



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ
ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ
ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ CUSCONI ΚΑΙ
ΚΑΝΟΝΩΝ ΡΟΗΣ**

ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ ΟΛΓΑ ΠΑΡΘΕΝΑ

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Υπεύθυνος
ΙΩΑΝΝΗΣ Σ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ**

Λαμία, 2020



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ
ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ
ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ CUSCONI ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΩΝ
ΡΟΗΣ**

ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ ΟΛΓΑ ΠΑΡΘΕΝΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Επιβλέπων
ΙΩΑΝΝΗΣ Σ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ**

Λαμία, 2020

Με ατομική μου ευθύνη και γνωρίζοντας τις κυρώσεις ⁽¹⁾, που προβλέπονται από της διατάξεις της παρ. 6 του άρθρου 22 του Ν. 1599/1986, δηλώνω ότι:

1. Δεν παραθέτω κομμάτια βιβλίων ή άρθρων ή εργασιών άλλων αυτολεξεί **χωρίς να τα περικλείω σε εισαγωγικά** και χωρίς να αναφέρω το συγγραφέα, τη χρονολογία, τη σελίδα. Η αυτολεξεί παράθεση χωρίς εισαγωγικά χωρίς αναφορά στην πηγή, είναι λογοκλοπή. Πέραν της αυτολεξεί παράθεσης, λογοκλοπή θεωρείται και η παράφραση εδαφίων από έργα άλλων, συμπεριλαμβανομένων και έργων συμφοιτητών μου, καθώς και η παράθεση στοιχείων που άλλοι συνέλεξαν ή επεξεργάστηκαν, χωρίς αναφορά στην πηγή. Αναφέρω πάντοτε με πληρότητα την πηγή κάτω από τον πίνακα ή σχέδιο, όπως στα παραθέματα.
2. Δέχομαι ότι η αυτολεξεί **παράθεση χωρίς εισαγωγικά**, ακόμα κι αν συνοδεύεται από αναφορά στην πηγή σε κάποιο άλλο σημείο του κειμένου ή στο τέλος του, είναι αντιγραφή. Η αναφορά στην πηγή στο τέλος π.χ. μιας παραγράφου ή μιας σελίδας, δεν δικαιολογεί συρραφή εδαφίων έργου άλλου συγγραφέα, έστω και παραφρασμένων, και παρουσίασή τους ως δική μου εργασία.
3. Δέχομαι ότι υπάρχει επίσης περιορισμός στο μέγεθος και στη συχνότητα των παραθεμάτων που μπορώ να εντάξω στην εργασία μου εντός εισαγωγικών. Κάθε μεγάλο παράθεμα (π.χ. σε πίνακα ή πλαίσιο, κλπ), προϋποθέτει ειδικές ρυθμίσεις, και όταν δημοσιεύεται προϋποθέτει την άδεια του συγγραφέα ή του εκδότη. Το ίδιο και οι πίνακες και τα σχέδια.
4. Δέχομαι όλες τις συνέπειες σε περίπτωση λογοκλοπής ή αντιγραφής.

Ημερομηνία:/...../20.....

Ο – Η Δηλ.

(Υπογραφή)

(1) «Όποιος εν γνώσει του δηλώνει ψευδή γεγονότα ή αρνείται ή αποκρύπτει τα αληθινά με έγγραφη υπεύθυνη δήλωση του άρθρου 8 παρ. 4 Ν. 1599/1986 τιμωρείται με φυλάκιση τουλάχιστον τριών μηνών. Εάν ο υπαίτιος αυτών των πράξεων σκόπευε να προσπορίσει στον εαυτόν του ή σε άλλον περιουσιακό όφελος βλάπτοντας τρίτον ή σκόπευε να βλάψει άλλον, τιμωρείται με κάθειρξη μέχρι 10 ετών.

**ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ
ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ CUSCONI ΚΑΙ ΚΑΝΟΝΩΝ
ΡΟΗΣ**

ΣΤΕΦΑΝΙΔΟΥ ΟΛΓΑ ΠΑΡΘΕΝΑ

Τριμελής Επιτροπή:

ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΙΩΑΝΝΗΣ, Επίκουρος Καθηγητής (επιβλέπων)

ΣΑΝΔΑΛΙΔΗΣ ΧΑΡΙΛΑΟΣ, Αναπληρωτής Καθηγητής

ΤΣΟΥΚΑΤΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ, Επίκουρος Καθηγητής

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	1
Κεφάλαιο 1 ^ο	2
1.1 Ιστορική Αναδρομή του Στατιστικού Έλεγχου Ποιότητας.....	2
1.2 Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας.....	3
1.3 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών και Διαγράμματα Ελέγχου.....	4
1.4 Βασικά Χαρακτηριστικά ενός Διαγράμματος Ελέγχου.....	6
1.4.1. Σφάλματα τύπου Α και Β.....	9
1.4.2. Μέσο Μήκος Ροής ή Διαδρομής.....	10
1.4.3. Φάση Ι και Φάση ΙΙ.....	12
Κεφάλαιο 2 ^ο	14
2.1 Μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομής.....	14
2.2. Κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου.....	15
2.2.1. Το διάγραμμα CUSUM.....	15
a) Σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα στηλών - Tabular CUSUM.....	16
b) Σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα με όρια ελέγχου.....	17
2.2.2 Το διάγραμμα EWMA.....	18
2.3 Διαγράμματα τύπου Shewhart (Shewhart-type charts).....	20
2.3.1 Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου βασισμένα στην προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση.....	21
2.3.2. Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου βασισμένα σε συναρτήσεις ροών και αθροιστικές βαθμολογικές συναρτήσεις.....	22
2.3.3. ΒTK διάγραμμα ελέγχου.....	26
2.3.4. Διαγράμματα προτεραιότητας.....	29
2.3.4.1. Βασικό 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας.....	29
2.3.4.2 Διαγράμματα προτεραιότητας με κανόνες σηματοδότησης.....	31

2.3.5. Μη παραμετρικά διαγράμματα πολυπαραγοντικού ελέγχου διεργασίας βασισμένα στη λογαριθμική γραμμική μοντελοποίηση.....	34
2.3.6. Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη στατιστική συνάρτηση Mann-Whitney.....	37
2.3.7. Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου διεργασίας φάσης I για θέση υποομάδας.....	39
2.3.8. Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου για κοινή παρακολούθηση της άγνωστης θέσης και των παραμέτρων κλίμακας συνεχών κατανομών.....	42
2.3.9. Μη παραμετρικά διαγράμματα με βελτιωμένους κανόνες ροής.....	43
Κεφάλαιο 3 ^ο	46
3.1. Ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα για την κοινή παρακολούθηση θέσης και κλίμακας συνεχών κατανομών.....	46
3.2. Περιγραφή βημάτων αλγορίθμου.....	47
3.3. Στατιστικός σκελετός και πρωταρχικές ενέργειες.....	47
3.4. Παρουσίαση του κώδικα για τον υπολογισμό της στατιστικής συνάρτησης αλλά και των μέτρων απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου.....	49
3.5. Πρακτική Εφαρμογή.....	51
Κεφάλαιο 4 ^ο	54
4.1. Ανάλυση Απόδοσης.....	54
4.2. Κομμάτι κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για την ένταξη του κανόνα ροής.....	60
Κεφάλαιο 5 ^ο	61
5.1. Περιληπτική περιγραφή και τελικά συμπεράσματα.....	61
Βιβλιογραφία.....	62
Ευρετήριο Όρων.....	65

Λίστα Πινάκων

Πίνακας 1. Διαγραμματική σταθερά H για διάφορες τιμές του m, n και κάποιες τιμές-στόχους του ARL_0 51

Πίνακας 2. Ανάλυση απόδοσης του νέου διαγράμματος για τη κανονική κατανομή $N(\theta, \delta)$ με $ARL_0=500$ και σύγκριση με το Shewhart-Cucconi (SC) διάγραμμα.....55

Πίνακας 3. Ανάλυση απόδοσης του νέου διαγράμματος στη κατανομή Laplace(θ, δ) με $ARL_0=500$ και σύγκριση με το Shewhart-Cucconi (SC) διάγραμμα.....57

Λίστα Σχημάτων

Σχήμα 1. Διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart.....	6
Σχήμα 2. Ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου.....	7
Σχήμα 3. Βασικό Shewhart διάγραμμα.....	20
Σχήμα 4. Παράδειγμα BTK διαγράμματος ελέγχου.....	28
Σχήμα 5. Παράδειγμα κανόνα σηματοδότησης(1).....	32
Σχήμα 6. Παράδειγμα κανόνα σηματοδότησης(2).....	32
Σχήμα 7. Παράδειγμα κανόνα σηματοδότησης(3).....	33
Σχήμα 8. Παράδειγμα του CUSUM κριτηρίου.....	37
Σχήμα 9. Mann-Whitney διάγραμμα ελέγχου.....	38
Σχήμα 10. Τυπικό \bar{X} Διάγραμμα χωρίς την υποομάδα 15.....	41
Σχήμα 11. Τα RR_{1-of-1} , RR_{2-of-2} , IRR_{2-of-2} , και $IMRR_{2-of-2}$ Min διαγράμματα για τα Montgomery (2001) δεδομένα.....	45

Εισαγωγή

Στη σημερινή εποχή, η συνεχής παραγωγή προϊόντων, που χρησιμοποιούνται για την κάλυψη της ίδιας ουσιαστικά ανάγκης, από διαφορετικές επιχειρήσεις δεν είναι ασύνηθες γεγονός. Η ανταγωνιστικότητα των επιχειρήσεων για την απόλυτη κυριαρχία τους στον τομέα που δραστηριοποιούνται, τις ωθεί πολλές φορές σε αναζήτηση επιχειρηματικών τακτικών/στρατηγικών που θα οδηγήσουν στη βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Ο έλεγχος ποιότητας περιλαμβάνει μεταξύ άλλων τον καθορισμό των επιτρεπτών ορίων των χαρακτηριστικών ποιότητας των προϊόντων και μετρά την απόδοση της παραγωγικής διαδικασίας σε σχέση με αυτά. Όλες οι επιτυχημένες επιχειρήσεις έχουν αναγνωρίσει σήμερα ότι το βασικότερο μέσο για τον έλεγχο, τη διασφάλιση και τη βελτίωση της ποιότητας είναι η συνεχής έρευνα και η εκπαίδευση του προσωπικού τους στις αντίστοιχες στατιστικές τεχνικές που προσαρμόζονται καλύτερα στη μορφή της παραγωγικής τους διαδικασίας. Στη σύγχρονη πρακτική του ελέγχου ποιότητας έχει σχεδόν πλήρως εγκαταλειφθεί η ιδέα ότι η πιο αξιόπιστη μορφή επιθεώρησης είναι ο πλήρης (σε ποσοστό 100% επί της παραγωγής) έλεγχος, αφού αυτός είναι πολύ δαπανηρός ή και αδύνατος, ενώ ταυτόχρονα δεν εξασφαλίζει ότι μετά την εκτέλεση του ο πελάτης δε θα παραλάβει ελαττωματικά προϊόντα. Το τελευταίο πηγάζει από το αναμφισβήτητο γεγονός ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των ελεγχόμενων τεμαχίων αυξάνεται και η κόπωση των ελεγκτών με συνέπεια να υπάρχει μεγαλύτερη πιθανότητα διαφυγής ελαττωματικών.

Την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών αποτελεί ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*). Στόχος του είναι η βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων, δηλαδή η ανακάλυψη εγκαίρως των προϊόντων που δεν ακολουθούν τις απαραίτητες προδιαγραφές για τη διατήρηση της ποιότητας, καθώς και η απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις αυτές.

Κεφάλαιο 1^ο

1.1 Ιστορική Αναδρομή του Στατιστικού Έλεγχου Ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*), σύμφωνα με τον Βουγιουκα(2008), «έχει τις αρχές του στην δεκαετία του 1920 στα *Bell Telephone Laboratories* των Η.Π.Α. όπου αναπτύχθηκαν σχεδόν ταυτόχρονα δυο μεγάλες περιοχές: ο έλεγχος ποιότητας αποδοχής και ο έλεγχος παραγωγικής διαδικασίας».

Ο έλεγχος ποιότητας αποδοχής (*acceptance sampling*) ξεκίνησε όταν διαπιστώθηκε ότι ο πλήρης (σε ποσοστό 100% επί της παραγωγής) έλεγχος είναι πολύ δαπανηρός και χρονοβόρος, ενώ ταυτόχρονα δεν εξασφαλίζει ότι μετά την εκτέλεση του ο πελάτης δε θα παραλάβει ελαττωματικά προϊόντα. Γνωρίζοντας τα παραπάνω, οι Harold Dodge και ο Harry Romig ανέπτυξαν δειγματοληπτικά σχήματα ελέγχου παρτίδων παραγωγής, στα οποία δεχόμαστε την αποδοχή ή απόρριψη της συγκεκριμένης παρτίδας από την ποιότητα περιορισμένου αριθμού μονάδων που προέρχονται από κάποιο τυχαίο δείγμα της παρτίδας αυτής.

Ο έλεγχος παραγωγικής διαδικασίας (*process control*) αναπτύχθηκε από τον Walter Shewhart και εισάγει για πρώτη φορά την έννοια της πρόληψης στον έλεγχο ποιότητας. Ο Shewhart συνειδητοποίησε ότι η διασπορά τιμών ενός χαρακτηριστικού ποιότητας (π.χ. μιας διάστασης) είναι αναπόφευκτη κατά την παραγωγή, αλλά ένα μέρος της οφείλεται σε τυχαίες, μη ελεγχόμενες αιτίες και ένα άλλο μέρος οφείλεται σε συγκεκριμένα αίτια, τα οποία μπορούν να εντοπισθούν και να διορθωθούν. Για να διευκολύνει την διάκριση ανάμεσα σε τυχαίες και συστηματικές μεταβλητές, ο Shewhart σχεδίασε απλές στατιστικές τεχνικές και αντίστοιχα διαγράμματα ελέγχου και πρότεινε τρόπους βελτίωσης της ποιότητας με εξάλειψη των αιτίων των συστηματικών μεταβολών.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας γνώρισε ιδιαίτερη ανάπτυξη στις Η.Π.Α. κατά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, με την δημιουργία στατιστικών πινάκων και προτύπων για την υποβοήθηση της παραγωγής και της παραλαβής ικανοποιητικής ποιότητας όπλων και πυρομαχικών από μεγάλο αριθμό προμηθευτών. Τα πρώτα μαθήματα ελέγχου ποιότητας σε πανεπιστημιακό επίπεδο έγιναν στο *Carnegie Institute of Technology* το 1941 και στο *Stanford University* το 1942. Η πρώτη επιστημονική εταιρία ελέγχου ποιότητας (*American Society for Quality Control, ASQC*) δημιουργήθηκε το 1946 στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής.

Το 1980 πραγματοποιήθηκε η ανάπτυξη τρίτης μεγάλης περιοχής του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, που επικεντρώνεται στη βελτίωση της ποιότητας κατά τη φάση σχεδίασης προϊόντων και παραγωγικών διαδικασιών με τη βοήθεια στατιστικών πειραμάτων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στην ιστορική αναδρομή του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στη μεταπτυχιακή εργασία του Βουγιούκα (2008).

1.2 Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας

Στην εργασία του Αντζουλάκου (2009) αναφέρεται πως ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων Στατιστικής Ανάλυσης Δεδομένων. Το σύνολο αυτό μπορεί να χωριστεί σε τρία βασικά υποσύνολα που το καθένα περιέχει στατιστικές μεθόδους προσανατολισμένες σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας. Τα τρία υποσύνολα είναι τα ακόλουθα:

- Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (*Design of Experiments*)
- Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (*Statistical Process Control*)
- Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*)

Ο Σχεδιασμός και η Ανάλυση Πειραμάτων περιέχει όλες εκείνες τις στατιστικές τεχνικές οι οποίες μας βοηθούν στην ανακάλυψη της επίδρασης που έχουν τα διάφορα επίπεδα των παραγόντων (μεταβλητών) που επηρεάζουν τις ποιοτικές παραμέτρους του τελικού προϊόντος και συνεπώς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη βέλτιστη σχεδίαση της παραγωγικής διεργασίας. Πρόσθετα, ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών περιέχει στατιστικές τεχνικές που είναι απαραίτητες για τον έλεγχο της παραγωγικής διεργασίας κατά την διάρκεια της παραγωγής των προϊόντων. Τέλος, η Δειγματοληψία Αποδοχής περιέχει στατιστικές τεχνικές (δειγματοληπτικές) που είναι απαραίτητες για να αποφασίσουμε αν μια συγκεκριμένη παρτίδα (σωρός) προϊόντων θα γίνει δεκτή ή θα απορριφθεί.

1.3 Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών και Διαγράμματα Ελέγχου

Σύμφωνα με τον Αντζουλάκο (2009), σε κάθε παραγωγική διεργασία, ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Αυτό σημαίνει πως δυο προϊόντα δεν θα είναι ποτέ ίδια. Πάντοτε θα βρίσκεται κάποιο μετρήσιμο μέγεθος που θα διαφέρει μεταξύ τους, ανεξαρτήτως από το πόσο σωστά λειτουργεί ολόκληρο το παραγωγικό σύστημα.

Οι αιτίες που οδηγούν σε αυτή τη μεταβλητότητα αναφέρονται ως κοινές ή συνήθεις ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας (*common or chance causes of variation*). Η φυσική μεταβλητότητα δεν έχει μεγάλο μέγεθος και δεν μπορεί να αποδοθεί σε ελέγξιμους παράγοντες. Μια διεργασία (σύστημα) η οποία λειτουργεί μόνο με την παρουσία φυσικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εντός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία (*in (statistical) control process*), ή ότι λειτουργεί σε ευσταθή κατάσταση (*stable state*).

Πολλές φορές όμως, η διεργασία μπορεί να εμφανίσει είδη μεταβλητότητας που δεν είναι τόσο τυχαία και μπορούν να αποδοθούν είτε σε λανθασμένα ρυθμισμένες μηχανές, είτε σε λάθη από την μεριά των χειριστών των μηχανημάτων, είτε λόγω ελαττωματικής πρώτης ύλης. Η μεταβλητότητα αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη σε μέγεθος από τη φυσική μεταβλητότητα, στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω και εμφανίζει μη αποδεκτά επίπεδα λειτουργίας της παραγωγικής διεργασίας. Αναφέρεται ως ειδική μεταβλητότητα και οι αιτίες της ονομάζονται ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας (*special or assignable causes of variation*). Μια διεργασία (σύστημα) η οποία λειτουργεί με την παρουσία ειδικής μεταβλητότητας λέμε ότι είναι εκτός (στατιστικού) ελέγχου διεργασία (*out of (statistical) control process*) ή ότι λειτουργεί σε ασταθή κατάσταση (*unstable state*).

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα όρια προδιαγραφών (*specifications limits*) των χαρακτηριστικών ποιότητας (*quality characteristics*) του προϊόντος τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού του. Αυτά είναι το κάτω και το άνω όριο προδιαγραφών (*lower and upper specification limits, LSL and USL*) και εντός αυτών των ορίων πρέπει να βρίσκονται οι τιμές του χαρακτηριστικού ποιότητας που ελέγχουμε για κάθε παραγόμενο προϊόν προκειμένου να είναι ποιοτικά αποδεκτά. Επίσης, στη φάση σχεδιασμού του προϊόντος ορίζεται και μια επιθυμητή τιμή για το χαρακτηριστικό ποιότητας που ονομάζεται τιμή στόχος (*target value, T*) που είναι συνήθως το μέσο του διαστήματος [LSL, USL]. Όταν παρουσιάζεται φυσική

μεταβλητότητα το μεγαλύτερο μέρος των τιμών του χαρακτηριστικού των προϊόντων που ελέγχουμε βρίσκεται εντός των ορίων αυτών. Αντίθετα, όταν παρουσιάζεται ειδική μεταβλητότητα δεν ισχύει το ίδιο.

Τα διαγράμματα ελέγχου (*control charts*) χρησιμοποιούνται ευρέως για την ανίχνευση σε πραγματικό χρόνο της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία (*on-line process-monitoring*).

Με τον όρο μη συμμορφωμένο ή ελαττωματικό προϊόν ονομάζουμε το προϊόν για το οποίο τουλάχιστον ένα χαρακτηριστικό ποιότητας του έχει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών.

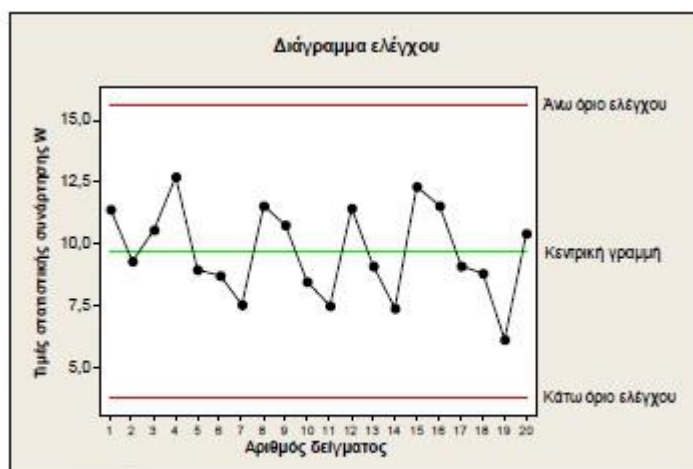
Δεν είναι λίγες οι φορές, όμως, που συναντάμε προϊόν που να παρουσιάζει κάποιο "ελάττωμα ή ατέλεια" και παρόλα αυτά βρίσκεται προς πώληση στην αγορά.

Σε τέτοιες περιπτώσεις κατασκευάζονται διαγράμματα ελέγχου για τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων ή ακόμα και για τον αριθμό των ελαττωμάτων ενός προϊόντος που ως χαρακτηριστικά ποιότητας ενός προϊόντος δεν μετρώνται σε μια συνεχή κλίμακα αλλά παίρνουν αριθμήσιμο πλήθος τιμών και περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές (*attributes*). Τέτοια διαγράμματα χρησιμοποιούνται και στην περίπτωση που η προς πώληση μονάδα είναι μια συσκευασία η οποία περιέχει έναν αριθμό προϊόντων και η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως ελαττωματική ή μη, βάσει του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων που περιέχει. Σύμφωνα με τα όσα προαναφέρθηκαν, στα διαγράμματα ελέγχου μπορούμε να διακρίνουμε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το χαρακτηριστικό ποιότητας του προϊόντος:

- Διαγράμματα ελέγχου για συνεχή χαρακτηριστικά – μεταβλητές (*charts for variables*)
- Διαγράμματα ελέγχου για διακριτά χαρακτηριστικά – ιδιότητες (*charts for attributes*).

1.4 Βασικά Χαρακτηριστικά ενός Διαγράμματος Ελέγχου

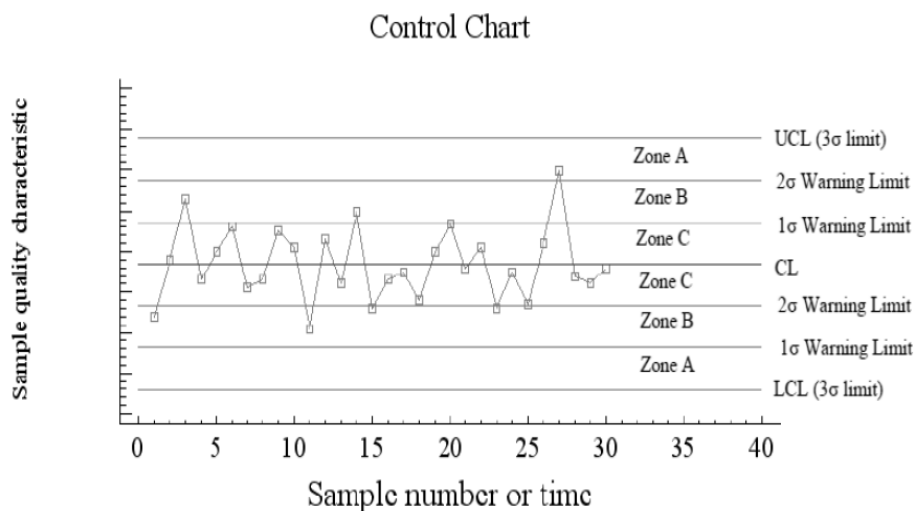
Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός (μετρήσιμου) χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή) των προϊόντων που παράγονται. Για παράδειγμα, το χαρακτηριστικό X μπορεί να είναι το μήκος, το βάρος ή ο όγκος των παραγόμενων προϊόντων. Η παρακολούθηση της κρίσιμης ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X (τυχαία μεταβλητή), που προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Ας συμβολίσουμε με X_1, X_2, \dots ένα τυχαίο δείγμα που λαμβάνεται από την διεργασία. Χρησιμοποιώντας τις παρατηρήσεις ενός τυχαίου δείγματος, υπολογίζουμε την τιμή $W_i = g(X_i)$, $i = 1, 2, \dots$, μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης (τυχαίας μεταβλητής) που εκτιμά (συνήθως αμερόληπτη εκτιμήτρια) την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει (π.χ. μέση τιμή ή διακύμανση της X). Συνεπώς, η (διαχρονική) παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα τυχαία δείγματα που λαμβάνονται. Μια εικόνα ενός τυπικού διαγράμματος ελέγχου δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 1. Διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart

Η κεντρική γραμμή (*center line, CL*) ή μέσο επίπεδο της διεργασίας παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) της W όπως αυτή προκύπτει από τη λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας ή την τιμή στόχο του προϊόντος. Οι δύο ακραίες γραμμές ονομάζονται άνω και κάτω όρια ελέγχου (*upper and lower control limits, UCL and LCL*). Όσο οι τιμές (σημεία, δεδομένα) της W εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου και η συμπεριφορά τους είναι "τυχαία" μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διεργασία παραμένει εντός ελέγχου (για την ακρίβεια εντός στατιστικού ελέγχου) και δεν χρειάζεται να

προβούμε σε κάποια διορθωτική ενέργεια. Αν όμως κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου λέμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου οπότε αντιμετωπίζουμε κατάσταση συναγερμού (*alarm*) και πρέπει να προχωρήσουμε σε έρευνα για να ανακαλύψουμε τις ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που είναι υπεύθυνες για αυτή τη συμπεριφορά και αν κριθεί απαραίτητο να προβούμε σε διορθωτικές ενέργειες. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ακόμη και στην περίπτωση που όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο τότε και αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Σε πολλές περιπτώσεις για να κάνουμε περισσότερο ευαίσθητο ένα διάγραμμα ελέγχου ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα εκτός ελέγχου διεργασίες, εκτός από τη σχεδίαση των ορίων ελέγχου, σχεδιάζουμε επίσης και προειδοποιητικά όρια (*warning limits*) εσωτερικά των ορίων ελέγχου, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα (η σχεδίαση των προειδοποιητικών ορίων προϋποθέτει την ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιώντας το μοντέλο των ορίων τριών σίγμα (3σ)).



Σχήμα 2. Ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται συχνά μαζί με κάποιους “κανόνες” που περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το μοτίβο που περιγράφει ο κανόνας τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου χωρίς απαραίτητα να έχουμε κάποιο σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου (*UCL* και *LCL*). Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαίσθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθοι:

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία στην Ζώνη Α (σε μια από τις δύο ζώνες Α)
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές)
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

Οι πρώτοι τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως Western Electric Rules.

Μια βαθύτερη ανάλυση των παραπάνω, καθώς και επιπλέον λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στη διπλωματική εργασία της Λάππα(2014).

1.4.1 Σφάλματα τύπου A και B

Στη Στατιστική επιστήμη, μια μηδενική υπόθεση αποτελεί μια δήλωση που επιδιώκουμε να ακυρώσουμε με αποδείξεις υπέρ του αντίθετου. Πιο συχνά είναι μια δήλωση ότι το φαινόμενο που μελετάται δεν παράγει κανένα αποτέλεσμα ή δεν κάνει καμία διαφορά. Ένα παράδειγμα της μηδενικής υπόθεσης είναι η δήλωση "Αυτή η δίαιτα δεν έχει καμία επίδραση στο βάρος των ανθρώπων." Συνήθως, ένας ερευνητής πλαισιώνει μια μηδενική υπόθεση, με την πρόθεση να την απορρίψει: προσπαθεί δηλαδή να εκτελέσει ένα πείραμα που παράγει δεδομένα που δείχνουν ότι το φαινόμενο της μελέτης διαφέρει από την άποψη που διατυπώθηκε ως μηδενική υπόθεση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υπάρχει μια συγκεκριμένη εναλλακτική υπόθεση που είναι αντίθετη με τη μηδενική υπόθεση, σε άλλες περιπτώσεις η εναλλακτική υπόθεση είναι ό,τι δεν αναφέρεται ρητά, ή είναι απλά "η μηδενική υπόθεση είναι ψευδής" – σε κάθε περίπτωση, είναι μια δυαδική κρίση, αλλά η ερμηνεία διαφοροποιείται.

Ένα σφάλμα τύπου A (*ή σφάλμα του πρώτου είδους*) είναι η εσφαλμένη απόρριψη μιας πραγματικής μηδενικής υπόθεσης. Συνήθως ένα σφάλμα τύπου A οδηγεί στο συμπέρασμα μια υποτιθέμενη επίδραση ή σχέση όντως υπάρχει, ενώ στην πραγματικότητα δεν υπάρχει. Παραδείγματα σφαλμάτων τύπου A περιλαμβάνουν ένα τεστ που δείχνει έναν ασθενή να έχει μια ασθένεια, ενώ στην πραγματικότητα ο ασθενής δεν έχει την ασθένεια, έναν συναγερμό που ειδοποιεί για ύπαρξη φωτιάς να έχει ένδειξη για φωτιά, ενώ στην πραγματικότητα δεν υπάρχει φωτιά, ή ένα πείραμα που δείχνει ότι μια ιατρική θεραπεία θα θεραπεύσει μια ασθένεια, όταν στην πραγματικότητα δεν το κάνει.

Ένα σφάλμα τύπου B (*ή σφάλμα του δεύτερου είδους*) είναι η αποτυχία να απορρίψουμε μια ψευδή μηδενική υπόθεση. Παραδείγματα για πιθανά σφάλματα τύπου B θα αποτελούν το τεστ αίματος που αποτυγχάνει να ανιχνεύσει την ασθένεια που είναι σχεδιασμένο για να ανιχνεύει σε έναν ασθενή που έχει πραγματικά την ασθένεια, να ξεσπάσει φωτιά και ο συναγερμός πυρκαγιάς να μην παράγει ήχο ή μια κλινική δοκιμή μιας ιατρικής θεραπείας που αποτυγχάνει να δώσει ενδείξεις ότι η θεραπεία δεν λειτουργεί, όταν πραγματικά όντως δεν λειτουργεί.

1.4.2 Μέσο Μήκος Ροής ή Διαδρομής

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής (ή μέσο μήκος διαδρομής) του διαγράμματος (*average run length, ARL*) που ορίζεται με τη σχέση :

$$ARL = 1/p,$$

όπου p συμβολίζει την πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εκτός των ορίων ελέγχου. Αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί τη Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p (συμβ. $X \sim G(p)$), δηλαδή ισχύει η σχέση

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, x = 1, 2, 3, \dots$$

τότε

$$E(X) = 1/p, V(X) = (1-p)/p^2.$$

Είναι προφανές ότι το ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου για να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου, αφού το **μήκος ροής ή διαδρομής** (*run length*) ακολουθεί την κατανομή $G(p)$.

Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου υπό την Κανονική κατανομή για την απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση W , γνωρίζουμε ότι το **εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής** ARL_0 (*in-control average run length*) σχετίζεται με το σφάλμα Τύπου Α (συμβ. α) σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$ARL_0 = 1/\alpha.$$

Προφανώς στην πράξη θέλουμε να έχουμε μεγάλο ARL_0 , καθώς αυτό υποδεικνύει μικρή συχνότητα λανθασμένων συναγερωμών.

Για μια διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου επιπέδου της διεργασίας (ή άλλης αιτίας), το **εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής** ARL_{out} (*out-of-control average run length*) είναι ίσο με $ARL_{out} = 1/(1-\beta)$, αφού η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίσο με β , οπότε βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου με πιθανότητα $1-\beta$.

Προφανώς στην πράξη θέλουμε να έχουμε μικρό ARL_{out} αφού το ARL_{out} δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η μετατόπιση

στο μέσο επίπεδο της διεργασίας από τη στιγμή που θα συμβεί αυτή η μετατόπιση. Με άλλα λόγια, το ARL_{out} εκφράζει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν από τη στιγμή που η διεργασία είναι εκτός ελέγχου μέχρι την στιγμή παραγωγής ορθού συναγεμού.

Σύμφωνα με την εργασία του Αντζουλάκου (2009), η χρήση του ARL ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια, καθώς το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” ARL (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο) αφού η κατανομή του μήκους ροής είναι πολύ ασύμμετρη και συνεπώς η μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής (ιδιαίτερα για μικρές τιμές του p). Ωστόσο, η παραπάνω παρατήρηση σχετίζεται κυρίως με την εφαρμογή παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου, όπου και η Γεωμετρική κατανομή αποτελεί βασική προϋπόθεση μελέτης των συγκεκριμένων διαγραμμάτων.

1.4.3 Φάση I και Φάση II

Στη βιβλιογραφία, όπως επισημαίνεται στην εργασία του Αντζουλάκου (2009), υπάρχουν δύο φάσεις (*phases*) για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, η Φάση I και η Φάση II.

- **Φάση I (*Phase I*)** : Σε αυτή τη φάση συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία και αναλύονται όλα μαζί ταυτοχρόνως, για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σε αυτή την φάση τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να “φέρει” τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου με τη χρησιμοποίηση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (*retrospective*). Γενικά πολύ περισσότερες δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται κατά την διάρκεια αυτής της φάσης πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Ο διαχειριστής της διαδικασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που συλλέχθηκαν τα δεδομένα.

- **Φάση II (*Phase II*)** : Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από την διεργασία ο διαχειριστής δίνει άμεσα μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Σε αυτή την φάση ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί , ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό.

Μια κύρια διαφορά μεταξύ των δύο φάσεων είναι ο τρόπος κατασκευής τους. Πιο συγκεκριμένα, το ποσοστό εσφαλμένων συναγερωμών (*false alarm rate, FAR*) ή το επίπεδο εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής (ARL_0) χρησιμοποιείται συνήθως στην κατασκευή και αξιολόγηση των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης II, ενώ η πιθανότητα εσφαλμένου συναγερωμού (*false alarm probability, FAP*), χρησιμοποιείται στην κατασκευή και την αξιολόγηση των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης I. Η *FAP* είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ενός εσφαλμένου συναγερωμού μέσα σε ένα σύνολο από πολλές συγκρίσεις, ενώ το *FAR*

είναι η πιθανότητα ενός μοναδικού εσφαλμένου συναγερμού που αφορά μία μόνο σύγκριση.

Κεφάλαιο 2^ο

Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου

2.1 Μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομής διάγραμμα ελέγχου

Τα μη παραμετρικά ή ελεύθερα κατανομής διαγράμματα ελέγχου, όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχουν ιδιότητες που δεν εξαρτώνται από την κανονικότητα ή κάποια άλλη συγκεκριμένη παραμετρική κατανομή. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος «μη παραμετρικά» δεν δηλώνει ότι στο σχεδιασμό των διαγραμμάτων αυτών δεν περιλαμβάνονται παράμετροι και κατά συνέπεια ο όρος «ελεύθερα κατανομής» φαίνεται να προσδιορίζει καλύτερα τη φύση των διαγραμμάτων αυτών. Για την ανάπτυξη και θεωρητική μελέτη των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου χρησιμοποιούνται κατά βάση οι κλασικές μη παραμετρικές τεχνικές συμπερασματολογίας που αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά το πρόβλημα ελέγχου υποθέσεων όταν η κατανομή δεν έχει καθορισθεί. Τα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου παρουσιάζονται κατά την εμφάνιση του προβλήματος ανίχνευσης μιας μετατόπισης του μέσου μιας διεργασίας ή μιας αλλαγής στην διακύμανση μιας διεργασίας, όταν τα δείγματα που χρησιμοποιούνται έχουν παρθεί ανά τακτά διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

Οι Chakraborti, Van der Laan και Bakir (2001) παρείχαν ένα συστηματικό και λεπτομερές απολογισμό της βιβλιογραφίας των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου. Ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου ορίζεται από την άποψη της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής του. Εάν η κατανομή του εντός ελέγχου μήκους ροής ενός διαγράμματος ελέγχου είναι η ίδια για κάθε συνεχή κατανομή, το διάγραμμα καλείται μη παραμετρικό ή ελεύθερο κατανομής.

Οι Chakraborti, Van der Laan και Bakir (2001) συνόψισαν τα πλεονεκτήματα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου ως εξής: 1) απλότητα, 2) καμία ανάγκη υπόθεσης μιας συγκεκριμένης παραμετρικής κατανομής για την υποκείμενη διεργασία, 3) η κατανομή του ARL_0 είναι ίδια για όλες τις συνεχείς κατανομές, 4) μεγαλύτερη ανθεκτικότητα και ανοχή στις έκτροπες τιμές (*outliers*), 5) μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα στην ανίχνευση αλλαγών όταν η πραγματική κατανομή είναι αισθητά μη κανονική, ιδιαίτερα με βαρύτερες ουρές και 6) καμία ανάγκη εκτίμησης της διακύμανσης για το καθορισμό των διαγραμμάτων για την παράμετρο θέσης.

Αξίζει να τονιστεί ότι από τεχνικής απόψεως, οι περισσότερες μη παραμετρικές διαδικασίες, απαιτούν ο πληθυσμός να είναι συνεχής, ώστε να είναι ελεύθερες κατανομής.

Ορισμένα μειονεκτήματα των μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι τα ακόλουθα: 1) θα είναι «λιγότερο αποτελεσματικά» από τα παραμετρικά ομόλογα τους όταν κάποιος έχει μια πλήρη γνώση της κατανομής της διεργασίας για την οποία η παραμετρική μέθοδος έχει ειδικά σχεδιαστεί, 2) συνήθως απαιτούνται ειδικοί πίνακες όταν τα μεγέθη των δειγμάτων είναι μικρά και 3) οι μη παραμετρικές μέθοδοι δεν είναι πολύ γνωστές ανάμεσα σε όλους τους ερευνητές και τους επαγγελματίες της ποιότητας.

2.2 Κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου

Υπάρχουν τρεις κύριες κατηγορίες μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου: 1) το *CUSUM* διάγραμμα, 2) το *EWMA* διάγραμμα, 3) το *Shewhart* διάγραμμα και οι βελτιώσεις τους.

2.2.1 Το διάγραμμα CUSUM

Το σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα (*CUSUM*), χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την ανίχνευση μικρών συστηματικών σφαλμάτων. Σε αντίθεση με άλλα διαγράμματα που πραγματοποιούν την ίδια εργασία, το διάγραμμα CUSUM ξεχωρίζει λόγω της ιδιαίτερης ευαισθησίας του στην ανίχνευση των σφαλμάτων αυτών.

Για τη δημιουργία του διαγράμματος CUSUM χρειάζεται να υπολογίσουμε το σωρευτικό άθροισμα CS (Cumulative Sum), το οποίο αποτελεί το άθροισμα των διαφορών κάθε δείγματος ελέγχου από την μέση τιμή (μ_0) των ορίων ελέγχου. Έχουμε, λοιπόν, τις σχέσεις:

$$d_i = x_i - \mu_0$$

$$CS = d_1 + d_2 + d_3 + \dots = \sum_{i=1}^N x_i - \mu_0$$

Όπου με d_i συμβολίζουμε το συστηματικό σφάλμα. Στο σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα, το οποιοδήποτε συστηματικό σφάλμα ($x_i - \mu_0 \neq 0$) όσο μικρό και αν είναι θα δημιουργήσει κάποιο έστω και μικρό σωρευτικό άθροισμα που θα αποκλίνει από τις τιμές του 0.

Το διάγραμμα CUSUM, μολονότι προτιμάται περισσότερο από κάθε άλλο διάγραμμα ανίχνευσης συστηματικών σφαλμάτων, εμφανίζει κάποιες αδυναμίες. Η σημαντικότερη

από αυτές είναι ότι δεν παρέχει εγκαίρως την πληροφορία ότι η μέθοδος επανήλθε σε κατάσταση εντός ελέγχου, όταν το αίτιο που προκάλεσε το συστηματικό σφάλμα εξαρχής έχει πια εξαλειφθεί. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για να εξαλειφθεί για παράδειγμα μία διαφορά $x_i - \mu_o > 0$ και να επανέλθει η καμπύλη στο 0, δηλαδή στην μέση τιμή - στόχο απαιτούνται αρκετά αθροίσματα CS από διαφορές αντίθετου πρόσημου $x_i - \mu_o < 0$. Επίσης, απαιτεί διαρκείς υπολογισμούς και δεν ανιχνεύει τυχαία σφάλματα, καθώς μια ανάλυση που εμφανίζει πολλά τυχαία σφάλματα, δηλαδή εμφανίζει τιμές ελέγχου εκατέρωθεν της μέσης τιμής έχει ως αποτέλεσμα οι διαφορές $x_i - \mu_o$ να αλληλοαναιρούνται.

Σε γενικές γραμμές, το διάγραμμα CUSUM ερμηνεύεται μόνο ποιοτικά (με βάση την κλίση της καμπύλης) και δεν παρουσιάζει συγκεκριμένα όρια ελέγχου. Από την κλίση της καμπύλης, όμως, μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα όσον αφορά το είδος του συστηματικού σφάλματος. Οι συστηματικές μετατοπίσεις δίνουν μικρή κλίση στην καμπύλη σε αντίθεση με τις συστηματικές εκτροπές όπου η κλίση είναι πολύ εντονότερη.

Για την καλύτερη εφαρμογή της μεθόδου CUSUM έχουν δημιουργηθεί δύο παραλλαγές, τα διαγράμματα Tabular CUSUM και Decision Limit CUSUM.

a) Σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα στηλών - Tabular CUSUM

Σε αντίθεση με το διάγραμμα CUSUM, στο διάγραμμα Tabular CUSUM δημιουργούνται δύο σωρευτικά αθροίσματα, τα C_i^+ , C_i^- , τα οποία ονομάζονται αντίστοιχα άνω και κάτω σωρευτικά αθροίσματα (one-sided upper and lower cusums) και υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_o + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \max[0, (\mu_o - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Όπου $C_o^+ = C_o^- = 0$. Οι διαφορές $x_i - (\mu_o + K)$ και $(\mu_o - K) - x_i$ είναι παρόμοιες με την διαφορά $x_i - \mu_o$ του αθροίσματος CUSUM. Η μόνη διαφορά είναι στην αφαίρεση πάνω στην μέση τιμή του σταθερού αριθμού K που ονομάζεται τιμή αναφοράς (reference value).

Τα αθροίσματα C_i^+ , C_i^- υπολογίζονται από τις διαφορές των τιμών ελέγχου x_i από την μέση τιμή μ_0 εφόσον αυτές είναι μεγαλύτερες από την τιμή αναφοράς K . Κάθε φορά που οι δύο διαφορές αλλάζουν πρόσημο, το άθροισμα (C_i^+ , C_i^-) μηδενίζεται για να ξαναρχίσει να αυξάνει όταν οι διαφορές γίνουν ξανά μεγαλύτερες του 0. Τα δύο αθροίσματα C_i^+ , C_i^- έχουν διαφορετικά πρόσημα οπότε για κάθε τιμή ελέγχου σχηματίζονται δύο αθροίσματα ένα κάτω (C_i^-) και ένα πάνω (C_i^+) από την μέση τιμή. Στο διάγραμμα Tabular τα δύο αθροίσματα C_i^+ , C_i^- σχεδιάζονται ως δύο διαφορετικές στήλες κάτω και πάνω από την μέση τιμή των ορίων ελέγχου μ_0 . Η σταθερά K μπορεί να υπολογιστεί με δύο εξισώσεις:

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$$

$$K = k * \sigma$$

Το μ_1 είναι η ανώτατη επιτρεπτή τιμή των δειγμάτων ελέγχου. Το σ είναι η σταθερή απόκλιση των ορίων ελέγχου και k ο αριθμός των τυπικών αποκλίσεων που αποτελούν το μέγιστο επιτρεπόμενο εύρος διακύμανσης των δειγμάτων ελέγχου γύρω από την μέση τιμή.

b) Σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα με όρια ελέγχου (Decision limit CUSUM)

Οι Westgard J., Groth T., Aronsson T. και Carl-Henric de Verdier (1977) πρότειναν έναν συνδυασμό των διαγραμμάτων Levey-Jennings και CUSUM, ο οποίος ονομάστηκε σωρευτικό αθροιστικό διάγραμμα με όρια ελέγχου (Decision Limit CUSUM). Αν και οι υπολογισμοί που απαιτούνται για το διάγραμμα αυτό είναι πολύπλοκοι, ένα μεγάλο πλεονέκτημα είναι ότι μπορεί να συνδυαστεί με το διάγραμμα Levey-Jennings. Το σωρευτικό άθροισμα CS προκύπτει όπως και στο κλασικό διάγραμμα CUSUM από τις σχέσεις:

$$d_i = x_i - \mu_0$$

$$CS = d_1 + d_2 + d_3 + \dots = \sum_{i=1}^N x_i - \mu_0$$

Για να μπορέσει όμως μία διαφορά $d_i = x_i - \mu_0$ να αποτελέσει μέρος της δημιουργίας του αθροίσματος CS θα πρέπει η διαφορά αυτή να είναι μεγαλύτερη από μια σταθερή K , γνωστή και ως όριο προειδοποίησης. Υπάρχουν δύο όρια προειδοποίησης $+K$ και $-K$, πάνω και κάτω από την μέση τιμή των ορίων ελέγχου. Εκτός από το άνω και κάτω όριο προειδοποίησης, το διάγραμμα διαθέτει επίσης άνω και κάτω όρια ελέγχου. Αυτά συμβολίζονται ως H . Τα K και H παίρνουν τιμές πολλαπλάσιες της τυπικής απόκλισης των ορίων ελέγχου.

Το άθροισμα CS στο Decision Limit CUSUM διάγραμμα δεν αυξάνει συνεχώς και μηδενίζεται σε δύο κυρίως περιπτώσεις. Όταν το πρόσημο του αθροίσματος αλλάξει το οποίο και σημαίνει ότι η διαδικασία άλλαξε κατεύθυνση και η μέθοδος επανέρχεται εντός των ορίων ελέγχου. Ή όταν το σωρευτικό άθροισμα υπερβεί το όριο ελέγχου H . Τότε η εξέταση είναι πλέον εκτός ορίων ελέγχου και θα πρέπει να γίνουν κατάλληλες επιδιορθωτικές ενέργειες. Το CS θα αρχίσει να αυξάνει πάλι μόλις κάποια νέα τιμή ελέγχου υπερβεί το όριο προειδοποίησης K .

Για περισσότερες πληροφορίες όσον αφορά το διάγραμμα CUSUM, καθώς και παραλλαγές του, μπορούμε να απευθυνθούμε στο άρθρο του Καρκαλούσου (2002).

2.2.2. Το διάγραμμα EWMA

Το διάγραμμα εκθετικού βαρυκεντρικού κινούμενου μέσου (Exponentially Weighed Moving Average) EWMA προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Roberts(1959). Ανήκουν στην κατηγορία των διαγραμμάτων ελέγχου με μνήμη και είναι ευαίσθητα στις μικρές μετατοπίσεις στον μέσο της διεργασίας.

Στο διάγραμμα EWMA, οι τιμές ελέγχου (x_i) μετασχηματίζονται σε τιμές z_i που ακολουθούν την εξίσωση:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$$

Όπως παρατηρείται από την παραπάνω σχέση, η τιμή z_i δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή ελέγχου (x_i), αλλά και από τις προηγούμενες της (z_{i-1}). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εξομάλυνση (smoothing). Ο συντελεστής που καθορίζει την εξάρτηση κάθε τιμής z_i από την προηγούμενη της ονομάζεται συντελεστής βαρύτητας (weighting factor) και συμβολίζεται ως λ . Στην εξομάλυνση οφείλεται η δυνατότητα του διαγράμματος EWMA να ανιχνεύει μικρές μετατοπίσεις ή εκτροπές των τιμών ελέγχου γύρω από την τιμή - στόχο. Από την τιμή z_i προέρχεται ο χαρακτηρισμός κινούμενος μέσος και από τον συντελεστή

βαρύτητας λ ο βαρυκεντρικός. Ο χαρακτηρισμός εκθετικός προέρχεται από τις εκθετικές συναρτήσεις υπολογισμού των ορίων ελέγχου της μεθόδου.

Πριν από οποιοδήποτε υπολογισμό είναι απαραίτητο γνωρίζουμε τη μέση τιμή (μ) και τη τυπική απόκλιση (σ) των δειγμάτων ελέγχου. Η πρώτη τιμή z_0 είναι η τιμή - στόχος των ορίων ελέγχου και συμβολίζεται ως CL (Central Limit). Η z_0 ισούνται με την μέση τιμή μ των ορίων ελέγχου. Ο συντελεστής βαρύτητας λ παίρνει τιμές από 0 έως 1. Το ανώτερο (Upper Control Limit ή UCL) και το κατώτερο όριο (Lower Control Limit ή LCL) ελέγχου δίνονται από τις εξισώσεις:

$$UCL = \mu + L\sigma\sqrt{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]/(2-\lambda)}$$

$$LCL = \mu - L\sigma\sqrt{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]/(2-\lambda)}$$

Το L είναι το εύρος των ορίων ελέγχου του διαγράμματος EWMA και είναι πολλαπλάσιο της τυπικής απόκλισης σ των ορίων ελέγχου.

Ο συντελεστής λ καθορίζει την εξομάλυνση των τιμών x_i . Εξομάλυνση ονομάζεται η διαδικασία απαλοιφής των διαφορών μεταξύ των τιμών ελέγχου x_i και η μετατροπή τους σε τιμές όσο το δυνατόν εγγύτερες προς την κεντρική τιμή CL. Ανάλογα με την τιμή του λ υπάρχει μικρή ή μεγάλη εξομάλυνση κατά την οποία οι τιμές z_i εξαρτώνται περισσότερο ή λιγότερο από τις προηγούμενες τιμές ελέγχου (x_{i-1}). Σε μικρές τιμές λ , δηλαδή όταν $\lambda = 0,1-0,3$ το διάγραμμα εξομαλύνεται πλήρως και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση μικρών συστηματικών σφαλμάτων. Σε μεσαίες τιμές λ , δηλαδή όταν $\lambda \approx 0,5$ το διάγραμμα εξομαλύνεται μερικώς και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση τόσο τυχαίων όσο και μεσαίων συστηματικών σφαλμάτων. Όταν $\lambda=1$ το διάγραμμα EWMA δεν εμφανίζει καμία εξομάλυνση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση τυχαίων και μεγάλων συστηματικών σφαλμάτων. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει $z_i = x_i$. Τέλος όταν $\lambda=0$ οι τιμές z_i και τα όρια UCL και LCL ισούνται με την μέση τιμή μ .

Το διάγραμμα ελέγχου EWMAST προτάθηκε από τον Zhang (1998) και αποτελεί μία επέκταση του EWMA διαγράμματος ελέγχου για την παρακολούθηση διεργασιών όπου οι παρατηρήσεις είναι συσχετισμένες. Χρησιμοποιείται για την περίπτωση που μελετάμε μία διαδικασία (διεργασία) Xt , $t \geq 1$, η οποία, είναι στάσιμη, με σταθερό μέσο και σταθερή συνάρτηση συνδιακύμανσης. Τα όρια ελέγχου αυτού του διαγράμματος θα είναι διαφορετικά κάτω από την ύπαρξη της αυτοσυσχέτισης, καθώς εάν η αυτοσυσχέτιση είναι θετική, θα είναι πιο πλατιά από τα αντίστοιχα του EWMA διαγράμματος ελέγχου.

Εμείς όμως στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με τα μη παραμετρικά διαγράμματα τύπου Shewhart.

2.3 Διαγράμματα τύπου Shewhart (Shewhart-type charts)

Το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι το πιο γνωστό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής της κατανομής ενός χαρακτηριστικού των προϊόντων που παράγονται από μια διεργασία και προτάθηκε από τον Walter A. Shewhart (1931).

Τα διαγράμματα τύπου Shewhart αποτελούνται από το άνω όριο ελέγχου UCL, το κάτω όριο ελέγχου LCL και την κεντρική γραμμή του διαγράμματος CL, η οποία έχει μέση τιμή ίση με το μέσο επίπεδο της διεργασίας χωρίς την παρουσία ειδικής αιτίας μεταβλητότητας (εντός ελέγχου διεργασία). Για την κατασκευή ενός διαγράμματος Shewhart συλλέγονται δείγματα μεγέθους $n \geq 1$, υπολογίζεται η τιμή κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης W , η οποία απεικονίζεται σε ένα διάγραμμα όπου τα όρια ελέγχου απέχουν απόσταση L το καθένα (σε μονάδες τυπικής απόκλισης) από την κεντρική γραμμή.

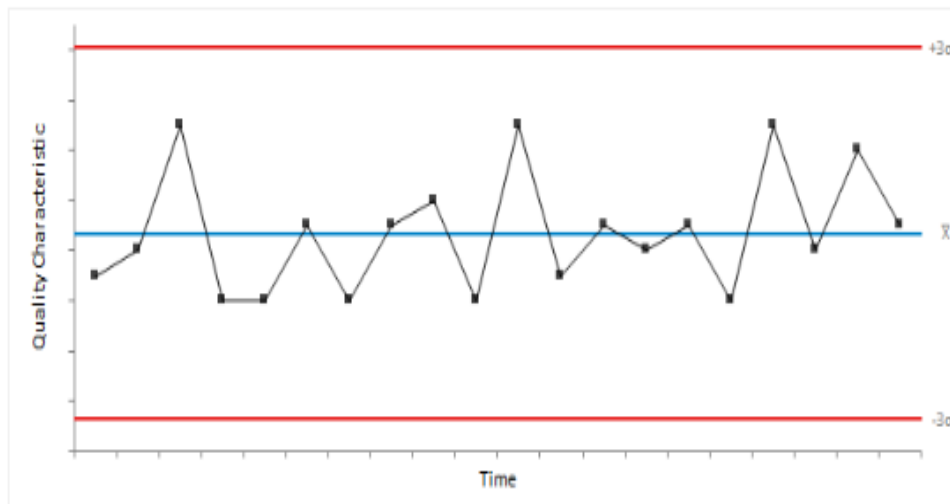
$$UCL = \mu_W + z_{\alpha/2} \sigma_W = w_{\alpha/2}$$

$$CL = \mu_W$$

$$LCL = \mu_W - z_{\alpha/2} \sigma_W = w_{1-(\alpha/2)}$$

όπου w_α το άνω ποσοστιαίο σημείο της W .

Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart χρησιμοποιεί «3 - σίγμα» όρια ελέγχου και μας δίνει ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας εάν ένα σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου.



Σχήμα 3. Βασικό Shewhart διάγραμμα

Είναι γνωστό ότι τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart είναι ευαίσθητα στην ανίχνευση μεσαίων και μεγάλων μετατοπίσεων στο μέσο της παραγωγικής διεργασίας, αλλά όχι τόσο στην ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Για να βελτιωθεί η ευαισθησία τους χρησιμοποιούνται πρόσθετοι κανόνες ανακήρυξης μιας διεργασίας εκτός ελέγχου οι οποίοι βασίζονται στη θεωρία ροών.

2.3.1. Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου βασισμένα στην προσημική βαθμολογική στατιστική συνάρτηση

Στο άρθρο του Bakir (2006), προτάθηκε ένα Shewhart, ένα CUSUM, και ένα EWMA διάγραμμα ελέγχου ποιότητας για την ανίχνευση ενός κέντρου διεργασίας όταν το εντός ελέγχου κέντρο - στόχος δεν έχει προσδιορισθεί. Επίσης, μελετήθηκε το πόσο ανθεκτικά και αποτελεσματικά μπορούν να είναι δυο ανταγωνιστικά διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart.

Πιο συγκεκριμένα, η δημιουργία των τύπου Shewhart διαγραμμάτων απαιτεί την επιλογή ενός αρχικού δείγματος αναφοράς. Το δείγμα αυτό προκύπτει όταν η διαδικασία βρίσκεται εντός ελέγχου, ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός μιας εκτίμησης για το άγνωστο εντός ελέγχου κέντρο-στόχο της διεργασίας. Αυτό το εκτιμώμενο κέντρο χρησιμοποιείται στη συνέχεια για τον υπολογισμό των προσημικών βαθμολογικών συναρτήσεων, οι οποίες βασίζονται στις ομαδοποιημένες παρατηρήσεις που λαμβάνονται περιοδικά από την έξοδο της διεργασίας. Εφόσον η εντός ελέγχου κατανομή της διεργασίας είναι συνεχής και συμμετρική, τα προτεινόμενα διαγράμματα έχουν ένα σταθερό εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής και ένα σταθερό ποσοστό ψευδούς συναγερμού, ανεξάρτητα από την κατανομή της διεργασίας.

Οι προσημικές βαθμολογικές συναρτήσεις ονομάζονται signed rank–like statistics και οφείλουν την ονομασία τους στον Moses (1963). Αν δ είναι η διάμεσος του δείγματος αναφοράς που λαμβάνεται από την διεργασία όταν βρίσκεται εντός ελέγχου και R_{ij} είναι ο βαθμός της απόλυτης τιμής της απόκλισης $|X_{ij} - \delta|$ ανάμεσα στις αποκλίσεις $|X_{i1} - \delta|, |X_{i2} - \delta|, \dots, |X_{in} - \delta|$ τότε το προτεινόμενο διάγραμμα του Bakir (2006) απεικονίζει την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση :

$$\varphi_i^* = \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \delta) R_{ij}^*$$

Σημειώνεται ότι το φ_i^* αποτελεί τη διαφορά μεταξύ του αθροίσματος των βαθμών (των απόλυτων τιμών) των θετικών και αρνητικών αποκλίσεων αντίστοιχα και σχετίζεται γραμμικά με την πιο γνωστή προσημοποιημένη βαθμολογική στατιστική συνάρτηση του Wilcoxon (W^+) μέσα από την σχέση $\varphi_i^* = 2W^+ - \frac{n(n+1)}{2}$, όπου W^+ είναι το άθροισμα των βαθμών των απόλυτων τιμών για τις θετικές αποκλίσεις.

Οι Chakraborti και Eryilmaz (2007) πρότειναν απλές παραλλαγές του διαγράμματος του Bakir (2004), εφαρμόζοντας σε αυτό κανόνες ρών τύπου 2–από–2. Πιο συγκεκριμένα, κατασκεύασαν τα διαγράμματα 2–από–2 KL και 2–από–2 DR, χρησιμοποιώντας τη στατιστική συνάρτηση φ_i^* . Το πρώτο διάγραμμα δίνει σήμα ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου αν οι τιμές της φ_i^* των δύο πιο πρόσφατων δειγμάτων, βρίσκονται πάνω ή κάτω από τα όρια ελέγχου, ενώ στο δεύτερο διάγραμμα το σήμα παράγεται ακόμη και αν η μια τιμή βρίσκεται πάνω και η δεύτερη κάτω από τα όρια ελέγχου.

2.3.2. Μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου βασισμένα σε συναρτήσεις ρών και αθροιστικές βαθμολογικές συναρτήσεις

Στην εργασία των Balakrishnan, Triantafyllou, και Koutra (2009) εισάγονται τρία νέα μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart που χρησιμοποιούν συναρτήσεις ρών (*runs*) και αθροιστικές βαθμολογικές συναρτήσεις τύπου Wilcoxon (*Wilcoxon-type rank-sum statistics*). Η κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων που απεικονίζονται στα νέα μη-παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου προσδιορίζεται με τη βοήθεια των ποσοτήτων M_i .

Το πρώτο διάγραμμα ελέγχου χρησιμοποιεί το μέγιστο μήκος ροής των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου στο από κοινού δείγμα, ενώ το δεύτερο διάγραμμα λαμβάνει υπόψη το πλήθος των ροών των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου, των οποίων το μήκος υπερβαίνει μια προκαθορισμένη τιμή. Τέλος, το τρίτο διάγραμμα στηρίζεται στο άθροισμα των βαθμών των παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου, που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου.

Τα όρια ελέγχου των νέων μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου καθορίζονται από ένα δείγμα αναφοράς που προέρχεται από μια διεργασία η οποία είναι εντός ελέγχου. Έστω X_1, X_2, \dots, X_m είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους m από μια εντός ελέγχου (αθροιστική) κατανομή $F_X(x) = F(x)$ και υποθέτουμε ότι χρησιμοποιούνται ως όρια ελέγχου δύο καθορισμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις, έστω $X_{a:m}, X_{b:m}$, δηλαδή,

$$LCL = X_{a:m}$$

$$1 \leq a < b \leq m$$

$$UCL = X_{b:m}$$

Οι παράμετροι a και b είναι παράμετροι σχεδιασμού των προτεινόμενων διαγραμμάτων και ο προσδιορισμός τους επιτυγχάνεται μέσω δύο προσεγγίσεων. Η πρώτη απαιτεί να επιτευχθεί ένα καθορισμένο FAR ενώ η δεύτερη στηρίζεται σε μια προκαθορισμένη τιμή του ARL_0 .

Αξίζει να σημειωθεί ότι το ARL_0 των τριών μη παραμετρικών διαγραμμάτων ελέγχου είναι το ίδιο για όλες τις (εντός ελέγχου) συνεχείς κατανομές.

Η κατασκευή των νέων διαγραμμάτων ελέγχου βασίζεται στην έννοια της ροής (*run*) ίδιων συμβόλων (ή αποτελεσμάτων). Πιο συγκεκριμένα, ως ροή αποτελεσμάτων ίδιου τύπου ορίζουμε την εμφάνιση διαδοχικών (χωρίς διακοπή) όμοιων αποτελεσμάτων τα οποία ακολουθούνται και έπονται από διαφορετικά αποτελέσματα. Το πλήθος k των όμοιων στοιχείων μιας ροής ονομάζεται μήκος ροής (k θετικός ακέραιος).

Έστω ότι συλλέγονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από τη διεργασία (και επίσης ανεξάρτητα του δείγματος αναφοράς). Αν Y_1, Y_2, \dots, Y_n είναι το δείγμα ελέγχου μεγέθους n και $F_Y(x) = G(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής, ο στόχος είναι η ανίχνευση μιας πιθανής μετατόπισης της εντός ελέγχου κατανομής από την $F(x)$ στην $G(x)$, όπου ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης είναι $H_0 : F(x) = G(x)$ έναντι της αμφίπλευρης εναλλακτικής $H_1 : F(x) \neq G(x)$.

Η μεθοδολογία για τα τρία μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου μπορεί να συνοψιστεί ως εξής. Υπό την μηδενική υπόθεση $H_0 : F = G$ (δηλαδή, αν αμφότερα το δείγμα

αναφοράς και το δείγμα ελέγχου προέρχονται από την ίδια κατανομή), το πλήθος των Y_j παρατηρήσεων του δείγματος ελέγχου που βρίσκονται μεταξύ διαδοχικών X - παρατηρήσεων δεν θα πρέπει να επιτυγχάνουν «ακραίες τιμές», με τις ακραίες τιμές να καθορίζονται βάσει της αναλογίας n/m . Συνεπώς, δύο εύλογες στατιστικές συναρτήσεις που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να καθοριστεί αν η διεργασία είναι εντός ελέγχου ή όχι είναι οι εξής:

- Το μέγιστο μήκος ροής των Y - παρατηρήσεων που εμφανίζονται μεταξύ των ορίων ελέγχου.
- Το πλήθος των ροών των Y - παρατηρήσεων (μεταξύ των ορίων ελέγχου) των οποίων το μήκος υπερβαίνει το προκαθορισμένο επίπεδο k .
- Το άθροισμα των βαθμών (στο από κοινού δείγμα των X και Y παρατηρήσεων) των Y - παρατηρήσεων που βρίσκονται ανάμεσα στα όρια ελέγχου (ως εκ τούτου αντιστοιχεί στη γνωστή αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου Wilcoxon).

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι τρεις στατιστικές συναρτήσεις, είναι δυνατόν να εκφραστούν με τη βοήθεια των στατιστικών συναρτήσεων προτεραιότητας. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι $M_i, i=1,2,\dots,m$ εκφράζει το πλήθος των Y - παρατηρήσεων του εξεταζόμενου δείγματος που βρίσκονται μεταξύ της $(i-1)$ -οστης και i -οστης διατεταγμένης παρατήρησης του X - δείγματος (σύμβαση : $X_{(0)} = -\infty$). Με άλλα λόγια, τα M_i είναι τα μήκη των ροών των Y - παρατηρήσεων μεταξύ διαδοχικών X - παρατηρήσεων. Οι τρεις προαναφερθείσες στατιστικές συναρτήσεις δίνονται από τις σχέσεις :

$$R = \max(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b), N_k = \#\{M_i : a+1 \leq i \leq b \text{ και } M_i \geq k\}, W = \sum_{i=a+1}^b W_i$$

όπου k είναι μια πρόσθετη παράμετρος σχεδιασμού που λαμβάνει ακέραιες τιμές, το W_i εκφράζει το άθροισμα των βαθμών των Y - παρατηρήσεων που βρίσκονται μεταξύ των $X_{(i-1)}$ και X_i . Θέλοντας να εκφράσουμε την αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση τύπου Wilcoxon με τη βοήθεια των M_i , μπορούμε να πάρουμε την σχέση:

$$W = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=a+1}^b M_i \right)^2 + \sum_{i=a+1}^b i M_i + \left(M_0 + a - \frac{3}{2} \right) \sum_{i=a+1}^b M_i$$

Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση R , η διεργασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου, αν επαληθεύονται οι δύο ακόλουθες συνθήκες :

$$R \leq r \text{ και } M_0 \leq r_0$$

όπου $M_0 = \sum_{i=1}^a M_i$ εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων του Y - δείγματος πριν το LCL

καθώς και r, r_0 είναι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος.

Όταν εφαρμόζεται η στατιστική συνάρτηση N_k , η διεργασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου, αν επαληθεύονται οι δύο ακόλουθες συνθήκες :

$$N_k \leq r_1 \text{ και } M_0 \leq r_0$$

όπου r_1, r_0 αποτελούν παραμέτρους σχεδιασμού.

Τέλος, αν στο διάγραμμα απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση W, τότε δεν θα παράγεται σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση, εφόσον επαληθεύονται οι ακόλουθες δύο συνθήκες :

$$W \leq w \text{ και } M_0 \leq r_0$$

όπου w, r_0 είναι παράμετροι σχεδιασμού του διαγράμματος.

Μπορούμε να αναφέρουμε πως η μέγιστη δυνατή τιμή της W προκύπτει όταν όλες οι Y - παρατηρήσεις βρίσκονται στο διάστημα $(X_{b-1,m}, X_{b,m})$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι βαθμοί τους είναι ίσοι με $(b-1) + j$, $j=1,2,\dots,n$ και η αθροιστική βαθμολογική συνάρτηση θα λάβει την τιμή:

$$n(b-1) + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+2b-1)}{2}$$

Αντίστοιχα, η μικρότερη δυνατή τιμή της W είναι ίση με μηδέν (η οποία επιτυγχάνεται αν καμία Y - παρατήρηση δεν βρίσκεται μεταξύ των LCL και UCL) και συνεπώς το στήριγμα της συνάρτησης W είναι

$$R_w = \left\{ 0, 1, \dots, \frac{n(n+2b-1)}{2} \right\}$$

Στην συνέχεια παραθέτουμε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού των νέων διαγραμμάτων ελέγχου. Θα μελετήσουμε την εντός ελέγχου κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων που απεικονίζονται στα τρία διαγράμματα ελέγχου. Έστω ότι το δείγμα αναφοράς X_1, X_2, \dots, X_m μεγέθους m προήλθε από την εντός ελέγχου κατανομή $F_X(x) = F(x)$ και ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα ελέγχου Y_1, Y_2, \dots, Y_n από την κατανομή $F_Y(x) = G(x)$. Η ακριβής κατανομή των στατιστικών συναρτήσεων R και N_k μπορεί να προκύψει από την

από κοινού κατανομή των $(M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$, ενώ η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W μπορεί να προκύψει από την από κοινού κατανομή των $(M_0, M_{a+1}, M_{a+2}, \dots, M_b)$.

Στις εργασίες των Balakrishnan και Frattina(2000) και Balakrishnan και Ng (2001), προτάθηκε, για την εφαρμογή ενός ελέγχου προτεραιότητας τη σύγκριση δύο κατανομών F_X, F_Y , το μέγιστο στατιστικό έλεγχο προτεραιότητας (*maximal precedence test*). Η στατιστική συνάρτηση M που χρησιμοποιείται στον παραπάνω έλεγχο, ορίζεται ως το μέγιστο πλήθος των Y - παρατηρήσεων που συμβαίνουν πριν την πρώτη, μεταξύ πρώτης και δεύτερης, ..., μεταξύ της $(r-1)$ - οστης και r - οστης διατεταγμένης παρατήρησης του X - δείγματος. Επομένως, ισχύει ότι $M = \max(M_1, M_2, \dots, M_r)$ και η κατανομή της, υπό τη μηδενική υπόθεση $H_0: F_X = F_Y$ μπορεί να δοθεί με τη βοήθεια της από κοινού κατανομής των (M_1, M_2, \dots, M_r) . Καταλήγουμε, λοιπόν, στις ακόλουθες εκφράσεις για το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού.

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση R τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού είναι:

$$FAR = 1 - P(R \leq r \text{ και } M_0 \leq r_0)$$

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση N_k τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού είναι:

$$FAR = 1 - P(N_k \leq r_1 \text{ και } M_0 \leq r_0)$$

- Όταν χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση W τότε το ποσοστό εσφαλμένου συναγερμού είναι:

$$FAR = 1 - P(W \leq w \text{ και } M_0 \leq r_0)$$

Μια βαθύτερη ανάλυση των παραπάνω, καθώς και επιπλέον λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στη διπλωματική εργασία του Κτενίδη(2011).

2.3.3. ΒΤΚ διάγραμμα ελέγχου

Στην παράγραφο αυτή προτείνεται μέσω της εργασίας των Balakrishnan, Triantafyllou & Koutras (2010) ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart, το οποίο λαμβάνει υπόψιν του, όχι μόνο τη θέση της j -οστής διατεταγμένης παρατήρησης του εξεταζόμενου δείγματος, αλλά και το πλήθος των παρατηρήσεων του που βρίσκονται μεταξύ των ορίων ελέγχου.

Έστω ότι ένα δείγμα αναφοράς X_1, X_2, \dots, X_m συλλέγεται από την εντός ελέγχου κατανομή $F(x)$, δηλαδή όταν γνωρίζουμε ότι η παραγωγική διαδικασία είναι εντός ελέγχου. Στη συνέχεια, λαμβάνουμε ένα τυχαίο δείγμα Y_1, Y_2, \dots, Y_n από τη διεργασία και θέλουμε να αποφασίσουμε αν παραμένει εντός ελέγχου ή αν έχει μετατοπιστεί σε μια εκτός ελέγχου κατανομή $G(x)$. Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε δύο συγκεκριμένες διατεταγμένες παρατηρήσεις από το δείγμα αναφοράς και τις χρησιμοποιούμε ως όρια ελέγχου του προτεινόμενου διαγράμματος, όπως φαίνεται παρακάτω :

$$LCL = X_{a:m}, \quad UCL = X_{b:m} \quad 1 \leq a < b \leq m.$$

Για τη διατύπωση του κανόνα απόφασης του νέου διαγράμματος χρησιμοποιούμε την j -οστή διατεταγμένη παρατήρηση $Y_{j:n}$ σε συνδυασμό με την ακόλουθη στατιστική συνάρτηση

$$R = R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X_{a:m}, X_{b:m}) = \left| \left\{ i \in \{1, 2, \dots, n\} : X_{a:m} \leq Y_i \leq X_{b:m} \right\} \right|$$

Πιο συγκεκριμένα, η παραγωγική διαδικασία κρίνεται ότι είναι εντός ελέγχου, αν επαληθεύονται οι δύο επόμενες συνθήκες :

$$LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL \text{ και } R \leq r$$

Οι παράμετροι a, b, j, r είναι παράμετροι σχεδιασμού του προτεινόμενου διαγράμματος. Στη διεθνή βιβλιογραφία, έχουν προταθεί δύο τρόποι προσδιορισμού των παραμέτρων σχεδιασμού ενός διαγράμματος ελέγχου.

Σύμφωνα με τον πρώτο τρόπο, αρχικά καθορίζουμε μια συγκεκριμένη πιθανότητα λανθασμένου συναγερού (FAR) που θέλουμε να πετύχουμε στο διάγραμμα και στη συνέχεια προχωρούμε στην κατασκευή του διαγράμματος. Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερού (FAR) του νέου διαγράμματος, δηλαδή η πιθανότητα το διάγραμμα να παράγει σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση της διεργασίας, ενώ στην πραγματικότητα βρίσκεται εντός ελέγχου, δίνεται από τη σχέση:

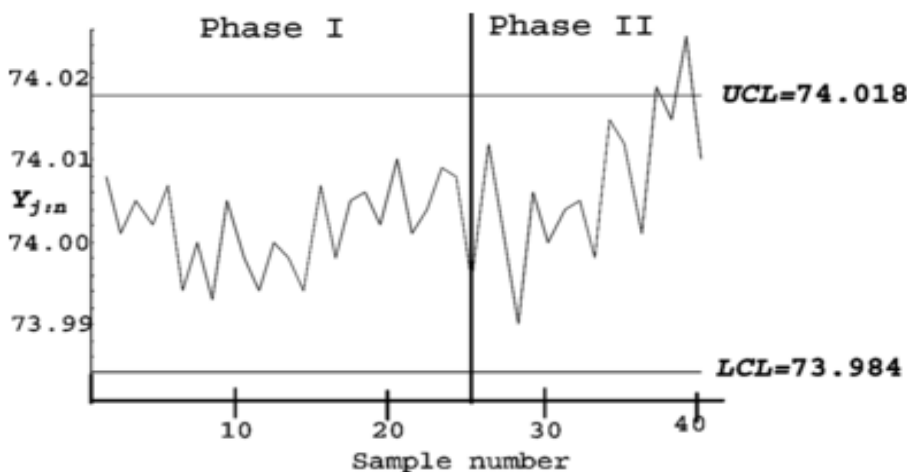
$$FAR = 1 - P_c(LCL \leq Y_{j:n} \leq UCL \text{ και } R \leq r)$$

όπου ο δείκτης C δηλώνει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου, δηλαδή $F = G$.

Ο δεύτερος τρόπος προσδιορισμού των παραμέτρων σχεδιασμού του διαγράμματος, είναι η χρήση μιας συγκεκριμένης τιμής του εντός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_{in} . Το ARL_{in} του νέου διαγράμματος έχει την ίδια τιμή για όλες τις συνεχείς κατανομές, συνεπώς το νέο διάγραμμα είναι ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου. Ωστόσο η κατανομή του μήκους ροής N δεν είναι γεωμετρική, συνεπώς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη

συγκεκριμένη περίπτωση τα γνωστά αποτελέσματα για την κατανομή αυτή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ότι το ARL_{in} του διαγράμματος δεν θα είναι ίσο με το αντίστροφο της πιθανότητας να παραχθεί σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση, όπως συμβαίνει για άλλα διαγράμματα ελέγχου. Για το λόγο αυτό, θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό της κατανομής του εντός ελέγχου μήκους ροής για το συγκεκριμένο διάγραμμα, χρησιμοποιώντας μια τεχνική δέσμευσης που εφαρμόστηκε για πρώτη φορά στην εργασία του Chakraborti (2000).

Στο Σχήμα 4. μπορούμε να δούμε απεικονισμένα τα δεδομένα του Montgomery (2001). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκαν δακτύλιοι από έμβολα αυτόματων μηχανών με σκοπό τον έλεγχο της εσωτερικής διαμέτρου τους, χρησιμοποιώντας στατιστικές τεχνικές ποιότητας.



Σχήμα 4. Παράδειγμα BTK διαγράμματος ελέγχου

Αν οι παρατηρήσεις του εξεταζόμενου δείγματος Y_1, Y_2, \dots, Y_n ακολουθούν μια συνεχή κατανομή $G(x)$, τότε η πιθανότητα ότι το προτεινόμενο διάγραμμα δεν παράγει σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση δίνεται στην ακόλουθη σχέση:

$$p = p(m, n, a, b, j, r; F; G) = P(X_{a:m} \leq Y_{j:n} \leq X_{b:m}) \text{ και } R(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; X_{a:m}, X_{b:m} \geq r)$$

Η παραπάνω πιθανότητα είναι η χαρακτηριστική καμπύλη (*operating characteristic curve*) του διαγράμματος, ενώ η πιθανότητα να παραχθεί σήμα για εκτός ελέγχου μετατόπιση είναι ίση με $1-p$. Συνεπώς, υπό τη μηδενική υπόθεση $H_0: F = G$, η πιθανότητα FAR του διαγράμματος είναι ίση με :

$$FAR = 1 - p(m, n, a, b, j, r; F, F)$$

Η πιθανότητα λανθασμένου συναγερμού όπως έχει οριστεί παραπάνω αποδεικνύεται να είναι ίση με :

$$FAR = 1 - \sum_{r-1 \leq c+d \leq n-1} \frac{\binom{j-c+a-2}{a-1} \binom{m+n-b-d-j}{n-j-d} \binom{b+c+d-a}{c+d+1}}{\binom{m+n}{n}}$$

Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στη διπλωματική εργασία του Κτενίδη (2011).

2.3.4. Διαγράμματα προτεραιότητας

Στην εργασία των Chakraborti, Van der Laan και Van de Wiel(2004) εξετάστηκε μια κατηγορία μη παραμετρικών διαγραμμάτων τύπου Shewhart Φάσης II που βασίζονται σε δύο διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις από το δείγμα αναφοράς. Καλείται (βασικό) 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας (*(basic)1-of-1 precedence chart*) ή απλά διάγραμμα προτεραιότητας.

Οι Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009) εξέτασαν τα μη παραμετρικά διαγράμματα προτεραιότητας τύπου Shewhart Φάσης II χρησιμοποιώντας κανόνες σηματοδότησης τύπου ροών για την παρακολούθηση της άγνωστης εντός ελέγχου διαμέσου της διεργασίας. Εξετάστηκε η γενίκευση των 1-of-1 διαγραμμάτων προτεραιότητας εντάσσοντας κανόνες σηματοδότησης συμπεριλαμβανομένων των ροών της στατιστικής συνάρτησης σχεδιασμού πάνω και/ή κάτω των ορίων ελέγχου. Οπότε, τα προτεινόμενα διαγράμματα μπορούν να θεωρηθούν ως μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου Φάσης II «ενισχυμένα με κανόνες ροών». Να σημειωθεί ότι παρουσιάζονται μόνο τα αμφίπλευρα διαγράμματα, τα μονόπλευρα διαγράμματα μπορούν να αναπτυχθούν παρόμοια.

2.3.4.1. Βασικό 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας

Έστω ότι είναι διαθέσιμο ένα δείγμα αναφοράς μεγέθους m από μια εντός ελέγχου διεργασία με μια άγνωστη συνεχή συνάρτηση κατανομής F . Το δείγμα αναφοράς τυπικά λαμβάνεται μετά από μια κατάλληλη ανάλυση της Φάσης I. Έστω $X_{1:m} < X_{2:m} < \dots < X_{m:m}$ είναι οι διατεταγμένες παρατηρήσεις του δείγματος αναφοράς. Τα όρια ελέγχου για το 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας είναι:

$$LCL = X_{a:m}, \quad UCL = X_{b:m}, \quad 1 \leq a < b \leq m.$$

Στη Φάση II, παρακολουθούνται τα δείγματα ελέγχου, μεγέθους n το καθένα, που συλλέγονται διαδοχικά και ανεξάρτητα το ένα του άλλου, καθώς και του δείγματος αναφοράς. Η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού για το h -δείγμα ελέγχου, γενικά, μπορεί να είναι οποιαδήποτε διατεταγμένη στατιστική συνάρτηση οστό $Y_{j:n}^h$, ωστόσο, η διάμεσος είναι μια δημοφιλής επιλογή, διότι είναι εύκολα ερμηνεύσιμη και ανθεκτική. Για παράδειγμα, όταν το μέγεθος της υποομάδας, το οποίο είναι σύνηθες σε εφαρμογές του ΣΕΔ, η στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού είναι η 3η διατεταγμένη παρατήρηση του δείγματος ελέγχου. Η διαδικασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου, όταν, για πρώτη φορά, η διάμεσος του δείγματος ελέγχου εμπίπτει πάνω ή εκτός ενός από τα όρια ελέγχου. Να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα προτεραιότητας μπορούν να εφαρμοστούν μόλις οι απαραίτητες διατεταγμένες στατιστικές συναρτήσεις είναι διαθέσιμες και αυτό μπορεί να είναι ένα πρακτικό πλεονέκτημα σε ορισμένες εφαρμογές.

Η δείκτρια τυχαία μεταβλητή για το h -οστό δείγμα ελέγχου ορίζεται από τη σχέση:

$$Z_h = \begin{cases} 1, & Y_{j:n}^h \notin (LCL, UCL) \\ 0, & Y_{j:n}^h \in (LCL, UCL) \end{cases}, \quad h=1,2,3\dots$$

Οι Z είναι δείκτες σηματοδότησης: αν $Z_h=1$ τότε παράγεται ένα σήμα και η διεργασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου στο h -οστό δείγμα ελέγχου, ενώ το αντίθετο ισχύει αν $Z_h=0$. Το γεγονός όταν $Z_h=1$ που συμβαίνει όταν $Y_{j:n}^h \notin (LCL, UCL)$, καλείται συμβάν σηματοδότησης (*signaling event*) και η πιθανότητα, $P(Z_h=1)=p$ καλείται (αδέσμευτη) πιθανότητα σηματοδότησης (*(unconditional) signaling probability*). Υποτίθεται ότι όλα τα δείγματα ελέγχου προέρχονται από μια συνεχή κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής G και επομένως ο εκθέτης h στην $Y_{j:n}^h$ καταστέλλεται εφεξής έως ότου να είναι απαραίτητος για να αποφευχθεί τυχόν σύγχυση.

Επειδή τα όρια ελέγχου είναι διατεταγμένες παρατηρήσεις από το ίδιο δείγμα αναφοράς, τα γεγονότα σηματοδότησης και συνεπώς οι δείκτες σηματοδότησης Z_1, Z_2, \dots είναι εξαρτημένες δυαδικές τυχαίες μεταβλητές. Η εφαρμογή, η ανάλυση και η ερμηνεία των διαγραμμάτων ελέγχου πρέπει να λάβουν υπόψη αυτή την εξάρτηση. Δοθέντων των $X_{a:m} = x_1$ και $X_{b:m} = x_2$ η πιθανότητα μη σήματος είναι:

$$P(x_1 < Y_{j:n} < x_2 \mid X_{a:m} = x_1, X_{b:m} = x_2) = G_j(x_2) - G_j(x_1) = 1 - p(x_1, x_2, j, G)$$

Όπου G_j είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της j -οστής διατεταγμένης παρατήρησης σε ένα δείγμα μεγέθους n από μια κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής G . Αφού $G_j = I_{G(x)}(j, n - j + 1)$ όπου $I_a(b, c)$ είναι η μη πλήρης συνάρτηση βήτα, η

πιθανότητα μη σήματος που αναφέρθηκε από πάνω μπορεί να εκφραστεί ως $I_{G(x_2)}(j, n-j+1) - I_{G(x_1)}(j, n-j+1)$. Η αδέσμευτη πιθανότητα μη σήματος, που συμβολίζεται με $1-p$ μπορεί να βρεθεί από το μέσο όρο της στην από κοινού κατανομή των $X_{a,m}$ και $X_{b,m}$. Μετασχηματίζοντας τα αποτελέσματα στο $(0,1)$, προκύπτει ότι

$$1-p = P(Z_h = 0) = \int_0^1 \int_0^y [I_{GF^{-1}(y)}(j, n-j+1) - I_{GF^{-1}(x)}(j, n-j+1)] f_{a,b}(x, y) dx dy$$

όπου η $f_{a,b}(x, y)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της a -οστής και της b -οστής διατεταγμένης στατιστικής συνάρτησης σε ένα δείγμα μεγέθους m από μια ομοιόμορφη $(0,1)$ κατανομή σύμφωνα με την εργασία των Gibbons, Chakraborti, (2003).

Να σημειωθεί ότι δεδομένου ότι οι παρατηρήσεις υποτίθεται ότι είναι συνεχείς, η πιθανότητα μια στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού να εμπίπτει πάνω στο όριο ελέγχου ισούται με 0, θεωρητικά, αλλά αυτό μπορεί να συμβεί στην πράξη και, επομένως, ως σύμβαση αυτό το ενδεχόμενο περιλαμβάνεται στον ορισμό του σήματος χωρίς να μεταβληθεί η πιθανότητα. Αποδείχθηκε, ότι σε σύγκριση με το κλασικό *Shewhart* διάγραμμα \bar{X} , το διάγραμμα προτεραιότητας ήταν εντός ελέγχου ανθεκτικό και ήταν εξίσου ή περισσότερο αποτελεσματικό στην ανίχνευση μετατοπίσεων θέσης. Ωστόσο, η κατασκευή ενός μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου με καλύτερες ικανότητες ανίχνευσης μετατόπισης παραμένει ένα ενδιαφέρον ενδεχόμενο.

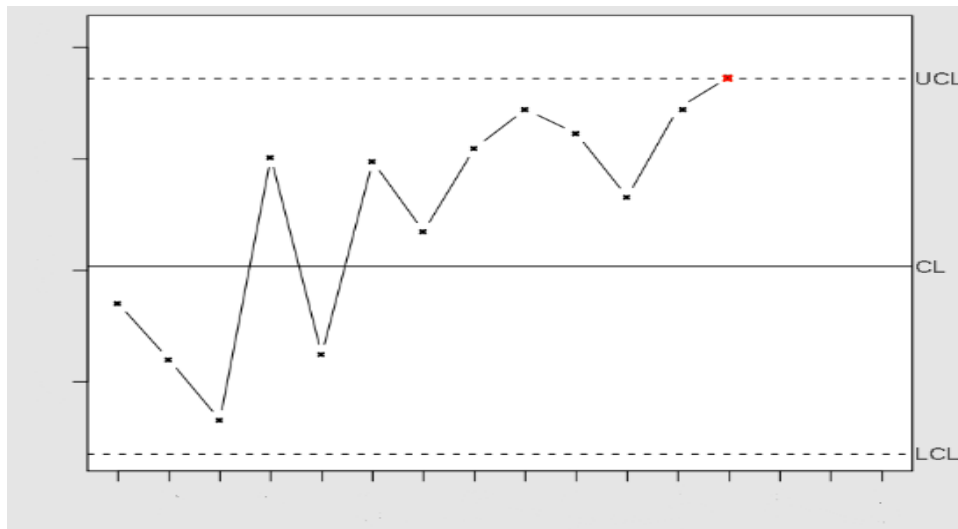
2.3.4.2. Διαγράμματα προτεραιότητας με κανόνες σηματοδότησης

Οι κανόνες ροής και σηματοδότησης χρησιμοποιούνται τυπικά για να αυξήσουν την ευαισθησία και επίδοση των διαγραμμάτων ελέγχου. Ένας κανόνας σηματοδότησης αναφέρει πότε το διάγραμμα ελέγχου πρέπει να δώσει κάποιο σήμα, για παράδειγμα, πότε η διεργασία θεωρείται εκτός ελέγχου, ενώ ένας κανόνας ροής αποτελεί έναν κανόνα σηματοδότησης, βασιζόμενο στη ροή σχεδιασμού του διαγράμματος.

Διαγράμματα που φέρουν κανόνες σηματοδότησης έχουν μικρότερο, δηλαδή πιο επιθυμητό FAR, καθώς και μεγαλύτερα εντός ελέγχου μήκη διαδρομής σε σχέση με το βασικό 1-of-1 διάγραμμα προτεραιότητας που αναλύσαμε παραπάνω, γεγονός που προσφέρει κάποια ευλυγισία όσον αφορά τον σχεδιασμό των διαγραμμάτων αυτών. Είναι πιο αποτελεσματικά και ευκολότερα στη χρήση. Επιπλέον, φαίνεται να έχουν καλύτερη εκτός ελέγχου επίδοση για κάποιες κατανομές, όπως η κανονική και η Cauchy.

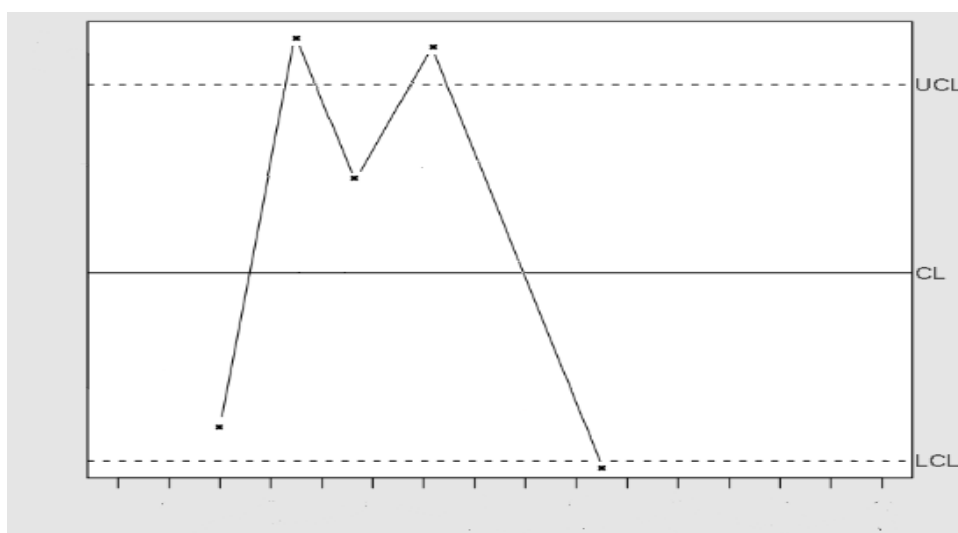
Οι τρεις κανόνες σηματοδότησης: (1), (2), και (3), θεωρούνται ότι οδηγούν σε διαγράμματα ελέγχου. Σύμφωνα με αυτούς, η διεργασία κηρύσσεται εκτός ελέγχου όταν :

(1) ένα μοναδικό σημείο (στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού: διάμεσος) εμπίπτει πάνω ή εκτός των ορίων ελέγχου (το 1- σ 1 διάγραμμα ή διάγραμμα προτεραιότητας)



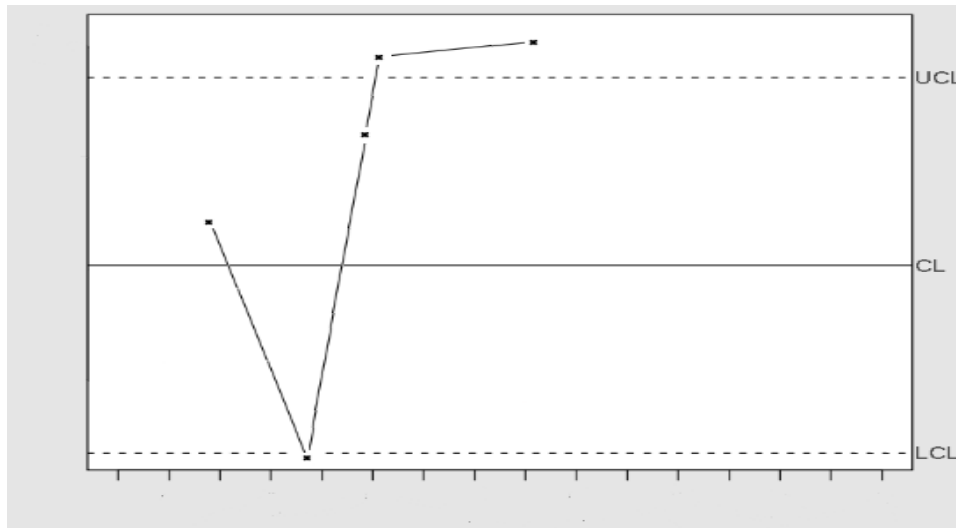
Σχήμα 5. Παράδειγμα κανόνα σηματοδότησης(1)

(2) δύο διαδοχικά σημεία (στατιστική συνάρτηση σχεδιασμού: διάμεσοι των διαδοχικών δειγμάτων ελέγχου) (i) αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο UCL ή πάνω από το UCL , ή (ii) αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο LCL ή κάτω από το LCL ή, (iii) το ένα πέφτει πάνω στο UCL ή πάνω από το UCL και το επόμενο εμπίπτει πάνω στο LCL ή κάτω από το LCL , ή (iv) το ένα εμπίπτει πάνω στο LCL ή κάτω από το LCL και το επόμενο εμπίπτει πάνω στο UCL ή πάνω από το UCL , καλείται 2- σ 2 DR διάγραμμα).



Σχήμα 6. Παράδειγμα κανόνα σηματοδότησης(2)

(3) δύο διαδοχικά σημεία (διάμεσοι των διαδοχικών δειγμάτων ελέγχου) αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο UCL ή πάνω από το UCL ή αμφότερα εμπίπτουν πάνω στο LCL ή κάτω από το LCL , καλείται 2- σ 2 KL διάγραμμα).



Σχήμα 7. Παράδειγμα κανόνα σηματοδότησης(3)

Ο κανόνας (1) είναι ο απλούστερος και πιο συχνά χρησιμοποιούμενος στη βιβλιογραφία διαγραμμάτων ελέγχου. Αντιστοιχεί με το 1-σφ1 διάγραμμα προτεραιότητας. Είναι σαφές ότι ο κανόνας (1) είναι μια ειδική περίπτωση των κανόνων (2) και (3).

Η απόδοση των διαγραμμάτων ελέγχου Φάσης II εκτιμάται με βάση την κατανομή του μήκους ροής της. Να σημειωθεί επίσης ότι το μήκος ροής θεωρείται ως ο χρόνος αναμονής μέχρι να παραχθεί το πρώτο σήμα. Οι παρόντες χρόνοι αναμονής, οι οποίοι είναι θετικές ακέραιες τυχαίες μεταβλητές, ορίζονται στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Ο χρόνος αναμονής για το 1-σφ1 διάγραμμα είναι :

$$T_1 = \min \{t: Z_t = 1\}$$

2. Ο χρόνος αναμονής για το 2-σφ2 DR διάγραμμα είναι :

$$T_2 = \min \{t: Z_{t-1} = 1, Z_t = 1\}$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές Z , δίνονται από την σχέση που είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα.

3. Ο χρόνος αναμονής για το 2-σφ2 KL διάγραμμα είναι :

$$T_2' = \min \{T_2^{(1)}, T_2^{(2)}\}$$

Όπου $T_2^{(1)} = \min \{t: Z'_{t-1} = Z'_t = 1\}$, $T_2^{(2)} = \min \{t: Z'_{t-1} = Z'_t = 2\}$ και

$$Z'_h = \begin{cases} 0, & \text{αν } Y_{j:n} \in (X_{a:m}, X_{b:m}) \\ 1, & \text{αν } Y_{j:n} \geq X_{b:m} \\ 2, & \text{αν } Y_{j:n} \leq X_{a:m} \end{cases}$$

Να σημειωθεί ότι αν το 2-οf2 *KL* διάγραμμα παράγει ένα σήμα το ίδιο κάνει και το 2-οf2 *DR*, αλλά το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές. Επίσης, το 2-οf2 *KL* διάγραμμα φαίνεται καταλληλότερο κατά την ανίχνευση μιας μετατόπισης στη θέση της διεργασίας είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, ενώ ο 2-οf2 *DR* κανόνας μπορεί να ανιχνεύσει μια πιθανή εξέλιξη.

Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην μεταπτυχιακή εργασία της Λάππα(2014).

2.3.5. Μη παραμετρικά διαγράμματα πολυπαραγοντικού ελέγχου διεργασίας βασισμένα στη λογαριθμική γραμμική μοντελοποίηση

Η εργασία του Peihua Qiu(2007) αναφέρεται στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασίας(*Statistical Process Control*) όταν ο τρόπος μέτρησης της διεργασίας είναι πολυπαραγοντικός.

Στη βιβλιογραφία, οι περισσότεροι πολυπαραγοντικοί στατιστικοί έλεγχοι ποιότητας προϋποθέτουν ότι η εντός ελέγχου κατανομή της πολυπαραγοντικής μέτρησης διεργασίας είναι γνωστή και είναι μια Gaussian κατανομή.

Στην πράξη, ωστόσο, η κατανομή μέτρησης είναι συνήθως άγνωστη και χρειάζεται να εκτιμηθεί από δεδομένα. Οι πολυπαραγοντικές μετρήσεις συνήθως δεν ακολουθούν μια Gaussian κατανομή, κάτι που οδηγεί τελικά σε αποτελέσματα με αναξιόπιστα δεδομένα.

Τα στατιστικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη περιγραφή πολυπαραγοντικών non-Gaussian δεδομένων ή τη μετατροπή αυτών σε Gaussian δεδομένα, είναι περιορισμένα. Οι κατάλληλοι πολυπαραγοντικοί έλεγχοι διεργασίας είναι δύσκολο να βρεθούν.

Γι' αυτό και μέσα από την εργασία του Peihua Qiu(2007) προτάθηκε μεθοδολογία εκτίμησης των εντός ελέγχου πολυπαραγοντικών κατανομών μέτρησης όταν ένα σετ εντός ελέγχου δεδομένων είναι διαθέσιμο, βασίζεται σε λογαριθμική γραμμική μοντελοποίηση και λαμβάνει υπόψη την δομή σύνδεσης μεταξύ των στοιχείων μέτρησης.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασίας είναι συχνά χωρισμένος σε δύο φάσεις. Στην Φάση I, όπου ένα σετ από δεδομένα της διεργασίας συγκεντρώνονται και αναλύονται. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ακολουθία δεδομένων οδηγεί σε προσαρμογή και λεπτό συντονισμό της διεργασίας. Το σετ αυτό χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την εκτίμηση της εντός ελέγχου κατανομής της μέτρησης. Στην Φάση II, χρησιμοποιούνται τα εκτιμημένα δεδομένα από την Φάση I και κύριος στόχος της είναι να εντοπίσει τις αλλαγές στην μέτρηση της κατανομής μετά από ένα άγνωστο χρονικό σημείο.

Η απόδοση της Φάσης II υπολογίζεται συνήθως από το μέσο μήκος διαδρομής (*ARL*), το οποίο αποτελεί τον μέσο αριθμό των παρατηρήσεων που χρειάζεται η διαδικασία για να σηματοδοτήσει κάποια αλλαγή στην κατανομή μέτρησης. Η εντός ελέγχου *ARL* τιμή της διαδικασίας ελέγχεται σε κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο. Η διαδικασία όμως λειτουργεί καλύτερα αν η εκτός ελέγχου *ARL* τιμή είναι μικρότερη, όταν εντοπίζεται μια αλλαγή.

Στο τέλος της Φάσης I του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασίας, υποθέτουμε ότι έχουμε ένα καθαρό σετ δεδομένων $\{X(i) = (X_1(i), X_2(i), \dots, X_p(i))', i = 1, 2, \dots, n_1\}$, όπου n_1 είναι ένα δοσμένο μέγεθος δείγματος. Η ακολουθία των δεδομένων θεωρείται ανεξάρτητα και ταυτόσημα κατανομημένα με μια κοινή αθροιστικής κατανομής συνάρτηση $F(x)$.

Θεωρούμε ότι η εντός ελέγχου διάμεσος του $X_j(i)$ είναι το m_j , για $j=1, 2, \dots, p$ και μπορεί να εκτιμηθεί από τα εντός ελέγχου δεδομένα $\{X(i), i = 1, 2, \dots, n_1\}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε

$$Y_j(i) = I(X_j(i) > m_j), \text{ για } j=1, 2, \dots, p,$$

και $Y(i) = (Y_1(i), Y_2(i), \dots, Y_p(i))'$, όπου $I(a)$ ένας δείκτης λειτουργίας, ο οποίος ισούται με 1 αν το a είναι αληθές και μηδέν αλλιώς.

Όμως, κατά την μετατροπή του $X(i)$ σε $Y(i)$ χάνεται πληροφορία. Δεν είναι δύσκολο να διατυπώσουμε ότι η κατανομή του $Y(i)$ θα αλλάζει με κάθε μεταβολή στη διάμεσο $(m_1, m_2, \dots, m_p)'$ της διεργασίας, εφόσον η εντός ελέγχου κατανομή μέτρησης $F(x)$ έχει μια θετική πιθανότητα να παίρνει τιμές κοντά στην εντός ελέγχου διάμεσο. Άρα, αν

ενδιαφερόμαστε να εντοπίζουμε μεταβολές σε παραμέτρους (όπως για παράδειγμα τη διάμεσο) τότε το $Y(i)$ είναι κατάλληλο για χρήση.

Στην εργασία του Peihua Qiu(2007), όμως, προτάθηκε και μια CUSUM διαδικασία για την Φάση II, που ανιχνεύει μετατοπίσεις σε μια παράμετρο θέσης, βασισμένη στην εκτιμώμενη εντός ελέγχου κατανομή μέτρησης $F(x)$ με προτεινόμενη λογαριθμική γραμμική προσέγγιση μοντελοποίησης. Να σημειωθεί ότι η $F(x)$ έχει μετατόπιση σε μια παράμετρο θέσης αν και μόνο αν έχει την ίδια ακριβώς μετατόπιση σε μια άλλη παράμετρο θέσης. Στη διαδικασία αυτή, όλα τα χαρακτηριστικά βασίζονται μόνο στην κατανομή της p δυαδικής μεταβλητής. Για αυτό τον λόγο, ο Peihua Qiu (2007) αφοσιώθηκε στον εντοπισμό μετατοπίσεων του διανύσματος του μέσου $(m_1, m_2, \dots, m_p)'$ της $F(x)$. Επομένως, το $Y(i) = (Y_1(i), Y_2(i), \dots, Y_p(i))'$ είναι κατάλληλο για χρήση, καθώς οποιαδήποτε μετατόπιση του διανύσματος $(m_1, m_2, \dots, m_p)'$ μπορεί να αλλάξει την εντός ελέγχου κατανομή του $Y(i)$. Έστω ότι η εντός ελέγχου συνδυασμένη κατανομή του $Y(i)$ είναι η $\{f_{j_1, \dots, j_p}^{(0)}, j_1, \dots, j_p = 0, 1\}$ και μπορεί να εκτιμηθεί από τη λογαριθμική γραμμική μοντελοποίηση. Έχουμε:

$$g_{j_1, \dots, j_p}(i) = I(Y_1(i) = j_1, \dots, Y_p(i) = j_p)$$

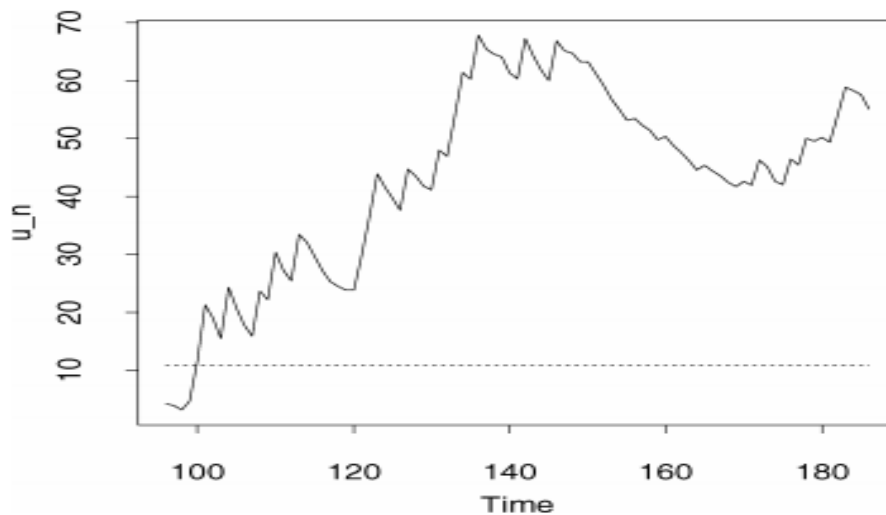
Όπου $j_1, \dots, j_p = 0$ ή 1 . Τότε $\sum_{i=1}^n g_{j_1, \dots, j_p}(i)$ αποτελεί την καταμέτρηση του j_1, \dots, j_p -οστού κελιού τη

χρονική στιγμή n και $nf_{j_1, \dots, j_p}^{(0)}$ είναι ο αντίστοιχος αναμενόμενος αριθμός των κελιών.

Η στατιστική Pearson χ^2 προκύπτει από:

$$\sum_{j_1, \dots, j_p=0,1} \frac{(\sum_{i=1}^n g_{j_1, \dots, j_p}(i) - nf_{j_1, \dots, j_p}^{(0)})^2}{nf_{j_1, \dots, j_p}^{(0)}}$$

Όπου μετρά την απόκλιση μεταξύ του παρατηρούμενου και του αναμενόμενου αριθμού των κελιών. Ωστόσο, μια σταθερά k συχνά χρησιμοποιείται σε CUSUM διαδικασίες που δεν παρουσιάζουν αποδείξεις μετατοπίσεων, για να πραγματοποιηθεί άμεση αντίδραση της επερχόμενης μετατόπισης. Το μέγεθος του k εξαρτάται από το μέγεθος της μετατόπισης – στόχου.



Σχήμα 8. Παράδειγμα του CUSUM κριτηρίου

Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στην εργασία του Peihua Qiu(2007).

2.3.6. Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου βασισμένο στη στατιστική συνάρτηση Mann-Whitney

Τα μη παραμετρικά διαγράμματα μπορεί να είναι χρήσιμα σε στατιστικά προβλήματα ελέγχου της διεργασίας, όταν η γνώση όσον αφορά την υποκείμενη κατανομή της διεργασίας είναι περιορισμένη ή ελλιπής. Στην εργασία των Chakraborti και van de Wiel (2008) προτάθηκε ένα τύπου Shewhart διάγραμμα, φάσης II, βασισμένο σε αναφερόμενα δεδομένα από την ανάλυση της φάσης I και της γνωστής στατιστικής συνάρτησης Mann-Whitney.

Τα όρια ελέγχου υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το Lugannani-Rice saddlepoint, Edgeworth και άλλες προσεγγίσεις μαζί με την εκτίμηση του Monte Carlo. Οι παραδοχές λαμβάνουν υπόψη την εκτίμηση και την εξάρτηση από τη χρήση δείγματος αναφοράς. Η εντός ελέγχου απόδοση του προτεινόμενου διαγράμματος δείχνει ότι είναι πολύ ανώτερη από το κλασικό διάγραμμα Shewhart \bar{X} .

Έστω ότι ένα δείγμα αναφοράς $X = (X_1, \dots, X_m)$ μεγέθους m , διατίθεται από μια εντός ελέγχου κατανομή και $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ συμβολίζει ένα τυχαίο δείγμα ελέγχου μεγέθους n . Ο δείκτης h χρησιμοποιείται για να δείξει το h -οστο δείγμα ελέγχου $Y^h = (Y_1^h, \dots, Y_n^h)$, με $h=1,2,\dots$, όταν αυτό είναι απαραίτητο για λογική σαφήνεια. Θεωρούμε τα δείγματα ελέγχου ανεξάρτητα μεταξύ τους, καθώς και από το δείγμα

αναφοράς. Το Mann-Whitney τεστ βασίζεται στον συνολικό αριθμό των (X, Y) ζευγαριών, όπου η Y παρατήρηση είναι μεγαλύτερη από την X .

$$M_{XY} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I(X_i < Y_j) = \sum_{j=1}^n \{I(Y_j > X_1) + \dots + I(Y_j > X_m)\}$$

Όπου $I(X_i < Y_j)$ είναι η ένδειξη της συνάρτησης του γεγονότος $\{X_i < Y_j\}$. Να σημειωθεί ότι το M_{XY} βρίσκεται μεταξύ του 0 και mn . Μεγάλες τιμές του M_{XY} δείχνουν θετική μεταβολή, σε αντίθεση με μικρές τιμές που δείχνουν αρνητική.

Το προτεινόμενο Mann-Whitney διάγραμμα χρησιμοποιεί το M_{XY}^h , δηλαδή το M_{XY} για το h -οστο δείγμα ελέγχου και δίνει σήμα όταν ισχύει:

$$M_{XY}^h < L_{mn} \quad \text{ή} \quad M_{XY}^h > U_{mn}$$

Όπου L_{mn} , U_{mn} αποτελούν το κάτω (LCL) και άνω όριο ελέγχου (UCL), αντίστοιχα. Η κατανομή M_{XY} είναι συμμετρική μέχρι και $mn/2$ όταν η διεργασία βρίσκεται εντός ελέγχου, οπότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ισχύει $L_{mn} = mn - U_{mn}$. Ένα παράδειγμα τέτοιου διαγράμματος είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 9. και δημιουργήθηκε από τα δεδομένα στο άρθρο του Montgomery (2001).

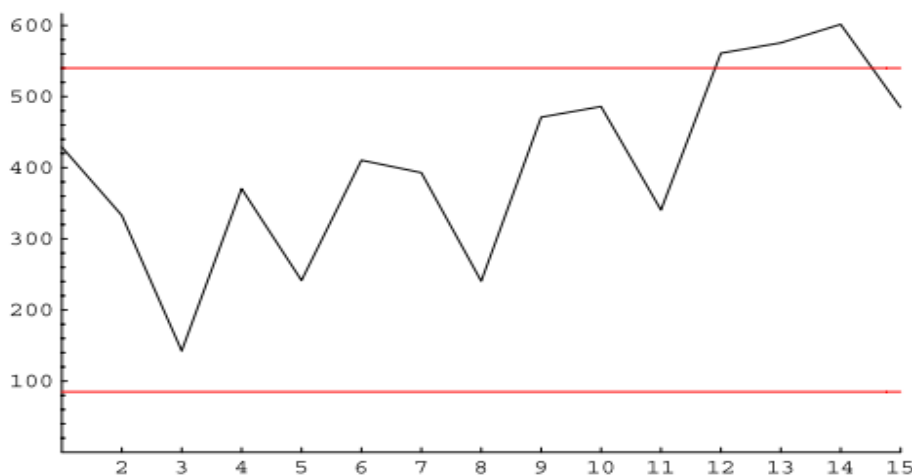


FIG 1. MW Chart for the Piston-ring data.

Σχήμα 9. Mann-Whitney διάγραμμα ελέγχου

Περαιτέρω συγκρίσεις στην βάση ορισμένων εκατοστημορίων της εκτός ελέγχου εξαρτώμενης κατανομής του μήκους διαδρομής και του ανεξάρτητου εκτός ελέγχου ARL δείχνουν ότι το προτεινόμενο διάγραμμα είναι σχεδόν τόσο καλό όσο το διάγραμμα

Shewhart \bar{X} για την κανονική κατανομή, αλλά είναι πιο ισχυρό για μια “heavy-tailed” κατανομή (δηλαδή, όταν οι παρατηρήσεις στην ουρά της κατανομής έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα απ’ ότι θα είχαν στην κανονική κατανομή), όπως η Laplace, ή για μια ασύμμετρη (*skewed*) κατανομή, όπως η κατανομή Gamma.

2.3.7. Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου διεργασίας φάσης I για θέση υποομάδας

Μεγάλο μέρος των εργασιών στον Στατιστικό Έλεγχο Ποιότητας εξαρτάται από την ορθή ολοκλήρωση μιας Φάση I μελέτης. Πολλά Φάσης I διαγράμματα ελέγχου βασίζονται σε μια παραδοχή των κανονικής κατανομής παρατηρήσεων της διεργασίας.

Στα αρχικά στάδια του ελέγχου της διεργασίας, υπάρχουν ελάχιστες πληροφορίες σχετικά με τη διαδικασία και η υπόθεση της κανονικότητας μπορεί να μην είναι λογική.

Τα υπάρχοντα ισχυρά και μη παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου αφορούν την καθιέρωση ορίων ελέγχου Φάσης II που είναι εύρωστα για μη φυσιολογικές ή υπερβολικές τιμές από το δείγμα Φάσης I.

Στην εργασία των Jones-Farmer, Jordan και Champ (2009) προτάθηκε μια μη παραμετρική μέθοδος για τον προσδιορισμό της εντός ελέγχου κατάστασης μιας διεργασίας και την αναγνώριση ενός εντός ελέγχου δείγματος αναφοράς. Το προκύπτον δείγμα αναφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση των παραμέτρων διεργασίας της Φάσης II διαδικασίας επιλογής.

Η προτεινόμενη μέθοδος που βασίζεται σε κατάταξη συγκρίνεται με το παραδοσιακό διάγραμμα \bar{X} χρησιμοποιώντας προσομοίωση Monte Carlo. Η μέθοδος αυτή συγκρίνεται ευνοϊκά με το γράφημα \bar{X} όταν η διαδικασία κατανέμεται κανονικά, εκτελείται καλύτερα από το διάγραμμα \bar{X} σε πολλές καταστάσεις και η κατανομή της διαδικασίας είναι “heavy-tailed” ή “skewed”.

Οι Jones-Farmer, Jordan και Champ (2009) θεώρησαν ένα προκαταρκτικό δείγμα m υποομάδων, με μέγεθος n η κάθε μια, από μια διαδικασία η ποιότητα της οποίας μετράται από μια συνεχή μεταβλητή. Η τυχαία μεταβλητή X_{ij} συμβολίζει την j -οστη παρατήρηση από την i -οστη υποομάδα. Οι παρατηρήσεις από τα m ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένα μοναδικό δείγμα μεγέθους $N = n \times m$. Το $R_{ij} = 1, 2, \dots, N$, μπορεί στη συνέχεια να αντιστοιχιστεί στο νέο δείγμα μεγέθους N . Με άλλα λόγια, το R_{ij}

αναφέρεται στην κατάταξη της X_{ij} , όταν αυτή συγκρίνεται με τις παρατηρήσεις του νέου δείγματος μεγέθους N . Ο μέσος και η διακύμανση της τυχαίας αυτής μεταβλητής ισούνται με:

$$E(R_{ij}) = \frac{N+1}{2}$$

$$\text{var}(R_{ij}) = \frac{(N-1)(N+1)}{12}$$

$\bar{R}_{ij} = \frac{(\sum_j R_{ij})}{n}$ αποτελεί την μέση τιμή των κατατάξεων σε μια υποομάδα i . Για μια εντός ελέγχου διεργασία ο μέσος όρος των \bar{R}_{ij} είναι ίσος με:

$$E(\bar{R}_{ij}) = \frac{N+1}{2}$$

Ενώ η διακύμανση:

$$\text{var}(\bar{R}_{ij}) = \frac{(N-n)(N+1)}{12n}$$

Το θεώρημα του κεντρικού ορίου προτείνει ότι η τυχαία μεταβλητή :

$$Z_i = \frac{\bar{R}_i - E(\bar{R}_i)}{\sqrt{\text{var}(\bar{R}_i)}} \quad (1)$$

Ακολουθεί την κανονική κατανομή για μεγάλα n .

Το προτεινόμενο γράφημα Φάσης I είναι ένα τύπου Shewhart διάγραμμα ελέγχου και βασίζεται στην εξίσωση (1) που αναφερθήκαμε παραπάνω. Σχεδιάστηκε για κάθε μία από τις m υποομάδες. Η κεντρική γραμμή δίνεται ως $CL = 0$. Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος βασίζονται στην προσομοιωμένη εμπειρική κατανομή του τυποποιημένου μέσου κατάταξης, Z_i και ποικίλλει ανάλογα με τον αριθμό των υποομάδων m και το μέγεθος της κάθε υποομάδας, n .

Ως εναλλακτική λύση στα προσομοιωμένα όρια ελέγχου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν, κατά προσέγγιση, όρια φυσιολογικής θεωρίας για μεγάλα μεγέθη υποομάδων. Ο πίνακας συσχέτισης είναι:

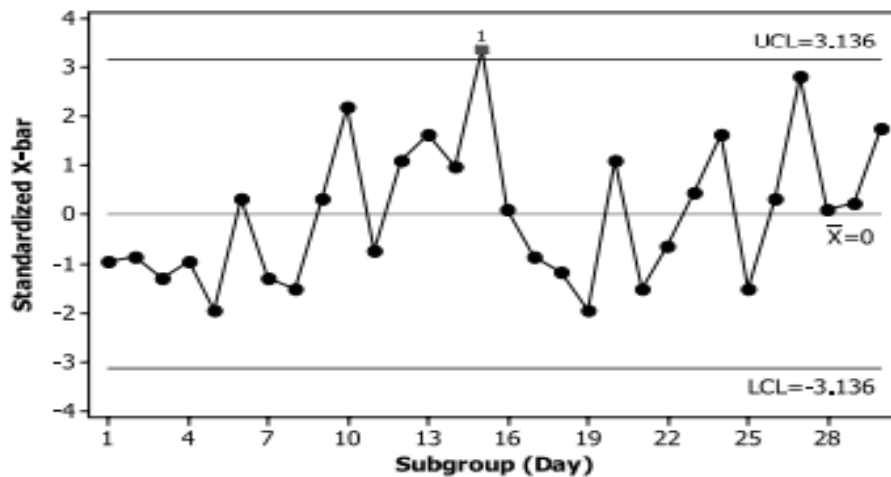
$$R_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Όπου $\rho_{ij} = \sqrt{1/(m-1)}$ στην περίπτωση που τα μεγέθη των υποομάδων είναι ίσα.

Επειδή το ρ_{ij} πλησιάζει το μηδέν όταν το m αυξάνεται, είναι επίσης λογικό να προσεγγίσουμε τα όρια χρησιμοποιώντας τη κανονική κατανομή με προσαρμογή για τον αριθμό των υποομάδων. Για παράδειγμα, η κεντρική γραμμή, κάτω και άνω όρια ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις:

$$CL=0, LCL=Z_{\tau/2}, UCL=Z_{1-\tau/2}$$

Παρακάτω, στο Σχήμα 10, φαίνεται ένα παράδειγμα του τυπικού Φάσης I διαγράμματος, που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία των Jones-Farmer, Jordan και Champ (2009), όπου τα όρια ελέγχου του υπολογίστηκαν ξανά, χωρίς όμως την χρήση της υποομάδας #15.



Σχήμα 10. Τυπικό \bar{X} Διάγραμμα χωρίς την υποομάδα 15.

2.3.8. Μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου για κοινή παρακολούθηση της άγνωστης θέσης και των παραμέτρων κλίμακας συνεχών κατανομών

Παρόλο που η υπόθεση της κανονικότητας απαιτείται για την εγκυρότητα των περισσότερων από τα διαθέσιμα διαγράμματα ελέγχου, όσον αφορά την κοινή παρακολούθηση της άγνωστης θέσης και των παραμέτρων κλίμακας, στην εργασία των Chowdhury, Mukherjeeb και Chakraborti(2013) προτείνεται και μελετάται ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart που βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση Cucconi και ονομάζεται Shewhart-Cucconi διάγραμμα ελέγχου. Επίσης, αναφέρεται και μια συμπληρωματική διαγνωστική διαδικασία που προσδιορίζει τον τύπο μετατόπισης που μπορεί να υποβληθεί στην διεργασία, όταν το διάγραμμα σηματοδοτεί μια διεργασία εκτός ελέγχου. Τα όρια ελέγχου για το διάγραμμα SC έχουν καταγραφεί για μερικές τυπικές τιμές του εντός ελέγχου μέσου μήκους διαδρομής(ARL).

Η απόδοση του διαγράμματος SC εξετάζεται σε μια μελέτη προσομοίωσης βάσει του ARL, της τυπικής απόκλισης, του μέσου και ορισμένων εκατοστημορίων του μήκους διαδρομής. Λεπτομερείς συγκρίσεις με έναν ανταγωνιστικό μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου, γνωστό ως το διάγραμμα Shewhart-Lepage, δείχνουν ότι το γράφημα SC λειτουργεί εξίσου καλά ή μπορεί ακόμα και καλύτερα. Η εκτίμηση των παραμέτρων στην απόδοση IC του διαγράμματος SC μελετάται εξετάζοντας την επίδραση που έχει το μέγεθος του δείγματος αναφοράς (Φάση-I).

Μέσω της ανάλυσης που πραγματοποιείται κατά τη Φάση I, λαμβάνεται δείγμα αναφοράς X_1, X_2, \dots, X_m μεγέθους m από μια εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Αντίστοιχα Y_1, Y_2, \dots, Y_n θα είναι το j -οστο δείγμα ελέγχου Φάσης II μεγέθους n , με $j=1,2,\dots$. Τα ανεξάρτητα αυτά, τυχαία δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν συνεχείς, αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (**cumulative distribution function (cdf)**), $F(x)$ και $G(x) = F\left(\frac{x-\theta}{\delta}\right)$ με $\theta \in \mathbb{R}; \delta > 0$, όπου η $F(x)$ μια άγνωστη, συνεχής cdf. Το θ και δ , αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα τις άγνωστες παραμέτρους της θέσης και της κλίμακας. Συστήνεται, στην συνέχεια, μια μεταβλητή I_k που ισούται με 0 ή 1, ανάλογα αν το k -οστο στατιστικό του συνδυασμένου δείγματος με $N (=m + n)$ παρατηρήσεις ανήκει στο δείγμα αναφοράς ή στο δείγμα ελέγχου. Υπολογίζονται οι παρακάτω τιμές:

$$T_1 = \sum_{k=1}^N kI_k$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^N k^2 I_k$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^N (N+1-k)^2 I_k = n(N+1)^2 - 2(N+1)T_1 + S_1$$

$$U = \frac{6S_1 - n(N+1)(2N+1)}{\sqrt{\frac{mn}{5}}(N+1)(2N+1)(8N+11)}$$

$$V = \frac{6S_2 - n(N+1)(2N+1)}{\sqrt{\frac{mn}{5}}(N+1)(2N+1)(8N+11)}$$

$$\rho = \frac{2(N^2 - 4)}{(2N+1)(8N+11)} - 1$$

Ο Cusconi πρότεινε μια στατιστική τιμή θέσης που ελέγχει ταυτόχρονα την μεταβολή της θέσης και της κλίμακας, βασιζόμενη στην τιμή C:

$$C = \frac{U^2 + V^2 - 2\rho UV}{2(1 - \rho^2)}$$

Πιο αναλυτικά, περιγράφεται η διεργασία που ακολούθησαν οι Chowdhury, Mukherjeeb και Chakraborti(2013) στην ενότητα 3.3., καθώς πολλά στοιχεία της εργασίας τους χρησιμοποιήθηκαν και από εμάς στα Κεφάλαια 3 και 4.

2.3.9. Μη παραμετρικά διαγράμματα με βελτιωμένους κανόνες ροής

Τα Shewhart διαγράμματα ελέγχου αποτελούν μια κλάση των μη παραμετρικών διαγραμμάτων Φάσης I για την θέση. Ένα από αυτά τα διαγράμματα, ονομάζεται μεσαίας προτεραιότητας (*Med chart*) και χρησιμοποιεί το μέσο του δοκιμαστικού δείγματος ως

στατιστικά στοιχεία χαρτογράφησης, ενώ ένα άλλο διάγραμμα που ονομάζεται ελαχίστης προτεραιότητας (*Min chart*) χρησιμοποιεί το ελάχιστο.

Στην εργασία των Malela-Majika, Chakraborti και Graham (2016) μελετώνται αρχικά οι συγκριτικές επιδόσεις των Min και Med διαγραμμάτων, όσον αφορά τις ιδιότητες του εντός και εκτός ελέγχου μήκους ροής τους, σε μια εκτενή μελέτη προσομοίωσης. Όπως φαίνεται κανένα από τα δύο διαγράμματα δεν είναι καλύτερο από το άλλο, καθώς το καθένα έχει τη δύναμή του σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Στη συνέχεια εξετάστηκε η βελτίωση της απόδοσής τους προσθέτοντας ορισμένους συμπληρωματικούς κανόνες ροής.

Το τυπικό διάγραμμα ελέγχου, στο οποίο εκδίδεται σήμα όταν ένα μοναδικό σημείο του γραφήματος εμπίπτει εκτός των ορίων ελέγχου είναι γνωστό ως κανόνας ροής 1-of-1 και συμβολίζεται ως RR_{1-of-1} . Για να βελτιωθεί η απόδοση του τύπου Shewhart γραφημάτων, οι Malela-Majika, Chakraborti και Graham (2016) θεώρησαν τον κανόνα ροής 2-από-2, ο οποίος δίνει ένα μήνυμα όταν δύο διαδοχικά σημεία του γραφήματος σχεδιαστούν εκτός ελέγχου. Αρκετοί κανόνες ροής, στη βιβλιογραφία, χρησιμοποιήθηκαν κυρίως στα παραμετρικά διαγράμματα και ο 2-of-2 κανόνας είναι ένας από αυτούς, καθώς είναι απλός, αλλά αποτελεσματικός. Υπάρχει, ωστόσο, μια διάκριση μεταξύ των κανόνων ροής 2-of-2 που πρότεινε ο Klein (2000), γνωστούς ως KL, και των κανόνων ροής 2-of-2 που πρότειναν οι Derman και Ross (1997), γνωστούς ως DR. Πιο αναλυτικά, αναφερόμαστε στους κανόνες αυτούς στην ενότητα 2.3.5. όπου χρησιμοποιήσαμε και σχετικά σχήματα για την καλύτερη κατανόηση τους.

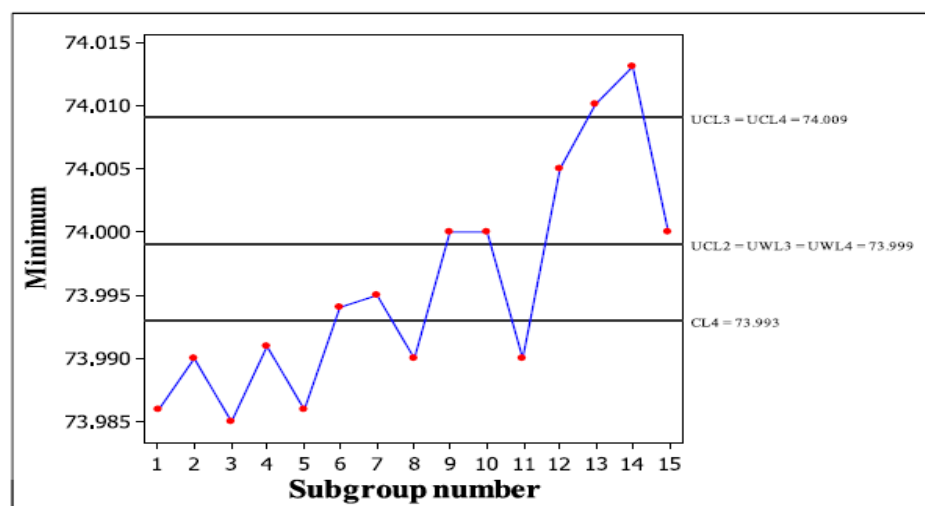
Οι Chakraborti, Eryilmaz και Human (2009) εξέτασαν το διάγραμμα Med και απέδειξαν ότι το σχήμα KL δουλεύει καλύτερα από το DR και για αυτό μόνο το σχέδιο KL εξετάζεται στο άρθρο των Malela-Majika, Chakraborti και Graham (2016). Οι κανόνες ροής 2-of-2 KL συμβολίζονται με RR_{2-of-2} .

Ένας νέος και βελτιωμένος κανόνας ροής προτάθηκε από τους Khoo και Ariffin (2006), ο οποίος είναι ένας συνδυασμός του κλασικού 1-of-1 και 2-of-2 κανόνα ροής. Συμβολίζεται ως IRR_{2-of-2} . Μετά από αυτό, Antzoulakos και Rakitzis (2008) πρότειναν ένα βελτιωμένο τροποποιημένο διάγραμμα $w-of-(w+v)$. Το συγκεκριμένο διάγραμμα αποδίδει καλύτερα από το RR_{2-of-2} για μεγάλες μετατοπίσεις και έχει καλή απόδοση για μικρές. Εάν $v > 0$, το τροποποιημένο διάγραμμα δίνει εκτός ελέγχου σήμα είτε όταν σημεία w βρεθούν πάνω από ένα άνω όριο ελέγχου UCL και χωρίζονται από το

πολύ n σημεία που βρίσκονται μεταξύ της κεντρικής γραμμής (CL) και του UCL, είτε όταν τα σημεία w βρεθούν κάτω από ένα κάτω όριο ελέγχου LCL και διαχωρίζονται από το πολύ n σημεία μεταξύ της CL και του LCL. Οι Αντζουλακος και Ρακιτζης(2008) θεώρησαν επίσης ένα βελτιωμένο, τροποποιημένο κανόνα που αποτελεί συνδυασμό του κλασικού κανόνα ροής 1-of-1 και του τροποποιημένου 2-of-2 κανόνα ροής και τον συμβολήθηκε ως $IMRR_{2-of-2}$.

Είναι φανερό ότι τα νέα διαγράμματα παρουσιάζουν πολύ ελκυστικές ιδιότητες διαδρομής, οι οποίες ξεπερνούν τους ανταγωνιστές τους σε πολλές καταστάσεις.

Οι Malela-Majika, Chakraborti και Graham (2016) ανέφεραν στην εργασία τους ένα παράδειγμα, με την απεικόνιση των Min και Med διαγραμμάτων και των δικών τους κανόνων ροής, χρησιμοποιώντας δεδομένα από το Montgomery(2001) το οποίο και φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 11. Τα RR_{1-of-1} , RR_{2-of-2} , IRR_{2-of-2} , και $IMRR_{2-of-2}$ Min διαγράμματα για τα Montgomery (2001) δεδομένα

Κεφάλαιο 3^ο

3.1. Ένα νέο μη παραμετρικό διάγραμμα για την κοινή παρακολούθηση θέσης και κλίμακας συνεχών κατανομών

Όπως αναφερθήκαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα παραμετρικά διαγράμματα ελέγχου, αν και χρήσιμα, παρουσιάζουν κάποια δυσκολία στην απόδειξη ύπαρξης της κανονικότητας ορισμένων πρακτικών καταστάσεων. Στις περιπτώσεις αυτές προτιμάται και θεωρείται ανώτερο ένα άλλο είδος διαγράμματος ελέγχου, το μη παραμετρικό.

Το πιο διαδεδομένο τεστ που αφορά την κοινή παρακολούθηση θέσης και κλίμακας είναι το Lepage και αποτελεί συνδυασμό του Wilcoxon rank-sum τεστ για την θέση και του τυποποιημένου Ansari-Bradley τεστ για την κλίμακα.

Με την σειρά τους, οι Mukherjee and Chakraborti πρότειναν ένα άλλο διάγραμμα βασιζόμενο στο Lepage τεστ, το Shewhart-Lepage (SL) Chart, την δική τους προσωπική εκδοχή για την από κοινού παρακολούθηση της θέσης και της κλίμακας.

Σε αυτή την εργασία, θα χρησιμοποιήσουμε στοιχεία από το μη παραμετρικό τεστ που προτάθηκε από τον Cucconi και εξετάζει την ισότητα δυο παραμέτρων θέσης και κλίμακας, καθώς και το διάγραμμα Shewhart-Cucconi (SC) των S. Chowdhury, A. Mukherjee και S. Chakraborti (2013).

3.2. Περιγραφή βημάτων αλγορίθμου

Τα βήματα που ακολουθήσαμε για τη δημιουργία του διαγράμματός μας είναι τα παρακάτω:

Βήμα 1: Παραγωγή δείγματος αναφοράς X_1, X_2, \dots, X_m μεγέθους m από εντός ελέγχου κατανομή

Βήμα 2: Παραγωγή j -οστού δείγματος ελέγχου Y_1, Y_2, \dots, Y_n μεγέθους n με $j=1,2,\dots$

Βήμα 3: Υπολογισμός των S_{1j}, S_{2j} από τις σχέσεις (2), (3) για το j -οστο δείγμα ελέγχου

Βήμα 4: Υπολογισμός των U_j, V_j από τις σχέσεις (4), (5)

Βήμα 5: Υπολογισμός της στατιστικής τιμής C_j από την σχέση (7) για το j -οστο δείγμα ελέγχου

Βήμα 6: Σύγκριση του C_j που υπολογίσαμε στο παραπάνω βήμα με ένα άνω όριο ελέγχου (Upper Control Limit ή UCL) $H(>0)$.

Βήμα 7: Αν το C_j είναι μεγαλύτερο από το H , τότε η διεργασία δηλώνεται ως εκτός ελέγχου για το j -οστο δείγμα ελέγχου. Αν το C_j είναι μικρότερο από το H , τότε η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου και προχωράμε στο αμέσως επόμενο δείγμα ελέγχου, όπου συνεχίζουμε με την ακριβώς ίδια διαδικασία.

3.3. Στατιστικός σκελετός και πρωταρχικές ενέργειες

Πιο αναλυτικά, μέσω της ανάλυσης που πραγματοποιείται κατά τη Φάση I, λαμβάνεται δείγμα αναφοράς X_1, X_2, \dots, X_m μεγέθους m από μια εντός στατιστικού ελέγχου διεργασία. Αντίστοιχα Y_1, Y_2, \dots, Y_n θα είναι το j -οστο δείγμα ελέγχου Φάσης II μεγέθους n , με $j=1,2,\dots$. Τα ανεξάρτητα αυτά, τυχαία δείγματα προέρχονται από δύο πληθυσμούς που ακολουθούν συνεχείς, αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (**cumulative distribution function** (cdf)), $F(x)$ και $G(x) = F\left(\frac{x-\theta}{\delta}\right)$ με $\theta \in \mathbb{R}; \delta > 0$, όπου η $F(x)$ μια άγνωστη, συνεχής

cdf. Στη στατιστική, cdf συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής X ή μιας συνάρτησης κατανομής της X μεταβλητής που αξιολογείται από το x , θεωρείται η πιθανότητα η X μεταβλητή να πάρει τιμή μικρότερη ή ίση του x . Οι σταθερές θ και δ εκπροσωπούν την άγνωστη παράμετρο της θέσης και κλίμακας, αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο αυτό βήμα, χρησιμοποιήθηκε η εκθετική συνάρτηση κατανομής με μέσο ίσο με 0,5 στη

λήψη 1.000 τυχαίων δειγμάτων αναφοράς, στο κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχήθηκαν 10.000 δείγματα ελέγχου.

Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος μας αρχικά δημιουργεί το πρώτο τυχαίο δείγμα αναφοράς μεγέθους m και 10.000 τυχαία δείγματα ελέγχου μεγέθους n .

Στη συνέχεια, κάθε ένα δείγμα ελέγχου ξεχωριστά, το συνδυάζουμε με το πρώτο δείγμα αναφοράς σε ένα νέο, με $N (=m + n)$ το σύνολο πια των παρατηρήσεων του, το οποίο και ταξινομείται σε αύξουσα σειρά. Μετά από αυτό, συστήνεται η μεταβλητή I_k , που ισούται με 0 όταν η k -οστή παρατήρηση του συνδυαζόμενου δείγματος προέρχεται από το δείγμα αναφοράς (reference sample) X ή ισούται με 1 όταν η k -οστή παρατήρηση του συνδυαζόμενου δείγματος προέρχεται από το δείγμα ελέγχου (test sample) Y .

Γνωρίζοντας πια το I_k , ακολουθεί ο υπολογισμός των παρακάτω στατιστικών τιμών για κάθε j -οστο δείγμα ελέγχου (*test sample*):

$$T_1 = \sum_{k=1}^N k I_k \quad (1)$$

$$S_1 = \sum_{k=1}^N k^2 I_k \quad (2)$$

Προφανώς και το T_1 αποτελεί το άθροισμα των θέσεων των παρατηρήσεων που ανήκουν στο τυχαίο δείγμα ελέγχου Y_i στο νέο συνδυασμένο δείγμα και αντιπροσωπεύει το γνωστό Wilcoxon test αθροίσματος θέσης. Παρομοίως, το S_1 αντιπροσωπεύει το άθροισμα των τετραγώνων των θέσεων αυτών.

$$S_2 = \sum_{k=1}^N (N+1-k)^2 I_k = n(N+1)^2 - 2(N+1)T_1 + S_1 \quad (3)$$

$$U = \frac{6S_1 - n(N+1)(2N+1)}{\sqrt{\frac{mn}{5}(N+1)(2N+1)(8N+11)}} \quad (4)$$

$$V = \frac{6S_2 - n(N+1)(2N+1)}{\sqrt{\frac{mn}{5}(N+1)(2N+1)(8N+11)}} \quad (5)$$

Ο Marozzi υποστήριξε ότι όταν $F = G$ ο συντελεστής συσχέτισης των τιμών U και V ισούται με:

$$\rho = \frac{2(N^2 - 4)}{(2N + 1)(8N + 11)} - 1 \quad (6)$$

Ο Cusconi πρότεινε μια στατιστική τιμή θέσης που ελέγχει ταυτόχρονα την μεταβολή της θέσης και της κλίμακας, βασιζόμενη στην τιμή C :

$$C = \frac{U^2 + V^2 - 2\rho UV}{2(1 - \rho^2)} \quad (7)$$

Υπολογίζουμε και συγκρίνουμε τη στατιστική τιμή Cusconi που λάβαμε για το συγκεκριμένο δείγμα ελέγχου με ένα άνω όριο (UCL) $H > 0$. Αν η τιμή C_j είναι μεγαλύτερη από το H , τότε η διεργασία δηλώνεται ως εκτός ελέγχου. Αν είναι μικρότερη τότε η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου και ο έλεγχος προχωράει στο επόμενο δείγμα ελέγχου (test sample).

Εκείνο που έχει ιδιαίτερη σημασία είναι να υπολογίσουμε τον αριθμό των δειγμάτων ελέγχου που βρίσκονται εντός ελέγχου πριν εμφανιστεί το πρώτο σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία. Για αυτό και κατά την παραπάνω σύγκριση της στατιστικής τιμής Cusconi C_j με το H δημιουργήσαμε έναν πίνακα ekt με μέγεθος ίσο με τον αριθμό των δειγμάτων ελέγχου (στην περίπτωση μας 10.000 για το πρώτο δείγμα αναφοράς), όπου για κάθε j -οστο δείγμα ελέγχου, αν η διεργασία δηλώνεται εντός ελέγχου τότε το $ekt(j)$ στοιχείο του πίνακα ισούται με 0, ενώ αν η διεργασία δηλώνεται εκτός ελέγχου τότε το $ekt(j)$ στοιχείο του πίνακα ισούται με 1. Ολοκληρώνεται αυτή η διαδικασία για όλα τα 10.000 δείγματα ελέγχου και παίρνουμε το άθροισμα των 0 του πίνακα ekt πριν συναντήσουμε το πρώτο 1, δηλαδή το πρώτο εκτός ελέγχου σήμα. Για κάθε ένα από τα 1.000 δείγματα αναφοράς παίρνουμε τον αριθμό που προκύπτει από το άθροισμα αυτό και υπολογίζουμε τον μέσο όρο τους. Με αυτό τον τρόπο, προκύπτει το ARL .

3.4. Παρουσίαση του κώδικα για τον υπολογισμό της στατιστικής συνάρτησης αλλά και των μέτρων απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου

Τα αποτελέσματα μας προέκυψαν με τη χρήση του παρακάτω κώδικα, ο οποίος και ακολουθεί τα βήματα του αλγορίθμου που περιγράψαμε και αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα:

```

function [athroisma,mo]=ektoselegxou(arith_anaf,arith_elegx,m,n,H)
refsample=zeros(1,m);
testsample=zeros(1,n);
sum2=zeros(1,arith_anaf);
for g=1:arith_anaf
sum1=0;
for k=1:m
refsample(k)=exprnd(0.5);
end
for o=1:arith_elegx
for l=1:n
testsample(l)=exprnd(0.5);
end
olokl=zeros(1,m+n);
olokl=[testsample refsample];
olokl1=sort(olokl);
ik=ismember(olokl1,testsample);
T1=0;S1=0;S2=0;N=m+n;
for i=1:N
T1=T1+i*ik(i);
S1=S1+i*i*ik(i);
S2=S2+((N+1-i)*(N+1-i)*ik(i));
end
U=((6*S1)-
(n*(N+1)*((2*N)+1)))/sqrt(((N+1)*((2*N)+1)*((8*N)+11)*m*n)/5);
V=((6*S2)-
(n*(N+1)*((2*N)+1)))/sqrt(((N+1)*((2*N)+1)*((8*N)+11)*m*n)/5);
p=((2*((N*N)-4))/((2*N+1)*(8*N+11)))-1;
C(o)=((U*U)+(V*V)-(2*p*U*V))/(2*(1-(p*p)));
end
for i=1:size(C,2)
if(C(i)>H)
ekt(i)=1;
sum1=sum1+1;
if (sum1==1) && (i~=1)
sum2(g)=i-1;
end
else
ekt(i)=0;
end
end
end
athroisma=sum(sum2);
mo=athroisma/arith_anaf;
End

```

3.5. Πρακτική Εφαρμογή

Για να προχωρήσουμε, όμως, χρειαζόμαστε την διαγραμματική σταθερά H . Στην εργασία των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013), όπου προτάθηκε το μη παραμετρικό Shewhart-Cusconi(SC) διάγραμμα, χρησιμοποιώντας το λογισμικό R.2.14.1 υπολογίστηκε το ARL_0 της εντός ελέγχου μήκους ροής κατανομής. Επιλέχτηκε μέγεθος $m=30,50,100$ και 150 για το δείγμα αναφοράς και $n=5,11$ και 25 για το δείγμα ελέγχου. Το ίδιο πραγματοποιήθηκε και από εμάς, ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω, με σκοπό την εύρεση του H για οποιοδήποτε δοσμένο ζευγάρι (m,n) , όταν το ARL_0 ισούται με συγκεκριμένη τιμή-στόχο. Τα αποτελέσματα που παρήχθησαν φαίνονται στον Πίνακα 1.

Πίνακας 1. Διαγραμματική σταθερά H για διάφορες τιμές του m,n και κάποιες τιμές-στόχους του ARL_0			
Μέγεθος δείγματος αναφοράς (m)	Μέγεθος δείγματος ελέγχου (n)	H	ARL_0
30	5	3,99	236,6931
30	11	4,09	248,6922
30	25	3,78	253,3764
50	5	4,62	252,7926
50	11	4,38	252,2415
50	25	4,25	242,7434
100	5	5,22	244,5797
100	11	4,79	221,8241
100	25	4,73	253,3933
150	5	5,44	250,4534
150	11	5,01	247,0774
150	25	4,94	250,9577
30	5	4,26	327,7709
30	11	4,30	366,6968
30	25	4,01	361,8832
50	5	4,97	354,9605
50	11	4,63	370,1742
50	25	4,50	356,592
100	5	5,64	363,166
100	11	5,11	371,9612
100	25	5,03	348,0025
150	5	5,90	379,7113
150	11	5,38	366,8034
150	25	5,25	370,0772

30	5	4,48	514,7424
30	11	4,45	497,8003
30	25	4,18	498,8315
50	5	5,25	495,9181
50	11	4,80	490,5572
50	25	4,70	495,259
100	5	5,98	493,2521
100	11	5,34	472,4853
100	25	5,25	508,7854
150	5	6,25	522,185
150	11	5,67	482,5682
150	25	5,49	514,3554

Ο Πίνακας 1 χωρίζεται ουσιαστικά σε τρία κομμάτια σύμφωνα με τα ζευγάρια (m,n) και το H που επιλέχτηκε για το καθένα. Το πρώτο κομμάτι περιλαμβάνει τα πρώτα 12 ζευγάρια (m,n) τα οποία αντιστοιχούν σε ARL_0 ίσο με 250 (κατά προσέγγιση) στην εργασία των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013). Το δεύτερο κομμάτι αποτελείται από τα επόμενα 12 ζευγάρια (m,n) και τις αντίστοιχες H τιμές τους. Σε αυτό, το ARL_0 που βρέθηκε από τους Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013) είναι ίσο με 370 (κατά προσέγγιση). Τέλος, έχουμε τα υπόλοιπα 12 ζευγάρια με ARL_0 ίσο με 500 (κατά προσέγγιση).

Όπως παρατηρούμε, τα αποτελέσματα μας βρίσκονται κοντά στις τιμές-στόχους 250, 370 και 500, του ARL_0 που χρησιμοποιήθηκαν και από τους Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013). Για παράδειγμα, όταν έχουμε $m=30$, $n=11$ και $H=4,09$, το ARL_0 μας ισούται με 248,692. Για το ίδιο ζευγάρι (m,n) , με $H=4,30$ και 4,45 αντίστοιχα, οι τιμές του ARL_0 μας είναι ίσες με 366,6968 και 497,8003. Το H αυξάνεται με το m , όταν τα n και ARL_0 παραμένουν σταθερά. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα που παρήχθησαν με χρήση του προτεινόμενου αλγορίθμου και παρουσιάζονται στον Πίνακα 1, πλησιάζουν ικανοποιητικά τα αντίστοιχα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην αρχική εργασία των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013). Πιο συγκεκριμένα, συγκρίνοντας τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Πίνακα 1 της παρούσας εργασίας με τα αποτελέσματα του Πίνακα II (Table II) της εργασίας των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013), τα συμπεράσματα είναι ενθαρρυντικά για την ορθότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που λαμβάνεται δείγμα αναφοράς μεγέθους $m = 100$, δείγμα ελέγχου μεγέθους $n = 25$ και σταθερά $H = 5.25$, το διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει επιτυγχάνει

- Σύμφωνα με τον προτεινόμενο αλγόριθμο, εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με $ARL_0 = 508.7854$
- Σύμφωνα με τον αλγόριθμο των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013), εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με $ARL_0 = 506.7$.

Κεφάλαιο 4^ο

4.1. Ανάλυση Απόδοσης

Η απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου μελετάται συνήθως μέσω της κατανομής του μήκος διαδρομής του. Όμως επειδή η κατανομή αυτή έχει κλίση προς τα δεξιά, προτιμότερο είναι να συμβουλευτούμε μετρήσεις όπως ο μέσος, η τυπική απόκλιση, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο για να χαρακτηρίσουμε σωστά μια τέτοια κατανομή.

Σε αυτό το σημείο της εργασίας χρησιμοποιείται ο κανόνας ροής 2-από-τα-3 που σημαίνει ότι το διάγραμμα παράγει σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία μόνο αν βρεθούν μέσα σε τρία διαδοχικά δείγματα ελέγχου τουλάχιστον δύο που είναι εκτός των ορίων ελέγχου. Ουσιαστικά, η προσθήκη του προαναφερθέντος κανόνα ροής αποτελεί και τη βασική συμβολή της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, το διάγραμμα ελέγχου που χρησιμοποιεί τη στατιστική συνάρτηση Cuscopi και ταυτόχρονα εμπλουτίζεται με τον κανόνα ροής 2-από-τα-3 αποτελεί μία πρωτότυπη πρόταση που δεν έχει δημοσιευθεί στη διεθνή βιβλιογραφία. Το αναμενόμενο αποτέλεσμα με την προσθήκη του κανόνα ροής στο προαναφερθέν διάγραμμα είναι η βελτίωση της απόδοσης του τόσο σε εντός ελέγχου όσο και σε εκτός ελέγχου καταστάσεις. Με άλλα λόγια, αναμένουμε η χρήση του κανόνα ροής να βελτιώσει την αντοχή του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου σε περιπτώσεις που η εντός ελέγχου κατανομή δεν έχει διαταραχθεί και ταυτόχρονα να βελτιώσει την ευαισθησία του νέου διαγράμματος ελέγχου στο να εντοπίζει έγκυρα και έγκαιρα τυχόν μετατοπίσεις της κατανομής της υπό μελέτη διεργασίας.

Για να ελεγχθεί, λοιπόν, η απόδοση του διαγράμματος όσον αφορά την εκτός ελέγχου διεργασία του επιλέγουμε τις ακόλουθες συνεχείς κατανομές

- την Κανονική κατανομή με παραμέτρους θ και δ , δηλαδή την κατανομή $N(\theta, \delta)$ με αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$pdf(u) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta^2}(u - \theta)^2\right\}$$

και

- τη συμμετρική κατανομή Laplace (θ, δ) με αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$pdf(u) = \frac{1}{2\delta} \exp\left(-\frac{|u - \theta|}{\delta}\right).$$

Εξετάζουμε τα χαρακτηριστικά της κατανομής μήκους διαδρομής όταν το εντός ελέγχου δείγμα λαμβάνεται σε κάθε περίπτωση από την αντίστοιχη κατανομή με $\theta=0$ και $\delta=1$. Στην πρώτη περίπτωση, που χρησιμοποιήσαμε τη κανονική κατανομή $N(\theta,\delta)$ για τη λήψη των δειγμάτων μας, το εντός ελέγχου δείγμα προήλθε από τη Κανονική κατανομή $N(0,1)$. Ακολουθήσαμε τα βήματα των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013) ώστε να παρατηρήσουμε λεπτομερώς τις μεταβολές του μέσου και της διακύμανσης, δηλαδή επιλέξαμε τους δικούς τους 30 συνδυασμούς όσον αφορά τις τιμές των θ και δ ($\theta = 0, 0.25, 0.5, 1, 1.5, 2.0$ και $\delta = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0$) και με τη βοήθεια του κανόνα ροής καταλήξαμε στα αποτελέσματα του Πίνακα 2.

Πίνακας 2. Ανάλυση απόδοσης του νέου διαγράμματος για τη κανονική κατανομή $N(\theta,\delta)$ με $ARL_0=500$ και σύγκριση με το Shewhart-Cusconi (SC) διάγραμμα					
θ	δ	$m=50, n=5$		$m=100, n=5$	
		<i>Νέο διάγραμμα ($H=2,7$)</i>	<i>SC διάγραμμα</i>	<i>Νέο διάγραμμα ($H=2,85$)</i>	<i>SC διάγραμμα</i>
0	1	475,0852	497,3	494,92033	509,4
0,25	1	287,0204	288,6	240,493	253,6
0,5	1	74,26475	92,2	51,74133	68,6
1,0	1	7,122	8,5	6,01766	7,7
1,5	1	2,156	2,2	2,0222	2,1
2	1	1,087	1,2	1,111	1,2
0	1,25	60,0296	71,1	54,23433	74,5
0,25	1,25	49,3576	53,5	39,291	54,9
0,5	1,25	22,913	27,6	19,71266	26,2
1,0	1,25	6,2863	6,6	5,81933	6,2
1,5	1,25	2,2879	2,4	2,11113	2,4
2	1,25	1,342	1,4	1,147	1,3
0	1,5	17,80833	22,8	16,40466	24,3
0,25	1,5	15,6253	19,7	14,05	20,4
0,5	1,5	11,43266	13,3	10,03	13,4
1,0	1,5	5,1987	5,2	5,3145	5,3
1,5	1,5	2,147	2,4	2,11475	2,4
2	1,5	1,355	1,5	1,2299	1,5
0	1,75	9,0056	10,9	8,5653	11,7
0,25	1,75	8,755	10,0	7,77133	10,7
0,5	1,75	7,3953	8,1	6,85633	8,4
1,0	1,75	4,269	4,4	4,43966	4,4
1,5	1,75	2,016	2,5	2,23369	2,4
2	1,75	1,433	1,6	1,5223	1,6
0	2	6,26033	6,6	6,79525	7,1
0,25	2	5,14	6,2	5,79525	6,8
0,5	2	5,00625	5,5	5,4946667	5,8
1,0	2	3,543	3,7	3,3698	3,8
1,5	2	2,0145	2,4	2,058	2,4
2	2	1,5666	1,7	1,5874	1,7

Στον παραπάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι με την αύξηση 25% της παραμέτρου θέσης θ και τη προέλευση της παραμέτρου δ από εντός ελέγχου διεργασία ($\delta=1$) πραγματοποιείται μείωση του ARL_0 κατά 40% για $m=50$. Για $m=100$, το ARL_0 που βρήκαμε από τις δοκιμές μας μειώνεται κατά 51%. Όταν η παράμετρος της κλίμακας δ από την άλλη, αυξάνεται κατά 25% και η παράμετρος της κλίμακας προέρχεται από εντός ελέγχου διεργασία ($\theta=0$) η μείωση του ARL_0 φτάνει στα 87% για $m=50$. Παρόμοιες παρατηρήσεις γίνονται και για το $m=100$. Ουσιαστικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι εκτός ελέγχου κατανομές μήκους διαδρομής (run length distributions) έχουν κλίση προς τα δεξιά. Οι εκτός ελέγχου τιμές ARL για σταθερά m , n και δεδομένο ARL_0 ελαττώνονται απότομα με την αυξητική μεταβολή των παραμέτρων της θέσης και κλίμακας. Η μεταβολή της παραμέτρου κλίμακας είναι πιο γρήγορη από αυτή της παραμέτρου θέσης.

Στον Πίνακα 2, συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που παρήχθησαν όταν χρησιμοποιήσαμε την Κανονική κατανομή $N(\theta, \delta)$ με τα αντίστοιχα αποτελέσματα στην εργασία των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013) για το Shewhart-Cucconi (SC) διάγραμμα και εύκολα παρατηρούμε ότι οι τιμές του ARL_{out} μας είναι μικρότερες από αυτές του SC διαγράμματος (γεγονός που υποδεικνύει τη βελτίωση της απόδοσης του νέου διαγράμματος με χρήση του κανόνα ροής). Για παράδειγμα, όταν $\theta=0,5$ και $\delta=1,25$, για $m=100$ το ARL_{out} του νέου διαγράμματος είναι ίσο με 19,71266, ενώ το αντίστοιχο ARL_{out} του SC διαγράμματος είναι ίσο με 26,2, δηλαδή το αποτέλεσμα μας είναι μικρότερο κατά περίπου 25%. Γνωστό είναι ότι το ARL_{out} σε μια εκτός ελέγχου διεργασία, αποτελεί τον αναμενόμενο αριθμό των δειγμάτων έως ότου το διάγραμμα ελέγχου να δώσει (ορθώς) εκτός ελέγχου σήμα. Είναι σαφές ότι το επιθυμητό σε κάθε περίπτωση θα ήταν το ARL_{out} να είναι όσο πιο μικρό γίνεται, καθώς μια πιθανή μεταβολή της διεργασίας σε μη ικανοποιητικό επίπεδο είναι κάτι που πρέπει να παρατηρείται το δυνατόν γρηγορότερα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που λαμβάνεται δείγμα αναφοράς μεγέθους $m = 50$, δείγμα ελέγχου μεγέθους $n = 5$,

- το νέο προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει, επιτυγχάνει για μετατοπίσεις της παραμέτρου θέσης κατά 0.25, 0.5, 1, 1.5 και 2 μονάδες αντίστοιχα, εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 287.02, 74.26, 7.12, 2.156 και 1.087 αντιστοίχως.
- το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013), επιτυγχάνει για μετατοπίσεις της παραμέτρου θέσης κατά 0.25, 0.5, 1, 1.5 και 2 μονάδες αντίστοιχα, εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 288.6, 92.2, 8.5, 2.2 και 1.2 αντιστοίχως.

Βάσει των παραπάνω αριθμητικών αποτελεσμάτων, συμπεραίνουμε ότι, υπό την Κανονική κατανομή, το νέο προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου με χρήση του κανόνα ροής 2-από-3, είναι αποτελεσματικότερο στον εντοπισμό μετατοπίσεων της κατανομής έναντι του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου *SC*.

Γενικότερα, από τα αποτελέσματα μας είναι φανερό ότι για $m=100$ υπάρχει μεγαλύτερη πτώση του *ARL* σε σχέση με τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν με $m=50$.

Στη δεύτερη περίπτωση που εξετάσαμε, επιλέχτηκε η κατανομή Laplace (θ, δ) για την παραγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων και τη σύγκριση του νέου διαγράμματος ελέγχου με το αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου που έχει προταθεί από τους Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013). Αξίζει να σημειωθεί ότι τα μη παραμετρικά διαγράμματα διατηρούν την ίδια την εντός ελέγχου απόδοση για όλες τις συνεχείς κατανομές (ή τουλάχιστον με πολύ μικρές μεταβολές της εντός ελέγχου απόδοσης τους). Χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιοι ακριβώς συνδυασμοί των παραμέτρων θέσης και κλίμακας θ και δ , καθώς και τα ίδια μεγέθη για τα δείγματα αναφοράς και ελέγχου m και n . Τα αποτελέσματά που προέκυψαν παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3. Ανάλυση απόδοσης του νέου διαγράμματος στη κατανομή Laplace(θ, δ) με $ARL_0=500$ και σύγκριση με το Shewhart-Cucconi (<i>SC</i>) διάγραμμα					
θ	δ	m=50, n=5		m=100, n=5	
		<i>Νέο διάγραμμα</i> ($H=2,7$)	<i>SC</i> διάγραμμα	<i>Νέο διάγραμμα</i> ($H=2,85$)	<i>SC</i> διάγραμμα
0	1	493,2734	492,7	444,59225	509,6
0,25	1	338,93	419,0	221,4115	381,6
0,5	1	97,77925	240,4	39,1265	191,0
1,0	1	6,4225	41,4	5,19875	26,5
1,5	1	5,2485	7,2	4,7773	4,8
2	1	2,03659	2,1	1,54667	1,8
0	1,25	109,2385	118,0	86,252166	124,5
0,25	1,25	69,3175	99,9	54,4708	100,6
0,5	1,25	28,24375	69,7	18,927	61,7
1,0	1,25	5,66675	20,1	4,9555	14,6
1,5	1,25	4,8795	5,1	3,23655	4,4
2	1,25	1,65784	2,1	1,88233	2,0
0	1,5	35,7825	43,3	29,203	47,8
0,25	1,5	28,65775	39,2	22,403	42,1
0,5	1,5	15,61275	29,3	11,7946	29,6
1,0	1,5	5,49675	12,0	4,8158	10,7
1,5	1,5	4,24362	4,5	3,148233	4,0
2	1,5	2,03315	2,2	1,88963	2,1
0	1,75	17,72125	22,8	15,1524	24,4
0,25	1,75	14,6738	20,1	13,2674	22,0
0,5	1,75	9,2658	16,7	8,3232	16,9

1,0	1,75	5,12775	8,5	4,7885	7,9
1,5	1,75	3,9512	4,0	3,49876	3,7
2	1,75	2,1444	2,2	2,00065	2,1
0	2	10,7715	13,8	9,53	14,5
0,25	2	9,3145	13,1	8,6306	13,6
0,5	2	7,32775	11,1	6,6384	11,3
1,0	2	5,06975	6,5	4,8105	6,3
1,5	2	3,145333	3,5	3,4325	3,5
2	2	2,0986	2,2	2,004	2,1

Για τη κατανομή *Laplace*, από τον Πίνακα 3, βλέπουμε ότι παρά το γεγονός ότι τα μοτίβα στις εκτός ελέγχου τιμές του ARL παραμένουν ίδια όπως και στη κανονική κατανομή, οι τιμές αρκετές φορές είναι μεγαλύτερες για παρόμοιες μεταβολές στη θέση ή στην κλίμακα που σημαίνει ότι είναι πιο αργή η ανίχνευση των μεταβολών αυτών σε κατανομές με μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης μεγάλων αριθμών. Για παράδειγμα, όταν έχουμε $m=50$ και η θέση αυξάνεται κατά 25%, το ARL είναι 338,93 σε σύγκριση με το 287,0204 που βγάλαμε στην κανονική κατανομή. Η μεταβολή της παραμέτρου της κλίμακας τόσο στην κανονική κατανομή όσο και στην Laplace κατανομή όμως οδηγούν σε διαφορετικής ποσότητας μεταβολές της τυπικής απόκλισης στη διεργασία, με αποτέλεσμα τέτοιες συγκρίσεις να μην έχουν κάποιο νόημα.

Αντίστοιχα όπως παρατηρήσαμε και στην περίπτωση της Κανονικής κατανομής, επισημαίνουμε και στην περίπτωση της κατανομής Laplace πως για σταθερά m και n και δεδομένο ARL_0 , οι εκτός ελέγχου τιμές του ARL μειώνονται απότομα με την αυξητική μεταβολή των παραμέτρων θέσης και κλίμακας. Αυτό δείχνει ότι το διάγραμμα μας είναι ευαίσθητο και στις δυο αυτές παραμέτρους, αλλά όχι με τον ίδιο τρόπο. Το διάγραμμα μας φαίνεται να αντιδρά πιο γρήγορα στη μεταβολή της θέσης, σε αντίθεση με αυτή της κλίμακας. Για παράδειγμα, στον Πίνακα 3 εύκολα παρατηρούμε πως όταν έχουμε $m=50$, για 25% αύξηση της παραμέτρου της θέσης, όταν η παράμετρος της κλίμακας βρίσκεται εντός ελέγχου ($\delta=1$), το ARL μειώνεται κατά 31,28%, ενώ για 25% αύξηση της παραμέτρου της κλίμακας, όταν η παράμετρος της θέσης βρίσκεται εντός ελέγχου ($\theta=0$), το ARL μειώνεται κατά 78%. Για ταυτόχρονη αύξηση τόσο της παραμέτρου θέσης όσο και αυτής της κλίμακας για 25%, το ARL μειώνεται κατά 86%.

Από την άλλη μεριά, αν συγκρίνουμε τα παραπάνω ποσοστά με τα αποτελέσματα των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013), για τη Laplace κατανομή, βλέπουμε πως στην πρώτη περίπτωση που έχουμε 25% αύξηση στη θέση, με παράμετρο της κλίμακας εντός ελέγχου ($\delta=1$), το ARL που βρήκαν μειώνεται κατά 15%, ποσοστό μικρότερο από το δικό μας κατά το μισό περίπου. Όταν πραγματοποιείται 25% αύξηση της

παραμέτρου της κλίμακας, με τη θέση να βρίσκεται εντός ελέγχου ($\theta=0$), το ARL του SC διαγράμματος μειώνεται κατά 76%. Και σε αυτή την περίπτωση, το διάγραμμά μας εμφανίζει μεγαλύτερη μείωση του ARL, αλλά όχι σε τόσο ραγδαίο σημείο όπως πριν.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση που λαμβάνεται δείγμα αναφοράς μεγέθους $m = 50$, δείγμα ελέγχου μεγέθους $n = 5$,

- το νέο προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει, επιτυγχάνει για μετατοπίσεις της παραμέτρου θέσης κατά 0.25, 0.5, 1, 1.5 και 2 μονάδες αντίστοιχα, εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 338.93, 97.78, 6.42, 5.24 και 2.04 αντιστοίχως.
- το μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013), επιτυγχάνει για μετατοπίσεις της παραμέτρου θέσης κατά 0.25, 0.5, 1, 1.5 και 2 μονάδες αντίστοιχα, εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής ίσο με 419, 240.4, 41.4, 7.2 και 2.1 αντιστοίχως.

Βάσει των παραπάνω αριθμητικών αποτελεσμάτων, συμπεραίνουμε ότι, υπό την κατανομή Laplace, το νέο προτεινόμενο διάγραμμα ελέγχου με χρήση του κανόνα ροής 2-από-3, είναι αποτελεσματικότερο στον εντοπισμό μετατοπίσεων της κατανομής έναντι του μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου SC. Συνοψίζοντας, ο Πίνακας 3 μας δείχνει πως για κάθε μεταβολή της παραμέτρου της θέσης και της κλίμακας, το διάγραμμά μας υπερέχει του SC διαγράμματος, καθώς εμφανίζει μικρότερο ARL, δηλαδή εντοπίζει γρηγορότερα εκτός ελέγχου διεργασίες.

4.2. Κομμάτι κώδικα που χρησιμοποιήθηκε για την ένταξη του κανόνα ροής

Ουσιαστικά, στον παρακάτω κώδικα, γίνεται ο έλεγχος του πίνακα `ekt()` που δημιουργήθηκε σύμφωνα με τη συνθήκη του αν η τιμή C_j είναι μεγαλύτερη από το H , τότε η διεργασία δηλώνεται ως εκτός ελέγχου, ενώ αν είναι μικρότερη τότε η διεργασία θεωρείται εντός ελέγχου. Από την συνθήκη αυτή, αν η διεργασία δηλώνεται εντός ελέγχου τότε το `ekt(j)` στοιχείο του πίνακα ισούται με 0, ενώ αν η διεργασία δηλώνεται εκτός ελέγχου τότε το `ekt(j)` στοιχείο του πίνακα ισούται με 1. Αν σε κάθε διαδοχική τριάδα των στοιχείων του πίνακα `ekt()` συναντάμε για πρώτη και μοναδική φορά, μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου, δηλαδή στοιχείο `ekt(j)` ίσο με 0 και δυο διεργασίες που βρίσκονται εκτός ελέγχου, δηλαδή στοιχείο `ekt(j)` ίσο με 1, ανεξαρτήτως της σειράς εμφάνισής του συγκεκριμένου μοτίβου, ισχύει ο κανόνας ροής που επιλέξαμε, οπότε και συγκεντρώνουμε τον αριθμό της θέσης του τελευταίου στοιχείου της τριάδας αυτής για κάθε δείγμα αναφοράς και υπολογίζουμε τον μέσο όρο τους. Αυτός είναι ο αριθμός ARL_0 που χρησιμοποιήσαμε στα αποτελέσματα της Ενότητας 4.1.

```
while((sum1<1)&&(j<=size(ekt,2)-2))
  if((ekt(j)==1)&&(ekt(j+1)==1)&&(ekt(j+2)==0))
    thesiRL(g)=j+2;
    sum1=sum1+1;
  elseif((ekt(j)==0)&&(ekt(j+1)==1)&&(ekt(j+2)==1))
    thesiRL(g)=j+2;
    sum1=sum1+1;
  elseif((ekt(j)==1)&&(ekt(j+1)==0)&&(ekt(j+2)==1))
    thesiRL(g)=j+2;
    sum1=sum1+1;
  else j=j+1;
end
end
```

Κεφάλαιο 5^ο

5.1. Περιληπτική περιγραφή και τελικά συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία, προτείνουμε ένα μη παραμετρικό διάγραμμα ελέγχου που χρησιμοποιεί τη βαθμολογική στατιστική συνάρτηση Cusconi και ενσωματώνει τον 2-από-3 κανόνα ροής για την κοινή παρακολούθηση των παραμέτρων θέσης και κλίμακας οποιασδήποτε συνεχούς κατανομής. Βασιστήκαμε στην εργασία των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013) και πιο συγκεκριμένα στο μη παραμετρικό διάγραμμα Shewhart-Cusconi (SC) που παρουσίασαν εκεί. Μετά από μελέτη της εντός, καθώς και εκτός ελέγχου επίδοσης του διαγράμματος μας, του μέσου και άλλων στατιστικών στοιχείων της κατανομής μήκους διαδρομής, συγκρίναμε τα στοιχεία μας με αυτά του Shewhart-Cusconi (SC) μη παραμετρικού διαγράμματος.

Για όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν και βάσει όλων των αριθμητικών αποτελεσμάτων που παρήχθησαν, το προτεινόμενο μη παραμετρικό διάγραμμα φαίνεται να υπερέχει έναντι του αντίστοιχου μη παραμετρικού διαγράμματος ελέγχου των Chowdhury, Mukherjee και Chakraborti (2013). Πράγματι, για τις ειδικές περιπτώσεις συνεχών κατανομών που χρησιμοποιήθηκαν, το νέο διάγραμμα ελέγχου επιτυγχάνει καλύτερη εκτός ελέγχου απόδοση, καθώς εμφανίζει χαμηλότερες τιμές του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής για οποιαδήποτε μετατόπιση της παραμέτρου θέσης ή κλίμακος εξετάστηκε. Συνεπώς, συμπεραίνουμε (όπως ήταν αναμενόμενο) ότι με την προσθήκη του κανόνα ροής το διάγραμμα βελτιώθηκε, καθώς το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για το τροποποιημένο διάγραμμα με τον κανόνα ροής είναι καλύτερο (μικρότερο) από το αντίστοιχο αριθμητικό αποτελέσματα που αντιστοιχεί στο SC διάγραμμα χωρίς κανόνα ροής.

Βιβλιογραφία

Ελληνική

Αντζουλάκος, Δ., *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*, Πειραιάς, Πανεπιστήμιο Πειραιώς; 2009.

Βουγιούκας, Ι. Γ. (2008). *Μελέτη και Εφαρμογή Δειγματοληπτικού Ελέγχου Απόδοσης*, Διπλωματική Εργασία, Πειραιάς, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Καρκαλούσος, Π. (2002). Η χρήση του αθροιστικών διαγραμμάτων στον εσωτερικό έλεγχο ποιότητας των αναλυτών κλινικής χημείας, *Εφαρμ. Κλιν. Μικροβ. Εργ. Διαγν.*, **7**, 181-191.

Καρκαλούσος, Π. (2005). Το διάγραμμα EWMA στον εσωτερικό έλεγχο ποιότητας των αναλυτών κλινικής χημείας, *Εφαρμ. Κλιν. Μικροβ. Εργ. Διαγν.*, **10**, 136-146.

Κτενίδης, Α. (2011). *Παραμετρικά και Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου και Εφαρμογές*, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Λάππα, Α. Κ. (2014). *Παραμετρικά και Μη Παραμετρικά Διαγράμματα Ελέγχου στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασίας*, Διπλωματική Εργασία, Αθήνα, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Τσεκούρας, Γ. (2017). *Διαγράμματα ελέγχου Shewhart και κανόνας ροών r/m* , Διπλωματική Εργασία, Πειραιάς, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

Ξένη

Antzoulakos, D. & Rakitzis, A.C (2008), The revised runs rule m -of- k , *Quality Engineering*, **20**, 75–81.

Bakir, S.T. (2006). Distribution-free quality control charts based on signed-rank-like statistics, *Communications in Statistics: Theory & Methods*, **35**, 743–757.

Balakrishnan, N. & Frattina, R. (2000). Precedence test and maximal precedence test. *In Recent Advances in Reliability Theory: Methodology, Practice and Inference*. Boston: Birkhauser.

Balakrishnan, N. & Ng, H. K. T. (2001). A general maximal precedence test. *In System and Bayesian Reliability*. Singapore: World Scientific Publishing Co.

- Balakrishnan, N., Triantafyllou, I.S. & Koutras, M.V. (2009). Nonparametric control charts based on runs and Wilcoxon–type rank–sum statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3177-3192.
- Balakrishnan, N., Triantafyllou, I.S. & Koutras, M.V. (2010). A distribution-free control chart based on order statistics, *Communication in Statistics: Theory & Methods*, **39**, 3652-3677.
- Chakraborti, S. & Eryilmaz, S. (2007). A nonparametric Shewhart–type signed–rank control chart based on runs, *Communications in Statistics: Simulation & Computation*, **36**, 335–356.
- Chakraborti, S., Eryilmaz, S. & Human, S.W. (2009). A phase II nonparametric control chart based on precedence statistics with runs-type signaling rules, *Computational Statistics & Data Analysis*, **53**, 1054-1065.
- Chakraborti, S., Van der Laan, P. & Bakir, S. (2001). Nonparametric Control Charts: An Overview and Some Results. *Journal of Quality Technology*, **33**, 304-315.
- Chakraborti, S., Van der Laan, P. & Van de Wiel, M.A. (2004). A class of distribution-free control charts, *Journal of the Royal Statistical Society, Series C-Applied Statistics* **53**, 443–462.
- Chakraborti, S. & Van de Wiel, M.A. (2008). A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney Statistic, *Institute of Mathematical Statistics*, **1**, 156-172.
- Chowdhury, S., Mukherjee, A. & Chakraborti, S. (2013). A New Distribution-Free Control Chart for joint Monitoring of Unknown Location and Scale Parameters of Continuous Distributions, *Quality and Reliability Engineering International*, **30**, 191-204.
- Derman, C. & Ross, SM. (1997). Statistical aspects of quality control. *Academic Press: San Diego*.
- Gibbons, J.D. & Chakraborti, S. (2003). *Nonparametric Statistical Inference*.
- Jones-Farmer, L.A., Jordan, V. & Champ, C.W., (2009). Distribution-free Phase I control charts for subgroup location, *Journal of Quality Technology*, **41**, 304-317.
- Klein, M. (2000). Two alternatives to Shewhart \bar{X} control chart. *Journal of Quality Technology*, **32**, 427–431.

Khoo, M.B.C. & Ariffin, K.N. (2006) Two improved runs rules for Shewhart \bar{X} control chart. *Quality Engineering*, 18:173–178.

Malela-Majika, J.C., Chakraborti, S. & Graham, M.A. (2016). Distribution-free control charts with improved run-rules, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **32**, 423-439.

Montgomery, D. (2001). *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th ed. Wiley, New York.

Mukherjee, A., Chakraborti, S. (2012). A Distribution-Free Control Chart for the joint Monitoring of Location and Scale, *Quality and Reliability Engineering International*, **28**, 335-352.

Westgard J., Groth T., Aronsson T. & Carl-Henric de Verdier (1977). Performance Characteristics of Rules for Internal Quality Control: Probabilities for False Rejection and Error Detection, *Clinical Chemistry*, **23**, 1857-1867.

Ευρετήριο Όρων

Σελίδα

1) Άνω όριο ελέγχου (UCL)	6,7,18,19,20,25,30,32,38,44,45,47,49
2) Βαθμολογική στατιστική συνάρτηση	21,22,24,25,61
3) Δείγμα αναφοράς	22,23,25,26,29,37,39,42,47,48,51,52,56,59,60
4) Δείγμα ελέγχου	23,25,29,30,37,38,42,47,48,49,51,52,56,59
5) Διάγραμμα ελέγχου	7,10,14,19,20-22,26,27,31,37,39,40,42,44,52,54,56,57,59,61
6) Διάγραμμα Shewhart-Cucconi (SC)	42,46,51,55,56,57,59,61
7) Διαγραμματική σταθερά H	47,49,51,52,55,57,60
8) Εκτός ελέγχου διεργασία	7,10-12,20-22,29-31,42,49,54,56,59,60
9) Εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_{out})	10,11,56
10) Εντός ελέγχου διεργασία	6,10,12,20-22,24,26,27,29,38,40,47,49,56,60
11) Εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής (ARL_0)	10,12,14,23,51-53,55-58,60
12) Κανόνας ροής	31,44,45,54-57,59-61
13) Κάτω όριο ελέγχου (LCL)	6,7,18,19,20,24,25,30,32,38,45
14) Κεντρική Γραμμή (CL)	6,12,19,20,40,41,45
15) Όρια ελέγχου	6-8,10,12,16-20,22,24,26,29,30,37,40-42
16) Παράμετρος θέσης	14,36,42,43,46,47,49,56-59,61
17) Παράμετρος κλίμακας	42,43,46,47,49,56-59,61
18) Ποσοστό εσφαλμένων συναγερωμών (FAR)	12,23,27,28,31
19) Φάση I	12,35,39,42,47
20) Φάση II	12,29,35,36

