UNIVERSITY OF THESSALY

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Λογισμός Ito και εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά

Μαμαλούκας Πάτροκλος-Μιλτιάδης

Επιβλέπων:
Γιαννακόπουλος Αθανάσιος
Καθηγητής

Βόλος 2020

Ευχαριστίες:
Στον καθηγητή μου που πίστεψε σε μένα σε
μια δύσκολη στιγμή της ζωής μου
Στην οικογένεια μου που με
στήριξε οικονομικά στις σπουδές μου
Στον Βάιο για την φιλοξενία
Σε όλους τους νέους φίλους που γνώρισα
και ζήσαμε υπέροχες στιγμές μαζί

Abstract

Η παρούσα εργασία μελετά την χρήση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων σε χρηματοοικονομικά μοντέλα. Μας ενδιαφέρει η μοντελοποίηση της πορείας μετοχών, με σκοπό την τιμολόγηση των αντίστοιχων παραγώγων (options) . Γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στις απαραίτητες έννοιες που θα χρειαστούμε, τα Martingales , την κίνηση Brown και το ολοκλήρωμα Ito ώστε να μπορούμε να λύσουμε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το μοντέλο του Black-Scholes και τέλος συγκρίνουμε την αναλυτική λύση με αλγόριθμο αριθμιτικής επίλυσης μεθόδου Euler-Maruyama

Περιεχόμενα

1. Martingales

1.1 Υπο συνθήκη αναμενόμενη τιμή

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή, τότε η αναμενόμενη τιμή της $\mathbb{E}[X]$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η βέλτιστη πρόβλεψη για την X όταν είτε δεν δίδονται πληροφορίες για το αποτέλεσμα της δοκιμασίας είτε δίνονται ορισμένες αλλά όχι όλες οι πληροφορίες [1]. Έστω $X_1, X_2, ...$ τυχαίες μεταβλητές που τις θεωρούμε ως χρονοσειρές με τα δεδομένα να εμφανίζονται ανά ένα κάθε φορά και την χρονική στιγμή n εμφανίζονται όλες οι τιμές $X_1, ..., X_n$. Αν Y είναι μια άλλη τυχαία μεταβλητή, τότε $\mathbb{E}[Y|X_1, ..., X_n]$ είναι η βέλτιστη πρόβλεψη της Y δοθέντων των $X_1, ..., X_n$. Θα υποθέσουμε ότι η Y είναι μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή που σημαίνει ότι $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Για συντόμευση θα ορίσουμε με $\mathcal{F}_n$ την πληροφορία που περιέχεται στις $X_1, ..., X_n$ και αντίστοιχα με $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ της $\mathbb{E}[Y|X_1, ..., X_n]$. ορίζουμε με $\mathcal{F}_0$ την μη πληροφορία. Η βέλτιστη πρόβλεψη θα πρεπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

- Αν δεν έχουμε πληροφορία, τότε η βέλτιστη πρόβλεψη είναι η αναμενόμενη τιμή, δηλαδή, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[|Y|]$.

- Η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ θα πρέπει να χρησιμοποιεί κάθε φορά μόνο την πληροφορία που είναι διαθέσιμη την χρονική στιγμή n . Με άλλα λόγια θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση των $X_1, ..., X_n$, δηλαδή,
$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] = F[X_1, ..., X_n].$$
Λέμε ότι η $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ είναι μια $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη.

Ορισμός 1. *Η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ είναι η μοναδική τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τα παρακάτω [1]:*

- *$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ είναι μια $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη.*

- *$\forall \mathcal{F}_n$-μετρήσιμη στο ενδεχόμενο A ισχύει:*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]1_A] = \mathbb{E}[Y1_A].$$

Θεώρημα 1. *Έστω $X_1, X_2, ...$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και $\mathcal{F}_n$ δηλώνει την πληροφορία την χρονική στιγμή n. Η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.*

- *Αν Y είναι μια $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, τότε $\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] = Y$.*
- *Αν A είναι ένα $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμο ενδεχόμενο, τότε $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]1_A] = \mathbb{E}[Y1_A]$. Ειδικότερα,*
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]] = \mathbb{E}[Y].$$
- *Έστω $X_1, ...X_n$ είναι ανεξάρτητες του Y τότε η $\mathcal{F}_n]$ δεν περιέχει χρήσιμες πληροφορίες για την Y οπότε*
$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[Y].$$
- *Γραμμικότητα. Αν Y,Z είναι τυχαίες μεταβλητές και a,b είναι σταθερές, τότε*
$$\mathbb{E}[aY + bZ|\mathcal{F}_n] = a\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n].$$
- *Προβολή ή Tower Property. Αν $m < n$ τότε*
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_m].$$
- *Αν Z είναι μια $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή, τότε όταν παίρνουμε την συνθήκη ως προς την $\mathcal{F}_n$, η Z συμπεριφέρεται σαν σταθερά.*
$$\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}_n] = Z\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n].$$

Ορισμός 2. *Αν $X_1, X_2, ...$ είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, η συσχετισμένη διήθηση (διακριτός χρόνος) είναι η συλλογή των $\mathcal{F}_n$ όπου $\mathcal{F}_n$ δηλώνει την πληροφορία των $X_1, ..., X_n$.*

1.2 Martingales

Στο πλαίσιο των χρηματοοικονομικών η έννοια του Martingales (που αναφέρονται και ως τυχαίοι περίπατοι) μπορεί να κατανοηθεί ως ένα δίκαιο παιχνίδι, μια μετοχή όπου η επόμενη τιμή της εξαρτάται μόνο από τη προηγούμενη ανεξαρτήτως της ιστορίας της αγοράς, ένα παιχνίδι κορώνα-γράμματα κ.ο.κ.. Αυτά είναι μερικά μόνα από τα άπειρα παραδείγματα που περιγράφουν την έννοια του Martingale . Στις παρακάτω σελίδες θα εισάγουμε ένα πιο αυστηρό μαθηματικό ορισμό εφόσον θα μας χρειαστεί για να εισάγουμε μετέπειτα έννοιες όπως η κίνηση Brown .

Ορισμός 3. *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών ονομάζεται martingalesως προς μια διήθηση $\mathcal{F}_n$ αν ισχύει:*

- *Για κάθε n η μεταβλητή M_n είναι μια $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με φραγμένη αναμενόμενη τιμή δηλαδή $\mathbb{E}[|M_n|] < \infty$*

- *Αν ισχύει $m < n$ τότε*

  $$\mathbb{E}[M_n - M_m|\mathcal{F}_m] = 0 \to \mathbb{E}[M_n]\mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[M_m|\mathcal{F}_m] = 0 \to \mathbb{E}[M_n]\mathcal{F}_m] = M_m$$

Ένα martingale μπορεί να είναι π.χ. η τιμή ενός τίτλου (αν περιοριστούμε μόνο στις θετικές τιμές) ή τα κέρδη ενός παιχνιδιού τύχης αν το γράψουμε στη μορφή διαδοχικών διαφορών

$$\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$$

όπως φαίνεται στο χαρακτηριστικό παράδειγμα που ακολουθεί

Παράδειγμα 1. *Εστω μια ακολουθία μεταβλητών $M_0, M_1, ...$ που αποτελούν martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_n$. Για $n \geq 1$ κατασκευάζουμε τις διαδοχικές διαφορές $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. Αποφασίζουμε να παίξουμε ένα παιχνίδι τύχης με σκοπό να εκτιμήσουμε τις επόμενες τιμές, όπου στο j-στο παιχνίδι, θα ποντάρουμε το ποσό B_j, οπου επιτρέπουμε να πάρει αρνητικές τιμές (αυτό δείχνει εκτίμηση πως η επόμενη τιμή θα είναι μικρότερη απο την τωρινή). Ονομάζουμε τα κέρδη από τα n συνολικά παιχνίδια που έχουμε παίξει ως W_n. Προφανώς τα κέρδη που θα έχουμε θα είναι το άθροισμα*

$$W_n = \sum_{j=1}^{n} B_j[M_j - M_{j-1}] = \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta M_n$$

Έστω τώρα ότι

$$\forall n \exists K_n < \infty : |B_n| \leq K_n$$

και υποθέτουμε ότι πρώτα στιχοιματίζουμε στο n-οστο παιχνίδι και μετά βλέπουμε το αποτέλεσμα του, μαθηματικά δηλαδή η μεταβλητή B_n είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_{n-1}$. Τότε η W_n είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_n$.Αυτο αποδεικνύεται εύκολα:

$$W_{n+1} = W_n + B_{n+1}\Delta M_{n+1} \to \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[W_n + B_{n+1}(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n]$$

λόγω γραμμικότητας του τελεστή αναμενόμενης τιμής:

$$\mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[W_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[B_{n+1}M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[B_{n+1}M_n|\mathcal{F}_n]$$

εφόσον η B_{n+1} είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, βγαίνει έξω από την υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή και

$$\mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[W_n|\mathcal{F}_n] + B_{n+1}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - B_{n+1}\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n]$$

η M_n είναι martingale όποτε $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] = M_n$ και $\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n$ άρα μένει

$$\mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[W_n|\mathcal{F}_n] \rightarrow \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = W_n$$

εφόσον η W_n είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_n$

Με το παραπάνω παράδειγμα δείξαμε ότι δεν μπορεί κανείς να μετατρέψει ένα martingale με μια πεπερασμένη στρατηγική (το στοίχημα το οποίο θέτουμε για πεπερασμένες χρονικές στιγμές) σε μια διαδιακασία που να μην είναι martingale (δηλ. σε ένα άδικο παιχνίδι, που προτιμά ένα ενδεχόμενο). Δύναται όμως κάτι τέτοιο σε περίπτωση που επιλέξουμε να στοιχηματίζουμε επ'άπειρο ($t \rightarrow \infty$) (Δεν παραθέτουμε απόδειξη) Περα απο τα martingales , οσον αφορά τους τυχαίους περιπάτους, μπορεί να έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] \geq M_m$ Τότε η διαδικασία ονομανάζεται submartingales
- $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_n] \leq M_m$ Τότε η διαδικασία ονομανάζεται supermartingales

1.3 Τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingales

Ορισμός 4. *Ένα martingale M_n ονομάζεται τετραγωνικά ολοκληρώσιμο αν $\forall n, \mathbb{E}[M_n^2] < \infty$.*

Δεν απαιτούμε να $\exists C < \infty : \mathbb{E}[M_n^2] \leq C, \forall n$. Οι τυχαίες μεταβλητές X,Y είναι ορθογώνιες αν $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι ορθογώνιες, αλλά οι ορθογώνιες τυχαίες μεταβλητές δεν είναι απαραίτητο να είναι και ανεξάρτητες. Αν $X_1, ..., X_n$. είναι ανά δύο ορθογώνιες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0, τότε $\mathbb{E}[X_jY_k] = 0, \forall j \neq k$ και αναπτύσσοντας στο τετράγωνο παίρνουμε $\mathbb{E}[(X_1 + ... + X_n)^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j^2]$. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν μια γενίκευση του Πυθαγόριου θεωρήματος σε ορθογώνια τρίγωνα. Οι αυξήσεις σε ένα martingale δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητες, αλλά στα τετραγωνικά ολοκληρώσιμα martingale είναι ορθογώνιες όπως δείξαμε παραπάνω.

Θεώρημα 2. *Έστω τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale M_n ως προς μια διήθηση $\mathcal{F}_n$. Τότε για $m < n$*

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)(M_{m+1} - M_m)] = 0$$

και $\forall n$ *ισχύει:*

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[(M_j - M_{j+1})^2]$$

Απόδειξη. Αν $m < n$, τότε $M_{n+1} - M_n$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, οπότε

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)(M_{m+1} - M_m)|\mathcal{F}_n] =$$

$$= (M_{m+1} - M_m)\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)|\mathcal{F}_n] = 0.$$

Επομένως

$$\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)(M_{m+1} - M_m)] =$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)(M_{m+1} - M_m)|\mathcal{F}_n]] = 0.$$

Επιπλέον, αν θέσουμε $M_-1 = 0$, παίρνουμε

$$M_n^2 = [M_0 + \sum_{j=1}^{n}(M_j - M_{j-1})]^2 =$$

$$= M_0^2 + \sum_{j=1}^{n}(M_j - M_{j-1})^2 + \sum_{j \neq k}(M_j - M_{j-1})(M_k - M_{k-1}).$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές δεξιά και αριστερά της εξίσωσης καταλήγουμε στο δεύτερο συμπέρασμα. □

1.4 Ολοκληρώματα ως προς τυχαίο περίπατο

Έστω $S_n = X_1 + ... + X_n$ και με $\mathcal{F}_n$ δηλώνουμε την διήθηση που παράγεται από τα $X_1 + ... + X_n$. Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $J_1, J_2...$ καλείται αναμενόμενη (προβλέψιμη) (ως προς την $\mathcal{F}_n$) αν $\forall n$, J_n είναι $\mathcal{F}_{n-1}$-μετρήσιμη. Να θυμηθούμε ότι αυτή είναι η συνθήκη που κάνει την J_n επιτρεπτά "bets" στην martingale υπό την έννοια του διακριτού στοχαστικού ολοκληρώματος. Ας υποθέσουμε ότι $J_1, J_2...$ είναι μια προβλέψιμη ακολουθία με $\mathbb{E}[J_n^2] < \infty$, $\forall n$. Το ολοκλήρωμα του J_n ως προς το S_n ορίζεται ως

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n}(J_j X_j) = \sum_{j=1}^{n}(J_j S_j)$$

Το ολοκλήρωμα ικανοποιεί τρεις σημαντικές ιδιότητες.

- Ιδιότητα Martingale. Το ολοκλήρωμα Z_n είναι Martingale ως προς $\mathcal{F}_n$ (ακολουθεί ορισμός του Martingale παρακάτω)

- Γραμμικότητα. Αν J_n, K_n είναι ακολουθίες προβλέψεων και a, b σταθερές, τότε και οι $aJ_n + bK_n$ είναι επίσης ακολουθίες προβλέψεων και

$$\sum_{j=1}^{n}(aJ_j + bK_j) = a\sum_{j=1}^{n}(J_jS_j) + b\sum_{j=1}^{n}(K_jS_j)$$

- Αρχή της διακύμανσης

$$Var[\sum_{j=1}^{n}(J_jS_j)] = \mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{n} J_jS_j)^2] = s^2\sum_{j=1}^{n}(\mathbb{E}[J_j^2].$$

Για να το δούμε εφαρμόζουμε πρώτα την ορθογωνιότητα των martingale αυξήσεων και γράφουμε

$$\mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{n} J_jS_j)^2] = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[J_j^2X_j^2].$$

Εφόσον J_j είναι $\mathcal{F}_{j-1}$-μετρήσιμη και η X_j είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{j-1}$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\mathbb{E}[J_j^2X_j^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[J_j^2X_j^2|\mathcal{F}_{j-1}] = \mathbb{E}[J_j^2\mathbb{E}[X_j^2|\mathcal{F}_{j-1}] = \mathbb{E}[J_j^2\mathbb{E}[X_j^2]] = s^2\mathbb{E}[J_j^2].$$

2. Κίνηση Brown

2.1 Ορισμός

Η κίνηση Brown δεν είναι τίποτα άλλο από το όριο ενός τυχαίου περιπάτου σε συνεχή χρόνο. Προφανώς θα πρέπει να είμαστε προσεκτοί στο πώς παίρνουμε αυτό το όριο. Θα συμβολίσουμε την κίνηση με $B_t = B(t)$, η οποία είναι μια στοχαστική συνάρτηση δηλαδή για κάθε χρονική στιγμή t υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $B(t)$ καθώς και συσχετίσεις μεταξύ των $B(t)$ για διάφορες χρονικές στιγμές.

οι προυποθέσεις που θέτουμε για τις μεταβλητές $B(t)$ είναι:

Ορισμός 5. *Μια στοχαστική συνάρτηση $B(t)$ ονομάζεται Brown όταν ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις:*

- *Στάσιμα διαστηματα: Αν $s < t$ τότε η κατανομή των $B_t - B_s$ είναι η ίδια με αυτή των $B_{t-s} - B_0$*
- *Ανεξάρτητες μεταβολές:Αν $s < t$ τότε η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη των τιμών της B_r*
- *Συνέχεια: Η συναρτηση $B(t)$ είναι συνεχής*

Πάντα θα υποθέτουμε ότι $B(0) = 0$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μια διαδικασία που ικανοποιεί τις παραμέτρους που έχουμε θέσει παραπάνω,αν υπάρχει, ακολουθεί κανονική κατανομή $\forall t$

2.1.1 Κατανομή της $B(t)$

Έστω ότι διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα σε n κομμάτια:

$$X_{j,n} = X_{j/n} - X_{(j-1)/n}$$

και κατασκευάζουμε την ποσότητα:

$$M_n = max\{|X_{j,n}| : j = 1, ..., n\}$$

Δηλαδή το M_n είναι η μέγιστη δυνατή διαφορά που μπορούμε να έχουμε για μια διαμέριση n που έχουμε κάνει. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η X_1 έχει κανονική κατανομή [1]. Η συνέχεια που έχουμε θέσει ως προϋπόθεση σημαίνει ότι το

$$M_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

δηλαδή μεταξύ γειτονικών σημείων της κινησης Brown η μέγιστη δυνατή διαφορά κατα απόλυτη τιμή σε οποιαδήποτε t είναι 0 (αρα για οποιαδήποτε γειτονικά σημεία που απέχουν δt η διαφορά είναι 0, όπου αυτός είναι ο ορισμός της συνέχειας) Πιο τυπικά:

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}[M_n < a] \to 1$$

Εφόσον έχουμε απαιτήσει τα διαστήματα να είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, αυτό σημαίνει ότι:

$$\mathbb{P}[M_n < a] = \{1 - \mathbb{P}[|X_{1/n}| \geq a]\}\{1 - \mathbb{P}[|X_{2/n}| \geq a]\}...\{1 - \mathbb{P}[|X_{n/n}| \geq a]\} =$$

$$\{1 - \mathbb{P}[|X_{1/n}| \geq a]\}^n = \{1 - \frac{n\mathbb{P}[|X_{1/n}| \geq a]}{n}\}^n \tag{2.1}$$

εφόσον το όριο του δεξιού κομματιού της 2.1 συγκλίνει στο:

$$e^{-n\mathbb{P}[|X_{1/n}| \leq a]}$$

έχουμε ότι για $n < \infty$:

$$\{1 - \mathbb{P}[|X_{1/n}| \geq a]\}^n < e^{-n\mathbb{P}[|X_{1/n}| \leq a]}$$

στο όριο λοιπον όπου $n \to \infty$ πρέπει:

$$\mathbb{P}[M_n < a] = e^{-n\mathbb{P}[|X_{1/n}| \leq a]} = 1$$

οπότε πρέπει η παράσταση μέσα στο εκθετικό να δίνει 0:

$$\lim_{n\to\infty}(-n\mathbb{P}[|X_{1/n}| \leq a]) = 0$$

υπάρχει λοιπόν μια μηδενική ακολουθία $\alpha_n \downarrow 0$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{n\to\infty}(-n\mathbb{P}[|X_{1/n}| \leq \alpha_n]) = 0$$

Οι ροπές της X_1 είναι πεπερασμένες και τις συμβολίζουμε με:

$$m = \mathbb{E}[X_1], \sigma^2 = Var[X_1], \mathbb{E}[X_2] = m^2 + \sigma^2$$

Κατασκευάζουμε επίσης την μεταβλητή $\widetilde{X}_{j,n}$ η οποία ισούται με:

$$\widetilde{X}_{j,n} = X_{j,n} 1\{|X_{j,n}| \leq a_n\}$$

και τη μεταβλητή:

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{X}_{j,n}$$

Συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της $\widetilde{X}_{j,n}$ με ϕ_n. Η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας μεταβλητής είναι η συνάρτηση για την οποία ισχύει: $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$ οπότε:

$$\phi_Z(n) = \mathbb{E}[e^{inZ}] = \mathbb{E}[e^{in\sum_{j=1}^{n}\widetilde{X}_{j,n}}] =$$

$$= \mathbb{E}[\Pi_{j=1}^{n} e^{in\widetilde{X}_{j,n}}] = \Pi_{j=1}^{n}\mathbb{E}[e^{in\widetilde{X}_{j,n}}] = \phi_X(t)^n$$

λόγω ανεξαρτησίας. Η κατανομή της Z_n τείνει σε αυτή της X_1 οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\forall s$:

$$\lim_{n\to\infty}[\phi_n(s)]^n = e^{ims-\frac{\sigma^2 s}{2}}$$

Εφόσον τείνει στην κατανομή της X_1, οι ροπές τους θα είναι ίδιες οπότε $\mathbb{E}[Z_n] \to m$ και

$$\mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}] = \frac{m[1+o(1)]}{n} \tag{2.2}$$

Προφανώς αφού $Var(\widetilde{X}_{1,n}) = \mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}^2] - \left(\mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}]\right)^2$, αρα η 2.2 γίνεται:

$$\mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}^2] = Var(\widetilde{X}_{1,n}) + \left(\mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}]\right)^2 \to$$

$$\mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}^2] = \frac{\sigma^2(1+o(1))}{n} + \frac{m^2(1+o(1))}{n^2} \tag{2.3}$$

οπότε απο τη στιγμή που $|\widetilde{X}_{1,n}| \leq \alpha_n$, αν πολλαπλασιάσουμε δεξιά και αριστερά την ανισότητα με $\widetilde{X}_{1,n}^2$ έχουμε μέσω της 2.3:

$$\mathbb{E}[|\widetilde{X}_{1,n}|]^3 \leq \alpha_n \mathbb{E}[\widetilde{X}_{1,n}^2] = \alpha_n \frac{\sigma^2(1+o(1))}{n} + \frac{m^2(1+o(1))}{n^2}$$

οπότε η χαρακτηριστική για ένα σταθερό s είναι:

$$\phi_n(s) = 1 + \frac{ims}{n} - \frac{\sigma^2 s}{2n} + o\frac{1}{n} \tag{2.4}$$

οπότε στο $n \to \infty$ η 2.4 γίνεται:

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(s) = \lim_{n\to\infty}[1 + \frac{ims}{n} - \frac{\sigma^2 s}{2n} + o\frac{1}{n}] = e^{ims-\frac{\sigma^2 s^2}{2}}$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο ότι αν μια τέτοια διαδικάσια B_t υπάρχει, πρέπει να έχει κανονική κατανομή. Παρακάτω θα δείξουμε την ύπαρξη της.

2.2 Απόδειξη ύπαρξης Brown

Θα κατασκευάσουμε μια Brown στο διάστημα $0 \leq t \leq 1$,η γενίκευση της για $0 \leq t \leq \infty$ είναι τετριμμένη διαδικασία [1]. Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ο οποίος περιέχει ένα μετρήσιμο πλήθος κανονικά κατανεμημένων, ανεξάρτητων μεταξύ τους, τυχαίων μεταβλητών, τις οποίες ονομάζουμε Z με δείκτη q δηλαδή:

$$\{Z_q : q \in \mathcal{D}\}$$

και $D = \cup_n \mathcal{D}_n$ η ένωση των συνόλων:

$$\mathcal{D}_n = \{\frac{k}{2^n} : k = 0, 1, ..., 2^n\}$$

τα οποία περιέχουν τους δυαδικούς ρητούς με παρονομαστή 2^n στο διάστημα $[0, 1]$, (οπότε το $\mathcal{D}$ περιέχει όλους τους δυνατούς δυαδικούς ρητούς στο $[0, 1]$). Η λογική την οποία θα ακολουθήσουμε στην κατασκευή είναι απλή: Θα ορίσουμε πρώτα τις δύο ακριανές τιμές της κίνησης Brown $B(0)$ και $B(1)$ και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις $B_{\frac{1}{4}}$ και $B_{\frac{3}{4}}$ κ.ο.κ.. Θέτουμε $B_0 = 0$ και $B_1 = Z_1$ όπου το Z_1 είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή ($N(0, 1)$). Τότε ορίζουμε τη μεσαία τιμή (δηλαδή το μεσαίο μεταξύ $[0, 1]$, $\frac{1}{2}$ ως τον μέσο όρο των ακραίων τιμών συν κανονικό θόρυβο δηλ.:

$$B_{\frac{1}{2}} = \frac{B_0 + B_1}{2} + \frac{Z_1}{2} = \frac{B_1}{2} + \frac{Z_1}{2}$$

Αντίστοιχα:

$$B_{\frac{1}{4}} = \frac{B_{\frac{1}{2}} + B_0}{2} + \frac{Z_2}{2} = \frac{B_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{Z_2}{2}$$

$$B_{\frac{3}{4}} = \frac{B_{\frac{1}{2}} + B_1}{2} + \frac{Z_3}{2}$$

κ.ο.κ. Οπότε, με απλή αφαίρεση για την $B_{\frac{1}{2}}$:

$$B_1 - B_{\frac{1}{2}} = \frac{B_1}{2} - \frac{Z_1}{2}$$

το $B_{\frac{1}{2}}$ είναι η υποσυνθήκη αναμενόμενη τιμή αυτής,υπό την B_1 συν ανεξάρτητο τυχαίο θόρυβο. Οι μεταβλητές $B_{\frac{1}{2}}$ και B_1 είναι ανεξάρτητες (απο τις προυποθέσεις που θέσαμε εξαρχης). Συνεχίζουμε τον διαχωρισμό: αν θέσουμε

$$q = \frac{2k + 1}{2^{n+1}} \in \frac{\mathcal{D}_{n+1}}{\mathcal{D}_n}$$

τότε μπορούμε να ορίσουμε το

$$B_q = B_{k2^{-n}} + \frac{B_{(k+1)2^{-n}} - B_{k2^{-n}}}{2} + \frac{Z_q}{2^{\frac{n+2}{2}}}$$

και εδώ παρατηρούμε οτι οι μεταβλητές

$$\{B_{k2^{-n}} - B_{(k+1)2^{-n}} : k = 1, ..., 2^n\}$$

είναι ανεξάρτητες για, διαφορετικά μεταξύ τους, ν. Συνεπώς οι μεταβλητές που έχουμε φτιάξει πληρούν τις προυποθέσεις που είχαμε θέσει αρχικά. Μένει να ορίσουμε μεταβλητές και για τις υπόλοιπες χρόνικες στιγμές, αυτό θα γίνει μέσω συνέχειας. Για να το κάνουμε αυτό θα δείξουμε ότι η κίνηση περιορισμένη στο $\mathcal{D}$ έχει ομοιόμορφα συνεχή μονοπάτια. Αυτό σημαίνει για $(s, t \in \mathcal{D})$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{ αν } |s-t| \leq \delta \rightarrow |B_s - B_t| < \epsilon$$

ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$K_n = sup\{|B_s - B_t| : s, t \in \mathcal{D}, |s-t| \leq 2^{-n}\}$$

τότε αρκεί να δείξουμε ότι με πιθανότητα 1

$$K_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Πρώτα κατασκευάζω την ακολουθία

$$J_n = max_{j=1,...,2^n}\{sup\{|B_q - B(j-1)2^{-n}|\}\} = max_{j=1,...,2^n} Y(j,n) \\ q \in \mathcal{D}, (j-1)2^{-n} \leq q \leq 2^{-n} \tag{2.5}$$

για κάθε ν ισχύει ότι $K_n \leq 3J_n$ από τριγωνική ανισότητα. Επίσης για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ ισχύει:

$$\mathbb{P}\{J_n \geq \epsilon\} \leq \sum_{j=1}^{2^n} \mathbb{P}\{Y(j,n) \geq \epsilon\} = 2^n \mathbb{P}\{Y(1,n) \geq \epsilon\}$$

η κατανομή της

$$Y(1,n) = sup\{|B_q| : q \in \mathcal{D}, q \leq 2^{-n}\}$$

είναι η ίδια με αυτή της $2^{-n/2}Y$ όπου $Y = Y(1,0)$ Από εδώ λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι

$$\mathcal{P}\{J_n \geq C\sqrt{n}2^{-n/2}\} \leq 2^n \mathcal{P}\{Y \geq C\sqrt{n}\}$$

Θα δέιξουμε ότι αν $C > \sqrt{2log2}$ τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathbb{P}\{Y \geq C\sqrt{n}\} < \infty \tag{2.6}$$

Το λημμα Borel-Canteli δείχνει ότι με πιθανότητα 1,το γεγονός $J_n \geq 2^{-n/2}n$ συμβαίνει μόνο για πεπερασμένες τιμές του n , συγκεκριμένα ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n/2} n^{-1} J_n = 0$$

οπότε αμέσως θα ισχύει και

$$\lim_{n\to\infty} 2^{an} K_n = 0$$

για όλα τα $a < \frac{1}{2}$, και έτσι θα έχουμε αποδείξει την ομοιόμορφη συνέχεια. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν (αφού το αποδείξουμε πρώτα) το εξής λήμμα:

Λήμμα 1. $\forall \alpha \geq 4$

$$\mathbb{P}\{Y > \alpha\} \leq 4\mathbb{P}\{B_1 \geq \alpha\} \leq e^{-\alpha^2/2}$$

Για να το αποδείξουμε κατασκευάζουμε την ακολουθία:

$$Y_n = max\{|B_q| : q \in \mathcal{D}_n\}$$

συνεπώς

$$\mathbb{P}\{Y > \alpha\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y_n > \alpha\}$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε την ανισότηα για ένα ν, το οποίο θεωρούμε σταθερό και απίσης θεωρούμε το γεγονός A_k για το οποίο ισχύει το εξής:

$$|B_{k2^{-n}}| > a, |B_{j2^{-n}}| \leq \alpha, j = 1, ..., k-1$$

τότε το γεγονός $\{Y_n > a\}$ μπορεί να γραφεί ως ένωση συνόλων με μή κοινά στοιχεία μεταξύ τους, δηλαδή:

$$\{Y_n > \alpha\} = \cup_{k=1}^{2^n} A_k$$

Αυτό που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι αν $|B_{k2^{-n}}| > \alpha$ τότε με πιθανότητα τουλάχιστον $\frac{1}{2}$ θα έχουμε $|B_1| > \alpha$. Το γεγονός οι μεταβλητές $B_{k2^{-n}}$ και $B_1 - B_{k2^{-n}}$ να έχουν το ίδιο πρόσημο, συμβαίνει με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ και τότε έχουμε την ανισότητα $|B_1| \geq |B_{k2^{-n}}|$. Μπορούμε δηλαδή να πούμε:

$$\mathbb{P}[A_k \cap \{|B_1| > \alpha\}] \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_k)$$

οπότε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|b_1| > \alpha\} &= \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{P}[A_k \cap \{|B_1| > \alpha\}] \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{P}[A_k] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}\{Y_n > \alpha\}\end{aligned}$$

εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι τα σύνολα A_k δεν έχουν μεταξύ τους κοινά στοιχεία. Εφόσον η B_1 έχει κανονική κατανομή ($N(0,1)$) ισχύει

$$\mathbb{P}\{Y_n > a\} \leq 2\mathbb{P}\{|B_1| > \alpha\} = 4\mathbb{B}_{\mathbb{K}} > \alpha = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2}$$

Κάνουμε μια εκτίμηση του ολοκληρώματος (από τη στιγμή που δεν έχει αναλυτική λύση) για τιμές $\alpha \geq 4$:

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{-x^2}/2dx \leq 2 \int_{a}^{\infty} e^{-\alpha x/2} = \frac{4}{\alpha} e^{-\alpha^2/2} \leq e^{-\alpha^2/2} \tag{2.7}$$

οπότε έτσι αποδείξαμε το λήμμα 1 . Αν στην ανισότητα 2.7 βάλουμε $\alpha = C\sqrt{n}$, τότε για μεγάλα n καταλήγει:

$$\mathbb{P}\{Y > C\sqrt{n}\} \leq e^{-C^2 n/2} = 2^{-n\beta}, \beta = \frac{C^2}{2\log 2}$$

Πιο συγκεκριμένα αν $\beta > 1$ τότε η 2.6 ισχύει και δίνει την

$$\lim_{n\to\infty} 2^{an} K_n = 0$$

με πιθανότητα 1. Αφού λοίπον δείξαμε την ομοιόμορφη συνέχεια της κινήσης Brown μπορούμε να τη γενικεύσουμε για $t \in [0,1]$ απλά πηγαίνοντας το t_n στο άπειρο δηλαδή:

$$B_t = \lim_{t_n\to\infty} B_{t_n}$$

3. Ολοκλήρωμα Ito

3.1 Ολοκλήρωμα Ito για απλές διαδικασίες

3.1.1 Ορισμός

Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Ito για τις απλές διαδικασίες και στη συνέχεια θα το επεκτείνουμε σε μια μεγαλύτερη ομάδα διαδικασιών (όπως και στο ολοκλήρωμα Riemann έτσι και εδώ δεν ορίζεται ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε συνάρτηση, πρέπει να πληρούνται κάποιες προυποθέσεις).

Ορισμός 6. *Απλές ονομάζονται οι στοχαστικές διαδικασίες της μορφής*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j 1_{[t_j, t_{j+1})}$$

δηλαδή η $f(t)$ είναι ένα άθροισμα πτο πλήθος τυχαίων μεταβλητών για κάθε ένα απο τα διαστήματα $[t_j, t_{j+1})$ που αποτελούν τη διαμέριση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Με λίγα λόγια, η απλή συνάρτηση είναι μια συνάρτηση σκαλοπατιών (step function) όπου το καθένα σκαλοπάτι ειναι ορισμένο στο διαστημα $[t_j, t_{j+1})$ οπότε η κάθε τιμή στο t_j είναι συνεχής πλησιάζοντας από τα δεξιά και όριο πλησιάζοντας από τα αριστερά. Η ακολουθία τυχαία μεταβλητών η_j είναι μετρίσημη υπο μία διήθηση F_{tj} για $J = 0, 1, ..., n-1$.

Ορισμός 7. *Για τις απλές διαδικασίες ορίζουμε το ολοκλήρωμα Ito ως*

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \tag{3.1}$$

δηλαδή πολλαπλασιάζουμε κάθε σκαλοπάτι της παρούσας χρονικής στιγμής με τη διαφορά των τιμών μιας κίνησης Brownτης επόμενης χρονικής στιγμή ως προς την παρούσα. Προφανώς το παραπάνω άθροισμα είναι άθροισμα πεπερασμένων όρων οπότε εξ ορισμού συγκλίνει. Πέρα απο την συγκλιση του ολοκληρώματος όμως μας ενδιαφέρει και η σύγκλιση των μέσων τιμών και της διασπορά του.

Στη περίπτωση της μέσης (αναμενόμενης) τιμής τα πράματα είναι πολύ απλά. Η μέση τιμή του ολοκληρώματος Ito είναι:

$$\mathbb{E}[I(f)] = \mathbb{E}[\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))]$$

Η αναμενόμενη τιμή είναι γραμμικός τελεστής οπότε μπαίνει μέσα στο άθροισμα και γίνεται

$$\mathbb{E}[I(f)] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_j (W(t_{j+1}) - W(t_j))]$$

θυμίζουμε ότι οι η_j και $W(t_{j+1})$,$W(t_j)$ είναι ανεξάρτητες οπότε η αναμενομενη μέση τιμή σπάει σε δύο κομμάτια:

$$\mathbb{E}[I(f)] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_j]\mathbb{E}[(W(t_{j+1}) - W(t_j))]$$

και αφού η μέση τιμή της κίνησης Brown είναι μηδέν:

$$\mathbb{E}[I(f)] = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_j]0 = 0 \tag{3.2}$$

3.1.2 Ισομετρία Ito

Θεώρημα 3. *Έστω $W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ μια διαδικασία Brown και X : $[0, \infty) \times \Omega$ μια στοχαστική διεργασία προασαρμοσμένη στην διήθηση της διαδικασίας Brown . Τότε ισχύει:*

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] = \mathbb{E}[|I(f)|^2]$$

Απόδειξη 1. *Αφού βρήκαμε τη μέση τιμή (3.2) μπορούμε να υπολογίσουμε τη διασπορά του Ito :*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[|\sum_{j=0}^{n-1} \eta_j W(t_{j+1}) - W(t_j)|^2]$$

Για να απλοποιήσουμε λίγο το συμβολισμό μας θέτουμε $\Delta_j W = W(t_{j+1}) - W(t_j)$ *και* $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$*, οπότε κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς στο παραπάνω άθροισμα καταλήγουμε (αριθμώντας με δείκτες* i *και* k *τους δύο παράγοντες:*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[|\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\eta_j\eta_k\Delta_j W\Delta_k W$$

το οποίο άθροισμα μπορούμε να χωρίσουμε σε δύο κομμάτια: σε ένα που οι δείκτες k *,* j *είναι κοινοί και στο υπόλοιπο όπου είναι διαφορετικοί δηλαδή:*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j^2\Delta_j^2 W + \sum_{k<x}\eta_j\eta_k\Delta_j W\Delta_k W] \tag{3.3}$$

όπως αναφέραμε προηγομένως, η_j *και* $\Delta_j W$ *είναι ανεξάρτητες, η μέση τιμή στην 3.3 δρα στα δύο κομμάτια ξεχωριστά:*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j^2\Delta_j^2 W] + \mathbb{E}[\sum_{k<x}\eta_j\eta_k\Delta_j W\Delta_k W]$$

εφόσον $\mathbb{E}[\sum_{k<x}\eta_j\eta_k\Delta_j W\Delta_k W] = 0$*, μας απομένει:*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[|\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j^2\Delta_j^2 W|]$$

λόγω γραμμικότητας:

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \mathbb{E}[\sum_{j=0}^{n-1}\eta_j^2\Delta_j^2 W] = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\eta_j^2]\mathbb{E}[\Delta_j^2 W]$$

αφού λοιπόν η διασπορά της κίνησης Brown είναι ίση με $\mathbb{E}[\Delta_j^2 W] = \Delta t_j$*, η διασπορά του ολοκληρωματος είναι:*

$$\mathbb{E}[|I(f)|^2] = \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}[\eta_j^2]\Delta t_j \tag{3.4}$$

το δεξί μέλος της 3.4 όμως ισοδυναμεί με το ολοκλήρωμα της $|f(t)|^2$ *δηλαδή:*

$$|f(t)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}h_j h_k 1_{[t_j,t_{j+1})}(t)1_{[t_k,t_{k+1})}(t) = \sum_{j=0}^{n-1}h_j^2 1_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

πολλαπλασιάζουμε με το άθροισμα των διαδοχικών χρονικών στιγμών που έχουμε κατασκευάσει δηλαδή τα Δt_j οπότε προκύπτει:

$$|f(t)|^2 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} h_j h_k 1_{[t_j,t_{j+1})}(t) 1_{[t_k,t_{k+1})}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} h_j^2 1_{[t_j,t_{j+1})}(t)[(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + ... + (t_{n+1} - tn)]$$

Ο κάθε όρος των διαδοχικών δείκτριων συναρτήσεων πολλαπλασιάζεται με μια χρονική διαφορά και για κάθε ζεύγος δεικτών $(j+1, j)$ επιβιώνει μόνο το αντίστοιχο χρονικό διάστημα (δηλαδή δεν έχουμε ζευγάρια όπως $1_{[t_1,t_0)}(t_2 - t_1)$ κ.ο.κ. Συνεπώς

$$|f(t)|^2 \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j = \sum_{j=0}^{n-1} |f(t)|^2 \Delta t_j = \int_0^\infty |f(t)|^2 dt$$

προφανώς αφού η διαδικασια $f(t)$ είναι σκαλοπάτι δεν χριάζεται να πάρουμε όριο $n \to \infty$ ώστε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της. Καταλήγουμε στο ότι

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] = \mathbb{E}[|I(f)|^2]$$

3.1.3 Ιδιότητες

Γραμμικότητα: Το ολοκλήρωμα Ito είναι ένας γραμμικός τελεστής δηλαδή:

$$I(aV + bU) = aI(V) + bI(U)$$

Μετρησιμότητα: Το ολοκλήρωμα Ito είναι προσαρμοσμένο στη διήθηση F_{tj}
Συνέχεια: Το ολοκλήρωμα Ito είναι συνεχής τελεστής.

3.2 Ολοκλήρωμα Ito για στοχαστικές διαδικασίες

3.2.1 Ορισμός

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το ολοκλήρωμα Ito μιας στοχαστικής διαδικασίας με μορφή βημάτων (ή σκαλοπατιών) είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Όπως το ολοκλήρωμα Riemann παίρνει μια συνάρτηση και δίνει έναν αριθμο στον $\mathbb{R}$ έτσι και το ολοκλήρωμα Ito παίρνει μια στοχαστική συνάρτηση (προς το παρών το έχουμε ορίσει για απλές συναρτήσεις, αλλά μπορούμε να επεκτείνουμε τον ορισμό και σε όλες τις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, όπως θα δείξουμε παρακάτω) και δίνει μια τυχαία μεταβλητή. Θα επεκτείνουμε τώρα το ολοκλήρωμα Ito σε οποιαδήποτε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στοχαστική διεργασία. Κατασκευάζουμε πρώτα το σύνολο S το οποίο περιέχει όλες τις απλές διαδικασίες δηλαδή:

$$S : \{u_s = \sum_{j=0}^{p_n} \eta_j 1_{[t_j, t_{j+1})}\}$$

όπου $p_n \in \mathbb{N}$, $\eta_j \in m - \mathcal{F}_{t_{j+1}}$ $\eta_j \in L^2$ Το σύνολο αυτό περιέχει όλες τις απλές στοχαστικές συναρτήσεις που μπορούμε να κατασκευάσουμε. Το S είναι πυκνό στο M_T^2 (οπου το M_T^2 είναι το σύνολο όλων των τετραγωνικών στοχαστικών συναρτήσεων που σταματάνε στον χρόνο T). Αυτό σημαίνει ότι

$$\forall u \in M_T^2, \exists (u_{s,n}) \in S : (u_{s,n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} u$$

δηλαδή κάθε, απλή, ακολουθία συναρτήσεων του συνόλου S συγκλινει σε μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση η οποία δεν είναι καταάνάγκη απλή. Με τη σύγκλιση εννοούμε ότι:

$$\mathbb{E}[\int_0^T |u_{s,n} - u|^2 dt] \to 0$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε ακολουθία $u_{s,n}$ που συγκλίνει στη u, το ολοκλήρωμα Itoθα συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή ξ η οποία θα είναι και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (δηλαδή στοιχείο του L^2) θα ισχύει δηλαδή:

$$\mathbb{E}[\int_0^T |u_{s,n} - \xi|^2 dt] \to 0$$

οπότε πλέον θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα της u να είναι ίσο με ξ δηλαδή:

$$I(u) := \xi$$

Καταρχάς, συμβολίζουμε τη νόρμα του ολοκληρώματος Ito μιας τετραγωνικά ολοκληρώσιμης στοχαστικής συνάρτησης ως

$$||I(u)||_{L^2} = \sqrt{\mathbb{E}[|I(u)|^2]}$$

Έστω μία ακολουθία συναρτήσεων από το σύνολο S. Θα δείξουμε ότι το Ito ολοκλήρωμα είναι μια Cauchy ακολουθία. Εφόσον το S είναι πυκνό στο M_T^2 αυτό σημαίνει οτι:

$$\forall \epsilon < 0, \exists N : ||u - u_n||_{M^2} < \frac{\epsilon}{2}$$

προφανώς από τον ορισμό της νόρμας ισχύει:

$$||u_m - u_n||_{M^2} \leq ||u - u_n||_{M^2} + ||u - u_n||_{M^2}$$

και αφού $||u - u_n||_{M^2} < \frac{\epsilon}{2}$ (προφανώς και για οποιαδήποτε άλλο δείκτη θα ισχύει) οπότε αντικαθιστώντας:

$$||u_m - u_n||_{M^2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

μόλις όμως δείξαμε προηγουμένως ότι η νόρμα του ολοκληρώματος Ito μιας συνάρτησης ισούται με τη νόρμα της συνάρτησης στον L^2 δηλαδή στην περίπτωση μας όπου η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει είναι η $||u_m - u_n||$, προκύπτει:

$$||I(u_m - u_n)||_{L^2} = ||u_m - u_n||_{M^2}$$

εφόσον το ολοκλήρωμα Ito είναι γραμμικός τελεστής:

$$||I(u_m - u_n)||_{L^2} = ||I(u_m) - I(u_n)||_{L^2} \rightarrow ||I(u_m) - I(u_n)||_{L^2} < \epsilon$$

οπότε μια ακολουθία ολοκληρωμάτων Ito είναι Cauchy στον L^2. Από την στιγμή που ο L^2 με την συνήθη νόρμα είναι χώρος Hilbert είναι πλήρης οπότε κάθε ακολουθία Cauchy έχει και ένα σημείο συσσώρευσης, δηλαδή

$$\lim_{n \to \infty} ||\xi - I(u_n)||_{L^2} = 0$$

και το ξ είναι το ολοκλήρωμα Ito μιας συνάρτησης που ανήκει στον L^2.

3.2.2 Ιδιότητες

Παραθέτουμε μερικές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων ωστε να είναι εύκολα προσπελάσιμες σε περαιτέρω αναφορα:

- Γραμμικότητα: Το ολοκλήρωμα Ito είναι ένας γραμμικός τελεστής δηλαδή: $I(aV + bU) = aI(V) + bI(U)$

- Μετρησιμότητα: Το ολοκλήρωμα Ito είναι προσαρμοσμένο στη δηιήθηση F_{tj}

- Συνέχεια: Το ολοκλήρωμα Ito είναι συνεχής τελεστής.

- Μεση τιμή: $\mathbb{E}[I(f)] = 0$.

- Διασπορά: $\mathbb{E}[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] = \mathbb{E}[|I(f)|^2]$

- Ιδιότητα Martingale : Το ολοκλήρωμα $\{I_t(f)\}_{t<T}$ είναι martingale στον L^2

Παράδειγμα 2. *Θα υπολογίσουμε το ολολήρωμα της κίνησης Brown δηλαδή την ποσότητα:*

$$I_t(W) = \int_0^t W(s)dW(s)$$

Όπως κάναμε και στην αρχή του κεφαλαίου όπου ορίσαμε το ολοκλήρωμα ως ένα άθροισμα πεπερασμένων όρων, το ίδιο θα κάνουμε και σε αυτή τη περίπτωση, δηλαδή θα θεωρήσουμε αντί της συνεχής κίνησης Brown , διακριτές, j το πλήθος τιμές, μεταξύ του διαστήματος $[0, T]$, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα και η επέκταση του στο συνεχές θα ακολουθεί ακριβώς την ίδια μεθοδολογία με την ενότητα ... οπότε θα το παραλείψουμε. Θεωρούμε λοιπόν αντί του $I_t(W)$, το

$$I_t^{\delta t}(W) = \sum_{t_j<t} W_{t_j}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \tag{3.5}$$

Αναπτύσσουμε το νιοστό κομμάτι της κίνησης Brown για τη χρονική στιγμή t ως εξής

$$W_{t_j} = \frac{1}{2}[(W_{t_{j+1}} + W_{t_j}) - (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \tag{3.6}$$

Αντικαθιστώντας την 3.6 στην 3.5 και κάνοντας τις πράξεις

$$I_t^{\delta t}(W) = \sum_{t_j<t} \frac{1}{2}[(W_{t_{j+1}} + W_{t_j}) - (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})](W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

$$I_t^{\delta t}(W) = \sum_{t_j<t} \frac{1}{2}(W_{t_{j+1}} + W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) - \frac{1}{2}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) \tag{3.7}$$

Προφανώς το αριστερό μέλος του αθροίσματος της 3.7 ισούται με:

$$\sum_{t_j<t} \frac{1}{2}(W_{t_{j+1}} + W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \frac{1}{2}\sum_{t_j<t} W_{t_{j+1}}^2 - W_{t_j}^2 \tag{3.8}$$

και παρατηρούμε ότι στο άθροισμα 3.8 έχουμε όρους όπως $W_{t_1}^2 - W_{t_0}^2 + W_{t_2}^2 - W_{t_1}^2 + ...W_{t_j}^2 - W_{t_{j-1}}^2$ *οπότε οι μόνοι όροι που επιβιώνουν από αυτό το άθροισμα είναι οι* $-\frac{1}{2}W_{t_0}^2 + \frac{1}{2}W_{t_j}^2$ *και αφού έχουμε θέσει ως αρχική συνθήκη στην κίνηση Brown το μηδέν, μας μένει από το πρώτο κομμάτι της 3.7 ο όρος* $\frac{1}{2}W_{t_j}^2$

Το δεύτερο κομμάτι του $I_t^{\delta t}(W)$ *ισούται με:*

$$\sum_{t_j<t} -\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) = \sum_{t_j<t} -\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2$$

Αθροίζουμε λοιπόν όλες τις τετραγωνισμένες απειροστές διαφορές της συνάρτησης σε όλο το διαμερισμένο διάστημα, και προφανώς θα μας προκύψει όλη η συνάρτηση τετραγωνισμένη δηλαδή

$$\sum_{t_j<t} -\frac{1}{2}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2 = -\frac{1}{2}W_t^2 = -\frac{1}{2}t$$

όπως δείξαμε προηγουμένως. Καταλήξαμε λοιπόν οτι:

$$I_t(W) = \frac{1}{2}W_{t_j}^2 - \frac{1}{2}t$$

Η σημαντική διαφορά αυτού του αποτελεσμάτος από το σύνηθες ολοκλήρωμα Riemann (αν δηλαδή στη θέση της συνάρτησης Brown είχαμε μια ντετερμινιστική διαδικασία) είναι ό όρος t

Στη συγκεκριμένη περίπτωση εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι ολοκληρώνουμε μια κίνηση Brown με μέτρο ολοκλήρωσης την ίδια την κίνηση, και χρησιμοποιήσαμε ¨τεχνασματα' ωστε να φέρουμε το ολοκλήρωμα σε μια απλούστερη από άποψη υπολογισμών, μορφή. Προφανώς αυτό δεν είναι εύκολο ή και εφικτό σε όλες τις περιπτώσεις, γιαυτό κρίνεται απαραίτητο να έχουμε ένα κανόνα ολοκλήρωσης (ή ισοδύναμα διαφορισμού) των εν προκειμένω στοχαστικών συναρτήσεων που θα μας επιτρέπει ευκολότερα να υπολογίζουμε ολοκληρώματα και να λύνουμε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (όπως θα δούμε παρακάτω). Ο κανόνας διαφόρισης ονομάζεται Λήμμα (ή φόρμουλα) Ito .

3.3 Λήμμα Ito

Έστω μια στοχαστική συνάρτηση $F(t, W(t))$που είναι συνεχής, η οποία έχει σαν όρισμα τον χρόνο και μια κίνηση Brown . Στη περίπτωση μας οι πρώτη και η δεύτερη παράγωγος ως προς την $W(t)$ είναι φραγμένες από κάποιο $C > 0$. Θέλουμε να βγάλουμε ένα κανόνα ολικού διαφορικού αυτού του τύπου των συναρτήσεων [1], και για να το πετύχουμε αυτό θα ξεικινήσουμε από την αντιστοιχία με το θεμελιώδες θεωρημα του διαφορικού λογισμού δηλαδή, αν το διαφορικό της $F(t,W(t))$ το ονομάσουμε $dF(t,W(t))$, τότε θέλουμε να ισχύει:

$$\int_0^T dF(t,W(t)) = F(T,W(T)) - F(0,W(0))$$

Για ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $\Delta W_j = W(t_{j+1}) - W(t_j)$ και $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ όπως και στην αρχή. Η διαφορά της $F(t,W(t))$ μεταξύ των τελικών και αρχικών τιμών, δηλαδή $t = T, W(T)$ και $t = 0, W(0)$ είναι προφανώς

$$F(T,W(T)) - F(0,W(0))$$

Την οποία και συμβολίζουμε με F_{f-i}. Μπορούμε να γράψουμε αυτή τη διαφορά ως εξής: Διαμερίζουμε το διάστημα $[0,T]$ σε n κομμάτια και προσθαφαιρούμε τις ενδιάμεσες διαφορές δηλαδή τα $F(t_1,W(t_1) - F(t_1,W(t_1)) + F(t_2,W(t_2)) - F(t_2,W(t_2)) + ... + F(t_j,W(t_j)) - F(t_j,W(t_j)))$ οπότε προκύπτει το άθροισμα

$$F_{f-i} = F(T,W(T)) - F(0,W(0)) = \sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j+1, W(t_j+1)) - F(t_j, W(t_j)$$

προσθαφαιρούμε στη παραπάνω σχέση το $\sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j, W(t_j+1))$, οπότε η σχέση γίνεται:

$$F_{f-i} = \sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j+1, W(t_j+1)) - F(t_j, W(t_j)) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j, W(t_j+1)) - \sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j, W(t_j+1))$$

αναδιατάσσουμε το άθροισμα ως εξής:

$$F_{f-i} = \sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j+1, W(t_j+1)) - F(t_j, W(t_j+1)) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{j=n-1} F(t_j, W(t_j+1)) - F(t_j, W(t_j))$$

από το θεώρημα Taylor , μεταξύ του διαστήματος $[t_j, t_{j+1}]$ υπάρχει $\widetilde{t_j}$ τέτοιο ώστε:

$$F(t_{j+1}, W(t_j)) = F(t_j, W(t_j)) + F_t'(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j + \mathcal{O}(\Delta t_j^2)$$

οπου με $\mathcal{O}(\Delta t_j^2)$ συμβολίζουμε τους όρους που περιέχουν χρονικό διαφορικό με εκθέτη μεγαλύτερο του 1 (στη συγκεκριμένη περίπτωση ο επόμενος όρος θα είχε τετράγωνο). Η παραπάνω έκφραση αγνοώντας αυοτύς τους όρους, γίνεται:

$$F'_W(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j = F(t_{j+1}, W(t_j)) - F(t_j, W(t_j))$$

Αντίστοιχα από Taylor , μεταξύ του διαστήματος $[t_j, t_{j+1}]$ υπάρχει $\widetilde{W(t_j)}$ τέτοιο ώστε:

$$F(t_j, W(t_{j+1})) = F(t_j, W(t_j)) + F'_W(t_j, W(t_j))\Delta W_j + \frac{1}{2}F''_{WW}(t_j, \widetilde{W(t_j)})\Delta W_j{}^2 + \mathcal{O}(\Delta W_j^3)$$

θυμίζουμε ότι $\Delta W_j{}^2 = \Delta t_j$ οπότε είναι όρος με χρονικό διαφορικό με εκθέτη 1, άρα πρέπει να τον κρατήσουμε, και θα απορρίψουμε όρους με εκθέτη στο ΔW_j μεγαλύτερο από το 2. Οπότε η παραπάνω σχέση θα γίνει:

$$F(t_j, W(t_{j+1})) - F(t_j, W(t_j)) = F'_W(t_j, W(t_j))\Delta W_j + \frac{1}{2}F''_{WW}(t_j, \widetilde{W(t_j)})\Delta W_j{}^2$$

οπότε μπορούμε πλέον να αντικαταστήσουμε αυτές τις δύο εκφράσεις στην κεντρική εξίσωση και να προκύψει:

$$F_{f-i} = \sum_{j=0}^{j=n-1} F'_W(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{j=n-1} F'_W(t_j, W(t_j))\Delta W_j + \frac{1}{2}F''_{WW}(t_j, \widetilde{W}(t_j))\Delta W_j{}^2$$

Στην παραπάνω έκφραση προσθαφαιρούμε τους όρους $F''_{WW}(t_j, W(t_j))\Delta W_j{}^2$ και $F''_{WW}(t_j, W(t_j))\Delta t_j$ ωστε να προκύψει:

$$F_{f-i} = \sum_{j=0}^{j=n-1} F'_W(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n-1} F''_{WW}(t_j, W(t_j))\Delta t_j + \sum_{j=0}^{j=n-1} F'_W(t_j, W(t_j))\Delta W_j +$$

$$\frac{1}{2}F''_{WW}(t_j, W(t_j))(\Delta W_j{}^2 - \Delta t_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n-1}[F''_{WW}(t_j, \widetilde{W}(t_j)) - F''_{WW}(t_j, W(t_j))]\Delta W_j{}^2$$

Θα υπολογίσουμε το κάθε αθροίσμα ξεχωριστά

- $\sum_{j=0}^{j=n-1} F'_t(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j$

  Η $F'_t(t,W)$ είναι συνεχής εκ κατασκευής και η $W(t)$ είναι σχεδόν σίγουρα συνεχής (δηλαδή υπάρχει το ενδεχόμενο να μην είναι συνεχής, αλλά έχει πιθανότητα 0,συμβολίζεται με $a.s$). Συγκεκριμένα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

  $$W(t) \leq M \forall t \in [0,T]$$

  Η $F'_t(t,W)$ λοιπόν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,T] \times [-M,M]$ και η $W(t)$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,T]]$ οπότε

  $$\lim_{n\to\infty}(sup_i[F'_t(\widetilde{t_j}, W(t)) - F'_t(t, W(t)))]$$

  οπότε στο όριο που το n τείνει στο άπειρο προκύπτει

  $$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{j=n-1} F'_t(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j = \int_0^T F'_t(t, W(t))dt$$

  ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann δηλαδή.

- $\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n-1} F''_{WW}(t_j, W(t_j))\Delta t_j$

  Χρησιμοποιώντας και εδώ τα παραπάνω επιχειρήματα συνέχειας που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο βήμα για τις $F''_{WW}(t,W)$ και $W(t)$, το παραπάνω άθροισμα είναι ολοκλήρωμα Riemann στο όριο:

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{j=n-1} F''_{WW}(\widetilde{t_j}, W(t))\Delta t_j = \int_0^T F''_{WW}dt$$

- $lim_{n\to\infty}(sup_i[F''_{WW}(t_j, \widetilde{W(t_j)}) - F''_{WW}(t_j, W(t_j))])$ Για τους ίδιους λόγους με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε επιχειρήματα συνέχειας για να δείξουμε ότι

  $$\lim_{n\to\infty} sup_i[F''_{WW}(t_j, \widetilde{W(t_j)}) - F''_{WW}(t_j, W(t_j))] = 0$$

  οπότε ο όρος μηδενίζεται

- $\sum_{j=0}^{j=n-1} F'_W(t_j, W(t_j))\Delta W_j$ Απαιτήσαμε η $F'_W(t, W(t))$ να έχει ένα φραγμό $C > 0$, οπότε ανήκει στο σύνολο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων Martingales M_T^2. Η ακολουθία

  $$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} F'_W(t_j, W(t_j))1_{[t_i,t_{i+1})}$$

προσεγγίζει την $F'_W(t, W(t))$ δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} |f_n - F'_W(t, W(t))|^2$$

εφόσον $|f_n - F'_W(t, W(t))|^2 \leq C^2 + C^2 \leq 2C^2$ (τριγωνική ανισότητα) και αν ολοκληρώσουμε δεξιά αριστερά από 0 εως T $int_0^T |f_n - F'_W(t, W(t))|^2 \leq 2TC^2$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεωρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue και να πούμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |f_n - F'_W(t, W(t))|^2 = 0, a.s.$$

και όπως δείξαμε προηγουμένως από την ισομετρία Ito

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\int_0^T |f_n - F'_W(t, W(t))|^2 \Delta W) = 0.$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} F''_{WW}(t_j, W(t_j))({\Delta W_j}^2 - \Delta t_j)$ εφόσον απαιτήσαμε η η $|F''_{WW}| < C$ τότε το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F''_{WW}(t_j, W(t_j))({\Delta W_j}^2 - \Delta t_j) = 0$$

  στον L^2. Οπότε και αυτός ο όρος μηδενίζεται

Συγκεντρώνοντας όλους τους υπολογισμούς από τις παραπάνω βούλες, μπορούμε πλέον να γράψουμε το λήμμα Ito στην ολοκληρωτική του μορφή

$$\begin{aligned} F(T, W(T)) - F(0, W(0)) = \int_0^T [F'_t(t, W(t)) + \\ + \frac{1}{2} F''_{WW}(t, W(t))]dt + \int_0^T F'_W(t, W(t)) dW(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

καθώς και στη διαφορική του μορφή

$$dF(T, W(T)) = [F'_t(t, W(t)) + \frac{1}{2} F''_{WW}(t, W(t))]dt + F'_W(t, W(t)) dW(t)$$

4. Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Θα περιγράψουμε με συντομία τη βασική θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων [3] με σκοπό στη συνέχεια να κατασκευάσουμε αλγόριθμο αριθμητικής επίλυσης, ωστε να υπολογίσουμε τιμές συμβολαίων options .

Ορισμός 8. *Έστω $B(t)$ κίνηση Brown . Αν η $X(t)$ είναι μια στοχαστική συνάρτηση, τέτοια ώστε, για κάθε t η ποσότητα:*

$$X(t+\delta t) - X(t) - \delta t \mu(t, X(t)) - \sigma(t, B(t))[B(t+\delta t) - B(t)]$$

να είναι στοχαστική μεταβλητή με μέσο και διασπορά τάξης $o(\delta t)$ τότε η:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(s, X(t))dBt$$

είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση για την $X(t)$

Παρακάτω ακολουθεί επίλυση μιας πολύ χαρακτηριστικής διαφορικής

Παράδειγμα 3. *Εστω η διαφορική*

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{4.1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(t,x) = e^{at}x$ και μέσω αυτής κατασκευάζουμε τη διαδικασία:

$$y(T) = f(t, X(t))$$

Θέτουμε ως αρχική συνθήκη $X(0) = x_0$ και από τη φόρμουλα Ito πολλαπλών μεταβλητών (βλέπε Παράρτημα) η σχέση 4.1 γίνεται:

$$dY(t) = dF(t, X(t))$$

$$= (F_t'(t, X(t)) - \alpha X(t)F_x'(t, X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx}''(t, X(t))dt + \sigma F_x'(t, X(t))dW(t)$$

$$= (\alpha e^{at}X(t) - \alpha e^{at}X(t))dt + \sigma e^{at}dW(t) = \sigma e^{at}dW(t)$$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν τη $dY(t)$ προκύπτει

$$Y(t) = x_0 + \sigma \int_0^t e^{as} sW(s)$$

οπότε

$$X(t) = e^{-\alpha t} Y(t) = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{as} dW(s)$$

4.1 Μοντέλο Black-Scholes

Μια πολύ χαρακτηριστική εξίσωση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα χρηματοοικονομικά είναι η εξίσωση Black-Scholes [4] η οποία έχει τη μορφή

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Η εξαγαγωγή της είναι σχετικά απλή: Πρώτον θεωρούμε ότι η τιμή $S(t)$ του υποκείμενου τίτλου πάνω στο οποίο θέλουμε να δημιουργήσουμε το option ακολουθεί μια κίνηση Brown ($dW(t)$) δηλαδή:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Η απολαβή ($V(S,t)$) ενός option στην χρονική στιγμή ωρίμανσης (T) είναι γνωστή (άλλωστε αυτό είναι που αγοράζουμε).

Ορισμός 9. *Η αξία, για κάθε χρονική στιγμή t, ενός option ωρίμανσης T πάνω σε έναν υποκείμενο τίτλο S_T ισούται με*

$$P(t) = \mathbb{E}[\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

όπου $\Phi(S_T)$ η συνάσρτηση απολαβής και η διήθηση $\mathcal{F}_t$ παράγεται από το σύνολο των $\{S(u) : u \leq t\}$ [2]

Σε μία αγορά όπου απουσιάζει το arbitrage αξία ενός option ισούται με την αναμενόμενη τιμή της συνάρτησης απολαβής ως προς το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο (risk-neutral) δηλαδή:

$$P(t) = \mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)].$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε και την αξία του σε προγούμενες χρονικές στιγμές. Υπολογίζοντας το ολικό διαφορικό της συνάρτησης απολαβής από το λήμμα Ito πολλαπλών στοχαστικών μεταβλητών, έχουμε

$$dV = (\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{\partial V}{\partial t})dt + \sigma\frac{\partial V}{\partial S}dW$$

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο έχουμε αγοράσει ένα option πάνω σε ένα τίτλο και πουλάμε ένα ποσό Δ του υποκείμενου τίτλου (το Δ μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, στη περίπτωση που είναι αρνητικό ουσιαστικά σημαίνει ότι αγοράζουμε). Αυτό το κάνουμε με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε το ρίσκο ενός χαρτοφυλακίου, επι παραδείγματι αν έχουμε αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης ενός τίτλου (πχ μετοχής), θέλουμε επίσης να αγοράσουμε και απευθείας μετοχές για να είμαστε πιο ασφαλείς (περίπου σαν να στοιχιματίζουμε και στις δύο ομάδες στον τελικό του κυπέλλου).Αυτό που ψάχνουμε είναι να βρούμε πόσο είναι αυτό το Δ ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει μηδενικό ρίσκο Η συνολική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$\Pi(t) = V - \Delta S$$

αφού περάσει χρόνος δt και θεωρήσουμε ότι μεταξύ δύο χρονικών στιγμών το Δ μένει σταθερό (στη βιβλιογραφία ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο αναφέρεται ώς delta neutral) τότε η αξία του χαρτοφυλακίου αλλάζει ως εξής:

$$d\Pi(t) = dV - \Delta dS$$

και αν σε αυτή την έκφραση αντικαταστήσουμε τις σχέσεις που πολογίσαμε πιο πάνω για το ΔS και dV, η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου θα είναι:

$$d\Pi(t) = (\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S)dt + \sigma S(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta)dW$$

στη παραπάνω σχέση μπορούμε να επιλέξουμες το Δ με τέτοιο τρόπο ώστε να μηδενίσουμε τη παρένθεση που πολλαπλασιάζει το dW και έτσι να εξαλείψουμε όλη τη στοχαστικότητα του $d\Pi(t)$ (οπότε θα εξαλείψουμε και το ρίσκο). Διαλέγοντας $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, προκύπτει:

$$d\Pi(t) = (\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t})dt$$

Τώρα θα εισάγουμε μια πολύ σημαντική παραδοχή που κάνουμε για την λειτουργία των χρηματαγορών και των οικονομιών γενικότερα: Έλλειψη arbitrage . Αυτό σημαίνει ότι κανένας επενδυτής δεν μπορεί βγάλει περισσότερο κέρδος από μια επένδυση σε σχέση με ένα βέβαιο τίτλο (όπου βέβαιο τίτλο εννοούμε μια τραπεζική κατάθεση ή ένα ομόλογο δημοσίο π.χ. αμερικάνικα ομόλογα). Ο λόγος για τον οποίο κάνουμε αυτή την παραδοχή είναι ότι σε περίπτωση που το κέρδος από μια επένδυση (η οποία δεν έχει ρίσκο) ήταν μεγαλύτερη από το κέρδος ενός βέβαιου τίτλου (δηλαδή το επιτόκιο μιας κατάθεσης ή απόδοση ενός ομολόγου), τότε ο επενδυτής απλά θα επένδυε το κέρδος του βέβαιου τίτλου στο χαρτοφυλάκιο, και το κέρδος αυτό θα ξαναεπενεύόταν διαδοχικά δημιουργώντας έτσι ένα φαύλο κύκλο που θα απείριζαν τα πλούτη ενός επενδυτή και κατα συνέπεια όλων των άλλων επενδυτών εφόσον θα αντέγραφαν την στρατηγική του. Θα δημιουργούσαμε με αυτόν τον τρόπολεφτά από το πουθενά και η οικονομνία θα κατέρεε. Πρέπει λοιπόν να εξισώσουμε τη μεταβολή της αξίας του σίγουρου χαρτο φυλακίου με τη μεταβολή της αξίας ενός βέβαιου τίτλου:

$$r\Pi dt = (\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t})dt$$

όπου r:η απόδοση του βέβαιου τίτλου και Π το ποσό που έχουμε επενδύσει στον βέβαιο τίτλο (εφόσον όπως περιγράψαμε πρέπει $r\Pi dt = d\Pi$. Το Π ισούται με $\Pi = V - \Delta S$ και αντικαθιστώντας και το Δ από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Σημαντικό επίσης να ανφέρουμε είναι το γεγονός ότι έχουμε θεωρήσει απουσία προμηθειών, δηλαδή κόστους για την πραγματοποίηση μιας συναλλαγής. Στη περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού option , στα οποία η εξάσκηση του συμβολαίου επιτρέπεται μόνο στη λήξη του, η εξίσωση έχει αναλύτική λύση. Τα συμβόλαια τα οποία μπορούν να εξασκηθούν οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν τη λήξη τους ονομάζονται Αμερικάνικα option . Σημειωτέον, δεν το τι είδους συμβόλαιο έχουμε κάθε φορά δεν εξαρτάται από τη γεωγραφική θέση αλλά από τον τίλτο τον οποίο ανταλάσουμε (πχ σε κάποιους τίτλους έχουμε μόνο συμβόλαια Ευρωπαϊκού τύπου). Θα δούμε αναλυτικά τη λύση ενός δικαιώματος αγοράς και αντίστοιχα προκύπτει και η λύση για δικαίωμα πώλησης. Για απλοποίηση, θα συμβολίσουμε την αξία του συμβολαίου αγοράς με $c(S,t)$ Για να λύσουμε την εξίσωση Black-Scholes (οπως και κάθε άλλη διαφορική) πρέπει να θέσουμε συνοριακές συνθήκες για τις εκάστοτε μεταβλητές, διαφορετικά βρίσκουμε μια απειρία λύσεων. Εφόσον έχουμε παράγωγο πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο χρειαζόμαστε μόνο μία αρχική συνθήκη, και χρειαζόμαστε δύο συνοριακές συνθήκες για το S, εφόσον έχουμε παράγωγο δεύτερης τάξης ως προς αυτό. Στη χρονική στιγμή T η αξία του συμβολαίου θα είναι α)σε περίπτωση όπου $S > E$ η διαφορά της τιμής της μετοχής ως προς την τιμή εξάσκησης (strike price) του συμβολαίου E, β)σε περίπτωση όπου $S < E$ η αξάι του συμβολαίου θα είναι 0 (κανένας ορθολογικός επενδυτής δεν θα πληρώσει premium αγοράσει κάτι που μπορεί να το βρεί φθηνότερα) Μαθηματικά αυτό γράφεται ως εξής:

$$c(S,T) = max\{S - E, 0\}$$

Τα σύνορα ως προς τη τιμή του τίτλου είναι δύο: α)Η τιμή της μετοχής να γίνει 0 και β) η τιμή της μετοχής να γίνει άπειρη. α) Στην περίπτωση όπου $S = 0$ ότι συμβόλαιο αγοράς και να έχουμε είναι άχρηστο εφόσον μπορούμε να πάρουμε δωρεάν όσες μετοχές θέλουμε, αρα η αξία ενός συμβολαίου αγοράς σε αυτή την περίπτωση είναι 0 για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

$$c(0,t) = 0$$

β) όσο η τιμή μιας μετοχής ανεβαίνει , τόσο πιο πολύτιμο θα είναι ένα δικαίωμα αγοράς σε μια συγκεκριμένη τιμή οπότε η συνοριακή είναι

$$c(S,t) \approx S - Ee^{-r(T-t)}$$

Η λύση της εξίσωσης είναι:

$$c(S,T) = S\int_{\infty}^{\frac{ln(S/E)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds - Ee^{-r(T-t)}\int_{\infty}^{\frac{ln(S/E)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

Αντίστοιχα αν συμβολίσουμε με $p(S,t)$ το Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης, η λύση της Black-Scholes είναι:

$$p(S,T) = Ee^{-r(T-t)}\int_{\infty}^{\frac{-ln(S/E)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds - S\int_{\infty}^{\frac{-ln(S/E)-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds$$

Αν συμβολίσουμε την αθροιστική συνάρτηση της κανονικής κατανομής ως $N(d)$ έχουμε:

$$c(S,T) = SN(d_1) - Ee^{r(T-t)}N(d_2) \tag{4.2}$$

και

$$p(S,T) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{4.3}$$

όπου

$$d_1 = \frac{-ln(S/E) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.4}$$
$$d_2 = \frac{-ln(S/E) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

4.1.1 Greeks (Ελληνικά Γράμματα)

Οι μεταβολές τις αξίας των παραγώγων συμβολαίων (όπως εμφανίζονται στη εξίσωση Black-Scholes) συμβολίζονται με ελληνικά γράμματα (Γ,Δ γνωστά και ως greeks) Το Δ εκφράζει την μεταβολή της αξίας του παραγώγου $(V(t,S))$ με την μεταβολή της τιμής της μετοχής (την ίδια χρονική στιγμή) δηλαδή:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

εφόσον έχουμε την αναλυτική λύση της Black-Scholes βρίσκουμε πως:

$$\Delta_C(t,S) = N(d_1)$$

$$\Delta_P(t,S) = N(d_1) - 1$$

Η ερμηνεία του Δ είναι ουσιαστικά ο αριθμός των μονάδων της μετοχής που πρέπει να έχει στην κατοχή του όποιος έχει γράψει (έχει πουλήσει) ένα παράγωγο συμβόλαιο έτσι ώστε η συνολική του θέση να μη έχει κίνδυνο.

Το Γ μας δίνει την μεταβολή του Δ ως προς την μεταβολή της τιμής της μετοχής (την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει) δηλαδή:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Μικρές τιμές του Γ σημαίνει ότι το Δ θα μεταβληθεί λίγο αν μεταβληθεί το Σ ενώ μεγάλες τιμές του Γ σημαίνει το αντίθετο. Οι σχέσεις για τα put και call είναι:

$$\Gamma_C = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\Gamma_P = \Gamma_C$$

όπου

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{d_1^2}{2}}$$

Το μοντέλο Black-Scholes για τα Ευρωπαϊκά options προσφέρει μια πολύ καλή ευκαιρία να δοκιμάσουμε την αξιοπιστία των αριθμητικών επιλύσεων, δεδομένου ότι οι πλειοψηφία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων δεν έχει αναλυτική λύση

4.2 Μέθοδος Euler-Maruyama

Πολλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (όπως και ντετερμινιστικές αντίστοιχα) δεν έχουν αναλυτική λύση και δεδομένου ότι τα ρεαλιστικότερα μοντέλα περιγράφονται από τέτοιου είδους διαφορικές, γίνεται γρήγορα αντιληπτή η ανάγκη επίλυσης τους, έστω και με κάποιο σφάλμα. Στις ντετερμινιστικές διαφορικές, έχουμε πολλές μεθόδους, η πιο διαδεδομένη από τις οποίες είναι η

Runge-Kutta. Στις στοχαστικές όμως, πρέπει να προσθέσουμε ακόμα ένα βήμα, αυτό τις προσομοίωσης πολλών τροχιών, από της στιγμή που θέλουμε να υπολογίσουμε μέσους όρους. Η προσομοίωση πολλών τροχιών μπορεί να γίνει εύκολα με μια μέθοδο Monte-Carlo

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να κατασκευάσουμε αλγορίθμους που να επιλύουν αριθμητικά τέτοιες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Η αριθμητική μέθοδος την οποία θα χρησιμοποιήσουμε είναι η Euler-Maruyama . Θα αναφέρουμε συνοπτικά το πως λειτουργεί: Έχουμε μια διαφορική της μορφής:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(s, X_t)dB_t$$

ορισμένη σε ένα χρονικό διάστημα $t \in [0, T]$ Το χρονικό αυτό διάστημα το χωρίζουμε σε N κομμάτια, το καθένα μήκους $\Delta t = T/N$. Έτσι η συνάρτηση μας γίνεται μια διακριτή χρονοσειρά με δείκτη i. Η αρχική τιμή της χρονοσειράς $X_{i=0} = X_0$ ορίζεται από εμάς, και οι υπόλοιπες ορίζονται επαναληπτικά με τον εξής αλγόριθμο:

$$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i) * X_i * dt + \sigma(t_i, X_i) * X_i * dB_i$$

όπου το διαφορικό της κίνησης Brown είναι μια τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται κανονικά (σε εμάς έχει μέση τιμή τη μέση τιμή του $X(t)$ και διασπορά τη τετραγωνική ρίζα του εκάστοτε χρονικού διαστήματος στο οποίο βρισκόμαστε)

4.2.1 Αλγόριθμος Euler-Maruyama

Ο αλγόριθμος που κατασκευάσαμε με βάση την Euler-Maruyama [5] για την επίλυση της εξίσωσης Black-Scholes σε γλώσσα Python είναι ο εξής:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt


# Number of simulations
num_sims = 1000
# Number of points in partition
N = 7
# Initial value
X_0 = 15
Y_0 = X_0
K=12 #This is the strike price of the call option
# Starting time
t_0 = 0
```

```
# Ending time
T = 1
#Risk premium rate
r=0.05
# SDE for GBM: dX_t = r_0*X_t dt + sigma_0*X_t dB_t
r_0 = 0 #This is the drift of the Brownian motion
sigma_0 = 2 #This is the variance of the Brownian   Motion
# Time increments
dt = float(T - t_0) / N
# Times
t = np.arange(t_0, T, dt)
# Brownian increments
dB = np.zeros(N)
dB[0] = 0
# Brownian samples
B = np.zeros(N)
B[0] = 0
# Simulated process
X    = np.zeros(N)
X[0] = 1
# Approximated process
Y    = np.zeros(N)
Y[0] = Y_0
# Sample means across all simulations
SX = np.zeros(N)
SY = np.zeros(N)
#A=[[0 for i in range (num_sims)]for j in range (1, t.size)]
y=[0 for i in range (num_sims)]
a=[0 for i in range (num_sims)]
m=[0 for i in range (num_sims)]
# Iterate
for n in range(num_sims):
    for i in range(1, t.size):
        # Generate dB_t
        dB[i] = np.random.normal(loc = 0.0, scale = np.sqrt(dt))

        # Generate B_t
        B[i] = np.random.normal(loc = 0.0, scale = np.sqrt(t[i]) )

        # Simulate (blue)
        #X[i] = X_0 * np.exp( (r_0 - 0.5 * sigma_0*sigma_0)*(i * dt)
```

```
            +(float(sigma_0) * B[i] ))
            #SX[i] = SX[i] + X[i]/num_sims

            # Approximate (green)
            Y[i] = Y[i-1] + (r_0 * Y[i-1]) * dt
            + (sigma_0 * Y[i-1]) * dB[i]
            SY[i] = SY[i] + Y[i]/num_sims
        y[n]=Y[T]
# Plot
#print(y)
for n in range(num_sims):
    a[n]=y[n]-K
    m[n]=max(a[n],0)
#print(a)
#print(m)
avg=np.average(m)
power=(r)*T
#print(mean)
value=np.exp(power)*avg #This is the value of the call option at time
print(value)
print(num_sims)
```

4.3 Εφαρμογή σε τιμολόγηση option

Εκτός από τη μέθοδο Euler-Maruyama υπάρχουν και άλλες μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να λύνουμε αριθμητικά στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις όπως π.χ. η μέθοδος Milstein . Η ακρίβεια των υπολογισμών, πέρα απο τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο, εξαρτάται από το πόσες διαμερίσεις πραγματοποιούμε στο χρονικό διάστημα και πόσες προσομοιώσεις εκτελούμε. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου για κάποιες ενδεικτικές τιμές και θα μελετήσουμε τι συμβαίνει, πάντα συγκρίνοντας με την αναλυτική λύση

Παράδειγμα 4. *Έστω μετοχή $X(t)$ η οποία ακολουθεί κίνηση Brown με μέση τιμή 15\$ και διασπορά 1. Ξεκινάμε τη χρονική στιγμή 0 και θέλουμε να δούμε την αξία ενός option αγοράς με ονομαστική αξία 12\$ και λήξη σε ένα έτος. Αφήνοντας τον αλγόριθμο να τρέξει το αποτέλεσμα (η αξία του συμβολαίου) προκύπτει περίπου 6.3\$*

Τώρα θα υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή του συμβολαίου. Οι συντελεστές d_1 και d_2 από την σχέση 4.4, αντικαθιστώντας $E = 15$,$S = 12$,$r = 0.05$,$t =$

0,$T = 1$,$\sigma = 2$,*προκύπτει:*

$$d_1 = \frac{-ln(\frac{15}{12} - (0.05 + 2}{2} = -1.13655$$

$$d_2 = d_1 + 2 = 0.86345$$

$$N(d_1) = 0.7151$$

$$N(d_2) = 0.333$$

$$C = 15 * 0.7151 - 12 \exp^{0.05} 0.333 = 10.7265 - 4.2 = 6.52$$

Συνεπώς η αξία του συμβολαίου όπως προκύπτει από την αναλυτική λύση είναι 6.52\$

5. Παράρτημα

Λήμμα Ito πολλαπλών στοχαστικών μεταβλητών

$$df(X) = \sum_{i=1}^{m} f_i(X)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} f_{ik}(X)dX_i dX_k$$

κανόνας πολλαπλασιασμού

$\times$	dW_i	dt
dW_k	$\rho_{ik}dt$	0
dt	0	0

Ορισμός 10. *Δικαίωμα αγοράς (call option) είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κομιστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει από τον εκδότη ένα υποκείμενο χρεόγραφο σε μία συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης (strike price), μέχρι την ημερομηνία λήξης του, με αντάλλαγμα μία αμοιβή (premium).*

Ορισμός 11. *Δικαίωμα πώλησης (put option) είναι ένα συμβόλαιο που δίνει στον κομιστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να πουλήσει στον εκδότη ένα υποκείμενο χρεόγραφο σε μία συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης (strike price), μέχρι την ημερομηνία λήξης του, με αντάλλαγμα μία αμοιβή (premium).*

Bibliography

[1] "Stochastic calculus: An introduction with applications", Lawler, Gregory F *American Mathematical Society*,2010

[2] "An elementary introduction to mathematical finance", Ross, Sheldon M *Cambridge University Press*,2011

[3] "Basic stochastic processes: a course through exercises", Brzezniak, Zdzislaw and Zastawniak, Tomasz *Springer Science & Business Media*,2000

[4] "Stochastic differential equations", Oksendal, Bernt *Springer*,2003

[5] "An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations", Higham, Desmond J *SIAM review*,2001