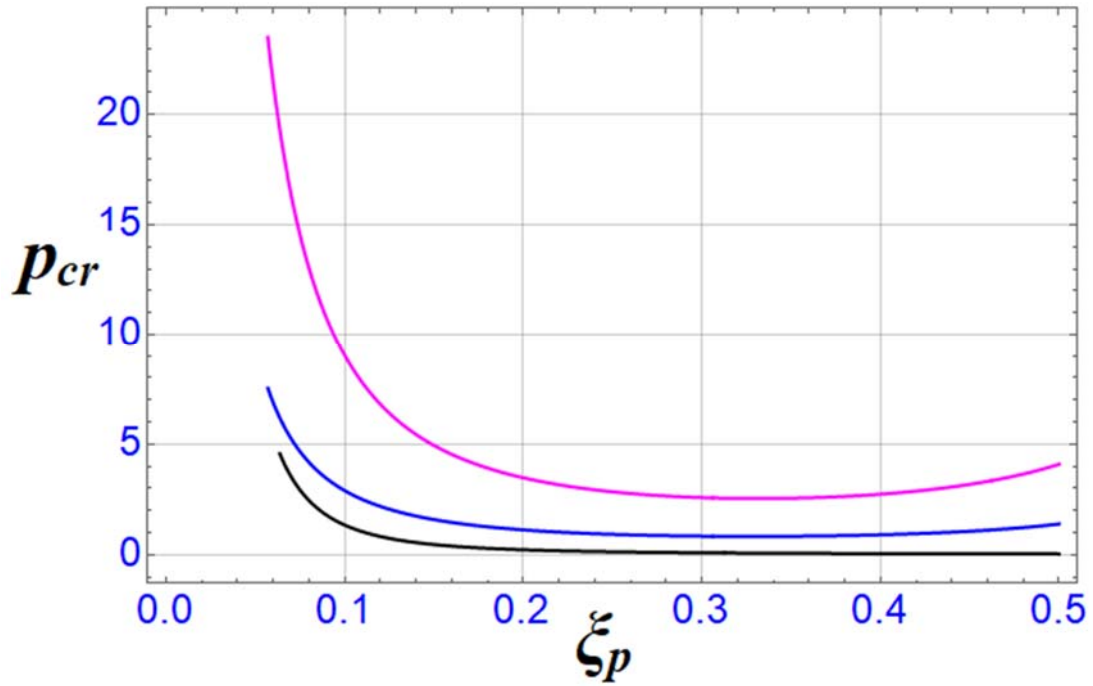
Σχήμα 3.26 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 150, c = 0.20$



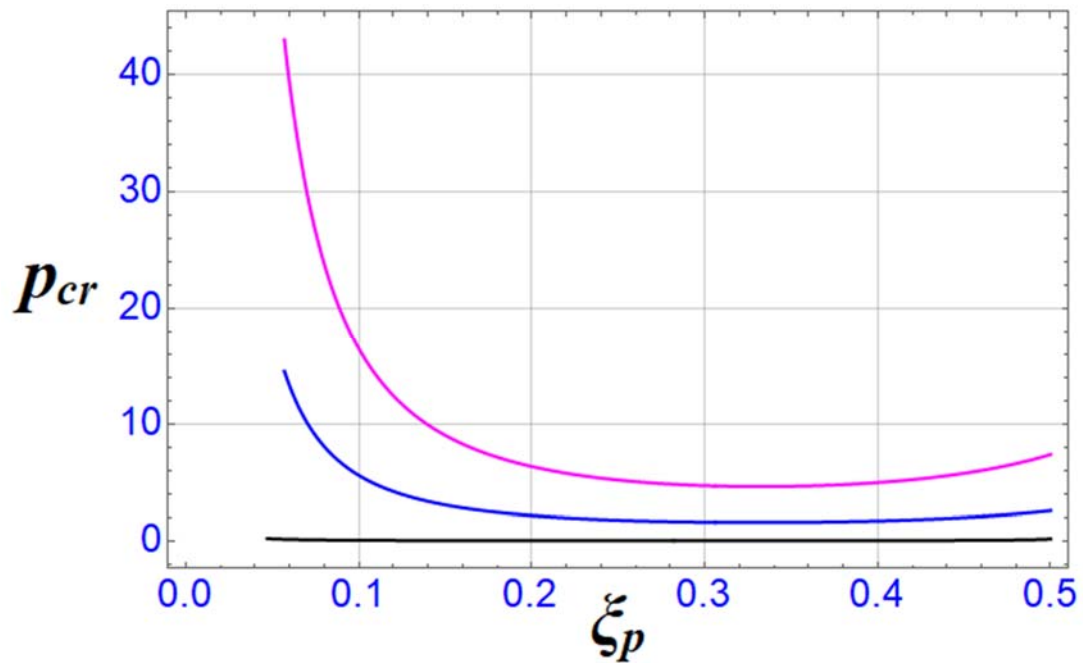
Σχήμα 3.27 Διάγραμμα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $\lambda = 150, c = 0.25$



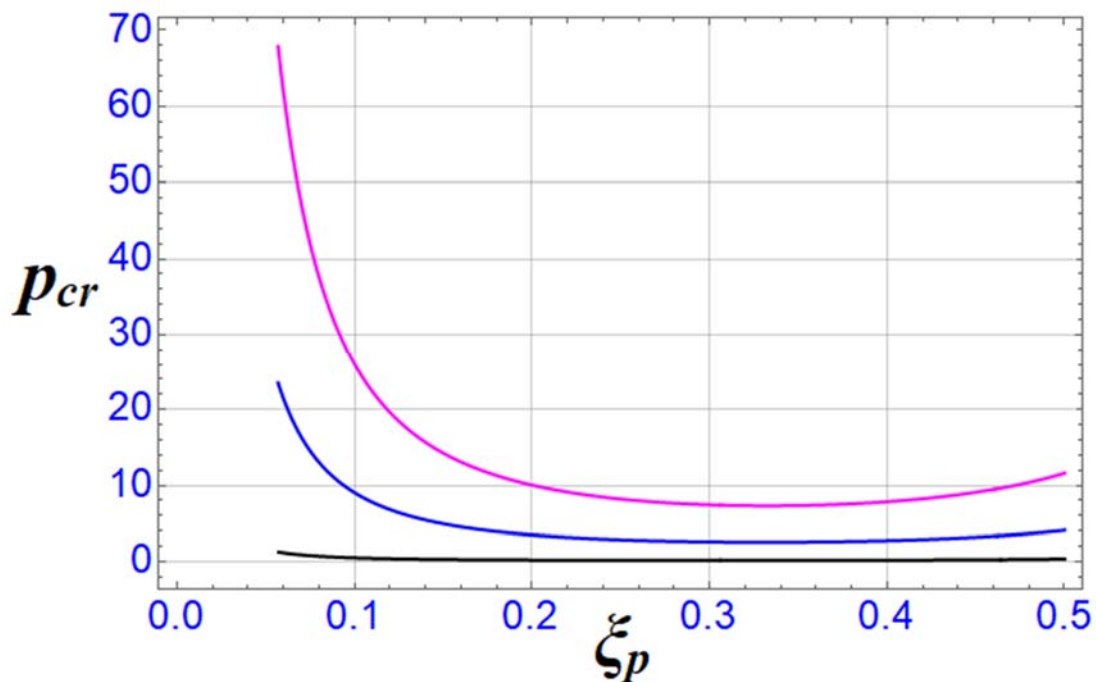
Σχήμα 3.28 Συνολική απεικόνιση των παραπάνω τριών διαγραμμάτων



Σχήμα 3.29 Συνολικά διαγράμματα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $c = 0.15, \lambda = 30, 90, 150$ , (μαύρο, μπλε, magenta)



Σχήμα 3.30 Συνολικά διαγράμματα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $c = 0.20, \lambda = 30, 90, 150$  (μαύρο, μπλε, magenta)



Σχήμα 3.31 Συνολικά διαγράμματα  $(\xi_p, p_{cr})$  για αμφίπακτο τόξο με  $c = 0.25, \lambda = 30, 90, 150$  (μαύρο, μπλε, magenta)

### 3.4.2 Σχολιασμός και ποιοτική ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Σε αντίθεση με την έννοια της λυγηρότητας  $\lambda$  για ευθύγραμμους φορείς με ή χωρίς μικρές αρχικές ατέλειες, όπου συνήθως τα φορτία (που οδηγούν σε λυγισμό) είναι οριζόντια θλιπτικά, για τοξωτούς φορείς αυτή διαφοροποιείται έντονα, καθώς τα φορτία που δρουν είναι είτε κατακόρυφα (συγκεντρωμένα ή καταμεμημένα) είτε ακτινικά.

Επειδή για τα χαμηλά τόξα η ανάλυση βασίζεται στην αλλαγή (αύξηση) του μήκους του κατά την παραμόρφωση, η αύξηση της παραμέτρου  $\lambda$  οδηγεί σε μεγαλύτερο αρχικό μήκος. Αυτή συνήθως προέρχεται είτε από την αύξηση του ανοίγματος  $L$  είτε από την αύξηση του ύψους στη στέψη  $c$  (είτε φυσικά και σε συνδυασμό). Όταν το αρχικό μήκος του τόξου μεγαλώνει, είναι ευκολότερη η καμπτική παραμόρφωση χωρίς λυγισμό, οπότε αναμένονται μεγαλύτερα κρίσιμα φορτία για μεγαλύτερες τιμές των  $\lambda$  και  $c$ .

Τούτο καθίσταται άμεσα αντιληπτό από τα προηγηθέντα γραφήματα, τόσο για το αμφιαρθρωτό όσο και για το αμφίπακτο τόξο. Λόγω της αδυναμίας

στροφής στην περιοχή της στήριξης στα αμφίπακτα τόξα, η απώλεια της ευστάθειας λαμβάνει χώραν για τιμές του  $\zeta_p$  όχι αμέσως μετά την αρχή των αξόνων.

Πέραν των ανωτέρω, επειδή η μέθοδος δεν δύναται να αναγνωρίσει το είδος του κρίσιμου φορτίου (ακαριαίου ή διακλαδικού) λυγισμού, τα αποτελέσματα αποτελούν περιβάλλουσα άνω φραγμάτων των εν λόγω φορτίων. Πάντως, από φυσικής πλευράς, τα μεγάλα φορτία που προκύπτουν για θέσεις του φορτίου κοντά στην στήριξη οφείλονται στο γεγονός ότι ο μοναδικός ενεργειακά τρόπος απώλειας της ευστάθειας σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η διακλάδωση. Όσο το φορτίο πλησιάζει στα τέταρτα του ανοίγματος, το φορτίο μειώνεται, καθώς από διακλαδικό μεταπίπτει σε ακαριαίου λυγισμού, ο οποίος προεξάρχει καθώς πλησιάζουμε στην στέψη. Τούτο είναι περισσότερο πρόδηλο για το αμφιαρθωτό τόξο, και λιγότερο για το αμφίπακτο, λόγω της υπερστατικότητας του.

Τέλος, για κυκλικά τόξα (που αποτελούν υποσύνολο των παραβολικών), τα ευρήματα βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με αυτά του Plaut [1].

### **3.5 Βιβλιογραφία**

- [1] Plaut, R. H. (1979) “Influence of Load Position on the Stability of Shallow Arches” *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* 30, pp. 548-552. <https://doi.org/10.1007/BF01588902>
- [2] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W. (1983) “On the buckling and imperfection-sensitivity of arches with and without prestress” *International Journal of Solids and Structures* 19(5), pp. 445-459. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(83\)90055-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(83)90055-0)
- [3] Keller, H.B. (1983), *Numerical Solution of Two-Point Boundary-Value Problems*, Dover Publications.
- [4] Κουνάδης, Α.Ν. (1997), *Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
- [5] Κουνάδης, Α.Ν. (1997), *Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα.
- [6] Σοφιανόπουλος, Δ.Σ. (2015), *Μη Γραμμική Ευστάθεια Κατασκευών με Έμφαση στις Χαλύβδινες Κατασκευές*, ΣΕΑΒ, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα, ISBN: 978-960-603-219-6, [www.kallipos.gr](http://www.kallipos.gr).

## Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα - Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Από το περιεχόμενο της Διπλωματικής Εργασίας κανείς μπορεί να αντλήσει τα ακόλουθα συμπεράσματα:

1. Το πρόβλημα απώλειας ευστάθειας χαμηλών τόξων υπό σημειακό φορτίο βαρύτητας είναι έντονα μη γραμμικό, επιδέχεται μόνο προσεγγιστικών λύσεων και επηρεάζεται από την αλλαγή του μήκους των φορέων αυτών κατά την παραμόρφωση.
2. Η προταθείσα διαδικασία μέσω της μεθόδου Galerkin και χρήσης δύο προσεγγιστικών συναρτήσεων βάσης οδηγεί σε περιβάλλουσα άνω φραγμάτων των φορτίων λυγισμού, που βρίσκονται σε πολύ καλή συμφωνία με υφιστάμενα σχετικά αποτελέσματα για κυκλικά τόξα.
3. Η συμμετρία του προβλήματος επιτρέπει σχετικά εύκολους συμβολικούς υπολογισμούς, και οδηγεί σε κλειστές εκφράσεις των κρίσιμων φορτίων.
4. Καθώς αυξάνεται η λυγηρότητα αλλά και το ύψος στη στέψη των τόξων (είτε αμφιαρθρών είτε αμφίπακτων) αυξάνονται και τα αντίστοιχα κρίσιμα φορτία, χωρίς όμως να υφίσταται η δυνατότητα προσδιορισμού της μορφής απώλειας της ευστάθειας.

Για περαιτέρω έρευνα, προτείνονται τα εξής:

1. Η χρήση εξευγενισμένων αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση του προβλήματος, με παράλληλη εφαρμογή ανώτερων κριτηρίων ευστάθειας για συνεχείς καμπύλους φορείς.
2. Η μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας για πολλαπλά σημειακά κατακόρυφα φορτία βαρύτητας (με κατάλληλη απόσταση μεταξύ τους και κατανομή του μεγέθους αυτών), ώστε να αντιπροσωπεύουν τοξωτούς φορείς γεφυρών κάτω διαβάσεως με αναρτήρες, και η επίλυση του όλου προβλήματος.



**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Αρχεία Mathematica**

**Για το αμφιαρθωτό τόξο**

Συμβολικός Υπολογισμός g11

ClearAll[g1, g11, ξ, c, λ, ξp, Lg1, p, g11a, part1g11a, part2g11a, part3g11a, olok1g11, olok2g11]

g1[ξ\_]:= ξ<sup>4</sup> - 2ξ<sup>3</sup> + ξ

s1 = ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> g1'[ξ]<sup>2</sup> dξ

Lg1 = g1''''[ξ] +  $\frac{8g1''[ξ]}{3}c^2λ^2 - 2g1''[ξ]s1 + π^4pDiracDelta[ξ - ξp]//TraditionalForm$

g11a = ExpandAll[g1[ξ]Lg1]

part1g11a = ExpandAll[ξ(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ + π<sup>4</sup>pδ(ξ - ξp) -  $\frac{408ξ^2}{35} + \frac{408ξ}{35} + 24$ )]

part2g11a = ExpandAll[-2ξ<sup>3</sup>(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ + π<sup>4</sup>pδ(ξ - ξp) -  $\frac{408ξ^2}{35} + \frac{408ξ}{35} + 24$ )]

part3g11a = ExpandAll[ξ<sup>4</sup>(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ + π<sup>4</sup>pδ(ξ - ξp) -  $\frac{408ξ^2}{35} + \frac{408ξ}{35} + 24$ )]

olok1g11 = ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> (24ξ +  $\frac{408ξ^2}{35} - 32c^2λ^2ξ^2 - \frac{408ξ^3}{35} + 32c^2λ^2ξ^3$ ) dξ + ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> (-48ξ<sup>3</sup> -  $\frac{816ξ^4}{35} + 64c^2λ^2ξ^4 + \frac{816ξ^5}{35} - 64c^2λ^2ξ^5$ ) dξ + ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> (24ξ<sup>4</sup> +  $\frac{408ξ^5}{35} - 32c^2λ^2ξ^5 - \frac{408ξ^6}{35} + 32c^2λ^2ξ^6$ ) dξ

olok2g11 = pπ<sup>4</sup>ξp - 2pπ<sup>4</sup>ξp<sup>3</sup> + pπ<sup>4</sup>ξp<sup>4</sup>

**g11 = olok1g11 + olok2g11**

$\frac{17}{35}$

$\frac{8}{3}c^2λ^2(12ξ^2 - 12ξ) + π^4pδ(ξ - ξp) - \frac{34}{35}(12ξ^2 - 12ξ) + 24$

ξ(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ + π<sup>4</sup>pδ(ξ - ξp) -  $\frac{408ξ^2}{35} + \frac{408ξ}{35} + 24$ ) - 2ξ<sup>3</sup>(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ + π<sup>4</sup>pδ(ξ - ξp) -  $\frac{408ξ^2}{35} + \frac{408ξ}{35} + 24$ ) + ξ<sup>4</sup>(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ + π<sup>4</sup>pδ(ξ - ξp) -  $\frac{408ξ^2}{35} + \frac{408ξ}{35} + 24$ )

24ξ +  $\frac{408ξ^2}{35} - 32c^2λ^2ξ^2 - \frac{408ξ^3}{35} + 32c^2λ^2ξ^3 + pπ^4ξDiracDelta[ξ - ξp]$

-48ξ<sup>3</sup> -  $\frac{816ξ^4}{35} + 64c^2λ^2ξ^4 + \frac{816ξ^5}{35} - 64c^2λ^2ξ^5 - 2pπ^4ξ^3DiracDelta[ξ - ξp]$

24ξ<sup>4</sup> +  $\frac{408ξ^5}{35} - 32c^2λ^2ξ^5 - \frac{408ξ^6}{35} + 32c^2λ^2ξ^6 + pπ^4ξ^4DiracDelta[ξ - ξp]$

$$\frac{6458}{1225} - \frac{136c^2\lambda^2}{105}$$

$$p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

$$\frac{6458}{1225} - \frac{136c^2\lambda^2}{105} + p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

Συμβολικός Υπολογισμός g12

ClearAll[g1, g2, g12, ξ, c, λ, ξp, Lg2, p, g12a, part1g12a, part2g12a, part3g12a, olok1g12, olok2g12]

$$g1[\xi_] := \xi^4 - 2\xi^3 + \xi$$

$$g2[\xi_] := 3\xi^5 - 10\xi^3 + 7\xi$$

$$s2 = \int_0^1 g2'[\xi]^2 d\xi$$

$$Lg2 = g2''''[\xi] + \frac{8g2''[\xi]}{3}c^2\lambda^2 - 2g2''[\xi]s2 + \pi^4 p \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] // \text{TraditionalForm}$$

$$g12a = \text{ExpandAll}[g1[\xi]Lg2]$$

$$\text{part1g12a} = \text{ExpandAll}[\xi(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})]$$

$$\text{part2g12a} = \text{ExpandAll}[-2\xi^3(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})]$$

$$\text{part3g12a} = \text{ExpandAll}[\xi^4(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})]$$

$$\text{olok1g12} = \int_0^1 (\frac{25560\xi^2}{7} - 160c^2\lambda^2\xi^2 - \frac{23040\xi^4}{7} + 160c^2\lambda^2\xi^4) d\xi + \int_0^1 (-\frac{51120\xi^4}{7} + 320c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{46080\xi^6}{7} - 320c^2\lambda^2\xi^6) d\xi + \int_0^1 (\frac{25560\xi^5}{7} - 160c^2\lambda^2\xi^5 - \frac{23040\xi^7}{7} + 160c^2\lambda^2\xi^7) d\xi$$

$$\text{olok2g12} = p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

$$g12 = \text{olok1g12} + \text{olok2g12}$$

$$\frac{192}{7}$$

$$\frac{8}{3}c^2\lambda^2(60\xi^3 - 60\xi) + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{384}{7}(60\xi^3 - 60\xi) + 360\xi$$

$$\xi(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7}) - 2\xi^3(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7}) + \xi^4(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})$$

$$\frac{25560\xi^2}{7} - 160c^2\lambda^2\xi^2 - \frac{23040\xi^4}{7} + 160c^2\lambda^2\xi^4 + p\pi^4\xi \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$-\frac{51120\xi^4}{7} + 320c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{46080\xi^6}{7} - 320c^2\lambda^2\xi^6 - 2p\pi^4\xi^3 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$\frac{25560\xi^5}{7} - 160c^2\lambda^2\xi^5 - \frac{23040\xi^7}{7} + 160c^2\lambda^2\xi^7 + p\pi^4\xi^4\text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$\frac{11556}{49} - \frac{68c^2\lambda^2}{7}$$

$$p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

$$\frac{11556}{49} - \frac{68c^2\lambda^2}{7} + p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

Συμβολικός Υπολογισμός g21

ClearAll[g1, g2, g21, ξ, c, λ, ξp, Lg1, p, g21a, part1g21a, part2g21a, part3g21a, olok1g21, olok2g21]

$$g1[\xi_] := \xi^4 - 2\xi^3 + \xi$$

$$g2[\xi_] := 3\xi^5 - 10\xi^3 + 7\xi$$

$$s1 = \int_0^1 g1'[\xi]^2 d\xi$$

$$Lg1 = g1''[\xi] + \frac{8g1''[\xi]}{3}c^2\lambda^2 - 2g1''[\xi]s1 + \pi^4 p \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] // \text{TraditionalForm}$$

$$g21a = \text{ExpandAll}[g2[\xi]Lg1]$$

$$\text{part1g21a} = \text{ExpandAll}[7\xi(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{408\xi^2}{35} + \frac{408\xi}{35} + 24)]$$

$$\text{part2g21a} = \text{ExpandAll}[-10\xi^3(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{408\xi^2}{35} + \frac{408\xi}{35} + 24)]$$

$$\text{part3g21a} = \text{ExpandAll}[3\xi^5(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{408\xi^2}{35} + \frac{408\xi}{35} + 24)]$$

$$\text{lok1g21} = \int_0^1 (168\xi + \frac{408\xi^2}{5} - 224c^2\lambda^2\xi^2 - \frac{408\xi^3}{5} + 224c^2\lambda^2\xi^3) d\xi + \int_0^1 (-240\xi^3 - \frac{816\xi^4}{7} + 320c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{816\xi^5}{7} - 320c^2\lambda^2\xi^5) d\xi + \int_0^1 (72\xi^5 + \frac{1224\xi^6}{35} - 96c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{1224\xi^7}{35} + 96c^2\lambda^2\xi^7) d\xi$$

$$\text{olok2g21} = 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5$$

$$g21 = \text{olok1g21} + \text{olok2g21}$$

$$\frac{17}{35}$$

$$\frac{8}{3}c^2\lambda^2(12\xi^2 - 12\xi) + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{34}{35}(12\xi^2 - 12\xi) + 24$$

$$7\xi(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{408\xi^2}{35} + \frac{408\xi}{35} + 24) - 10\xi^3(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{408\xi^2}{35} + \frac{408\xi}{35} + 24) + 3\xi^5(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{408\xi^2}{35} + \frac{408\xi}{35} + 24)$$

$$\begin{aligned}
 & 168\xi + \frac{408\xi^2}{5} - 224c^2\lambda^2\xi^2 - \frac{408\xi^3}{5} + 224c^2\lambda^2\xi^3 + 7p\pi^4\xi\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
 & - 240\xi^3 - \frac{816\xi^4}{7} + 320c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{816\xi^5}{7} - 320c^2\lambda^2\xi^5 - 10p\pi^4\xi^3\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
 & 72\xi^5 + \frac{1224\xi^6}{35} - 96c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{1224\xi^7}{35} + 96c^2\lambda^2\xi^7 + 3p\pi^4\xi^5\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
 & \frac{9687}{245} - \frac{68c^2\lambda^2}{7} \\
 & 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5 \\
 & \frac{9687}{245} - \frac{68c^2\lambda^2}{7} + 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5
 \end{aligned}$$

Συμβολικός Υπολογισμός g22

ClearAll[g1, g2, g22, ξ, c, λ, ξp, Lg2, p, g22a, part1g22a, part2g22a, part3g22a, olok1g22, olok2g22]

g2[ξ\_] := 3ξ<sup>5</sup> - 10ξ<sup>3</sup> + 7ξ

$$s2 = \int_0^1 g2'[\xi]^2 d\xi$$

$$Lg2 = g2''''[\xi] + \frac{8g2''[\xi]}{3}c^2\lambda^2 - 2g2''[\xi]s2 + \pi^4p\text{DiracDelta}[\xi - \xi p]//\text{TraditionalForm}$$

g22a = ExpandAll[g2[ξ]Lg2]

$$\text{part1g22a} = \text{ExpandAll}\left[7\xi(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})\right]$$

$$\text{part2g22a} = \text{ExpandAll}\left[-10\xi^3(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})\right]$$

$$\text{part3g22a} = \text{ExpandAll}\left[3\xi^5(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7})\right]$$

$$\text{olok1g22} = \int_0^1 (25560\xi^2 - 1120c^2\lambda^2\xi^2 - 23040\xi^4 + 1120c^2\lambda^2\xi^4) d\xi + \int_0^1 \left(-\frac{255600\xi^4}{7} + 1600c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{230400\xi^6}{7} - 1600c^2\lambda^2\xi^6\right) d\xi + \int_0^1 \left(\frac{76680\xi^6}{7} - 480c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{69120\xi^8}{7} + 480c^2\lambda^2\xi^8\right) d\xi$$

$$\text{olok2g22} = 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5$$

$$g22 = \text{olok1g22} + \text{olok2g22}$$

$$\frac{192}{7}$$

$$\frac{8}{3}c^2\lambda^2(60\xi^3 - 60\xi) + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{384}{7}(60\xi^3 - 60\xi) + 360\xi$$

$$\begin{aligned}
& 7\xi(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p\delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7}) - 10\xi^3(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p\delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} + \frac{25560\xi}{7}) + 3\xi^5(160c^2\lambda^2\xi^3 - 160c^2\lambda^2\xi + \pi^4 p\delta(\xi - \xi p) - \frac{23040\xi^3}{7} \\
& \quad + \frac{25560\xi}{7}) \\
& 25560\xi^2 - 1120c^2\lambda^2\xi^2 - 23040\xi^4 + 1120c^2\lambda^2\xi^4 + 7p\pi^4\xi\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
& - \frac{255600\xi^4}{7} + 1600c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{230400\xi^6}{7} - 1600c^2\lambda^2\xi^6 - 10p\pi^4\xi^3\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
& \frac{76680\xi^6}{7} - 480c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{69120\xi^8}{7} + 480c^2\lambda^2\xi^8 + 3p\pi^4\xi^5\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
& \frac{87168}{49} - \frac{512c^2\lambda^2}{7} \\
& 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5 \\
& \frac{87168}{49} - \frac{512c^2\lambda^2}{7} + 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5
\end{aligned}$$

Συμβολικός Υπολογισμός Κρίσιμου Φορτίου

ClearAll[g11, g12, g21, g22, c, λ, ξp, p, RE1, RE2, UU1, UU2, pcr]

$$g11 = \frac{6458}{1225} - \frac{136c^2\lambda^2}{105} + p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4;$$

$$g12 = \frac{11556}{49} - \frac{68c^2\lambda^2}{7} + p\pi^4\xi p - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4;$$

$$g21 = \frac{9687}{245} - \frac{68c^2\lambda^2}{7} + 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5;$$

$$g22 = \frac{87168}{49} - \frac{512c^2\lambda^2}{7} + 7p\pi^4\xi p - 10p\pi^4\xi p^3 + 3p\pi^4\xi p^5;$$

RE1 = ExpandAll[g11g22]

UU1 = CoefficientList[RE1, p]

RE2 = ExpandAll[g12g21]

UU2 = CoefficientList[RE2, p]

equat = RE1 - RE2

CoefficientList[equat, p]

FullSimplify[Solve[equat == 0, p]]

$$\begin{aligned} & \frac{562930944}{60025} - \frac{23064576c^2\lambda^2}{8575} + \frac{69632c^4\lambda^4}{735} + \frac{2224406p\pi^4\xi p}{1225} - \frac{8632}{105}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p + 7p^2\pi^8\xi p^2 - \frac{884596}{245}p\pi^4\xi p^3 + \frac{3344}{21}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{87168}{49}p\pi^4\xi p^4 - 24p^2\pi^8\xi p^4 - \frac{512}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 + \frac{19374p\pi^4\xi p^5}{1225} \\ & + 7p^2\pi^8\xi p^5 - \frac{136}{35}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5 + 23p^2\pi^8\xi p^6 - 10p^2\pi^8\xi p^7 - 6p^2\pi^8\xi p^8 + 3p^2\pi^8\xi p^9 \\ & \left\{ \frac{562930944}{60025} - \frac{23064576c^2\lambda^2}{8575} + \frac{69632c^4\lambda^4}{735}, \frac{2224406p\pi^4\xi p}{1225} - \frac{8632}{105}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p - \frac{884596p\pi^4\xi p^3}{245} + \frac{3344}{21}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{87168p\pi^4\xi p^4}{49} - \frac{512}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 + \frac{19374p\pi^4\xi p^5}{1225} - \frac{136}{35}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5, 7p^2\pi^8\xi p^2 - 24p^2\pi^8\xi p^4 \right. \\ & \left. + 7p^2\pi^8\xi p^5 + 23p^2\pi^8\xi p^6 - 10p^2\pi^8\xi p^7 - 6p^2\pi^8\xi p^8 + 3p^2\pi^8\xi p^9 \right\} \\ & \frac{111942972}{12005} - \frac{4587756c^2\lambda^2}{1715} + \frac{4624c^4\lambda^4}{49} + \frac{414147}{245}p\pi^4\xi p - \frac{544}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p + 7p^2\pi^8\xi p^2 - \frac{597174}{245}p\pi^4\xi p^3 + \frac{816}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{9687}{245}p\pi^4\xi p^4 - 24p^2\pi^8\xi p^4 - \frac{68}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 + \frac{34668}{49}p\pi^4\xi p^5 + 7p^2\pi^8\xi p^5 \\ & - \frac{204}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5 + 23p^2\pi^8\xi p^6 - 10p^2\pi^8\xi p^7 - 6p^2\pi^8\xi p^8 + 3p^2\pi^8\xi p^9 \\ & \left\{ \frac{111942972}{12005} - \frac{4587756c^2\lambda^2}{1715} + \frac{4624c^4\lambda^4}{49}, \frac{414147p\pi^4\xi p}{245} - \frac{544}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p - \frac{597174p\pi^4\xi p^3}{245} + \frac{816}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{9687p\pi^4\xi p^4}{245} - \frac{68}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 + \frac{34668p\pi^4\xi p^5}{49} - \frac{204}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5, 7p^2\pi^8\xi p^2 - 24p^2\pi^8\xi p^4 + 7p^2\pi^8\xi p^5 \right. \\ & \left. + 23p^2\pi^8\xi p^6 - 10p^2\pi^8\xi p^7 - 6p^2\pi^8\xi p^8 + 3p^2\pi^8\xi p^9 \right\} \\ & \frac{3216084}{60025} - \frac{125796c^2\lambda^2}{8575} + \frac{272c^4\lambda^4}{735} + \frac{21953}{175}p\pi^4\xi p - \frac{472}{105}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p - \frac{287422}{245}p\pi^4\xi p^3 + \frac{128}{3}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{8697}{5}p\pi^4\xi p^4 - \frac{444}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 - \frac{847326p\pi^4\xi p^5}{1225} + \frac{884}{35}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5 \\ & \left\{ \frac{3216084}{60025} - \frac{125796c^2\lambda^2}{8575} + \frac{272c^4\lambda^4}{735}, \frac{21953p\pi^4\xi p}{175} - \frac{472}{105}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p - \frac{287422p\pi^4\xi p^3}{245} + \frac{128}{3}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{8697p\pi^4\xi p^4}{5} - \frac{444}{7}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 - \frac{847326p\pi^4\xi p^5}{1225} + \frac{884}{35}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5 \right\} \\ & \left\{ \left\{ p \rightarrow -\frac{4(-249 + 7c^2\lambda^2)(-9687 + 2380c^2\lambda^2)}{49\pi^4(-1 + \xi p)\xi p(9(427813 - 282442\xi p)\xi p^2 - 461013(1 + \xi p) + 140c^2\lambda^2(118 + \xi p(118 + 3\xi p(-334 + 221\xi p))))} \right\} \right\} \end{aligned}$$

**Για το αμφίπακτο τόξο**

Συμβολικός Υπολογισμός g11

ClearAll[g1, g11, ξ, c, λ, ξp, LLg1, p, g11a, part1g11a, part2g11a, part3g11a, olok1g11, olok2g11]

g1[ξ\_]:= ξ<sup>4</sup> - 2ξ<sup>3</sup> + ξ<sup>2</sup>

ss1 = ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> g1'[ξ]<sup>2</sup> dξ

LLg1 = g1''[ξ] +  $\frac{8g1''[\xi]}{3}c^2\lambda^2 - 2g1''[\xi]ss1 + \pi^4 p \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$ //TraditionalForm

g11a = ExpandAll[g1[ξ]LLg1]

part1g11a = ExpandAll[ξ<sup>2</sup>(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ +  $\frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}$ )]

part2g11a = ExpandAll[-2ξ<sup>3</sup>(32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ<sup>2</sup> - 32c<sup>2</sup>λ<sup>2</sup>ξ +  $\frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}$ )]

$$\text{part3g11a} = \text{ExpandAll}[\xi^4(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105})]$$

$$\begin{aligned} \text{olok1g11} = & \int_0^1 (\frac{2512\xi^2}{105} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^2 + \frac{16\xi^3}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{16\xi^4}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^4) d\xi + \int_0^1 (-\frac{5024\xi^3}{105} - \frac{32}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{32\xi^4}{35} + 64c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{32\xi^5}{35} - 64c^2\lambda^2\xi^5) d\xi \\ & + \int_0^1 (\frac{2512\xi^4}{105} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{16\xi^5}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^5 - \frac{16\xi^6}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^6) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{olok2g11} = p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

$$\text{g11} = \text{olok1g11} + \text{olok2g11}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{105} \\ & \frac{8}{3}c^2\lambda^2(12\xi^2 - 12\xi + 2) + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{4}{105}(12\xi^2 - 12\xi + 2) + 24 \\ & \xi^2(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) - 2\xi^3(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) + \xi^4(32c^2\lambda^2\xi^2 - 32c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) \\ & \quad - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) \\ & \frac{2512\xi^2}{105} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^2 + \frac{16\xi^3}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{16\xi^4}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^4 + p\pi^4\xi^2\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & - \frac{5024\xi^3}{105} - \frac{32}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{32\xi^4}{35} + 64c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{32\xi^5}{35} - 64c^2\lambda^2\xi^5 - 2p\pi^4\xi^3\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & \frac{2512\xi^4}{105} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{16\xi^5}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^5 - \frac{16\xi^6}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^6 + p\pi^4\xi^4\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & \frac{8828}{11025} - \frac{16c^2\lambda^2}{315} \\ & p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4 \\ & \frac{8828}{11025} - \frac{16c^2\lambda^2}{315} + p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4 \end{aligned}$$

Συμβολικός Υπολογισμός g12

ClearAll[g1, g2, g12, ξ, c, λ, ξp, Lg2, p, g12a, part1g12a, part2g12a, part3g12a, olok1g12, olok2g12]

$$g1[\xi_] := \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2$$

$$g2[\xi_] := \xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2$$

$$s2 = \int_0^1 g2'[\xi]^2 d\xi$$

$$\text{Lg2} = \text{g2}''''[\xi] + \frac{8\text{g2}''[\xi]}{3}c^2\lambda^2 - 2\text{g2}''[\xi]s2 + \pi^4 p \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] // \text{TraditionalForm}$$

$$\text{g12a} = \text{ExpandAll}[\text{g1}[\xi]\text{Lg2}]$$

$$\text{part1g12a} = \text{ExpandAll}\left[\xi^2\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\text{part2g12a} = \text{ExpandAll}\left[-2\xi^3\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\text{part3g12a} = \text{ExpandAll}\left[\xi^4\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \text{olok1g12} &= \int_0^1 \left(-\frac{1088\xi^2}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^2 + \frac{1808\xi^3}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^3 + \frac{16\xi^4}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^5\right) d\xi + \int_0^1 \left(\frac{2176\xi^3}{45} - \frac{32}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{3616\xi^4}{15} + 32c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{32\xi^5}{15} + 64c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{32\xi^6}{9} - \frac{320}{3}c^2\lambda^2\xi^6\right) d\xi \\ &+ \int_0^1 \left(-\frac{1088\xi^4}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{1808\xi^5}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{16\xi^6}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{16\xi^7}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^7\right) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{olok2g12} = p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

$$\text{g12} = \text{olok1g12} + \text{olok2g12}$$

$$\frac{2}{45}$$

$$\frac{8}{3}c^2\lambda^2(20\xi^3 - 12\xi^2 - 6\xi + 2) + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{4}{45}(20\xi^3 - 12\xi^2 - 6\xi + 2) + 120\xi - 24$$

$$\begin{aligned} &\xi^2\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right) - 2\xi^3\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right) \\ &+ \xi^4\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right) \end{aligned}$$

$$-\frac{1088\xi^2}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^2 + \frac{1808\xi^3}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^3 + \frac{16\xi^4}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^5 + p\pi^4\xi^2 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$\frac{2176\xi^3}{45} - \frac{32}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{3616\xi^4}{15} + 32c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{32\xi^5}{15} + 64c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{32\xi^6}{9} - \frac{320}{3}c^2\lambda^2\xi^6 - 2p\pi^4\xi^3 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$-\frac{1088\xi^4}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{1808\xi^5}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{16\xi^6}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{16\xi^7}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^7 + p\pi^4\xi^4 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$\frac{1894}{1575} - \frac{8c^2\lambda^2}{105}$$

$$p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$

$$\frac{1894}{1575} - \frac{8c^2\lambda^2}{105} + p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4$$



Συμβολικός Υπολογισμός g21

ClearAll[g1, g2, g21, ξ, c, λ, ξp, Lg1, p, g21a, part1g21a, part2g21a, part3g21a, part4g21, olok1g21, olok2g21]

$$g1[\xi] := \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2$$

$$g2[\xi] := \xi^5 - \xi^4 - \xi^3 + \xi^2$$

$$s1 = \int_0^1 g1'[\xi]^2 d\xi$$

$$Lg1 = g1''''[\xi] + \frac{8g1''[\xi]}{3} c^2 \lambda^2 - 2g1''[\xi] s1 + \pi^4 p \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] // \text{TraditionalForm}$$

g21a = ExpandAll[g2[\xi] Lg1]

$$\text{part1g21a} = \text{ExpandAll}[\xi^2 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105})]$$

$$\text{part2g21a} = \text{ExpandAll}[-\xi^3 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105})]$$

$$\text{part3g21a} = \text{ExpandAll}[-\xi^4 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105})]$$

$$\text{part4g21} = \text{ExpandAll}[\xi^5 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105})]$$

$$\begin{aligned} \text{olok1g21} = & \int_0^1 (\frac{2512\xi^2}{105} + \frac{16}{3} c^2 \lambda^2 \xi^2 + \frac{16\xi^3}{35} - 32c^2 \lambda^2 \xi^3 - \frac{16\xi^4}{35} + 32c^2 \lambda^2 \xi^4) d\xi + \int_0^1 (-\frac{2512\xi^3}{105} - \frac{16}{3} c^2 \lambda^2 \xi^3 - \frac{16\xi^4}{35} + 32c^2 \lambda^2 \xi^4 + \frac{16\xi^5}{35} - 32c^2 \lambda^2 \xi^5) d\xi \\ & + \int_0^1 (-\frac{2512\xi^4}{105} - \frac{16}{3} c^2 \lambda^2 \xi^4 - \frac{16\xi^5}{35} + 32c^2 \lambda^2 \xi^5 + \frac{16\xi^6}{35} - 32c^2 \lambda^2 \xi^6) d\xi + \int_0^1 (\frac{2512\xi^5}{105} + \frac{16}{3} c^2 \lambda^2 \xi^5 + \frac{16\xi^6}{35} - 32c^2 \lambda^2 \xi^6 - \frac{16\xi^7}{35} + 32c^2 \lambda^2 \xi^7) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{olok2g21} = p\pi^4 \xi p^2 - p\pi^4 \xi p^3 - p\pi^4 \xi p^4 + p\pi^4 \xi p^5$$

**g21 = olok1g21 + olok2g21**

$$\frac{2}{105}$$

$$\frac{8}{3} c^2 \lambda^2 (12\xi^2 - 12\xi + 2) + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{4}{105} (12\xi^2 - 12\xi + 2) + 24$$

$$\begin{aligned} & \xi^2 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) - \xi^3 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) - \xi^4 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) \\ & - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) + \xi^5 (32c^2 \lambda^2 \xi^2 - 32c^2 \lambda^2 \xi + \frac{16c^2 \lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^2}{35} + \frac{16\xi}{35} + \frac{2512}{105}) \end{aligned}$$

$$\frac{2512\xi^2}{105} + \frac{16}{3} c^2 \lambda^2 \xi^2 + \frac{16\xi^3}{35} - 32c^2 \lambda^2 \xi^3 - \frac{16\xi^4}{35} + 32c^2 \lambda^2 \xi^4 + p\pi^4 \xi^2 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2512\xi^3}{105} - \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{16\xi^4}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^4 + \frac{16\xi^5}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^5 - p\pi^4\xi^3\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
& -\frac{2512\xi^4}{105} - \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{16\xi^6}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^6 - p\pi^4\xi^4\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
& \frac{2512\xi^5}{105} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{16\xi^6}{35} - 32c^2\lambda^2\xi^6 - \frac{16\xi^7}{35} + 32c^2\lambda^2\xi^7 + p\pi^4\xi^5\text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\
& \frac{4414}{3675} - \frac{8c^2\lambda^2}{105} \\
& p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5 \\
& \frac{4414}{3675} - \frac{8c^2\lambda^2}{105} + p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5
\end{aligned}$$

Συμβολικός Υπολογισμός g22

ClearAll[g1, g2, g22, ξ, c, λ, ξp, Lg2, p, g22a, part1g22a, part2g22a, part3g22a, part4g22a, olok1g22, olok2g22]

g2[ξ\_] := ξ<sup>5</sup> - ξ<sup>4</sup> - ξ<sup>3</sup> + ξ<sup>2</sup>

$$s2 = \int_0^1 g2'[\xi]^2 d\xi$$

$$Lg2 = g2''''[\xi] + \frac{8g2''[\xi]}{3}c^2\lambda^2 - 2g2''[\xi]s2 + \pi^4p\text{DiracDelta}[\xi - \xi p]//\text{TraditionalForm}$$

g22a = ExpandAll[g2[ξ]Lg2]

$$\text{part1g22a} = \text{ExpandAll}\left[\xi^2\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\text{part2g22a} = \text{ExpandAll}\left[-\xi^3\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\text{part3g22a} = \text{ExpandAll}\left[-\xi^4\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\text{part4g22a} = \text{ExpandAll}\left[\xi^5\left(\frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4p\delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45}\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \text{olok1g22} = & \int_0^1 \left( -\frac{1088\xi^2}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^2 + \frac{1808\xi^3}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^3 + \frac{16\xi^4}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^5 \right) d\xi + \int_0^1 \left( \frac{1088\xi^3}{45} - \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{1808\xi^4}{15} + 16c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{15} + 32c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{16\xi^6}{9} - \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^6 \right) d\xi \\ & + \int_0^1 \left( \frac{1088\xi^4}{45} - \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{1808\xi^5}{15} + 16c^2\lambda^2\xi^5 - \frac{16\xi^6}{15} + 32c^2\lambda^2\xi^6 + \frac{16\xi^7}{9} - \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^7 \right) d\xi \\ & + \int_0^1 \left( -\frac{1088\xi^5}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{1808\xi^6}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^6 + \frac{16\xi^7}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^7 - \frac{16\xi^8}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^8 \right) d\xi \end{aligned}$$

$$\text{olok2g22} = p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5$$

$$\text{g22} = \text{olok1g22} + \text{olok2g22}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{45} \\ & \frac{8}{3}c^2\lambda^2(20\xi^3 - 12\xi^2 - 6\xi + 2) + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{4}{45}(20\xi^3 - 12\xi^2 - 6\xi + 2) + 120\xi - 24 \\ & \xi^2 \left( \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45} \right) - \xi^3 \left( \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45} \right) \\ & - \xi^4 \left( \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45} \right) + \xi^5 \left( \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - 32c^2\lambda^2\xi^2 - 16c^2\lambda^2\xi + \frac{16c^2\lambda^2}{3} + \pi^4 p \delta(\xi - \xi p) - \frac{16\xi^3}{9} + \frac{16\xi^2}{15} \right. \\ & \left. + \frac{1808\xi}{15} - \frac{1088}{45} \right) \\ & - \frac{1088\xi^2}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^2 + \frac{1808\xi^3}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^3 + \frac{16\xi^4}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^5 + p\pi^4\xi^2 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & \frac{1088\xi^3}{45} - \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^3 - \frac{1808\xi^4}{15} + 16c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{16\xi^5}{15} + 32c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{16\xi^6}{9} - \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^6 - p\pi^4\xi^3 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & \frac{1088\xi^4}{45} - \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^4 - \frac{1808\xi^5}{15} + 16c^2\lambda^2\xi^5 - \frac{16\xi^6}{15} + 32c^2\lambda^2\xi^6 + \frac{16\xi^7}{9} - \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^7 - p\pi^4\xi^4 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & - \frac{1088\xi^5}{45} + \frac{16}{3}c^2\lambda^2\xi^5 + \frac{1808\xi^6}{15} - 16c^2\lambda^2\xi^6 + \frac{16\xi^7}{15} - 32c^2\lambda^2\xi^7 - \frac{16\xi^8}{9} + \frac{160}{3}c^2\lambda^2\xi^8 + p\pi^4\xi^5 \text{DiracDelta}[\xi - \xi p] \\ & \frac{27596}{14175} - \frac{16c^2\lambda^2}{135} \\ & p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5 \\ & \frac{27596}{14175} - \frac{16c^2\lambda^2}{135} + p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5 \end{aligned}$$

Συμβολικός Υπολογισμός Κρίσιμου Φορτίου

ClearAll[g11, g12, g21, g22, c, λ, ξp, p, RE1, RE2, UU1, UU2, pcr]

$$g11 = \frac{8828}{11025} - \frac{16c^2\lambda^2}{315} + p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4;$$

$$g12 = \frac{1894}{1575} - \frac{8c^2\lambda^2}{105} + p\pi^4\xi p^2 - 2p\pi^4\xi p^3 + p\pi^4\xi p^4;$$

$$g21 = \frac{4414}{3675} - \frac{8c^2\lambda^2}{105} + p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5;$$

$$g22 = \frac{27596}{14175} - \frac{16c^2\lambda^2}{135} + p\pi^4\xi p^2 - p\pi^4\xi p^3 - p\pi^4\xi p^4 + p\pi^4\xi p^5;$$

RE1 = ExpandAll[g11g22]

UU1 = CoefficientList[RE1, p]

RE2 = ExpandAll[g12g21]

UU2 = CoefficientList[RE2, p]

equat = RE1 - RE2

CoefficientList[equat, p]

FullSimplify[Solve[equat == 0, p]]

$$\frac{243617488}{156279375} - \frac{173056c^2\lambda^2}{893025} + \frac{256c^4\lambda^4}{42525} + \frac{272624p\pi^4\xi p^2}{99225} - \frac{32}{189}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^2 - \frac{465796p\pi^4\xi p^3}{99225} + \frac{272}{945}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{22744p\pi^4\xi p^4}{19845} + p^2\pi^8\xi p^4 - \frac{64}{945}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 + \frac{8828p\pi^4\xi p^5}{11025} - 3p^2\pi^8\xi p^5 - \frac{16}{315}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5$$

$$+ 2p^2\pi^8\xi p^6 + 2p^2\pi^8\xi p^7 - 3p^2\pi^8\xi p^8 + p^2\pi^8\xi p^9$$

$$\left\{ \frac{243617488}{156279375} - \frac{173056c^2\lambda^2}{893025} + \frac{256c^4\lambda^4}{42525}, \frac{272624\pi^4\xi p^2}{99225} - \frac{32}{189}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^2 - \frac{465796\pi^4\xi p^3}{99225} + \frac{272}{945}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{22744\pi^4\xi p^4}{19845} - \frac{64}{945}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^4 + \frac{8828\pi^4\xi p^5}{11025} - \frac{16}{315}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^5, \pi^8\xi p^4 - 3\pi^8\xi p^5 + 2\pi^8\xi p^6 \right.$$

$$\left. + 2\pi^8\xi p^7 - 3\pi^8\xi p^8 + \pi^8\xi p^9 \right\}$$

$$\frac{8360116}{5788125} - \frac{1696c^2\lambda^2}{9261} + \frac{64c^4\lambda^4}{11025} + \frac{1060}{441}p\pi^4\xi p^2 - \frac{16}{105}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^2 - \frac{39742p\pi^4\xi p^3}{11025} + \frac{8}{35}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 - \frac{16p\pi^4\xi p^4}{11025} + p^2\pi^8\xi p^4$$

$$+ \frac{1894p\pi^4\xi p^5}{1575} - 3p^2\pi^8\xi p^5 - \frac{8}{105}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5 + 2p^2\pi^8\xi p^6 + 2p^2\pi^8\xi p^7 - 3p^2\pi^8\xi p^8 + p^2\pi^8\xi p^9$$

$$\left\{ \frac{8360116}{5788125} - \frac{1696c^2\lambda^2}{9261} + \frac{64c^4\lambda^4}{11025}, \frac{1060\pi^4\xi p^2}{441} - \frac{16}{105}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^2 - \frac{39742\pi^4\xi p^3}{11025} + \frac{8}{35}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^3 - \frac{16\pi^4\xi p^4}{11025} + \frac{1894\pi^4\xi p^5}{1575} - \frac{8}{105}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^5, \pi^8\xi p^4 - 3\pi^8\xi p^5 + 2\pi^8\xi p^6 + 2\pi^8\xi p^7 - 3\pi^8\xi p^8 + \pi^8\xi p^9 \right\}$$

$$\frac{17894356}{156279375} - \frac{66592c^2\lambda^2}{6251175} + \frac{64c^4\lambda^4}{297675} + \frac{34124p\pi^4\xi p^2}{99225} - \frac{16}{945}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^2 - \frac{108118p\pi^4\xi p^3}{99225} + \frac{8}{135}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{113864p\pi^4\xi p^4}{99225} - \frac{64}{945}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^4 - \frac{886p\pi^4\xi p^5}{2205} + \frac{8}{315}c^2p\pi^4\lambda^2\xi p^5$$

$$\left\{ \frac{17894356}{156279375} - \frac{66592c^2\lambda^2}{6251175} + \frac{64c^4\lambda^4}{297675}, \frac{34124\pi^4\xi p^2}{99225} - \frac{16}{945}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^2 - \frac{108118\pi^4\xi p^3}{99225} + \frac{8}{135}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^3 + \frac{113864\pi^4\xi p^4}{99225} - \frac{64}{945}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^4 - \frac{886\pi^4\xi p^5}{2205} + \frac{8}{315}c^2\pi^4\lambda^2\xi p^5 \right\}$$

$$\left\{ \left\{ p \rightarrow -\frac{2(-2027 + 60c^2\lambda^2)(-2207 + 140c^2\lambda^2)}{1575\pi^4(-1 + \xi p)^2\xi p^2(17062 - 19935\xi p + 420c^2\lambda^2(-2 + 3\xi p))} \right\} \right\}$$