



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ**  
**ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**  
**ΔΙΔΡΥΜΑΤΙΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**στην**

**“Οικονομική Φυσική – Χρηματοοικονομικές Προβλέψεις”**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΔΕΙΚΤΗ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ**

**ΚΑΙ**

**ΕΛΕΓΧΟΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΓΙΑ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ**

**ΣΕ ΘΕΣΕΙΣ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ**

**ΕΚΠΛΗΡΩΣΗΣ**



**Ορέστης Αγαμέμνων Κακάτσιος**

**Καθηγητής Λυκούργος Μαγκαφάς**

**Βόλος 2020**

## Υπεύθυνη δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της διπλωματικής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών οικονομικής φυσικής – χρηματοοικονομικές προβλέψεις του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Βόλος, Ιούνιος 2020.

## Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών με τίτλο «οικονομική φυσική - χρηματοοικονομικές προβλέψεις» του Τμήματος Οικονομικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας. Η έρευνα ξεκίνησε τον Ιανουάριο του 2019 και ολοκληρώθηκε τον Μάιο του 2020. Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε ένα σύνολο ανθρώπων όπου με την πολύτιμη βοήθεια και την στήριξη τους κατάφερα να ολοκληρώσω με επιτυχία αυτή την προσπάθεια. Αρχικά στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μαγκαφά Λυκούργο ο οποίος μου έδωσε τη δυνατότητα και την ευκαιρία να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα της διπλωματικής καθώς οι πολύτιμες συμβουλές του και η επιστημονική του καθοδήγησή συνέβαλε στα μέγιστα στην ολοκλήρωση της. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω και να αφιερώσω τη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία στους γονείς μου και στα αδέρφια μου οι οποίοι με στήριξαν και μου συμπαραστάθηκαν σε όλο αυτό το διάστημα της φοιτητικής μου πορείας και στην γενικότερη προσπάθεια υλοποίησης των προσωπικών μου στόχων.

## Περιεχόμενα

Υπεύθυνη δήλωση .....	1
Ευχαριστίες .....	2
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	6
ABSTRACT.....	7
Κεφάλαιο 1ο .....	8
Εισαγωγή .....	8
Κεφάλαιο 2 <sup>ο</sup> .....	15
Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	15
2.1 Θεωρία ανάλυσης χρονολογικών σειρών .....	15
2.1.1 Ορισμός χρονολογικής σειράς (definition time series).....	15
2.1.2 Βασικά χαρακτηριστικά χρονοσειράς .....	15
2.1.3 Ανάλυση χρονοσειρών και προβλέψεις.....	17
2.1.4 Μέθοδοι προβολής χρονοσειρών.....	18
2.1.5 Η έννοια της στασιμότητας στις χρονοσειρές (Stationarity) .....	20
2.1.6 Στατιστικά μεγέθη χρονοσειρών.....	21
2.1.7 Υποδείγματα τυχαίων χρονολογικών σειρών .....	23
2.1.8 Γραμμικά υποδείγματα χρονολογικών σειρών .....	24
2.1.9 Υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας.....	27
2.1.10 Υπόδειγμα ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedastic) .....	27
2.1.11 Υπόδειγμα GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic) .....	28
.....	28
2.2 Θεωρία πολυπλοκότητας – Θεωρία χάους .....	29
2.2.1 Εισαγωγή στην θεωρία πολυπλοκότητας (Complexity theory).....	29
2.2.2 Θεωρία χάους (Chaos theory).....	30
2.2.3 Ελκυστής (Attractor).....	31
2.2.4 Παράξενος ελκυστής (Strange Attractor) .....	31
2.2.5 Ανακατασκευή χώρου φάσεων με το θεώρημα Takens .....	32

2.2.6 Μέθοδοι επιλογής του χρόνου καθυστέρησης (Time delay).....	34
2.2.7 Επιλογή ελάχιστης διάστασης εμβύθυνσης (Embedding dimension)– Μέθοδος λανθασμένων κοντινότερων γειτόνων (False nearest neighbour) – Διάσταση συσχέτισης(Correlation dimension) .....	35
2.2.8 Εκθέτες Lyapunov .....	38
2.2.9 Εκθέτης Hurst .....	39
2.2.10 Εντροπία κατά Kolmogorov (Kolmogorov entropy).....	41
2.2.11 Η μέθοδος των K- κοντινότερο γειτόνων για προβλέψεις.....	41
2.3 Θεωρία τεχνητών νευρωνικών δικτύων (Artificial neural network theory) .....	44
2.3.1 Ορισμός – Ιστορική εξέλιξη .....	44
2.3.2 Έμπνευση από τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα .....	45
2.3.3 Πλεονεκτήματα τεχνητών νευρωνικών δικτύων και ικανότητα γενίκευσης.....	48
2.3.4 Τεχνητοί νευρώνες.....	50
2.3.5 Συναρτήσεις ενεργοποίησης .....	51
2.3.6 Αρχιτεκτονικές δομές τεχνητών νευρωνικών δικτύων .....	54
2.3.7 Εκμάθηση νευρωνικών δικτύων .....	57
2.3.8 Μέτρα απόδοσης τεχνητών νευρωνικών δικτύων .....	59
2.3.9 Επεξεργασία δεδομένων για την εκπαίδευση τεχνητών νευρωνικών δικτύων ..	60
2.3.10 Κανόνας μάθησης δέλτα (Delta rule) .....	62
2.3.11 Μέθοδοι Quasi-Newton .....	67
2.3.12 Αλγόριθμος εκπαίδευσης γρήγορης διάδοσης (Quick propagation) .....	69
2.4 Θεωρία συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και προαιρετικών δικαιωμάτων	71
2.4.1 Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures) .....	71
2.4.2 Προαιρετικά δικαιώματα (Options).....	71
Κεφάλαιο 3 <sup>ο</sup> .....	74
Δεδομένα -μεθοδολογία έρευνας και εμπειρικά αποτελέσματα.....	74
3.1 Στατιστικά στοιχεία χρονοσειράς πετρελαίου και πρώτες διαφορές.....	74
3.2 Μελέτη του δείκτη πετρελαίου με χαοτική ανάλυση και προβλέψεις.....	77

3.2.1 Χρόνος καθυστέρησης (Time delay) .....	77
3.2.2 Υπολογισμός εκθέτη Hurst .....	80
3.2.3 Υπολογισμός διάστασης συσχέτισης (Correlation dimension) και ελάχιστης διάστασης εμβύθισης (Minimum embedding dimension) .....	82
3.2.4 Υπολογισμός της εντροπίας του συστήματος κατά Kolmogorov .....	85
3.2.5 Υπολογισμός των εκθετών Lyapunov (Lyapunov exponents) .....	86
3.2.6 Προσδιορισμός χρονικού ορίζοντα πρόβλεψης (prediction time).....	89
3.2.7 Περιγραφή διαδικασίας πρόβλεψης με το πρόγραμμα Naper και παρουσίαση αποτελεσμάτων .....	90
3.3 Μελέτη του δείκτη πετρελαίου με νευρωνικά τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και προβλέψεις .....	95
3.4 Επιλογή κατάλληλων θέσεων σε συμβόλαια και μελλοντικής εκπλήρωσης .....	105
Κεφάλαιο 4 <sup>ο</sup> .....	107
Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.....	107
Κεφάλαιο 5 <sup>ο</sup> .....	110
Βιβλιογραφία .....	110
5.1 Ξενόγλωσση βιβλιογραφία .....	110
5.2 Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία .....	111
5.3 Χρήσιμες διαδικτυακές αναφορές .....	113

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στη συγκεκριμένη εργασία γίνεται ανάλυση και εφαρμογή μεθοδολογίας για πρόβλεψη του δείκτη πετρελαίου (WTI crude Oil) εβδομαδιαίων δεδομένων για μία περίοδο 32 ετών (1986- 2018) με τη χρήση της θεωρίας χάους καθώς και μοντέλων τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Ο σκοπός της συγκεκριμένης ανάλυσης είναι να ελεγχθεί και να ποσοτικοποιηθεί η δυνατότητα πρόβλεψης της χρονοσειράς εβδομαδιαίων τιμών του δείκτη πετρελαίου καθώς και της χρονοσειράς των αποδόσεων αυτών (πρώτες διαφορές) με απώτερο στόχο την κατάλληλη τοποθέτηση σε χρηματοοικονομικά προϊόντα και συγκεκριμένα σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιωμάτων προαίρεσης. Ο λόγος που στην ανάλυση χρησιμοποιήθηκε η θεωρία το χάους είναι διότι η θεωρία της αποτελεσματικής αγοράς δείχνει ανίκανη να περιγράψει τις αγορές κάνοντας την τελική αποτίμηση ύπαρξης χαοτικής συμπεριφοράς σημαντική ένδειξη ικανότητας πρόβλεψης χρονοσειρών χρηματιστηριακών δεικτών. Από την άλλη πλευρά ο λόγος που χρησιμοποιήθηκαν μοντέλα νευρωνικών δικτύων είναι η ικανότητα τους να προβλέπουν με μεγάλη ακρίβεια δεδομένα τα οποία χαρακτηρίζονται από υψηλό βαθμό πολυπλοκότητας όπως η χρονοσειρά πετρελαίου. Τα αποτελέσματα της μελέτης έδειξαν ότι οι χρονοσειρές είναι χαοτικές και ότι η ασφάλεια των προβλέψεων περιορίζεται σε βάθος μιας εβδομάδος. Συγκεκριμένα οι προβλέψεις των διάφορων παραλλαγών της μεθοδολογίας κοντινών γειτόνων καθώς και των μοντέλα τεχνητών νευρωνικών δικτύων εμπρός τροφοδότησης πολλαπλών επιπέδων έδειξαν σφάλματα πρόβλεψης μικρότερο του 3% στην κανονική χρονοσειρά προβλέποντας σωστά και την τάση των τιμών και μεγαλύτερο του 83% στις αποκλίσεις των προβλέψεων στη χρονοσειρά αποδόσεων, προβλέποντας σωστά αποκλειστικά το πρόσημο απόδοσης. Ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων των παραπάνω μεθοδολογιών φανερώνουν την ασφάλεια των σημάτων κατεύθυνση της τιμής σε βάθος μιας εβδομάδος επιτρέποντας την κατοχύρωση κατάλληλων θέσεων σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης εν αναλογία του επενδυτικού προφίλ του εκάστοτε επενδυτή.

## **ABSTRACT**

This paper analyses and applies methodology in order to predict the weekly data index (WTI crude Oil) for a 32 years old period (1986-2018) using chaos theory as well as models of artificial neural networks. The aim of this analysis is to evaluate the predictability and quantify the prediction horizon of the weekly data index crude oil time series as well as the weekly data returns time series (first differences) in order to take positions in financial products and specifically in future contracts and options. Chaos theory was used in this analysis because of the incapability of the Effective Market Hypothesis to describe the markets, making the existence of chaotic behaviour an important indication of stock market time series predictability. Additionally, neural network models have been used in this analysis because of their ability to accurately predict data of high complexity such as crude oil time series. The results of the study have shown that both time series have chaotic behaviour and that we can forecast at one week's depth. In particular, the forecasts of the various versions of close neighbours' algorithm as well as the models of artificial neural networks and more specifically the multi feed-forward neural networks have shown prediction errors of less than 3% in weekly data crude oil time series, predicting correctly the trend. On the contrary, the same models in weekly data returns time series have shown prediction errors more than 83% correctly predicting exclusively the performance sign. The combination of the above results indicates that allowing us to position ourselves in future contracts and options depending on one investor's profile with great certainty for one week's depth by trusting the combined trending signals of two methodologies.



# Κεφάλαιο 1ο

## Εισαγωγή

Από τη στιγμή που το πετρέλαιο απέκτησε την λεγόμενη εμπορική και χρηματιστηριακή αξία (*commodity*) επηρεάζει την παγκόσμια οικονομία καθώς οι μεταβολές του στον δείκτη αντικατοπτρίζει σε έναν σημαντικό βαθμό την εικόνα της παγκόσμιας οικονομίας κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Στην συγκεκριμένη εργασία θα γίνει μία προσπάθεια στο να μελετηθεί ο χρηματιστηριακός δείκτης του αργού πετρελαίου (*crude Oil*) και να ελεγχθεί η πιθανότητα πρόβλεψης στην συγκεκριμένη χρονοσειρά.

Ξεκινώντας κάποιος την μελέτη εύκολα θα διαπιστώσει την ύπαρξη εκατοντάδων διαφορετικών ειδών ακατέργαστου πετρελαίου όπου υπάρχει σημαντική ποιοτική διαφορά και καθεμία από αυτές τις κατηγορίες χρησιμοποιούνται με διαφορετικό τρόπο και για διάφορες διεργασίες στην παγκόσμια αγορά κάνοντας το ένα από τα σημαντικότερα αγαθά παγκόσμιος με δισεκατομμύρια δολάρια τζίρο. Το κύριο χαρακτηριστικό των διαφόρων κατηγοριών του πετρελαίου είναι η διεθνής ισοτιμία του ορισμένη σε δολάρια ανά βαρέλι και πώς οι διαφορές τους στις αρχικές τιμές διάθεσης οφείλεται αποκλειστικά στην ποιότητα, στο κόστος μεταφοράς του και στην χρήση του ως πρώτη ύλη σε άλλα προϊόντων όπως για παράδειγμα της βενζίνης. Οι κυριότερες κατηγορίες ακατέργαστου πετρελαίου οι οποίοι διαπραγματεύονται σε διεθνή επίπεδο και οι τιμές τους χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς στις αγοραπωλησίες είναι οι εξής :

1. Πετρέλαιο δυτικού Τέξας (*West Texas intermediate*, *WTI*) :Πρόκειται για έναν από τα υψηλότερης ποιότητας πετρέλαιο αμερικάνικης προέλευσης όπου χρησιμοποιείται ως πρώτη ύλη παρασκευής βενζίνης και ντίζελ (*diesel*). Πρόκειται για το ακριβότερο είδος πετρελαίου όπου διαπραγματεύονται στις αμερικανικές χρηματιστηριακές αγορές και διαμορφώνει την τελική τιμή του πετρελαίου στις ΗΠΑ σύμφωνα με τον όγκο εισαγωγών και την τιμή *IRAC* (*imported refiner acquisition cost*). (Διαδικτυακή πηγή [11])
2. Πετρέλαιο μπρέντ (*Brent*) :Αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα είδη πετρελαίου εξαιτίας των 15 διαφορετικών συστάσεων που έχει και της υψηλής ποιότητας προελεύσεως. Προορίζετε ως πρώτη ύλη για την παραγωγή βενζίνης πράγμα που το καθιστά ως έναν από τους σημαντικότερους δείκτες αναφοράς τιμολόγησης για περισσότερο από το 50% το συνολικών ευρωπαϊκών και αφρικανικών προμηθειών. (Διαδικτυακή πηγή [11])

3. Πετρέλαιο ΟΠΕΚ (*Opec Basket*) :Πρόκειται για φθηνότερο τύπου πετρελαίου σε σχέση με τις προηγούμενες κατηγορίες και η τιμή του διαμορφώνεται από τον οργανισμό ΟΠΕΚ στον οποίο ανήκει ρυθμίζοντας την τιμή του. Ο συγκεκριμένος οργανισμός ελέγχει περίπου το 45% της παγκόσμιας παραγωγής πετρελαίου ενώ τα επονομαζόμενα Oman crude και Dubai(*Fateh*) λειτουργούν μεσοσταθμικά στις τιμές του αποτελώντας σημεία αναφοράς στις αγορές της Μέσης Ανατολής. (Διαδικτυακή πηγή [11])

Η απουσία όμως αυστηρών κανονιστικών πλαισίων που διέπουν την παγκόσμια χρηματιστηριακή αγορά δυσχεραίνουν το έργο χιλιάδων οικονομολόγων και αναλυτών που προσπαθούν να σε καθημερινή βάση να μαντέψουν την τελική τιμή του ούτως ώστε να μπορέσουν να συμβουλέψουν καταλλήλως το επενδυτικό κοινό στις συναλλαγές τους, κατά βάση στην αγορά συναλλάγματος (*Foreign Exchange*) καθώς και στις αγορές προϊόντων μελλοντικής εκπλήρωσης (*Futures*) ή και δικαιωμάτων προαιρεσέως (*options*) με υποκείμενο τίτλο(*underlying asset*) το χρηματιστηριακό δείκτη του πετρελαίου. Πιο συγκεκριμένα κυρίως μετά το 2005 τα συγκεκριμένα χρηματοοικονομικά προϊόντα επηρεάζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό την τιμή του πετρελαίου. Ουσιαστικά το πετρέλαιο μετατρέπεται σε ψηφιακά βαρέλια και με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνονται κερδοσκοπικές κινήσεις οι οποίες μεταβάλλουν την τιμή του χρηματιστηριακού δείκτη. Μελέτες δείχνουν ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό αυτών τελικά καταλήγουν να στο να υπάρξει πραγματική μεταφορά πετρελαίου και να εκτελεστούν τα συγκεκριμένα συμβόλαια, κάνοντας τις πεποιθήσεις της αγοράς σχετικά με τη μεταβολή της τιμής καθώς και τις πολιτικές εξελίξεις πιο σημαντικό παράγοντα στην τελική διαμόρφωση της τιμής ακόμα και από την πραγματική προσφορά και τη ζήτηση. Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να επισημανθεί εξαιρετική δυσκολία εγχείρημα τος ορισμού της τελικής τιμής του πετρελαίου λόγω της πολυπλοκότητας που παρουσιάζει η παγκόσμια χρηματοπιστωτική σφαίρα καθώς επίσης και το γεγονός ότι το πετρέλαιο συγκεκριμένα υπάγεται σε έναν αριθμό μηχανισμών διαμόρφωσης της τιμές οι οποίοι αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους καθιστώντας την τελική του πρόβλεψη επιφυλακτική.

Η συγκεκριμένη δυσκολία που περιεγράφηκε αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της μελέτης των οικονομικών αγαθών καθώς οι παγκόσμιες αγορές αποτελούν ουσιαστικά δυναμικά συστήματα όπου παρουσιάζουν περίπλοκες συμπεριφορές απότομες μεταβολές και μεγάλο όγκο θορύβου. Η εξέλιξη των μαθηματικών και της στατιστικής έχει επιφέρει ένα πλήθος μεθόδων όπου χρησιμοποιούνται από τους αναλυτές στις μέρες μας προκειμένου να προβλέψουν τις τιμές των αγορών και κατά βάση χωρίζονται σε γραμμικές και μη γραμμικές μεθόδους. Η βασική διαδικασία που γίνεται περιλαμβάνει η μελέτη των χρονολογικών σειρών

δηλαδή ένα σύνολο παρατηρήσεων ενός μεγέθους στο χρόνο. Πρώτοι ασχολήθηκαν με την ανάλυση τους οι Yule και Walker το 1927 εφαρμόζοντας τα λεγόμενα μοντέλα κινητών μέσων όρων προκειμένου να αντιμετωπίσουν το οικονομετρικό πρόβλημα της εποχικότητας. Αρκετά αργότερα η δουλειά τους συνεχίστηκε από τους Box και Jenkins το 1976 όπου εξέλιξαν το μοντέλο των προηγούμενων δημιουργώντας τα μοντέλα ARIMA δηλαδή αυτό παλίνδρομα μοντέλα κινητών μέσο όρων όπου αποδείχθηκαν ιδιαίτερα αποδοτικά σε σχέση με τις προβλέψεις τους υπό κάποιες συγκεκριμένες προϋποθέσεις που σχετίζονται με την έννοια της ύπαρξης της πληροφορίας στις χρονοσειρές. Γενικότερα τα γραμμικά μοντέλα αν και έχουν αποδειχθεί ιδιαίτερα ικανοποιητικά σε πολλά επιστημονικά πεδία απαιτούν την ύπαρξη κάποιων προϋποθέσεων οι οποίες σχετίζονται με τη στασιμότητα των δεδομένων που μελετώνται. Εξαιτίας αυτού έχουν αποτύχει να προβλέψουμε χρονοσειρές οικονομικών δεδομένων οι οποίες διακρίνονται από θόρυβο και ύπαρξης ασυμμετρίας στις κατανομές δεδομένων. Όλες τις τελευταίες δεκαετίες μελετήθηκαν γραμμικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών, όπως η αυτοσυσχέτιση και ισοδύναμα το φάσμα ισχύος, και διάφορα γραμμικά μοντέλα χρονοσειρών. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να μιμηθεί ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, στη διασπορά και στην αυτοσυσχέτιση. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι αρκετά για να ορίσουν πλήρως μια κανονική διαδικασία, αλλά δεν αποτελούν ικανοποιητική περιγραφή μιας μη-κανονικής διαδικασίας από την οποία μπορεί να προκύπτει η χρονοσειρά όπως στην παρούσα μελέτη η χρονοσειρά του χρηματιστηριακού δείκτη πετρελαίου

Ο Fama το 1960 εισήγαγε την ευρέως διαδεδομένη θεωρία της αποτελεσματικής αγοράς η οποία υποστήριξε ότι η πρόβλεψη των αγορών είναι αδύνατη καθώς ακολουθούν το μοντέλο τυχαίο περίπατου. Η θεωρία εξηγεί πως η αποσταθεροποίηση των αγορών είναι δυνατόν να συμβεί υπό την ύπαρξη κάποιου εξωγενούς παράγοντα όπως για παράδειγμα πολιτικές εξελίξεις πόλεμοι ή πανδημίες, θέτοντας παράλληλα και κάποιες βασικές προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν στις περιπτώσεις όπου μελετάται η συμπεριφορά τους. Συγκεκριμένα υποθέτει την ύπαρξη ορθολογικών επενδυτών στην αγορά οι οποίοι έχουν όλη πρόσβαση στις ίδιες πληροφορίες καθώς επίσης και ότι η κάθε αντίδραση της αγοράς αντικατοπτρίζεται ακαριαία. Στην πράξη αποδεικνύεται ότι αυτές οι υποθέσεις είναι άτοπες λόγω της ύπαρξης κερδοσκοπικών επενδυτών οι οποίοι διατηρούνε δίαυλους επικοινωνίας μεταξύ τους και επηρεάζονται από την γενικότερη ψυχολογία της αγοράς. Εξαιτίας αυτού συχνά παρατηρείται το φαινόμενο της ομαδοποίησης όπου πολλοί επενδυτές σχηματίζουνε επενδυτικές ομάδες προκειμένου να πραγματοποιήσουν συντονισμένες κινήσεις στα χρηματιστήρια και να

επηρεάσουν την τιμή και να όπως συμβαίνει και στην περίπτωση της χρονοσειράς πετρελαίου. Επίσης σημαντικό ρόλο στις συμπεριφορές των επενδυτών παίζει και η λεγόμενη παραπληροφόρηση (*fake news*) οι οποίοι οδηγούν τους επενδυτές σε λανθασμένες κινήσεις καθώς πολλές φορές οι πληροφορίες αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο. Τέλος όσο αναφορά την πρόσβαση στις ίδιες πληροφορίες αυτό είναι κάτι που δεν συμβαίνει καθώς υπάρχουν επενδυτές οι οποίοι διαθέτουν περισσότερες πληροφορίες για συγκεκριμένα χρηματοοικονομικά προϊόντα εξαιτίας της ενασχόλησής τους στα εσωτερικά διάφορων εταιρειών

Όλες τις τελευταίες δεκαετίες μελετήθηκαν γραμμικά χαρακτηριστικά των χρονοσειρών, όπως η αυτοσυσχέτιση και ισοδύναμα το φάσμα ισχύος, και διάφορα γραμμικά μοντέλα χρονοσειρών. Τα στατιστικά χαρακτηριστικά της χρονοσειράς που μπορεί να μιμηθεί ένα γραμμικό μοντέλο περιορίζονται στη μέση τιμή, στη διασπορά και στην αυτοσυσχέτιση. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι αρκετά για να ορίσουν πλήρως μια κανονική διαδικασία, αλλά δεν αποτελούν ικανοποιητική περιγραφή μιας μη-κανονικής διαδικασίας από την οποία μπορεί να προκύπτει η χρονοσειρά όπως στην παρούσα μελέτη η χρονοσειρά του χρηματιστηριακού δείκτη πετρελαίου.

Κατά καιρούς έχουν υπάρξει αρκετές μελέτες οι οποίες εξετάζουν τις αγορές ως δυναμικά συστήματα καθώς το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι μπορούν να δημιουργούν διάφορες καταστάσεις χωρίς την επίδραση θορύβου κάτι το οποίο στα γραμμικά μοντέλα είναι αδύνατο. Επίσης είναι πιθανό ότι τα δεδομένα που μελετώνται να ανήκουν σε μία μεγαλύτερη δομή σε σχέση με αυτήν που είναι δυνατόν να περιγράψουν τα γραμμικά συστήματα. Δημιουργήθηκε συνεπώς η ανάγκη μελέτης και διερεύνησης των χαρακτηριστικών αυτών που μπορούν να αναδείξουν μη γραμμικές δομές βοηθώντας μας να αντλήσουμε περισσότερες πληροφορίες για την διαδικασία που ενδεχομένως κρύβεται πίσω από τη χρονοσειρά. Προκειμένου να επιτευχθεί αυτό θα πραγματοποιηθεί η χρήση ορισμένων μεθόδων και τεχνικών που προέρχονται από τη γενικότερη θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και πιο συγκεκριμένα τη θεωρία χάους. (Tsonis, 1992)

Η θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών Συστημάτων καθώς και εισαγωγή της έννοιας του αποκαλούμενου κρατικού Χάους πραγματοποιήθηκε στα τέλη του 19ο αιώνα από τον Γάλλο μαθηματικό Henri Poincare και θεωρείται πατέρας της επιστήμης ο οποίος προσπάθησε να εξηγήσει την αιτία μη προβλεψιμότητας ορισμένων δυναμικών Συστημάτων. Στις εργασίες που δημοσίευσαν στα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα σχετικά με τις μεθόδους ουράνιας

μηχανικής κατάφερε να προσεγγίσει με έναν ολοκληρωμένο τρόπο το άλυτο πρόβλημα των τριών σωματιδίων και παράλληλα να ορίσει το θεώρημα του στο οποίο δηλώνει πώς ορισμένα δυναμικά συστήματα επιστρέφουν κοντά στην αρχική τους κατάσταση μετά από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Την δουλειά του τη συνέχισαν ο Edward Lorenz ο οποίος θεωρείται πατέρας της θεωρίας Χάους, ο Stephen Smale, ο Lyapunov και πολλοί ακόμα οι οποίοι με τις μελέτες τους και της έρευνας μας έκαναν να κατανοήσουμε σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν τα δυναμικά συστήματα. Σε αυτό φυσικά έχει βοηθήσει πάρα πολύ η εξέλιξη της τεχνολογίας και η χρήση των υπολογιστών είδη από τα μέσα του δέκατου αιώνα καθώς δόθηκε η δυνατότητα να γίνουν περίπλοκοι υπολογισμοί και να αποτυπωθούν τα αποτελέσματα διαφόρων δυναμικών συστημάτων κάτι που βοήθησε πάρα πολύ στην ολοκλήρωση της θεωρίας. Η θεωρία των δυναμικών συστημάτων εφαρμόζεται μέχρι και σήμερα με μεγάλη επιτυχία σε πολλά επιστημονικά πεδία. Ήδη από τα τέλη του εικοστού αιώνα θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων μας έχει βοηθήσει να μελετήσουμε χρονοσειρές με τη δημιουργία τέτοιων ντετερμινιστικών συστημάτων οι οποίες στα πλαίσια της γραμμικής ανάλυσης φαινόταν αδύνατο να προβλεφθούν. (Tsonis, 1992)

Τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ανήκουν στον ευρύτερο πεδίο της τεχνικής νοημοσύνης μια ενός επιστημονικού πεδίου που έχει γνωρίσει τεράστια πρόοδο τα τελευταία χρόνια και αναμένεται να μονοπωλήσει το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας τις επόμενες δεκαετίες. Πρόκειται για σύνολα μονάδων που συνδέονται μεταξύ τους και αναπροσαρμόζονται δημιουργώντας τελικά πολύπλοκα υπολογιστικά μοντέλα. Εφαρμόζονται με μεγάλη επιτυχία σε ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών πεδίων όπως η βιολογία, η ιατρική, η φυσική, τα χρηματοοικονομικά προσπαθώντας να δώσουν λύσεις σε ζητήματα ποσοτικοποίησης και κυρίως πρόβλεψης. Η δομή τους και η αρχιτεκτονική τους είναι εμπνευσμένη από την βιολογία και συγκεκριμένα από τον ανθρώπινο εγκέφαλο και τους νευρώνες που υπάρχουν σε αυτόν. Ουσιαστικά έχει γίνει μια προσπάθεια να γίνει προσομοίωση της λειτουργίας του ανθρώπινου νευρικού συστήματος με την έννοια της δυνατότητας επεξεργασίας και εκτέλεσης παράλληλων μαζικών υπολογισμών. Το σημαντικότερο ρόλο τον έχουν οι νευρώνες οι οποίοι αποτελούν την κεντρική μονάδα επεξεργασίας πληροφοριών και ουσιαστικά λειτουργούν αθροιστικά περνώντας πληροφορίες μεταξύ των συνδέσμων για τον λόγο αυτό η επιρροή μεταξύ των μονάδων εξαρτάται κυρίως από την σύνδεση και την βαρύτητα των νευρώνων τα λεγόμενα συναπτικά βάρη. (Haykin, 2010)

Ένα ακόμα ευρύ επιστημονικό πεδίο το οποίο ασχολείται με την πρόβλεψη χρονολογικών σειρών στις οποίες καθίσταται αδύνατη η πρόβλεψη με γραμμικά εργαλεία

είναι αυτό των τεχνικών νευρωνικών δικτύων. Ο σκοπός των δικτύων είναι να κάνουν πολύπλοκους υπολογισμούς και να μεταδώσουν την πληροφορία μεταξύ των νευρώνων. Ουσιαστικά επιτυγχάνεται η προσομοίωση έξυπνων και πολύπλοκων διαδικασιών που παράγουν δεδομένα μέσω των κατάλληλων αλγορίθμων που δημιουργούνται. Για να επιτευχθεί αυτή η προσομοίωση το δίκτυο υποβάλλεται σε μια διαδικασία που ονομάζεται εκπαίδευση. Ουσιαστικά πρόκειται για μια διαδικασία εκμάθησης μιας συγκεκριμένης διεργασίας μέσω της εναλλαγής τιμών στα βάρη των νευρώνων. Όλη αυτή η διαδικασία έχει επιφέρει σημαντική προβλεπτική ικανότητα σε βραχυχρόνιο ορίζοντα αλλά τα αποτελέσματα χειροτερεύουν ανάλογα με τον βαθμό πολυπλοκότητας του συστήματος. Εξαιτίας του λόγου αυτού δεν προτείνονται σαν μέθοδος αριθμητικής ακρίβειας σε ανάλογες χρονοσειρές. Παρόλου αυτά υπάρχει μεγάλο φάσμα επιλογής καταλληλότερου δικτύου ανάλογα με τον τους τρόπους εκπαίδευσης, λειτουργίας και αρχιτεκτονικής δομής. (Haykin, 2010)

Τα περισσότερα νευρωνικά δίκτυα που χρησιμοποιούνται σήμερα είναι αρκετά απλοποιημένα και διατηρούν πολύ λίγα χαρακτηριστικά των μοντέλων που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη της νευρολογίας. Παρόλα αυτά ακολουθώντας κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα συγκεκριμένα δίκτυα αποδεικνύονται ιδιαίτερα αποδοτικά. Τα χαρακτηριστικά αυτά αφορούνε την ύπαρξη ρυθμιζόμενων παραμέτρων προς όφελος της διαδικασίας εκπαίδευσης και εκμάθησης καθώς επίσης και την ύπαρξης ενός ικανοποιητικού αριθμού νευρώνων προς όφελος της καλύτερης επεξεργασίας των πληροφοριών. (Αργυράκης, 2001)

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνοντας την εισαγωγή θα ήταν καλό να υπογραμμίσουμε τον στόχο της συγκεκριμένης εργασίας ο οποίος είναι να ελέγξει την δυνατότητα πρόβλεψης της χρονολογικής σειράς πετρελαίου εβδομαδιαίων δεδομένων για μία περίοδο περίπου 22 ετών και συγκεκριμένα από 3 Ιανουαρίου 1986 έως 28 Σεπτεμβρίου 2018. Η περίοδος που επιλέχτηκε είναι τυχαία. Στο κεφάλαιο 2 αναλύονται όλες οι θεωρίες που θα χρησιμοποιηθούνε στην συγκεκριμένη εργασία Στο κεφάλαιο 3 επικεντρωνόμαστε στη θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων και του χαοτικού αλγόριθμου όπου θα μελετήσουμε τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος και παράλληλα θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον ασφαλή χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης αν και εφόσον είναι υπαρκτός. Οι προβλέψεις θα γίνουν με τη μέθοδο κοντινότερο γειτόνων και της επαναληπτικής διαδικασίας (*iterations*) με ορισμένες παραλλαγές δίνοντας μας μία ποικιλία σημάτων σε σχέση με την κατεύθυνση της τιμής. Μετά τη συγκεκριμένη ανάλυση ακολουθεί η κατασκευή ενός τεχνικού νευρωνικού δικτύου και συγκεκριμένα ένα δίκτυο εμπρόσθιας μάθησης πολλαπλών επιπέδων όπου θα

αναζητήσουμε την καταλληλότερη αρχιτεκτονική δομή η οποία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα και θα εκπαιδεύσουμε το συγκεκριμένο δίκτυο με δύο μεθόδους τις επανομαζόμενες αλγόριθμος γρήγορης διάδοσης (Quick propagation) και αλγόριθμος Quasi-Newton λαμβάνοντας ακόμα δύο σήματα σχετικά με την κατεύθυνση της τιμής πετρελαίου. Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε και στην κανονική χρονοσειρά τιμών κλεισίματος πετρελαίου καθώς και στις αποδόσεις του δείκτη προκειμένου να λάβουμε μία ακόμα πιο ολοκληρωμένη άποψη. Έχοντας εξάγει τις προβλέψεις μας και τα σήματα κατεύθυνσης της τιμής τα οποία παίζουν πάρα πολύ σημαντικό ρόλο στην κερδοφορία των επενδύσεων πάνω στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και σε δικαιώματα προαίρεσης (*options*) επιλέγοντας τις κατάλληλες θέσεις με μοναδικό στόχο τη μεγιστοποίηση των κερδών για την ελαχιστοποίηση του κινδύνου ζημιάς. Τέλος ακολουθεί το κεφάλαιο 4 όπου έχουν συγκεντρωθεί τα αποτελέσματα και εξάγονται τα συμπεράσματα της έρευνας καθώς και οι προτάσεις για περαιτέρω έρευνα. Η εργασία ολοκληρώνεται με την παρουσίαση της βιβλιογραφίας στο κεφάλαιο 5.

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

### Βιβλιογραφική ανασκόπηση

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί μία γενική ανασκόπηση των θεωριών που έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να μελετηθούν οι χρονολογικές σειρές και γενικότερα οι αγορές. Συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά σε ένα μέρος της θεωρίας ανάλυσης χρονολογικών σειρών με χρήση γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων. Στη συνέχεια ακολουθεί η θεωρία πολυπλοκότητας και η θεωρία χάους καθώς και ένα μέρος της θεωρίας νευρωνικών δικτύων όπου θα χρησιμοποιηθεί για να κατασκευαστεί ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη θεωρία συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης καθώς και δικαιωμάτων προαίρεσης.

### 2.1 Θεωρία ανάλυσης χρονολογικών σειρών

#### 2.1.1 Ορισμός χρονολογικής σειράς (*definition time series*)

«Με τον όρο χρονοσειρά η χρονολογική σειρά (*time series*) ονομάζεται ένα σύνολο παρατηρήσεων που συλλέγονται διαδοχικά στο χρόνο. Αν οι παρατηρήσεις αναφέρονται σε κάθε σημείο του χρόνου, τότε μιλάμε για μια συνεχή (*continuous*) χρονολογική σειρά (π.χ. η θερμοκρασία), ενώ αν οι μετρήσεις γίνονται σε προκαθορισμένα διαστήματα χρόνου τότε μιλάμε για διακριτή (*discrete*) χρονολογική σειρά (π.χ. οι μισθοί, ο όγκος συναλλαγών στο χρηματιστήριο)» (Δημέλη, 2013).

Από μαθηματικής πλευράς, «αν συμβολίσουμε τη χρονολογική σειρά με το γράμμα  $Y$  και με τον υποδείκτη  $t$  δηλώσουμε τη χρονική περίοδο που ελήφθη η παρατήρηση (έτος, μήνα, εβδομάδα, ώρα), τότε η ακολουθία τιμών

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_N \text{ ή } \{Y_t\}, t = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Αποτελεί ένα δείγμα παρατηρήσεων  $N$  (observations) της χρονολογικής σειράς  $Y_t$ .» (Σοφία Δημέλη 2013).

Οι χρονοσειρές εφαρμόζονται σε ένα μεγάλο εύρος επιστημονικών πεδίων όπως στα οικονομικά, την ιατρική, την βιολογία, την μηχανική κ.α. Στις χρονοσειρές απαιτούνται αποκλείστηκα οι παρελθοντικές τιμές του μεγέθους που εξετάζουμε προκειμένου να ελέγξουμε την προβλεψιμότητα του μεγέθους. (Pena, Tiao, Tsay, 2001)

#### 2.1.2 Βασικά χαρακτηριστικά χρονοσειράς

Οι χρονοσειρές κατηγοριοποιούνται με βάση κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.



1. Τάση (*trend*) : Ορίζεται ως η μακροπρόθεσμη μεταβολή του μέσου επιπέδου τιμών μια χρονοσειράς. Μπορεί να είναι ανοδική, πτωτική είτε ακόμα και σταθερή για ένα χρονικό διάστημα και συνήθως μελετάται με διάφορες οικογένειες καμπυλών όπως η ευθεία , η εκθετική και η λογαριθμική .Προκειμένου να καταλήξουμε σε συγκεκριμένα συμπεράσματα απαιτείται ένας ικανοποιητικός αριθμός παρατηρήσεων για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (Montgomery, Jennings, Kulahci, 2008 · Διαδικτυακή πηγή [1])
2. Κυκλικότητα (*cyclic*) : Ορίζεται ως μια μεταβολή που συμβαίνει σε μια χρονοσειρά και συνήθως για μεγάλες περιόδους εξαιτίας κάποιων εξωγενών παραγόντων . Παρατηρείται συνήθως σαν μια κυματοειδής γραμμή μεταξύ των ανώτερης και κατώτερης στάθμης των τιμών. Γενικότερα εμφανίζεται σε χρονοσειρές που περιγράφουν οικονομικά μεγέθη κρατών λόγω των περιόδων ύφεσης και ανάπτυξης της οικονομιών. (Montgomery, Jennings, Kulahci, 2008)
3. Εποχικότητα (*seasonality*) : Εκφράζεται ως μια περιοδική διακύμανση η οποία συνήθως έχει σταθερό μήκος .Γίνεται άμεσα αντιληπτή και προβλέψιμη εξαιτίας της επαναλαμβανόμενης εμφάνισης της σε σχετικά ίδια χρονικά διαστήματα. Χρονοσειρές με εποχικότητα μπορεί να είναι για παράδειγμα η κατανάλωση πετρελαίου θέρμανσης ή φυσικού αερίου όπου είναι δεδομένο ότι κατά τους χειμερινούς μήνες η κατανάλωση είναι αυξημένη. Εφόσον η εποχική διακύμανση είναι εύκολα ορατή, κατανοητή και παράγεται με συστηματικό τρόπο τότε μπορεί να απομονωθεί εύκολα από τον ερευνητή κατά την μελέτη της χρονοσειράς και να μην επηρεάσει τα δεδομένα και τα τελικά αποτελέσματα. (Chatfield,2003)
4. Ακραίες τιμές (*outliers*) : Είναι οι διάφορες απότομες μεταβολές που παρατηρούνται στα γραφήματα κάποιων χρονοσειρών. Θεωρούνται μη προβλέψιμες και εκφράζουν συνήθως ένα απρόβλεπτο γεγονός. Για την ερμηνεία τους απαιτείται μεγάλο θεωρητικό υπόβαθρο ,κριτική και λογική σκέψη από τον ερευνητή προκειμένου να ερμηνεύσει σωστά τέτοια γεγονότα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μπορεί να αποτελέσει μια απότομη πτώση ενός χρηματιστηριακού δείκτη. (Montgomery, Jennings, Kulahci 2008)

Είναι απαραίτητο ως πρώτο βήμα κάθε σωστής μελέτης να γίνεται μια επισκόπηση στο γράφημα της χρονοσειράς προκειμένου να αναγνωριστούν αυτά τα χαρακτηριστικά και να γίνουν οι κατάλληλες διεργασίες για την αντιμετώπισή τους. (Chatfield,2003)

### 2.1.3 Ανάλυση χρονοσειρών και προβλέψεις

Η ανάλυση των χρονολογικών σειρών γίνεται συνήθως σε δύο στάδια. Το πρώτο είναι κυρίως περιγραφικό και αποσκοπεί στην παρατήρηση και ανάλυση των δεδομένων προκειμένου να προσδιοριστούν τα βασικά χαρακτηριστικά που διέπουν την συμπεριφορά της χρονολογικής σειράς στο χρόνο. Το δεύτερο στάδιο περιλαμβάνει την εξειδίκευση υποδειγμάτων χρονολογικών σειρών (*time series models*). Τέτοια υποδείγματα αποτελούν ουσιαστικά μια προσπάθεια αναπαραγωγής της στοχαστικής διαδικασίας που πιθανόν να έχει δημιουργήσει τις δεδομένες παρατηρήσεις. Απαιτούνται στατιστικά υποδείγματα που είναι δύσκολο να αναλυθούν και χρησιμοποιούνται γραμμικές και μη γραμμικές προσεγγίσεις. Η ανάλυση των χρονολογικών σειρών μπορεί να γίνει στο πεδίο του χρόνου (*time domain*) είτε στο πεδίο των συχνοτήτων (*frequency domain*) χρησιμοποιώντας την φασματική ανάλυση (*spectral analysis*). Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την δεύτερη κατηγορία προσεγγίσεων.

Αντικειμενικός σκοπός της μελέτης των χρονολογικών σειρών είναι η χρησιμοποίηση τους στη διενέργεια προβλέψεων. Υπάρχουν δύο μέθοδοι πρόβλεψης (*forecasting methods*) και μπορούν να διαχωριστούν σε υποκειμενικές ή ποιοτικές (*subjective or qualitative*) και σε αντικειμενικές ή ποσοτικές (*objective or quantitative*). Η πρώτη κατηγορία εφαρμόζεται κυρίως από εμπείρους αναλυτές του κλάδου όπου χρησιμοποιείται κατά βάση η προσωπική εμπειρία και η γνώση παρά τα στατιστικά μοντέλα (π.χ. μέθοδος των Δελφών) ενώ η δεύτερη κατηγορία στηρίζεται αποκλειστικά σε ένα μαθηματικό – στατιστικό υπόδειγμα (*model – based forecasts*) και γενικά σε έναν συγκεκριμένο κανόνα που εφαρμόζονται ποσοτικά δεδομένα.

Τα υποδείγματα πρόβλεψης χωρίζονται επίσης σε δύο μεγάλες κατηγορίες :

1. Αιτιατά Υποδείγματα Πρόβλεψης : Πρόκειται για πολυμεταβλητές παλινδρομήσεις όπου κάνουμε προβλέψεις με βάση την στατιστική και την οικονομική σχέση που συνδέει τις διάφορες μεταβλητές μεταξύ τους. (Ανδρικόπουλος, 2003)
2. Μη Αιτιατά Υποδείγματα Πρόβλεψης : Πρόκειται για υποδείγματα χρονολογικών σειρών που στηρίζονται αποκλειστικά μόνο στις προηγούμενες τιμές της ίδιας χρονοσειράς που θέλουμε να προβλέψουμε.

Επίσης τα υποδείγματα χρονολογιών σειρών διακρίνονται σε προσδιοριστικά υποδείγματα (*deterministic models*) που στηρίζονται σε απλές μαθηματικές μορφές και σε στοχαστικά υποδείγματα (*stochastic models*) (π.χ. υποδείγματα της μορφής box – Jenkins). Η

κύρια διαφορά τους έχει να κάνει με τον τρόπο με τον οποίο λαμβάνεται ο τυχαίος παράγοντας. Στην πρώτη κατηγορία προστίθεται σαν κατάλοιπο λάθους ενώ στη δεύτερη κατηγορία αποτελεί τον μηχανισμό που παράγει την χρονοσειρά. Γενικότερα τα υποδείγματα χρονολογιών σειρών προτιμώνται για βραχυχρόνιες προβλέψεις ενώ οι οικονομετρικές μέθοδοι για μακροχρόνιες προβλέψεις. Επειδή η καθεμία μέθοδος έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα έχει διατυπωθεί η άποψη ότι ο συνδυασμός των δύο δίνει καλύτερα αποτελέσματα. (Bates, Granger, 1969)

### 2.1.4 Μέθοδοι προβολής χρονοσειρών

Σε αυτήν την ενότητα θα γίνει μια σύντομη περιγραφή των μεθόδων προβολής (*extrapolation methods*) με το βιβλίο της Δημέλη (2003). Πρόκειται για υποδείγματα προσδιοριστικής μορφής και στοχαστικά υποδείγματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Πιο συγκεκριμένα :

1. Ειδικά μαθηματικά υποδείγματα : Η απλούστερη μέθοδος είναι το λεγόμενο απλοϊκό υπόδειγμα (*naive model*) :

$$\hat{Y}_{N+1} = Y_N \quad (2.2)$$

Όπου  $\hat{Y}_{N+1}$  η πρόβλεψη μια χρονοσειράς  $N$  παρατηρήσεων  $Y_t$ . Και είναι μια συνάρτηση των προηγούμενων τιμών της σειράς

$$\hat{Y}_{N+1} = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N) \quad (2.3)$$

2. Υποδείγματα κινητών μέσων όρων (*moving averages*) : Η γνωστή διαδικασία όπου η προβλεπόμενη της  $Y_t$  κατά την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο ισούται με τον αριθμητικό μέσο όρο των  $T$  πιο πρόσφατων τιμών της  $Y_t$  δηλαδή :

$$\hat{Y}_{T+1} = (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_T)T \quad (2.4)$$

3. Κινητοί μέσοι όροι εκθετικής στάθμισης : Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης (*exponential smoothing*) σύμφωνα με την οποία η πρόβλεψη προκύπτει ως ένας μέσος όρος όλων των προηγούμενων τιμών της σειράς με σταθμίσεις που φθίνουν γεωμετρικά (εκθετικά) :

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + a(Y_t - \hat{Y}_t), \text{ με } 0 < a < 1 \quad (2.5)$$

- Όπου  $\hat{Y}_{t+1}$  πρόβλεψη για μια περίοδο στο μέλλον.
- Όπου  $a$  παράμετρος εξομάλυνσης.

4. Υποδείγματα Τάσης : Ο ορισμός της τάσης έχει αναφερθεί στην προηγούμενη ενότητα και μπορεί να οριστεί με την μεταβλητή του χρόνου  $t$  και να εκφραστεί ως συνάρτηση του  $t$  ως εξής :

$$Y_t = f(t) + e_t \quad (2.6)$$

- Όπου  $f(t)$  μια γραμμική ή μη γραμμική συνάρτηση του χρόνου  $t$ .
- Όπου  $e_t$  είναι το τυχαίο σφάλμα με  $E(e_t) = 0$  και  $var(e_t) = E(e_t)^2 = \sigma_e^2$ .

Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως υπάρχουν και υποδείγματα γραμμικής τάσης (*linear trend model*), υποδείγματα τμηματικής τάσης (*segmented trend*), εκθετικό υπόδειγμα τάσης (*exponential trend*) και τέλος υποδείγματα δευτεροβάθμιας τάσης (*quadratic trend*) για τα οποία όμως δεν θα επεκταθούμε. Η τάση σε αυτά τα υποδείγματα είναι μη στοχαστικής μορφής δηλαδή προσδιοριστικής τάσης (*deterministic trend*).

5. Υποδείγματα διάσπασης επιμέρους συνιστωσών : Βιβλιογραφικά αναφέρεται ως μέθοδος διάσπασης (*decomposition method*) σύμφωνα με την οποία μια χρονολογική σειρά μπορεί να διασπαστεί σε τέσσερις επιμέρους συνιστώσες ως εξής :

$$Y_t = T_t + S_t + C_t + I_t \quad (2.7)$$

Η σε πολλαπλασιαστική μορφή ως

$$Y_t = T_t S_t C_t I_t \quad (2.8)$$

- Όπου  $T_t$  είναι η τάση (μακροχρόνια κύμανση)
- Όπου  $S_t$  είναι η εποχικότητα (εποχικές περιοδικές κυμάνσεις)
- Όπου  $C_t$  είναι οι κύκλοι (βραχυχρόνιες κυμάνσεις γύρω από την τάση)
- Όπου  $I_t$  είναι οι ακανόνιστες κυμάνσεις ή τα κατάλοιπα ή ο θόρυβος

6. Άλλες μέθοδοι : Υπάρχουν αλγόριθμοι για την εξομάλυνση χρονοσειρών όπως το φίλτρο του Kalman και το φίλτρο των Hodrick Prescott (*HP filter*). Αποτελούν επαναληπτικοί αλγόριθμοι διαδοχικής αναθεώρησης γραμμικής πρόβλεψης σε ένα δυναμικό σύστημα. Το σύστημα αυτό λαμβάνει μια συγκεκριμένη μορφή που ονομάζεται μορφή κατάστασης χώρου (*state space representation*). Θα αναλυθεί περισσότερο στις επόμενες ενότητες στην θεωρία χάους. (Δημέλη, 2013)

### 2.1.5 Η έννοια της στασιμότητας στις χρονοσειρές (Stationarity)

«Γενικά, οι χρονολογικές σειρές διακρίνονται σε στάσιμες (*stationary*) και μη στάσιμες (*non-stationary*)» (Δημέλη, 2013) ανάλογα με την ενδεχόμενη διαχρονική μεταβολή. Αν υπάρχει τότε ονομάζεται μη στάσιμη και σχετίζεται με την προσαρμοστικότητα κάποιου αλγεβρικό υποδείγματος στην υπό μελέτη χρονοσειρά. Στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία παραμένει σε ισορροπία κοντά σε μια μέση τιμή είναι καθίσταται δυνατή η μελέτη της διαδικασίας μέσω ενός υποδείγματος με σταθερούς συντελεστές.

«Μία στοχαστική διαδικασία χαρακτηρίζεται ως αυστηρά στάσιμη (*strictly stationary*) όταν οι στατιστικές τις ιδιότητες παραμένουν χρονικά αμετάβλητες. Ειδικότερα μια στοχαστική διαδικασία ονομάζεται έτσι όταν η από κοινού κατανομή της πιθανότητας είναι ίδια με την από κοινού κατανομή του συνόλου για οποιαδήποτε επιλογή  $t$  του πλήθους  $N$  και των υστερήσεων  $k$ .» (Δημέλη, 2013)

Αντιθέτως «μία χρονολογική σειρά θα είναι ασθενώς στάσιμη (*weakly stationary*) αν ο μέσος και η διακύμανσή της δεν μεταβάλλονται με το χρόνο και η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών της σε δύο χρονικά σημεία εξαρτάται μόνο από την απόσταση ανάμεσα σε αυτά τα χρονικά σημεία.» (Δημέλη, 2013)

Μαθηματικά «αν η χρονολογική σειρά είναι ασθενώς στάσιμη τότε θα ισχύουν οι εξής συνθήκες :

$$E(Y_t) = \mu_y, \text{ για όλα τα } t \quad (2.9)$$

$$\text{var}(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^2 = \sigma_y^2, \text{ για όλα τα } t \quad (2.10)$$

$$\text{cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{cov}(Y_{t+m}, Y_{t+m+k}) = \gamma_k, \text{ για όλα τα } t \text{ και } k, m \neq 0 \quad (2.11)$$

- Όπου  $\mu_y$  συμβολίζεται το σταθερό μέσο της  $Y_t$ .
- Όπου  $\sigma_y^2$  συμβολίζεται η σταθερή διακύμανση.
- Όπου  $\gamma_k$  συμβολίζεται η συνδιακύμανση μεταξύ δυο οποιοδήποτε τιμών της  $Y_t$  που απέχουν  $k$  χρονικές περιόδους. »(Δημέλη, 2013)

Η μη στασιμότητα προκαλεί πρόβλημα στην πρόβλεψη των χρονοσειρών. Για το λόγο αυτό υπάρχουν ορισμένοι μετασχηματισμοί που εφαρμόζονται σε μη στάσιμες χρονοσειρές ώστε να γίνουν στάσιμες και να διευκολυνθεί με αυτόν τον τρόπο η ανάλυσή τους. Τέτοιοι μηχανισμοί είναι η προσαρμογή των παρατηρήσεων σε ένα γραμμικό πολυώνυμο του χρόνου, το φίλτρο κινούμενου μέσου και οι πρώτες διαφορές (*First differences*). Ωστόσο, αρκετές

φορές η τάση δεν μπορεί να περιγραφηθεί ικανοποιητικά ως κάποια γνωστή συνάρτηση του χρόνου αλλά είναι τυχαία και ονομάζεται στοχαστική τάση (*stochastic trend*). Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε κυρίως τις πρώτες διαφορές για την απαλοιφή της τάσης.

### 2.1.6 Στατιστικά μεγέθη χρονοσειρών

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούν ορισμένα στατιστικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται στην μελέτη των χρονοσειρών σε ένα δείγμα (Ισχύει σε έναν πληθυσμό αλλά θα αναφερθεί μόνο το τυπολόγιο για δείγμα).

1. Δειγματικός μέσος (*sample mean*) : Μπορεί να υπολογιστεί ως η μέση τιμή των  $N$  παρατηρήσεων του δείγματος :

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t \quad (2.12)$$

- Όπου  $\bar{Y}$  ο δειγματικός μέσος
- Όπου  $Y_t$  η χρονοσειρά των παρατηρήσεων

« Προκειμένου να συγκλίνει ο χρονικός μέσος στη μαθηματική ελπίδα  $E(Y_t)$  θα πρέπει να ισχύει η υπόθεση της εργοδικότητας (*ergodicity*). Μία στάσιμη χρονοσειρά ονομάζεται έτσι όταν συγκλίνει στη συνολική αναμενόμενη τιμή: » (Δημέλη, 2013)

$$\bar{Y} \rightarrow E(Y_t) \text{ καθώς } N \rightarrow \infty \quad (2.13)$$

2. Δειγματική διακύμανση (*sample variance*) : «Η περιγραφή της μεταβλητότητας ορισμένων τιμών από μία μέση τιμή ονομάζεται διασπορά των τιμών και οι μετρήσεις που χρησιμοποιούμε πιο συχνά για τη μέτρηση της διασποράς είναι η διακύμανση. Αυτές οι μετρήσεις δείχνουν το κατά πόσο κοντά βρίσκεται μία κατανομή γύρω από το μέσο και πόσο απέχει.» (Χάλκος, 2011)

$$\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2 \quad (2.14)$$

3. Αυτοσυνδιακύμανση (*autocovariance*) : «Ορίζεται ως η συνδιακύμανση μεταξύ δυο οποιοδήποτε τιμών της  $Y_t$  που απέχουν  $k$  χρονικές περιόδους:

$$\gamma_k = cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[Y_t - E(Y_t)][Y_{t+k} - E(Y_{t+k})] \quad (2.15)$$

Για  $k = 0$  η αυτοσυνδιακύμανση είναι η ίδια η διακύμανση δηλαδή:» (Δημέλη 2013)

$$\gamma_0 = cov(Y_t, Y_t) = var(Y_t) = \sigma_y^2 \quad (2.16)$$

4. Δειγματικός συντελεστής αυτοσυσχέτισης (*Autocorrelation coefficient*) : «Δείχνει τον βαθμό ύπαρξης της τυχαίου στοιχείου σε μια χρονοσειρά.» : ( Hamilton, 1994)

$$\widehat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^N (Y_t - \bar{Y})^2} \quad (2.17)$$

- Όπου  $k$  τάξη υστέρησης
  - Όπου  $\bar{Y}$  δειγματικός μέσος χρονοσειράς
  - Όπου  $N$  πλήθος παρατηρήσεων χρονοσειράς
5. Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (*Autocorrelation Function*) : Η συνάρτηση του συντελεστή συσχέτισης για τις διάφορες υστερήσεις του  $k$  μας δίνει την δειγματική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (AC ή AFC). Οι τιμές που παίρνει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης κυμαίνονται μεταξύ -1 και 1. Οι τιμές του  $\rho_k$  που βρίσκονται κοντά στη μονάδα δηλώνουν θετική συσχέτιση μεταξύ των τιμών της χρονοσειράς για την εκάστοτε υστέρηση ενώ δηλώνουν αρνητική συσχέτιση όταν βρίσκονται κοντά στο -1. Όταν το  $\rho_k$  προσεγγίζει την μηδενική τιμή αυτό υποδηλώνει απουσία συσχέτισης. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης βοηθάει στον έλεγχο ύπαρξης στασιμότητας σε μια χρονοσειρά. Μία από τις σημαντικότερες δημοσιεύσεις που ασχολούνται με τη μη γραμμική δυναμική των συστημάτων καθυστέρησης ήταν το έγγραφο του Farmer, που μελέτησε τους χαοτικούς ελκυστήρες στα συστήματα καθυστέρησης και ιδιαίτερα την εξάρτησή τους από την καθυστέρηση του χρόνου. Παρατηρήθηκε ότι η πολυπλοκότητα των ελκυστήρων αυξάνεται με την αύξηση της καθυστέρησης. Εν τω μεταξύ είναι γνωστό ότι τα συστήματα χρονικής καθυστέρησης παρουσιάζουν δυναμικά φαινόμενα που μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλης διαστάσεως. Παράλληλα η διάσταση των παρατηρούμενων φαινομένων είναι ανάλογη της χρονικής καθυστέρησης  $\tau$ . Μια σωστή περιγραφή της υψηλής διάστασης δυναμικής στα συστήματα καθυστέρησης απαιτεί μεθόδους, που σε ορισμένες περιπτώσεις είναι διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιούνται για συστήματα χαμηλών διαστάσεων. Συγκεκριμένα, οι κανονικές μορφές που περιγράφουν τις διαδικασίες αποσταθεροποίησης είναι μερικές φορές παρόμοιες με εκείνες για τα χωρικά εκτεταμένα συστήματα (μερικές διαφορικές εξισώσεις). (Δημέλη, 2013).

6. Συνάρτηση μερικής αυτοσυσχέτισης (*Partial Autocorrelation Function*): Η συνάρτηση της μερικής αυτοσυσχέτισης μας δείχνει την συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών όταν έχει αφαιρεθεί η επίδραση που ασκούν οι ενδιάμεσες μεταβλητές σε μια χρονοσειρά και ισχύουν και εδώ τα ίδια για τον συντελεστή όπως και για τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης αποτελεί ακόμα μια μέθοδο εύρεσης της στοχαστικής διαδικασίας πίσω από μια χρονοσειρά. (Δημέλη, 2013)

### 2.1.7 Υποδείγματα τυχαίων χρονολογικών σειρών

1. Υπόδειγμα Λευκού Θορύβου : Αποτελεί την απλούστερη στοχαστική διαδικασία χρονολογικής σειράς .Προκειμένου να μπορεί μία χρονοσειρά να θεωρηθεί λευκός θόρυβος θα πρέπει να έχεις σταθερό μέσο (συνήθως μηδέν) σταθερή διακύμανση και οι τιμές της να μην αυτοσυσχετίζονται δηλαδή οι συντελεστές συσχέτισης να είναι όλοι μηδενικοί. Πιο συγκεκριμένα :

$$E(\varepsilon_t) = 0, \text{ για όλα τα } t \quad (2.18)$$

$$\gamma_0 = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma_\varepsilon^2, \text{ για όλα τα } t \quad (2.19)$$

$$\gamma_k = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0, \text{ για όλα τα } t \text{ και } k \neq 0 \quad (2.20)$$

- Όπου  $(\varepsilon_t)$  είναι η χρονοσειρά.
- Όπου  $\sigma_\varepsilon^2$  είναι η διακύμανση.
- Όπου  $k$  είναι η χρονική υστέρηση.

Ένα παράδειγμα θα μπορούσε να είναι τα κατάλοιπα μιας παλινδρόμησης που μπορούν να εκφράζονται ως τυχαία λάθη (*random errors*) ή τυχαίες διαταραχές (*stochastic shocks*) ή άλλες καινοτομικές επιδράσεις (*innovations*). (Διμελή, 2013)

2. Υπόδειγμα Στοχαστικής Διαδικασίας (*iid*): Είναι παρόμοια με το υπόδειγμα λευκού θορύβου και ονομάζεται διαδικασία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών ή αλλιώς (*Gaussian*) λευκός θόρυβος. Υπάγεται στις ακόλουθες ιδιότητες :

$$E(\varepsilon_t) = \mu, \text{ σταθερός} \quad (2.21)$$

$$\gamma_0 = E(e)^2 = \sigma_e^2, \text{ σταθερή για όλα τα } t \quad (2.22)$$

$$(\varepsilon_t) \text{ ανεξάρτητα από τα } (\varepsilon_s), \text{ για όλα τα } t \text{ και } s, t \neq s \quad (2.23)$$

- Όπου  $(\varepsilon_t)$  είναι η χρονοσειρά.
- Όπου  $\sigma_\varepsilon^2$  είναι η διακύμανση.



3. Υπόδειγμα Τυχαίας Διαδρομής : Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα κάθε τιμή μιας χρονολογικής σειράς προκύπτει από την αμέσως προηγούμενη καθώς προστίθεται ένας τυχαίος όρος. Μία θεμελιώδης ιδιότητα είναι ότι οι πρώτες διαφορές είναι τυχαίες (λευκός θόρυβος). Επίσης οι διακυμάνσεις δεν είναι σταθερές αλλά συνάρτηση του χρόνου. Η ισχυρή αυτοσυσχέτιση που διατηρείται σε βάθος υστερήσεων οφείλεται στην ιδιότητα της εμμονής (*persistence*) και σχετίζεται με την μνήμη της πληροφορίας μεταξύ των υστερήσεων. Η γενική μορφή ενός υποδείγματος τυχαίας διαδρομής (*random walk model*) ή τυχαίου περιπάτου είναι η εξής: (Διμελή, 2013)

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.24)$$

- Όπου  $(\varepsilon_t)$  είναι λευκός θόρυβος(μηδενικού μέσου).
  - Όπου  $Y_t$  είναι η χρονοσειρά.
  - Όπου  $Y_{t-1}$  είναι η αμέσως προηγούμενη τιμή της χρονοσειράς.
4. Υπόδειγμα Τυχαίας Διαδρομής με σταθερά : Το συγκεκριμένο υπόδειγμα μοιάζει με το υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής διαφέρει στο γεγονός όμως ότι προστίθεται ένας σταθερός όρος  $\beta$  και ονομάζεται υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής με σταθερή εκτροπή. Η σταθερά  $\beta$  εκφράζει την τάση οπότε ανάλογα με το πρόσημο της. Παρουσιάζεται ως εξής:

$$Y_t = \beta + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.25)$$

### 2.1.8 Γραμμικά υποδείγματα χρονολογικών σειρών

1. Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα ( $AR(p)$ ): Ονομάζεται αυτοπαλίνδρομο διότι η σχέση του υποδείγματος αποτελεί ουσιαστικά μια παλινδρόμηση όπου η εξαρτημένη μεταβλητή  $y_t$  παλινδρομείται πάνω στις προηγούμενες τιμές της χρονοσειράς  $y$ . Η σχέση υποδηλώνει ότι η κάθε τιμή της χρονοσειράς προκύπτει από το είναι σταθμισμένο άθροισμα προηγούμενων παρατηρήσεων καθώς και των καταλοίπων που αποτελούν το τυχαίο παράγοντα. Η γενική μορφή του αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος τάξεως ( $p$ ) σε αποκλίσεις από το μέσο έχει την ακόλουθη μορφή : (Montgomery, et al., 2008)

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.26)$$

Αν θέσουμε σε όρους τελεστή υστέρησης  $L$  προκύπτουν οι εξής σχέσεις :

$$(1 - a_1 L - \dots - a_p L^p) y_t = \varepsilon_t \quad \text{ή} \quad A(L) y_t = \varepsilon_t \quad (2.27)$$

- Όπου  $y_t$  είναι μια τιμή της χρονοσειράς  $y$ .
- Όπου  $a_p, a_1, a_2$ , είναι οι αυτοπαλινδρομούμενοι συντελεστές.

- Όπου  $\varepsilon_t$  είναι το τυχαίο σφάλμα ή αλλιώς τα κατάλοιπα.
  - Όπου  $p$  είναι η τάξη υστέρησης.
  - Όπου  $A(L)$  είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του υποδείγματος και όταν οι ρίζες του είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου δηλώνει στασιμότητα. (Διμελή, 2013)
2. Υποδείγματα κινητών μέσων ( $MA(q)$ ) : « Τα συγκεκριμένα υποδείγματα μπορεί να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις μια γενικής γραμμικής στοχαστικής διαδικασίας (*General linear process*)».(Διμελή, 2013) Αναπτύχθηκαν αρχικά από τους Slutsky το 1927 και Wold το 1938 με στόχο να περιγράψουν φαινόμενα στις χρονοσειρές στις οποίες συμβαίνουν γεγονότα με άμεσα αποτελέσματα τα οποία έχουν όμως και περεταίρω επιδράσεις στο μέλλον. Η σχέση τους εκφράζει το σταθμισμένο άθροισμα των προηγούμενων παρατηρήσεων της χρονοσειράς μαζί με ένα σταθερό όρο καθώς επίσης και τα σφάλματα συνεπώς είναι μια στάσιμη διαδικασία. Χρησιμοποιείται συνήθως « όταν η συνάρτησης μερικής αυτοσυσχέτισης τείνει προς το μηδέν εκθετικά». (Chatfield, 2003).  
Πιο συγκεκριμένα:

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.28)$$

Η με την χρήση τελεστή  $L$

$$y_t = \mu + (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) \varepsilon_t = \mu + \theta(L) \varepsilon_t \quad (2.29)$$

- Όπου  $\mu$  η σταθερά της εξίσωσης.
  - Όπου  $\theta$  οι σταθερές παράμετροι παίρνουν τιμές από -1 έως 1.
  - Όπου  $\varepsilon_t$  τα τυχαία σφάλματά ή λευκός θόρυβος.
  - Όπου  $Y_t$  η χρονολογική σειρά.
  - Όπου  $q$  οι προηγούμενοι περίοδοι.
  - Όπου  $\theta(L)$  είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $MA(q)$  και όταν οι ρίζες του είναι εκτός του μοναδιαίου κύκλου η διαδικασία θεωρείται αντιστρέψιμη και να εκφραστεί ως αυτοπαλίνδρομη διαδικασία  $AR(p)$ .
3. Αυτοπαλίνδρομα Υποδείγματα Κινητών Μέσων (*Autoregressive Moving Average Models*): Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα υποδείγματα  $AR$  και  $MA$  χρησιμοποιούνται σε συγκεκριμένες χρονοσειρές και ανάλογα με τον τρόπο συμπεριφοράς των συναρτήσεων αυτοσυσχέτιση και μερικής αυτοσυσχέτισης . Υπάρχουν όμως χρονοσειρές οι οποίες δεν έχουν ξεκάθαρες ιδιότητες για να ανήκουν σε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες ,για τον λόγο αυτό έχει δημιουργηθεί το υπόδειγμα  $ARMA$  που ουσιαστικά αποτελεί έναν

συνδυασμό των δύο προηγούμενων υποδειγμάτων. Επειδή εξ ορισμού τα υποδείγματα AR είναι αντιστρέψιμα και τα MA στάσιμα οπότε για τη στασιμότητα και την αντιστρεψιμότητα των ARMA μοντέλων αρκεί να ελέγξουμε αντίστοιχα ξεχωριστά τα μέρη στο ARMA μοντέλο. Παρακάτω παρουσιάζεται η γενική μορφή του υποδείγματος :

$$Y_t = \delta + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.30)$$

- Όπου  $Y_t$  η χρονολογική σειρά (εξαρτημένη μεταβλητή).
  - Όπου  $\delta$  σταθερά της εξίσωσης.
  - Όπου  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_p$  οι συντελεστές του AR μέρους.
  - Όπου  $\theta_1, \theta_2, \theta_q$  οι συντελεστές του MA μέρους.
  - Όπου  $\varepsilon_t$  ο λευκός θόρυβος (σφάλματα).
  - Όπου  $p$  υστερήσεις τάξεως της  $Y_t$
  - Όπου  $q$  υστερήσεις τάξεως της  $\varepsilon_t$
4. Αυτοπαλίνδρομα Ολοκληρωμένα Υποδείγματα Κινητών Μέσων (*Autoregressive Integrated Moving Average Models*) και μεθοδολογία Box and Jenkins : Τα ARMA υποδείγματα που αναλύθηκαν προηγουμένως βασίζονται στην υπόθεση ύπαρξης στασιμότητας στις χρονολογικές σειρές που εφαρμόζονται. Πολλές φορές όμως ιδιαίτερα σε χρηματοοικονομικές χρονοσειρές όπως για παράδειγμα αυτή του πετρελαίου που αναλύεται στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται τάση ή εποχικότητα και γενικότερα μεταβολές στο μέσο κατά διαστήματα. Ο μέσος δηλαδή αλλάζει επίπεδο διαχρονικά αλλά συμπεριφέρεται ομοιόμορφα. Εξαιτίας λοιπόν αυτού του γεγονότος κρίνεται απαραίτητη η μετατροπή της χρονοσειράς σε στάσιμή με την μέθοδο της διαφοροποίησης όπως πρώτοι εφάρμοσαν οι Box και Jenkins το 1976. Στη νέα χρονοσειρά που προκύπτει εφαρμόζεται στο υπόδειγμα ARIMA τάξεων (p,d,q) και τα συμβολίζουμε ως ARIMA(p,d,q). Ως  $d$  αναφέρεται η τάξη διαφοροποίησης. (Διμελή, 2013)

Η εφαρμογή αυτών των υποδειγμάτων συνήθως ακολουθεί κάποια συγκεκριμένα βήματα που είναι γνωστά ως μεθοδολογία *Box and Jenkins*. Τα βήματα που ακολουθεί αυτή η μεθοδολογία είναι τα εξής : (Chatfield, 2003)

1. Ταυτοποίησης (*Identification*) όπου αποφασίζεται η τάξη διαφοροποίησης στη χρονοσειρά που μελετάται.
2. Εκτίμηση (*Estimation*) των αυτοπαλίνδρομων παραμέτρων και των παραμέτρων των κινητών μέσων.

3. Διαγνωστικό έλεγχο (*Diagnostic checking*) του υποδείγματος μετά την εφαρμογή του με τη χρήση στατιστικών μέτρων και τέλος
4. Πρόβλεψη (*Forecasting*) για μελλοντικές τιμές της χρονοσειράς.

### 2.1.9 Υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας

Όπως έχει αναφερθεί στις προηγούμενες ενότητες μια από τις βασικές υποθέσεις μια στάσιμης χρονοσειράς αποτελεί η σταθερή διακύμανση. Με τον όρο ετεροσκεδαστικότητα (*heteroskedasticity*) εννοούμε την παραβίαση της υπόθεσης της σταθερής διακύμανσης σε ένα δείγμα γνωστή και ως ομοσκεδαστικότητα (*homoskedasticity*). Πολλές χρηματοοικονομικές σειρές όμως φαινόταν να εμφανίζουν σταθερή διακύμανση για συγκεκριμένες χρονικές περιόδους ακολουθούμενες από μικρές περιόδους συγκέντρωσης μεγάλης μεταβλητότητας γνωστό και ως φαινόμενο συστάδων μεταβλητότητας (*volatility clusters*). Για τους αναλυτές εκείνη την περίοδο δεν υπήρχε νόημα η μελέτη της απλής διακύμανσης σε όλη την δειγματική περίοδο αλλά η λεγόμενη δεσμευμένη ή υπό συνθήκη διακύμανση (*conditional variance*) που δίνει βαρύτητα στην τρέχουσα διακύμανση αλλά λαμβάνει υπόψιν και όλη την προηγούμενη πληροφόρηση σε αντίθεση με τη μη δεσμευμένη διακύμανση (*unconditional variance*) που αφορά όλο το δείγμα. (Διμελή, 2013)

### 2.1.10 Υπόδειγμα ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedastic*)

Στο πρόβλημα της ενότητας 2.1.9 αυτό έδωσε πρώτος λύση ο Engle το 1982 όπου εισήγαγε τον όρο υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητα και εξήγησε ότι η διακύμανση μπορεί να εξηγηθεί μέσω εφαρμογής ενός υποδείγματος AR ως συνάρτηση των προηγούμενων τιμών της. Το κύριο χαρακτηριστικό του υποδείγματος είναι ότι το τυχαίο σφάλμα είναι γραμμικά ασυσχέτιστο αλλά όχι ανεξάρτητο στο χρόνο και ότι η γραμμική εξάρτηση που παρουσιάζει είναι δυνατόν να περιγραφεί με τη χρήση σφαλμάτων προηγούμενης υστέρησης στο τετράγωνο. Πιο συγκεκριμένα : (Διμελή, 2013)

$$\varepsilon_t = u_t \sigma_t, u_t \sim iid(0,1) \quad (2.31)$$

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}^2 \quad (2.32)$$

- Όπου  $\varepsilon_t$  είναι ο λευκός θόρυβος.
- Όπου  $u_t$  είναι μια ανεξάρτητη στοχαστική διαδικασία.
- Όπου  $\beta_0 > 0$  και  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \geq 0$  είναι οι άγνωστοι παράμετροι.
- Όπου  $\sigma_t^2$  είναι η υπό συνθήκη διακύμανση του τυχαίου σφάλματος.

Το υπόδειγμα είναι κατασκευασμένο με τη χρήση τετραγώνων με τρόπο όπου μεγαλύτερες τιμές σφαλμάτων στο παρελθόν να παράγουν μεγαλύτερη διακύμανση που μεταφράζεται σε περίοδο μεγάλης μεταβλητότητας ενώ αντίθετα μικρότερες τιμές στα σφάλματα προμηνύουν περιόδους ομαλότητας. (Tsay, 2005)

### **2.1.11 Υπόδειγμα GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic)**

Με τον καιρό μελετητές παρατήρησαν ορισμένα μειονεκτήματα των μοντέλων ARCH με κυριότερα εξ αυτών την ανάγκη για μεγάλο αριθμό παραμέτρων σε ορισμένες χρονοσειρές και οι περιορισμοί της μη αρνητικότητας των υστερήσεων. Λύση στο πρόβλημα έδωσε ο Bollerslev το 1986 όπου γενίκευσε την εξίσωση του υποδείγματος ARCH και ουσιαστικά μετέτρεψε την διαδικασία σε μορφή ARMA. Το υπόδειγμα GARCH (p, q) όπως ονομάστηκε είναι κατασκευασμένο με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να η υπό συνθήκη διακύμανση να εξαρτάται πλέον όχι μόνο από τα τετράγωνα των σφαλμάτων αλλά και από τις προηγούμενες τιμές της ίδιας της διακύμανσης. Πιο συγκεκριμένα : (Engle, Manganelli, 2004)

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (2.33)$$

- Όπου  $\sum_{j=1}^p \delta_j \sigma_{t-j}^2$  το πολυώνυμο των υστερήσεων της υπό συνθήκης διακύμανσης.
- Όπου  $\sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}^2$  το πολυώνυμο των υστερήσεων των τετραγώνων των κατάλοιπων της εξίσωσης του μέσου.
- Όπου  $\sigma_t^2$  είναι η υπό συνθήκη διακύμανση.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι τα συγκεκριμένα υποδείγματα μετατρέπονται εύκολα και σε άλλες μορφές όπως IGARCH , TGARCH , EGARCH , GARCH-M για τις οποίες όμως δεν θα επεκταθούμε.

## 2.2 Θεωρία πολυπλοκότητας – Θεωρία χάους

### 2.2.1 Εισαγωγή στην θεωρία πολυπλοκότητας (Complexity theory)

Η θεωρία πολυπλοκότητας εμφανίστηκε στον επιστημονικό κόσμο στο δεύτερο μισό του 20ο αιώνα και αποτελεί την μεγαλύτερη επανάσταση στις σύγχρονες επιστήμες μετά τις θεωρίες των κβαντικών και της σχετικότητας. Πρόκειται συνεπώς για ένα καινούργιο και παράλληλα αναπτυσσόμενο διεπιστημονικό πεδίο που εμφανίστηκε γύρω από τα μαθηματικά και την μη γραμμική ανάλυση, την πληροφορική, την θεωρία των συστημάτων, την θερμοδυναμική και την θεωρία χάους. (Davis & Sumara, 2008).

Η σημερινή έννοια της πολυπλοκότητας εισήχθη για πρώτη φορά από τον Warren Weaver το 1948 στο επιστημονικό του άρθρο με τίτλο "Πολύπλοκα συστήματα, Χάος και πολυπλοκότητα" (*Complex systems, Chaos and complexity*). Στόχος της επιστήμης ήταν και είναι να βοηθήσει στην κατανόηση ορισμένων άγνωστων πτυχών σε διάφορα επιστημονικά πεδία όπως της βιολογίας, της βιοχημείας και της κοινωνιολογίας ιδιαίτερα εκεί όπου η μοντελοποίηση ήταν δύσκολη, αδύνατη ή μη επαρκής και να βοηθήσει γενικότερα τους επιστήμονες να μελετήσουν μία σειρά φαινομένων με διαφορετικά εννοιολογικά και υπολογιστικά εργαλεία. Παραδείγματα πολυπλοκότητας από την καθημερινή ζωή μπορεί να είναι το σύμπαν ή το νευρικό σύστημα ενός ανθρώπινου εγκεφάλου. (Μπράιλας, 2015)

Η πολυπλοκότητα μπορεί να χαρακτηριστεί ως εξής :

1. *Στατική (static)* : Όπου ένα σύστημα δεν αλλάζει με τον χρόνο.
2. *Δυναμική (dynamic)* : Όπου ένα σύστημα αλλάζει με τον χρόνο.
3. *Εξελισσόμενη (evolving)*: Όπου ένα σύστημα εξελίσσεται σε διάφορα άλλα υποσυστήματα.
4. *Αυτό-οργανωμένη (self-organized)* : Όπου ένα σύστημα εξελίσσεται μαζί με τον περιβάλλον του. (Ataei, Lohmann, Khaki-Sedigh, Lucas, 2004)

Στα χρηματοοικονομικά προσπαθεί να περιγράψει τις αλληλεξαρτήσεις στις τιμές διάφορων μετοχών και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται μεταξύ θεωρώντας ότι αυτές ανήκουν σε ένα γενικότερο μη γραμμικό δυναμικό σύστημα. Αυτό καθιστά την θεωρία ιδιαίτερα σημαντική στη σύγχρονη εποχή όπου είναι κανείς εύκολο να αντιληφθεί ότι το παγκόσμιο χρηματοπιστωτικό σύστημα είναι ένα πολύπλοκο σύστημα όπου η πληροφορία διαχέεται σχεδόν ακαριαία μέσω του διαδικτύου και περιλαμβάνει μία τεράστια αλληλουχία

πολύπλοκων δεδομένων και επενδυτών που αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους και κάνει πολλές φορές τις αγορές μη προβλέψιμες. ( Μπράιλας, 2015). «Η μη προβλεψιμότητα είναι εγγενής στα πολύπλοκα συστήματα. Δηλαδή δεν χρειάζεται καμιά εξωτερική, μη αναμενόμενη, αναπάντεχη παρέμβαση, ώστε ένα απολύτως ντετερμινιστικό σύστημα να οδηγηθεί σε μια απολύτως χαοτική και μη προβλέψιμη συμπεριφορά.»(Feldman, 2012).

### 2.2.2 Θεωρία χάους (*Chaos theory*)

Η ιδέα της θεωρίας του Χάους εισάχθηκε στα τέλη του 19ου αιώνα από τον Γάλλο Μαθηματικό Henri Poincare και θεωρείται πατέρας της επιστήμης ο οποίος προσπάθησε να εξηγήσει την αιτία μη προβλεψιμότητας ορισμένων δυναμικών Συστημάτων. «Συγκεκριμένα ανέφερε ότι η αδυναμία πρόβλεψης είναι εγγενής στο σύστημα των εξισώσεων και δεν ευθύνεται κάποιο λάθος στους μαθηματικούς τύπους»(Μπράιλας, 2015). Γενικότερα χάος στην θεωρία πολυπλοκότητας σημαίνει εξαιρετική ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, μια ορολογία που την εισήγαγε περίπου 70 χρόνια αργότερα ο Edward Lorenz το 1961 σε μια μελέτη σχετικά με την πρόβλεψη καιρικών φαινομένων. Στις πολύ μικρές αλλαγές που έκανε στις θερμοκρασίες και στις αρχικές συνθήκες του πειράματός του παρατήρησε εντελώς διαφορετικές τιμές στην εξέλιξη του συστήματος του. Όταν αυτές τελικά αποτυπώθηκαν με την χρήση ενός υπολογιστή παρατηρήθηκε η δημιουργία ενός παράξενου ελκυστή. Μάλιστα σε ένα συνέδριο για να εξηγήσει την λεγόμενη παρατήρησή του αναφέρθηκε πως η κίνηση των φτερών μιας πεταλούδας μπορούσε να επιφέρει την δημιουργία τυφώνων στην άλλη άκρη του πλανήτη που έμεινε γνωστό την επιστημονική κοινότητα ως το λεγόμενο φαινόμενο της πεταλούδας (*butterfly effect*). Τα χαοτικά συστήματα εκ πρώτης όψεως μοιάζουν να έχουν τυχαία συμπεριφορά και να καθιστούν την μακροπρόθεσμη πρόβλεψη αδύνατη αλλά στην πραγματικότητα υπάρχει δυνατότητα βραχυπρόθεσμης πρόβλεψης στην γενική συμπεριφορά του συστήματος για τον λόγο αυτό χαρακτηρίζονται και ως ντετερμινιστικά. (Βουγιατζής & Μελετιδίου, 2015). Γενικότερα ,ο Devaney αναφέρει ότι «για να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά ενός συστήματος ως χαοτική, πρέπει να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Πρέπει να παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.
- Πρέπει να είναι τοπολογικά μεταβατικό.
- Πρέπει να εμφανίζει ένα πυκνό σύνολο (*dense set*) που αποτελείται από όλες τις περιοδικές τροχιές του συστήματος»( Hasselblatt, Katok, 2003)

Στις χρηματοοικονομικές μελέτες ακόμα και η βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη μπορεί να αποφέρει σημαντικά κέρδη. Δεν έχει αποδειχτεί πλήρως ότι μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία σε

όλα τα δεδομένα με επιτυχία αλλά παρόλα αυτά υπάρχουν κάποιες θετικές ενδείξεις σε συγκεκριμένες χρονοσειρές.

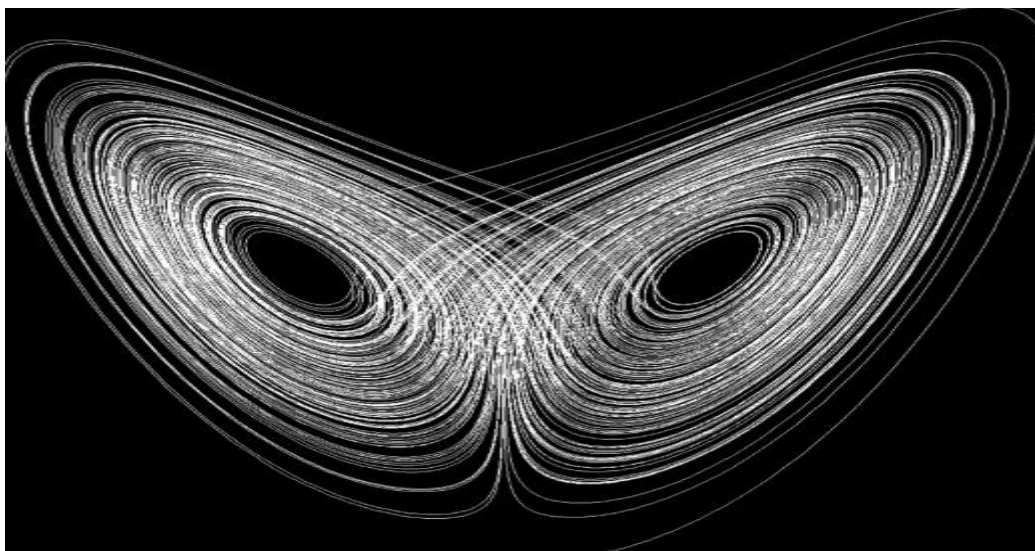
### **2.2.3 Ελκυστής (Attractor)**

Μέσα από τη μελέτη των γραμμικών συστημάτων έχει παρατηρηθεί ότι μετά από την είσοδο κάποιων αρχικών συνθηκών το σύστημα μπορεί να έλκεται από κάποια σημεία ισορροπίας τα οποία αποτελούν και τον ελκυστή του συστήματος. Όσο αναφορά τα δυναμικά συστήματα ένας από τους τρόπους για να περιγράψουμε την εξέλιξή τους είναι μέσω της δημιουργίας ενός διαγράμματος φάσης στο οποίο ουσιαστικά παρουσιάζεται η εξέλιξη των διάφορων μεταβλητών του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Το σύνολο το οποίο διαμορφώνεται παράλληλα με τους νόμους που διέπουν το σύστημα ονομάζεται ελκυστής (*attractor*) και κάθε σημείο ή αλλιώς τροχιά που βρίσκεται κοντά του παραμένει αμετάβλητο σε μικρές διαταραχές. Σημαντικό αποτελεί το γεγονός πως η γεωμετρική μορφή του ελκυστή επηρεάζεται από τις μεταβλητές που εκφράζει και την διάσταση που έχουν. Για παράδειγμα αν οι μεταβλητές είναι δύο ή τριών διαστάσεων τότε ο ελκυστής είναι δυνατό να παρασταθεί στις αντίστοιχες διαστάσεις. Γενικότερα ένας ελκυστής μπορεί να είναι ένας τόπος, ένα σημείο, ένας οριακός κύκλος ή τέλος ένας παράξενος ελκυστής για τον οποίο θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στην επόμενη ενότητα 2.2.4. (Ruelle, 1994)

### **2.2.4 Παράξενος ελκυστής (Strange Attractor)**

Ένας παράξενος ελκυστής ουσιαστικά αποτελεί ένα γεωμετρικό σχήμα το οποίο παρουσιάζει την ιδιότητα της κλασματικής (*fractal*) δομής όπως ονομάζεται σύμφωνα με την θεωρία που εισήγαγε ο Benoit Mandelbrot το 1975 προσπαθώντας να περιγράψει τις δομές γεωμετρικών σχημάτων που υπάρχουν γενικότερα στην φύση. Ουσιαστικά εξηγεί ότι η δομή παραμένει παρόμοια ακόμα και σε διαφορετικές μεγέθους κλίμακας. Ο συγκεκριμένος χαρακτηρισμός επινοήθηκε από τους Ruelle και Takens για να περιγράψουν την δομή των παράξενων ελκυστών σε μία από τις μελέτες τους. Οι παράξενοι ελκυστές επίσης δημιουργούν ένα φραγμένο όριο όπως ονομάζεται μέσα στο οποίο βρίσκονται οι τροχιές του συστήματος και είναι αδύνατο να ξεφύγουν από αυτό. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα παράξενων ελκυστών με πιο διάσημο εξ αυτών ο ελκυστής του Lorenz άλλα υπάρχουν και άλλοι όπως του Rossler ή του Henon. (Ruelle, 1994) Παρακάτω παρουσιάζεται η εικόνα του παράξενου ελκυστή Edward Lorenz





Σχήμα (2.1) Παράξενος ελκυστής συστήματος Lorentz (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [12])

### 2.2.5 Ανακατασκευή χώρου φάσεων με το θεώρημα Takens

Προκειμένου να πραγματοποιηθεί η μελέτη των χαοτικών δυναμικών συστημάτων οι ερευνητές είναι απαραίτητο αρχικά να μελετήσουν τον φασικό χώρο και τον ελκυστή του συστήματος. Επειδή όμως οι έρευνες πραγματοποιούνται πάνω σε πραγματικά δεδομένα και σε χρονοσειρές η ανακατασκευή του χώρου φάσεων (*Phase Space Reconstruction*) είναι αδύνατη χωρίς την γνώση των εξισώσεων του συστήματος που παράγουν τα δεδομένα. Λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήρθε να δώσει ο Takens ένας ολλανδός μαθηματικός ο οποίος εφηύρε ένα νέο θεώρημα (θεώρημα Takens) όπου εφαρμόστηκε πάνω στις χρονοσειρές χρησιμοποιώντας σε ως βάση την ήδη υπάρχουσα θεωρία για την διάσταση εμβύθυνσης του Whitney σύμφωνα με το οποίο εξηγεί τον αριθμό των διαστάσεων που απαιτείται να έχει ένας φασικός χώρος για να περιγραφηθεί ένας ελκυστής. (Whitney, 1936)

Η ιδέα πίσω από την σκέψη του ήταν να κατασκευαστεί τοπολογικά ένας ισοδύναμος φασικός χώρος και να εκμεταλλευτεί μερικές από τις ιδιότητες των δυναμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα την επάρκεια πληροφορίας που παρέχεται από την μελέτη αποκλείστηκα του παράξενου ελκυστή ,λόγω της μικρότερης διάστασης που έχει σε σχέση με τον ευρύτερο φασικό χώρο. Επιπροσθέτως σημαντική ιδιότητα αποτελεί η διατήρηση των τοπολογικών και δυναμικών ιδιοτήτων σε όλες τις μεταβλητές των δυναμικών συστημάτων που επιτρέπει την επαρκή μελέτη του συστήματος ακόμα και με περιορισμένη γνώση σχετικά με αυτές. Προχωρώντας στο θεώρημα ο Takens είχε ως δεδομένο ότι οι παρατηρήσεις  $\chi_i$  μιας χρονοσειράς  $Y_t$  εξαρτώνται άμεσα από τις ίδιες προγενέστερες τιμές της χρονοσειράς

$x_i, \dots, x_{i-(m-1)}$  και κατάφερε να αποδείξει ότι αυτές οι τιμές μπορούν να ανακατασκευάσουν τον φασικό χώρο με τον περιορισμό ότι θα ισχύει η σχέση:

$$m \geq 2D + 1 \quad (2.34)$$

- Όπου  $m$  είναι η διάσταση εμβύθυνσης
- Όπου  $D$  είναι η διάσταση του ελκυστή

Ουσιαστικά αυτή η σχέση μας εξασφαλίζει την ποιότητα του ανασκευασμένου χώρου αυξάνοντας την διάσταση παρόλο την ενδεχόμενη έλλειψη γνώσης του πραγματικού αριθμού των μεταβλητών που περιγράφουν τα δεδομένα μας. Η γενικότερη εικόνα του φασικού χώρου δίνεται από την σχέση :

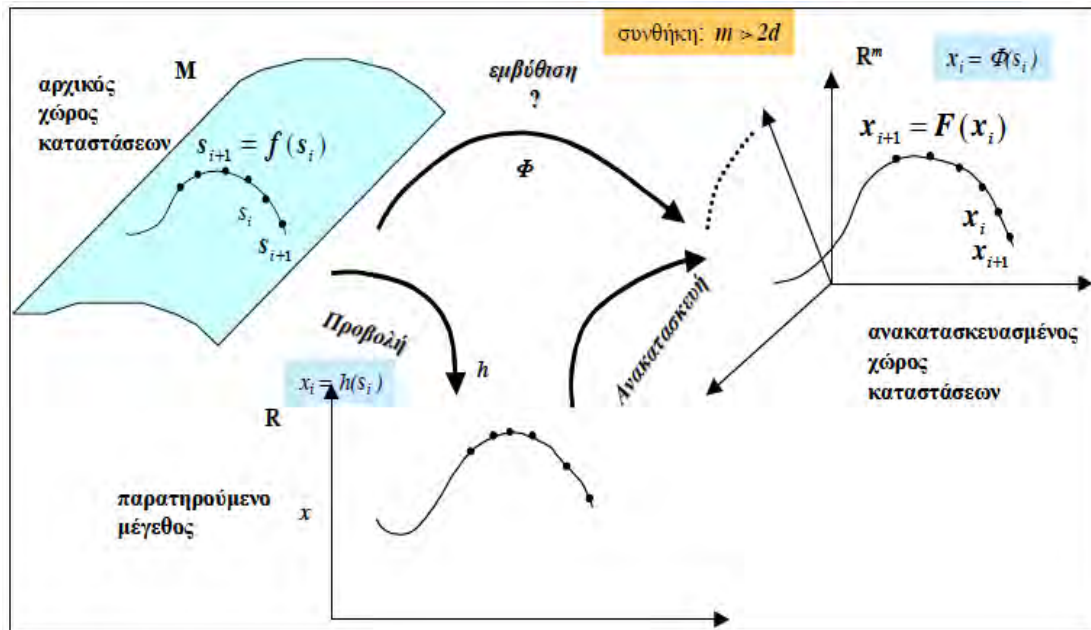
$$s_{i+1} = f(s_i) \quad (2.35)$$

- Όπου  $s$  είναι η μεταβλητή που εμπλέκεται στο σύστημα
- Όπου  $f$  είναι η συνάρτηση

Ουσιαστικά γνωρίζοντας τις τιμές της χρονοσειράς γνωρίζουμε κάποια συνιστώσα του  $s$  όπου με αυτά δημιουργούνται τα καινούργια σημεία όπου με τη σειρά τους θα αποτελέσουν τον καινούργιο φασικό χώρο. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή στον επιστημονικό κόσμο ως μέθοδος υστερήσεων (*method of delays*) και με αυτόν τον τρόπο έχει επιτευχθεί να δημιουργηθεί στον ανακατασκευασμένο φασικό χώρο (εξίσωση 2.36) ένας καινούργιος ελκυστής που διατηρεί παρόμοια χαρακτηριστικά με τον αρχικό σύστημα.

$$x_{i+1} = F(x_i) \quad (2.36)$$

Ουσιαστικά μιλάμε για μια εμβύθιση που έχει επιτευχθεί στον ανακατασκευασμένο χώρο για αυτό και η παράμετρος η συγκεκριμένη χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στα στη επιλογή της . Τέλος είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι το συγκεκριμένο θεώρημα αναφέρεται σε χρονοσειρές με άπειρα δεδομένα και χωρίς θόρυβο κάτι που πρακτικά είναι αδύνατο οπότε περιοριζόμαστε σε προσεγγιστικά αποτελέσματα. Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται αναλυτικά στην ακόλουθη εικόνα. (Takens,1981)



Σχήμα (2.2) Θεώρημα Takens (Πηγή: Κουγιουμτζής (2018))

### 2.2.6 Μέθοδοι επιλογής του χρόνου καθυστέρησης (Time delay)

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα στο θεώρημα του Takens για την ανακατασκευή του φασικού χώρου η επιλογή του χρόνου καθυστέρησης είναι αυτή που καθορίζει τον αριθμό των προγενέστερων τιμών μια χρονοσειράς που θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή των καινούργιων τιμών που θα δημιουργήσουν τον ανακατασκευασμένο χώρο. Αυτό σημαίνει ότι η επιλογή του μπορεί να καθορίσει σε πολύ μεγάλο βαθμό τα αποτελέσματα της δυναμικής μελέτης μας. Τα κριτήρια τα οποία χρησιμοποιούμε είναι δύο.

Ένα πρώτο στατιστικό κριτήριο που μελετάμε είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (*autocorrelation function*) για την οποία έχει γίνει εκτενής αναφορά στην ενότητα 2.1.6 όπου γενικότερα χρησιμοποιείται για την εύρεση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των παρατηρήσεων. Η τιμή που χρησιμοποιούμε είναι συνήθως η υστέρηση για την οποία έχουμε το πρώτο ελάχιστο της συνάρτησης.

Το δεύτερο στατιστικό μέγεθος που χρησιμοποιούμε είναι η συνάρτηση μέσης αμοιβαίας πληροφορίας (*mutual Information*) όπου την συμβολίζουμε με " $AMI(X, Y)$ ". Σύμφωνα με την θεωρία των πληροφοριών αλλά και την θεωρία των πιθανοτήτων μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών η αμοιβαία πληροφορία ( $MI$ ) αποτελεί ένα μέγεθος ποσοτικοποίησης της εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ αυτών. Το συγκεκριμένο μέγεθος δίνει την δυνατότητα να κατανοήσουμε την ποσότητα πληροφορίας που υπάρχει σε μια τυχαία μεταβλητής μέσω της άλλης. Σε αντίθεση με τον συντελεστή συσχέτισης ο οποίος χρησιμοποιείται κυρίως σε

τυχαίες μεταβλητές, ο  $(MI)$  είναι γενικότερος και καθορίζει πόσο παρόμοια η κοινή κατανομή  $P_{X,Y}$  είναι στα προϊόντα της παραγόμενης οριακής κατανομής  $P_X, P_Y$ . Γενικότερα το συγκεκριμένο μέγεθος μετράει τις μη γραμμικές συσχετίσεις της χρονοσειράς που γίνεται η μελέτη και εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση: (Thomas, 1991)

$$AMI(X, Y) = \sum_{x,y} P_{X,Y}(x,y) \log \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)P_Y(y)} \quad (2.37)$$

- Όπου  $P_X(x)$  είναι η πιθανότητα του  $X$  να πάρει μια τιμή  $x$
- Όπου  $P_Y(y)$  είναι η πιθανότητα του  $Y$  να πάρει μια τιμή  $y$
- Όπου  $P_{XY}(x, y)$  είναι η από κοινού πιθανότητα των  $X$  και  $Y$  να πάρουν αντίστοιχες τιμές  $x$  και  $y$

Γενικότερα όταν υπολογίζουμε την συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας σε χρονοσειρές οι μεταβλητές που εξετάζονται είναι οι  $x_i, x_{i-1}$ , ενώ είναι σημαντικό να αναφερθεί πως η συνάρτηση λαμβάνει αποκλειστικά θετικές τιμές. Τέλος όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης ως καταλληλότερη επιλογή χρόνου καθυστέρησης για την χρήση του στην ανακατασκευή του φασικού χώρου θεωρείται η υστέρηση για την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει το πρώτο τοπικό ελάχιστο.

### **2.2.7 Επιλογή ελάχιστης διάστασης εμβύθυνσης (Embedding dimension)– Μέθοδος λανθασμένων κοντινότερων γειτόνων (False nearest neighbour) – Διάσταση συσχέτισης (Correlation dimension)**

Σε προηγούμενη ενότητα αναφέρθηκε πως το θεώρημα Takens παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να ανακατασκευαστεί σε έναν χώρο  $R^M$  με επαρκή διάσταση  $m$  ένας ελκυστής διάστασης  $D$  και να είναι δυνατόν να ξεδιπλωθούν οι τροχιές του. Υπάρχει όμως ένα ενδεχόμενο κάποια σημεία της τροχιάς του ελκυστή να βρίσκονται σε γειτονικές θέσεις σε μια διάσταση εμβύθυνσης κάτι που οφείλεται σε ιδιότητα του ελκυστή. Στο θεώρημα με την συνθήκη όπου το  $m$  είναι μεγαλύτερο του  $2D$  εξασφαλίζεται μια επαρκής τιμή για την διάσταση εμβύθυνσης η οποία δε σημαίνει όμως ότι είναι και απαραίτητη αυτού του μεγέθους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το σύστημα του Lorenz όπου έχει διάσταση εμβύθυνσης 5 ενώ το σύστημα μπορεί να περιγραφηθεί πλήρως και σε 3 διαστάσεις λόγω της διάστασης συσχέτισης που ισούται με 2,06. Με την συνθήκη  $m > 2D + 1$  δίνεται επίσης η δυνατότητα να αποφευχθούν οι αυτοτομές του ελκυστή. Είναι απαραίτητο να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή της τιμής του  $m$  διότι επιλογές μεγάλων τιμών του  $m$  δημιουργούν προβλήματα

υπολογιστικού χρόνου και θορύβου για τον επιπλέον αριθμό διαστάσεων πέρα από τον αναγκαίο αριθμό διαστάσεων. (Κουγιουμτζής, 2018)

Για τους παραπάνω λόγους λοιπόν υπάρχει ανάγκη για την χρήση όσο μικρότερης διάστασης εμβύθισης κάτι που ήταν θα ήταν πιο απλό στην περίπτωση που θα υπήρχε πληροφορία σχετικά με την διάσταση  $d$  του χώρου στον οποίο περιγράφεται ο ελκυστής αλλά και η διάσταση του ελκυστή  $D$  διότι θα ίσχυε η λογική σχέση

$$2D + 1 \geq m' \geq d \quad (2.38)$$

- Όπου  $m'$  είναι η βέλτιστη διάσταση που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

Στην μελέτη πραγματικών δεδομένων και χρονοσειρών όμως αυτό είναι κάτι που δεν συμβαίνει και για το λόγο αυτό οδηγούμαστε σε ορισμένες μεθόδους για την συγκεκριμένη επιλογή. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι παρόλα αυτά εμείς στην συγκεκριμένη εργασία θα αναλύσουμε τις ακόλουθες :

1. Μέθοδος των ψευδών κοντινότερων γειτόνων (*method of false nearest neighbour's, FNN*)
2. Μέθοδος κορεσμός των κλίσεων - Υπολογισμός της διάστασης συσχέτισης (*correlation dimension*)

Όσο αναφορά την πρώτη μέθοδος αυτή των ψευδών κοντινότερων γειτόνων εργαζόμαστε πάντα μεταξύ δύο σημείων του ελκυστή και πιο συγκεκριμένα με τα  $x_i^m$  και  $x_j^m$  όπου βρίσκονται σε κοντινή απόσταση. Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι να μεγαλώνουμε την διάσταση  $m$  κατά 1 μονάδα και να εξετάζουμε την απόσταση των σημείων. Στην περίπτωση δραματικής αύξησης της απόστασης των σημείων τότε τα σημεία τα θεωρούμε ψευδείς γείτονες. Εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο για όλα τα ζευγάρια σημείων που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση και στην περίπτωση που προκύψει μεγάλος αριθμός ψευδών γειτόνων για ένα συγκεκριμένο  $m$  συνεχίζουμε την αύξηση κατά 1 και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία έως ότου βρούμε την βέλτιστη διάσταση εμβύθισης. Η διαδικασία λήγει όταν κατά την αύξηση του  $m$  παύουν να υπάρχει μεγάλος αριθμός ψευδών γειτόνων και συνήθως θέτεται ένα όριο κάτω από το 1%. Κάποια από τα βασικά μειονεκτήματα της μεθόδου είναι η εξάρτηση από το  $t$  διότι απαιτείται να γίνει ανακατασκευή του φασικού χώρου για κάθε  $m$  καθώς επίσης η ευαισθησία της μεθόδου στον θόρυβο της χρονοσειράς. (Κουγιουμτζής, 2018)

Όσο αναφορά την δεύτερη μέθοδο αποτελεί ένα μη γραμμικό χαρακτηριστικό του δυναμικού συστήματος που μελετάται. Όπως έχουμε ήδη αναφερθεί ένα από τα χαρακτηριστικά ενός ελκυστή είναι ότι ενδέχεται η διάσταση του να είναι

μορφοκλασματική(μη ακέραια) προκειμένου να χαρακτηριστεί η ιδιότητα της αυτοομοιότητας ενώ επιπροσθέτως η διάσταση αυτή είναι μικρότερου μεγέθους από την διάσταση του Ευκλείδειου χώρου που τον περιβάλλει. Σε κάθε περίπτωση η διάσταση του ελκυστή ακέραια και μη μας δείχνει τον ελάχιστο αριθμό μεταβλητών που συμβάλουν στο σύστημα και στον τρόπο εξέλιξης. Επίσης στην περίπτωση της μη ακέραιας διάστασης λαμβάνουμε πάντα ως δεδομένο ότι ο ελάχιστος αριθμός εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημά μας είναι ο επόμενος ακέραιος.

Η διάσταση συσχέτισης (*correlation dimension*) αποτελεί ένα από τα καταλληλότερα μέτρα για να εκφράσουν με επιτυχία την έννοια της μορφοκλασματικής διάστασης ενός ελκυστή. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι όπως η διάσταση πληροφορίας (*information dimension*) και η διάσταση μέτρησης κουτιών (*Box counting method*) όμως εμείς θα επιμείνουμε στην πρώτη μιας και επιλέχτηκε να χρησιμοποιηθεί στην συγκεκριμένη εργασία λόγω ευκολίας που προσφέρει στον υπολογισμό της. Για να συμβεί αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που εισήγαγαν οι Grassberger-Procaccia το 1983 οι οποίοι ουσιαστικά έκαναν χρήση του ολοκληρώματος συσχέτισης (*correlation integral*) το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα με την οποία 2 τυχαία σημεία του ανακατασκευασμένου χώρου απέχουν μια απόσταση μικρότερη από μια ακτίνα  $r$ . Παρακάτω παρουσιάζεται η σχέση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος συσχέτισης για μια χρονοσειρά:

$$C(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N \sum_{i=j+1}^N \theta(r - |x_i - x_j|) \quad (2.39)$$

- Όπου  $N$  είναι ο αριθμός των σημείων στον φασικό χώρο
- Όπου  $r$  είναι η απόσταση
- Όπου  $\theta$  είναι η συνάρτηση Heaviside ,  $\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x < 0 \\ 1 & \text{για } x \geq 0 \end{cases}$
- Όπου  $|x_i - x_j|$  είναι η απόσταση των σημείων  $x_i, x_j$

Όταν το  $N \rightarrow \infty$  και  $r \rightarrow 0$  μπορούμε να υπολογίσουμε την διάσταση συσχέτισης μέσω του νόμου κλιμάκωσης ως εξής :

$$v = \frac{d \log C(r)}{d \log r} \quad (2.40)$$

Τα παραπάνω όρια είναι λογικό να μην ικανοποιούνται όταν οι χρονοσειρές που μελετάμε έχουν περιορισμένο μήκος για το λόγο αυτό τα γραφήματα των  $\log C(r)$  με  $\log r$  αναμένουμε να σχηματίζουν την λεγόμενη περιοχή κλιμάκωσης μια ευθεία γραμμή δηλαδή σταθερή κλίση είτε να σχηματίζεται ευθεία γραμμή κοντά στην τιμή  $v$  στα γραφήματα των

παραγώγων. Τέλος προκειμένου να υπολογίσουμε την βέλτιστη διάσταση  $v$  θα πρέπει το οριζόντιο επίπεδο να παρατηρείται για διαφορετικές διαστάσεις εμβύθυνσης. Για τις μεγαλύτερες τιμές της διάστασης εμβύθυνσης το οριζόντιο επίπεδο θα εμφανίζεται για ίδιο ύψος  $v = v(m)$  στο γράφημα της διάστασης συσχέτισης με διάσταση εμβύθυνσης. Όταν ισχύει: (Κουγιουμτζής, 2018)

$$v = v(m) \quad (2.41)$$

### 2.2.8 Εκθέτες Lyapunov

Στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων είναι πολύ σημαντικό να μπορούμε να γνωρίζουμε το κατά πόσο το σύστημα που μελετάμε είναι χαοτικό ή όχι. Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία με τα οποία μπορούμε να αποφανθούμε για αυτό είναι η μελέτη και υπολογισμός των εκθετών Lyapunov οι οποίοι αποτελούν ένα μέτρο ποσοτικοποίησης της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες. Ουσιαστικά μελετάται η απόκλιση ή η σύγκλιση γειτονικών τροχιών στον φασικό χώρο ανάλογα το πρόσημο των τιμών. Ο αριθμός των εκθετών που υπάρχουν σε ένα δυναμικό σύστημα συμπίπτει με τον αριθμό των διατάσεων του συστήματος. Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι η ύπαρξη τουλάχιστον ενός θετικού εκθέτη σε ένα σύστημα αποτελεί ξεκάθαρη ένδειξη ύπαρξης χάους διότι ουσιαστικά φανερώνει απόκλιση των γειτονικών τροχιών που συνεπάγεται απώλεια προβλεψιμότητας μετά από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Όσο πιο μεγάλες είναι οι τιμές των εκθετών είναι σε ένα σημείο του συστήματος τόσο μεγαλύτερη είναι η πολυπλοκότητα και άρα έχουμε μεγαλύτερη απώλεια προβλεψιμότητας. Περισσότεροι από ένας εκθέτης ενδεχομένως να αποτελεί ένδειξη ύπαρξης υπερχάους. Αρνητικοί εκθέτες υποδηλώνουν ότι το σύστημα που μελετάται δεν παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά ενώ όταν οι εκθέτες προσεγγίζουν ή είναι μηδέν αυτό σημαίνει ότι το σύστημα παρουσιάζει θορυβώδες χάος. Υπάρχουν τρόποι να υπολογιστεί το ευρύτερο φάσμα των εκθετών αλλά στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τον υπολογισμό του μέγιστου εκθέτη που μας επιτρέπει να αποφανθούμε για την ύπαρξη χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματος. (Abarbanel, Brown, Sidorowich, Tsirring, 1993 · Tsonis, 1992)

Για να εξηγήσουμε την διαδικασία υπολογισμού των εκθετών αρχικά πρέπει να ορίσουμε τα σημεία  $\chi_i$  και  $\chi_i'$  τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικές τροχιές ενώ η απόσταση τους είναι :

$$\delta_0 = \|\chi_i - \chi_i'\| \quad (2.42)$$

Έπειτα από ένα χρονικό διάστημα η απόσταση τους αλλάζει σε

$$\delta_t = \|\chi_{i+t} - \chi_{i'+t}\| \quad (2.43)$$

Ο μέγιστος εκθέτης υπολογίζεται από την σχέση :

$$\delta_t \cong \delta_0 e^{\lambda_1 t}, \text{ για } t \rightarrow \infty \quad (2.44)$$

Είναι σημαντικό να αναφερθεί στο συγκεκριμένο σημείο πως είναι πρακτικά αδύνατο οι τροχιές να αποκλίνουν συνέχεια καθώς ο ελκυστής ξεδιπλώνεται σε μια συγκεκριμένη περιοχή του φασικού χώρου συνεπώς η παραπάνω σχέση έχει νόημα για χρόνους όπου έχουμε μικρές τιμές του  $\delta_t$  συνεπώς το  $\delta_0 \rightarrow 0$ . Στην μελέτη χρονοσειρών όμως επειδή έχουμε πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων ισχύουν οι παραπάνω περιορισμοί για τον λόγο αυτό ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία. Αρχικά ξεκινάμε έχοντας ως δεδομένο ένα σημείο του ελκυστή  $\chi_i$  και βρίσκουμε ένα κοντινό σημείο  $\chi_{i'}$  με απόσταση  $\delta_{0,i}$  και στη συνέχεια μετά από χρόνο  $t$  υπολογίζουμε την καινούργια απόσταση  $\delta_{t,i}$  που έχουν τα σημεία  $\chi_{i+t}$  και  $\chi_{i'+t}$ . Στη πορεία ορίζουμε νέο σημείο αναφοράς και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρι τελειώσουν τα σημεία. Τέλος υπολογίζουμε τον μέγιστο εκθέτη που είναι ο μέσος όρος της απόκλισης των σημείων ως εξής :

$$\lambda_1 = \frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^N \log \frac{\delta_{t,j}}{\delta_{0,j}} \quad (2.45)$$

Στην περίπτωση της μελέτης χρονοσειρών όπου τα σημεία τα λαμβάνουμε από τον ανακατασκευασμένο ελκυστή είναι απαραίτητο να ορίσουμε συμπληρωματικές παραμέτρους εκτός από τον χρόνο καθυστέρησης και της διάστασης εμβύθυνσης και τον χρόνο  $t$ . Όπως και στην περίπτωση της διάστασης συσχέτισης και ο υπολογισμός του  $\lambda_1$  παρουσιάζει ευαισθησία στο θόρυβο και λανθασμένες εκτιμήσεις για μικρότερο αριθμό παρατηρήσεων χρονοσειρών. Τέλος μια σημαντική προϋπόθεση για την παραπάνω εκτίμηση είναι ότι οι αποκλίσεις πρέπει να μεταβάλλονται εκθετικά όπως συμβαίνει σε χασοτικές χρονοσειρές διαφορετικά οι τιμές ενδέχεται να είναι θετικές ακόμη και στην περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία που μελετάμε δεν παρουσιάζει χασοτικές συμπεριφορές. Συνεπώς η συγκεκριμένη μέθοδος έχει περιορισμούς όπου απαιτούνται τροποποιήσεις στους διάφορους χασοτικούς αλγόριθμους προκειμένου να μας φέρουν τα απαιτούμενα αποτελέσματα δεν θα επεκταθούμε όμως. (Κουγιουμτζής, 2018)

### 2.2.9 Εκθέτης Hurst

Ο εκθέτης Hurst στην φρακτάλ γεωμετρία συμβολίζεται με  $H_q$  ή απλώς  $H$  και πήρε την ονομασία του προς τιμήν του Ludwig Otto Harold καθώς και του Edwin Hurst Holder.



Χρησιμοποιείται στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων ως ένα μέτρο ποσοτικοποίησης της μνήμης στις χρονοσειρές ουσιαστικά σχετίζεται άμεσα με την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και μετράει τον ρυθμό μείωσης του χρόνου καθυστέρησης ανά ζευγάρια παρατηρήσεων. Πιο συγκεκριμένα αποτελεί ένα δείκτη εξάρτησης ουσιαστικά μελετά την κατεύθυνση της τάσης της χρονοσειράς που μελετάται. Οι τιμές του εκθέτη κυμαίνονται μεταξύ 0 και 1 αλλά η ερμηνεία που δίνεται διαφέρει σημαντικά. Πιο συγκεκριμένα μεταξύ τιμών 0 και 0,5 συμπεραίνουμε ότι οι τιμές της χρονοσειράς μας έχουν αρνητική αυτοσυσχέτιση κάτι που συνεπάγεται εναλλαγή της τάσης οπότε είναι πιθανότερο υψηλότερες τιμές να ακολουθούνται από χαμηλότερες και το αντίθετο. Όταν η τιμή του εκθέτη κυμαίνεται μεταξύ 0,5 και 1 παρατηρούμε αντίθετα θετική αυτοσυσχέτιση κάτι που συνεπάγεται διατήρηση της υπάρχουσας τάσης για μεγάλα χρονικά διαστήματα οπότε είναι πιθανότερο χαμηλές τιμές να ακολουθούνται από χαμηλότερες ενώ το αντίστοιχο συμβαίνει και για τις υψηλές τιμές. Τέλος όταν ο εκθέτης λαμβάνει την τιμή 0,5 αυτό συνεπάγεται ασυσχέτιστες παρατηρήσεις.(Διαδικτυακή αναφορά [2])

Η μέθοδος που ακολουθείται στην παρούσα εργασία για τον υπολογισμό του εκθέτη σε μια χρηματοοικονομική χρονοσειρά  $Y_t$  όπου γνωρίζουμε τις μεταβολές είναι η λεγόμενη ανάλυση κλίμακας εύρους (*rescaled range analysis*). Αρχικά η χρονοσειρά χωρίζεται τμηματικά σε μήκος  $n$  και ισχύει για κάποια μήκη χρονικών παραθύρων :

$$N_n = \lfloor N/n \rfloor \quad (2.46)$$

Έπειτα για κάθε  $v = 0, \dots, N_n - 1$  υπολογίζεται το παρακάτω προφίλ ολοκλήρωσης :

$$Y_v(j) = \sum_{i=1}^j (x_{vn+i} - \bar{x}_{vn}) \quad (2.47)$$

- Όπου  $\bar{x}_{vn}$  αποτελεί τον τοπικό Μ.Ο για κάθε  $v$ .

Στην συνέχεια σε όλα τα τμήματα  $v$  υπολογίζεται το εύρος από το παραπάνω προφίλ ως εξής:

$$R_v(n) = \max_{j=1}^n Y_v(j) - \min_{j=1}^n Y_v(j) \quad (2.48)$$

Καθώς και η τυπική απόκλιση ως εξής :

$$S_v(n) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_v^2(j)} \quad (2.49)$$

Τέλος υπολογίζεται ο λόγος των δύο παραπάνω μεγεθών για όλα τα τμήματα ως εξής :

$$F_{RS}(n) = \frac{1}{N_n} \sum_{v=0}^{N_n-1} \frac{R_v(n)}{S_v(n)} \quad (2.50)$$

- Όπου  $F_{RS}(n)$  ουσιαστικά υπολογίζει το πόσο μεταβάλλονται οι τιμές των προφίλ της της  $Y_t$  για διάφορα αυξανόμενα παράθυρα που έχουν μήκος  $n$ .

Τέλος να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο πως ισχύει ο νόμος κλίμακας για μεγαλύτερα παράθυρα, πιο συγκεκριμένα :

$$F_{RS}(n) \sim n^H \quad (2.51)$$

### 2.2.10 Εντροπία κατά Kolmogorov (Kolmogorov entropy)

Πολλές φορές η συμπεριφορά του γενικότερου συστήματος επηρεάζεται από την τυχαία επιρροή επιμέρους τμημάτων του. Μια μικρή διαφοροποίηση στις αρχικές συνθήκες μπορεί να έχει πολύ μεγάλο αντίκτυπο στην τελική κατάσταση που θα ισορροπήσει το σύστημα. Τότε λέμε πως το σύστημα περιγράφεται με τη βοήθεια στοχαστικών δυναμικών διεργασιών. Ο Σινάι ανέπτυξε εργαλεία για τη μελέτη αυτής της συμπεριφοράς, ορίζοντας μάλιστα ποσότητες που παραμένουν αναλλοίωτες, ακόμη κι όταν μέρη του συστήματος φανερώνουν απρόβλεπτη συμπεριφορά. Με τη βοήθεια του καθηγητή του, Αντρέι Κολμογκόροφ, ενός από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του περασμένου αιώνα, όρισαν ένα νέο μέγεθος, την εντροπία Κολμογκόροφ-Σινάι. Η συμπεριφορά συστημάτων με εντροπία ( $K-S$ ) ίση με το μηδέν μπορεί να προβλεφθεί πλήρως, αλλιώς περιέχουν χαοτική συμπεριφορά. Η εντροπία ( $K-S$ ) σχετίζεται με το κατά πόσο είναι πιθανό σε ένα σύστημα να συμβούν όλες οι πιθανές καταστάσεις. Ένα σύστημα το οποίο είναι πιθανό να υιοθετήσει όλες αυτές τις διαφορετικές καταστάσεις κατά την εξέλιξη του ονομάζεται εργοδικό. (Kolmogorov, 1963)

### 2.2.11 Η μέθοδος των $K$ - κοντινότερο γειτόνων για προβλέψεις

Η μέθοδος το κοντινότερο γειτόνων υπάγεται στο γενικότερο των μοντέλων προβλεπτικής ικανότητας. Εφαρμόζεται σε μεγάλο βαθμό τα τελευταία χρόνια εξαιτίας της ραγδαίας εξέλιξης των υπολογιστών. Και στην πράξη τα αποτελέσματα της θεωρούνται ιδιαίτερα ενθαρρυντικά. Ενδιαφέρον της υπόθεσης είναι ότι η θεωρία της βασίζεται κυρίως στα Μαθηματικά και όχι σε κάποια πιθανό-θεωρητικά μοντέλα. Για τον λόγο ακριβώς αυτόν δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα βασιζόμενοι σε στατιστική ανάλυση αλλά αφήνουμε τα δεδομένα μιλάνε από μόνα τους. Η Ιδέα πίσω από την κατασκευή τους ουσιαστικά βασίζεται στην πρόβλεψη μιας καινούργιας τιμής βασιζόμενη στις υπάρχουσες γνωστές παρατηρήσεις που όμως μοιάζουν περισσότερο με την τιμή που θέλουν να προβλέψουμε. Αυτό πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας την μέση τιμή των γειτονικών παρατηρήσεων. Οι

παράμετροι που έχουμε να αποφασίσουμε είναι οι τιμές που θα δώσουμε στο  $K$  καθώς και αποστάσεις όπου θα χρησιμοποιηθούν για τους κοντινούς γείτονες. Η εκτίμηση της συγκεκριμένης τιμής υπολογίζεται ως εξής : (Πανάρετος, Ξεκαλάκη, 2000)

$$\hat{y} = \frac{1}{k} \sum_{x_i \in N_k(x)} y_i \quad (2.52)$$

- Όπου  $N_k(x)$  αντιπροσωπεύει τον σύνολο που βρίσκονται οι  $k$  πλησιέστερες παρατηρήσεις στο  $x$  όπου ζητείται η πρόβλεψη

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι προκειμένου να επιλέξουμε το καλύτερο  $k$  όπως οι σταθμισμένες αποστάσεις όπου δίνεται βαρύτητα σε παρεμφερείς τιμές που βρίσκονται σε κοντινές αποστάσεις. Θεωρείται εξαιρετικά σημαντικό γιατί ουσιαστικά επηρεάζει η γενικότερη προβλεπτική ικανότητα της μεθόδου. Μικρές τιμές στο  $k$  αποφέρουν μεγάλες διακυμάνσεις ενώ αντίθετα μεγάλες τιμές οδηγούν σε προβλέψεις μεγάλης μεροληψίας, για το λόγο αυτό ψάχνετε η βέλτιστη τιμή όπου θα επιφέρει μία ισορροπία. Ο αλγόριθμος γνωστός ως διασταυρωμένη επικύρωση (*Cross-validation*) έρχεται να φέρει λύση σε αυτό το πρόβλημα αλλά δεν θα επεκταθούμε περισσότερο. Όταν η μέθοδος χρησιμοποιείται για την κατάταξη παρατηρήσεων, οι προβλέψιμες τιμές που χρησιμοποιούνται είναι αυτές που εμφανίζονται συχνότερα στις γειτονικότερες τιμές. Γενικότερα η συγκεκριμένη μέθοδος έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με την παλινδρόμηση που χρησιμοποιούνται οι λεγόμενοι πυρήνες (*kernels*) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου τόσο στις παλινδρόμησης όσο και σε προβλήματα κατάταξης με το σύστημα πλειοψηφίας ψήφων. Η απόσταση των κοντινών γειτόνων υπάγονται υπολογίζονται με διαφορετικούς τρόπους ενδεικτικά θα αναφέρουμε τις μεθόδους Manhattan, Chebychev και την πιο ευρέως διαδεδομένη που είναι η ευκλείδεια απόσταση (*Euclidean distance*) αλλά δεν θα επεκταθούμε περισσότερο. (Καρλής, 2005)

Σημαντικό κομμάτι στη συγκεκριμένη μέθοδο όπως αναφέρθηκε προηγούμενος παίζει η λεγόμενη σταθμισμένη απόσταση. Πιο συγκεκριμένα δίνουμε τη δυνατότητα παρόμοιας επίδρασης στις κοντινότερες παρατηρήσεις. Εναλλακτικά δίνουμε μεγάλες τιμές του  $k$  δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στις γειτονικές τιμές από όπου ζητείται η πρόβλεψη. Αυτή η βαρύτητα για την οποία λέει για να γίνεται λόγος επιτυγχάνεται με την επιβολή ενός βάρους  $W$  στις κοντινές παρατηρήσεις από το οποίο θα γίνει πρόβλεψη. Μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$W(x, p_i) = \frac{\exp(-D(x, p_i))}{\sum_{i=1}^k \exp(-D(x, p_i))} \quad (2.53)$$

- Όπου  $D(x, p_i)$  η απόσταση της  $i$  παρατήρησης του  $p_i$  συνόλου τιμών και της άγνωστου σημείου  $x$
- Όπου  $k$  ο αριθμός κοντινών γειτόνων

Επίσης είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι τα βάρη ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση :

$$\sum_{i=1}^k W(x_0, x_i) = 1 \quad (2.54)$$

Σε προβλήματα παλινδρόμησης ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$y = \sum_{i=1}^k W(x_0, x_i) y_i \quad (2.55)$$

Όταν πρόκειται για προβλήματα κατάταξης χρησιμοποιούμε το μέγιστο της συγκεκριμένης εξίσωσης για κάθε μεταβλητή. Η τυπική απόκλιση στις παλινδρομήσεις προσδιορίζεται όταν το  $k$  είναι μεγαλύτερο της μονάδας με την χρήση της εξής σχέσης : (Hastie, Tibshirani, Friedman, 2001 ·Anderson, Finn, 1996)

$$error = \pm \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (y - y_i)^2} \quad (2.56)$$

## **2.3 Θεωρία τεχνητών νευρωνικών δικτύων (*Artificial neural network theory*)**

### **2.3.1 Ορισμός – Ιστορική εξέλιξη**

«Ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο (ΤΝΔ) είναι ένας παράλληλος και κατανεμημένος επεξεργαστής, το οποίο αποτελείται από έναν αριθμό από ανεξάρτητες υπολογιστικές μονάδες επεξεργασίας που ονομάζονται νευρώνες (*neurons*), οι οποίοι είναι διασυνδεδεμένοι μεταξύ τους σε στρώματα (*layers*)»(Aleksander, Morton, 1990).

Η τεράστια εξέλιξη των νευρωνικών δικτύων σε παγκόσμιο επίπεδο εμφανίζεται μετά το 1980 εξαιτίας της μεγάλης εξέλιξης που είχαν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές τα λογισμικά και οι αλγόριθμοι εκπαίδευσης. Όλα ξεκίνησαν από τους Pitts και McCulloch το 1943 όπου παρουσίασαν το πρώτο νευρωνικό δίκτυο προτείνοντας τους νευρώνες ως βασική μονάδα επεξεργασίας ενώ παράλληλα εξήγησαν τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε ένας αριθμός νευρώνων να συνδεθεί και να αποτελέσει ένα δίκτυο. Λίγα χρόνια αργότερα οι ίδιοι κύριοι παρουσίασαν ένα πιο εξελιγμένο μοντέλο για τον νευρώνα σύμφωνα με τον οποίο ήταν δυνατή η ύπαρξη πολλαπλών εισόδων σε ένα νευρώνα δίνοντας παράλληλα αποκλειστικά μια μοναδική έξοδο η οποία είναι αδύνατο να συνδεθεί με άλλες εξόδους παρά μόνο να η οποία μπορεί να οδηγηθεί σε άλλες εισόδους νευρώνων. Επίσης διαχώρισαν τις αποκλίσεις των νευρώνων σε κατηγορίες διεγερτικών και ανασταλτικών και εξήγησαν τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να λειτουργεί ταυτόχρονα σε όλο το εύρος του δικτύου. Προσπάθησαν επίσης να εισάγουν για πρώτη φορά την έννοια της μνήμης θεωρώντας πως κλειστές διαδρομές σημάτων στο δίκτυο μπορούν να δημιουργήσουν μηχανισμούς ανατροφοδότησης.(Διαδικτυακή πηγή [3])

Λίγα χρόνια μετά ο J. Von Neumann βασιζόμενος στο μοντέλο των Pitts και McCulloch παρουσίασε κάποια παραδείγματα υπολογιστικών μηχανών ανοίγοντας τον δρόμο για την δημιουργία τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Ο D. Hebb το 1949 εισήγαγε τον κανόνα μάθησης στον βιβλίο του με τίτλο ‘‘Η οργάνωση της συμπεριφοράς’’ (*The organization of behaviour*) μέσα στο οποίο αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο η συνδεσιμότητα των νευρώνων ενισχύεται με την εκμάθηση συγκεκριμένων προτύπων. Το 1957 μάλιστα ο F. Rosenblatt κατασκεύασε και παρουσίασε ένα μοντέλο αισθητήρα με δύο απλά επίπεδα εισόδου και εξόδου. Η χρησιμότητα καθώς και οι περιορισμοί του παρουσιάστηκαν από τους Minsky και Papert μέσω του βιβλίου τους (*Perceptrons*).

Η πρώτη φορά που κάποια μοντέλα νευρωνικών δικτύων προσπάθησαν να λύσουν ένα πρακτικό πρόβλημα ήρθε το 1959 όπου και αναπτύχθηκαν δύο καινούργια μοντέλα τα επονομαζόμενα "Madaline – Adaline" από τους Hoff και Widrow όπου προσπάθησαν να εξαλείψουν το πρόβλημα που δημιουργούνταν με την ηχώ στις τηλεφωνικές επικοινωνίες. Αρκετά χρόνια αργότερα αποδείχτηκε μαθηματικά σε μια εργασία του Hopfield το 1982 η ικανότητα των νευρωνικών δικτύων να χρησιμοποιούνται ως αποθηκευτικοί χώροι μνήμης.

Ο δρόμος πλέον ήταν ανοιχτός για την ανάπτυξη του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου υπήρχαν όμως αρκετά προβλήματα που έπρεπε να λυθούν. Ένα από αυτά ήταν η βελτίωση του τρόπου εκπαίδευσης των νευρωνικών δικτύων. Ο κανόνας διόρθωσης σφάλματος ήρθε να δώσει λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Η έννοια των σφαλμάτων στα νευρωνικά δίκτυα σχετίζεται με την απόκλιση που υπάρχει μεταξύ της τιμής της εξόδου και του του προσδοκώμενου στόχου που έχει τεθεί πριν την διαδικασία της εκπαίδευσης. Ουσιαστικά δόθηκε η δυνατότητα δημιουργίας ενός μηχανισμού που να ελέγχει και πραγματοποιεί διορθώσεις στα συναπτικά βάρη του δικτύου. (Rojas, 1996)

Ακόμα μια σημαντική έρευνα που βοήθησε στην εξέλιξη των νευρωνικών δικτύων ήρθε το 1986 όπου δημοσιεύτηκε το λεγόμενο έργο "Παράλληλη κατανεμημένη επεξεργασία" (*Parallel Distributed Processing*) από τους Rumelhart και McClelland οι οποίοι παρουσίασαν ένα νευρωνικό δίκτυο σαν παράλληλο επεξεργαστή πληροφοριών. Εισηγαν ουσιαστικά την ιδέα ύπαρξης επιπλέον στρωμάτων νευρώνων μεταξύ των εισόδων και της εξόδου. Στο έργο τους προτείνουν επίσης και μια επαναστατική για τα δεδομένα της εποχής μέθοδο εκπαίδευσης την λεγόμενη μέθοδο οπισθοδιάδοσης (*back-propagation*) που αποτελεί μέχρι και σήμερα ίσως την σπουδαιότερη μέθοδο εκπαίδευσης. Από τότε και στο εξής διοργανώνονται εκατοντάδες επιστημονικά συνέδρια να λαμβάνουν χώρα σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους προσπαθώντας να εξελίξουν τα δίκτυα καθώς και την αποτελεσματική εφαρμογή τους. (Haykin, 2010)

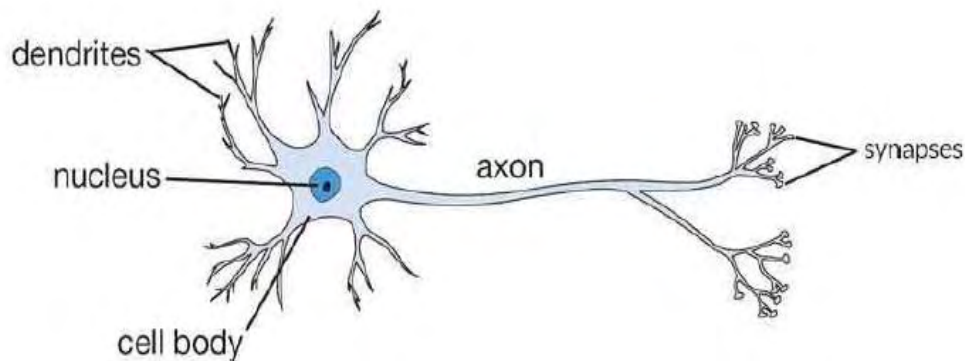
### **2.3.2 Έμπνευση από τα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα**

Η επιστημονική πρόοδος που έχει υπάρξει στο τομέα των νευρωνικών δικτύων οφείλεται στη διαφορετικό τρόπο λειτουργίας και επεξεργασίας πληροφοριών του ανθρώπινου εγκεφάλου με τους κλασικούς υπολογιστές. Συγκεκριμένα η δομή των τεχνικών νευρωνικών δικτύων είναι εμπνευσμένη από την βιολογία και πιο συγκεκριμένα από την δομή του ανθρώπινου εγκεφάλου για το λόγο αυτό είναι πολύ σημαντικό να την κατανοήσουμε προκειμένου να αντιληφθούμε καλύτερα τα τεχνικά νευρωνικά δίκτυα. (Διαμαντάρας, 2007)

Το σημαντικότερο δομικό στοιχείο του ανθρώπινου εγκεφάλου είναι ο νευρώνας ο οποίος είναι ένα συγκεκριμένο είδος κυττάρου και αποτελεί τη βασική μονάδα επεξεργασίας στο νευρικό σύστημα ενώ παράλληλα αποτελεί επίσης και την βασική μονάδα επεξεργασίας στα τεχνικά νευρωνικά δίκτυα. Υπάρχουν εκατομμύρια νευρώνες στους εγκεφάλους των ανθρώπων και των ζώων με πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα την υπάρξει περίπου  $10^9$  νευρώνων στον εγκέφαλο ενός μέσου ενήλικα όπου συνδέονται μεταξύ τους και δημιουργούν ένα τεράστιο δίκτυο που αποτελεί και κύκλωμα μνήμης. Η ανατομία ενός νευρώνα είναι εξής: (Anastasio, 2010)

1. Το κύριο σώμα (*body*) που είναι ο πυρήνας του νευρώνα.
2. Τους δενδρίτες (*dendrites*) τα οποία λαμβάνουν ηλεκτρικά σήματα κοντινών νευρώνων (σημεία εξόδου).
3. Τον άξονα (*axon*) που αποτελεί την έξοδο ενός νευρώνα και παράλληλα συνδέει νευρώνες μεταξύ τους με το να στέλνει ηλεκτρικά σήματα.
4. Στους δενδρίτες υπάρχουν και κάποια μικροσκοπικά κενά που ονομάζονται συνάψεις (*synapses*). Οι συνάψεις γενικότερα είναι κύστες που περιέχουν ιόντα νατρίου και καλίου και στο σημείο εκείνο ενώνονται οι διακλαδώσεις του ενός άξονα με τους δενδρίτες των άλλων νευρώνων. Το υγρό που περιέχεται μέσα στην κύστη εξυπηρετεί στην μετάδοση των ηλεκτρικών σημάτων για τον λόγο αυτόν εξαρτάται η ευκολία μετάδοσης από στο μέγεθος της καθώς και την απόσταση διασύνδεσης με άλλους δενδρίτες. Το ποσοστό της ενέργεια που μεταφέρεται αποτελεί και το λεγόμενο συναπτικό βάρος. Οι συνάψεις χωρίζονται στις ανασταλτικές και τις ενισχυτικές ανάλογα με το αποτέλεσμα που προκαλεί η μεταφορά του ηλεκτρικού σήματος στον γειτονικό νευρώνα. Όταν προκαλείται αύξηση της συχνότητας και ο νευρώνας ερεθίζεται τότε μιλάμε για μια ενισχυτική σύναψη ενώ αντίθετα όταν καταστέλλεται η δραστηριότητα μιλάμε για μια ανασταλτική σύναψη. (Βλαχάβας, Βασιλειάδης Κεφαλάς, Κόκκορας, Σακελλαρίου, 2006)

Παρακάτω παρουσιάζεται η εικόνα ενός νευρώνα.



**Σχήμα (2.3) Νευρώνας (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [4])**

Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά των βιολογικών νευρώνων είναι η μεγάλη ευαισθησία σε οποιασδήποτε μορφής ερέθισμα είτε αυτό σχετίζεται με ηλεκτρικά σήματα είτε με χημικές διεργασίες είτε με αυξομειώσεις στην θερμοκρασία. Ακόμη ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αποτελεί το γεγονός πως οι βιολογικοί νευρώνες θεωρούνται δυαδικά στοιχεία εξαιτίας του τρόπου λειτουργίας των νευρώνων όπου συχνά επιλέγουν να είναι ενεργοί ανταλλάσσοντας σήματα είτε απλά να παραμείνουν αδρανής. (Αργυράκης, 2001)

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να αναφερθούμε και σε ορισμένες διαφορές που παρατηρούνται στα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα σε σχέση με τα τεχνητά. Αρχικά υπάρχει μια μεγάλη διαφορά στις συνάψεις και στον τρόπο σύνδεσης. Στα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα είναι πολύπλοκες με μεγάλη ποικιλία στα μεγέθη εν αντιθέσει με τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα που είναι πολύ απλές. Όσον αφορά τον αριθμό των νευρώνων σε έναν ανθρώπινο εγκέφαλο για παράδειγμα, είναι πολύ μεγαλύτερος σε σχέση με τον αριθμό των νευρώνων που υπάρχουν σε ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο υπολογιστή. Αυτό συμβαίνει λόγω της ευχέρειας που διαθέτει ένας βιολογικός εγκέφαλος να χειριστεί μεγάλο αριθμό νευρώνων σε αντίθεση με ένα υπολογιστή όπου δε μπορεί να ανταπεξέλθει στην πολυπλοκότητα που δημιουργείται από αυτόν τον μεγάλο αριθμό. Ο μεγαλύτερος αριθμός νευρώνων και η μεγαλύτερη πολυπλοκότητα που παρατηρείται στα βιολογικά δίκτυα συνεπάγεται και ταχύτερη εκμάθηση και ευκολότερη εύρεση λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα αλλά δυσκολία εύρεσης λύσεων σε απλά ζητήματα εν αντιθέσει με τα τεχνητά δίκτυα όπου εκεί παρατηρείται μεγαλύτερος απαιτούμενος χρόνος εκπαίδευσης και ευχέρεια εύρεσης λύσεων σε απλά προβλήματα. Τέλος τα νευρωνικά δίκτυα μπορούνε κάνουνε συγχρονισμένες ενημερώσεις σε διακριτά χρονικά διαστήματα εν αντιθέσει



με τα βιολογικά όπου εκεί είναι δυνατή εκτός και η ασύγχρονες ενημερώσεις των νευρώνων σε συνεχή χρόνο.(Ρίζος, 1996)

### ***2.3.3 Πλεονεκτήματα τεχνητών νευρωνικών δικτύων και ικανότητα γενίκευσης***

Ένας από τους λόγους για τον οποίο τα νευρωνικά δίκτυα είναι ευρέως διαδεδομένα στον επιστημονικό χώρο είναι η υπολογιστική ισχύ που προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο είναι κατασκευασμένα δηλαδή την αρχιτεκτονική δομή τους καθώς και την ικανότητα τους να εκπαιδεύονται και να γενικεύουν αποτελέσματα. Όταν αναφερόμαστε στον όρο γενίκευση στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα ουσιαστικά αναφερόμαστε στην ικανότητα που έχουν τα δίκτυα να ανακαλύπτουν καινούργιους εισόδους κατά τη διάρκεια της διαδικασίας εκπαίδευσής τους. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ανακαλύπτονται λύσεις σε πολύπλοκα υπολογιστικά προβλήματα τα οποία υπό άλλες συνθήκες θα ήταν αδύνατον να βρεθούν. Γενικότερα τα νευρωνικά δίκτυα έχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες και πλεονεκτήματα όπου αναλύονται παρακάτω :

1. Μη γραμμικότητα – γραμμικότητα : Ουσιαστικά οι νευρώνες των τεχνικών νευρωνικών δικτύων μπορεί να είναι γραμμικοί ή και μη γραμμικοί. Είναι μία σημαντική ιδιότητα διότι τα συστήματα που μελετώνται και παράγουν τα σήματα εισόδου στους νευρώνες μπορεί να είναι μη γραμμικά.
2. Παράλληλη λειτουργία : Ο τρόπος με τον οποίο λειτουργούν τα νευρωνικά δίκτυα είναι παράλληλος διότι οι εργασίες επεξεργασίας που πραγματοποιούνται μοιράζονται μεταξύ των νευρώνων του δικτύου. Αυτός ο καταμερισμός εργασιών έχει ως αποτέλεσμα και την μείωση του χρόνου εξαγωγής αποτελεσμάτων διότι οι πληροφορίες επεξεργάζονται με μεγαλύτερη ταχύτητα.
3. Αντιστοιχία εισόδων – εξόδων : Στα νευρωνικά δίκτυα κατά την διάρκεια της διαδικασίας εκπαίδευσης τους εφαρμόζονται σύνολα παραδειγμάτων τα οποία αποτελούνται μια είσοδο και αντιστοιχίζονται σε έναν στόχο. Στην διαδικασία εκπαίδευσης ουσιαστικά επιτυγχάνεται ελαχιστοποίηση αυτής της απόκλισης δηλαδή αντιστοιχία των εισόδων - εξόδων μέσω της αυξομείωσης των συναπτικών βαρών των νευρώνων. Γενικότερα τα νευρωνικά δίκτυα έχουν την δυνατότητα να οργανώνουν με τέτοιο τρόπο της πληροφορίες σε κατάλληλες μορφές έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το καλύτερο αποτέλεσμα και αναπαριστούν και τελικά την σχέση των δεδομένων μεταξύ εισόδων – εξόδων.
4. Ανθεκτικότητα - Προσαρμοστικότητα : Τα νευρωνικά δίκτυα χαρακτηρίζονται από την αντοχή σε ενδεχόμενες τεχνικές βλάβες όπως για παράδειγμα μια ενδεχόμενη καταστροφή ενός αριθμού νευρώνων. Αυτό συμβαίνει λόγω της κατανομής των εργασιών που γίνεται

σε όλο το φάσμα του δικτύου κάνοντας δυνατή την ολοκλήρωση των διεργασιών με αποκλειστικό κόστος την ποιότητα των εξόδων. Επίσης σημαντικό αποτελεί το γεγονός πως ανεξαρτήτου περιβάλλοντος εργασιών τα τεχνικά νευρωνικά δίκτυα μπορούν να προσαρμόζονται εξίσου καλά και να επανεκπαιδευτούν προσαρμόζοντας τα συναπτικά τους βάρη στο καινούργιο περιβάλλον εργασίας.

5. Ομοιομορφία : Τα νευρωνικά δίκτυα χαρακτηρίζονται επίσης από την συγκεκριμένη ιδιότητα λόγου της δυνατότητας που έχουν να εφαρμόζονται σε διάφορα επιστημονικά πεδία καθώς η δομή τους με κύριο συστατικό τους νευρώνες καθώς επίσης και οι αλγόριθμοι εκπαίδευσης παραμένουν ίδιοι.
6. Κατανεμημένη μνήμη – Μνήμη συσχέτισης : Τα νευρωνικά δίκτυα διαθέτουν την λεγόμενη κατανεμημένη μνήμη λόγου της κατανομής της κωδικοποίησης μεταξύ των βαρών του δικτύου. Η μνήμη που διαθέτουν χαρακτηρίζεται επίσης και ως μνήμη συσχέτισης λόγου του τρόπου αποθήκευσης της πληροφορίας η οποία γίνεται μέσω συσχετίσεων που δημιουργούνται από την εκπαίδευση του δικτύου και συνεπώς η αποθήκευση και η ανάκληση των πληροφοριών πραγματοποιείται βάση περιεχομένου. Το συγκεκριμένο είδος μνήμης εξυπηρετεί στην καλύτερη οργάνωση αλλά και στον περιορισμό παραγωγής διαφορετικών εξόδων που αντιστοιχούν σε μικρές αποκλείσεις εσόδων.
7. Αναγνώριση προτύπων : Άλλη μια σημαντική ιδιότητα των νευρωνικών δικτύων σύμφωνα με την οποία καθίσταται δυνατή η αναγνώρισης προτύπων των δεδομένων που επεξεργάζονται κάτι το οποίο είναι εξαιρετικά σημαντικό σε χρονοσειρές και δεδομένα που εμφανίζουν θόρυβο. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι τα τεχνικά νευρωνικά δίκτυα είναι εκπαιδευμένα με κατάλληλο τρόπο πάνω σε συγκεκριμένα μοτίβα. (Διαμαντάρας, 2007)

Ως ικανότητα γενίκευσης ονομάζουμε την ιδιότητα των τεχνικών νευρωνικών δικτύων να αποδίδουν εξίσου καλά και με μεγάλο ποσοστό επιτυχίας σε άγνωστα πρότυπα εισόδων. Αποτελεί μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των τεχνικών νευρωνικών δικτύων διότι τα περισσότερα προβλήματα που καλούνται τα μοντέλα να αντιμετωπίσουν συνήθως εμφανίζουν απρόβλεπτες συμπεριφορές. Γενικότερα η ικανότητα γενίκευσης επηρεάζεται από ένα σύνολο παραγόντων :

1. Το μέγεθος της πολυπλοκότητας του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε.
2. Το συνολικό μέγεθος του τεχνικού νευρωνικού δικτύου που τελικά κατασκευάζεται.
3. Το πλήθος διανυσμάτων εκπαίδευσης και από την ποιότητα αναπαραστάσεις του χώρου προελεύσεως. Μεγαλύτερος αριθμός διανυσμάτων οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα

αλλά γενικότερα απαιτείται έρευνα για τον βέλτιστο αριθμό διανυσμάτων σε σχέση με το καταλληλότερο αντίστοιχο μεγέθους τεχνικού νευρωνικού δικτύου μεγέθους που βελτιστοποιηθεί την ικανότητα γενίκευσης.

### 2.3.4 Τεχνητοί νευρώνες

Οι τεχνητοί νευρώνες (*artificial neuron*) αποτελούν τα υπολογιστικά μοντέλα στα τεχνικά νευρωνικά δίκτυα αναλαμβάνοντας τον αντίστοιχο ρόλο των νευρώνων στα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα. Πιο συγκεκριμένα οι τεχνητοί νευρώνες λαμβάνουν ορισμένα σήματα στις εισόδους τους  $x_1, x_2, \dots, x_n$  τα οποία μετατρέπονται από ορισμένες τιμές βάρους  $w_i$  (*weight*) οι οποίες ουσιαστικά αναλαμβάνουν τον αντίστοιχο ρόλο των συνάψεων στα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα. Οι συγκεκριμένες τιμές μπορούμε να λαμβάνουμε θετικές ή αρνητικές τιμές αναλόγως το είδος λειτουργίας των συνάψεων. Αν πρόκειται για ενισχυτικές συνάψεις τότε οι τιμές των συναπτικών βαρών είναι θετικοί αριθμοί ενώ όταν πρόκειται για ανασταλτικές τότε λαμβάνουν αντίστοιχα αρνητικές τιμές.

Το κυρίως σώμα των τεχνικών νευρώνων αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος ονομάζεται αθροιστής (*sum*) όπου αθροίζονται τα σήματα των εσόδων τα οποία έχουν προηγουμένως επηρεαστεί από τα συνοπτικά βάρη και παράγουν μία ποσότητα  $S$ . Το δεύτερο μέρος αποτελείται από τις συναρτήσεις ενεργοποίησης (*activation function*) το οποίο ουσιαστικά φιλτράρει και διαμορφώνει τα σήματα εξόδων συναρτήσει της τιμής στο κατώφλι και του  $S$ . Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως ένας τεχνητός νευρώνας μπορεί να έχει περισσότερες από μία εξόδους αλλά η τιμές που θα παίρνουνε θα είναι πάντα η ίδια.

Εξωτερικά του τεχνικού νευρώνα εφαρμόζεται μία πόλωση  $b_k$  αυξομειώνει το αποτέλεσμα της συνάρτησης ενεργοποίησης ανάλογα με το πρόσημο. Ουσιαστικά η πόλωση ισούται με τα συνοπτικά Βάρη  $w_{k0}$  των εσόδων  $x_0$  που ισούται με 1. Παρακάτω παρουσιάζονται οι εξισώσεις όπου διατυπώνεται το μοντέλο του τεχνικού νευρώνα ως εξής :

$$U_k = \sum_{j=0}^m w_{kj}x_j \quad (2.57)$$

- Όπου  $j$  είναι ο δείκτης σύναψης
- Όπου  $x_j$  είναι το σήμα εισόδου της σύναψης  $j$
- Όπου  $k$  είναι ο δείκτης του νευρώνα

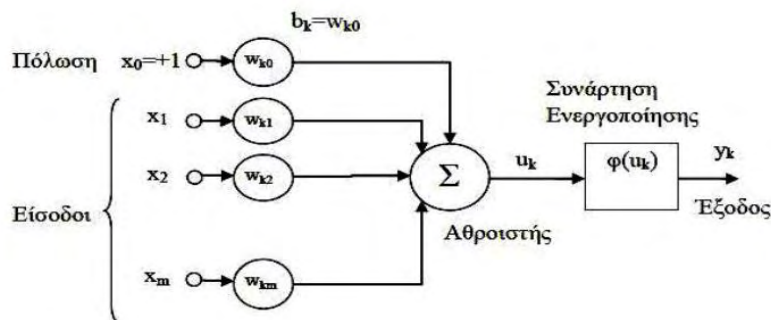
- Όπου  $w_{kj}$  είναι το συναπτικό βάρος

Και

$$y_k = \varphi(U_k) \quad (2.58)$$

- Όπου  $\varphi(U_k)$  είναι η έξοδος του νευρώνα στο πεδίο  $u$

Παρακάτω απεικονίζονται όλα όσα διατυπώθηκαν για τον τεχνητό νευρώνα



Σχήμα (2.4) Τεχνητός νευρώνας (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [5])

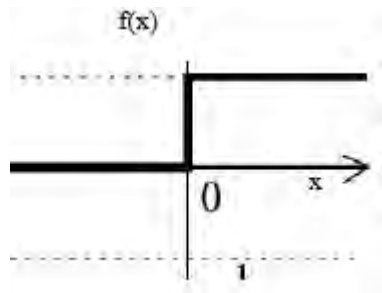
### 2.3.5 Συναρτήσεις ενεργοποίησης

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα οι συναρτήσεις ενεργοποιήσεως είναι οι μηχανισμοί εκείνοι στα τεχνικά νευρωνικά δίκτυα που λειτουργούν σαν φίλτρα και μετασχηματίζουν τις εξόδους των νευρώνων περιορίζοντας το εύρος τιμών τους. Επίσης σημαντικό να αναφερθεί ότι είναι δυνατή η ύπαρξη νευρώνων με διαφορετικές συναρτήσεις ενεργοποίησης σε ένα δίκτυο Τα βασικότερα είδη συναρτήσεων ενεργοποίησης είναι τα ακόλουθα : (Ρεφανίδης, 2011)

1. Βηματικές συναρτήσεις (*step function*) ή συνάρτηση κατωφλίου (*threshold function*) όπως η ακόλουθη όπου μπορεί να ισχύει :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Εναλλακτικά κάποια άλλη παρόμοιου είδους συνάρτηση. .Στους νευρώνες με αυτού του είδους συνάρτησης ενεργοποίησης η έξοδος μπορεί να είναι 0 ή 1. Το βασικό μειονέκτημα στις βηματικές συναρτήσεις αποτελεί η παράγωγος που απειρίζεται για τον λόγο αυτό προτιμώνται συναρτήσεις όπως η σιγμοειδής λόγω ότι είναι παραγωγίσιμες και συνεχείς .Παρακάτω παρουσιάζεται μια εικόνα βηματικής συνάρτησης :

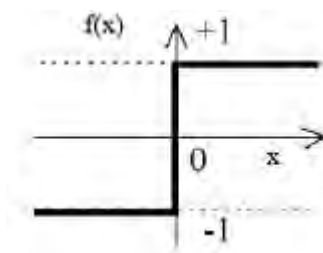


**Σχήμα (2.5) Βηματική συνάρτηση (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [5])**

2. Συναρτήσεις πρόσημου (*sign function*) όπως :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x > 0 \\ -1, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.60)$$

Στους νευρώνες με αυτού του είδους συνάρτησης ενεργοποίησης η έξοδος μπορεί να είναι -1 ή 1. Παρακάτω παρουσιάζεται μια εικόνα συνάρτησης πρόσημου :

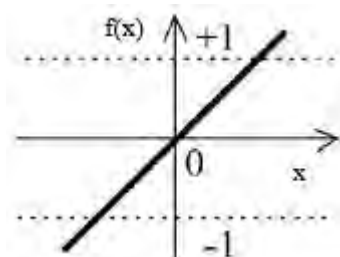


**Σχήμα (2.6) Συνάρτηση πρόσημου (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [5])**

3. Γραμμικές συναρτήσεις (*linear function*) όπως :

$$f(x) = bx \quad (2.61)$$

Το  $b$  αποτελεί την κλίση της ευθείας. Εναλλακτικά κάποια άλλη γραμμική συνάρτηση. Παρακάτω παρουσιάζεται μια εικόνα γραμμικής συνάρτησης :



**Σχήμα (2.7) Γραμμικής συνάρτησης (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [5])**

4. Μη γραμμικές συναρτήσεις (*non-linear function*) όπως οι σιγμοειδής (*sigmoid*) που η χρήση τους είναι ιδιαίτερα συχνή στα νευρωνικά δίκτυα όπως :

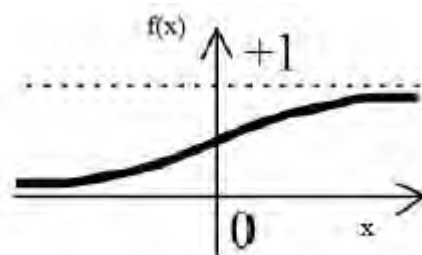
- Η λογιστική σιγμοειδής: όπου είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο πεδίο ορισμού της λαμβάνονται τιμές από 0 έως 1 :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (2.62)$$

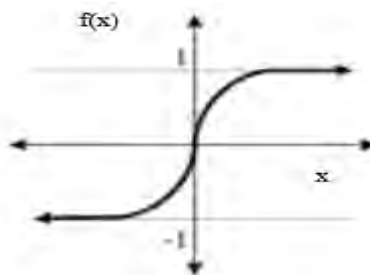
- Η υπερβολική εφαπτομένη:

$$f(x) = \tanh x \quad (2.63)$$

Παρακάτω παρουσιάζεται μια εικόνα σιγμοειδής συνάρτησης και εν συνεχεία μια υπερβολική εφαπτομένη :



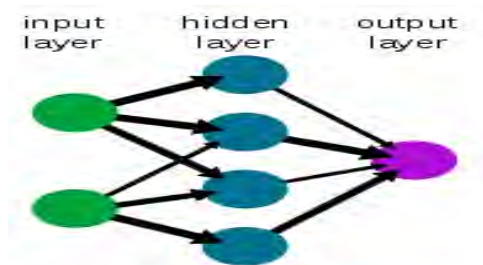
**Σχήμα (2.8) Σιγμοειδής συνάρτηση (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [5])**



**Σχήμα (2.9) Υπερβολική εφαπτομένη (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [6])**

### 2.3.6 Αρχιτεκτονικές δομές τεχνητών νευρωνικών δικτύων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στις προηγούμενες ενότητες η αρχιτεκτονική δομή είναι ιδιαίτερη σημαντική στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα. Ο λόγος είναι ότι βάσει αυτής καθορίζεται η διάταξη της συνδεσιμότητας ο αριθμός και οι τύποι των νευρώνων. Στο επίπεδο εισόδων τα σήματα των νευρώνων αποστέλλονται σε ένα ή και περισσότερα κρυφά επίπεδα όπου εκεί τα σήματα μετασχηματίζονται μέσω των συναπτικών βαρών. Το συνολικό άθροισμα των γινομένων αυτών μαζί και της πόλωσης εισάγονται στις συναρτήσεις ενεργοποίησης όπου τέλος αποφασίζετε αν θα έχουμε αποτέλεσμα στην έξοδο. (Λιβιέρης, 2008). Παρακάτω ακολουθεί μια ενδεικτική αρχιτεκτονική δομή (2-4-1).

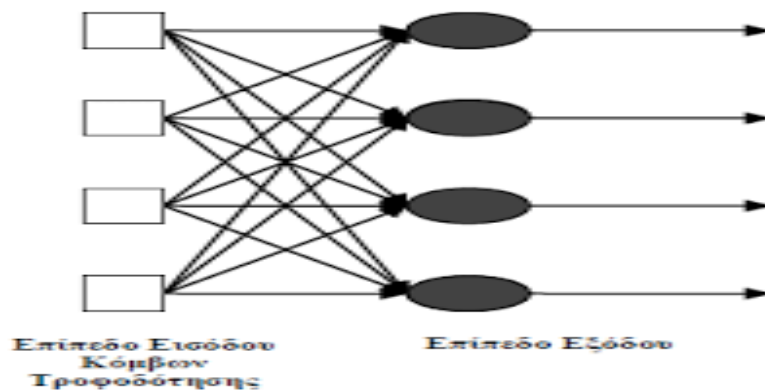


**Σχήμα (2.10) Νευρωνικό δίκτυο πολλαπλής πρόσθιας τροφοδότησης [2-4-1]**  
(Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [7])

Οι νευρώνες οργανώνονται σε διάφορα επίπεδα και οι δομές αυτών των επιπέδων εξαρτώνται από τους διάφορους αλγόριθμους εκμάθησης. Οι κατηγορίες των αρχιτεκτονικών δομών είναι οι ακόλουθες :

1. Δίκτυα εμπρός τροφοδότησης ενός επιπέδου (*feedforward*) : Τα συγκεκριμένα δίκτυα αποτελούν την απλούστερη δομή νευρωνικών δικτύων και αυτό διότι αποτελούνται από ένα επίπεδο εισόδων τα οποία κατευθύνουν το σήμα προς ένα επίπεδο εξόδου. Ουσιαστικά γίνεται μία απλή μεταφορά σήματος άνευ επεξεργασίας από το επίπεδο εισόδων στο επίπεδο εξόδου και για το λόγο αυτό ο χαρακτηρισμός "ενός επιπέδου" στη συγκεκριμένη κατηγορία αρχιτεκτονικής δομής αναφέρεται αποκλειστικά και προσμετράει το επίπεδο εξόδου και για το λόγο αυτό δεν υπολογίζεται σαν επιπλέον επίπεδο οι εισοδοί . (Διαμαντάρας, 2007)

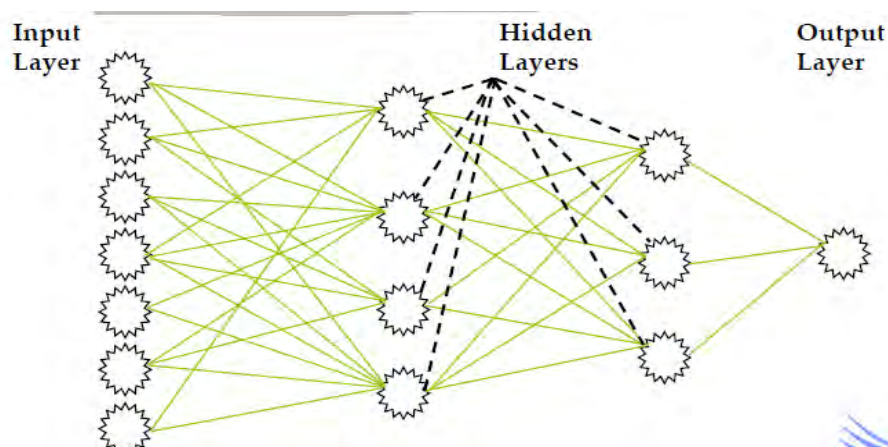
Παρακάτω ακολουθεί μια αναπαράσταση αρχιτεκτονικής δομής δικτύου εμπρός τροφοδότησης ενός επιπέδου.



**Σχήμα (2.11) Δίκτυα εμπρός τροφοδότησης ενός επιπέδου  
(Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [6])**

2. Δίκτυα εμπρός τροφοδότησης πολλαπλών επιπέδων (*MLP - feedforward*) : Το κύριο χαρακτηριστικό των συγκεκριμένων δικτύων είναι η ύπαρξη ενός ή περισσότερων κρυφών επιπέδων νευρώνων όπου οι εισόδοι τους είναι αποκλειστικά σήματα εξόδων προηγούμενων επιπέδων. Ουσιαστικά τα σήματα των εισόδων κατευθύνονται χρησιμοποιώντας τους κρυφούς νευρώνες προς τα επίπεδα εξόδων. Οι νευρώνες που αναλαμβάνουν υπολογιστικό ρόλο είναι ουσιαστικά τα επίπεδα εξόδων και κρυφών νευρώνων καθώς το σήμα μεταφέρεται άνευ επεξεργασίας από τις εισόδους. (Διαμαντάρας, 2007)

Παρακάτω ακολουθεί η αναπαράσταση ενός δικτύου εμπρός τροφοδότησης πολλαπλών επιπέδων.

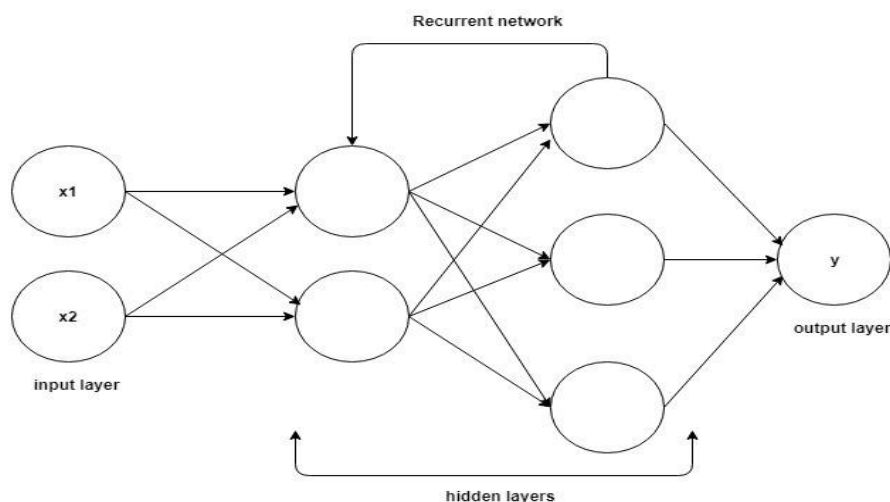




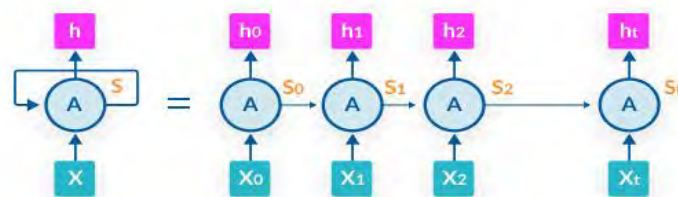
**Σχήμα (2.12) Νευρωνικό δίκτυο πολλαπλής πρόσθιας τροφοδότησης [7-4-3-1]  
(Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [8])**

3. Αναδρομικά δίκτυα (*recurrent neural networks*): Το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα της συγκεκριμένης κατηγορίας νευρωνικών δικτύων είναι η ύπαρξη βρόχων ανάδρασης (*feedback loop*) στη δομή τους. Πιο συγκεκριμένα είναι δυνατόν οι εξόδοι ενός επιπέδου νευρώνων να τροφοδοτούν τις εισόδους των υπολοίπων νευρώνων του δικτύου η και ακόμη ορισμένοι νευρώνες να χρησιμοποιούν τις ίδιες τους τις εξόδους ως καινούργιες εισόδους μία ιδιότητα που ονομάζεται αυτό-ανάδραση. Στις περιπτώσεις δικτύων πολλαπλών επιπέδων με περισσότερα από ένα κρυφά επίπεδα νευρώνων είναι δυνατόν να συνδέονται εκτός από τους νευρώνες εισόδων και εξόδων και οι κρυφοί νευρώνες μεταξύ των κρυφών επιπέδων κάτι που ουσιαστικά δημιουργεί μία ικανότητα εκμάθησης καθώς και βελτιωμένης απόδοσης. Ο στόχος της λειτουργίας των συγκεκριμένων δικτύων είναι να εκπαιδευτεί από δεδομένα που λαμβάνει ουσιαστικά από την ίδια του τη μνήμη δημιουργώντας παράλληλα καινούργιο περιεχόμενο βάσει αυτών. Γενικότερα λόγω της ύπαρξης των συγκεκριμένων βροχών ανάδρασης παρατηρούνται στοιχεία ύπαρξης χρονικής καθυστέρησης (*delay units*) κάτι που δίνει τη δυνατότητα σε ορισμένες συνδέσεις νευρώνων να συμπεριφέρονται μη γραμμικά εξυπηρετώντας συγκεκριμένες μελέτες δεδομένων με ανάλογο χαρακτήρα. (Διαμαντάρας, 2007)

Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένες αναπαραστάσεις αναδρομικών δικτύων.



**Σχήμα (2.13) Αναδρομικό δίκτυο (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [9])**



Recurrent Neural Network

Σχήμα (2.14) Αναδρομικό δίκτυο (Πηγή: Διαδικτυακή πηγή [10])

### 2.3.7 Εκμάθηση νευρωνικών δικτύων

Όπως έχει αναφερθεί και σε προηγούμενα κεφαλαία ο σκοπός της δημιουργίας των τεχνικών νευρωνικών δικτύων είναι η επίλυση περίπλοκων υπολογιστικών προβλημάτων όπως είναι η πρόβλεψη τιμών. Για να επιτευχθεί αυτό τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα υποβάλλονται σε μία διαδικασία εκμάθησης ή αλλιώς εκπαίδευσης (*training*). Η συγκεκριμένη διαδικασία αναλύεται σε δύο βασικούς πυλώνες στην ανάκληση και στη μάθηση. Όσον αφορά την ανάκληση (*recall*) ονομάζεται ουσιαστικά η διαδικασία υπολογισμού διανυσμάτων εξόδων τα οποία αντιστοιχούν συγκεκριμένες εισόδους και τιμές βαρών ενώ όσον αφορά την μάθηση (*learning*) ονομάζεται ο τρόπος με τον οποίο διαμορφώνονται οι τιμές στα βάρη ενός νευρωνικού δικτύου. (Διαμαντάρας, 2007)

Γενικότερα η εκμάθηση επιτυγχάνεται μέσω εισαγωγής συγκεκριμένων παραδειγμάτων όπου κατευθύνουν το δίκτυο προς την κατεύθυνση και στον τρόπο τον οποίο επιθυμείτε να γίνει η εκμάθηση καθώς και σε συγκεκριμένους αλγόριθμους εκπαίδευσης με τελικό σκοπό βελτίωσης της τελικής απόδοσης. Οι αλγόριθμοι εκπαίδευσης πρόκειται ουσιαστικά για επαναληπτικές διαδικασίες όπου εναλλάσσονται οι τιμές των βαρών με τελικό στόχο τη μείωση του σφάλματος της εξόδου σε σχέση με τις πραγματικές τιμές. Υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι εκμάθησης των νευρωνικών δικτύων και καθένας από αυτούς διαφέρει στον τρόπο εναλλαγής των τιμών των βαρών των νευρωνικών δικτύων και είναι οι ακόλουθοι:

1. Μάθηση με επίβλεψη (*supervised learning*): Είναι γνωστή και ως μάθηση με εκπαιδευτή και συγκεκριμένη διαδικασία είναι η συχνότερη μέθοδος που εφαρμόζεται σε τεχνητά νευρωνικά δίκτυα. Σε αυτή τη μέθοδο ζευγάρια παρατηρήσεων εισόδων επιθυμητών εξόδων προσφέροντας στο δίκτυο όπου παράγονται οι έξοδοι χρησιμοποιώντας τις τρέχουσες τιμές βαρών. Τα συγκεκριμένα ζευγάρια αποτελούν και τα παραδείγματα εισόδου-εξόδου που έχουν αναφερθεί και σε προηγούμενες ενότητες. Αυτό συμβαίνει διότι

ο εκπαιδευτής είναι σε θέση να γνωρίζει εκ των προτέρων τον λόγο της εκπαίδευσης και τον τύπο δεδομένων σε αντίθεση με το νευρωνικό δίκτυο. Ουσιαστικά τα συγκεκριμένα παραδείγματα αποτελούν διανύσματα εκπαίδευσης τα οποία θέτουν ένα επιθυμητό στόχο για το νευρωνικό δίκτυο και λειτουργούν ως σημείο αναφοράς για τα αρχικά βάρη (*weights*). Μετά την παραγωγή εξόδου υπολογίζεται το λεγόμενο σήμα σφάλματος ουσιαστικά αποτελεί την διαφορά της προβλεπόμενης τιμής από την επιθυμητή τιμή. Στην πορεία μέσω των επαναλήψεων διαδικασίας το δίκτυο επηρεαζόμενο από τα ζευγάρια τιμών καταστήματα στρωμάτων μεταβάλλει τις παραμέτρους αναπροσαρμόζοντας μαθηματικά βάρη, έως ότου φτάσει στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Το συγκεκριμένο είδος μάθησης χρησιμοποιείται κατά βάση σε παλινδρομήσεις με κυριότερο αλγόριθμο την λογική παλινδρόμηση (*logistic regression*) αλλά υπάρχουν και αλγόριθμοι όπως οι υποστήριξης μηχανικών φορέων (*support vector machines*), τυχαία δάση (*random forests*) κ.α. (Διαμαντάρας, 2007)

2. Μάθηση χωρίς επίβλεψη (*unsupervised learning*): Στη συγκεκριμένη κατηγορία το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα είναι η αυτοοργάνωση που γίνεται στο κοινωνικό δίκτυο βάσει των εισόδων που δίνονται καθώς δεν υπάρχουν αντίστοιχες εξόδους. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η ισχυρή αντίδραση στο νευρώνα και δεν υπάρχει εξωτερική εκπαίδευση που να επιβλέπει τη διαδικασία και να θέτει επιθυμητούς στόχους. Το δίκτυο από μόνο του διαπράττει εσωτερικό έλεγχο ψάχνοντας και προσπαθεί τα αποτελέσματα που θα παραχθούν να είναι παρόμοια με τις εισόδους πρόκειται ουσιαστικά για ένα μηχανισμό ανάδρασης όπου διορθώνει τα τελικά σφάλματα έως ότου οι τιμές στα συνοπτικά βάρη παραμείνουν σταθερές όπου τελικά ολοκληρώνεται η εκπαίδευση. (Διαμαντάρας, 2007)
3. Βαθμολογημένη μάθηση (*graded learning*): Στη συγκεκριμένη κατηγορία δίνονται στο δίκτυο ορισμένα πρότυπα εισόδων με τη διαφορά ότι σε αυτή την περίπτωση δεν δίνονται οι αντίστοιχοι έξοδοι που ουσιαστικά αποτελούν τους επιθυμητούς στόχους του δικτύου. Οι έξοδοι χαρακτηρίζονται βάσει αριθμητικής κλίμακας και ως εκ τούτου υπάρχει αναπροσαρμογή στα συνοπτικά βάρη βάσει της συγκεκριμένης κλίμακας. Ουσιαστικά υπάρχει ένας μηχανισμός που χαρακτηρίζει η συμπεριφορά των εξόδων με τελικό στόχο την επίτευξη ενός επιθυμητού αποτελέσματος. Το κριτήριο αυτό ονομάζεται ένα ενισχυτικό σήμα (*reinforcement signal*) επιβραβεύοντας τις εξόδους που χαρακτηρίζονται ως "καλές" τιμώντας τις εξόδους που χαρακτηρίζονται ως "κακές". Ουσιαστικά τα συναπτικά βάρη αναπροσαρμόζονται βάσει του συγκεκριμένου σήματος αυξάνοντας ή μειώνοντας τις τιμές ανάλογα με το χαρακτηρισμό της συμπεριφοράς. Βιβλιογραφικά αναφέρουμε ότι η βαθμολογημένη μάθηση χωρίζεται σε συσχετιστική και σε μη-

συσχετιστική ανάλογα με τις πληροφορίες που δίνονται από τον εκπαιδευτή αλλά δεν θα επεκταθούμε περισσότερο. (Διαμαντάρας, 2007)

### 2.3.8 Μέτρα απόδοσης τεχνικών νευρωνικών δικτύων

Προκειμένου να μετρήσουμε το βαθμό εκμάθησης αλλά κυρίως και γενικεύσεις των εκτιμώμενων τεχνικών νευρωνικών δικτύων χρησιμοποιούνται κάποια μέτρα απόδοσης που σχετίζονται με τα σφάλματα των παραγομένων εξόδων. Τα πιο συνηθισμένα είναι το μέσο απόλυτο σφάλμα (*Mean Absolute Error - MAE*), το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*Mean Square Error - MSE*), το σφάλμα ρίζας μέσου τετραγωνικού σφάλματος (*RMSE*), το κανονικοποιημένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*Normalized Mean Square Error - NMSE*), το σφάλμα ρίζας κανονικοποιημένου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (*Normalized Root Mean Square Error - NRMSE*) και πολλές φορές και ο συντελεστής συσχέτισης R (*Correlation Coefficient*). Παρακάτω σύμφωνα με το βιβλίο των Hyndman και Koehler (2006) παρουσιάζονται αναλυτικά οι μαθηματικοί τύποι των αντίστοιχων εκτός από τον συντελεστή συσχέτισης που έχει παρουσιαστεί σε προηγούμενη ενότητα (κεφάλαιο 2.1.6, εξίσωση 2.17).

1. Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*Mean Square Error - MSE*): Χρησιμοποιείται με στόχο την ποσοτικοποίηση αποκλίσεις εκτιμώμενης τιμής ένα της πραγματικής τιμής και μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$MSE = \frac{\sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^N (d_{ij} - y_{ij})^2}{NP} \quad (2.64)$$

- Όπου  $N$  είναι ο αριθμός των δειγμάτων
- Όπου  $P$  είναι ο αριθμός επεξεργασμένων στοιχείων στις εξόδους δικτύου
- Όπου  $y_{ij}$  είναι η συγκεκριμένη έξοδος του δικτύου για την είσοδο  $i$  και το επεξεργασμένο στοιχείο  $j$
- Όπου  $d_{ij}$  είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα εξόδου του δικτύου για την είσοδο  $i$  και το επεξεργασμένο στοιχείο  $j$

2. Σφάλμα ρίζας μέσου τετραγωνικού σφάλματος (*Root Mean Square Error - RMSE*): Αποτελεί την ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$RMSE = \sqrt{MSE} \quad (2.65)$$

3. Κανονικοποιημένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*Normalised Mean Square Error -NMSE*): Όπως και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα χρησιμοποιείται για τον ίδιο λόγο και μαθηματικά εκφράζεται ως εξής:

$$NMSE = \frac{P N MSE}{\sum_{j=0}^P \frac{N \sum_{i=0}^N d_{ij}^2 - (\sum_{i=0}^N d_{ij})^2}{N}} \quad (2.66)$$

4. Σφάλμα ρίζας κανονικοποιημένο μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*Normalised Root Mean Square Error -NRMSE*): Αποτελεί την ρίζα του κανονικοποιημένο μέσου τετραγωνικού σφάλματος και μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$NRMSE = \frac{NMSE}{Y_{max} - Y_{min}} \quad (2.67)$$

5. Μέσο απόλυτο σφάλμα (*Mean absolute error - MAE*) : Αποτελεί το μέτρο διαφοράς δύο τιμών μαθηματικά εκφράζεται ως εξής :

$$MAE = |Y_i - \hat{Y}_i| \quad (2.68)$$

### 2.3.9 Επεξεργασία δεδομένων για την εκπαίδευση τεχνικών νευρωνικών δικτύων

Προκειμένου να βελτιστοποιήσουμε την απόδοση της εκπαίδευσης των τεχνικών νευρωνικών δικτύων απαιτείται προετοιμασία και κατάλληλη επεξεργασία πάνω στα δεδομένα που θέλουμε να προβλέψουμε. Για το συγκεκριμένο σκοπό θα ακολουθήσουμε μία διαδικασία τριών σταδίων όπου το πρώτο θα καθορίσουμε τα δεδομένα μας, στο δεύτερο θα τα φιλτράρουμε και στο τελευταίο θα τα προ-επεξεργαστούμε προτού αρχίσει εκπαίδευση. (Σουσούνης, 2011)

Αναλυτικότερα στο πρώτο στάδιο (*1<sup>st</sup> stage*) ουσιαστικά καθορίζουν τα δεδομένα μας όμως πρέπει να είμαστε σαφείς και να προσδιορίζουμε πλήρως το πρόβλημα που μελετάμε ούτως ώστε να καθοριστούν πλήρως είσοδοι του νευρωνικού δικτύου. Συνήθως όταν μελετάμε αρκετά πολύπλοκα προβλήματα σε ένα μόνο νευρωνικό δίκτυο πρακτικά θα χρειαζόμασταν ένα πολύ μεγάλο μέγεθος τεχνικού νευρωνικού δικτύου. Το συγκεκριμένο ΤΝΔ θα απαιτούσε μεγάλο όγκο υπολογιστικής ισχύς καθώς και μεγάλο χρονικό διάστημα προκειμένου να μας δώσει τα κατάλληλα συμπεράσματα ,διότι κάθε είσοδος αναπαριστάτε ουσιαστικά στο δίκτυο με την μορφή ενός κόμβου. Εξαιτίας αυτού προσπαθούμε να βρούμε έναν κατάλληλο αριθμό εισόδου στον νευρωνικό δίκτυο οι οποίοι τα αποδίδουν καλύτερα τη σχέση μεταξύ εισόδου-

εξόδου. Εφόσον ξεκινήσει η εκπαίδευση του τεχνικού νευρωνικού δικτύου και μετά από κάποιες επαναλήψεις τα συνοπτικά βάρη μεταβάλλονται ανάλογα με το πόσο σημαντικό ρόλο παίζουνε κάποιες εισόδοι στη γενική συνεισφορά. Έτσι οι τιμές των συνοπτικών βαρών θα είναι μικρότερη στις εισόδους που ουσιαστικά δεν αποδεικνύονται σημαντικές. (Σουσουίνης, 2011)

Στο δεύτερο στάδιο (*2<sup>nd</sup> stage*) όπου φιλτράρονται τα δεδομένα όπου ουσιαστικά ψάχνουμε να βρούμε δεδομένα τα οποία έχουν ακανόνιστη συμπεριφορά σε σχέση με τα υπόλοιπα δεδομένα που έχουμε εισάγει προκειμένου να αποκλειστούν. (Σουσουίνης, 2011)

Τέλος στο τρίτο και τελευταίο στάδιο (*3<sup>rd</sup> stage*) πριν την έναρξη της εκπαίδευσης κοινωνικοποιούμε τα δεδομένα χρησιμοποιώντας ένα εύρος τιμών συνήθως από 0 έως 1 η και από -1 έως 1. Να σημειωθεί ότι το συγκεκριμένο στάδιο δεν συμβαίνει πάντα. Είναι πάρα πολύ σημαντικό επίσης και ο αριθμός των δεδομένων που χρησιμοποιούνται, καθώς συνήθως μεγαλύτερος αριθμός δεδομένων δίνει και καλύτερα αποτελέσματα αν και ο υπέροχος όγκος συσχετίζεται με προβλήματα υπολογιστικής ισχύς και χρονικής διάρκειας επεξεργασίας. Συνήθως επίσης στο συγκεκριμένο στάδιο τα δεδομένα μας χωρίζονται σε τρία σετ και θα χρησιμοποιηθούν κατάλληλα με κάποιους συγκεκριμένους τρόπους στη συνέχεια της διαδικασίας ως εξής : (Σουσουίνης, 2011)

1. Σετ Εκπαίδευσης δεδομένων (*training data set*) : Πρόκειται για τα δεδομένα τα οποία πρόκειται να χρησιμοποιηθούν από τον αλγόριθμο προκειμένου να υπολογιστεί η κλίση και στη συνέχεια να μεταβληθούν συνοπτικά βάρη των νευρώνων κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης. (Σουσουίνης, 2011)
2. Σετ επαλήθευσης δεδομένων (*validation data set*): Πρόκειται για τα δεδομένα τα οποία θα υπολογιστούν και θα παρακολουθούν τα σφάλματα εκπαίδευσης. Σφάλμα εκπαίδευσης είναι ουσιαστικά οι αποκλίσεις των εξόδων από τους επιθυμητούς εξόδους το οποίο μειώνεται με την πάροδο των επαναλήψεων. Οι τιμές των συνοπτικών βαρών για τις οποίες το σφάλμα επαλήθευσης είναι το μικρότερο διατηρούνται ως καταλληλότερες. Τέλος το σφάλμα υπολογίζεται σε κάθε επανάληψη και η μάθηση τερματίζεται με την πάροδο ενός αριθμού αυτών εφόσον δεν έχει προκύψει μείωση. (Σουσουίνης, 2011)
3. Σετ εφαρμογής δεδομένων (*test data set*): Τα συγκεκριμένα δεδομένα παραμένουν αχρησιμοποίητα καθ' όλη τη διάρκεια της εκπαίδευσης και ως εκ τούτου αφήνουν ανεπηρέαστη την προσαρμογή των συνοπτικών βαρών ενώ χρησιμοποιούνται

αποκλειστικά προκειμένου να ελέγξουν την επίδοση του τεχνικού νευρωνικού δικτύου καθώς και την ικανότητα γενίκευσης σε άγνωστα πρότυπα. (Σουσουνής, 2011)

Ένα από τα βασικότερα προβλήματα που παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων είναι η υπερ-εκπαίδευση ή αλλιώς υπέρ-προσαρμογή (*Over training*). Το συγκεκριμένο πρόβλημα σχετίζεται με την υπερβολική εκπαίδευση που λαμβάνει το νευρωνικό δίκτυο πάνω στα σετ δεδομένων εκπαίδευσης και τα σφάλματα που προκύπτουν κατά τη λήξη της διαδικασίας είναι πολύ μικρά με αποτέλεσμα να οδηγεί σε άσχημα αποτελέσματα γενίκευσης. Το πρόβλημα της υπέρ προσαρμογής σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό δεδομένων καθώς και τον αριθμό των κρυφών επιπέδων νευρώνων καθώς σε πολύπλοκα δεδομένα απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός κρυφών νευρώνων. Αντίθετα η χρήση λιγότερων κρυφών νευρώνων οδηγεί στο πρόβλημα της αδυναμίας μάθησης. Συνεπώς σε κάθε περίπτωση πρέπει να διεξαχθεί έρευνα προκειμένου να βρεθεί ο κατάλληλος αριθμός εισόδων που θα χρησιμοποιηθούν και θα μας βοηθήσει στην εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων. Ένας τρόπος για να αποφευχθεί το πρόβλημα της υπερ-εκπαίδευσης είναι η μέθοδος της πρόωρης διακοπής (*early stopping*) του δικτύου όπου ουσιαστικά θέτουμε από την αρχή έναν ορισμένο αριθμό επαναλήψεων εκπαίδευσης του δικτύου. Εμπειρικές μελέτες δείχνουν πως οι 500 είναι ένας ιδανικός αριθμός και αυτός είναι ο αριθμός που θα χρησιμοποιηθεί και στη συγκεκριμένη εργασία.(Σουσουνής, 2011)

### **2.3.10 Κανόνας μάθησης δέλτα (*Delta rule*)**

Ο κανόνας μάθησης Δέλτα ή αλλιώς όπως είναι γνωστός και ως αλγόριθμος ελάχιστων μέσων τετραγώνων (*Least Mean Square - LMS*) χρησιμοποιείται προκειμένου να δώσει λύση στο πρόβλημα εύρεσης του καλύτερου γραμμικού φίλτρου και εφευρέθηκε το 1960 από τους Windrow και Hoff. Η λειτουργία του συγκεκριμένου αλγόριθμο βασίζεται σε ένα μοντέλο γραμμικού νευρώνα και έχει χρησιμοποιηθεί σε πολλές εφαρμογές μέχρι σήμερα καθώς θεωρείται ένα από τα σπουδαιότερα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στο κομμάτι της επεξεργασίας σημάτων στα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα.

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τον κανόνα μάθησης θα θεωρήσουμε ότι μελετάμε ένα τεχνητό νευρωνικό δίκτυο με τρία στρώματα και ορίζουμε τα εξής παρακάτω σύμφωνα με τον Καμπουρλάζο (2015) :

- Όπου  $W_1$  θα θεωρούμε από δω και στο εξής τον πίνακα βαρών των συνδέσμων στρώματος εισόδου-κρυφού στρώματος

- Όπου  $W_2$  θα θεωρούμε τον πίνακα βαρών συνδέσεων κρυφού στρώματος-στρώματος εξόδου.

- θέτουμε την γραμμική συνάρτηση μεταφοράς νευρώνων ως εξής :

$$f(\sigma) = \sigma \quad (2.69)$$

- Όπου  $x$  θα είναι το διάνυσμα εισόδου στο τεχνικό νευρωνικό δίκτυο

- Όπου  $h$  είναι το διάνυσμα που θα υπολογίζεται από τη σχέση :

$$h = W_1 x \quad (2.70)$$

θα αποτελεί το διάνυσμα των εξόδων των νευρώνων του κρυφού στρώματος

- Όπου  $o$  είναι το διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τις εξόδους των νευρώνων του στρώματος εξόδου και θα υπολογίζεται από την σχέση :

$$o = W_2 h = W_2 W_1 x = W_x \quad (2.71)$$

Προκύπτει επίσης και από τα παραπάνω η εξής σχέση :

$$W = W_2 W_1 \quad (2.72)$$

Κρατάμε μέχρι στιγμής τις παραπάνω πληροφορίες διότι θα είναι χρήσιμες για την συνέχεια. Σύμφωνα με τον Καμπουρλάζο (2015) «θεωρούμε τα ζευγάρια  $(i_p, t_p)$ , με  $p \in \{1, \dots, n\}$  τα οποία θα είναι τα διανύσματα εισόδου- εξόδου που προορίζονται για μάθηση από ένα τεχνικό νευρωνικό δίκτυο 2 στρωμάτων με γραμμικές συναρτήσεις μεταφοράς νευρώνων. Επίσης θεωρούμε ότι το σύμβολο  $t_{pj}$  δηλώνει την τιμή του  $j$ -στου στοιχείου του επιθυμητού διανύσματος εξόδου  $t_p$  ενώ το σύμβολο  $i_{pi}$  δηλώνει την τιμή του  $i$  – στου στοιχείου του διανύσματος εισόδου  $i_p$ . Ο κανόνας δέλτα υλοποιείται με το γινόμενο  $t_{pj}i_{pi}$  των ερεθισμάτων  $t_{pj}$  και  $i_{pi}$  που διεγείρουν τους δύο νευρώνες, αντίστοιχα, οι οποίοι ενώνονται με σύνδεσμο βάρους  $w_{ji}$ . Ο κανόνας Δέλτα μεταβάλλει ένα βάρος  $w_{ji}$  κατά ποσότητα ανάλογη με το γινόμενο  $t_{pj}$  επί  $i_{pi}$ » δηλαδή:

$$\Delta_p w_{ji} = t_{pj} i_{pi} \quad (2.73)$$

Ο πίνακας  $W$  αντιπροσωπεύει τα βάρη που δημιουργούνται από τα διανύσματα  $(i_p, t_p)$  και μεταβάλλεται σύμφωνα με τον κανόνα δέλτα ως εξής :

$$\Delta_p W = t_p i_p^T \quad (2.74)$$

Αρχικά θεωρούμε ότι το  $W$  είναι ίσο με το μηδέν διότι δεν υπάρχουν βάρη αλλά μετά την εμφάνιση των διανυσμάτων  $(i_p, t_p)$  ο πίνακας βαρών μετατρέπεται ως εξής :



$$W = \sum_{p=1}^n t_p i_p^T \quad (2.75)$$

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να αναφέρουμε πως χαρακτηρίζονται ως ορθοκανονικά τα διανύσματα εισόδου  $i_p$ . Αυτό πρακτικά έχει επίπτωση στην τιμή του εσωτερικού γινομένου των  $i_p i_q$  ως εξής :

$$1. \text{ Αν ισχύει } p \neq q \text{ τότε } i_p \cdot i_q = 0 \quad (2.76)$$

$$2. \text{ Αν ισχύει } p = q \text{ τότε } i_p \cdot i_q = 1 \quad (2.77)$$

Οι παραπάνω σχέσεις σημαίνουν πως τα συγκεκριμένα διανύσματα έχουν μήκος που ισούται με 1 καθώς επίσης και ότι είναι κάθετα ανά δυάδες μεταξύ τους. Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στην ακόλουθη σχέση :

$$W i_k = \left( \sum_{p=1}^n t_p i_p^T \right) \cdot i_k = t_k \quad (2.78)$$

Στην ουσία η παραπάνω σχέση φανερώνει την ιδιότητα των τεχνικών νευρωνικών δικτύων να αποστηθίζουν τα εισερχόμενα διανύσματα με τα οποία εκπαιδεύονται με τελικό στόχο ο υπολογισμός ενός διανύσματος  $t_p$  στην έξοδο κάθε φορά που εφαρμόζεται ένα αντίστοιχο διάνυσμα  $i_p$  στις εισόδους πάντα με  $p \in \{1, \dots, n\}$ . Επίσης υπάρχει η προϋπόθεση ύπαρξης γραμμικής ανεξαρτησίας προκειμένου να είναι εγγυημένο το αποτέλεσμα επιτυχημένης μάθησης των διανυσμάτων  $i_p i_q$  από τον κανόνα. Στην περίπτωση που τα εισερχόμενα διανύσματα  $i_p$  είναι μη γραμμικός ανεξάρτητα τότε ο βέλτιστος υπολογισμός των βαρών του πίνακα  $W$  γίνεται με την ακόλουθη μαθηματική σχέση :

$$W(n) = W(n-1) + \eta \delta(n) i^T(n) \quad (2.79)$$

- Όπου  $W(n)$  είναι ο πίνακας βαρών για το  $n$ -οστό διάνυσμα εισόδου  $i(n)$
- Όπου  $\eta$  είναι ο ρυθμός μάθησης (*learning rate*)
- Όπου  $\delta(n)$  αντιπροσωπεύει την διαφορά του επιθυμητού διανύσματος εξόδου  $t(n)$  με το πραγματικό διάνυσμα που εξέρχεται  $o(n)$  και ορίζεται ως :

$$\delta(n) = t(n) - o(n) = t(n) - W(n-1)i(n) \quad (2.80)$$

Και το  $o(n)$  και ορίζεται ως :

$$o(n) = W(n-1)i(n) \quad (2.81)$$

Μέχρι αυτό το σημείο ο κανόνας δέλτα έχει αναλυθεί αναφορικά με την αναπαράσταση των νευρώνων σε ένα τεχνικό νευρωνικό δίκτυο όπου ουσιαστικά ερμηνεύεται ο τρόπος με τον οποίο διεγείρονται τα διανύσματα των διαφόρων στρωμάτων. Η ανάλυση του κανόνα θα συνεχιστεί για την αναπαράσταση προτύπων (pattern representation) όπου σε αυτήν την

περίπτωση ερμηνεύονται τα διανύσματα των στρωμάτων ως οντότητες (έννοιες). Στο συγκεκριμένο πεδίο και εδώ προκύπτει ένας αντίστοιχος κανόνας όπως και στις αναπαραστάσεις νευρώνων όπου είναι πολύ σημαντικός ο συσχετισμός που υπάρχει μεταξύ των διανυσμάτων στις εισόδους. Ξεκινώντας την ανάλυση μας και σε αυτό το πεδίο αρχικά θέτουμε έναν πίνακα  $P_I$  όπου μετασχηματίζονται με γραμμικό τρόπο διάφορα διανύσματα εισόδου  $i$  όπως συμβαίνει στην αναπαράσταση νευρώνων μόνο που εδώ θα το θεωρήσουμε ως:

$$i^* = P_I i \quad (2.82)$$

Με παρόμοιο τρόπο θέτουμε ως  $P_T$  έναν πίνακα που μετασχηματίζει με γραμμικό τρόπο τα επιθυμητά διανύσματα εξόδου  $t$  ως εξής :

$$t^* = P_T t. \quad (2.83)$$

Επίσης το διάνυσμα  $o$  θα μετατραπεί σε διάνυσμα ως εξής:

$$o^* = P_T o. \quad (2.84)$$

Συνεχίζοντας θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα μετασχηματιστεί ο πίνακας με τα βάρη  $W$ . Για τα διάφορα διανύσματα εισόδου  $i$  τα αντίστοιχα εξόδο υπολογίζονται ως εξής :

$$o = W_i. \quad (2.85)$$

Λόγος της ύπαρξης γραμμικών μετασχηματισμών υποθέτουμε ότι το  $W^*$  συνδέει γραμμικά την είσοδο  $i^*$  με την έξοδο  $o^*$ . Οπότε, ισχύει

$$o^* = W^* i^* \quad (2.86)$$

- Όπου  $o^* = P_T o$  (2.87)

- Όπου  $i^* = P_I i$ . (2.88)

Με κατάλληλες πράξεις έχουμε:

$$o^* = W^* i^* \rightarrow P_T o = W^* P_I i \rightarrow o = P_T^{-1} W^* P_I = W_i \rightarrow P_T^{-1} W^* P_I = W \rightarrow W^* = P_T W P_I^{-1}. \quad (2.89)$$

Στην συνέχεια μετά από έναν αριθμό μαθηματικών πράξεων καταλήγουμε στην εξής σχέση :

$$W^*(n) = W^*(n-1) + \eta \delta^*(n) [i^*(n)]^T C \quad (2.90)$$

- Όπου  $C$  είναι ο πίνακας με την συσχέτιση των διανυσμάτων εισόδου δηλαδή :

$$C = (P_I^{-1})^T P_I^{-1} \quad (2.91)$$

Συνεπώς ένα  $i_j^*$  διάνυσμα έχει ένα 1 στην  $j$  θέση και φυσικά στις υπόλοιπες θέσεις μηδενικά. Εφόσον ισχύει :

$$i_j = P_I^{-1} i_j^* \quad (2.92)$$

Καταλήγουμε στο γεγονός ότι η  $j$  στήλη του πίνακα  $P_I^{-1}$  αποτελεί το διάνυσμα  $j$  εισόδου όπως εκφράζεται στους νευρώνες. Οπότε τελικά ο πίνακας  $C$  έχει το εσωτερικό γινόμενο  $i_i \cdot i_j$  και εκφράζει τις συσχετίσεις των διανυσμάτων εισόδου.

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε ότι σύμφωνα με το Καμπουρλάζο (2015) «στην αναπαράσταση προτύπων είναι δυνατή η απόδειξη που εξηγεί σταδιακή μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος με την πάροδο των επαναλήψεων. Αρχικά το σφάλμα του διανύσματος  $j$  την στιγμή  $n$  υπολογίζεται ως :»

$$\delta_j^*(n) = t_j^* - W^*(n) i_j^* \quad (2.93)$$

Και μετά από αντικατάσταση στον πίνακα  $W^*(n)$  διαμορφώνεται ως εξής :

$$\begin{aligned} \delta_j^*(n) &= t_j^* - [W^*(n-1) + \eta \delta_j^*(n) [i^*(n)]^T C] i_j^* = [t_j^* - W^*(n-1) i_j^*] - \\ \eta \delta_j^*(n) [i^*(n)]^T C i_j^* &= \delta_j^*(n-1) - \eta \delta_j^*(n) [i_j^*]^T C i_j^*. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Παραπάνω ήδη έχουμε αναφέρει τις τιμές που έχει το διάνυσμα  $i_j^*$ . Εξαιτίας αυτού το  $[i_j^*]^T C i_j^*$  θα είναι ίσο με  $C_{jj}$  συνεπώς :

$$\delta_j^*(n) = \delta_j^*(n-1) - \eta \delta_j^*(n) C_{jj} \rightarrow \delta_j^*(n) [1 + \eta C_{jj}] = \delta_j^*(n-1) \rightarrow \delta_j^*(n) = \frac{1}{1 + \eta C_{jj}} \delta_j^*(n-1). \quad (2.95)$$

Επειδή όμως ισχύουν :

$$C_{jj} > 0 \text{ και } \frac{1}{1 + \eta C_{jj}} < 1 \quad (2.96)$$

Έχουμε τελικά :

$$\delta_j^*(n) < \delta_j^*(n-1) \quad (2.97)$$

«Η τελευταία έκφραση ουσιαστικά μαρτυρά την μείωση του σφάλματος με την πέραση των επαναλήψεων.» (Καμπουρλάζος 2015)

### 2.3.11 Μέθοδοι Quasi-Newton

Η συγκεκριμένη μέθοδος ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των καθολικών μεθόδων εκπαίδευσης μαζί με τους αλγορίθμους απότομης καθόδου (*steepest descent*) καθώς επίσης και των συζύγων διανυσματικών κλίσεων (*conjugate gradient*). Όμως θα γίνει εκτενέστερη αναφορά μονάχα στη μέθοδο Quasi-Newton εξαιτίας της χρήσης της στην εκπαίδευση των τεχνικών νευρωνικών δικτύων στην συγκεκριμένη εργασία για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και την χρονοσειρά των αποδόσεων.

Οι συγκεκριμένοι μέθοδοι αποτελούν μία κατηγορία μεθόδων όπου δεν είναι απαραίτητη η δημιουργία του εσσιανού πίνακα αλλά μία απλή προσεγγιστική εικόνα τους. Γενικότερα δεν απαιτείται μεγάλη ποσότητα υπολογιστικού κόστους καθώς δεν απαιτείται υπολογισμός δεύτερον παραγωγών διότι γίνεται χρήση των πληροφοριών μιας αντικειμενικής συνάρτησης και με αποκλειστική παραγωγών πρώτης τάξεως. Γενικότερα η συγκεκριμένη κατηγορία μεθόδων ξεκίνησε τη δεκαετία του 1950 από τον Davidon και χρόνια αργότερα αποδείχθηκε μαθηματικά η αξιοπιστία και η ταχύτητα τους από τους Fletcher και Powell σε σχέση με παρεμφερείς αλγόριθμους που έχουν στόχο τη βελτιστοποίηση με μη γραμμικές μεθόδους. Η επίδραση των συγκεκριμένων μεθόδων είναι τεράστια καθώς ακόμα και σήμερα ο επιστημονικός κόσμος ασχολείται ενεργά μαζί τους και έχουν δημιουργηθεί αρκετές παραλλαγές. (Davidon, 1959).

Ξεκινώντας την ανάλυση μας στη μέθοδο και προκειμένου να προσεγγιστεί ο εσσιανός πίνακας μιας αντικειμενικής συνάρτησης  $f$  με ένα συμμετρικό πίνακα γίνεται χρήση ενός τετραγωνικού μοντέλο της  $f$ . Πιο συγκεκριμένα :

$$f(x) \approx f_{k+1} + g_{k+1}^T(x - x_{k+1}) + \frac{1}{2}(x - x_{k+1})^T \mathbb{Q}^2 f_{k+1}(x - x_{k+1}) \quad (2.98)$$

Η παράγωγος της παραπάνω πρότασης είναι :

$$g(x) = g_{k+1} + \mathbb{Q}^2 f_{k+1}(x - x_{k+1}) \quad (2.99)$$

Εφόσον θέσουμε τα εξής :

$$s_k = s_{k+1} \quad (2.100)$$

$$y_k = g_{k+1} - g_k \quad (2.101)$$

$$x = x_k \quad (2.102)$$

Προκύπτει :

$$\mathbb{Q}^2 f_{k+1}^{-1} y_k \approx s_k. \quad (2.103)$$

Στην περίπτωση που η  $f$  είναι κυρτή προκύπτει :

$$\mathbb{Q}^2 f_{k+1}^{-1} y_k = s_k \text{ ή } \mathbb{Q}^2 f_{k+1} s_k = y_k \quad (2.104)$$

Θεωρώντας το τετραγωνικό μοντέλο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_{k+1}$  προκύπτει :

$$m_{k+1}(x) = f_{k+1} + g_{k+1}^T (x - x_{k+1}) + \frac{1}{2} (x - x_{k+1})^T B_{k+1} (x - x_{k+1}) \quad (2.105)$$

Όπου βλέπουμε  $B_{k+1}$  αποτελεί μια προσέγγιση του εσσιανού πίνακα στο  $x_{k+1}$ . Με το να θέσουμε :

$$x = x_{k+1} \quad (2.106)$$

Ικανοποιούμε τις συνθήκες παρεμβολής ως εξής :

$$m_{k+1}(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) \text{ και } \mathbb{Q} m_{k+1}(x_{k+1}) = g_{k+1} \quad (2.107)$$

Επιπροσθέτως είναι απαραίτητο να ισχύουν η εξής συνθήκη παρεμβολής :

$$\mathbb{Q} m_{k+1}(x_k) = g_k \quad (2.108)$$

Εξαιτίας αυτής συνεπάγεται :

$$g_{k+1} + B_{k+1}(x - x_{k+1}) = g_k \quad (2.109)$$

Τελικά προκύπτει η επονομαζόμενη εξίσωση της τέμνουσας (*secant equation*) η αλλιώς Quasi-Newton εξίσωση :

$$B_{k+1} s_k = y_k \quad (2.110)$$

Η ισοδύναμα

$$H_{k+1} y_k = s_k \quad (2.111)$$

- Όπου  $H_{k+1}$  είναι ο αντίστροφος του εσσιανού  $B_{k+1}$

«Απαιτείται από την εξίσωση Quasi-Newton ο θετικός και συμμετρικός πίνακας  $B_{k+1}$  να απεικονίζει το  $s_k$  στο  $y_k$ . Αυτό είναι εφικτό μόνο αν ισχύει η λεγόμενη συνθήκη καμπυλότητας» (Λιβιέρης, 2008) :

$$s_k^T y_k > 0 \quad (2.112)$$

Με λίγο λόγια ναί θετικός ο συμμετρικός πίνακας  $B_{k+1}$ . Όταν η παραπάνω συνθήκη ισχύει τότε η εξίσωση Quasi-Newton έχει μία λύση την  $B_{k+1}$ . Ολοκληρώνοντας την ανάλυση της Quasi-Newton μεθόδου είναι σημαντικό να αναφέρουμε την σημαντικότητα της παραγωγής του πίνακα  $B_{k+1}$  ή το αντίστροφο του. Αυτό επιτυγχάνεται με το να ενημερωθεί ο πίνακας  $B_k$  ή  $H_k$  με οποιονδήποτε τρόπο. Επίσης ο αρχικός πίνακας  $B_0$  ή  $H_0$  θέτεται να είναι ο μοναδιαίος δηλαδή να ισχύει :

$$B_0 = I . \quad (2.113)$$

Οι διαφορετικοί τρόποι ενημέρωσης χωρίζουν σε διάφορες υποκατηγορίες την Quasi-Newton μεθόδου με πιο γνωστές τις DFP, BFGS, PSG και SR1 που είναι ουσιαστικά η ενημέρωση των κλάσεων αλλά δεν θα επεκταθούμε. (Λιβιέρης, 2008)

### 2.3.12 Αλγόριθμος εκπαίδευσης γρήγορης διάδοσης (Quick propagation)

Προκειμένου να βελτιστοποιηθεί η υπολογιστική επίδοση των νευρωνικών δικτύων έχουν δημιουργηθεί μία εντελώς διαφορετική κατηγορία μεθόδων εκπαίδευσης νευρωνικών δικτύων την επονομαζόμενη τοπικών μεθόδων εκπαίδευσης και σε αυτήν ανήκουν μέθοδοι όπως είναι η μέθοδος γρήγορης διάδοσης (quick propagation) και η μέθοδος  $R$  διάδοσης ( $R-prop$ ). Στην συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήθηκε όμως μονάχα η μέθοδος γρήγορης διάδοσης στη χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου συνεπώς θα αναλύσουμε αυτή για λόγους οικονομίας.

Ο αλγόριθμος γρήγορης διάδοσης αναπτύχθηκε από τον Fahlman και βασίζεται έως ένα σημείο στην μέθοδο του Newton για την οποία έχει γίνει αναφορά στο προηγούμενο κεφάλαιο (2.3.11). Στη συγκεκριμένη μέθοδο τα βάρη ανανεώνονται κατ' επανάληψη βάσει των εκτιμήσεων που γίνονται για την θέση του ελάχιστου των διαφορών βαρών του τεχνητού νευρωνικού δικτύου. Συγκεκριμένα οι ανανεώσεις των βαρών πραγματοποιείται βάση της ακόλουθης σχέσης :

$$\Delta^{(k)} w_{ij} = \Delta^{(k-1)} w_{ij} \left( \frac{\nabla_{ij} E^{(k)}}{\nabla_{ij} E^{(k-1)} - \nabla_{ij} E^{(k)}} \right) \quad (2.114)$$

- Όπου  $w_{ij}$  είναι το βάρος του  $j$  νευρώνα του στοιχείου εισόδου  $i$
- Όπου  $E$  είναι η συνάρτηση σφάλματος

Το σημαντικό που κρατάμε από τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι ότι το κόστος εκπαίδευσης απαιτείται είναι συγκριτικά πολύ μικρότερο σε σχέση με τους αλγόριθμους που ανήκουν στην

κατηγορία των καθολικών μεθόδων και πολλές φορές επιφέρει πολύ πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα. (Rojas, 1996)

## 2.4 Θεωρία συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και προαιρετικών δικαιωμάτων

### 2.4.1 Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures)

Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ) ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων μαζί με τις προθεσμιακές πράξεις (*Forwards*) και τα προαιρετικά δικαιώματα (*options*). Τα ΣΜΕ είναι ουσιαστικά μία δεσμευτική συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων μελών όπου το ένα υπόσχεται να αγοράσει (*θέση Long*) και το άλλο να πωλήσει (*θέσεις short*) σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία καθορισμένη τιμή μία συγκεκριμένη ποσότητα. Πρόκειται για τυποποιημένα συμβόλαια τα οποία έχουν ως στόχο την αύξηση ρευστότητας ενώ ταυτόχρονα έχω μειωμένο κόστος συναλλαγών εξαιτίας της τυποποίησης που διαθέτουν. Οι εμπλεκόμενοι το συγκεκριμένο συμβόλαιο οφείλουν να καταθέσουν στο χρηματιστήριο παραγώγων ένα ποσό σαν εγγύηση σε έναν επονομαζόμενο λογαριασμό περιθωρίου (*margin account*). Τα ΣΜΕ μπορεί να βρίσκονται πάνω σε οποιοδήποτε προϊόν δηλαδή υποκείμενος τίτλο (*underlying asset*), ο οποίος , μπορεί να είναι κάποιος χρηματιστηριακός δείκτης ή κάποιο χρηματοοικονομικό προϊόν. Στην παρούσα εργασία όμως θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με τα δικαιώματα προαίρεσης (*options*). Η τιμή και η αξία ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις (σε συνεχή ανατοκισμό) (Παπαδάμου, 2014):

$$F = S e^{rT/360} \quad (2.115)$$

Και

$$f = S - X e^{-rT/360} \quad (2.116)$$

- Όπου  $F$  είναι τη θεωρητική τιμή του συμβολαίου
- Όπου  $S$  είναι η τρέχουσα τιμή της υποκείμενης αξίας
- Όπου  $X$  είναι η συμφωνημένη τιμή του συμβολαίου
- Όπου  $r$  είναι η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου άνευ κινδύνου (*risk free rate*)
- Όπου  $T$  είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του συμβολαίου
- Όπου  $X e^{-rT/360}$  είναι η παρούσα αξία

### 2.4.2 Προαιρετικά δικαιώματα (Options)

«Το δικαίωμα προαίρεσης (*option*) είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δύο μερών σύμφωνα με το οποίο ο αγοραστής διατηρεί το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος να αγοράσει η και να πωλήσει έναν ορισμένο αριθμό του υποκειμένου



τίτλου σε μία μελλοντική ημερομηνία και μία προκαθορισμένη τιμή η οποία ονομάζεται τιμή εξάσκησης (*exercise price*).»(Παπαδάμου 2014)

Τα προαιρετικά δικαιώματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες :

1. Σε δικαιώματα αγοράς (*call options*).
2. Σε δικαιώματα πώλησης (*put options*).

Σε κάθε περίπτωση όσο αναφορά την εξάσκηση ή μη του δικαιώματος είναι ο αγοραστής του συμβολαίου ενώ ο εκδότης είναι υποχρεωμένος να ανταποκριθεί στην αγοροπωλησία του χρηματοοικονομικού προϊόντος ανάλογα με την κατηγορία του συμβολαίου. Κατά την έναρξη του συμβολαίου ο αγοραστής καταβάλλει ένα πριμ (*premium*) στον πωλητή του συμβολαίου προκειμένου να μπορεί να εξασκήσει ή να απαλλαγεί από το δικαίωμα του. Η τιμή του προσαρμόζεται στην αγορά ανάλογα με την προσφορά και την ζήτηση αλλά και σε άλλους σημαντικούς παράγοντες όπως η μεταβλητότητα την συγκεκριμένη περίοδο , την απόδοση άνευ κινδύνου αλλά και την διάρκεια πριν την λήξη του συμβολαίου. (Παπαδάμου 2014)

Για τον υπολογισμό των αποδόσεων της τρέχουσας αξίας των συμβολαίων αυτών δημιουργήθηκε ένα υπόδειγμα από τους Black και Scholes που λειτουργεί υπό την προϋπόθεση ύπαρξης πλήρους ανταγωνιστικής αγοράς με συνεχείς συναλλαγές και επενδυτές ουδέτεροι απέναντι στο κίνδυνο. Για τον λόγο αυτό η αναμενόμενη απόδοση ισούται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Πιο συγκεκριμένα :

$$C_t = S_t N(d_1) - X \exp^{-r_f(T-t)} N(d_2) \quad (2.117)$$

$$\bullet \text{ Όπου } d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + (r_f + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.118)$$

$$\bullet \text{ Όπου } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (2.119)$$

- Όπου  $N(d_1)$  ,  $N(d_2)$  είναι η τιμή από την σωρευτική κανονική κατανομή που αξιολογεί την τιμή  $d_1$  ,  $d_2$  αντίστοιχα.
- Όπου  $E$  είναι η τιμή εξάσκησης.
- Όπου  $S$  είναι η τιμή τίτλου ή υποκείμενης αξίας.
- Όπου  $S_t$  είναι η τιμή τίτλου κατά τη χρονική στιγμή  $t$ .
- Όπου  $\sigma$  είναι η τυπική απόκλιση του τίτλου.
- Όπου  $r_f$  είναι το επιτόκιο άνευ κινδύνου.
- Όπου  $T - t$  είναι ο χρόνος έως την λήξη του option.
- Όπου  $T$  είναι ο χρόνος λήξης του συμβολαίου.

Ανάλογα με το ύψος της τρέχουσας τιμής στην αγορά σε σχέση με την τιμή του συμβολαίου εκείνη την στιγμή συν την τιμή εξάσκησης ο αγοραστής και ο πωλητής των συμβολαίων ανάλογα με την φύση του συμβολαίου (*call option* ή *put option*) κερδίζουν ή ζημιώνονται.

Παρακάτω ακολουθούν οι βασικότερες θέσεις που υπάρχουν στα δικαιώματα προαίρεσης. Φυσικά υπάρχουν και άλλες συνδυαστικές στρατηγικές οι οποίες μπορούν να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο οδηγώντας σε σιγουρότερα κέρδη αλλά δεν θα επεκταθούμε. Πιο συγκεκριμένα :

1. Long call/put option : Σε αυτές τις θέσεις κάποιος επενδυτής αγοράζει το δικαίωμα να αγοράσει/πουλήσει μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού σε προκαθορισμένη τιμή και σε προκαθορισμένη ημερομηνία.
2. Short call option : Σε αυτές τις θέσεις κάποιος πουλάει το δικαίωμα αγοράς και ο επενδυτής υποχρεούται να πουλήσει σε προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής και στην προκαθορισμένη ημερομηνία μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού.
3. Short put option : Σε αυτές τις θέσεις κάποιος πουλάει το δικαίωμα να πουλήσει σε μία συγκεκριμένη τιμή συναλλαγής σε προκαθορισμένη ημερομηνία μία συγκεκριμένη ποσότητα αγαθού.

Μία σημαντική διάκριση που πρέπει να αναφερθεί είναι ότι μεταξύ του ευρωπαϊκού τύπου δικαιωμάτων και του αμερικανικού τύπου εξάσκηση στα τελευταία μπορεί να γίνει την οποιαδήποτε στιγμή πριν από τη λήξη του δικαιώματος σε αντίθεση με τα ευρωπαϊκά. Επιπροσθέτως είναι σημαντικό να αναφερθεί πως υπό την προϋπόθεση ότι αγνοείται το πριμ αγοράς όταν η τιμή είναι ίση με την τιμή εξάσκησης τα δικαιώματα αυτά λέμε ότι καλούνται στο χρήμα (*at the money*). Όταν η άμεση εξάσκηση οδηγεί σε ζημιά λέμε ότι αυτά τα συμβόλαια αυτά βρίσκονται έξω από το χρήμα (*out of the money*) ενώ τέλος όταν η άμεση εξάσκηση του δικαιώματος οδηγεί σε κέρδος τότε λέμε ότι αυτά τα συμβόλαια βρίσκονται μέσα στο χρήμα (*in the money*). Το ύψος των πριμ εξαρτάται από το κατά πόσο υπάρχει κερδοφορία με την άμεση εξάσκηση του δικαιώματος. (Παπαδάμου 2014)

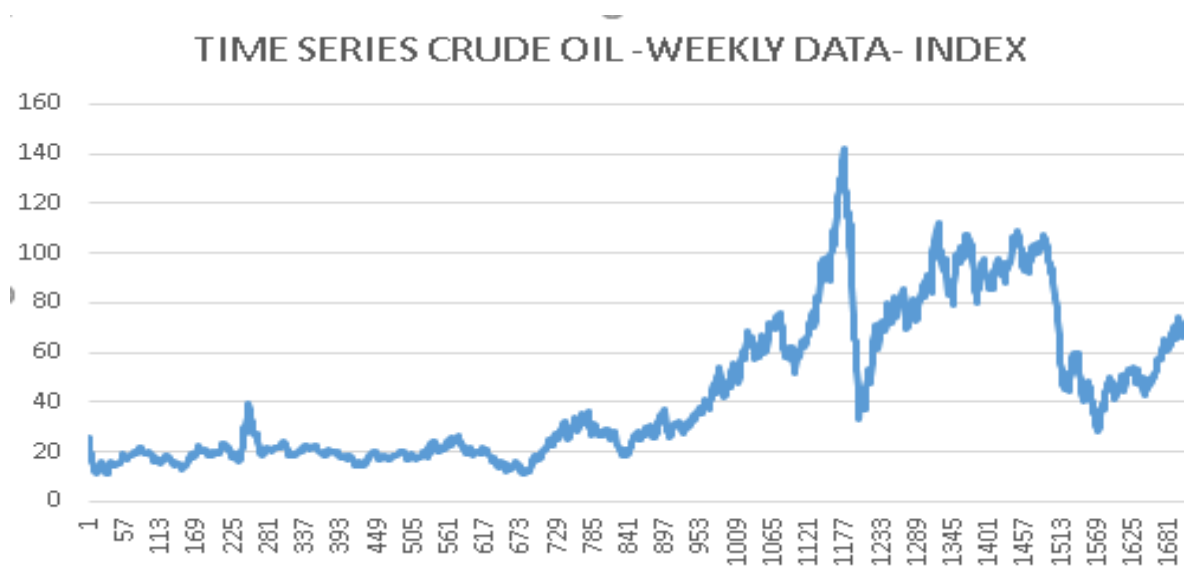
## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

### Δεδομένα -μεθοδολογία έρευνας και εμπειρικά αποτελέσματα

Στο παρόν κεφάλαιο αρχικά θα παρουσιαστεί η χρονοσειρά πετρελαίου ορισμένα στατιστικά στοιχεία της καθώς και οι αποδόσεις του δείκτη ή αλλιώς πρώτες διαφορές (*first differences*). Στη συνέχεια ακολουθεί η μελέτη της χρονοσειράς πετρελαίου με τη χρήση της μη γραμμικής ανάλυσης και του χασοτικού αλγόριθμου όπου ολοκληρώνεται με την εξαγωγή προβλέψεων με την μέθοδο των κοντινών γειτόνων. Έπειτα θα μελετήσουμε την κανονική χρονοσειρά μας καθώς και την χρονοσειρά των αποδόσεων με τη χρήση τεχνικών νευρωνικών δικτύων όπου θα εξάγουμε αντίστοιχα προβλέψεις με διάφορους αλγορίθμους εκπαίδευσης. Τέλος αξιολογώντας την ποιότητα των προβλέψεων και τα σήματα τάσης που μας δίνουν θα παρουσιαστούν οι καταλληλότερες τοποθετήσεις σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιώματα προαίρεσης για διάφορα επενδυτικά προφίλ.

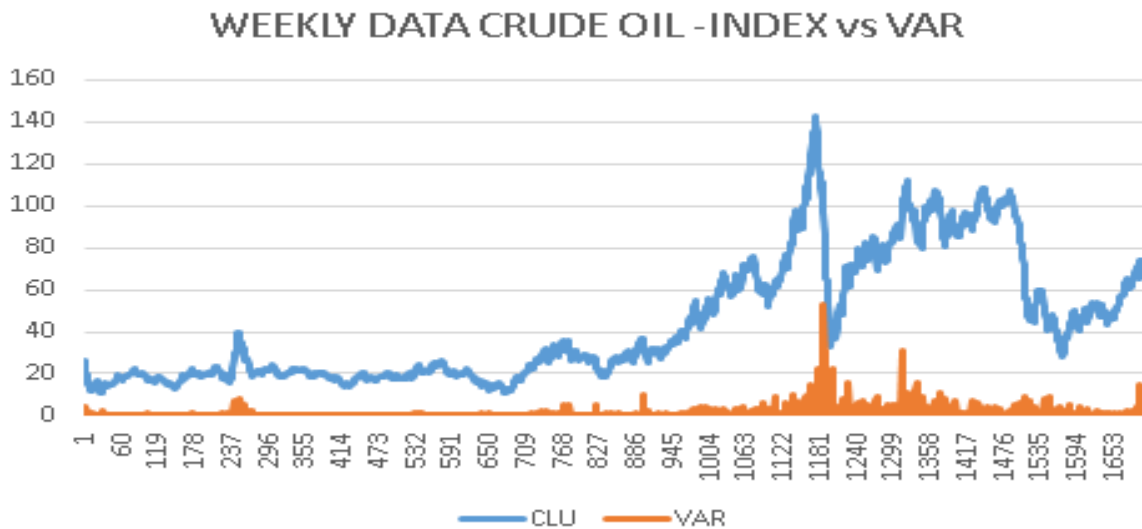
#### 3.1 Στατιστικά στοιχεία χρονοσειράς πετρελαίου και πρώτες διαφορές

Παρακάτω παρουσιάζεται η χρονοσειρά πετρελαίου με τις τιμές εβδομαδιαίου κλεισίματος παρασκευής 1709 δεδομένων από τις 3 Ιανουαρίου 1986 έως 28 Σεπτεμβρίου 2018. Στον άξονα  $Y$  του διαγράμματος παρουσιάζονται το ύψος των τιμών κλεισίματος ενώ στον άξονα  $X$  ο αριθμός παρατήρησης που ουσιαστικά αντιπροσωπεύει τον αριθμό της εβδομάδας. Τα γραφήματα δημιουργήθηκαν με το πρόγραμμα Excel.



Γράφημα (3.1) χρονοσειράς πετρελαίου εβδομαδιαίων τιμών κλεισίματος (Weekly data crude oil -CLU)

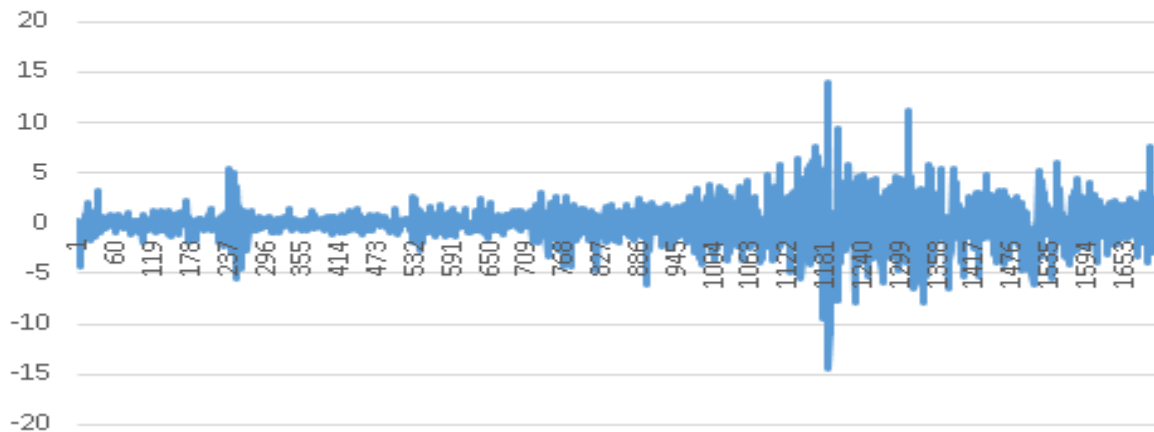
Στη συνέχεια παρουσιάζεται ξανά η χρονοσειρά πετρελαίου μαζί με τη διακύμανση σε όλο το φάσμα της χρονοσειράς. Στον άξονα Y του διαγράμματος παρουσιάζεται οι τιμές κλεισίματος και της διακύμανσης ενώ στον άξονα X ο κατά σειρά αριθμός εβδομαδιαίου κλεισίματος.



### **Γράφημα (3.2) Χρονοσειρά πετρελαίου και διακύμανσης κατά μήκος αυτής**

Σύμφωνα με τη θεωρία του Χάους οι χρονοσειρές που πρέπει να μελετιούνται πρέπει να είναι στάσιμες και να έχει απαλειφθεί η τάση. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε πως η ανάλυση θα γίνει και στην κανονική χρονική σειρά προκειμένου να δούμε τα αποτελέσματα. Στη χρονοσειρά των τιμών του πετρελαίου επειδή ουσιαστικά είναι ο χρηματιστηριακός δείκτης υπάρχει τάση και θόρυβος για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τις αποδόσεις του δείκτη όπου θα γίνει με μία από τις αποτελεσματικότερες μεθόδους που είναι οι πρώτες διαφορές. Οι πρώτες διαφορές υπολογίστηκαν με τη βοήθεια του Excel. Παρακάτω παρουσιάζεται η χρονοσειρά αποδόσεων του πετρελαίου από τις 3 Ιανουαρίου 1986 έως και 28 Σεπτεμβρίου 2018. Στον άξονα Y του διαγράμματος παρουσιάζονται το ύψος των αποδόσεων ενώ στον άξονα X ο αριθμός παρατήρησης που ουσιαστικά αντιπροσωπεύει τον αριθμό της εβδομάδας

### TIME SERIES CRUDE OIL -WEEKLY DATA- FIRST DIFFERENCES

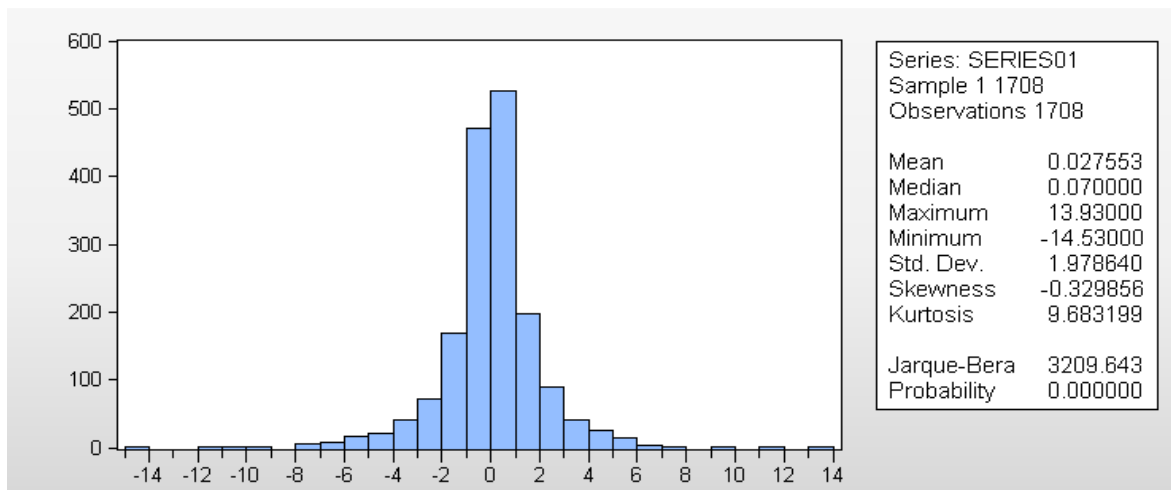


**Γράφημα (3.3) Χρονοσειρά εβδομαδιαίων αποδόσεων πετρελαίου (Weekly data - first differences - crude oil)**

Στην χαοτική μας μελέτη είναι σημαντικό να ελέγξουμε το κατά πόσο τα δεδομένα μας συμφωνούν με τις παραδοχές της θεωρίας υπάρξεις αποτελεσματικής αγοράς. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το οικονομετρικό τεστ Jarque-bera με το οποίο θα ελέγξουμε την ύπαρξη κανονικής κατανομής στα δεδομένα μας, μιας η ύπαρξη κανονικότητας είναι μία από τις προϋποθέσεις υπάρξεις αποτελεσματικής αγοράς. Προκειμένου να πραγματοποιήσουμε το στατιστικό έλεγχο πρέπει να θέσουμε τις υποθέσεις του τεστ. Αρχικά ορίζεται η μηδενική υπόθεση όπου θεωρούμε ότι έχουμε αποτελεσματική αγορά. Συνεπώς η απόρριψη της σημαίνει αυτόματα μη ύπαρξη του αποτελεσματικότητας δηλαδή τα δεδομένα της χρονοσειράς μας δεν ακολουθούν το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου που αναλύθηκε στις προηγούμενες ενότητες. Στη θεωρία των αγορών όμως όταν μία αγορά δεν ακολουθεί το υπόδειγμα του τυχαίου περιπάτου σημαίνει πως υπάρχουν κερδοσκοπικά περιθώρια σε συγκεκριμένη αγορά. Οι κρίσιμες τιμές με τις οποίες καθίσταται δυνατόν να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση σύμφωνα με το τεστ είναι οι εξής : (Χάλκος, 2011)

- Επιβάλλεται η τιμή της λοξότητας (skewness) να είναι διάφορη του μηδενός, ( $SK \neq 0$ )
- Επιβάλλεται η τιμή της κυρτότητας (kurtosis) να είναι διάφορη του 3, ( $k \neq 3$ )
- Επιβάλλεται το Jarque-bera test να είναι διάφορο του μηδενός, ( $JB \neq 0$ )
- Επιβάλλεται η τιμή του p-value του τεστ να είναι στατιστικά σημαντική δηλαδή μικρότερη του 0,05.

Παρακάτω ακολουθεί το ιστόγραμμα και τα στατιστικά στοιχεία της χρονοσειράς των αποδόσεων του πετρελαίου



**Γράφημα (3.4) Ιστόγραμμα αποδόσεων πετρελαίου και έλεγχος κανονικότητας**

Παρατηρώντας το ιστόγραμμα και τα στατιστικά στοιχεία που υπολογίστηκαν με τη βοήθεια του προγράμματος Eviews παρατηρούμε ότι η χρονοσειρά των αποδόσεων ακολουθεί σχεδόν την κανονική κατανομή πράγμα που σημαίνει πως η τάση αναλήφθηκε σε μεγάλο βαθμό και η χρονοσειρά μας είναι πλέον στάσιμη. Όσον αφορά το τεστ ότι η καμπύλη μας είναι ασύμμετρη προς τα αριστερά έξω με λοξότητα αρνητική και λεπτό κυρτή με κύρτωση μεγαλύτερο του 3 ενώ το Jarque-Bera test είναι θετικό διάφορο του μηδενός και τέλος το p-value είναι μηδέν κάνοντας στατιστικά σημαντικό το τεστ μας. Αυτό μας επιτρέπει να απορρίψουμε τη μηδενική μας υπόθεση. Συνεπώς η χρονοσειρά των αποδόσεων μας θα λέγαμε ότι δεν αντιπροσωπεύει απολύτως μια αποτελεσματική αγορά.

### **3.2 Μελέτη του δείκτη πετρελαίου με χαοτική ανάλυση και προβλέψεις**

Στη συγκεκριμένη υπό-ενότητα αρχικά θα προσπαθήσουν να υπολογίσουμε τον κατάλληλο χρόνο καθυστέρησης για τις δύο χρονοσειρές μας χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης και αμοιβαίας πληροφορίας. Εφόσον υπολογισθεί ο συγκεκριμένος χρόνος κάνοντας χρήση του θεωρήματος Takens θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε τον ανακατασκευασμένο φασικό χώρο και να παρατηρήσουμε την ενδεχόμενη ύπαρξη παράξενων ελκυστών.

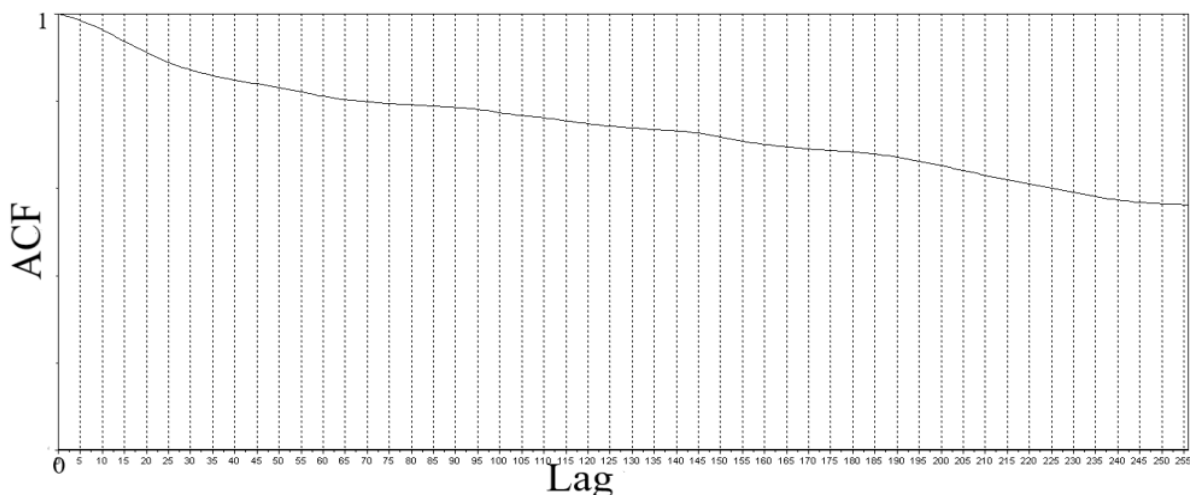
#### **3.2.1 Χρόνος καθυστέρησης (Time delay)**

Στη συγκεκριμένη εργασία θα χρησιμοποιήσουμε δύο μεθόδους την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και τη συνάρτηση αμοιβαίας πληροφορίας.

Αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα (2.1.6) ότι η αυτοσυσχέτιση δείχνει το βαθμό συσχέτισης μεταξύ των παρατηρήσεων. Ο ορισμός της αυτοσυσχέτισης έχει νόημα μόνο όταν η χρονοσειρά είναι στάσιμη. Όταν η χρονοσειρά δεν είναι στάσιμη δεν μπορεί η αυτοσυσχέτιση

να ορισθεί ως συνάρτηση της υστέρησης αλλά ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Αν υπολογίσουμε την αυτοσυσχέτιση σε μια μη στάσιμη χρονοσειρά με τάσεις παρατηρούμε πως έχει πολύ υψηλές τιμές και φθίνει με την υστέρηση. Με άλλα λόγια υπάρχουν έντονες συσχετίσεις ανάμεσα κοντινών χρονικών σημείων και αυτό συμβαίνει λόγω της τάσης. Στη μη γραμμική ανάλυση η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μας βοηθάει να πάρουμε μια πρώτη εκτίμηση την χρονική υστέρηση (*delay time*) το χρόνο δηλαδή κατά τον οποίο αν μετατοπίσουμε τις τιμές του συστήματος το σύστημα σταματάει να κρατάει πληροφορία.

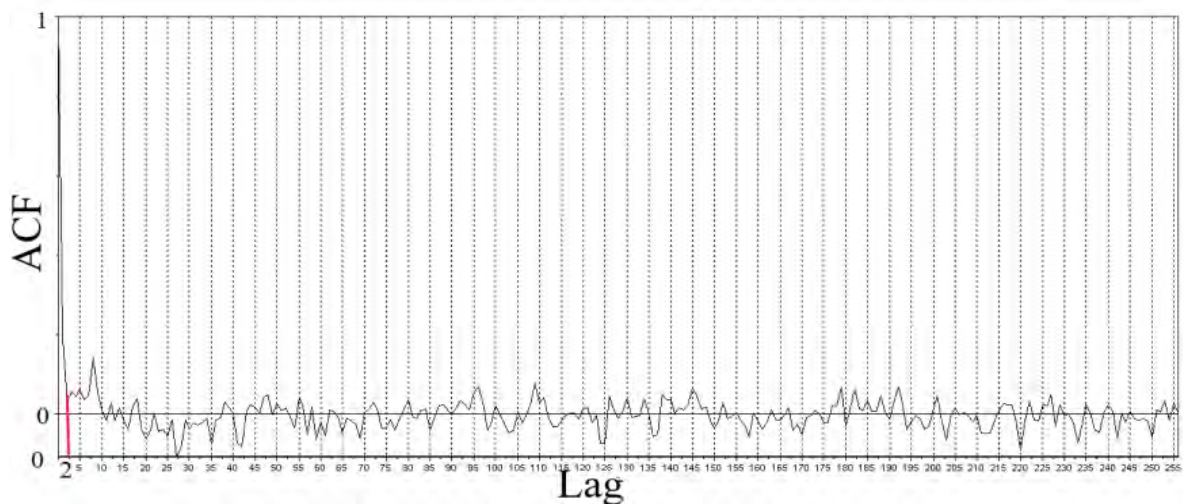
Παρακάτω παρουσιάζεται το διάγραμμα αυτοσυσχέτισης για τα κανονικά εβδομαδιαία δεδομένα. Ο άξονας των  $X$  παρουσιάζει τις χρονικές υστερήσεις (*lags*) ενώ ο άξονας των  $Y$  παρουσιάζει την τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης που υπολογίστηκε βάση της σχέσης που αναφέρθηκε συγκεκριμένα στην ενότητα 2.1.6.



**Γράφημα (3.5) Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εβδομαδιαίων τιμών πετρελαίου**

Ο χαρακτηριστικός χρόνος που ψάχνουμε είναι η υστέρηση κατά την οποία η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περνάει τα όρια του μηδενός. Από το γράφημα δε φαίνεται να μπορούμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα και αυτό διότι η χρονοσειρά μας φαίνεται πως έχουν συγκεκριμένη τάση δηλαδή δεν είναι στάσιμες και για αυτό το λόγο βλέπουμε την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης να μειώνεται με αργούς ρυθμούς με την αύξηση των υστερήσεων πράγμα που σημαίνει ότι τα δεδομένα μας συσχετίζονται ισχυρά μεταξύ τους καθώς πρόκειται για τις τιμές του δείκτη πετρελαίου.

Παρακάτω παρουσιάζονται το διάγραμμα αυτοσυσχέτισης για τις εβδομαδιαίες αποδόσεις.

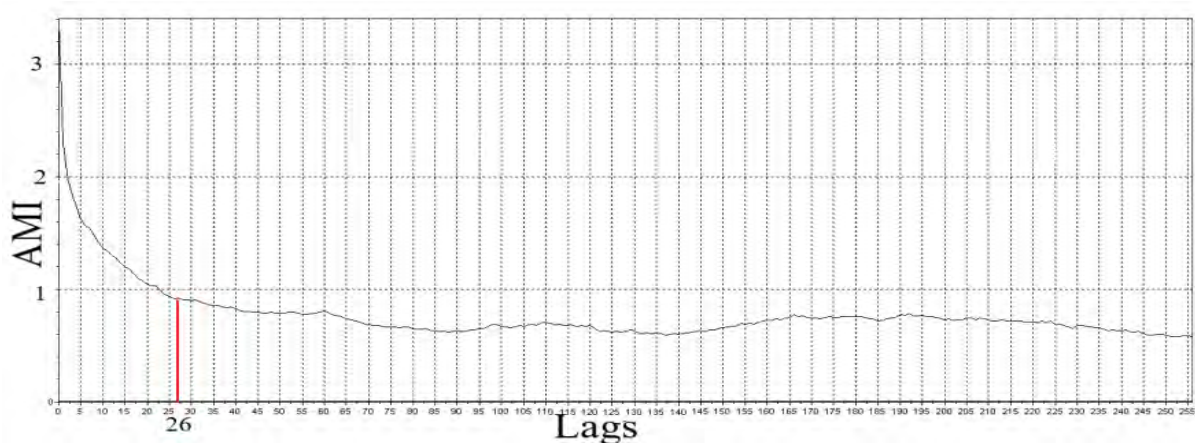


**Γράφημα (3.6) Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης εβδομαδιαίων αποδόσεων πετρελαίου**

Όσο αναφορά για τις αποδόσεις του παρατηρούμε πως μειώνονται απότομα μετά την δεύτερη υστέρηση καθώς πρόκειται για μια στάσιμη χρονοσειρά όπου η πληροφορία φαίνεται πως χάνεται μετά την δεύτερη υστέρηση αυτό αποτελεί και το πρώτο δείγμα ότι το κατάλληλο time delay είναι το 2 για την χρονοσειρά μας

Στη συνέχεια ακολουθεί το δεύτερο κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε για την επιλογή του κατάλληλου χρόνου καθυστέρησης όπου είναι η συνάρτηση αμοιβαίας ή από κοινού πληροφορίας όπου έχει υπολογιστεί σύμφωνα με τη μαθηματική σχέση που αναφέρθηκε στις προηγούμενες ενότητες. Με πιο απλά λόγια η συγκεκριμένη συνάρτηση μας δείχνει τις μη γραμμικές συσχετίσεις μεταξύ των τιμών του συστήματος που μελετάμε.

Παρακάτω παρουσιάζεται το διάγραμμα συνάρτησης αμοιβαίας ή από κοινού πληροφορίας για την κανονική χρονοσειρά. Ο άξονας των  $X$  παρουσιάζει τις χρονικές υστερήσεις (lags) ενώ ο άξονας των  $Y$  παρουσιάζει την τιμή της συνάρτησης.

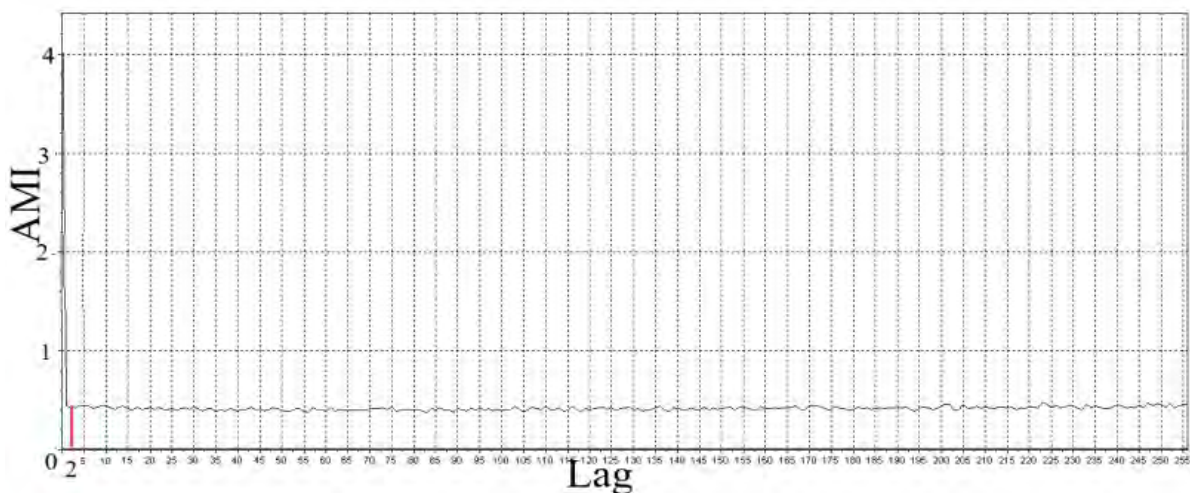


**Γράφημα (3.7) Συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας εβδομαδιαίων τιμών πετρελαίου**



Ο χαρακτηριστικός χρόνος που ψάχνουμε είναι η υστέρηση κατά την οποία η συνάρτηση παρουσιάζει το πρώτο τοπικό ελάχιστο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμαι ότι αυτό παρουσιάζεται για χρονική υστέρηση που ισούται με 26.

Ακολουθεί το διάγραμμα συνάρτησης αμοιβαίας ή από κοινού πληροφορίας για την χρονοσειρά αποδόσεων του πετρελαίου.



**Γράφημα (3.8) Συνάρτησης αμοιβαίας πληροφορίας εβδομαδιαίων αποδόσεων πετρελαίου**

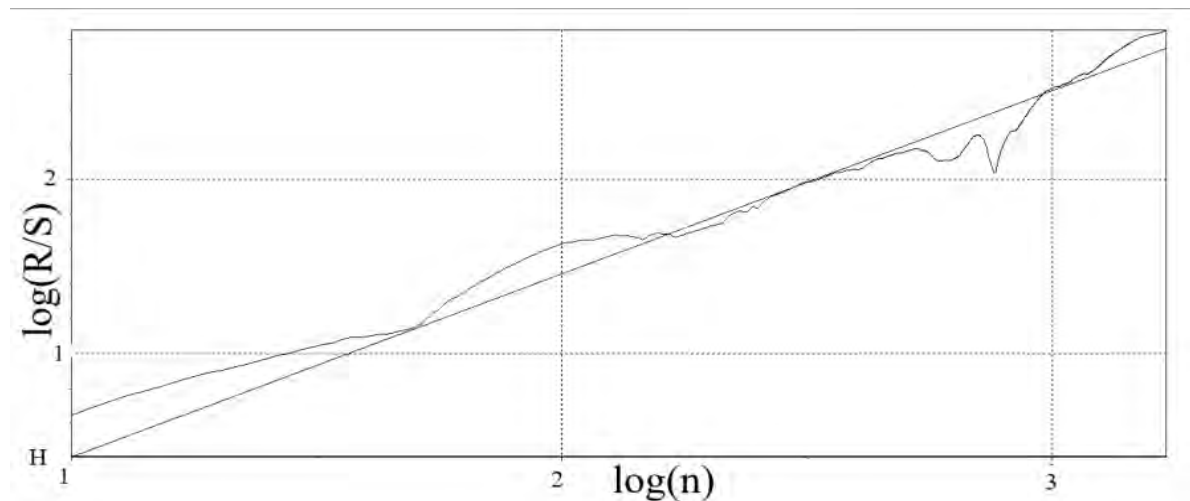
Στη συγκεκριμένη περίπτωση παρατηρούμαι ότι αυτό παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο για χρονική υστέρηση=2..

Υστερά από τις δυο μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε αποφασίσαμε στη συγκεκριμένη εργασία για όλα τα βήματα της μη γραμμικής ανάλυσης να γίνουν για χρόνο καθυστέρησης ίσο με 26 για την χρονοσειρά εβδομαδιαία τιμών πετρελαίου και αντίστοιχα χρόνο καθυστέρησης ίσο με 2 για την χρονοσειρά των αποδόσεων.

### **3.2.2 Υπολογισμός εκθέτη Hurst**

Ανάλογα με τις τιμές που κινείται ο συντελεστής μπορούμε να εξάγουμε σημαντικές πληροφορίες για την τάση και τη μεταβλητότητα που κρύβει το σύστημα που μελετάμε και πιο συγκεκριμένα για το διάστημα που θέλουμε να προβλέψουμε. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι όταν ο συντελεστής βρίσκεται μεταξύ 0,5 και 1 τότε οι τιμές της χρονοσειράς είναι πιθανό να ακολουθήσουν είτε ανοδική είτε καθοδική τάση ανάλογα με την προηγούμενη κατάσταση του συστήματος. Αντίθετα αν ο συντελεστής βρίσκεται μεταξύ 0 και 0,5 τότε οι τιμές της χρονοσειράς είναι πιθανό να ακολουθήσουν αντίθετη τάση ανάλογα με την προηγούμενη κατάσταση του συστήματος. Τέλος αν ο συντελεστής ισούται με 0,5 τότε η τάση που ακολουθείται είναι τυχαία και δεν εξαρτάται από την προηγούμενη κατάσταση του

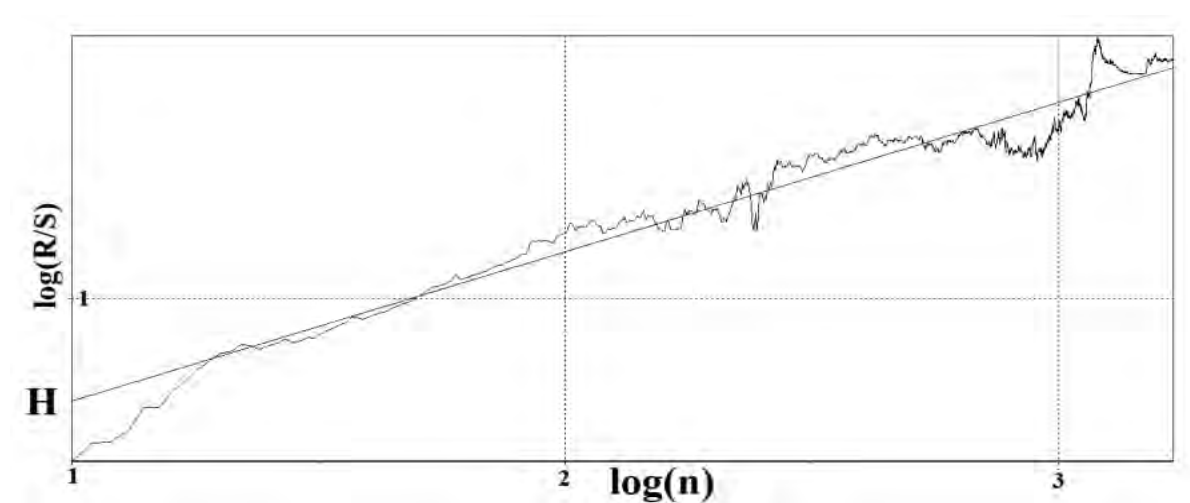
συστήματος. Η γραμμή που είναι σχεδιασμένη στο γράφημα δείχνει ουσιαστικά τα όρια που περιεγράφηκαν παραπάνω για τον εκθέτη. Το Hurst εκθετικό «H» δεν είναι τίποτα άλλο από την κλίση της γραφικής παράστασης κάθε περιοχής κλίμακας (R / S) έναντι του κάθε περιοχής κλίμακας μεγέθους. Εδώ στον άξονα Y έχουμε το  $\log(R / S)$  και στον άξονα X το  $\log(n)$ . Παρακάτω παρουσιάζεται το γράφημα του συντελεστή για την χρονοσειρά των τιμών του πετρελαίου.



**Γράφημα (3.9) Εκθέτης Hurst για την χρονοσειρά τιμών του πετρελαίου**

Ο εκθέτης Hurst για τις αποδόσεις πετρελαίου όπως υπολογίστηκε από το πρόγραμμα είναι  $H=0,50001\pm 0,02370$  καθώς φαίνεται πως ο εκθέτης είναι μεγαλύτερος του 0,5 για το μεγαλύτερο μέρος των κλιμάκων μεγέθους πράγμα που σημαίνει πως είναι πιθανό να έχουμε επιμονή στις υπάρχουσες τάσεις σε διάφορα σημεία της χρονοσειράς.

Παρακάτω παρουσιάζεται το γράφημα του συντελεστή για την χρονοσειρά των αποδόσεων του πετρελαίου.



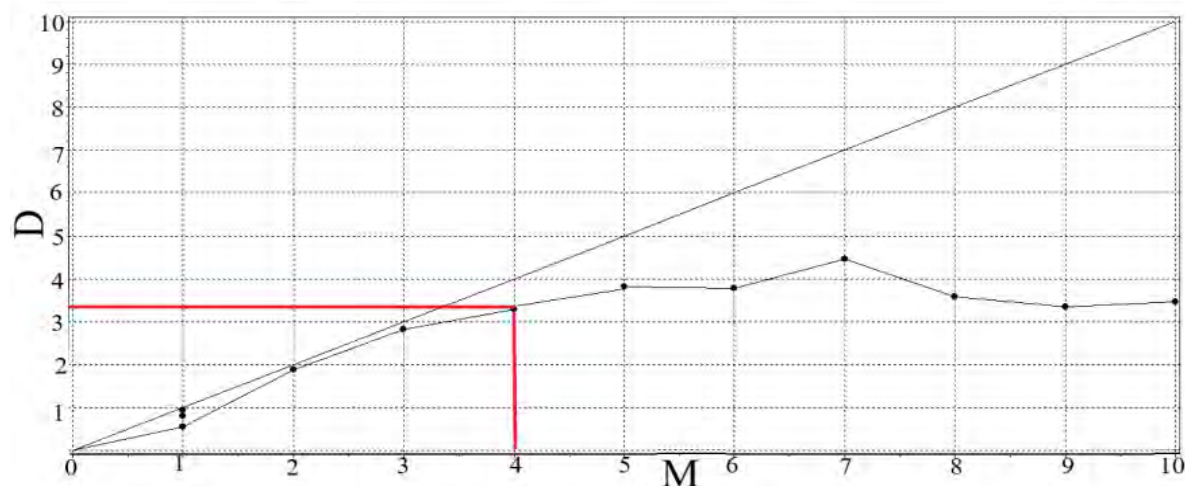
**Γράφημα (3.10) Εκθέτης Hurst για την χρονοσειρά αποδόσεων του πετρελαίου**

Ο εκθέτης Hurst για τις αποδόσεις πετρελαίου όπως υπολογίστηκε από το πρόγραμμα είναι  $H = 0,50001 \pm 0,1543$  καθώς φαίνεται πως ο εκθέτης είναι μικρότερος του 0,5 για το μεγαλύτερο μέρος των κλιμάκων μεγέθους πράγμα που σημαίνει πως είναι πιθανό να έχουμε εναλλαγές τάσεων κάτι που φαντάζει λογικό καθώς πρόκειται για αποδόσεις χρηματιστηριακού δείκτη.

### 3.2.3 Υπολογισμός διάστασης συσχέτισης (Correlation dimension) και ελάχιστης διάστασης εμβύθισης (Minimum embedding dimension)

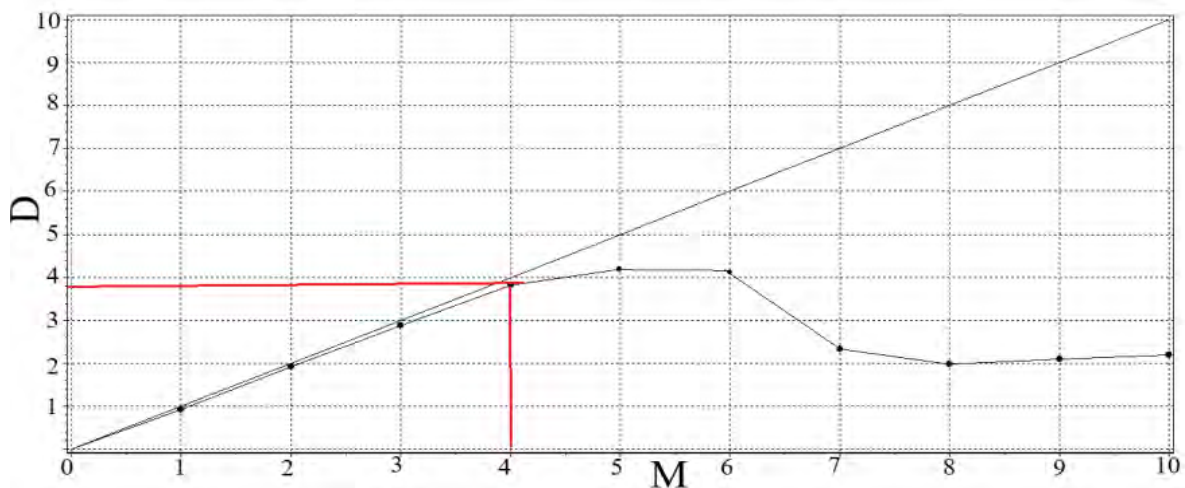
Στη θεωρία του χάους, η διάσταση συσχέτισης είναι ένα μέτρο της διαστασιοποίησης του χώρου που καταλαμβάνεται από ένα σύνολο τυχαίων σημείων και συνήθως αναφέρεται ως ένας τύπος κλασματικής διάστασης. Η πραγματική χρησιμότητα της διάστασης συσχέτισης είναι στον προσδιορισμό των πιθανώς κλασματικών διαστάσεων. Υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας την μαθηματική σχέση 2.39 της ενότητας 2.2.7 που αναφέρθηκε μέσω του προγράμματος μη γραμμικής ανάλυσης Fractan.

Παρακάτω παρουσιάζουμε το γράφημα για την χρονοσειρά εβδομαδιαίων τιμών πετρελαίου. Στον άξονα  $X$  είναι ο αριθμός της διάστασης συσχέτισης ενώ στον άξονα  $Y$  είναι ο αριθμός της ελάχιστης διάστασης εμβύθισης.



**Γράφημα (3.11) Διάστασης συσχέτισης έναντι διάστασης εμβύθισης για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

Αντίστοιχα παρουσιάζεται και για τις αποδόσεις.



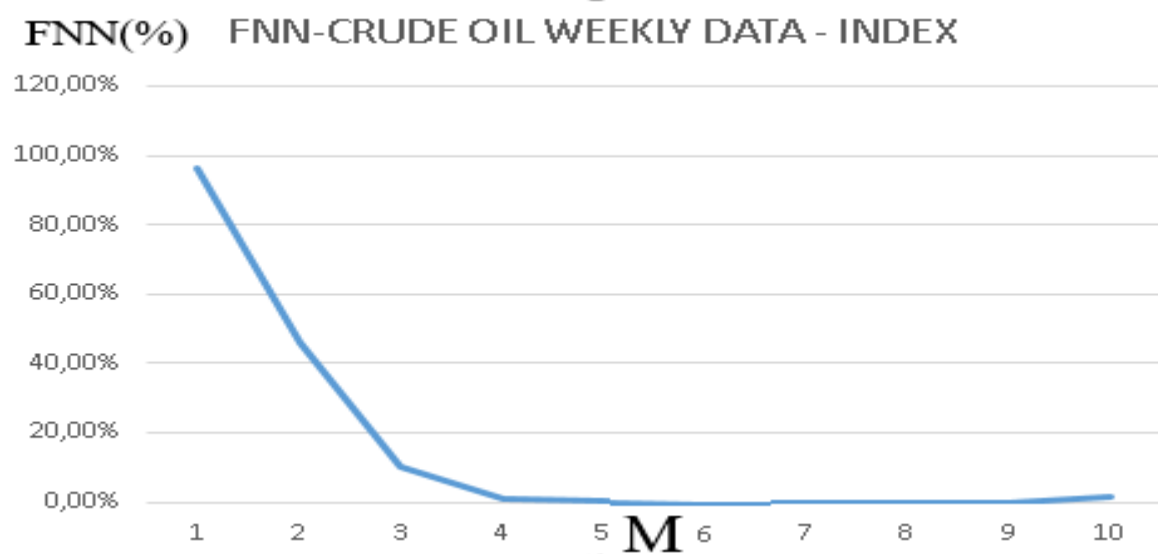
**Γράφημα (3.12) διάστασης συσχέτισης έναντι διάσταση εμπύθυνσης για την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου**

Παρατηρούμε από τον άξονα των  $y$  όπου βρίσκονται οι διαστάσεις συσχέτισης ότι η τιμή είναι γύρω στο 3,60 για τα κανονικά εβδομαδιαία δεδομένα και 3,90 για τις εβδομαδιαία αποδόσεις εκεί που αρχίζει η καμπύλη αρχίζει να οριζοντοποιείται και είναι μη ακέραια που αυτό επιβεβαιώνει βάση θεωρίας και εμπειρικών κανόνων ότι το σύστημά μας παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά για το λόγο αυτό απαιτείται ο αμέσως ακέραιος αριθμός από αυτών που υπολογίσαμε προηγουμένως που δεν είναι άλλος από τον 4 και στις 2 περιπτώσεις. Στο οριζόντιο άξονα των  $X$  στο ίδιο σημείο με την ίδια λογική βρίσκεται το νούμερων διαστάσεων της διάστασης εμπύθυνσης σύμφωνα με την οποία αποτελεί τον αριθμό των απαιτούμενων διαστάσεων προκειμένου να περιγραφηθεί ολοκληρωτικά το χαοτικό μας σύστημα. Το νούμερο αυτό είναι 4 για τα κανονικά δεδομένα και 4 για τις εβδομαδιαίες αποδόσεις, συνεπώς απαιτούνται τουλάχιστον 4 διαστάσεις προκειμένου να περιγραφηθεί το σύστημα των κανονικών εβδομαδιαίων δεδομένων και αντίστοιχα για τις διαστάσεις για τις εβδομαδιαίες αποδόσεις

Ο υπολογισμός της διάστασης εμπύθυνσης μπορεί να πραγματοποιηθεί και με μία ακόμη μέθοδο όπου έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και είναι ο αλγόριθμος ψευδών πλησιέστερων γειτόνων. Η ιδέα προτάθηκε από τον Kennel. Η κύρια ιδέα είναι να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει ο αριθμός των γειτόνων ενός σημείου κατά μήκος μιας τροχιάς σήματος με την αυξανόμενη διάσταση ενσωμάτωσης.

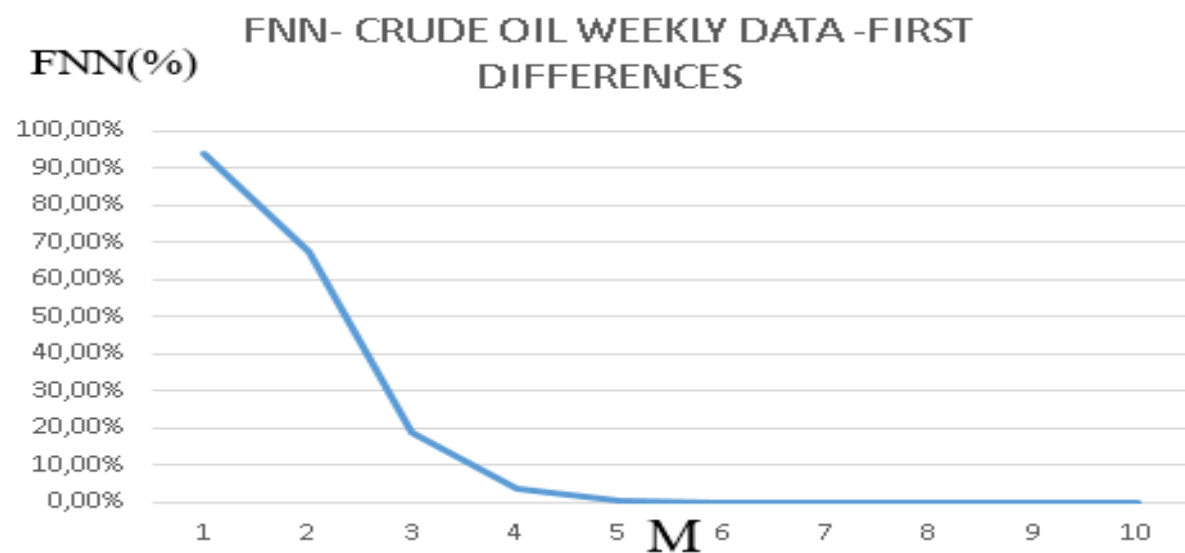
Παρακάτω παρουσιάζεται το γραφήματα των ποσοστών των λανθασμένων γειτόνων για την χρονοσειρά εβδομαδιαίων τιμών όπως υπολογίστηκαν με τη βοήθεια προγράμματος ANTS που έχει ενσωματωμένο τον αλγόριθμο που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.7. Οι υπολογισμούς

έγιναν μέχρι και για 10 αριθμών διαστάσεων εμπύθυνσης. Στον άξονα X είναι το ποσοστό λανθασμένων γειτόνων ενώ στον άξονα Y είναι ο αριθμός διαστάσεων εμπύθυνσης.



**Γράφημα (3.13) Ποσοστά λανθασμένων γειτόνων για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

Παρατηρώντας το γράφημα φαίνεται πως το ποσοστό λανθασμένων γειτόνων από την 4η διάσταση εμπύθυνσης μηδενίζεται. Στη συνέχεια παρουσιάζεται και το γράφημα αντίστοιχα για τις αποδόσεις.



**Γράφημα (3.14) Ποσοστά λανθασμένων γειτόνων για την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου**

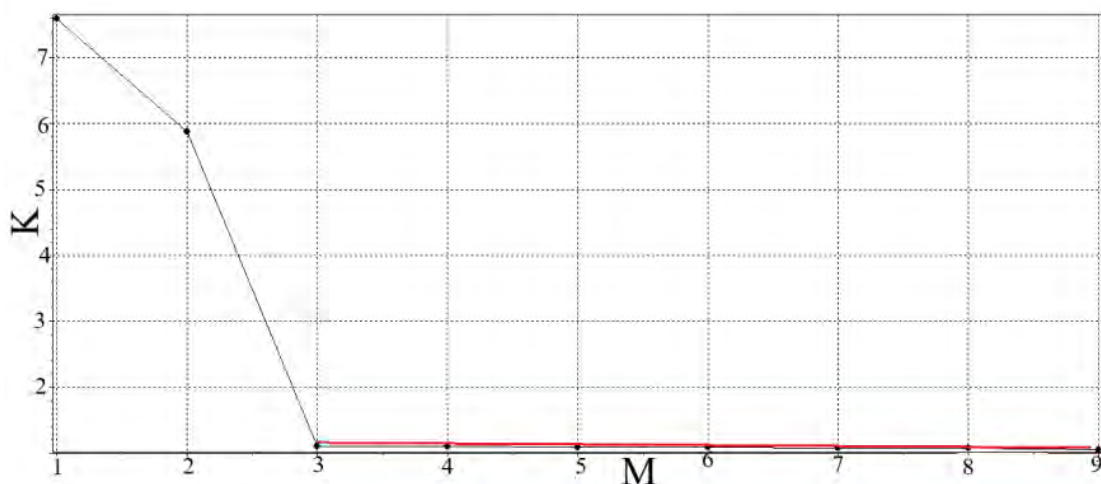
Παρομοίως παρατηρούμε ότι από την 4η διάσταση εμπύθυνσης μηδενίζεται. Τα ποσοστά λανθασμένων γειτόνων φαίνεται να είναι αρκετά υψηλά στην μικρότερες διαστάσεις πράγμα που μας δείχνει ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να συναντήσουμε λανθασμένους γείτονες στο σύστημα μας πράγμα που δυσκολεύει την προβλεψιμότητα του συστήματος.

Συνεπώς κατόπιν χρήσης και των δυο κριτηρίων δηλαδή της μεθόδου υπολογισμού του ολοκληρώματος συσχέτισης καθώς και του αλγορίθμου λανθασμένων κοντινών γειτόνων για την εύρεση της ελάχιστης διάστασης εμπύθνσης καταλήγουμε ότι ο αριθμός 4 είναι ο επαρκής αριθμός διαστάσεων για να περιγραφηθεί πλήρως το σύστημα.

### 3.2.4 Υπολογισμός της εντροπίας του συστήματος κατά Kolmogorov

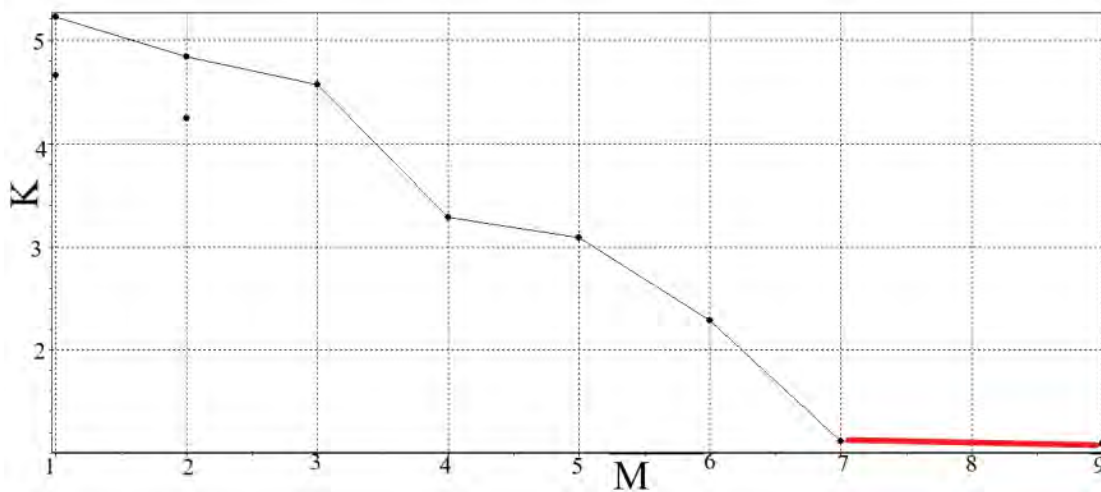
Η εντροπία κατά Kolmogorov αποτελεί ένα μέτρο ένδειξης των πρόσημων των εκθετών Lyapunov και του γενικότερου χαρακτηρισμού της δυναμικής του συστήματος που μελετάται. Υπολογίστηκε με το πρόγραμμα Fractan. Στα γραφήματα που ακολουθούν ο άξονας  $Y$  έχει την ποσότητα εντροπίας του συστήματος ενώ ο άξονας  $X$  δείχνει τον αριθμό διάστασης εμπύθνσης. Η εντροπία υπολογίστηκε για 10 διαστάσεις εμπύθνσης.

Παρακάτω παρουσιάζεται το γράφημα της εντροπίας για την χρονοσειρά των τιμών του πετρελαίου



**Γράφημα (3.15) Kolmogorov entropy για διάφορες διαστάσεις εμπύθνσης της χρονοσειράς τιμών πετρελαίου**

Ακολουθεί το γράφημα της εντροπίας για την χρονοσειρά των αποδόσεων του πετρελαίου.



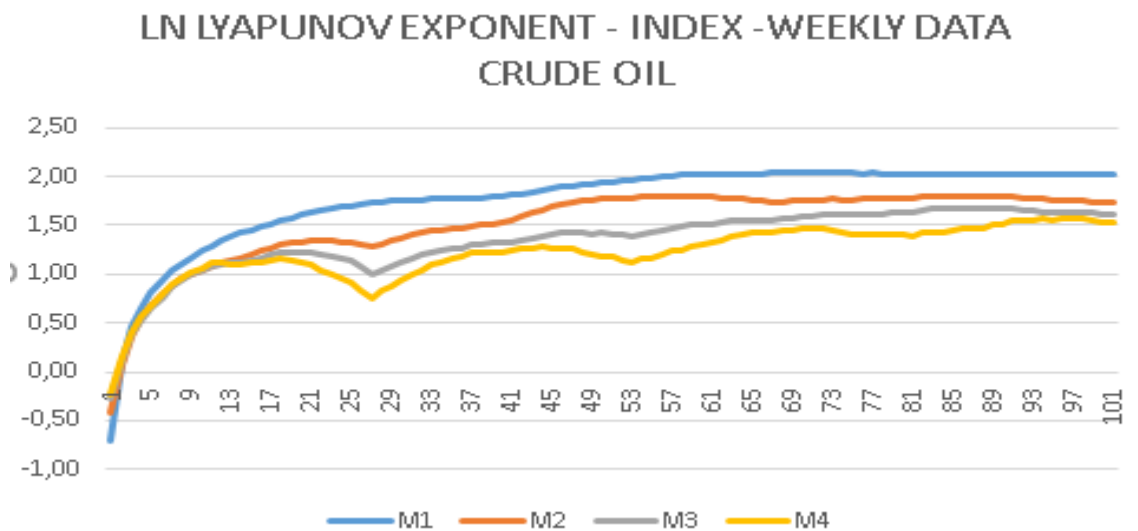
**Γράφημα (3.16) Kolmogorov entropy για διάφορες διαστάσεις εμπύθυνσης της χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου**

Από τα διαγράμματα μπορούμε να αντλήσουμε τις εξής σημαντικές πληροφορίες. Βλέποντας την συνάρτηση να έχει φθίνουσα πορεία και κάποια στιγμή να γυρνάει προς τα δεξιά αντιλαμβανόμαστε σύμφωνα με την θεωρία ότι οι εκθέτες Lyapunov θα είναι θετικοί, πράγμα που δηλώνει με την σειρά του θετική απόκλιση και μάλιστα εκθετική των γειτονικών τροχιών και που συνεπάγεται με χαοτική συμπεριφορά. Θα μπορούσε κάλλιστα η συνάρτηση να πήγαινε προς το μηδέν πράγμα που θα σήμαινε με την σειρά του ότι το σύστημα μας οδηγείτε σε περιοδική τροχιά. Από την άλλη αν ξεπερνούσε το όριο του μηδενός και έτεινε να οδηγηθεί προς τα αρνητικά αυτό θα σήμαινε αρνητικούς εκθέτες Lyapunov που σημαίνει με την σειρά του ότι το σύστημα οδηγείται σε συγκεκριμένο σημείο δηλαδή ότι έχει σταθερό σημείο ισορροπίας. Τέλος υπάρχει και η περίπτωση οι εκθέτες να οδηγούνται σε υπερεκθετικές τιμές και να οδηγούνται προς το άπειρο το σημαίνει με την σειρά του σοβαρή ένδειξη για ύπαρξη θορύβου στη χρονοσειρά μας στο σύστημα που μελετάμε. Και στις δυο χρονοσειρές μας παρατηρείται ότι η συνάρτηση προσεγγίζει το μηδέν και ελαφρώς θετική πράγμα που σημαίνει ότι οδηγούμαστε σε περιοδική τροχιά αν και υπάρχει ένδειξη για χαοτική συμπεριφορά.

### **3.2.5 Υπολογισμός των εκθετών Lyapunov (Lyapunov exponents)**

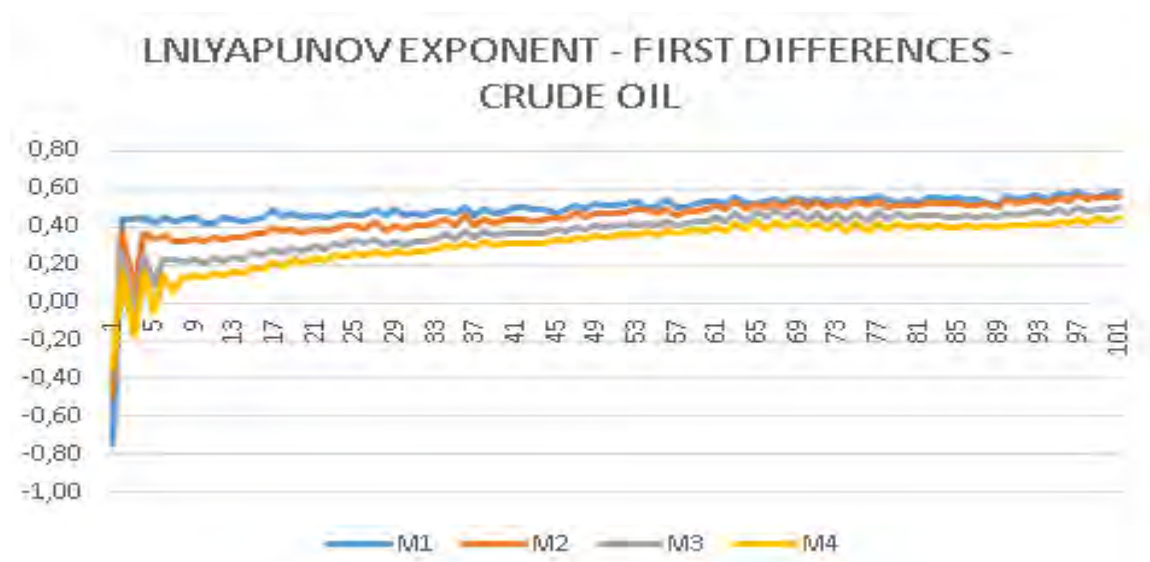
Παρακάτω στα γραφήματα παρουσιάζονται οι λογαριθμικές αποστάσεις των εκθετών όπως έχουν υπολογιστεί έως για 4 διαστάσεις εμπύθυνσης ανά ζευγάρια για 100 βήματα μπροστά για τις δύο χρονοσειρές μας από το πρόγραμμα μη γραμμικής ανάλυσης χρονοσειρών Ants που ενσωματώνει την μαθηματική σχέση 2.45 που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.7. Στον κάθετο άξονα  $Y$  είναι οι τιμές του φυσικού λογαρίθμου των εκθετών. Οι συναρτήσεις που παρουσιάζονται είναι οι διάφορες διαστάσεις εμπύθυνσης και στον οριζόντιο άξονα  $X$  τα

βήματα μπροστά για τα οποία υπολογίστηκαν οι τιμές. Ακολουθεί το γράφημα για τους εκθέτες της χρονοσειράς τιμών του πετρελαίου.



**Γράφημα (3.17) Λογαριθμικές αποστάσεις 100 βημάτων μπροστά για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

Αντίστοιχα παρουσιάζεται το γράφημα για τους εκθέτες της χρονοσειράς αποδόσεων του πετρελαίου.

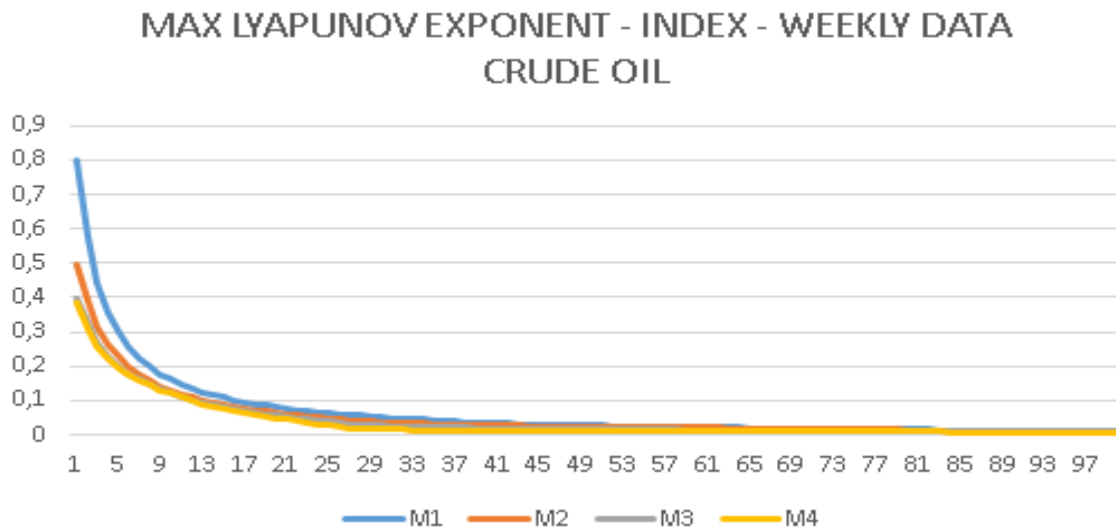


**Γράφημα (3.18) Λογαριθμικές αποστάσεις 100 βημάτων μπροστά για την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου**



Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις διάφορες κλίσεις για να βρούμε των μέγιστο εκθέτη Lyapunov. Οι κλίσεις υπολογίστηκαν με την βοήθεια του Excel και την συνάρτηση Slope που υπολογίζει την κλίση των ευθειών για τα στα διάφορα σημεία.

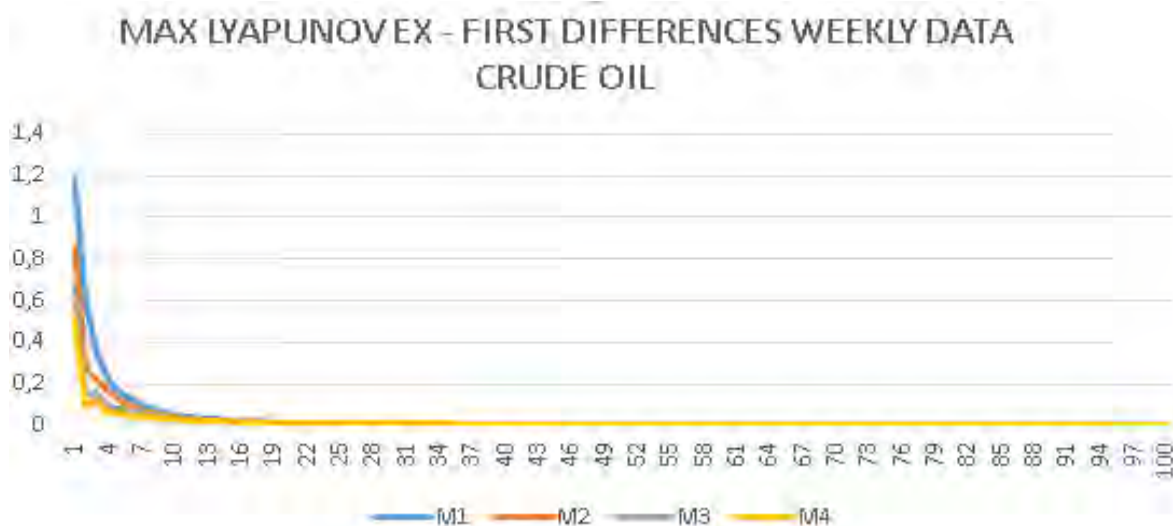
Παρακάτω ακολουθούν τα πινακάκια με τις τιμές των κλίσεων που υπολογίστηκαν για τα διάφορα βήματα μπροστά και τις 4 διαστάσεις εμπύθισης. Αρχικά παρουσιάζεται το γράφημα των κλίσεων των λογαριθμικών αποστάσεων της χρονοσειράς των τιμών πετρελαίου



**Γράφημα (3.19) Κλίσεις λογαριθμικών αποστάσεων 100 βημάτων μπροστά για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov υστερα από τον υπολογισμό των κλίσεων φαίνεται πως είναι ο 0,7990014 για την διάσταση εμπύθισης M1.

Ακολουθεί το αντίστοιχο γράφημα αλλά για την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου.



**Γράφημα (3.20) Κλίσεις λογαριθμικών αποστάσεων 100 βημάτων μπροστά για την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου**

Ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov υστερα από τον υπολογισμό των κλίσεων φαίνεται πως είναι ο 1,180673 και εδώ για την διάσταση εμβύθυνσης M1.

Μετά τον υπολογισμό των εκθετών παρατηρούμε ότι υπάρχει έστω και ένας θετικός εκθέτης Lyapunov και στις δυο χρονοσειρές μας πράγμα που υποδηλώνει την ύπαρξη χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματος καθώς υπάρχουν εκθετικές αποστάσεις μεταξύ των γειτονικών τροχιών .. Πιο συγκεκριμένα ο θετικός εκθέτης υποχρεώνει τοπικά να αποκλίνουν οι γειτονικές τροχιές του συστήματος αλλά η συνολική δυναμική του συστήματος να μας κρατάει περιορισμένους σε ένα χώρο. Γενικότερα θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχει ανταγωνισμός ανάμεσα στα δυναμικές και στις τοπικές δυνάμεις που έχει ως αποτέλεσμα την επέκταση και συσσώρευση του ανακατασκευασμένου φασικού χώρου.

### ***3.2.6 Προσδιορισμός χρονικού ορίζοντα πρόβλεψης (prediction time)***

Υπολογίστηκαν όλοι οι εκθέτες Lyapunov για 100 βήματα μπροστά για τον ελάχιστο αριθμό διαστάσεων περιγραφής των χρονοσειρών μας που είναι 4 ,όπως μας έδειξε η ανάλυση των ολοκληρωμάτων συσχέτισης καθώς και ο αλγόριθμος λανθασμένων γειτόνων. Για τις αναγκαίες διαστάσεις μελέτης των ανακατασκευασμένων χώρων φάσεων των χρονοσειρών μας χρησιμοποιήθηκαν ο χρόνος καθυστέρησης 26 για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και αντίστοιχα ο αριθμός 2 για την χρονοσειρά των αποδόσεων βάση των κριτηρίων της συνάρτησης από κοινούς πληροφορίας και συνάρτησης αυτοσυσχέτισης. Καταλήξαμε ότι μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov βρίσκεται για την 1<sup>η</sup> χρονοσειρά στην 1<sup>η</sup> διάσταση του συστήματος μας (M1) για 1 βήματα μπροστά και ισούται με 0,7990014. Όσο αναφορά την 2<sup>η</sup> χρονοσειρά καταλήξαμε ότι μεγαλύτερος εκθέτης Lyapunov βρίσκεται στην 1<sup>η</sup>

διάσταση του συστήματος μας (M1) για 1 βήμα μπροστά και ισούται με 1,180673 .Σύμφωνα με τη θεωρία ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης είναι :

$$\frac{1}{MAX LYAPUNOV} \quad (3.1)$$

Που ισούται με 1,26 βήματα μπροστά για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και 0,85 περίπου αντίστοιχα για την χρονοσειρά των αποδόσεων. Με λίγα λόγια η ανάλυσή μας μας λέει ότι μπορούμε με ασφάλεια να προβλέψουμε περίπου για 1 πολύ βήματα μπροστά και για τις 2 χρονοσειρές που αντιστοιχεί σε 1 χρηματιστηριακή εβδομάδα.

### **3.2.7 Περιγραφή διαδικασίας πρόβλεψης με το πρόγραμμα Nener και παρουσίαση αποτελεσμάτων**

Ολοκληρώνουμε το συγκεκριμένο κεφάλαιο με τις προβλέψεις εφόσον γνωρίζουμε και τον χρονικό ορίζοντα προβλέψεις. Το πρόγραμμα Nener χρησιμοποιήθηκε για τη διεκπεραίωση των προβλέψεων καθώς είναι σε θέση να προβλέψει την εξέλιξη της εξεταζόμενης ποσότητας κάνοντας χρήση της μεθόδου των  $k$  κοντινότερων γειτόνων με επαναλήψεις (*iterations*). Έτσι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε την εξέλιξη των κοντινότερων γειτόνων της προβλεπόμενης κατάστασης στον ανακατασκευασμένο φασικό χώρο.

Στο πρόγραμμα που έγινε χρήση απαιτείται ο ορισμός ενός αριθμού μεταβλητών μεταξύ αυτών ο χρόνος καθυστέρησης, η διάσταση εμπύθυνσης, ο αριθμός των κοντινότερο γειτόνων και ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης. Αν και έχουμε προβεί στη χαοτική μας ανάλυση αυτό δεν σημαίνει έχοντας βρει κάποιες από τις τιμές που θα εισαχθούν ως μεταβλητές στο πρόγραμμα ότι εγγυάται και η αποτελεσματικότητα των προβλέψεων. Για το λόγο αυτό θα γίνει μία εκτεταμένη έρευνα ούτως ώστε να βρούμε τον κατάλληλο συνδυασμό των παραπάνω μεταβλητών που έχουν αναφερθεί Μιας και το συγκεκριμένο πρόγραμμα προσφέρει αυτή τη δυνατότητα. Πιο συγκεκριμένα θα γίνουμε τρεις έρευνες στη χρονοσειρά τιμών πετρελαίου καθώς και στην χρονοσειρά των αποδόσεων όπου θα εφαρμοστεί η συγκεκριμένη μέθοδος (δηλαδή τον  $k$  κοντινότερο γειτόνων) με μικρές παραλλαγές της μεθόδου που σχετίζονται με την επιβολή βαρών στους πλησιέστερους γείτονες πάνω στην εξίσωση του θεωρήματος Takens που αναφέρθηκε στην ενότητα 2.2.5. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις

1. Η μέθοδος συνεχής (*constant*) όπου όλοι οι γείτονες έχουν το ίδιο βάρος.
2. Η μέθοδος γραμμική (*linear*) όπου τα βάρη είναι αντιστρόφως ανάλογα της αποστάσεις των γειτόνων από την προβλεπόμενη κατάσταση.

3. Η μέθοδος τετραγωνική (*quadratic*) όπου τα βάρη είναι αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης των γειτόνων από την προβλεπόμενη κατάσταση

Η αξιολόγηση της επιτυχίας του μοντέλου για τους διάφορους συνδυασμούς μεταβλητών (χρόνος καθυστέρησης, διάσταση εμβύθισης ,αριθμός κοντινότερο γειτόνων) θα γίνει με τη χρήση του κανονικοποιημένου μέσο τετραγωνικού σφάλματος ρίζας (*RMSE*) . Ο ιδανικός συνδυασμός μεταβλητών που ψάχνουμε είναι αυτός με τον χαμηλότερο σφάλμα. Τέλος με την εύρεση αυτών θα γίνει για τις συγκεκριμένες τιμές πρόβλεψη για τον χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης που είναι για μία χρηματιστηριακή εβδομάδα μπροστά και για τις δύο χρονοσειρές μας. Ο έλεγχος των παραμέτρων έγινε για συνδυασμούς μεταβλητών από 1εως 26 χρόνους καθυστέρησης(*time delay*) ,1 έως 4 διαστάσεις εμβύθυνσης(*embedding dimension*) και 1 έως 30 αριθμό κοντινό των γειτόνων(*nearest neighbors*) που έγιναν λόγω της μελέτης που προέκυψε από τη χαοτική ανάλυση.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ερευνών μας για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και στην συνέχεια για την χρονοσειρά των αποδόσεων.

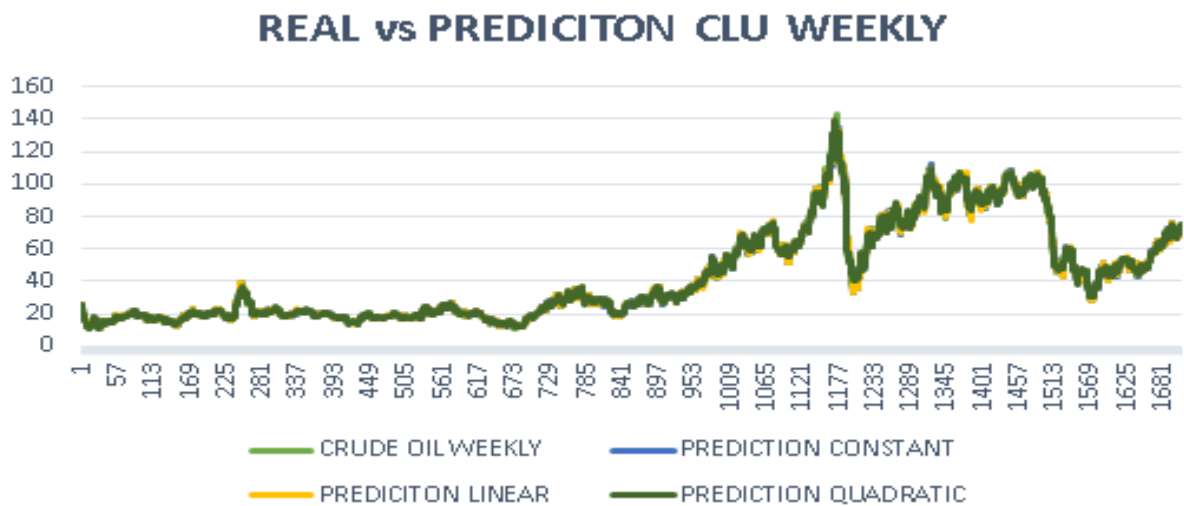
**Πίνακας (3.1) αποτελεσμάτων έρευνας καταλληλότερου συνδυασμού μεταβλητών για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

TYPE OF WEIGHTS	TIME DELAY	EMBEDDING	NEIGHBOURS	RMSE
CONSTANT	26	1	8	0,08680379
LINEAR	26	1	17	0,0749786
QUADRATIC	20	2	11	0,07599364

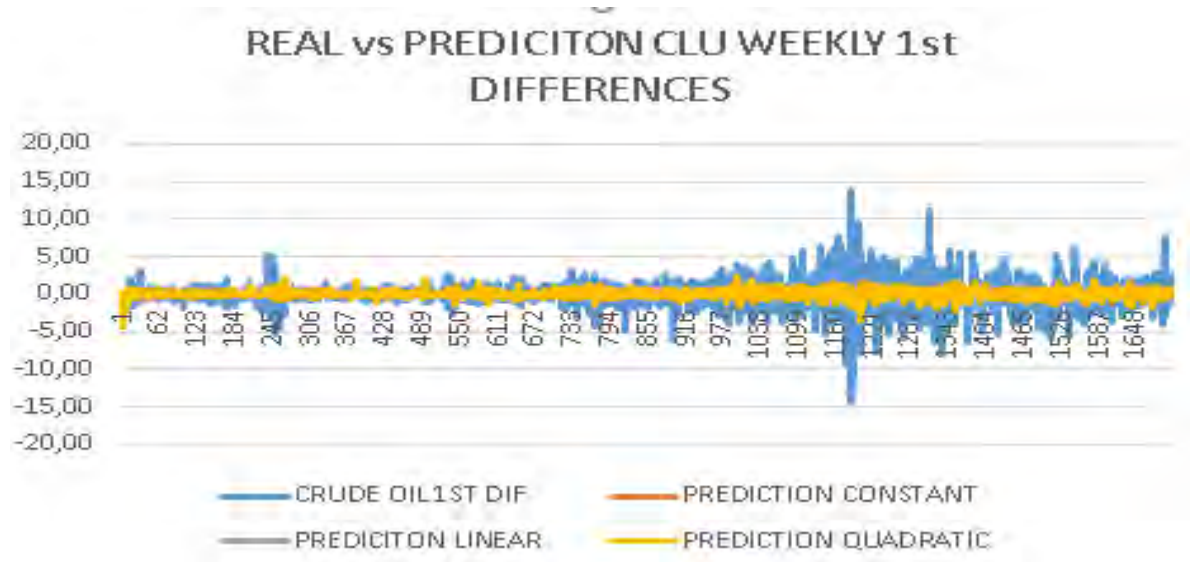
**Πίνακας (3.2) αποτελεσμάτων έρευνας καταλληλότερου συνδυασμού μεταβλητών για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

TYPE OF WEIGHTS	TIME DELAY	EMBEDDING	NEIGHBOURS	RMSE
CONSTANT	4	4	28	0,9852344
LINEAR	4	4	28	0,9853522
QUADRATIC	4	4	28	0,9893553

Έχοντας τον κατάλληλο συνδυασμό παραμέτρων για τις 2 χρονοσειρές μας προχωράμε στις προβλέψεις. Αρχικά παρουσιάζονται τα διαγράμματα προβλεπόμενων τιμών και πραγματικών τιμών της χρονοσειρά πετρελαίου και στη συνέχεια αυτό τον αποδόσεων για τις διάφορες παραλλαγές της μεθόδου. Στον οριζόντιο άξονα είναι ο αριθμός των χρηματιστηριακών εβδομάδων ενώ στον κάθετο άξονα οι τιμές του πετρελαίου.

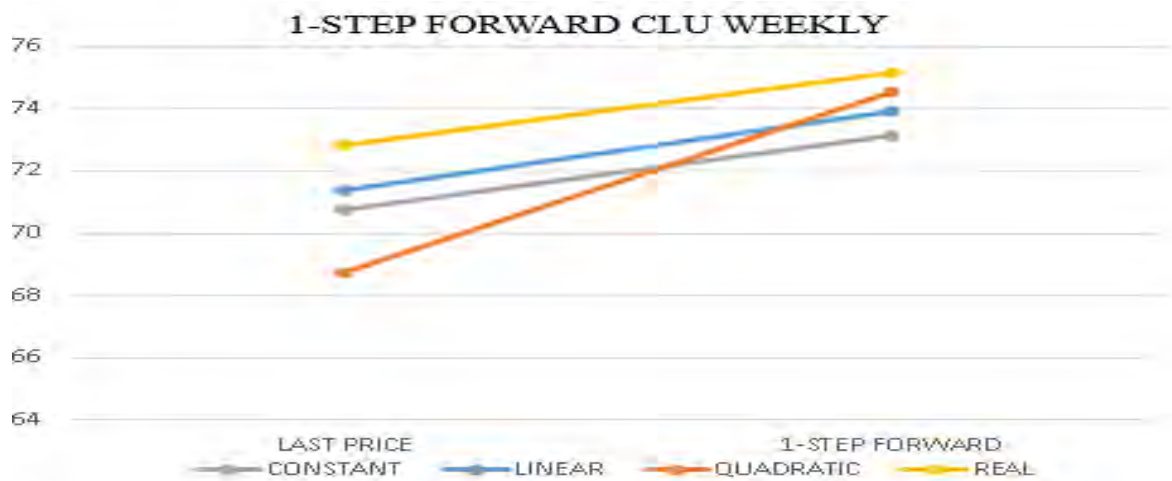


**Γράφημα (3.21) Πραγματικές και προβλεπόμενες τιμές της χρονοσειράς πετρελαίου**



**Γράφημα (3.22) Πραγματικές και προβλεπόμενες τιμές της χρονοσειράς των αποδόσεων του πετρελαίου**

Προκειμένου να έχουμε μια καλύτερη εικόνα των αποτελεσμάτων έχουμε δημιουργήσει 2 ακόμα γραφήματα για την πρόβλεψη μιας χρηματιστηριακής εβδομάδας μπροστά και 2 πίνακες τιμών με τις προβλέψεις. Αρχικά παρουσιάζονται για την χρονοσειράς πετρελαίου.

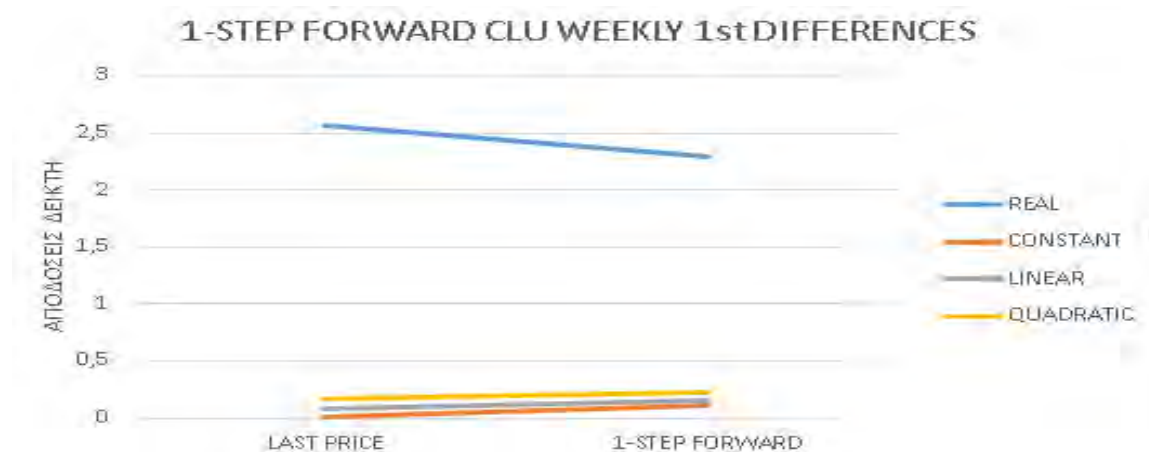


**Γράφημα (3.23) Πρόβλεψη μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

**Πίνακας (3.3) τιμών προβλέψεων μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

REAL	CONSTANT	LINEAR	QUADRATIC	STEPS
72,84	70,77	71,39	68,71	LAST PRICE
75,13	73,16	73,91	74,52	1-STEP FORWARD

Στην συνέχεια παρουσιάζονται το αντίστοιχο γράφημα και ο αντίστοιχος πίνακας για την χρονοσειρά των αποδόσεων.



**Γράφημα (3.24) Πρόβλεψη μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για την χρονοσειρά αποδόσεων του πετρελαίου**

**Πίνακας (3.4) τιμών προβλέψεων μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου**

REAL	CONSTANT	LINEAR	QUADRATIC	STEPS
2,56	0,01	0,08	0,17	LAST PRICE
2,29	0,11	0,15	0,23	1-STEP FORWARD

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση μας στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρατηρούμε ότι οι προβλέψεις μας στην κανονική χρονοσειρά τιμών πετρελαίου με τις διάφορες παραλλαγές στα βάρη τις μεθόδους τον κοντινό των γειτόνων είναι πολύ ικανοποιητικές καθώς βλέπουμε και στις τρεις περιπτώσεις προβλέψεων ότι έχουμε σφάλμα μικρότερο από 2%. Ταυτόχρονα το πιο σημαντικό της υπόθεσης είναι ότι η τάση που προβλέπουμε συμβαδίζει με την πραγματική τάση στον χρηματιστηριακό δείκτη πράγμα που θα μας βοηθήσει πάρα πολύ στην λήψη σωστών αποφάσεων όσον αφορά τις κινήσεις στην αγορά το συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Από την άλλη πλευρά οι προβλέψεις μας στη χρονοσειρά των αποδόσεων είναι λιγότερο ικανοποιητικές διότι το σφάλμα και στις τρεις περιπτώσεις είναι κοντά στο 2,5%. Παρόλα αυτά η ουσία της υπόθεσης είναι ότι προβλέπουμε σωστό πρόσημο καθώς και οι πραγματικές και οι προβλεπόμενες αποδόσεις είναι θετικές.

### **3.3 Μελέτη του δείκτη πετρελαίου με νευρωνικά τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και προβλέψεις**

Στη συγκεκριμένη ενότητα πρόκειται να κατασκευάσουμε δύο μοντέλα νευρωνικών δικτύων προκειμένου να μελετήσουμε η χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και τις αποδόσεις. Τα μοντέλα νευρωνικών δικτύων που αποφασίστηκαν να δημιουργηθούν για τη συγκεκριμένη εργασία είναι δύο δίκτυα εμπρός τροφοδότησης πολλαπλών επιπέδων και για τις δύο χρονοσειρές μας.

Τα ερωτήματα που δημιουργήθηκαν προτού ξεκινήσει η κατασκευή των συγκεκριμένων μοντέλων ήταν ο αριθμός εισόδων που έπρεπε να χρησιμοποιηθεί καθώς και ο αριθμός των κρυφών στρωμάτων και των αριθμών των νευρώνων που θα υπήρχαν σε αυτό. Αυτό που αποφασίστηκε ήταν η χρήση 5 εισόδων και για τις δύο χρονοσειρές καθώς μετά από δοκιμαστικές διεργασίες δύο, τριών και τεσσάρων εισόδων τα αποτελέσματα δεν έδειχναν να είναι ικανοποιητικά όσο αφορά τα σφάλματα εκπαίδευσης και προβλέψεων. Επίσης όσο αφορά τον αριθμό των κρυφών στρωμάτων αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθεί η απλούστερη μορφή δηλαδή ένα κρυφό στρώμα (*hidden layer*) και για τα δύο νευρωνικά μοντέλα καθώς τα αποτελέσματα μετά από διεργασίες έδειξαν αρκετά ικανοποιητικά και επαρκή. Όσον αφορά τον αριθμό των νευρώνων στα κρυφά στρώματα αυτός επιλέχτηκε με την μέθοδο δοκιμής σφάλματος (*try error*) όπου εκτελέστηκε από το πρόγραμμα Alyuda Neurointelligence ειδικό στην ανάλυση νευρωνικών δικτύων. Με αυτόν τον τρόπο ελέγχθηκαν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί με πέντε εισόδους μία έξοδο και ενός κρυφού στρώματος από έναν έως 15 νευρώνες.

Το πείραμα ξεκινάει από την εισαγωγή των δεδομένων και τον διαχωρισμό των της κάθε χρονοσειράς σε επιμέρους τμήματα δεδομένων. Έπειτα κάνοντας χρήση του κανόνα δέλτα και της λογιστικής συνάρτησης ενεργοποίησης θα παρουσιαστούν οι 5 καλύτερες αρχιτεκτονικές δομές με τα μικρότερα σφάλματα εκπαίδευσης καθώς και ακόμα μερικά ακόμα στατιστικά στοιχεία και στις δύο περιπτώσεις των χρονοσειρών. Στη συνέχεια θα εκ νέου εκπαίδευση κάνοντας χρήση την καλύτερη αρχιτεκτονική δομή με δύο διαφορετικούς αλγόριθμους εκπαίδευσης τη μέθοδο Quick propagation και Quasi-Newton γίνουμε προβλέψεις για ένα βήμα μπροστά .

Ξεκινώντας την ανάλυση μας είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε καθορίζουμε τον ασφαλή ορίζονται πρόβλεψης και για τις δυο χρονοσειρές μας όπως προέκυψε με βάση τον υπολογισμό του μέγιστου Lyapunov exponent στην χρονοσειρά μας



ανάλυση καθώς και ότι ο ασφαλής χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης είναι περίπου 1.25 χρηματιστηριακές εβδομάδες μπροστά για την κανονική χρονοσειρά και 0.85 για τις αποδόσεις δηλαδή ένα βήμα μπροστά και για τα τις 2 χρονοσειρές. Έπειτα θέτουμε τον αριθμό εισόδων των δικτύων ο οποίος είναι 5 όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται δυο πίνακες με τον αριθμό δεδομένων που εισάχθηκαν στο πρόγραμμα από τις δύο χρονοσειρές δεδομένων καθώς και τα ποσοστά των τμημάτων των χρονοσειρών που θα χρησιμοποιηθούν ως μέρη εκπαίδευσης των νευρωνικών μας δικτύων ως τέστ επικύρωσης αποτελεσμάτων και ως τέστ δοκιμής. Αρχικά παρουσιάζεται για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και στην συνέχεια για τις χρονοσειρά αποδόσεων.

**Πίνακας (3.5) Διαχωρισμών δεδομένων κατασκευής νευρωνικών δικτύων χρονοσειράς τιμών πετρελαίου**

Partition sets using:	<input type="radio"/> Records	<input checked="" type="radio"/> Percentage
Total:	1705	100
Training set:	1161	68
Validation set:	272	16
Test set:	272	16
Ignored set:	0	0

**Πίνακας (3.6) Διαχωρισμών δεδομένων κατασκευής νευρωνικών δικτύων χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου**

Partition sets using:	<input type="radio"/> Records	<input checked="" type="radio"/> Percentage
Total:	1689	100
Training set:	1149	68
Validation set:	270	16
Test set:	270	16
Ignored set:	0	0

Από τους πίνακες παρατηρούμε ότι έχουν εισαχθεί στο πρόγραμμα 1705 δεδομένα των τιμών του πετρελαίου εκ των οποίων το 68% αυτών αποτελούνε το τέστ εκπαίδευσης του νευρωνικού δικτύου το 16% αποτελεί το τέστ επικύρωσης αποτελεσμάτων και το υπόλοιπο 16 % το τέστ δοκιμής στο σετ εκπαίδευσης. Στη χρονοσειρά των αποδόσεων έχουν εισαχθεί 1689 δεδομένα και διατηρούνται τα ίδια ποσοστά διαχωρισμού της χρονοσειράς όπως και με την πρώτη χρονοσειρά. Ο λόγος που έχουν εισαχθεί λιγότερες τιμές στην περίπτωση των αποδόσεων είναι ο αποκλεισμός ορισμένων ακραίων τιμών οι οποίες θα μπορούσαν να επιφέρουν παραπλανητικές κατευθύνσεις στην εκπαίδευση και να οδηγήσουν σε ανακρίβειες στις προβλέψεις.

Ο τρόπος εισαγωγής των στηλών που θα γίνει η ανάλυση ο οποίος είναι με την μορφή εισαγωγής δεδομένων (*input*) και για τις 2 χρονοσειρές. Οι στήλες ανάλυσης των δεδομένων θα γίνει σε 5 μέρη εξαιτίας του αριθμού εισόδων που έχουμε ορίσει στην αρχή της ανάλυσης μας. Στη συνέχεια επιλέγουμε την μέθοδο συναρτήσεων ενεργοποίησης και την μέθοδο υπολογισμού των σφαλμάτων των δικτύων όπου είναι το άθροισμα των τετραγώνων. Και στις 2 χρονοσειρές μας θα χρησιμοποιήσουμε την λογιστική συνάρτηση ενεργοποίησης στη και στις εισόδους και στις εξόδους. Έπειτα ορίζονται οι στήλες για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. . Οι μέθοδοι επιλέχτηκαν κατόπιν έρευνας καθώς αποδείχτηκε ότι βγάζουν όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με την μελλοντική τιμή των χρονοσειρών μας. Οι πληροφορίες ακολουθούν στον ακόλουθο πίνακα ο οποίος είναι ίδιος και για τα δύο δίκτυα.

**Πίνακας (3.7) Ιδιότητες νευρωνικών δικτύων των 2 χρονοσειρών**

Network Properties	
Parameter	Value
Input activation FX	Logistic
Output name	Column #1: next
Output error FX	Sum-of-squares
Output activation FX	Logistic

Μετά την εισαγωγή των απαραίτητων δεδομένων καθώς και την απαραίτητη επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών συναρτήσεων ακολουθεί η εύρεση της καταλληλότερης αρχιτεκτονικής δομής των στρωμάτων και των αριθμό των νευρώνων του δικτύου μας, Γίνονται 500 επαναλήψεις παλινδρομήσεων και στις 2 χρονοσειρές προκειμένου να λάβουμε τα ακόλουθα συγκεντρωτικά αποτελέσματα Το κριτήριο για την επιλογή της καταλληλότερης δομής αποτελεί το μικρότερο σφάλμα του τέστ δοκιμής. Ο πρώτος πίνακας αφορά την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου

**Πίνακας (3.8) Δοκιμές καλύτερης αρχιτεκτονικής δομής τεχνητών νευρωνικών δικτύων χρονοσειράς τιμών πετρελαίου**

ID	Architecture	Train Error	Validation Error	Test Error	Correlation	R-Squared
1	[5-9-1]	1,133053	3,134265	1,763967	0,996557	0,993075
2	[5-13-1]	1,187693	3,140151	1,93413	0,996349	0,992664
3	[5-11-1]	1,303981	3,19163	2,044328	0,995642	0,991233
4	[5-10-1]	1,110664	3,55826	2,076787	0,99671	0,993385
5	[5-8-1]	1,212651	3,65863	2,128806	0,996158	0,99224

Παρατηρούμε ότι η καταλληλότερη δομή του δικτύου μας είναι για τα κανονικά μας δεδομένα είναι η 5-9-1 εξαιτίας του χαμηλότερου σφάλματος δοκιμής που ανέρχεται στο 1,763967 πιο συγκεκριμένα να έχει 5 εισόδους 9 κόμβους το κρυμμένο στρώμα και μία έξοδο. Το σφάλμα των δεδομένων εκπαίδευσης ανέρχεται στο 1,133053 το σφάλμα επικύρωσης στο

3,134265 ο συντελεστής συσχέτισης στο 0,996557 , ο συντελεστής προσδιορισμού στο 0,993075.

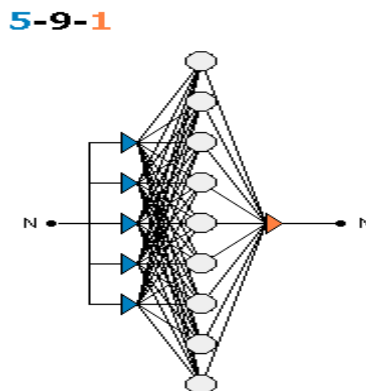
Ακολουθεί ο πίνακας όσο αφορά την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου

**Πίνακας (3.9) Δοκιμές καλύτερης αρχιτεκτονικής δομής τεχνητών νευρωνικών δικτύων χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου**

ID	Architecture	Train Error	Validation Error	Test Error	Correlation	R-Squared
1	[5-6-1]	0,867596	2,282048	1,504967	0,12656	0,015894
2	[5-7-1]	0,865974	2,286666	1,516392	0,147638	0,021456
3	[5-8-1]	0,865012	2,286966	1,520065	0,157361	0,024585
4	[5-5-1]	0,864342	2,281356	1,526036	0,194405	0,034146
5	[5-13-1]	0,868851	2,278609	1,530627	0,14221	0,019804

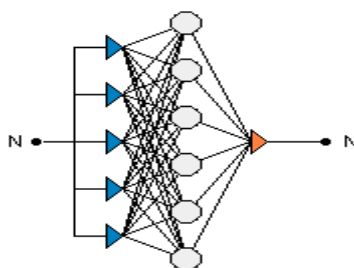
Παρατηρούμε ότι η καταλληλότερη δομή του δικτύου μας είναι για τις αποδόσεις είναι η 5-6-1 εξαιτίας του χαμηλότερου σφάλματος δοκιμής που ανέρχεται στο 1,504967 πιο συγκεκριμένα να έχει 5 εισόδους 9 κόμβους το κρυμμένο στρώμα και μία έξοδο. Το σφάλμα των δεδομένων εκπαίδευσης ανέρχεται στο 0,867596 ,το σφάλμα επικύρωσης στο 2,282048,ο συντελεστής συσχέτισης στο 0,12656, ο συντελεστής προσδιορισμού στο 0,015894.

Παρουσιάζονται οι μορφές των καλύτερων νευρωνικών δικτύων που βρέθηκαν και θα χρησιμοποιηθούν για την εκπαίδευση και την εξαγωγή προβλέψεων. Αρχικά παρουσιάζεται για τη χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και στην συνέχεια για τη χρονοσειρά αποδόσεων.



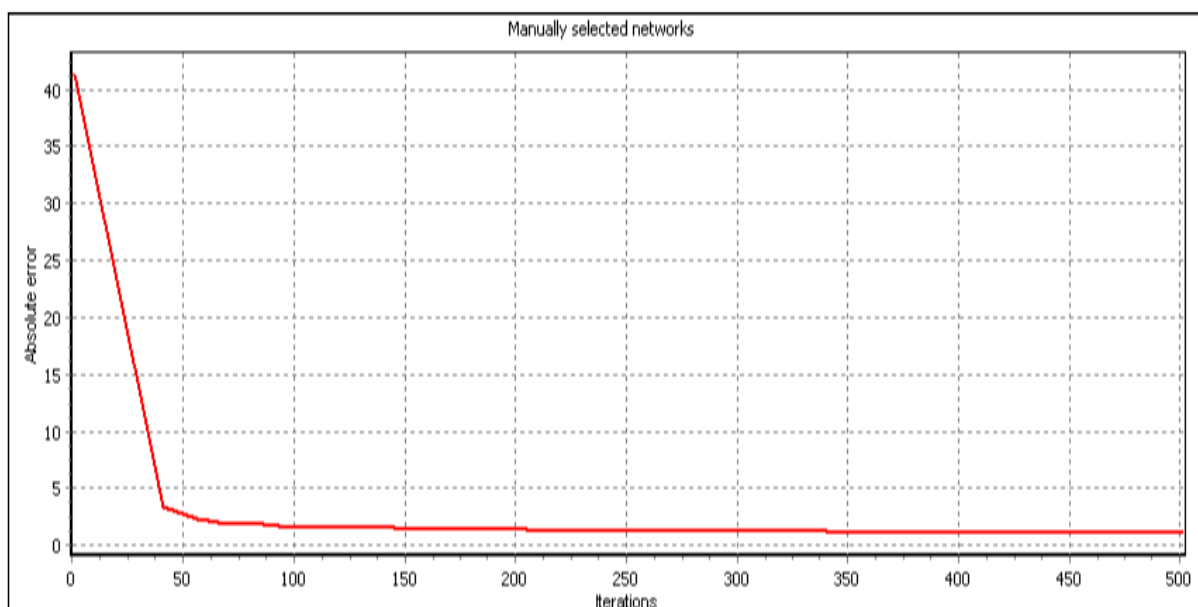
**Σχήμα (3.1) Αρχιτεκτονική δομή νευρωνικού δικτύου χρονοσειράς τιμών πετρελαίου**

5-6-1



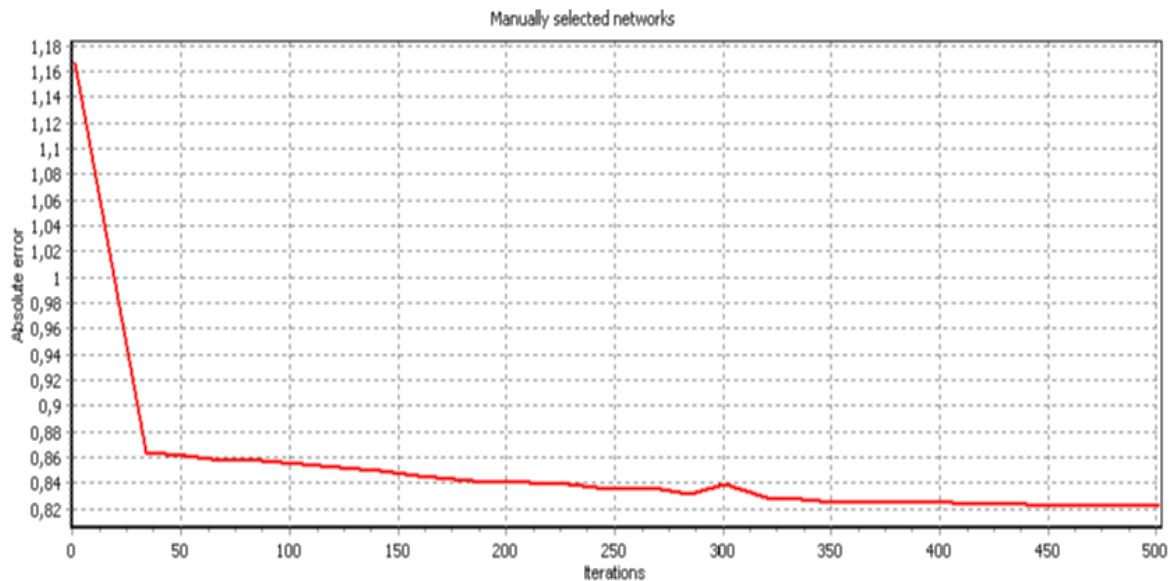
**Σχήμα (3.2) Αρχιτεκτονική δομή νευρωνικού δικτύου χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου**

Ακολουθεί το απόλυτο σφάλμα του καλύτερου δικτύου ξεχωριστά για τις 2 χρονοσειρές μας. η βελτίωση αυτών με την πάροδο των 500 επαναλήψεων. Αρχικά παρουσιάζεται για το δίκτυο [5-9-1] της χρονοσειράς τιμών πετρελαίου.



**Γράφημα (3.25) Απόλυτο σφάλμα του δικτύου[5-9-1] μετά από 500 επαναλήψεις**

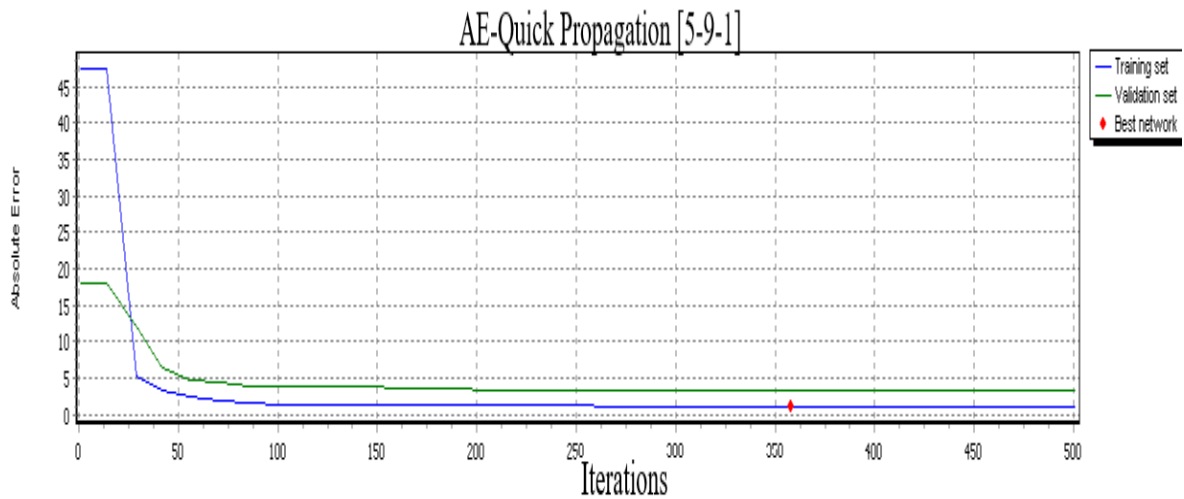
Ακολουθεί το απόλυτο σφάλμα για το δίκτυο [5-6-1] της χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου.



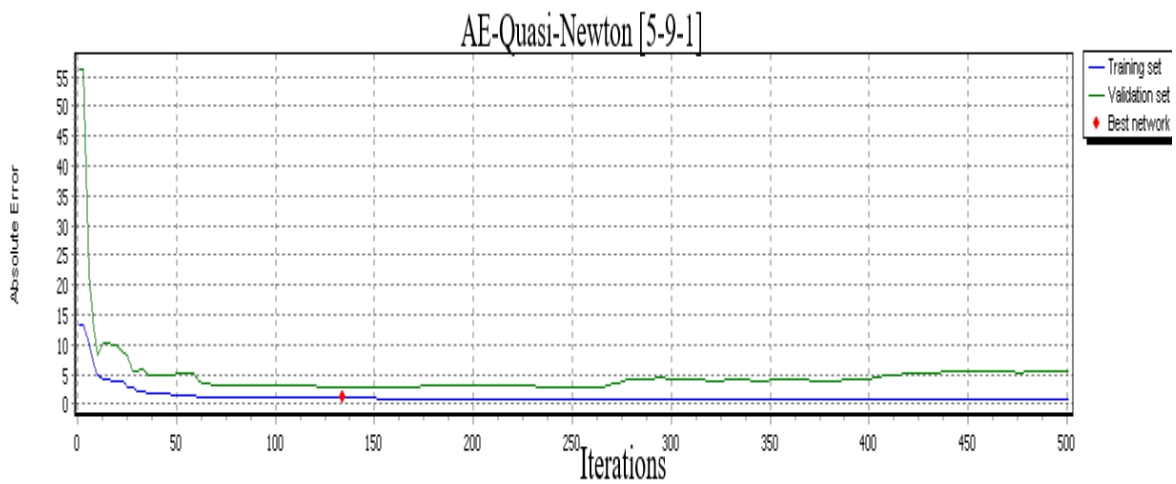
### Γράφημα (3.26) Απόλυτο σφάλμα του δικτύου[5-6-1] μετά από 500 επαναλήψεις

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι το απόλυτο σφάλμα δεν αποτελεί το κύριο κριτήριο κατάταξης σχετικά με την επιλογή της καλύτερης αρχιτεκτονικής δομής κάθε χρονοσειράς, απλώς μας δείχνει τον ρυθμό με το οποίο το σφάλμα μειώνεται μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων.

Εφόσον έχει επιλεγεί η καταλληλότερη αρχιτεκτονική δομή του δικτύου μας για κάθε χρονοσειρά μας ακολουθεί η εκπαίδευση των δικτύων μέσα από ένα αριθμό επιλογών. Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι quick propagation και Quasi-Newton. Πριν την τελική πρόβλεψη για κάθε χρονοσειρά όμως παρουσιάζονται τα απόλυτα σφάλματα (*absolute errors*) των 500 επαναλήψεων εκπαίδευσης των δικτύων και συγκεκριμένα του τμήματος εκπαίδευσης κάθε χρονοσειράς (*training set*) και του τμήματος επικύρωσης κάθε χρονοσειράς (*validation test*) για κάθε διαφορετικό αλγόριθμο εκπαίδευσης. Αρχικά παρουσιάζεται για τον αλγόριθμο quick propagation και στην συνέχεια για τον αλγόριθμο quasi-newton για το δίκτυο [5-9-1] της χρονοσειράς πετρελαίου.

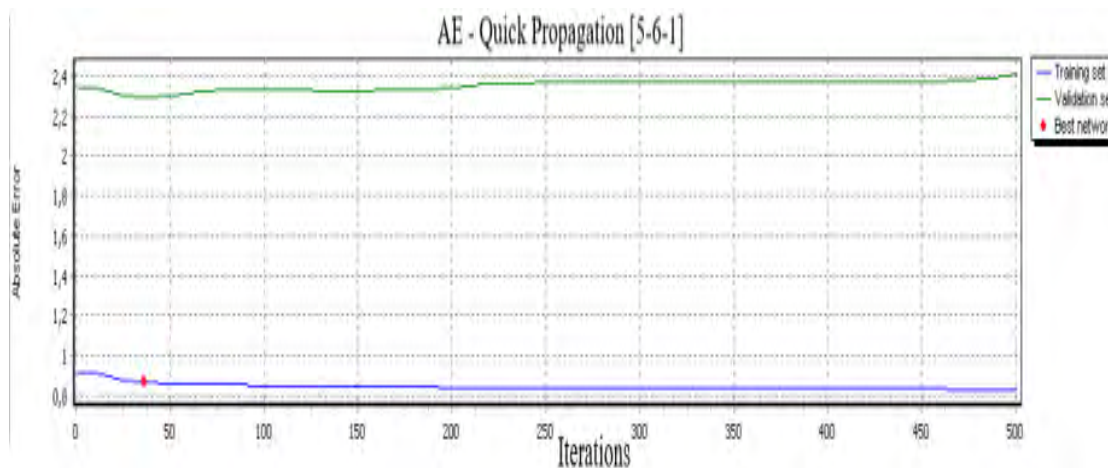


**Γράφημα (3.27) Απόλυτο σφάλμα σετ δεδομένων εκπαίδευσης/επικύρωσης μεθόδου Quick Propagation δικτύου [5-9-1]**

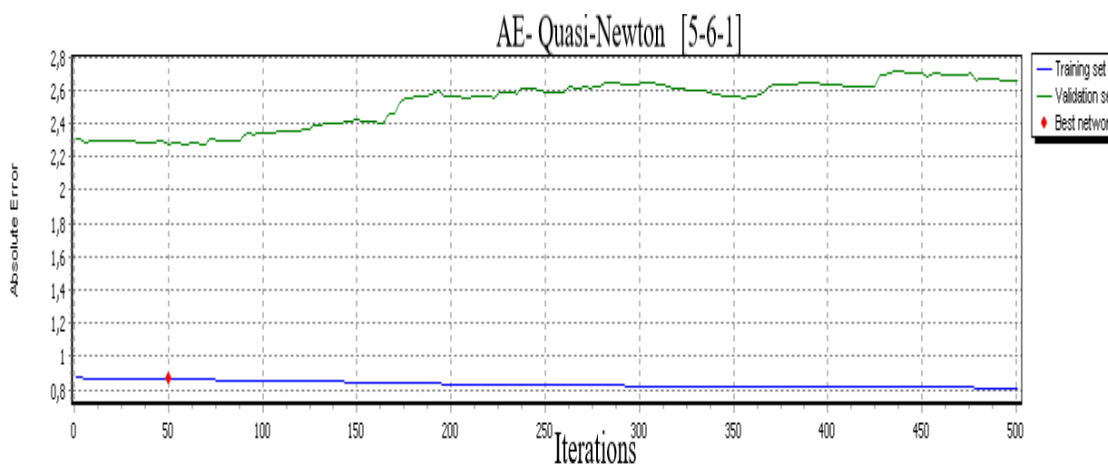


**Γράφημα (3.28) Απόλυτο σφάλμα σετ δεδομένων εκπαίδευσης/επικύρωσης μεθόδου Quasi-Newton δικτύου [5-9-1]**

Στην συνέχεια παρουσιάζεται για τον αλγόριθμο quick propagation και στην συνέχεια για τον αλγόριθμο quasi-newton για το δίκτυο [5-6-1] της χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου.



**Γράφημα (3.29) Απόλυτο σφάλμα σετ δεδομένων εκπαίδευσης/επικύρωσης μεθόδου Quick Propagation δικτύου [5-6-1]**



**Γράφημα (3.30) Απόλυτο σφάλμα σετ δεδομένων εκπαίδευσης/επικύρωσης μεθόδου Quasi-Newton δικτύου [5-6-1]**

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε τα απόλυτα σφάλματα κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων μεταξύ των τμημάτων εκπαίδευσης και επικύρωσης. Η κόκκινη βούλα μας δείχνει την επανάληψη κατά την οποία εντοπίστηκε το καλύτερο δίκτυο με το χαμηλότερα απόλυτο σφάλμα. Περίπου στην 340<sup>η</sup> επανάληψη για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και το δίκτυο [5-9-1] για την μέθοδο Quick propagation και περίπου στην 140<sup>η</sup> για τη μέθοδο Quasi-Newton. Όσο αφορά την χρονοσειρά αποδόσεων πετρελαίου και το δίκτυο [5-6-1] εντοπίστηκε το καλύτερο δίκτυο περίπου στη 40<sup>η</sup> επανάληψη για την μέθοδο Quick propagation και περίπου στην 50<sup>η</sup> για τη μέθοδο Quasi-Newton.

Συνεχίζοντας την μελέτη μας θα παρουσιαστούνε δύο πίνακες με τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα ρίζας (*RMSE*) των διάφορων σετ δεδομένων (*training set*, *validation set*, *test set*) σε σχέση με τις επιθυμητές τιμές και τις εξαγόμενες (*real vs output*) των δυο δικτύων που

δημιουργήσαμε δηλαδή του [5-9-1] για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και [5-6-1] για την χρονοσειρά των αποδόσεων.

**Πίνακας (3.10) Σφάλματα (RMSE) πραγματικών έναντι προβλεπόμενων τιμών μεθόδων Quick propagation-Quasi-Newton για τα διάφορα σετ εκπαίδευσης των τεχνητών νευρωνικών δικτύων [5-9-1],[5-6-1]**

ANN	ALGORITHM	RMSE TRN SET	RMSE VLD SET	RMSE TST SET
[5-9-1]	QUICK PROPAGATION	1,555520078	4,498096291	2,218524952
[5-9-1]	QUASI-NEWTON	1,416932911	4,08698299	1,997852871
[5-6-1]	QUICK PROPAGATION	1,265140544	2,839422698	1,939934158
[5-6-1]	QUASI-NEWTON	1,267460644	2,812405145	1,908564805

Από τα αποτελέσματα των σφαλμάτων του πίνακα παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος Quasi-Newton έχει μικρότερο σφάλμα πρόβλεψης σε όλες τις περιπτώσεις εκτός από το σετ εκπαίδευσης δεδομένων στο δίκτυο [5-6-1]. Το κυρίως σφάλμα που μας ενδιαφέρει είναι το test set καθώς μας δίνει μια εικόνα για τον τρόπο που συμπεριφέρονται τα δίκτυα μας σε δεδομένα που δεν έχει εκπαιδευτεί

Παρακάτω βλέπουμε την γενικευμένη πρόβλεψη των δικτύων μας για ένα βήμα μπροστά όπως υπολογίστηκαν μετά την εκπαίδευση των δικτύων μας με τις με τους αλγορίθμους των Quick propagation και Quasi-Newton. Αρχικά παρουσιάζεται το διάγραμμα και ο πίνακας τιμών πρόβλεψης για τα δεδομένα της χρονοσειράς τιμών πετρελαίου δηλαδή για το δίκτυο [5-9-1]



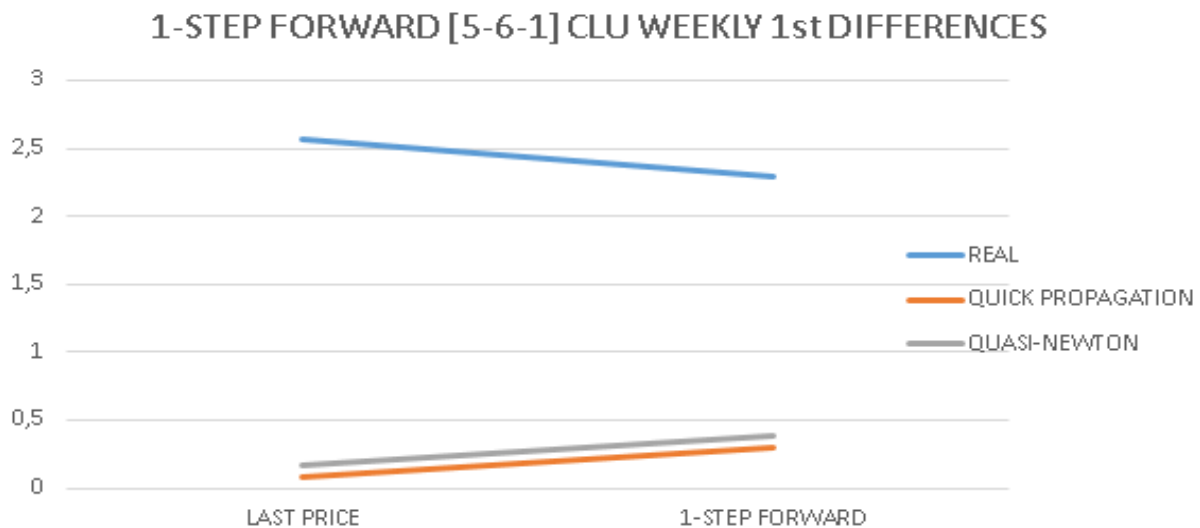
**Γράφημα (3.31) Πρόβλεψης μίας χρηματιστηριακής εβδομάδας για το δίκτυο [5-9-1] της χρονοσειράς τιμών πετρελαίου**



**Πίνακας (3.11) τιμών προβλέψεων μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για το δίκτυο [5-9-1]**

REAL	QUICK PROPAGATION	QUASI-NEWTON	STEPS
72,8	70,505407	70,569519	LAST PRICE
75,1	73,194774	73,057839	1-STEP FORWARD

Τέλος παρουσιάζονται διάγραμμα και ο πίνακας τιμών πρόβλεψης για τα δεδομένα της χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου δηλαδή για το δίκτυο [5-6-1].



**Γράφημα (3.32) πρόβλεψης μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για το δίκτυο [5-6-1] της χρονοσειράς αποδόσεων πετρελαίου**

**Πίνακας (3.12) τιμών προβλέψεων μίας χρηματιστηριακής βδομάδας για το δίκτυο [5-6-1]**

REAL	QUICK PROPAGATION	QUASI-NEWTON	STEPS
2,56	0,087129	0,168533	LAST PRICE
2,29	0,290043	0,376835	1-STEP FORWARD

Συνοψίζοντας στο δίκτυο [5-9-1] που αντιστοιχεί στην χρονοσειρά τιμών πετρελαίου με τον αλγόριθμο εκπαίδευσης Quick propagation προβλέφθηκε 73,19 ενώ με τον Quasi-Newton 73,05 δηλαδή έχουμε ένα σφάλμα πρόβλεψης περίπου 2,58% και 2,76% αντίστοιχα κάτι που θα μπορούσε να τις χαρακτηρίσει αρκετά ικανοποιητικές. Όσο αναφορά το δίκτυο [5-6-1] που αντιστοιχεί στην χρονοσειρά των αποδόσεων ο αλγόριθμος εκπαίδευσης Quick propagation προέβλεψε 0,29 ενώ με τον Quasi-Newton 0,37 δηλαδή έχουμε ένα σφάλμα πρόβλεψης περίπου 87,33% και 83,84% κάτι που θα μπορούσε να τις χαρακτηρίσει ότι δεν είναι καλές. Στην πορεία θα παρουσιαστεί ο τρόπος που θα εκμεταλλευτούμε τις συγκεκριμένες προβλέψεις.

### **3.4 Επιλογή κατάλληλων θέσεων σε συμβόλαια και μελλοντικής εκπλήρωσης**

Έχοντας πλέον τις κατάλληλες ενδείξεις για την κατεύθυνση του δείκτη στρεφόμεστε στην αγορά συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης προκειμένου να εκμεταλλευτούμε τη συγκεκριμένη γνώση προς όφελός μας. Όσον αφορά την επιλογή των καταλληλότερων κινήσεων που πρέπει να γίνουν στη συγκεκριμένη αγορά θα ήταν καλό να κάνουμε κάποιες υποθέσεις.

Για τους χαρακτηριζόμενους επενδυτές οι οποίοι είναι δεκτικοί στο να αναλάβουν υψηλό κίνδυνο (*risk lovers*) οι θέσεις κοντά στο δείκτη η αλλιώς κοντά στο χρήμα (*near the money*) είναι οι πλέον κατάλληλες καθώς είναι εξαιρετικά κερδοφόρες αλλά εξαιρετικά επικίνδυνες ιδιαίτερα σε περιόδους έντονων μεταβολών και αστάθειας. Οι συγκεκριμένοι επενδυτές θα μπορούσαν να αγοράσουν δίχτυ πετρελαίου δηλαδή ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης (*future*) το οποίο μπορεί να αποφέρει μεγάλα κέρδη η μεταβλητότητα της περιόδου ή να πουλήσουμε (*short*) ένα put option στο -6 την τιμή του δείκτη δηλαδή στα 66 που θα άξιζε εκείνη την στιγμή περίπου 200 δολάρια έχοντας ένα συντελεστή (πολλαπλασιαστής 0,2). Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αγοράσουμε (*long*) ένα call option στο +6 από το δείκτη δηλαδή σε επίπεδα 79 της τιμής του δείκτη κάτι που θα άξιζε την δεδομένη χρονική στιγμή γύρω στα 300 δολάρια (πολλαπλασιαστής 0,3). Θα μπορούσαμε να κινηθούμε σε ανάλογες θέσεις πιο κοντά στο δείκτη απλά θα ήταν καλό να αναλογιστούμε και το σφάλμα πρόβλεψης που έχουμε βγάλει που είναι κοντά στο 2,5 - 3 % Και φυσικά δεν θέλουμε σε καμία περίπτωση η τιμή του δείκτη να γίνει ίδια με την τιμή εξάσκησης (Strike price) στην περίπτωση του short option διότι αυτόματος ο κάτοχος της αγορασμένες θέσεις (*long*) έχει το δικαίωμα να δράσει κατά το δοκούν.

Για τους επενδυτές χαρακτηριζόμενους ουδέτερους στον κίνδυνο (*risk neutrals*) θέσεις μια μέτριας απόστασης από τον δείκτη είναι οι ενδεδειγμένες. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να πουλήσουμε ένα put option στο -10 της τιμής του δείκτη δηλαδή στα επίπεδα του 62 όπου θα άξιζε εκείνη τη στιγμή περίπου 70 δολάρια ενώ εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αγοράσουμε ένα Call option στο συν +10 από τον δείκτη Δηλαδή σε επίπεδα 82 της τιμής του δείκτη κάτι που θα άξιζε την δεδομένη χρονική στιγμή γύρω στα 90 δολάρια.

Τέλος για επενδυτές χαρακτηριζόμενους ενάντια στον κίνδυνο (*risk averse*) θέσεις μακριά από τον δείκτη είναι ενδεδειγμένες. Θα μπορούσαμε σε αυτή την περίπτωση να πουλήσουμε ένα put option 20 μονάδες κάτω από το δείκτη δηλαδή στα επίπεδα του 52 σε

συνδυασμό με επενδυτικές κάτι που θα άξιζε εκείνη τη δεδομένη στιγμή γύρω στα 10 δολάρια. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε και εδώ να αγοράσουμε ένα Call option 20 μονάδες πάνω από το δείκτη δηλαδή στα επίπεδα του 92 κάτι που θα άξιζε την δεδομένη στιγμή επίσης γύρω στα 10 δολάρια.

## Κεφάλαιο 4<sup>ο</sup>

### Συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω έρευνα

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αναλύθηκε και μελετήθηκε η χρονοσειρά του πετρελαίου (crude Oil - WTI) εβδομαδιαίων δεδομένων τιμών Παρασκευής και πιο συγκεκριμένα για την περίοδο 3 Ιανουαρίου 1986 έως 28 Σεπτεμβρίου 2018 καθώς και για τη χρονοσειρά των πρώτων διαφορών δηλαδή των αποδόσεων το δείκτη. Πραγματοποιήθηκε έλεγχος υποθέσεων ύπαρξης αποτελεσματικής αγοράς με το τεστ Jarque-Bera και διαπιστώθηκε ότι η χρονολογική σειρά πετρελαίου δεν αντιπροσωπεύει αποτελεσματική αγορά καθώς οι τιμές της δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή σύμφωνα με το ιστόγραμμα που δημιουργήθηκε, αφήνοντας μία πιθανότητα τα δεδομένα μας διατηρούν κάποιες πληροφορίες που μπορούν να μας βοηθήσουν σε μία ενδεχόμενη πρόβλεψη.

Η χασοτική ανάλυση των δύο χρονοσειρών μας φανέρωσε ορισμένες σοβαρές ενδείξεις ύπαρξης χάους καθώς βρέθηκαν θετικοί εκθέτες Lyapunov και θετική εντροπία κατά Kolmogorov για διάφορες διαστάσεις εμβύθυνσης. Επίσης όσον αφορά η χρονοσειρά τιμών πετρελαίου η φρακταλική διάσταση υπολογίστηκε να είναι περίπου 3,60 και για τις αποδόσεις περίπου 3,90 δεκαδικός αριθμός ακόμα μία ένδειξη δηλαδή ύπαρξης χάους στις χρονοσειρές μας. Τέλος η χασοτική ανάλυση έδειξε τον ασφαλή χρονικό ορίζοντα προβλέψεις και πιο συγκεκριμένα 1,26 για την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και 0,85 για τις αποδόσεις. Πρακτικά δηλαδή ένα βήμα μπροστά που αντιστοιχεί σε μία χρηματιστηριακή εβδομάδα και στις δύο περιπτώσεις.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Naper που χρησιμοποιεί την μέθοδο των κοντινότερων γειτόνων με επαναληπτική διαδικασία αναζητήσαμε τους καλύτερους συνδυασμούς μεταβλητών όπου μπορούν να μας εξάγουν την καλύτερη δυνατή η πρόβλεψη με μικρότερο σφάλμα. Υπολογίστηκαν τρεις προβλέψεις για τρεις διαφορετικές παραλλαγές της μεθόδου που σχετίζονται με τα βάρη συντελεστών του μοντέλου για τις 2 χρονοσειρές μας. Συγκεκριμένα η τιμή της χρονοσειράς τιμών πετρελαίου στις 28 Σεπτεμβρίου 2018 έκλεισε στο 72,84. Η μέθοδος constant προέβλεψε ότι η τιμή την επόμενη εβδομάδα θα είναι 73,16, μέθοδος linear 73,91 και η μέθοδος quadratic 74,52. Η πραγματική τιμή της επόμενης εβδομάδας έκλεισε στα 75,13 δηλαδή οι ποσοστιαίες μεταβολές των σφαλμάτων κυμάνθηκαν στο 2,62%, 1,62% και 0,81% αντίστοιχα κάτι που θα μπορούσε να τις χαρακτηρίσει αρκετά ικανοποιητικές. Όσον αφορά την χρονοσειρά των αποδόσεων συγκεκριμένα η απόδοση του

πετρελαίου στις 28 Σεπτεμβρίου 2018 ήταν + 2,56 μονάδες. Η μέθοδος constant προέβλεψε ότι η τιμή την επόμενη εβδομάδα θα είναι +0,11 , μέθοδος linear +0,15 και η μέθοδος quadratic +0,23. Η πραγματική απόδοση της επόμενης βδομάδας έκλεισε στα +2,29 δηλαδή οι ποσοστιαίες μεταβολές των σφαλμάτων κυμάνθηκαν στο 95% , 93% και 89 % αντίστοιχα κάτι που θα μπορούσε να τις ότι δεν είναι καλές. Το θετικό στοιχείο είναι πως έχουμε σωστό πρόσημο όμως θα ήταν καλύτερο να εμπιστευτούμε την πρώτη χρονοσειρά.

Όσο αναφορά τα νευρωνικά δίκτυα κατασκευάστηκαν δύο μοντέλα νευρωνικών δικτύων προκειμένου να μελετήσουμε η χρονοσειρά τιμών πετρελαίου και τις αποδόσεις. Τα μοντέλα νευρωνικών δικτύων που αποφασίστηκαν να δημιουργηθούν για τη συγκεκριμένη εργασία είναι δύο δίκτυα εμπρός τροφοδότησης πολλαπλών επιπέδων και για τις δύο χρονοσειρές μας. Μετά από κατάλληλες διεργασίες αποφασίστηκε πώς η καλύτερη αρχιτεκτονική είναι γιατί χρονοσειρά τιμών πετρελαίου είναι το δίκτυο [5-9-1] και το για την χρονοσειρά των αποδόσεων το [5-6-1]. η συνάρτηση ενεργοποίησης που επιλέχθηκε για τα στρώματα των νευρώνων ήταν η λογιστική. Όσον αφορά την επιλογή αλγορίθμων εκπαίδευσης επιλέχθηκαν η μέθοδος Quick propagation και Quasi-Newton. Μετά την εκπαίδευση των δικτύων πραγματοποιήθηκαν οι προβλέψεις για ένα βήμα μπροστά και με τους δύο αλγορίθμους. Συγκεκριμένα το δίκτυο [5-9-1] που αντιστοιχεί στην χρονοσειρά τιμών πετρελαίου με τον αλγόριθμο εκπαίδευσης Quick propagation προβλέφθηκε 73,19 ενώ με τον Quasi-Newton 73,05 δηλαδή οι ποσοστιαίες μεταβολές των σφαλμάτων κυμάνθηκαν περίπου στο 2,58% και 2,76% αντίστοιχα κάτι που θα μπορούσε να τις χαρακτηρίσει αρκετά ικανοποιητικές. Όσο αναφορά το δίκτυο [5-6-1] που αντιστοιχεί στην χρονοσειρά των αποδόσεων ο αλγόριθμος εκπαίδευσης Quick propagation προέβλεψε 0,29 ενώ με τον Quasi-Newton 0,37 δηλαδή οι ποσοστιαίες μεταβολές των σφαλμάτων κυμάνθηκαν περίπου 87,33% και 83,84% κάτι που θα μπορούσε να τις ότι δεν είναι καλές.

Το πιο σημαντικό της υπόθεσης είναι ότι και οι τρεις παραλλαγές μεθόδων των κοντινότερων γειτόνων στον χαοτικό αλγόριθμο καθώς και τα μοντέλα μας στα νευρωνικά δίκτυα όσο αναφορά την κανονική χρονοσειρά μας έδειξαν η σωστή τάση της τιμής η οποία είναι ανοδική κάτι το οποίο θα μας βοηθήσει σημαντικά στην επιλογή της κατάλληλης θέσης στα προϊόντα options. Η χρονοσειρά των αποδόσεων δε φαίνεται να βγαίνουν ικανοποιητικές προβλέψεις δείχνοντας πως η απαλοιφή της τάσης έχει εξαλείψει την πληροφορία της χρονοσειράς σε μεγάλο βαθμό. Το θετικό στοιχείο είναι πως έχουμε σωστό πρόσημο όμως θα ήταν καλύτερο να εμπιστευτούμε την χρονοσειρά τιμών πετρελαίου. Μετά την διεξαγωγή των προβλέψεων επιλέχθηκαν οι καταλληλότερες θέσεις στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης

(ΣΜΕ) και στα δικαιώματα προαίρεσεως (*options*) όπως αναφέρθηκαν αναλυτικά στην ενότητα 3.4.

Ολοκληρώνοντας την εργασία μπορούμε να πούμε ότι η χρονοσειρά πετρελαίου παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά όπως και οι αποδόσεις του δείκτη. Από την ανάλυση που έγινε και από τα αποτελέσματα που πήραμε από την χαοτική ανάλυση και νευρωνικά δίκτυα φάνηκε η δυνατότητα βραχυπρόθεσμης προβλέψεις. Οπότε έχοντας ξεχωριστές επιβεβαιώσεις από διαφορετικές μεθόδους βεβαιωνόμαστε για την κατεύθυνση του δείκτη πετρελαίου κατά την επόμενη εβδομάδα. Αυτό μπορεί να μας βοηθήσει στο να πάρουμε πιο σίγουρες επενδυτικές αποφάσεις τα προϊόντα μελλοντικής εκπλήρωσης και πιο συγκεκριμένα στο δικαιώματα προαίρεσης. Από την άποψη το θεωρητικού επιπέδου υπάρχουν πολλά μεγάλα περιθώρια εξέλιξης προκειμένου να βρεθούν θεωρίες και κανόνες οι οποίοι θα σε βοηθούν στο να επιλέγεις με γρηγορότερο τρόπο τις καταλληλότερες μεταβλητές που θα βελτιώσουν τις προβλέψεις στον τομέα της μη γραμμικής ανάλυσης και εξάλειψης θορύβου των χρονοσειρών όπως αυτής που μελετήθηκε. Στον τομέα των τεχνικών νευρωνικών δικτύων ήδη υπάρχει μεγάλη εξέλιξη όσο αφορά τους αλγόριθμους της εκπαίδευσης καθώς και τις μεθόδων εύρεσης καταλληλότερων αρχιτεκτονικών δομών. Ενδιαφέρον θα προκαλούσε για παράδειγμα η μελέτη οικονομικών χρονολογικών με άλλους τύπους νευρωνικών δικτύων όπως τα τεχνικά δίκτυα ανατροφοδότησης, τα δίκτυα ασαφής λογικής και τα υβριδικά δίκτυα. Η επιτυχία των συγκεκριμένων προβλέψεων δημιουργεί προσδοκίες και ενδιαφέρον μελέτης για επιπλέον χρονολογικές σειρές πιθανότητα σε άλλους χρηματιστηριακούς δείκτες είτε χρηματιστηριακά προϊόντα και αγαθά σε επίπεδο συγκριτικών μελετών με τη χρήση των συγκεκριμένων θεωριών στο μέλλον.

## Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>

### Βιβλιογραφία

#### 5.1 Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Abarbanel, H.D.I., Brown, R., Sidorowich, J.J., & Tsimring, L.S. (1993). The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Rev. Mod. Phys.* 65, 1331-1392.

Aleksander, I., & Morton, H. (1990). *An introduction to neural computing*. New York: Van Nostrand Reinhold Co.

Anastasio, T.J. (2010). *Tutorial on neural systems modelling*. Sunderland: Sinauer Associates.

Anderson, T.W., & Finn, J.D. (1996). *The new statistical analysis of data*. New York: Springer- Verlag.

Ataei, M., Lohmann, B., Khaki-Sedigh, A., & Lucas, C. (2004). Model based method for estimating an attractor dimension from multivariate chaotic time series with application to Bremen climatic dynamics. *Chaos, Solitons and Fractals*, 19, 1131-1139.

Bates, J.M., & Granger, C.W.J. (1969). The combination of forecasts. *Journal of the operation research society*, 20, 451-468.

Chatfield, C. (2003). *The analysis of time series: an introduction* (6<sup>th</sup> ed.). New York: Taylor & Francis Group LLC.

Davidon, W.C. (1959). Variable metric method for minimization. *Argonne national laboratory*, 2, 3-4.

Davis, B., & Sumara, D. (2008). Complexity as a theory of education. *Transnational Curriculum Inquiry*, 5, 33-44

Engle, R.F., & Manganelli, S. (2004). CaviaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantile. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22, 367-381.

Feldman, P.D. (2012). *Chaos and fractals: an elementary introduction*. New York: Oxford University Press.

Hamilton, J.D (1994). *Time series analysis*. New Jersey: Princeton University Press.

Hasselblatt, B., & Katok, A. (2003). *A first course in dynamics with a panorama of recent developments*. New York: Cambridge University Press.

Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2001). *The elements of statistical learning*. New York: Springer Science + Business Media. 464-468.

Hyndman, J., Koehler, A.B. (2006). Another look at measures of forecast accuracy. *International Journal of Forecasting*, 22, 678-688.

J. M. Bates, Granger, C.W.J. (1969). The combination of forecasts. *Journal of the Operational Research Society*, 20, 451-468.

Kolmogorov, A. (1963). On tables of random numbers, *Sankhya Ser. A*. 25, 369–375.

Montgomery, D.C., Jennings, C.L., & Kulahci, M. (2008). *Introduction to time series analysis and forecasting*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

Pena, D., Tiao, G.C. & Tsay, R.S. (2001). *A course in time series analysis*. New York: John Wiley & Sons Inc.

Rojas, R. (1996). *Neural networks - a systematic introduction*. Berlin: Springer- Verlag.

Takens, F. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence*, 898, 366-381.

Thomas, J.A. (1991). Entropy, relative entropy and mutual information. *Elements of information theory*, 2, 12-49.

Tsay, R.S., (2005). *Analysis of financial time series* (2<sup>nd</sup> ed.). New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

Tsonis, A.A (1992). *Chaos: from theory to applications*. New York: Plenum Press.

Whitney, H. (1936). Differential manifolds. *The annals of mathematics*, 37, 645-680.

## **5.2 Ελληνόγλωσση βιβλιογραφία**

Haykin, S.(2010). *Νευρωνικά δίκτυα και μηχανική μάθηση*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπασωτηρίου.

Ruelle, D. (1994). *Τύχη και χάος* (2<sup>η</sup> έκδοση). Αθήνα: Εκδόσεις Τραυλός.

Ανδρικόπουλος , Α. (2003). *Οικονομετρία βασική θεωρία και εφαρμογές*. Αθήνα: Εκδόσεις Μπένου. 37-39.



Αργυράκης, Π. (2001). *Νευρωνικά δίκτυα και εφαρμογές*. Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Βλαχάβας, Ι., Κεφαλάς, Π., Βασιλειάδης, Ν., Κόκκορας, Φ., Σακελλαρίου, Η. (2006). *Τεχνητή νοημοσύνη (γ έκδοση)*. Αθήνα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας.

Βουγιατζής, Γ., & Μελετιδίου, Ε. (2015). *Εισαγωγή στα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα*. Αθήνα: Εκδόσεις Κάλλιπος. 233-236.

Δημελή, Σ. (2013). *Σύγχρονες μέθοδοι ανάλυσης χρονολογικών σειρών*. Αθήνα: Εκδόσεις ΟΠΑ. 1-6,13-21,31-37,47-50,63-64,83,89,117-120,437,451.

Καμπουρλάζος, Β., & Παπακώστας, Γ., (2015). *Εισαγωγή στην υπολογιστική νοημοσύνη*. Αθήνα :Εκδόσεις Κάλλιπος.

Καρλής, Δ. (2005). *Πολυμεταβλητή στατιστική ανάλυση*. Αθήνα: Εκδόσεις Σταμούλης.

Κουγιουμπής, Δ. (2018). *Σημειώσεις χρονοσειρές μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών*. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα users.auth.gr:

<http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/TimeSeries/Nonlinear.pdf> (18/5/2020).

Διαμαντάρας, Κ. (2007). *Τεχνικά Νευρωνικά Δίκτυα*. Αθήνα: Εκδόσεις

Λιβιέρης, Ι. (2008). *Αποτίμηση μεθόδων εκπαίδευσης τεχνητών νευρωνικών δικτύων και εφαρμογές*. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του dockplayer.gr:

<https://docplayer.gr/34732521-Apotimisi-metho-on-ekpai-eysis-tehnton-neuronikon-iktyon-kai-efarmoges.html> (18/5/2020).

Μπράιλας, Α.Β. (2015). *Πολύπλοκα συστήματα και χάος*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγορη. 23-37 , 219-229.

Πανάρετος, Ι., & Ξεκαλάκη, Ε. (2000). *Εισαγωγή στην στατιστική σκέψη τόμος II*, Αθήνα: Εκδόσεις Μπένου. 157-163.

Παπαδάμου, Σ., & Συριοπούλος, Κ. (2014). *Εισαγωγή στην τραπεζική οικονομική και τις κεφαλαιαγορές*. Αθήνα: Εκδόσεις Utopia. 322-326.

Ρεφανίδης, Γ. (2011). *Νευρωνικά δίκτυα*. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα dockplayer.gr:

<https://docplayer.gr/2640638-Refanidis-giannis-oktovrios-2011-http-users-uom-gr-yrefanid-courses-neuralnetworks.html> (18/5/2020).

Ρίζος, Γ. (1996). *Τεχνητά νευρωνικά δίκτυα*. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.

Σουσουνης, Μ. (2011). *Συμβολή στον έλεγχο ανεμογεννητριών μόνιμων μαγνητών με τεχνητά νευρωνικά δίκτυα*. Διαθέσιμο στην ιστοσελίδα του [dspace.lib.ntua.gr](http://dspace.lib.ntua.gr):

[https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/4952/DT2011\\_pdf\\_MDSO\\_USOUNIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://dspace.lib.ntua.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/4952/DT2011_pdf_MDSO_USOUNIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y) (18/5/2020).

Χάλκος, Γ.Ε. (2011). *Στατιστική θεωρία, εφαρμογές και χρήση στατιστικών προγραμμάτων σε Η/Υ* (3<sup>η</sup> έκδοση). Αθήνα : Εκδόσεις τυπωθήτω Γιώργος Δαρδάνος.

### **5.3 Χρήσιμες διαδικτυακές αναφορές**

[1] <http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/DataAnalysis/Chp6.pdf>

[2] <https://eclass.emt.ihu.gr/modules/document/file.php/MSC-TIE197/%CE%A7%CE%91%CE%9D%CE%99%CE%91%CE%A3%20./Hurst.pdf>

[3] [http://www.icsd.aegean.gr/lecturers/kavallieratou/NN&EP\\_files/ci\\_7.pdf](http://www.icsd.aegean.gr/lecturers/kavallieratou/NN&EP_files/ci_7.pdf)

[4] [http://www.elearning.teicm.gr/file.php/472/P202\\_Neural\\_1.pdf](http://www.elearning.teicm.gr/file.php/472/P202_Neural_1.pdf)

[5] <http://www.nemertes.lis.upatras.gr/jspui/bitstream/10889/6401/1/%CE%B4%CE%B9%CF%80%CE%BB%CF%89%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%B7.pdf>

[6] <http://www.dias.library.tuc.gr>

[7] [http://www.el.wikipedia.org/wiki/Νευρωνικό\\_δίκτυο](http://www.el.wikipedia.org/wiki/Νευρωνικό_δίκτυο)

[8] <http://www.spacezilotes.wordpress.com>

[9] [www.hackernoon.com](http://www.hackernoon.com)

[10] [www.researchgate.net](http://www.researchgate.net)

[11] <https://www.sigmalive.com/news/energia/328131/argo-petrelaio-pos-rythmizetai-diethnos-i-timi-tou>

[12] [https://www.researchgate.net/figure/An-example-of-the-fractal-shape-of-a-strange-attractor-the-Lorenz-attractor-which-may\\_fig1\\_2262087](https://www.researchgate.net/figure/An-example-of-the-fractal-shape-of-a-strange-attractor-the-Lorenz-attractor-which-may_fig1_2262087)